
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ



Προβλήματα δίκαιης κατανομής μη διαίρεσιμων αγαθών

Μεταπτυχιακό πρόγραμμα ΕΤΥ
ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Σταύρος Δ. Ιωαννίδης

Επιβλέπων Καθηγητής: Ιωάννης Καραγιάννης

Πάτρα, Μάρτιος 2020

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

Προβλήματα δίκαιης κατανομής μη διαιρέσιμων αγαθών

Μεταπτυχιακό πρόγραμμα ΕΤΥ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Σταύρος Δ. Ιωαννίδης

Τριμελής επιτροπή:

Ιωάννης Καραγιάννης (Επιβλέπων)

Καθηγητής, Πανεπιστήμιο Πατρών

Σταύρος Κοσμαδάκης

Καθηγητής, Πανεπιστήμιο Πατρών

Σωτήριος Νικολετσέας

Καθηγητής, Πανεπιστήμιο Πατρών

*Αφιερωμένο στους αγαπητούς μου γονείς
Δέσποινα και Δημήτρη*

Περίληψη διπλωματικής εργασίας

Εισαγωγή

Έχει παρατηρηθεί, τουλάχιστον τα τελευταία 20 χρόνια πως η επιστήμη των υπολογιστών έχει διεισδύσει σε αρκετούς επιστημονικούς κλάδους. Αρκεί μόνο να ρίξουμε μια ματιά στα προγράμματα σπουδών των τμημάτων πληροφορικής για να καταλάβουμε πως η επιστήμη των υπολογιστών δεν αφορά μόνο τον υπολογιστή πλέον αλλά και τα οικονομικά, τη διοίκηση επιχειρήσεων τα μαθηματικά και άλλους κλάδους. Τι ευθύνεται για αυτήν την επιρροή των υπολογιστών στις άλλες επιστήμες?

Αναμφίβολα η γέννηση ενός καινούργιου επιστημονικού κλάδου στο μεταίχμιο των μαθηματικών όπως είναι η επιστήμη της πληροφορικής, δημιουργεί ένα ντόμινο καινούργιων ιδεών και προβλημάτων μέχρις ότου συναντήσουμε τα πραγματικά δύσκολα προβλήματα του κλάδου ή αλλιώς τα όριά του. Στην επιστήμη της πληροφορικής έχουμε συναντήσει αυτά τα όρια που βρίσκονται στην λύση του προβλήματος $P = NP$ του οποίου η λύση ακόμα προβληματίζει τους καλύτερους επιστήμονες του κλάδου. Συνεπώς αφού έχουμε ήδη εντοπίσει τα κύρια προβλήματα του κλάδου γιατί ακόμα ασχολούμαστε με την πληροφορική? Η απάντηση βρίσκεται στην ανακάλυψη του Internet. Ο παγκόσμιος ιστός δεν θεωρείται μόνο ένα ορόσημο της επιστήμης των υπολογιστών αλλά θεωρείται από πολλούς επιστήμονες ως μια πραγματική επανάσταση.

Το Internet έχει επηρεάσει σε μέγιστο βαθμό την σύγχρονη προσέγγιση της επιστήμης των υπολογιστών. Αρχικά όλοι μας συμμετέχουμε σε μια παγκόσμια κοινωνία, οικονομία μερικές φορές και πολιτική όπου αυτός και μόνο ο νέος μας ρόλος απαιτεί αρκετή μελέτη και έρευνα έτσι ώστε να μπορέσουμε να τον ερμηνεύσουμε βέλτιστα. Ας υποθέσουμε ότι ένα ζήτημα παγκόσμιου ενδιαφέροντος προκύπτει στο οποίο όλος ο πλανήτης θα πρέπει να πάρει μια θέση μέσω της ψήφου του. Αυτομάτως θα πρέπει να κατασκευάσουμε καλούς γρήγορους και σωστούς αλγορίθμους ψηφοφοριών. Αυτό είναι ένα συγκεκριμένο παράδειγμα. Μπορεί κανείς να αναλογιστεί προβλήματα διαδικτυακών διαπραγματεύσεων, online αγορών, κατανομής αντικειμένων. Σε γενικές γραμμές υπάρχουν αρκετά προβλήματα που έχουν κοινωνικό υπόβαθρο και πρέπει να μελετηθούν και να λυθούν από αλγορίθμους και από τεχνητή νοημοσύνη.

