

# D-branes: Θεωρία και Εφαρμογές

Νικόλαος Καραΐσκος

Ειδική Ερευνητική Εργασία

Πανεπιστήμιο Πατρών

Μεταπτυχιακό Τμήμα Φυσικής

Τομέας Θεωρητικής, Υπολογιστικής Φυσικής και Αστροφυσικής

Επιβλέπων Καθηγητής: Ιωάννης Μπάκας

Πάτρα 2008

# Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία αποτελεί μια σύντομη εισαγωγή στη θεωρία των χορδών, ενώ έγινε προσπάθεια να δοθεί έμφαση σε σύγχρονα θέματα της θεωρίας. Κατά συνέπεια, ιδιαίτερο ρόλο διαδραματίζουν οι D-branes, που αποτελούν πλέον θεμελιώδη αντικείμενα της θεωρίας και βασικά συστατικά για διάφορα ειδικά θέματα όπως η περιγραφή μελανών οπών και η AdS/CFT αντιστοιχία.

Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζεται η κλασική μποζονική χορδή, καθώς και η κβάντωσή της. Παρά το γεγονός ότι η θεωρία αυτή δεν είναι ρεαλιστική ο παιδαγωγικός χαρακτήρας της είναι αναμφισβήτητος, καθώς ο φορμαλισμός που αναπτύσσεται είναι αντίστοιχος με αυτόν των υπερσυμμετρικών χορδών, που είναι περισσότερο συνεπείς με τη φύση.

Στη συνέχεια περιγράφεται ο T-δυϊσμός, που συσχετίζει δύο διαφορετικές θεωρίες χορδών, ενώ εισάγονται στη θεωρία και οι D-branes και αναλύονται κάποια βασικά χαρακτηριστικά τους. Οι D-branes είναι δυναμικά εκτεταμένα αντικείμενα, οπότε και περιγράφονται από κάποια δράση κοσμικού όγκου. Αυτό είναι και το αντικείμενο του τρίτου κεφαλαίου.

Το τέταρτο κεφάλαιο περιγράφει τις υπερσυμμετρικές χορδές και τις διαφορετικές θεωρίες χορδών που προκύπτουν. Οι θεωρίες αυτές προσφέρουν και το θεωρητικό πλαίσιο που χρησιμοποιεί κανείς εργαζόμενος σε διάφορα ειδικά θέματα.

Τέλος, στα δύο τελευταία κεφάλαια παρουσιάζεται αρχικά η γεωμετρία των μελανών οπών και των D-branes, τονίζοντας τις διάφορες ομοιότητες που προκύπτουν, ενώ οι τελευταίες χρησιμοποιούνται για την εξαγωγή μιας μικροσκοπικής περιγραφής της εντροπίας Bekenstein-Hawking των extremal μελανών οπών. Η περιγραφή αυτή αποτελεί μία μεγάλη επιτυχία της θεωρίας χορδών, καθώς είναι η πρώτη φορά που επιτυγχάνεται κάτι τέτοιο στα πλαίσια μιας θεωρίας κβαντικής βαρύτητας.

# Ευχαριστίες

Από τη θέση αυτή θα ήθελα να ευχαριστήσω αρχικά τον επιβλέποντα καθηγητή κ. Ιωάννη Μπάκα, κυρίως για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε και τη σχετική ελευθερία που είχα ως προς την επιλογή θεματολογίας, καθώς και για τις πολύτιμες υποδείξεις που μου προσέφερε κατά τη διάρκεια εκπόνησης της παρούσας εργασίας.

Είμαι ιδιαίτερα ευγνώμων στην αναπληρώτρια καθηγήτρια Σ. Λάλα για τις πολύπλευρες συζητήσεις που είχαμε καθώς και για την ενθάρρυνση και τις πολύτιμες συμβουλές της. Την ευχαριστώ επίσης που δέχτηκε να είναι μέλος της τριμελούς εξεταστικής επιτροπής, καθώς και τον αναπληρωτή καθηγητή κ. Δ. Γκίκα για τον ίδιο ακριβώς λόγο.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω το διδακτορικό φοιτητή Κ. Σιάμπο για τις συζητήσεις που είχαμε πάνω στη φυσική, καθώς και για τη γενικότερη υποστήριξη και βοήθειά του.

Νιώθω ακόμη υποχρεωμένος να ευχαριστήσω τους φίλους μου, εντός κι εκτός του τμήματος φυσικής, ο καθένας από τους οποίους συντέλεσε με το δικό του τρόπο στη δημιουργία ενός ξεχωριστού περιβάλλοντος, μέσα στο οποίο η ολοκλήρωση των μεταπτυχιακών σπουδών υπήρξε για μένα απολαυστική.

Τέλος, πάνω από όλα, οφείλω θερμές ευχαριστίες στην οικογένειά μου για την αμέριστη στήριξη που μου παρείχε όλα αυτά τα χρόνια, τη συνεχή προτροπή και την κάθε είδους βοήθεια, χωρίς την οποία η εργασία αυτή δε θα υπήρχε. Η παρούσα εργασία είναι αφιερωμένη σε αυτήν.

# Περιεχόμενα

<b>1</b>	<b>Η μποζονική χορδή</b>	<b>1</b>
1.1	Κλασική μποζονική χορδή . . . . .	1
1.1.1	Η δράση της χορδής και οι εξισώσεις κίνησης . . . . .	1
1.1.2	Η λύση των εξισώσεων κίνησης . . . . .	4
1.1.3	Χαμιλτόνια δυναμική και άλγεβρα Virasoro . . . . .	5
1.2	Κβαντική μποζονική χορδή . . . . .	6
1.2.1	Κανονική κβάντωση . . . . .	7
1.2.2	Άλγεβρα Virasoro και φυσικές καταστάσεις . . . . .	7
1.2.3	Κβάντωση στον κώνο φωτός . . . . .	10
1.3	Χορδές σε πεδία υποβάθρου . . . . .	14
<b>2</b>	<b>T-δυϊσμός και D-branes</b>	<b>18</b>
2.1	Πεδία και χορδές σε κύκλο . . . . .	18
2.1.1	Η ιδέα Kaluza-Klein . . . . .	18
2.1.2	Κλειστές χορδές σε κύκλο . . . . .	19
2.2	T-δυϊσμός για κλειστές χορδές . . . . .	21
2.3	T-δυϊσμός για ανοικτές χορδές . . . . .	22
2.4	Παράγοντες Chan-Paton και γραμμές Wilson . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Πεδία υποβάθρου και δράσεις κοσμικού όγκου</b>	<b>28</b>
3.1	T-δυϊσμός σε πεδία υποβάθρου . . . . .	28
3.2	Δράσεις κοσμικού όγκου . . . . .	30
3.2.1	Η δράση Born-Infeld . . . . .	31
3.3	Η δράση Dirac-Born-Infeld . . . . .	32
3.4	Μη-Αβελιανή επέκταση . . . . .	33

<b>4</b>	<b>Υπερσυμμετρικές χορδές</b>	<b>34</b>
4.1	Το μοντέλο RNS . . . . .	34
4.1.1	Η δράση της θεωρίας . . . . .	35
4.1.2	Κβάντωση του μοντέλου RNS . . . . .	36
4.1.3	Η προβολή GSO . . . . .	40
4.2	Οι πέντε θεωρίες των χορδών . . . . .	42
4.2.1	Υπερχορδές Τύπου I και II . . . . .	42
4.2.2	Ετεροτικές χορδές . . . . .	43
4.2.3	Ενοποίηση των θεωριών: η θεωρία M . . . . .	43
4.3	Οι D-branes ως BPS αντικείμενα . . . . .	44
4.3.1	Οι βράνες στην υπερβαρύτητα . . . . .	45
4.3.2	BPS καταστάσεις . . . . .	46
4.3.3	Φορτία και βράνες στις θεωρίες υπερχορδών . . . . .	48
<b>5</b>	<b>Η γεωμετρία των D-branes</b>	<b>50</b>
5.1	Μελανές οπές σε 4 διαστάσεις . . . . .	50
5.1.1	Το σύστημα Einstein-Maxwell . . . . .	51
5.1.2	Η λύση Schwarzschild . . . . .	51
5.1.3	Η λύση Reissner-Nordstrom . . . . .	52
5.1.4	Κοσμολογική σταθερά: de Sitter και Anti-de Sitter . . . . .	54
5.2	Η γεωμετρία των D-branes . . . . .	57
5.2.1	Η οικογένεια των p-brane λύσεων . . . . .	57
5.2.2	Το extremal όριο και συμπίπτουσες D-branes . . . . .	58
5.3	Κατασκευάζοντας p-brane γεωμετρία με Dp-branes . . . . .	60
<b>6</b>	<b>D-Branes και μελανές οπές</b>	<b>61</b>
6.1	Η θερμοδυναμική των μελανών οπών . . . . .	62
6.1.1	Το ολοκλήρωμα διαδρομών και ο Ευκλείδειος λογισμός . . . . .	62
6.1.2	Η ημικλασική προσέγγιση . . . . .	63
6.1.3	Η θερμοκρασία των μελανών οπών . . . . .	64
6.2	Ο λογισμός της Ευκλείδειας δράσης . . . . .	65
6.2.1	Η δράση για τη Schwarzschild . . . . .	65
6.2.2	Η δράση για τη Reissner-Nordstrom . . . . .	67
6.2.3	Οι θερμοδυναμικοί νόμοι . . . . .	68

6.3	Μελανές οπές στη θεωρία χορδών . . . . .	68
6.4	$D = 5$ μελανές οπές . . . . .	69
6.4.1	Κατασκευάζοντας τη μελανή οπή . . . . .	69
6.4.2	Μικροσκοπική περιγραφή της εντροπίας . . . . .	72
6.5	$D = 4$ μελανές οπές . . . . .	75
7	Επίλογος και συμπεράσματα	78
	Βιβλιογραφία	80

# Κεφάλαιο 1

## Η μποζονική χορδή

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται εν συντομία η μποζονική χορδή, η απλούστερη θεωρία χορδών. Η θεωρία αυτή δεν περιγράφει καθόλου αλληλεπιδράσεις, κατά την κβάντωση προκύπτουν μόνο μποζόνια και καθόλου φερμιόνια, ενώ η θεωρία προβλέπει επίσης την ύπαρξη ταχυονίων, δηλαδή σωματιδίων με αρνητική μάζα. Κατά συνέπεια, η μποζονική χορδή δε μπορεί να αποτελέσει μια ρεαλιστική θεωρία. Είναι, όμως, απαραίτητη για να κατανοήσει κανείς πως περιγράφονται και ενσωματώνονται οι διάφορες έννοιες στη θεωρία χορδών, καθώς και για να εξοικειωθεί με το μαθηματικό φορμαλισμό.

### 1.1 Κλασική μποζονική χορδή

Ξεκινάμε αρχικά από την περιγραφή σχετικιστικών χορδών, σε αναλογία με την περιγραφή σχετικιστικών σωματιδίων. Αφού βρούμε και επιλύσουμε τις εξισώσεις κίνησης, θα προχωρήσουμε έπειτα στην κβάντωση της χορδής.

#### 1.1.1 Η δράση της χορδής και οι εξισώσεις κίνησης

Όπως ακριβώς ένα σωματίδιο διαγράφει μια “κοσμική γραμμή” κατά την κίνησή του, έτσι και μια χορδή διαγράφει μια δισδιάστατη κοσμική επιφάνεια στο χωρόχρονο. Οι εξισώσεις κίνησης της χορδής μπορούν να προκύψουν μέσω λογισμού μεταβλητών της δράσης του Polyakov

$$S = -\frac{T}{2} \int d^2\sigma \sqrt{-h} h^{\alpha\beta}(\sigma) \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \eta_{\mu\nu}, \quad (1.1)$$

όπου  $(X^0 \equiv t, X^1, \dots, X^{D-1})$  οι συνεταγμένες της χορδής στο χωρόχρονο,  $(\sigma^0, \sigma^1) = (\tau, \sigma)$  η παραμετροποίηση της κοσμικής επιφάνειας,  $T$  η τάση της χορδής,  $h_{\alpha\beta}$  η μετρική στην κοσμική επιφάνεια της χορδής και  $\eta_{\mu\nu}$  η μετρική του επίπεδου  $D$ -διάστατου χωρόχρονου.

Ο δισδιάστατος ταυσιτής ενέργειας - ορμής δίνεται από τη μεταβολή της δράσης  $S$  ως προς τη μετρική  $h_{\alpha\beta}$ , ώστε

$$T_{\alpha\beta} = -\frac{2}{T} \frac{1}{\sqrt{h}} \frac{\delta S}{\delta h^{\alpha\beta}} = \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu - \frac{1}{2} h_{\alpha\beta} h^{\alpha'\beta'} \partial_{\alpha'} X^\mu \partial_{\beta'} X_\mu. \quad (1.2)$$

Η εξίσωση πεδίου  $\delta S / \delta h^{\alpha\beta} = 0$  μεταφράζεται λοιπόν ως η απαίτηση  $T_{\alpha\beta} = 0$ , που είναι και οι εξισώσεις δεσμών της θεωρίας.

Εξετάζοντας στη συνέχεια τις συμμετρίες της παραπάνω δράσης, βρίσκει κανείς μια βαθμίδα στην οποία η κβάντωση είναι πολύ απλή. Για την περίπτωση του χωρόχρονου Minkowski, η δράση (1.1) είναι αναλλοίωτη κάτω από τους εξής μετασχηματισμούς:

- *Μετασχηματισμοί Poincare*. Αυτές είναι ολικές συμμετρίες, κάτω από τις οποίες τα πεδία μετασχηματίζονται ως

$$\delta X^\mu = a_\nu^\mu X^\nu + b^\mu \quad \text{και} \quad \delta h^{\alpha\beta} = 0, \quad (1.3)$$

όπου οι σταθερές  $a_\nu^\mu$  περιγράφουν απειροστούς μετασχηματισμούς Lorentz και  $b^\mu$  είναι οι μετατοπίσεις.

- *Επαναπαραμετροποιήσεις*. Η κοσμική επιφάνεια παραμετροποιείται από τις συνεταγμένες  $\tau$  και  $\sigma$ , αλλά μια αλλαγή στην παραμετροποίηση μέσω των μετασχηματισμών

$$\begin{aligned} \delta X^\mu &= \xi^\alpha \partial_\alpha X^\mu \\ \delta h^{\alpha\beta} &= \xi^\gamma \partial_\gamma h^{\alpha\beta} - \partial_\gamma \xi^\alpha h^{\gamma\beta} - \partial_\gamma \xi^\beta h^{\alpha\gamma} \\ \delta(\sqrt{h}) &= \partial_\alpha (\xi^\alpha \sqrt{h}) \end{aligned} \quad (1.4)$$

αφήνει τη δράση αναλλοίωτη.

- *Μετασχηματισμοί Weyl*. Η δράση παραμένει αναλλοίωτη κάτω από την απεικόνιση

$$h_{\alpha\beta} \rightarrow e^{\phi(\sigma,\tau)} h_{\alpha\beta}. \quad (1.5)$$

Η συμμετρία αυτή είναι, όπως και η προηγούμενη, μια τοπική συμμετρία, και είναι ο λόγος για τον οποίο ο ταυσιτής ενέργειας - ορμής έχει μηδενικό ίχνος.



Από τη στιγμή που υπάρχουν οι παραπάνω συμμετρίες, τα στοιχεία της μετρικής  $h_{\alpha\beta}$  δεν είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους. Οι τοπικές συμμετρίες βαθμίδας μπορούν να χρησιμοποιηθούν δηλαδή ώστε να διαλέξουμε πλήρως τη μορφή της μετρικής  $h_{\alpha\beta}$ , η οποία επιλέγεται να είναι η

$$h_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

Σε αυτή τη βαθμίδα η δράση (1.1) παίρνει την απλή μορφή

$$S = \frac{T}{2} \int d^2\sigma (\dot{X}^2 - X'^2), \quad (1.7)$$

όπου

$$\dot{X}^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \quad \text{και} \quad X^{\mu'} = \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}, \quad (1.8)$$

ενώ η εξίσωση της κίνησης που προκύπτει από αυτήν με λογισμό μεταβολών είναι η

$$\partial_\alpha \partial^\alpha X^\mu = 0 \quad \text{ή} \quad \left( \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) X^\mu = 0, \quad (1.9)$$

που δεν είναι παρά η κυματική εξίσωση.

Τέλος, για να είναι καλά ορισμένο ένα πρόβλημα μεταβολών, πρέπει να οριστούν κάποιες συνοριακές συνθήκες. Εκτός των εξισώσεων κίνησης, κατά το λογισμό μεταβολών της δράσης (1.7) προκύπτει και ο επιφανειακός όρος

$$-T \int d\tau [X'_\mu \delta X^\mu|_{\sigma=\pi} - X'_\mu \delta X^\mu|_{\sigma=0}], \quad (1.10)$$

ο οποίος θα πρέπει να μηδενίζεται. Η απαίτηση αυτή δίνει τότε και τις συνοριακές συνθήκες που θα πρέπει ικανοποιεί η χορδή. Μια χορδή μπορεί να είναι είτε κλειστή, είτε ανοικτή, ενώ χάριν ευκολίας επιλέγουμε τη μεταβλητή  $\sigma$  να παίρνει τιμές στο διάστημα  $0 \leq \sigma \leq \pi$ . Προκύπτουν λοιπόν οι παρακάτω περιπτώσεις:

- *Κλειστή χορδή.* Στην περίπτωση αυτή, οι λύσεις είναι περιοδικές

$$X^\mu(\sigma, \tau) = X^\mu(\sigma + \pi, \tau).$$

- *Ανοικτή χορδή με συνοριακές συνθήκες Neumann.* Σε αυτήν την περίπτωση η συνιστώσα της ορμής που είναι κάθετη στο σύνορο της κοσμικής επιφάνειας μηδενίζεται, δηλαδή

$$X'_\mu = 0 \quad \text{στα} \quad \sigma = 0, \pi.$$

Από φυσική σκοπιά, αυτό σημαίνει οτι δεν υπάρχει ροή ορμής από τα άκρα της χορδής.

- *Ανοικτή χορδή με συνοριακές συνθήκες Dirichlet.* Εδώ οι θέσεις των δύο άκρων της χορδής είναι σταθερές έτσι ώστε  $\delta X^\mu = 0$ , και

$$X^\mu|_{\sigma=0} = X_0^\mu \quad \text{και} \quad X^\mu|_{\sigma=\pi} = X_\pi^\mu,$$

όπου  $X_0^\mu$  και  $X_\pi^\mu$  σταθερές και  $\mu = 1, \dots, D - p - 1$ . Για τις υπόλοιπες  $p + 1$  συντεταγμένες εφαρμόζονται συνοριακές συνθήκες Neumann.

### 1.1.2 Η λύση των εξισώσεων κίνησης

Για να βρούμε τη λύση στις εξισώσεις της κίνησης και στις εξισώσεις δεσμών είναι βολικό να εισάγουμε τις *συντεταγμένες κώνου φωτός* στην κοσμική επιφάνεια, που ορίζονται ως

$$\sigma^\pm = \tau \pm \sigma. \quad (1.11)$$

Η εξίσωση κίνησης γράφεται τότε ως

$$\partial_+ \partial_- X^\mu = 0, \quad (1.12)$$

όπου  $\partial_\pm = \frac{1}{2}(\partial_\tau \pm \partial_\sigma)$ . Η απαίτηση μηδενισμού του ταυνοστή ενέργειας - ορμής δίνει

$$T_{++} = \partial_+ X^\mu \partial_+ X_\mu = 0, \quad (1.13)$$

$$T_{--} = \partial_- X^\mu \partial_- X_\mu = 0, \quad (1.14)$$

ενώ η σχέση  $T_{+-} = T_{-+} = 0$  εκφράζει το μηδενισμό του ίχνους. Η γενική λύση της κυματικής εξίσωσης (1.12) δίνεται από τη σχέση

$$X^\mu(\sigma, \tau) = x^\mu + l_s^2 p^\mu \tau + i l_s \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-in\tau} \cos n\sigma, \quad (1.15)$$

για την ανοικτή χορδή και από τη σχέση

$$\begin{aligned} X^\mu(\sigma, \tau) &= X_R^\mu(\tau - \sigma) + X_L^\mu(\tau + \sigma) \\ X_R^\mu(\sigma^-) &= \frac{1}{2} x^\mu + \frac{1}{2} l_s^2 p^\mu (\tau - \sigma) + \frac{i}{2} l_s \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-2in(\tau - \sigma)} \\ X_L^\mu(\sigma^+) &= \frac{1}{2} x^\mu + \frac{1}{2} l_s^2 p^\mu (\tau + \sigma) + \frac{i}{2} l_s \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \tilde{\alpha}_n^\mu e^{-2in(\tau + \sigma)} \end{aligned} \quad (1.16)$$

για την κλειστή χορδή, όπου για να εξασφαλίσουμε πραγματική λύση απαιτούμε  $a_{-n}^\mu = (a_n^\mu)^*$  και  $\tilde{a}_{-n}^\mu = (\tilde{a}_n^\mu)^*$ . Τα  $x^\mu$  και  $p^\mu$  είναι η θέση του κέντρου μάζας και η ολική

ορμή της χορδής αντίστοιχα. Η παράμετρος  $l_s$  σχετίζεται με την τάση της χορδής και την παράμετρο Regge slope  $\alpha'$  ως

$$T = \frac{1}{2\pi\alpha'} \quad \text{και} \quad \frac{1}{2}l_s^2 = \alpha', \quad (1.17)$$

ενώ μπορούμε να ταυτοποιήσουμε την ορμή  $p^\mu$  ως το μηδενικό τρόπο του αναπτύγματος ως  $\alpha_0^\mu = l_s p^\mu$  και  $\alpha_0^\mu = \tilde{\alpha}_0^\mu = \frac{1}{2}l_s p^\mu$  για την ανοικτή και την κλειστή χορδή αντίστοιχα.