Στη συγκεκριμένη διπλωματική εργασία ασχολούμαστε με προβλήματα δίκαιης κατανομής μη διαιρέσιμων αγαθών. Η εργασία αποτελείται από τρία κεφάλαια, στο καθένα από τα οποία παρουσιάζεται κάποιο συγκεκριμένο κομμάτι της βιβλιογραφίας που αφορούν προβλήματα δίκαιης κατανομής μη

διαρέσιμων αγαθών. Τα προβλήματα δίκαιης κατανομής μη διαρέσιμων αγαθών εντάσσονται στην ευρύτερη κατηγορία προβλημάτων που μελετώνται στην θεωρία παιγνίων και στην αλγοριθμική θεωρία παιγνίων καθώς και σε προβλήματα ενός σύγχρονου κλάδου που ονομάζεται computational social choice. Το γενικό πρόβλημα αφορά ένα σύνολο παικτών και ένα σύνολο αντικειμένων τα οποία πρέπει να μοιραστούν στους παίκτες, χωρίς να διαιρεθούν σε περαιτέρω κομμάτια με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε οι παίκτες να είναι όσο το δυνατόν περισσότερο ικανοποιημένοι και να μην ζηλεύουν τους άλλους παίκτες.

Το πρόβλημα που μελετάμε στη συγκεκριμένη διπλωματική εργασία ανήκει σε μία υποκατηγορία προβλημάτων που ονομάζονται προβλήματα δίκαιης μοιρασιάς. Στα προβλήματα δίκαιης μοιρασιάς τα αντικείμενα μπορεί να είναι είτε διαρέσιμα (divisible), δηλαδή ένα αντικείμενο μπορεί να διαιρεθεί και να μοιραστούν τα κομμάτια του στους παίκτες είτε μη διαρέσιμα (indivisible) που σημαίνει ότι το αντικείμενο πρέπει να κατανεμηθεί σε κάποιο παίκτη έτσι ακριβώς όπως είναι. Λόγω της εκτενής βιβλιογραφίας και θεωρίας πάνω στα συγκεκριμένα προβλήματα, επιλέξαμε συγκεκριμένα κομμάτια με τα οποία ασχοληθήκαμε και τα οποία μας βοήθησαν να κατανοήσουμε το πρόβλημα περισσότερο.

Η εργασία είναι οργανωμένη σε τρία κεφάλαια. Το πρώτο κεφάλαιο ασχολείται με το κλασικό πρόβλημα κατανομής μη διαρέσιμων αγαθών καθώς και με τον ορισμό του μοντέλου πάνω στο οποίο δουλεύουμε. Υπάρχει αυστηρός ορισμός του μοντέλου καθώς και αρκετά παραδείγματα πάνω στο πρόβλημα και γενικά στις διάφορες τεχνικές και θεωρήματα που παρουσιάζονται στο κεφάλαιο. Υπάρχει μια ξεχωριστή υποενότητα στην οποία παρουσιάζουμε σύγχρονα αποτελέσματα στον κλάδο και διάφορα ανοικτά προβλήματα. Παρουσιάζουμε αποδείξεις σε θεωρήματα που θεωρούμε εμείς σημαντικά. Τέλος για κάθε θεώρημα υπάρχει παράθεση στην εργασία στην οποία πρωτοεμφανίστηκε.

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζουμε μια παραλλαγή του κλασικού προβλήματος της κατανομής μη διαρέσιμων αγαθών, όπου οι παίκτες πλέον λειτουργούν σαν αυτόνομα όντα που διαπραγματεύονται μεταξύ τους για τα αγαθά τα οποία θέλουν να αποκτήσουν. Παρουσιάζουμε τα είδη των διαπραγματεύσεων που έχουν μελετηθεί στην βιβλιογραφία καθώς και διάφορα θεωρήματα και αποδείξεις επάνω σε αυτά. Ακόμη στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε κάποια προβλήματα κατανομής αγαθών στα οποία χρησιμοποιούνται χρήματα από τους παίκτες έτσι ώστε να πληρώσουν για να αποκτήσουν κάποιο αντικείμενο. Το μοντέλο χρημάτων που μελετάμε σε αυτό το κεφάλαιο είναι το πρώτο από τα δύο μοντέλα με χρήματα που παρουσιάζουμε στην εργασία. Τέλος παρουσιάζουμε μία ακόμη υποκατηγορία του γενικού προβλήματος που έχει να κάνει με κατανομή αγαθών σε παίκτες οι οποίοι σχηματίζουν ένα συγκεκριμένο κοινωνικό δίκτυο, το οποίο μοντελοποιείται με κάποιο γράφημα. Παραθέτουμε την

θεωρία που υπάρχει πάνω σε αυτά τα προβλήματα και μερικά θεωρήματα και αποδείξεις.

Στο τρίτο και τελευταίο κεφάλαιο παρουσιάζουμε τα δικά μας αποτελέσματα αναφορικά με την δίκαιη κατανομή μη διαιρέσιμων αγαθών σε παίχτες. Πιο συγκεκριμένα παρουσιάζουμε το δεύτερο μοντέλο πληρωμών πάνω στο οποίο δουλέψαμε. Στην αρχή του κεφαλαίου παρουσιάζουμε μία σύνοψη των προαπαιτούμενων γνώσεων που πρέπει κάποιος να έχει καθώς και το μοντέλο πληρωμών στο οποίο δουλεύουμε. Όλα τα θεωρήματα και οι αποδείξεις παρουσιάζονται αναλυτικά όπως επίσης και οι παραθέσεις των εργασιών στις οποίες βασιστήκαμε για την μελέτη του προβλήματος μας.

Κεφάλαιο 1

Στο πρώτο κεφάλαιο μελετάμε το κλασικό πρόβλημα της δίκαιης κατανομής μη διαιρέσιμων αγαθών. Το πρόβλημα ορίζεται ως εξής: Υπάρχει ένα σύνολο παικτών και ένα σύνολο αγαθών ή αντικειμένων και εμείς θέλουμε να βρούμε μια κατανομή των αγαθών στους παίχτες τέτοια ώστε οι παίχτες να μην ζηλεύουν μεταξύ τους. Η βάση πάνω στην οποία κατασκευάζουμε τους αλγορίθμους για την εύρεση των κατανομών είναι η επιθυμία που έχει κάθε παίκτης για κάθε ένα αγαθό ξεχωριστά.

Εκτός από δίκαιες κατανομές αγαθών θα θέλαμε οι κατανομές μας να είναι οικονομικά καλές, εννοώντας πως θα θέλαμε οι παίχτες να είναι όσο το δυνατόν περισσότερο ικανοποιημένοι με τα αντικείμενα που λαμβάνουν. Ο συνδυασμός δικαιοσύνης και ικανοποίησης είναι ο στόχος των αλγορίθμων που θα κατασκευάζουμε για να λύσουμε τα προβλήματα.

Το πρώτο κεφάλαιο δομείται ως εξής. Αρχικά παραθέτουμε τη βασική θεωρία των προβλημάτων και τις έννοιες και ιδέες που θα χρησιμοποιήσουμε αργότερα. Έπειτα παρουσιάζουμε ένα κεφάλαιο με τα πιο γνωστά κριτήρια δικαιοσύνης που χρησιμοποιούνται στη βιβλιογραφία. Παραθέτουμε επίσης ένα κεφάλαιο με παραδείγματα πάνω σε όλες τις έννοιες που ορίσαμε προηγουμένως και τέλος μια παράγραφο με διάφορα αποτελέσματα πάνω στον τομέα.

Το μοντέλο, συναρτήσεις προτιμήσεων

Στις υποενότητες 1.2 και 1.3 παρουσιάζουμε το γενικό μοντέλο του προβλήματος. Ορίζουμε το σύνολο των παικτών, το σύνολο των αντικειμένων και μοντελοποιούμε της κατανομές των αγαθών στους παίχτες ως διαμερίσεις απο το σύνολο των αντικειμένων. Παραθέτουμε τις συναρτήσεις που χρησιμοποιούμε για να μοντελοποιήσουμε τις προτιμήσεις των παικτών και αναλύουμε τις σημαντικότερες απο αυτές.