### 1.1.3 Χαμιλτόνια δυναμική και άλγεβρα Virasoro

Για να προχωρήσουμε σε κανονική κβάντωση, πρέπει να ορίσουμε στη συνέχεια τις κλασικές αγκύλες Poisson. Εισάγοντας λοιπόν την συζυγή ορμή στο  $X^\mu$

$$P^\mu(\sigma, \tau) = \frac{\delta S}{\delta \dot{X}^\mu} = T \dot{X}^\mu, \quad (1.18)$$

ορίζουμε τις κλασικές αγκύλες Poisson ως

$$\begin{aligned} [P^\mu(\sigma, \tau), P^\nu(\sigma', \tau)] &= [X^\mu(\sigma, \tau), X^\nu(\sigma', \tau)] = 0, \\ [P^\mu(\sigma, \tau), X^\nu(\sigma', \tau)] &= \eta^{\mu\nu} \delta(\sigma - \sigma'). \end{aligned} \quad (1.19)$$

Εισάγοντας τα αναπτύγματα για τα  $X^\mu$  και  $\dot{X}^\mu$  στις εξισώσεις αυτές παίρνουμε τις αγκύλες Poisson που ικανοποιούν οι τρόποι ταλάντωσης

$$[\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu] = [\tilde{\alpha}_m^\mu, \tilde{\alpha}_n^\nu] = im\eta^{\mu\nu} \delta_{m+n,0}, \quad (1.20)$$

και

$$[\alpha_m^\mu, \tilde{\alpha}_n^\nu] = 0. \quad (1.21)$$

Η Hamiltonian της δισδιάστατης θεωρίας είναι η

$$H = \int_0^\pi d\sigma (\dot{X} \cdot P - L) = \frac{T}{2} \int_0^\pi (\dot{X}^2 + X'^2) d\sigma. \quad (1.22)$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω εξίσωση τις λύσεις  $X^\mu$ , παίρνουμε τις μορφές

$$H = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n \quad (\text{ανοικτές χορδές}) \quad (1.23)$$

$$H = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} (\alpha_{-n} \cdot \alpha_n + \tilde{\alpha}_{-n} \cdot \tilde{\alpha}_n) \quad (\text{κλειστές χορδές}). \quad (1.24)$$

Εισάγοντας στη συνέχεια τα αναπτύγματα των τρόπων ταλάντωσης στις εξισώσεις δεσμών (1.13) και (1.14), παίρνουμε τους συντελεστές Fourier των ποσοτήτων  $T_{--}$  και  $T_{++}$

$$L_m = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_{m-n} \cdot \alpha_n \quad \text{και} \quad \tilde{L}_m = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} \tilde{\alpha}_{m-n} \cdot \tilde{\alpha}_n, \quad (1.25)$$

που είναι οι γεννήτορες *Virasoro*. Συγκρίνοντας τις σχέσεις αυτές με τις σχέσεις (1.23) και (1.24), παρατηρεί κανείς ότι

$$\frac{1}{2}H = L_0 + \tilde{L}_0 \quad \text{και} \quad H = L_0, \quad (1.26)$$

για τις κλειστές και ανοικτές χορδές αντίστοιχα. Κλασικά, ο μηδενισμός του ταυιστή ενέργειας - ορμής μεταφράζεται ως ο μηδενισμός όλων των συντελεστών Fourier  $L_m$ . Ο κλασικός δεσμός  $L_0 = \tilde{L}_0 = 0$  μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εξαγωγή μιας έκφρασης για τη μάζα της χορδής. Πιο συγκεκριμένα, προκύπτουν οι εκφράσεις

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n \quad \text{και} \quad M^2 = \frac{2}{\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_{-n} \cdot \alpha_n + \tilde{\alpha}_{-n} \cdot \tilde{\alpha}_n), \quad (1.27)$$

για τις ανοικτές και κλειστές χορδές αντίστοιχα. Τέλος, οι γεννήτορες *Virasoro* ικανοποιούν την *άλγεβρα Virasoro*

$$\begin{aligned} [L_m, L_n] &= i(m-n)L_{m+n}, & [\tilde{L}_m, \tilde{L}_n] &= i(m-n)\tilde{L}_{m+n}, \\ [\tilde{L}_m, L_n] &= 0. \end{aligned} \quad (1.28)$$

## 1.2 Κβαντική μποζονική χορδή

Κατά την κβάντωση της μποζονικής χορδής, παίρνει κανείς ένα φάσμα σωματιδίων ανάλογα με τον τρόπο που διεγείρεται η χορδή, σε αντιστοιχία με τις νότες που παράγουν οι χορδές ενός βιολιού κατά την ταλάντωσή τους.

Υπάρχουν τρεις ισοδύναμοι τρόποι που οδηγούν στην κβάντωση των σχετικιστικών χορδών: (α) η κανονική κβάντωση, όπου οι κανονικές μεταβλητές της χορδής γίνονται κβαντομηχανικοί τελεστές, (β) η κβάντωση στον κώνο φωτός, όπου πρώτα επιλύει κανείς κλασικά τις εξισώσεις των δεσμών και μετά κβαντίζει και (γ) η κβάντωση μέσω ολοκληρωμάτων διαδρομών, σε αντιστοιχία με τις συνηθισμένες κβαντικές θεωρίες πεδίου.

Οι τρεις αυτές μέθοδοι έρχονται σε συμφωνία σε περιπτώσεις όπου μπορούν να εφαρμοστούν και οι τρεις, ενώ κάθε μία από αυτές έχει τα δικά της πλεονεκτήματα,

ανάλογα με τη φύση των ερωτημάτων που υπεισέρχονται στην κβαντική θεωρία. Εδώ θα παρουσιαστούν οι δύο πρώτες μέθοδοι κβάντωσης.

### 1.2.1 Κανονική κβάντωση

Ο πιο απλός τρόπος για να οδηγηθεί κανείς στην κβάντωση της κλασικής χορδής, είναι η κανονική κβάντωση, όπου αντικαθιστά κανείς τις αγκύλες Poisson με μεταθέτες σύμφωνα με τον κανόνα  $[ , ]_{P.B} \rightarrow -i[ , ]$ . Παίρνουμε τότε τις σχέσεις

$$[\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu] = [\tilde{\alpha}_m^\mu, \tilde{\alpha}_n^\nu] = m\eta^{\mu\nu} \delta_{m+n}, \quad (1.29)$$

$$\text{και} \quad [\alpha_m^\mu, \tilde{\alpha}_n^\nu] = 0. \quad (1.30)$$

Ορίζοντας

$$\alpha_m^\mu = \frac{1}{\sqrt{m}} a_m^\mu \quad \text{και} \quad \alpha_m^{\mu\dagger} = \frac{1}{\sqrt{m}} a_{-m}^\mu, \quad m > 0,$$

παρατηρούμε τότε ότι ποσότητες  $\alpha_m$  μπορούν να ερμηνευθούν ως τελεστές δημιουργίας και καταστροφής του αρμονικού ταλαντωτή για αρνητικό ή θετικό  $m$  αντίστοιχα. Η θεμελιώδης κατάσταση του ταλαντωτή  $|0\rangle$  ορίζεται δηλαδή να καταστρέφεται από τον  $\alpha_m$ , για  $m > 0$ . Υπάρχει, όμως, μια ασυνήθιστη ιδιότητα σε αυτή τη διαδικασία: οι μεταθέτες των συνιστωσών του χρόνου έχουν αρνητικό πρόσημο

$$[\alpha_m^0, \alpha_m^{0\dagger}] = -1.$$

Η ιδιότητα αυτή οδηγεί σε καταστάσεις αρνητικής norm, κάτι που είναι ασυνεπές για μια φυσική θεωρία, και επομένως θα πρέπει αυτές οι καταστάσεις να εξαλειφθούν.

### 1.2.2 Άλγεβρα Virasoro και φυσικές καταστάσεις

Το γεγονός ότι οι ποσότητες  $\alpha_m$  είναι πλέον τελεστές θα πρέπει να ληφθεί υπ' όψιν στη σχέση (1.25), ώστε να μην υπάρχουν προβλήματα διάταξης. Ορίζουμε λοιπόν τις ποσότητες  $L_m$  ως το normal-ordered άθροισμα των τελεστών  $\alpha_m$

$$L_m = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} : \alpha_{m-n} \cdot \alpha_n :, \quad (1.31)$$

που σημαίνει ότι οι τελεστές καταστροφής εμφανίζονται πάντα δεξιά από τους τελεστές δημιουργίας. Παρατηρεί κανείς τότε ότι το μόνο πρόβλημα εμφανίζεται όταν

$m = 0$ , καθώς για  $m \neq 0$  οι τελεστές  $\alpha_{m-n}, \alpha_n$  μετατίθενται. Ορίζουμε λοιπόν τον τελεστή  $L_0$  να δίνεται από τη normal-orderd έκφραση

$$L_0 = \frac{1}{2}\alpha_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n. \quad (1.32)$$

Από τη στιγμή που μια τυχαία σταθερά θα μπορούσε να εμφανίζεται σε αυτήν την έκφραση, θα πρέπει να προσθέσουμε μια σταθερά (που θα προσδιοριστεί αργότερα) σε όλες τις σχέσεις που περιέχουν τον  $L_0$ , και κυρίως στην άλγεβρα Virasoro. Χρησιμοποιώντας τους μεταθέτες για τους τρόπους ταλάντωσης  $\alpha_m^\mu$ , μπορεί ναδειχθεί ότι στην κβαντική θεωρία οι γεννήτορες Virasoro ικανοποιούν τη σχέση

$$[L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n} + \frac{D}{12}m(m^2 - 1)\delta_{m+n,0}, \quad (1.33)$$

όπου  $D$  είναι η διάσταση του χωροχρόνου.

Η προσθήκη της σταθεράς πρέπει επίσης να ληφθεί υπ' όψιν στην επιβολή των δεσμών, και πιο συγκεκριμένα στην απαίτηση του μηδενισμού του μηδενικού τρόπου του τανυστή ενέργειας - ορμής. Παίρνει τότε κανείς για την περίπτωση της ανοικτής χορδής τη συνθήκη

$$(L_0 - a)|\phi\rangle = 0, \quad (1.34)$$

όπου  $|\phi\rangle$  μια οποιαδήποτε φυσική κατάσταση του συστήματος και  $a$  η σταθερά, η τιμή της οποίας θα προσδιοριστεί παρακάτω. Παρόμοια, για την κλειστή χορδή θα έχουμε

$$(L_0 - a)|\phi\rangle = (\tilde{L}_0 - a)|\phi\rangle = 0. \quad (1.35)$$

Η σταθερά  $a$  συνεισφέρει επίσης στον τελεστή της μάζας. Πράγματι, η συνθήκη (1.34) αντιστοιχεί στη συνθήκη μάζας

$$\alpha' M^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n - a = N - a, \quad (1.36)$$

όπου

$$N = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^\dagger \cdot a_n,$$

είναι ο αριθμητικός τελεστής, ο οποίος έχει ακέραιες ιδιοτιμές. Για την κλειστή χορδή παίρνουμε τη συνθήκη

$$\frac{1}{4}\alpha' M^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n - a = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_{-n} \cdot \tilde{\alpha}_n - a = N - a = \tilde{N} - a. \quad (1.37)$$

Στην κβαντική θεωρία, δε μπορεί να απαιτήσει κανείς ότι ο τελεστής  $L_m$  θα καταστρέφει όλες τις φυσικές καταστάσεις, για όλα τα  $m \neq 0$ , αφού κάτι τέτοιο είναι ασύμβατο με την άλγεβρα Virasoro. Αντί αυτού, έχουμε ότι μια φυσική κατάσταση μπορεί να καταστραφεί μόνο από τους μισούς γεννήτορες Virasoro, πιο συγκεκριμένα

$$L_m|\phi\rangle = 0, \quad m > 0. \quad (1.38)$$

Η συνθήκη αυτή, μαζί με τη συνθήκη μάζας (1.34) χαρακτηρίζουν τη φυσική κατάσταση  $|\phi\rangle$ , ενώ αφού  $L_{-m} = L_m^\dagger$ , θα έχουμε επιπλέον

$$\langle\phi|L_m = 0, \quad m < 0. \quad (1.39)$$

Τέλος, μπορεί ναδειχθεί ότι η απαίτηση ενός φάσματος ελεύθερου από καταστάσεις μηδενικής norm οδηγεί σε συγκεκριμένες τιμές για τις σταθερές  $a$  και  $D$ . Ορίζουμε αρχικά τις spurious καταστάσεις  $|\psi\rangle$ , που είναι αυτές οι οποίες ικανοποιούν τη συνθήκη μάζας και είναι ορθογώνιες με όλες τις φυσικές καταστάσεις  $|\phi\rangle$ . Θα ικανοποιούν δηλαδή τις

$$(L_0 - a)|\psi\rangle = 0 \quad \text{και} \quad \langle\phi|\psi\rangle = 0. \quad (1.40)$$

Ένα παράδειγμα spurious κατάστασης είναι η

$$|\psi\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} L_{-n}|\chi_n\rangle \quad \text{με} \quad (L_0 - a + n)|\chi_n\rangle = 0. \quad (1.41)$$

Εάν μια spurious κατάσταση  $|\psi\rangle$  είναι επιπλέον φυσική, τότε είναι ορθογώνια σε όλες τις φυσικές καταστάσεις συμπεριλαμβανομένου και του εαυτού της, έχει δηλαδή μηδενική norm. Βρίσκοντας λοιπόν την τιμή της σταθεράς  $a$  για τις οποίες εμφανίζονται καταστάσεις μηδενικής norm, οι οποίες ικανοποιούν τις συνθήκες για να είναι και φυσικές καταστάσεις, βρίσκουμε ουσιαστικά το όριο στο οποίο περνάμε από καταστάσεις θετικής σε καταστάσεις αρνητικής norm.