Αποδοτικότητα, συναρτήσεις κοινωνικής ευημερίας

Η αποδοτικότητα του συστήματος είναι ένας ακόμη παράγοντας που μας ενδιαφέρει στις κατανομές. Όταν μιλάμε για αποδοτικότητα εννοούμε οικονομική αποδοτικότητα και έχουν οριστεί διάφορα μέτρα για την μελέτη της. Στην ενότητα 1.4 ορίζουμε το μέτρο Pareto efficiency ένα πολύ διαδεδομένο κριτήριο μέτρησης της αποδοτικότητας. Ακόμη παραθέτουμε κάποιες συγκεκριμένες συναρτήσεις κοινωνικής ευημερίας με τις πιο σημαντικές από αυτές να είναι η utilitarian social welfare και το Nash product.

Δικαιοσύνη

Το κύριο ζήτημα των προβλημάτων μας είναι να βρούμε κατανομές των αγαθών οι οποίες να είναι δίκαιες. Στην υποενότητα 1.5 ορίζουμε τα κριτήρια δικαιοσύνης που χρησιμοποιούμε για να ελέξουμε πόσο δίκαιη είναι μια μοιρασιά αντικειμένων. Τα σημαντικότερα κριτήρια που αναλύονται είναι το proportionality και το envy-freeness. Επειδή τα κριτήρια αυτά δεν εξασφαλίζονται σε κάθε στιγμιότυπο του προβλήματος παραθέτουμε επίσης κάποιες προσεγγίσεις αυτών των κριτηρίων που χρησιμοποιούνται στη βιβλιογραφία με τα σημαντικότερα να είναι το EF1 και EFX.

Παραδείγματα

Στην ενότητα 1.6 παραθέτουμε αναλυτικά αρκετά παραδείγματα πάνω στο στιγμιότυπο του προβλήματος στις συναρτήσεις προτιμήσεων στην αποδοτικότητα στην δικαιοσύνη και σε ότι έχουμε ορίσει μέχρι στιγμής.

Αποτελέσματα

Στην ενότητα 1.7 παρουσιάζονται σύγχρονα αποτελέσματα από τον κλάδο της δίκαιης μοιρασιάς αντικειμένων. Υπάρχουν παραθέσεις στις εργασίες που πρωτοεμφανίστηκε κάθε αποτέλεσμα. Αποδείξεις υπάρχουν σε όσα θεωρήματα θεωρήσαμε σημαντικά και μερικές από αυτές είναι αρκετά περιεκτικές. Παραθέτονται αποτελέσματα των τελευταίων 4 ετών μερικά από τα οποία ήταν πρωτόπορα στο αντικείμενο μελέτης τους.

Κεφάλαιο 2

Σε αυτό το κεφάλαιο μελετάμε και παρουσιάζουμε μια παραλλαγή του κλασικού προβλήματος της μοιρασιάς αντικειμένων. Εδώ δεν υπάρχει κάποιος αλγόριθμος που να αναλαμβάνει το ρόλο της μοιρασιάς των αντικειμένων αλλά οι παίκτες διαπραγματεύονται μεταξύ τους με διάφορες συμφωνίες με σκοπό να αποκτήσουν τα αντικείμενα που θέλουν ώστε να μην ζηλεύουν. Επίσης παραθέτουμε ένα μοντέλο κατανομής αντικειμένων στο οποίο οι παίκτες μπορούν να λαμβάνουν ή να δίνουν χρήματα σε άλλους παίκτες με σκοπό να αποκτήσουν κάποιο αντικείμενο. Επαναπροσδιορίζουμε την ικανοποίηση που παίρνει κάποιος παίκτης από ένα σύνολο αντικειμένων συνυπολογίζοντας και τα χρήματα που έχει στην κατοχή του.

Μοντέλο, 1ο σχήμα πληρωμών

Στις ενότητες 2.2 και 2.3 παραθέτουμε το μοντέλο του προβλήματος που πραγματεύεται στο 2ο κεφάλαιο καθώς και το μοντέλο του σχήματος πληρωμών που χρησιμοποιούν οι παίκτες. Ορίζουμε τις έννοιες συνάρτηση πληρωμών, κατάσταση και σχήμα πληρωμών αναλυτικά και παραθέτουμε και ένα παράδειγμα που βοηθάει να κατανοήσουμε τη χρησιμότητα του σχήματος πληρωμών.

Συμφωνίες

Στην ενότητα 2.4 παρουσιάζουμε τις διάφορες συμφωνίες τις οποίες μπορούν να επισυνάψουν οι παίκτες μεταξύ τους. Ορίζουμε αυστηρά τι θα πει συμφωνία καθώς και άλλους ορισμούς πάνω στον βασικό ορισμό με τον βασικότερο να είναι το IR deal. Το λήμμα 4 που βρίσκεται σε αυτήν την ενότητα είναι το βασικό λήμμα που χρησιμοποιούμε στις αποδείξεις πολλών θεωρημάτων και το αποδεικνύουμε αναλυτικά. Τέλος ορίζουμε πότε μια κατάσταση είναι αποδοτική και παραθέτουμε ένα παράδειγμα το οποίο μας εισαγάγει στην δομή που θα πρέπει να έχουν οι συμφωνίες των παιχτων μεταξύ τους, που αναλύεται στην επόμενη ενότητα.

Τύποι και δομές συμφωνιών

Στην ενότητα 2.5 αναλύονται όλοι οι τύποι συμφωνιών που μπορούν να υπάρξουν και έχουν μελετηθεί στην βιβλιογραφία. Για κάθε έναν τύπο υπάρχει ο αυστηρός ορισμός του και ένα παραδειγμα εφαρμογής του. Ακόμη παρουσιάζουμε ένα γενικό μοντέλο με γραφήματα που χρησιμοποιούμε για να μελετήσουμε αυτές τις συμφωνίες και την απόδοσή τους. Η ανάλυσή μας περνάει από κάθε ένα τύπο ξεχωριστά και

παραθέτουμε παραδείγματα με τα οποία κατανοούμε γιατί δεν επαρκεί ο συγκεκριμένος τύπος για να βοηθήσει το σύστημα να φτάσει σε κατανομές αποδοτικές. Τέλος παρουσιάζουμε τον τύπο συμφωνιών που χρησιμοποιείται από όλους τους παίχτες και τους εξασφαλίζει σύγκλιση σε καταστάσεις αποδοτικές.

GUPF-LUPF

Στην ενότητα 2.6 παρουσιάζουμε 2 σχήματα πληρωμών τα οποία υποδηλώνουν πως μπορούμε να κατανέμουμε το πλεόνασμα που μπορεί να υπάρξει μετά τις διαπραγματεύσεις. Παρουσιάζουμε τα σχήματα GUPF και LUPF

Δικαιοσύνη

Στην ενότητα 2.7 επαναορίζουμε τα κριτήρια δικαιοσύνης που παρουσιάσαμε στο 1ο κεφάλαιο έτσι ώστε να τα προσαρμόσουμε στο μοντέλο κατανομής αγαθών που μελετάμε. Πιο αναλυτικά ορίζουμε το proportionality με τα δεδομένα του καινούργιου μοντέλου. Το σημαντικότερο θέμα αυτής της ενότητας είναι ένα σχήμα πληρωμών το Knaster payment scheme με το οποίο οι παίχτες εξασφαλίζουν ότι θα καταλήξουν σε μία κατάσταση η οποία είναι proportional. Αναλύουμε αυτό το σχήμα πληρωμών και τέλος παραθέτουμε το τελικό θεώρημα μαζί με παράθεση στην εργασία που δημοσιεύτηκε.

Envy-free states

Στην ενότητα 2.8 παρουσιάζουμε το κριτήριο envy-freeness για το μοντέλο που μελετάμε σε αυτό το κεφάλαιο. Προσαρμόζουμε τους ορισμούς στο μοντέλο πληρωμών που έχουμε παρουσιάσει και δίνουμε ένα παράδειγμα μιας κατάστασης που γίνεται envy-free με πληρωμές. Ακόμη ορίζουμε πότε μία κατάσταση που είναι envy-free είναι αποδοτική και παραθέτουμε ανάλογο παράδειγμα.

Στην υποενότητα 2.8.1 παρουσιάζουμε τρία εργαλεία τα οποία είναι σημαντικά στην μελέτη των καταστάσεων που γίνονται envy-free και τα οποία τα χρησιμοποιούμε και εμείς μετέπειτα στα δικά μας αποτελέσματα. Αυτά τα εργαλεία είναι το LP, Envy-graph και οι θετικοί κύκλοι στο Envy-graph. Χρησιμοποιώντας τη συνθήκη που πρέπει να ισχύει ώστε μια κατάσταση να είναι envy-free κατασκευάζουμε ένα γραμμικό πρόγραμμα το οποίο το χρησιμοποιούμε για να αποδείξουμε αν μια κατάσταση μπορεί να γίνει envy-free ή όχι με πληρωμές. Κάθε LP και κάθε κατανομή αγαθών επάγει ένα συγκεκριμένο γράφημα το οποίο το ονομάζουμε Envy-graph. Το λήμμα 5 που παρουσιάζεται στην ίδια υποενότητα είναι αρκετά σημαντικό καθώς μας υποδεικνύει πότε μια κατανομή αγαθών μπορεί να

γίνει Envy-free με πληρωμές.