Όταν η σταθερά  $a$  επιλεγεί κατάλληλα, μια κλάση spurious καταστάσεων μηδενικής norm έχει τη μορφή

$$|\psi\rangle = L_{-1}|\chi_1\rangle, \quad (1.42)$$

όπου η  $|\chi_1\rangle$  ικανοποιεί τις (1.41). Απαιτώντας η κατάσταση  $|\psi\rangle$  να είναι φυσική και χρησιμοποιώντας την άλγεβρα Virasoro (1.33), οδηγούμαστε στη σχέση

$$L_1|\psi\rangle = L_1L_{-1}|\chi_1\rangle = (2L_0 + L_{-1}L_1)|\chi_1\rangle = 2(a - 1)|\chi_1\rangle = 0,$$

παίρνουμε δηλαδή την τιμή  $a = 1$ . Η τιμή αυτή αντιστοιχεί δηλαδή στον προσδιορισμό του ορίου διαχωρισμού των φυσικών καταστάσεων θετικής και αρνητικής norm.

Ο αριθμός των καταστάσεων μηδενικής norm αυξάνεται κατά πολύ εάν εκτός της σταθεράς  $a$ , προσδιοριστεί κατάλληλα η τιμή της χωροχρονικής διάστασης  $D$ . Κατασκευάζοντας λοιπόν spurious καταστάσεις μηδενικής norm της μορφής

$$|\psi\rangle = (L_{-2} + \gamma L_{-1}^2)|\tilde{\chi}\rangle, \quad (1.43)$$

όπου<sup>1</sup>  $\gamma = \frac{3}{2}$ . Απαιτώντας η κατάσταση να είναι φυσική και χρησιμοποιώντας την άλγεβρα Virasoro (1.33), παίρνουμε τελικά

$$L_2|\psi\rangle = L_2 \left( L_{-2} + \frac{3}{2}L_{-1}^2 \right) |\tilde{\chi}\rangle = \left( -13 + \frac{D}{2} \right) |\tilde{\chi}\rangle = 0. \quad (1.44)$$

Κατά συνέπεια, η χωροχρονική διάσταση  $D = 26$  δίνει επιπλέον spurious καταστάσεις μηδενικής norm.

### 1.2.3 Κβάντωση στον κώνο φωτός

Ακόμα και μετά την επιλογή της βαθμίδας  $h_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ , παραμένουν κάποιες συμμετρίες της μποζονικής χορδής, που αποτελούνται από όλους τους σύμμορφους μετασχηματισμούς. Υπάρχει τότε η δυνατότητα επιλογής μιας επιπλέον βαθμίδας. Επιλέγοντας μια συγκεκριμένη μη συναλλοίωτη βαθμίδα, είναι δυνατό να περιγράψουμε ένα χώρο Fock ο οποίος είναι ελεύθερος από καταστάσεις αρνητικής norm και να λύσουμε όλες τις συνθήκες Virasoro αντί να τις επιβάλλουμε με τη μορφή δεσμών.

Εισάγουμε αρχικά τις συντεταγμένες κώνου φωτός στο χωρόχρονο

$$X^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(X^0 \pm X^{D-1}). \quad (1.45)$$

Οι  $D$  χωροχρονικές συντεταγμένες  $X^\mu$  αποτελούνται τότε από τις null συντεταγμένες  $X^\pm$  και τις  $D-2$  κάθετες συντεταγμένες  $X^i$ . Σε αυτόν το συμβολισμό, το εσωτερικό γινόμενο δύο τυχαίων διανυσμάτων παίρνει τη μορφή

$$v \cdot w = v_\mu w^\mu = -v^+ w^- - v^- w^+ + \sum_i v^i w^i,$$

<sup>1</sup>Η τιμή της σταθεράς  $\gamma$  προσδιορίζεται εύκολα μέσω της επιβολής των συνθηκών για μια φυσική κατάσταση και της χρήσης της άλγεβρας Virasoro. Περισσότερες λεπτομέρειες μπορούν να βρεθούν στην αναφορά [1].



ενώ οι δείκτες ανεβαίνουν και κατεβαίνουν σύμφωνα με τους κανόνες

$$v^- = -v_+, \quad v^+ = -v_-, \quad \text{και} \quad v^i = v_i.$$

Από τη στιγμή που δύο συντεταγμένες αντιμετωπίζονται διαφορετικά από τις υπόλοιπες, όταν χρησιμοποιούνται οι συντεταγμένες κώνου φωτός χάνεται το αναλλοίωτο της θεωρίας κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz.

Χρησιμοποιώντας λοιπόν την επιπλέον συμμετρία, επαναπαραμετροποιούμε τις null συντεταγμένες της κοσμικής επιφάνειας ως

$$\sigma^\pm \rightarrow \xi^\pm(\sigma^\pm).$$

Οι μετασχηματισμοί αυτοί αντιστοιχούν στους

$$\begin{aligned} \tilde{\tau} &= \frac{1}{2}[\xi^+(\sigma^+) + \xi^-(\sigma^-)], \\ \tilde{\sigma} &= \frac{1}{2}[\xi^+(\sigma^+) - \xi^-(\sigma^-)], \end{aligned}$$

που σημαίνει ότι η συντεταγμένη  $\tilde{\tau}$  είναι λύση της ελεύθερης κυματικής εξίσωσης

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) \tilde{\tau} = 0,$$

ενώ η  $\tilde{\sigma}$  προσδιορίζεται από την  $\tilde{\tau}$  με την προσθήκη μιας σταθεράς.

Στη βαθμίδα  $h_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ , οι χωροχρονικές συντεταγμένες  $X^\mu(\sigma, \tau)$  ικανοποιούν επίσης τη δισδιάστατη κυματική εξίσωση. Η βαθμίδα κώνου φωτός χρησιμοποιεί την ελευθερία που περιγράψαμε παραπάνω ώστε να επιλέξουμε

$$X^+(\tilde{\sigma}, \tilde{\tau}) = x^+ + l_s^2 p^+ \tilde{\tau}, \quad (1.46)$$

που αντιστοιχεί στην επιλογή

$$\alpha_n^+ = 0 \quad \text{για} \quad n \neq 0. \quad (1.47)$$

Όταν γίνει η συγκεκριμένη επιλογή βαθμίδας, υπάρχει ο κίνδυνος να χαθεί το αναλλοίωτο Lorentz λόγω κάποιας κβαντομηχανικής ανωμαλίας. Από τη στιγμή μάλιστα που το αναλλοίωτο κάτω από σύμμορφους μετασχηματισμούς είναι απαραίτητο για την επιλογή της συγκεκριμένης βαθμίδας, μια Lorentz ανωμαλία στην προσέγγιση της βαθμίδας του κώνου φωτός θα αντιστοιχεί σε μια σύμμορφη ανωμαλία σε μια συναλλοίωτη βαθμίδα, η οποία διατηρεί το αναλλοίωτο Lorentz.

Η βαθμίδα κώνου φωτός εξουδετέρωσε τους τρόπους ταλάντωσης του  $X^+$ . Μπορούμε, όμως, να προσδιορίσουμε τους τρόπους ταλάντωσης του  $X^-$ , λύνοντας τους δεσμούς Virasoro  $(\dot{X} \pm X')^2 = 0$ . Στη βαθμίδα κώνου φωτός οι δεσμοί αυτοί γίνονται

$$\dot{X}^- \pm X'^- = \frac{1}{2p^+l_s^2}(\dot{X}^i \pm X'^i)^2. \quad (1.48)$$

Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα για το  $X^-$ , που για μια ανοικτή χορδή είναι

$$X^- = x^- + l_s^2 p^- \tau + il_s \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^- e^{-in\tau} \cos n\sigma, \quad (1.49)$$

παίρνει κανείς από τις δύο παραπάνω σχέσεις

$$\alpha_n^- = \frac{1}{p^+l_s} \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{D-2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} : \alpha_{n-m}^i \alpha_m^i : - a \delta_{n,0} \right). \quad (1.50)$$

Κατά συνέπεια, στη βαθμίδα κώνου φωτός είναι δυνατό να εξουδετερώσουμε τα  $X^+$  και  $X^-$  (εκτός των μηδενικών τρόπων τους) και να εκφράσουμε τη θεωρία με όρους των κάθετων ταλαντωτών.

Η συνθήκη για τη μάζα στη βαθμίδα αυτή είναι η

$$M^2 = -p_\mu p^\mu = 2p^+ p^- - \sum_{i=1}^{D-2} p_i^2 = 2(N - a)/l_s^2, \quad (1.51)$$

όπου

$$N = \sum_{i=1}^{D-2} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i. \quad (1.52)$$

Στη βαθμίδα κώνου φωτός όλες οι διεγερμένες καταστάσεις γεννιούνται δρώντας τους τρόπους  $\alpha_n^i$  πάνω στη θεμελιώδη κατάσταση. Η πρώτη διεγερμένη κατάσταση,  $\alpha_{-1}^i |0; p\rangle$ , ανήκει σε μια αναπαράσταση της ομάδας των στροφών  $SO(D-2)$ . Το αναλλοίωτο Lorentz απαιτεί οι φυσικές καταστάσεις να διαμορφώνουν  $SO(D-1)$  αναπαραστάσεις για καταστάσεις με μάζα και  $SO(D-2)$  για άμαζες καταστάσεις. Κατά συνέπεια, η μποζονική θεωρία στη βαθμίδα κώνου φωτός είναι αναλλοίωτη κατά Lorentz μόνο εφόσον η κατάσταση  $\alpha_{-1}^i |0; p\rangle$  είναι άμαζη, που σημαίνει αμέσως ότι  $a = 1$ .

Έχοντας προσδιορίσει την τιμή του  $a$ , προσδιορίζουμε στη συνέχεια την τιμή της χωροχρονικής διάστασης  $D$ , υπολογίζοντας απ' ευθείας τη normal-ordering σταθερά που εμφανίζεται στον ορισμό του  $L_0$ . Η σταθερά αυτή προσδιορίζεται από τη σχέση

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{D-2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{D-2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} : \alpha_{-n}^i \alpha_n^i : + \frac{1}{2} (D-2) \sum_{n=1}^{\infty} n. \quad (1.53)$$

Το δεύτερο άθροισμα στο δεξί μέλος αποκλίνει και χρειάζεται ομαλοποίηση, η οποία επιτυγχάνεται μέσω της ζ-συνάρτησης. Θεωρούμε αρχικά το γενικό άθροισμα

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}, \quad (1.54)$$

το οποίο ορίζεται για οποιοδήποτε μιγαδικό αριθμό  $s$ . Για  $Re(s) > 1$ , το άθροισμα συγκλίνει στη συνάρτηση  $\zeta(s)$  του Riemann. Η συνάρτηση ζήτα έχει μια μοναδική αναλυτική συνέχιση στο  $s = -1$ , όπου παίρνει την τιμή  $\zeta(-1) = -1/12$ . Κατά συνέπεια, εισάγοντας την τιμή αυτή στην εξίσωση (1.53), το αποτέλεσμα για τον επιπλέον όρο είναι

$$\frac{1}{2}(D-2) \sum_{n=1}^{\infty} n = -\frac{D-2}{24}. \quad (1.55)$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η σταθερά  $a = 1$ , παίρνει κανείς τη συνθήκη

$$\frac{D-2}{24} = 1, \quad (1.56)$$

που σημαίνει ότι η χωροχρονική διάσταση είναι  $D = 26$ .