Στην υποενότητα 2.8.2 παρουσιάζουμε ένα σχήμα πληρωμών το οποίο δίνει τη δυνατότητα στους παίχτες να καταλήξουν σε μία κατάσταση η οποία είναι αποδοτική και envy-free πάντα. Το θεώρημα 12 συνοψίζει την κουβέντα που γίνεται και το θεώρημα 13 αποδεικνύει πως τα αποτελέσματα ισχύουν μόνο για συγκεκριμένη συνάρτηση προτίμησης.

Δίκαιη κατανομή αγαθών σε κοινωνικά δίκτυα

Εκτός από το κλασικό στιγμιότυπο του προβλήματος που οι παίχτες γνωρίζουν όλοι όλους υπάρχει και μια παραλλαγή όπου οι παίχτες σχηματίζουν κάποιο συγκεκριμένο γράφημα το οποίο αλλιώς το ονομάζουμε και τοπολογία. Στην ενότητα 2.9 αναλύουμε προβλήματα στα οποία οι παίχτες σχηματίζουν μία συγκεκριμένη τοπολογία. Προσαρμόζουμε όλους τους ορισμούς στα δεδομένα αυτής τη παραλλαγής του προβλήματος. Πλέον μιλάμε για συμφωνίες οι οποίες αφορούν κλίκες του γραφήματος της τοπολογίας και δίνουμε τον ορισμό.

Στις υποενότητες 2.9.1 και 2.9.2 ορίζουμε τους όρους proportionality και envy-freeness για προβλήματα με τοπολογίες και δίνουμε ένα παράδειγμα για envy-freeness.

Στην υποενότητα 2.9.3 μελετάμε τις αποδοτικές καταστάσεις που μπορούμε να έχουμε σε προβλήματα με τοπολογίες. Αρχικά δείχνουμε ότι οι παίχτες μπορεί να μη φτάσουν ποτέ σε μία αποδοτική κατάσταση και μελετάμε τρόπους με τους οποίους μπορούμε να προσεγγίσουμε τις αποδοτικές καταστάσεις. Ορίζουμε την έννοια Clique-wise efficiency και τις έννοιες clique-variant. Αποδεικνύουμε στο proposition 6 πόσο μακριά μπορεί να είναι ένα clique-efficient state από το πραγματικά αποδοτικό state. Στο θεώρημα 14 αποδεικνύουμε πως μπορούν οι παίχτες να φτάσουν σε μία clique-wise αποδοτική κατάσταση και τέλος στο θεώρημα 15 αποδεικνύουμε πως οι παίχτες μπορούν να φτάσουν σε clique-wise και δίκαιες καταστάσεις με συγκεκριμένο σχήμα πληρωμών.

Παραδείγματα

Στην ενότητα 2.10 παραθέτουμε παραδείγματα πάνω σε ότι έχουμε ορίσει στις προηγούμενες ενότητες για να γίνουν περισσότερο αντιληπτά. Για κάθε σχήμα πληρωμών που έχουμε αναφέρει υπάρχει ένα παράδειγμα με διαπραγματεύσεις και αναλυτικές πράξεις και επεξηγήσεις. Το παράδειγμα 10 πραγματεύεται το LP και το Envy-graph τα οποία ορίστηκαν και μελετήθηκαν προηγουμένως.

Διαπραγματεύσεις χωρίς πληρωμές

Η ενότητα 2.11 έχει γραφτεί για βιβλιογραφική πληρότητα. Σε αυτήν την ενότητα παρουσιάζουμε διαπραγματεύσεις που μπορούν να κάνουν οι παίχτες χωρίς να χρησιμοποιούν χρήματα. Πιο συγκεκριμένα στην υποενότητα 2.11.1 μελετάμε τις συμφωνίες που μπορούν να συνάψουν οι παίχτες έτσι ώστε να καταλήξουν σε Pareto optimal καταστάσεις και στην 2.11.2 τις αντίστοιχες συμφωνίες έτσι ώστε οι παίχτες να εξασφαλίσουν μια κατάσταση με υψηλή egalitarian κοινωνική ευημερία. Παραδείγματα για περισσότερη κατανόηση των εννοιών παρατίθενται στο τέλος της ενότητας.