### Το φάσμα των σωματιδίων

Έχοντας ορίσει λοιπόν τις τιμές των σταθερών  $a, D$ , μπορούμε να προσδιορίσουμε το φάσμα της μποζονικής χορδής. Έχουμε για την ανοικτή χορδή:

- Για  $N = 0$  υπάρχει ένα ταχύοιο  $|0; k\rangle$ , του οποίου η μάζα δίνεται από τη σχέση  $\alpha' M^2 = -1$ .
- Για  $N = 1$  υπάρχει το διανυσματικό μποζόνιο  $\alpha_{-1}^i |0; k\rangle$ , το οποίο είναι άμαζο όπως εξηγήθηκε προηγουμένως.
- Για  $N = 2$  παίρνουμε τις πρώτες καταστάσεις με θετική μάζα. Είναι οι

$$\alpha_{-2}^i |0; k\rangle \quad \text{και} \quad \alpha_{-1}^i \alpha_{-1}^j |0; k\rangle, \quad (1.57)$$

με  $\alpha' M^2 = 1$ .

Όλες αυτές οι καταστάσεις έχουν θετική norm, αφού κατασκευάζονται αποκλειστικά από τους κάθετους τρόπους. Απουσιάζουν, δηλαδή, οι μη φυσικές καταστάσεις αρνητικής norm.

Αντίστοιχα μπορεί να πάρει κανείς το φάσμα των φυσικών καταστάσεων για την περίπτωση της κλειστής χορδής. Η θεμελιώδης κατάσταση ( $N = 0$ ) που προκύπτει εκεί είναι επίσης ένα ταχυόνιο, ενώ για  $N = 1$  προκύπτουν ένα άμαζο σωματίδιο με σπιν 2, το βαρυτόνιο (graviton), καθώς και ένα άμαζο βαθμωτό πεδίο, το *dilaton*. Εάν η κβαντική βαρύτητα είχε το φορμαλισμό μιας κβαντικής θεωρίας πεδίου, το graviton θα ήταν ο φορέας της βαρυτικής αλληλεπίδρασης, όπως ακριβώς το φωτόνιο είναι ο φορέας της ηλεκτρομαγνητικής αλληλεπίδρασης. Η θεωρία χορδών έχει μια τέτοια “πεδιακή” θεώρηση των πραγμάτων, οπότε και η εμφάνιση του graviton στο φάσμα των σωματιδίων συνεπάγεται αυτόματα την ύπαρξη της βαρυτικής αλληλεπίδρασης στη θεωρία.

### 1.3 Χορδές σε πεδία υποβάθρου

Μέχρι τώρα έχουμε περιγράψει τη διάδοση των χορδών στον επίπεδο 26-διάστατο χώρο Minkowski. Μπορούμε, όμως, να γενικεύσουμε τη δράση (1.1), έτσι ώστε να συμπεριλάβουμε κάποια επιπλέον πεδία που σχετίζονται με άμαζα μποζονικά πεδία στο φάσμα, καθώς και να περιγράψουμε την κίνηση της χορδής σε ένα πιο γενικό 26-διάστατο χωρόχρονο, με μετρικό ταυυστή  $g_{\mu\nu}$ . Η μετρική εμφανίζεται ως πεδίο υποβάθρου μέσω του όρου

$$S_g = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_M \sqrt{-h} \epsilon^{\alpha\beta} g_{\mu\nu}(X) \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu d^2z. \quad (1.58)$$

Το αντισυμμετρικό 2-form πεδίο βαθμίδας  $B_{\mu\nu}$  εμφανίζεται ως πεδίο υποβάθρου με τον όρο

$$S_B = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_M \epsilon^{\alpha\beta} B_{\mu\nu}(X) \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu d^2z, \quad (1.59)$$

όπου  $\epsilon^{\alpha\beta}$  είναι ο πλήρως αντισυμμετρικός ταυυστής δεύτερης τάξης. Ο όρος αυτός εμφανίζεται μόνο σε θεωρίες προσανατολισμένων μποζονικών χορδών και μπορεί να ειδωθεί ως ένα 2-form ανάλογο της σύζευξης ενός 1-form πεδίου Maxwell με την κοσμική γραμμή ενός φορτισμένου σωματιδίου,

$$S_A = q \int A_\mu \dot{x}^\mu d\tau. \quad (1.60)$$

Κατά συνέπεια, οι χορδές σε αυτές τις θεωρίες είναι κατά μία έννοια φορτισμένες και κουβαλάνε το λεγόμενο φορτίο Kalb-Ramond.

Τέλος, το dilaton εμφανίζεται στη δράση μέσω του όρου

$$S_\Phi = \frac{1}{4\pi} \int_M \sqrt{h} \Phi(X) R^{(2)}(h) d^2 z, \quad (1.61)$$

όπου  $R^{(2)}$  είναι το βαθμωτό Ricci σε δύο διαστάσεις.

Το μοντέλο αυτό, όμως, δεν είναι σύμμορφα αναλλοίωτο. Με κάποιους υπολογισμούς, βρίσκει κανείς ότι το ίχνος του ταυνοστή ενέργειας - ορμής δεν είναι μηδενικό, όπως θα έπρεπε, αλλά ίσο με

$$T_\alpha^\alpha = -\frac{1}{2\alpha'} (\beta_{\mu\nu}^G g^{\alpha\beta} + \beta_{\mu\nu}^B \varepsilon^{\alpha\beta}) \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu - \frac{1}{2} \beta^\Phi R, \quad (1.62)$$

όπου οι  $\beta$ -συναρτήσεις βρίσκονται από το  $\sigma$ -μοντέλο διαταραχτικά ως προς την παράμετρο  $\alpha' \rightarrow 0$ ,

$$\begin{aligned} \beta_{\mu\nu}^G &= \alpha' \left( R_{\mu\nu} + 2\nabla_\mu \nabla_\nu \Phi - \frac{1}{4} H_{\mu\kappa\sigma} H_\nu^{\kappa\sigma} \right) + O(\alpha'^2), \\ \beta_{\mu\nu}^B &= \alpha' \left( -\frac{1}{2} \nabla^\kappa H_{\kappa\mu\nu} + \nabla^\kappa \Phi H_{\kappa\mu\nu} \right) + O(\alpha'^2), \\ \beta^\Phi &= \alpha' \left( \frac{D-26}{6\alpha'} - \frac{1}{2} \nabla^2 \Phi + \nabla_\kappa \Phi \nabla^\kappa \Phi - \frac{1}{24} H_{\kappa\mu\nu} H^{\kappa\mu\nu} \right) + O(\alpha'^2), \end{aligned}$$

όπου  $H_{\mu\nu\kappa} \equiv \partial_\mu B_{\nu\kappa} + \partial_\nu B_{\kappa\mu} + \partial_\kappa B_{\mu\nu}$ . Για να επανακτήσουμε τη συμμετρία πρέπει να ικανοποιούνται οι συνθήκες

$$\beta_{\mu\nu}^G = \beta_{\mu\nu}^B = \beta^\Phi = 0. \quad (1.63)$$

Οι συνθήκες αυτές είναι εξισώσεις δεύτερης τάξης για τα πεδία υποβάθρου και μπορούν να προκύψουν από μια δράση της μορφής

$$S \sim \int d^D X \sqrt{-g} e^{-2\Phi} \left[ R + 4\nabla_\mu \Phi \nabla^\mu \Phi - \frac{1}{12} H_{\mu\nu\lambda} H^{\mu\nu\lambda} - \frac{2(D-26)}{3\alpha'} + O(\alpha') \right]. \quad (1.64)$$

### Ο ρόλος του dilaton

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η σύζευξη της χορδής (string coupling),  $g_s$ , δεν είναι μια σταθερά, αλλά η τιμή της δίνεται από την τιμή ενός από τα πεδία υποβάθρου της θεωρίας. Πιο συγκεκριμένα, δίνεται από το dilaton, και ισχύει ότι

$$g_s = e^{\langle \Phi \rangle}. \quad (1.65)$$

Έτσι, η μόνη ελεύθερη παράμετρος της θεωρίας είναι η τάση της χορδής. Το dilaton ορίζει δηλαδή το διαταρακτικό ανάπτυγμα της θεωρίας χορδών. Ο ειδικός αυτός ρόλος του dilaton γίνεται εμφανής εάν θεωρήσουμε την περίπτωση όπου το  $\Phi$  είναι σταθερό.

Στην περίπτωση όπου το  $\Phi$  είναι σταθερό, η ολοκληρωτέα ποσότητα της σχέσης (1.61) γίνεται μια ολική παράγωγος, που σημαίνει ότι η τιμή του ολοκληρώματος καθορίζεται από την ολική τοπολογία της κοσμικής επιφάνειας, και ο όρος αυτός δε συνεισφέρει στις κλασικές εξισώσεις κίνησης. Το τοπολογικό αναλλοίωτο που προκύπτει είναι το χαρακτηριστικό *Euler*,

$$\chi(M) = \frac{1}{4\pi} \int_M \sqrt{h} R^{(2)}(h) d^2z, \quad (1.66)$$

και σχετίζεται με τον αριθμό των χερουλιών (handles)  $n_h$ , των συνόρων  $n_b$  και τον αριθμό των cross-caps<sup>2</sup>  $n_c$  της Ευκλείδειας κοσμικής επιφάνειας  $M$  μέσω της σχέσης

$$\chi(M) = 2 - 2n_h - n_b - n_c. \quad (1.67)$$

Στη θεωρία χορδών υπάρχουν διαφορετικές κλάσεις διαταρακτικών αναπτυγμάτων, που διαφέρουν στο κατά πόσον οι θεμελιώδεις χορδές είναι προσανατολισμένες ή όχι, καθώς και εάν εκτός των κλειστών χορδών στη θεωρία συμπεριλαμβάνονται και ανοικτές χορδές. Όλες αυτές οι περιπτώσεις μπορούν να ειπωθούν ως διαφορετικές εκδοχές της μποζονικής χορδής. Σε μια θεωρία όπου υπάρχουν μόνο κλειστές χορδές δεν υπάρχουν σύνορα στην κοσμική επιφάνεια, καθώς αυτά προκύπτουν από τα άκρα των ανοικτών χορδών. Επιπλέον, σε μια θεωρία προσανατολισμένων χορδών η κοσμική επιφάνεια έχει προσανατολισμό, οπότε και δεν υπάρχουν καθόλου cross-caps.

Η τοπολογικά απλούστερη περίπτωση είναι τότε μια θεωρία με προσανατολισμένες, κλειστές χορδές, χωρίς καθόλου ανοικτές χορδές. Αυτή είναι και η περίπτωση των υπερχορδών Τύπου II και των ετεροτικών χορδών που θα περιγράψουμε στο κεφάλαιο 4. Για τις θεωρίες αυτές, οι μόνες πιθανές τοπολογίες για την κοσμική επιφάνεια της χορδής είναι κλειστές και προσανατολισμένες επιφάνειες Riemann, οι τοπολογίες των οποίων χαρακτηρίζονται απόλυτα από το γένος  $n_h$ , το οποίο αντιστοιχεί ακριβώς στον αριθμό των string loops.

Από τη στιγμή που το χαρακτηριστικό Euler καθορίζεται μόνο από το γένος στις θεωρίες των κλειστών προσανατολισμένων χορδών, υπάρχει μόνο ένα διάγραμμα

<sup>2</sup>Ta cross-caps είναι δισδιάστατες επιφάνειες, που είναι τοπολογικά ισοδύναμες με την ταινία του Moebius.