Κεφάλαιο 3ο

Έχοντας παρουσιάσει τη βασική θεωρία στα δύο προηγούμενα κεφάλαια, στο τρίτο και τελευταίο κεφάλαιο παραθέτουμε τα δικά μας αποτελέσματα και τη δική μας συμβολή στην θεωρία δίκαιης κατανομής μη διαιρέσιμων αγαθών.

Πιο συγκεκριμένα παρουσιάζουμε το πρόβλημα της εύρεση μιας κατανομής αγαθών που να μπορεί να γίνει δίκαιη χρησιμοποιώντας τη λιγότερη δυνατή ποσότητα χρημάτων. Το πρόβλημα που ορίζουμε και μελετάμε ονομάζεται SMEF (subsidy minimization for envy-freeness) και υπάρχει παράθεση στο ανάλογο paper στο αγγλικό κείμενο. Σε αυτό το κεφάλαιο χρησιμοποιούμε ένα εναλλακτικό μοντέλο πληρωμών που λέγεται subsidy model. Σε αυτό το μοντέλο υπάρχει μία εξωτερική πηγή η οποία μπορεί να δώσει χρήματα στους παίχτες έτσι ώστε αυτοί να σταματήσουν να ζηλεύουν. Σε αυτό το μοντέλο οι πληρωμές είναι αυστηρά θετικές. Επίσης το LP καθώς και το envy-graph προσαρμόζονται στο καινούργιο μοντέλο πληρωμών.

Γνωρίζουμε πως το να βρεθεί μία κατανομή που να είναι envy-free είναι NP-hard να βρεθεί. Έτσι και το SMEF είναι επίσης NP-hard. Γι αυτό και προσπαθούμε να κατασκευάσουμε προσεγγιστικούς αλγόριθμους με όσο το δυνατόν καλύτερη προσέγγιση. Στην υποενότητα 3.2 παρουσιάζουμε το γενικό μοντέλο πάνω στο οποίο δουλέψαμε και θέτουμε τους συμβολισμούς τους οποίους θα ακολουθήσουμε στο υπόλοιπο του κεφαλαίου.

Το θεώρημα 18 των Halpern και Shah είναι ένα από τα βασικά θεωρήματα που χρησιμοποιούμε για να αποδείξουμε τα δικά μας θεωρήματα και το παραθέτουμε μαζί με το paper στο οποίο πρωτοδημοσιεύτηκε. Μία πλήρης απόδειξη προσαρμοσμένη στους δικούς μας συμβολισμούς παρατίθεται αμέσως μετά το θεώρημα.

Προσεγγιστικός αλγόριθμος

Στην υποενότητα 3.3 παραθέτουμε τον προσεγγιστικό αλγόριθμο που κατασκευάσαμε για να προσεγγίσουμε το πρόβλημα SMEF. Αυτό που κάνει ο αλγόριθμος είναι αρχικά να στρογγυλοποιεί τις προτιμήσεις των παικτών για τα αντικείμενα που υπάρχουν στο σύνολο των αντικειμένων σε πολλαπλάσια μιας συγκεκριμένης παραμέτρου. Έπειτα χρησιμοποιούμε δυναμικό προγραμματισμό για να υπολογίσουμε όλες τις πιθανές κατανομές που μπορούν να προκύψουν με τις καινούργιες στρογγυλοποιημένες προτιμήσεις των παικτών. Έπειτα υπολογίζουμε την μετάθεση που αντιστοιχεί στην κατανομή αγαθών που μπορεί να γίνει envy-free με πληρωμές. Έπειτα λύνουμε το LP για κάθε μία από αυτές τις κατανομές αγαθών και επιστρέφουμε αυτή που γίνεται envy-free με τα λιγότερα χρήματα.

Στην ίδια υποενότητα περιγράφουμε αναλυτικά τον αλγόριθμο καθώς και την προσεγγιστική παράμετρο και τις αναδρομικές σχέσεις που χρησιμοποιούμε στον δυναμικό προγραμματισμό. Μετά την περιγραφή αποδεικνύουμε κάποια χρήσιμα λήμματα και παρατηρήσεις τα οποία χρησιμοποιούμε στην κεντρική απόδειξη της ορθότητας του αλγορίθμου. Επισημαίνουμε ότι ο αλγόριθμος έχει νόημα εφόσον αναφερόμαστε σε σταθερό αριθμό παικτών.

Η σύνοψη της απόδειξης της ορθότητας του αλγορίθμου βρίσκεται στο λήμμα 8 και το θεώρημα 19 συνοψίζει τον αλγόριθμο για σταθερό αριθμό παικτών.

Hardness result

Στην τελευταία υποενότητα αποδεικνύουμε ένα hardness approximation result για το πρόβλημα SMEF. Πιο συγκεκριμένα κατασκευάζουμε μία αναγωγή από το πρόβλημα MAX-3DM το οποίο γνωρίζουμε ότι είναι NP-hard να προσεγγιστεί κατά κάποιο παράγοντα, και διατηρούμε μέσω της αναγωγής το hardness της προσέγγισης. Παραθέτουμε αρχικά το κλασικό στιγμιότυπο του προβλήματος MAX-3DM και παραθέσεις από τα paper που έχει δημοσιευτεί. Το θεώρημα 20 συνοψίζει το hardness of approximation του προβλήματος SMEF. Έπειτα ακολουθεί η αναγωγή από το MAX-3DM στο SMEF.

Επίλογος

Τα προβλήματα δίκαιης μοιρασιάς ανήκουν στον κλάδο computational social choice ο οποίος είναι ένας κλάδος που έχει συγκεντρώσει το ενδιαφέρον αρκετών επιστημών της πληροφορικής συνδυάζοντας ιδέες και περιεχόμενα από διάφορους άλλους κλάδους όπως η αλγοριθμική θεωρία παιγνίων, οικονομικά,

κοινωνικές επιστήμες καθώς και θεωρία πολυπλοκότητας.

Σε αυτή τη διπλωματική εργασία μελετήσαμε προβλήματα δίκαιης κατανομής μη διαιρέσιμων αγαθών. Η επιλογή των εργασιών και των αποτελεσμάτων που παρουσιάστηκαν στην εργασία αφορούσε εργασίες που μας βοήθησαν περισσότερο να κατανοήσουμε το γενικό πρόβλημα αλλά και εργασιών στις οποίες έχουν αποδειχτεί σημαντικά αποτελέσματα σχετικά με τον κλάδο. Όσο αφορά τα κριτήρια δικαιοσύνης δώσαμε περισσότερη έμφαση στα προσεγγιστικά κριτήρια όπως το EF1 και το EFX.

Κατά τη διάρκεια της συγγραφής αυτής της εργασίας ακόμη περισσότερα αποτελέσματα σχετικά με το πρόβλημα έχουν αποδειχτεί και δημοσιευτεί. Προσπαθήσαμε όσο ήταν δυνατό να συμβαδίσουμε με την επιστημονική πρόοδο. Υπάρχουν πρόσφατα αποτελέσματα σχετικά με τα προσεγγιστικά μέτρα δικαιοσύνης που έχουμε περιγράψει στην εργασία τα οποία δεν συμπεριλήφθηκαν, ωστόσο αναφορά στα paper στα οποία έχουν δημοσιευτεί τα καινούργια αποτελέσματα υπάρχει στο τέλος της εργασίας.

Σαφώς και υπάρχουν αρκετά ανοικτά προβλήματα στον κλάδο τα οποία θα μπορούσε κάποιος να ερευνήσει σε μελλοντικές διπλωματικές εργασίες. Η απόδειξη ότι μία EFX κατανομή υπάρχει πάντοτε είναι ένα από αυτά καθώς και καλύτεροι προσεγγιστικοί αλγόριθμοι για το πρόβλημα SMEF. Τέλος η εν λόγω εργασία έχει γραφτεί στα αγγλικά καθώς δεν υπήρχε προηγούμενη ελληνική βιβλιογραφία πάνω στα προβλήματα αυτά από την οποία θα μπορούσαμε να δανειστούμε επίσημες και καθιερωμένες ορολογίες.