Feynman σε κάθε τάξη του διαταρακτικού αναπτύγματος. Ο πολύ μεγάλος αριθμός των διαγραμμάτων Feynman που εμφανίζουν οι θεωρίες πεδίου οι οποίες προσεγγίζουν αυτές τις θεωρίες χορδών στο όριο των χαμηλών ενεργειών αντιστοιχούν στους διάφορους πιθανούς εκφυλισμούς των αντίστοιχων επιφανειών Riemann. Επιπλέον, οι θεωρίες αυτές δεν εμφανίζουν ultraviolet (UV) αποκλίσεις, για κάθε τάξη της θεωρίας διαταραχών, που σημαίνει ότι αυτές οι θεωρίες χορδών είναι ουσιαστικά UV πεπερασμένες θεωρίες κβαντικής βαρύτητας.

Η άλλη πιθανότητα είναι να συμπεριλάβει κανείς και ανοικτές χορδές σε μια θεωρία χορδών, οι οποίες να είναι και μη προσανατολισμένες. Η περίπτωση αυτή αντιστοιχεί στη θεωρία υπερχορδών Τύπου I. Τότε υπάρχουν cross-caps στην κοσμική επιφάνεια, καθώς και σύνορα στα άκρα των ανοικτών χορδών, τα οποία είναι οι D-branes που θα εισαχθούν στο επόμενο κεφάλαιο. Επομένως, σε τέτοιες θεωρίες, η τοπολογία δεν καθορίζεται μόνο από το γένος  $n_h$ , αλλά πρέπει να ληφθούν υπ' όψιν και οι αριθμοί  $n_b$  και  $n_c$ , οπότε και οι θεωρίες είναι πιο πολύπλοκες. Τέλος, η ακύρωση των UV αποκλίσεων σε αυτές τις θεωρίες είναι εφικτή μόνο όταν συνδυαστούν όλα τα διαγράμματα με ίδιο χαρακτηριστικό Euler.

## Κεφάλαιο 2

# T-δυσισμός και D-branes

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε τον T-δυσισμό, μια ακριβή συμμετρία της θεωρίας χορδών. Ο T-δυσισμός ήταν ήδη γνωστός από τη δεκαετία του '80, αλλά η μεγάλη του σημασία έγινε εμφανής στα μέσα της δεκαετίας του '90, όταν και παρατηρήθηκε ότι εφαρμόζοντάς τον πάνω σε ανοικτές χορδές προκύπτουν κάποια εκτεταμένα, δυναμικά αντικείμενα στη θεωρία. Τα αντικείμενα αυτά δεν είναι παρά οι D-branes, οι οποίες θεωρούνται πλέον θεμελιώδη συστατικά της θεωρίας χορδών και χρησιμοποιούνται εκτεταμένα σε πολλά θέματα.

### 2.1 Πεδία και χορδές σε κύκλο

Ξεκινάμε το κεφάλαιο αυτό περιγράφοντας τι συμβαίνει στην περίπτωση όπου έχουμε βαρύτητα σε χωρόχρονο με μία συμπαγοποιημένη διάσταση, καθώς και την ανάλογη περίπτωση για μια κλειστή χορδή, η οποία τυλίγεται γύρω από τη συγκεκριμένη αυτή κατεύθυνση.

#### 2.1.1 Η ιδέα Kaluza-Klein

Υποθέτουμε ότι βρισκόμαστε σε έναν 5-διάστατο χωρόχρονο ο οποίος έχει μια συμπαγή διεύθυνση, έχει δηλαδή τοπολογία  $\mathbb{R}^4 \times S^1$ , και ο οποίος περιγράφεται από τη μετρική  $g_{MN}$ ,  $M, N = 0, \dots, 4$ . Έχουμε δηλαδή τις συνήθεις 4-διάστατες συντεταγμένες στον  $\mathbb{R}^4$ ,  $(x^\mu, \mu = 0, \dots, 3)$  και μια περιοδική συντεταγμένη,  $x^4 = x^4 + 2\pi R$ , όπου  $R$  είναι η ακτίνα του κύκλου.

Ο μετασχηματισμός συντεταγμένων  $x^M \rightarrow x'^M = x^M + \epsilon^M(x)$  είναι συμμετρία



της θεωρίας, κάτω από τον οποίο

$$g_{MN} \rightarrow g'_{MN} = g_{MN} - \partial_M \epsilon_N - \partial_N \epsilon_M, \quad (2.1)$$

ενώ η μετρική έχει τη φυσική αποσύνθεση σε  $g_{\mu\nu}^{(5)}$ ,  $g_{44}^{(5)}$  και  $g_{\mu 4}^{(5)}$ , όπου ο πάνω δείκτης συμβολίζει τη διάσταση.

Εξετάζοντας την κλάση των μετασχηματισμών  $\epsilon_4(x^\mu)$ ,  $\epsilon_\mu = 0$ , που αντιστοιχούν σε μια ανεξάρτητη των  $x^\mu$  περιστροφή πάνω στον κύκλο, παρατηρούμε ότι οι  $g_{\mu\nu}^{(5)}$  και  $g_{44}^{(5)}$  είναι αναλλοίωτες, και

$$g_{\mu 4}^{(5)} \rightarrow g'_{\mu 4}{}^{(5)} = g_{\mu 4}^{(5)} - \partial_\mu \epsilon_4(x). \quad (2.2)$$

Από μια 4-διάστατη οπτική, όμως, η ποσότητα  $g_{44}^{(5)}$  είναι βαθμωτή, η  $g_{\mu\nu}^{(5)}$  είναι ανάλογη της μετρικής, και η  $g_{\mu 4}^{(5)}$  είναι ένα διάνυσμα. Κατά συνέπεια, η εξίσωση (2.2) είναι απλά ένας  $U(1)$  μετασχηματισμός βαθμίδας της μορφής

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \Lambda(x). \quad (2.3)$$

Με αυτόν τον τρόπο, μπορεί να θεωρηθεί ότι ο ηλεκτρομαγνητισμός  $U(1)$  μπορεί να προκύψει από τη συμπαγοποίηση της βαρύτητας, με το πεδίο βαθμίδας να είναι μια εσωτερική συνιστώσα της μετρικής. Η ιδέα των Kaluza και Klein χρησιμοποιήθηκε αρχικά για την ενοποίηση της βαρύτητας με τον ηλεκτρομαγνητισμό. Στηρίζεται στην υπόθεση ότι η ακτίνα  $R$  είναι τόσο μικρή, έτσι ώστε ο κόσμος φαίνεται να είναι 4-διάστατος σε μεγάλες κλίμακες, οι φυσικές ποσότητες της θεωρίας είναι δηλαδή ανεξάρτητες της  $x^4$ .

### 2.1.2 Κλειστές χορδές σε κύκλο

Κάνοντας τους μετασχηματισμούς

$$\tau \rightarrow -i\tau \quad \text{και} \quad z = e^{\tau - i\sigma}, \quad (2.4)$$

παίρνει κανείς μια μετρική που είναι σύμμορφη με τη μετρική του μιγαδικού επιπέδου, και μπορεί να τη χρησιμοποιήσει για την περιγραφή της κοσμικής επιφάνειας. Κάτω από τους μετασχηματισμούς αυτούς, το ανάπτυγμα (1.16) για τις κλειστές χορδές μπορεί να γραφτεί και ως

$$X^\mu(z, \bar{z}) = X_L^\mu(z) + X_R^\mu(\bar{z})$$

$$\begin{aligned}
X_L^\mu(z) &= \frac{1}{2}x^\mu - i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\alpha_0^\mu \ln z + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu z^{-n} \\
X_R^\mu(\bar{z}) &= \frac{1}{2}x^\mu - i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\tilde{\alpha}_0^\mu \ln \bar{z} + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \tilde{\alpha}_n^\mu \bar{z}^{-n},
\end{aligned} \tag{2.5}$$

ή πιο απλά, χωρίζοντας τους όρους των ταλαντωτών από τους υπόλοιπους,

$$X^\mu(z, \bar{z}) = \frac{x^\mu}{2} + \frac{\tilde{x}^\mu}{2} - i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}(\alpha_0^\mu + \tilde{\alpha}_0^\mu)\tau + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}(\alpha_0^\mu - \tilde{\alpha}_0^\mu)\sigma + \text{oscillators}, \tag{2.6}$$

όπου έχουμε ήδη αντικαταστήσει την ορμή της χορδής

$$p^\mu = \frac{1}{\sqrt{2\alpha'}}(\alpha_0^\mu + \tilde{\alpha}_0^\mu). \tag{2.7}$$

Κάνοντας μια περιστροφή πάνω στη χορδή, δηλαδή για  $\sigma \rightarrow \sigma + 2\pi$ , παίρνουμε

$$X^\mu(z, \bar{z}) \rightarrow X^\mu(z, \bar{z}) + 2\pi\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}(\alpha_0^\mu - \tilde{\alpha}_0^\mu). \tag{2.8}$$

Μέχρι τώρα, έχουμε θεωρήσει την περίπτωση όπου όλες οι χωρικές διαστάσεις είναι μη συμπαγοποιημένες. Κατά συνέπεια, η συνάρτηση  $X^\mu(z, \bar{z})$  θα πρέπει να είναι μονότιμη, δίνοντας τη συνθήκη

$$\alpha_0^\mu = \tilde{\alpha}_0^\mu = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}p^\mu. \tag{2.9}$$

Θεωρούμε στη συνέχεια την περίπτωση όπου έχουμε μία συμπαγοποιημένη διεύθυνση, έστω την  $X^{25}$ , ακτίνας  $R$ . Η ορμή  $p^{25}$  παίρνει τότε τις διακριτές τιμές  $n/R$ , για  $n \in \mathbb{Z}$ . Κάτω από την αλλαγή  $\sigma \rightarrow \sigma + 2\pi$  τώρα, η  $X^{25}(z, \bar{z})$  δεν είναι μονότιμη, και μπορεί να αλλάξει κατά  $2\pi wR$ , για  $w \in \mathbb{Z}$ . Λύνοντας τις εξισώσεις που προκύπτουν, παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\alpha_0^{25} &= \left(\frac{n}{R} + \frac{wR}{\alpha'}\right) \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \equiv P_L \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \\
\tilde{\alpha}_0^{25} &= \left(\frac{n}{R} - \frac{wR}{\alpha'}\right) \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \equiv P_R \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Ο ακέραιος  $n$  ονομάζεται *αριθμός διέγερσης Kaluza-Klein* (excitation number), ενώ ο ακέραιος  $w$  είναι ο *αριθμός περιτύλιξης* (winding number), και εκφράζει πόσες φορές τυλίγεται η χορδή γύρω από τον κύκλο. Η μάζα δίνεται τώρα από τη σχέση

$$M^2 = -p^\mu p_\mu = \frac{2}{\alpha'}(\alpha_0^{25})^2 + \frac{4}{\alpha'}(N - 1)$$

$$= \frac{2}{\alpha'} (\tilde{\alpha}_0^{25})^2 + \frac{4}{\alpha'} (\tilde{N} - 1). \quad (2.11)$$

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση, καθώς και τις σχέσεις (2.10), παίρνουμε

$$\begin{aligned} M^2 &= \frac{n^2}{R^2} + \frac{w^2 R^2}{\alpha'^2} + \frac{2}{\alpha'} (N + \tilde{N} - 2) \\ nw &= \tilde{N} - N. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Συγκρίνοντας τις εξισώσεις αυτές με τις εξισώσεις της απλής μποζονικής χορδής (1.37), παρατηρεί κανείς τις διορθώσεις που υπεισέρχονται λόγω της συμπαγοποίησης της κατεύθυνσης  $X^{25}$ .

## 2.2 T-δυϊσμός για κλειστές χορδές

Εξετάζοντας τώρα τις σχέσεις (2.12), παρατηρούμε ότι αυτές είναι αναλλοίωτες κάτω από την αλλαγή

$$n \leftrightarrow w \quad \text{και} \quad R \leftrightarrow R' \equiv \alpha'/R. \quad (2.13)$$

Αυτή η συμμετρία της μποζονικής χορδής ονομάζεται T-δυϊσμός (T-duality), και σημαίνει ότι η συμπαγοποίηση σε έναν κύκλο ακτίνας  $R$  είναι φυσικά ισοδύναμη με τη συμπαγοποίηση σε έναν κύκλο ακτίνας  $R'$ , αλλάζοντας ταυτόχρονα την ορμή με την περιτύλιξη της χορδής. Έχουμε δηλαδή δύο θεωρίες χορδών οι οποίες είναι φυσικά ισοδύναμες. Η θεωρία χορδών που ορίζεται στον κύκλο ακτίνας  $R'$  ονομάζεται T-δυϊκή θεωρία.

Από τις σχέσεις (2.10) προκύπτει επίσης ότι ο παραπάνω μετασχηματισμός μπορεί να εκφραστεί και ως

$$\alpha_0^{25} \rightarrow \alpha_0^{25} \quad \text{και} \quad \tilde{\alpha}_0^{25} \rightarrow -\tilde{\alpha}_0^{25}. \quad (2.14)$$

Οι δυϊκές θεωρίες είναι μάλιστα ισοδύναμες όχι μόνο όσον αφορά το μηδενικό τρόπο ταλάντωσης, αλλά σε ολόκληρο το φάσμα, καθώς έχουμε

$$X^{25}(z, \bar{z}) = X^{25}(z) + X^{25}(\bar{z}) \rightarrow X'^{25}(z, \bar{z}) = X^{25}(z) - X^{25}(\bar{z}). \quad (2.15)$$

Επίσης, η συμμετρία αυτή της θεωρίας αφήνει αναλλοίωτες τις φυσικές ποσότητες, όπως τον ταχυστή ενέργειας - ορμής, άρα και τις συναρτήσεις συσχέτισης που αναπαριστούν τα πλάτη σκέδασης. Κατά συνέπεια, τέτοιες θεωρίες είναι φυσικά ισοδύναμες μεταξύ τους.

## 2.3 T-δυσμός για ανοικτές χορδές

Περνώντας στις ανοικτές χορδές, το πρώτο πράγμα που παρατηρεί κανείς εφαρμόζοντας τον T-δυσμό είναι ότι αυτές δεν έχουν τρόπους περιτύλιξης. Τοπολογικά, μια ανοικτή χορδή μπορεί πάντα να συμπιεστεί σε ένα σημείο, οπότε ο αριθμός περιτύλιξης δεν έχει κάποιο νόημα. Επομένως θα πρέπει να συμβαίνει κάτι διαφορετικό κατά το μετασχηματισμό των ανοικτών χορδών.

Στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε ότι το ανάπτυγμα σε τρόπους ταλάντωσης για μια ανοικτή χορδή έχει τη μορφή

$$X(\tau, \sigma) = x^\mu + 2\alpha' p^\mu \tau + i(2\alpha')^{1/2} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-in\tau} \cos(n\sigma). \quad (2.16)$$

Μπορούμε να χωρίσουμε το ανάπτυγμα σε δύο όρους, γράφοντας δηλαδή  $X^\mu(z, \bar{z}) = X^\mu(z) + X^\mu(\bar{z})$ , όπως και στην περίπτωση των κλειστών χορδών, χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς (2.4), παίρνοντας τότε

$$\begin{aligned} X^\mu(z) &= \frac{x^\mu}{2} + \frac{x'^\mu}{2} - i\alpha' p^\mu \ln z + i \left( \frac{\alpha'}{2} \right)^{1/2} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu z^{-n}, \\ X^\mu(\bar{z}) &= \frac{x^\mu}{2} - \frac{x'^\mu}{2} - i\alpha' p^\mu \ln \bar{z} + i \left( \frac{\alpha'}{2} \right)^{1/2} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu \bar{z}^{-n}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

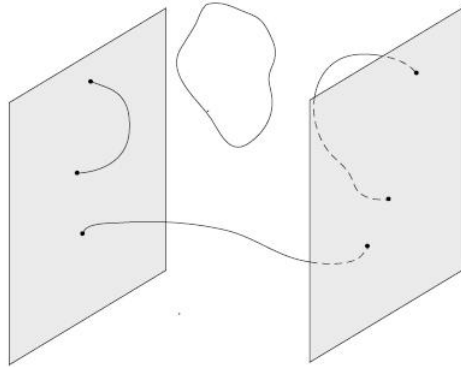
Τοποθετώντας στη συνέχεια τη συντεταγμένη  $X^{25}$  πάνω σε έναν κύκλο ακτίνας  $R$ , η T-δυσική συντεταγμένη  $X'^{25}$  θα είναι η

$$\begin{aligned} X'^{25}(z, \bar{z}) &= X^{25}(z) - X^{25}(\bar{z}) \\ &= x'^{25} + 2\alpha' \frac{n}{R} \sigma + i(2\alpha')^{1/2} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^{25} e^{-n\tau} \sin n\sigma. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Παρατηρούμε αρχικά ότι η δυσική ανοικτή χορδή έχει μηδενική ορμή στη διεύθυνση  $X^{25}$ , καθώς δεν περιέχει όρους γράμμικούς ως προς  $\tau$ . Έτσι, η κίνηση εκεί είναι μόνο ταλαντούμενη. Ακόμη, οι όροι ταλάντωσης μηδενίζονται στα άκρα της χορδής για  $\sigma = 0, \pi$ , που σημαίνει ότι τα άκρα δεν κινούνται καθόλου στη  $X'^{25}$  διεύθυνση. Αυτό σημαίνει ότι ο T-δυσμός έχει μετατρέψει τις συνοριακές συνθήκες Neumann σε συνοριακές συνθήκες Dirichlet (και vice versa) στις σχετικές διευθύνσεις. Πιο συγκεκριμένα, οι συνοριακές συνθήκες είναι οι

$$X'^{25}(\pi) - X'^{25}(0) = \frac{2\pi\alpha'n}{R} = 2\pi n R', \quad (2.19)$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει τις σχέσεις  $p = n/R$  και  $R' = \alpha'/R$  για τη δυϊκή ακτίνα. Η χορδή αυτή τυλίγεται γύρω από τον δυϊκό κύκλο  $n$  φορές, κάτι που είναι τοπολογικά ευσταθές, αφού τα άκρα της χορδής είναι σταθερά από τις συνοριακές συνθήκες Dirichlet, οπότε η χορδή δε μπορεί να ξετυλιχτεί χωρίς να σπάσει.



Σχήμα 2.1. Dp-branes και ανοικτές χορδές που τελειώνουν πάνω τους<sup>1</sup>.

Τα άκρα της χορδής βρίσκονται λοιπόν πάνω σε μια υπερεπιφάνεια, η οποία ονομάζεται Dirichlet-Brane ή D-brane για συντομία. Πιο γενικά, μια D-brane ορίζεται ως μια υπερεπιφάνεια πάνω στην οποία βρίσκεται το άκρο μιας χορδής. Οι D-branes δεν είναι τυχαίες τοποθεσίες στον κενό χώρο, αλλά φυσικά, δυναμικά αντικείμενα, των οποίων η διάσταση συμβολίζεται με  $p$  και καθορίζεται από τον αριθμό των χωρικών διαστάσεων. Στο παραπάνω παράδειγμα,  $p = 24$ , οπότε λέμε ότι στην T-δυϊκή θεωρία, οι ανοικτές χορδές έχουν Dirichlet συνοριακές συνθήκες πάνω στον δυϊκό κύκλο, και τα άκρα τους βρίσκονται πάνω σε μια D24-brane.

Οι διακυμάνσεις των D-branes περιγράφονται από το φάσμα των (διαταρακτικών) ανοικτών χορδών που βρίσκονται πάνω τους. Κατά συνέπεια, από τη στιγμή που τα όρια χαμηλών ενεργειών των θεωριών ανοικτών χορδών είναι γενικά θεωρίες βαθμίδας, πάνω στις D-branes θα υπάρχουν κάποια πεδία βαθμίδας, τα οποία προέρχονται από το φάσμα των ανοικτών χορδών.

<sup>1</sup>Το σχήμα 2.1, καθώς και όλα τα υπόλοιπα της εργασίας προέρχονται από την αναφορά [1]

## 2.4 Παράγοντες Chan-Paton και γραμμές Wilson

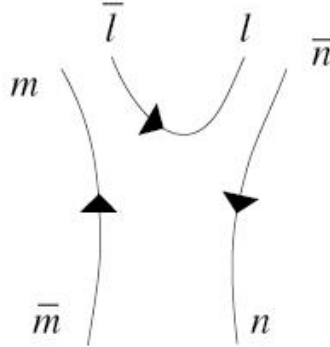
Είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο ότι όταν εφαρμόσει κανείς τον T-δυσισμό σε μια ανοικτή χορδή με συνοριακές συνθήκες Neumann, προκύπτει αβίαστα μια Dp-brane. Στην παρούσα παράγραφο περιγράφουμε τι συμβαίνει όταν υπάρχουν παραπάνω από μία Dp-branes αντί για μία στη θεωρία. Πιο συγκεκριμένα, θα δούμε ότι εμφανίζονται μη αβελιανές συμμετρίες βαθμίδας στη θεωρία.

Μια ανοικτή χορδή μπορεί να έχει επιπλέον βαθμούς ελευθερίας στα άκρα της που ονομάζονται *φορτία Chan-Paton*, οι οποίοι εισήχθησαν αρχικά για να περιγράψουν τους κβαντικούς αριθμούς των quarks και anti-quarks, όταν η θεωρία χορδών φιλοδοξούσε να περιγράψει τις ισχυρές αλληλεπιδράσεις. Οι παράγοντες Chan-Paton συσχετίζουν  $N$  βαθμούς ελευθερίας με κάθε άκρο της χορδής. Στην περίπτωση των προσανατολισμένων ανοικτών χορδών, τα δύο άκρα της χορδής είναι διακρίσιμα μεταξύ τους, οπότε και έχει νόημα να αντιστοιχίσουμε τη θεμελιώδη αναπαράσταση  $\mathbf{N}$  με το  $\sigma = 0$  άκρο και την (αντι)-θεμελιώδη αναπαράσταση  $\bar{\mathbf{N}}$  με το  $\sigma = \pi$  άκρο. Με αυτόν τον τρόπο, μπορεί κανείς να περιγράψει την ομάδα βαθμίδας  $U(N)$ .

Με την ανακάλυψη των D-branes, συνειδητοποιήθηκε ότι οι δείκτες Chan-Paton των ανοικτών χορδών αντιστοιχούν απλά στις διαφορετικές D-branes, σε μια διάταξη με πολλαπλές D-branes. Ο παράγοντας  $[ij]$  σημαίνει δηλαδή ότι το ένα άκρο της ανοικτής χορδής βρίσκεται στην  $i$ -οστή D-brane, ενώ το άλλο άκρο στην  $j$ -οστή D-brane, σε μια διάταξη όπου υπάρχουν  $N > i, j$  D-branes. Κατά συνέπεια, τα φορτία Chan-Paton είναι μη δυναμικοί βαθμοί ελευθερίας της θεωρίας, έτσι ώστε μπορούμε να αντιστοιχίσουμε ένα δείκτη με κάθε σύνορο της κοσμικής επιφάνειας σε μια διαδικασία σκέδασης, όπως αυτή που απεικονίζεται στο σχήμα 2.2. Το πλάτος σκέδασης περιέχει έναν επιπλέον παράγοντα

$$\delta^{ii'} \delta^{jj'} \delta^{kk'} \lambda_{ij}^1 \lambda_{j'k}^2 \lambda_{k'i'}^3 = \text{Tr}(\lambda^1 \lambda^2 \lambda^3), \quad (2.20)$$

που προέρχεται από τους πίνακες Chan-Paton. Οι πίνακες  $\lambda$  κωδικοποιούν τις καταστάσεις φορτίου των χορδών όπως περιγράφεται παρακάτω. Για ένα σύνορο στο εσωτερικό της κοσμικής επιφάνειας, θα πρέπει κανείς να αθροίσει στον αντίστοιχο δείκτη Chan-Paton, δίνοντας έτσι έναν παράγοντα  $N$ . Εξασφαλίζεται έτσι ότι τα πλάτη σκέδασης είναι αναλλοίωτα κάτω από τη συμμετρία  $U(N)$ .



Σχήμα 2.2. Μια αλληλεπίδραση που περιλαμβάνει τρεις ανοικτές χορδές.

Μια βάση των καταστάσεων της ανοικτής χορδής στο χώρο  $\mathbb{R}^{25,1}$  μπορεί να γραφτεί ως

$$|\phi, k, ij\rangle, \quad (2.21)$$

όπου  $\phi$  οι συνήθεις καταστάσεις του χώρου Fock,  $k$  η ορμή και  $i, j = 1, 2, \dots, N$  τα φορτία Chan-Paton στα άκρα της χορδής. Η κατάσταση αυτή μετασχηματίζεται με φορτίο  $+1$  κάτω από την  $U(1)_i$  και φορτίο  $-1$  κάτω από την  $U(1)_j$ . Για να περιγράψουμε μια τυχαία κατάσταση, πρέπει να εισάγουμε  $N^2$  ερμιτιανούς πίνακες, τους πίνακες Chan-Paton  $\lambda_{ij}$ , που είναι πίνακες αναπαράστασης της άλγεβρας  $U(N)$ . Μια τυχαία κατάσταση μπορεί να εκφραστεί τότε ως γραμμικός συνδυασμός

$$|\phi, k, \lambda\rangle = \sum_{i,j=1}^N |\phi, k, ij\rangle \lambda_{ij}. \quad (2.22)$$

Οι καταστάσεις γίνονται πλέον πίνακες που μετασχηματίζονται στη συζυγή αναπαράσταση της  $U(N)$ . Υπάρχουν τώρα  $N^2$  ταχύονια,  $N^2$  άμαζα διανυσματικά μποζόνια κλπ.

Σε μια θεωρία συμπαγοποιημένη σε έναν κύκλο, ένα επίπεδο δυναμικό<sup>2</sup> μπορεί να οδηγήσει σε μη τετριμμένα φαινόμενα, ανάλογα με το φαινόμενο Aharonov-Bohm. Εάν η συνιστώσα του δυναμικού βαθμίδας στον κύκλο παίρνει μη μηδενικές σταθερές τιμές, δίνει έναν πίνακα ολονομίας, τη γραμμή Wilson

$$U = \exp i \int_0^{2\pi R} A dx. \quad (2.23)$$

<sup>2</sup>Επίπεδο δυναμικό είναι το δυναμικό το οποίο δίνει μηδενικό τανυστή δύναμης, δηλαδή  $F = dA + A \wedge A = 0$ .

Διαγωνοποιώντας τον ερμιτιανό πίνακα  $A$ , μπορούμε να τον γράψουμε στη μορφή

$$A = -\frac{1}{2\pi R} \text{diag}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N). \quad (2.24)$$

Η παρουσία των μη μηδενικών πεδίων βαθμίδας, που χαρακτηρίζονται από τη γραμμή Wilson, σπάει τη  $U(N)$  συμμετρία βαθμίδας. Για παράδειγμα, εάν όλες οι ιδιοτιμές του  $U$  είναι διαφορετικές, τότε η συμμετρία  $U(N)$  σπάει στη συμμετρία  $U(1)^N$ .

Παρουσία των γραμμών Wilson η ορμή μιας κατάστασης  $|\phi, k, ij\rangle$  μετατοπίζεται ώστε η κυματοσυνάρτηση γίνεται

$$e^{ip2\pi R} = e^{-i(\theta_i - \theta_j)}. \quad (2.25)$$

Κατά συνέπεια, η ορμή στην κυκλική διεύθυνση γίνεται κλασματική

$$p = \frac{n}{R} - \frac{\theta_i - \theta_j}{2\pi R}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (2.26)$$

Εφαρμόζοντας στη συνέχεια τους κανόνες του T-δυϊσμού, βρίσκουμε ότι οι  $\theta_i$  περιγράφουν τη γωνιακή θέση στο δυϊκό κύκλο των  $N$  D24-branes. Από τη στιγμή μάλιστα που η ορμή απεικονίζεται στον αριθμό περιτύλιξης, ο κλασματικός αριθμός Kaluza-Klein που εισάγεται από τη γραμμή Wilson απεικονίζεται σε έναν κλασματικό αριθμό περιτύλιξης. Αυτό σημαίνει ότι η ανοικτή χορδή τυλίγεται σε ένα μέρος μόνο του κύκλου, συνδέει δηλαδή δύο διαφορετικές D-branes. Μόνο όταν  $\theta_i = \theta_j$  έχουμε ακέραιο αριθμό περιτύλιξης. Από την εξίσωση (2.19), παίρνουμε ότι

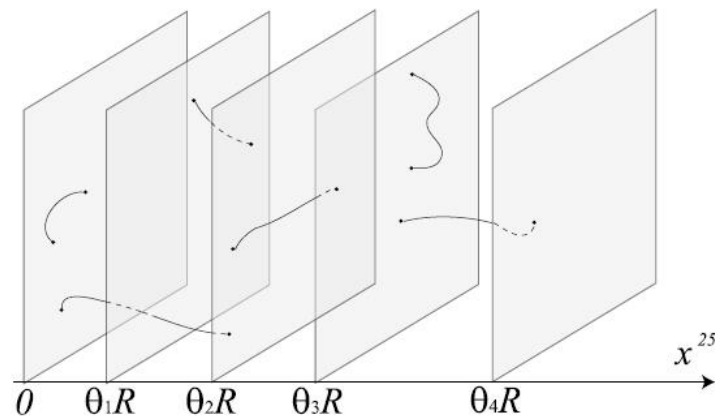
$$X'_{25}(\pi) - X'_{25}(0) = (2\pi n + \theta_j - \theta_i)R'. \quad (2.27)$$

Με άλλα λόγια, το άκρο της χορδής στην κατάσταση  $i$  είναι στη θέση

$$X'_{25} = \theta_i R' = 2\pi \alpha' A_{25,ii}. \quad (2.28)$$

Έχουμε δηλαδή εν γένει  $N$  υπερεπιφάνειες σε διαφορετικές θέσεις, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.3.





Σχήμα 2.3. Μια συλλογή από D-branes με ανοικτές χορδές πάνω τους. Οι πέντε παράλληλες D-branes δίνουν μια συμμετρία βαθμίδας  $U(1)^5$ .

Οι μάζες των σωματιδίων της συγκεκριμένης θεωρίας είναι

$$M_{ij}^2 = \left( \frac{n}{R} + \frac{\theta_j - \theta_i}{2\pi R} \right)^2 + \frac{1}{\alpha'} (N - 1). \quad (2.29)$$

Εάν όλες οι  $\theta_i$  είναι διαφορετικές, οι μόνες άμαζες διανυσματικές καταστάσεις είναι αυτές που προκύπτουν από χορδές που αρχίζουν και τελειώνουν στην ίδια D-brane χωρίς να τυλίγονται γύρω από τον κύκλο. Κατά συνέπεια, όταν οι D-branes δε συμπίπτουν, υπάρχουν  $N$  διαφορετικά άμαζα  $U(1)$  διανύσματα. Η συμμετρία είναι δηλαδή η  $U(1)^N$ .

Εάν δύο  $\theta_i$  είναι ίσες, ώστε δύο D-branes συμπίπτουν, δύο επιπλέον καταστάσεις γίνονται άμαζες. Η συμμετρία γίνεται δηλαδή  $U(1) \times U(1) \rightarrow U(2)$ . Εάν οι D-branes απομακρυνθούν, η συμμετρία σπάει ξανά. Κατά συνέπεια, η δυνατότητα ύπαρξης πολλαπλών D-branes που συμπίπτουν, δίνει έναν τρόπο κατανόησης μη αβελιανών συμμετριών βαθμίδας στη θεωρία χορδών.

Τέλος, πρέπει να σημειωθεί ότι από τη στιγμή που ο T-δυϊσμός εναλλάσσει τις συνοριακές συνθήκες Neumann και Dirichlet, ένας επιπλέον T-δυϊσμός σε μια εφαπτομενική διεύθυνση μιας Dp-brane θα τη μετατρέψει σε D(p-1)-brane, ενώ ένας T-δυϊσμός σε μια ορθογώνια διεύθυνση τη μετατρέπει σε μια D(p+1)-brane.

## Κεφάλαιο 3

# Πεδία υποβάθρου και δράσεις κοσμικού όγκου

Στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε ότι η δράση του T-δυσμού υποδεικνύει ότι η θεωρία χορδών αντιλαμβάνεται αρκετά διαφορετικά το την έννοια του χωροχρόνου από τις υπόλοιπες θεωρίες της φυσικής. Επιπλέον, εκτός από το γεγονός ότι ο T-δυσμός είναι μια ακριβής συμμετρία της θεωρίας, η εφαρμογή του αναδεικνύει νέα φαινόμενα και έννοιες και χρησιμοποιείται εκτεταμένα σε πολλές πτυχές της θεωρίας των χορδών. Ήδη είδαμε ότι εφαρμόζοντας τον T-δυσμό στις ανοικτές χορδές, προκύπτουν αβίαστα και φυσικά οι D-branes.

Μέχρι τώρα παρουσιάστηκε η εφαρμογή του T-δυσμού σε επίπεδο χωρόχρονο. Στο παρόν κεφάλαιο θα γενικεύσουμε αρχικά τα αποτελέσματα για μη τετριμμένη γεωμετρία, όπου υπάρχουν και τα πεδία υποβάθρου που εισήχθησαν στο πρώτο κεφάλαιο. Στη συνέχεια, από τη στιγμή που οι D-branes είναι δυναμικά, και όχι στατικά αντικείμενα της θεωρίας, θα παρουσιάσουμε κάποια δράση κοσμικού όγκου που χρησιμοποιεί κανείς για την περιγραφή τους στη θεωρία χορδών.

### 3.1 T-δυσμός σε πεδία υποβάθρου

Η πρώτη παρατήρηση που μπορεί να κάνει κανείς είναι ότι ο T-δυσμός δρα μη τετριμμένα στο dilaton, και κατά συνέπεια αλλάζει τη σύζευξη της χορδής. Μετά τη συμπαγοποίηση μιας διάστασης σε κύκλο, η 25-διάστατη σύζευξη της χορδής είναι  $g_s = e^{\Phi}(2\pi R)^{-1/2}$ . Αφού όμως η T-δυσική θεωρία θα πρέπει να είναι ισοδύναμη με

την απλή θεωρία, η T-δυστική σύζευξη της χορδής  $\tilde{g}_s = e^{\tilde{\Phi}}(2\pi R')^{-1/2}$  θα πρέπει να είναι ίση με τη  $g_s$ . Παίρνουμε δηλαδή

$$e^{\tilde{\Phi}} = e^{\Phi} \frac{\alpha'^{1/2}}{R}, \quad (3.1)$$

όπου  $\tilde{\Phi}$  το dilaton της δυστικής θεωρίας.

Μπορούμε, όμως, να δούμε τη γενικότερη δράση του T-δυσμού στα πεδία υποβάθρου. Ξεκινώντας από το  $\sigma$ -μοντέλο της παραγράφου 1.3, υποθέτουμε αρχικά ότι τα πεδία υποβάθρου  $g_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}, \Phi$  είναι ανεξάρτητα της συμπαγοποιημένης διεύθυνσης  $X^{25}$ . Μπορούμε να γράψουμε μια ισοδύναμη δράση εισάγοντας έναν πολλαπλασιαστή Lagrange, που συμβολίζουμε με  $X'^{25}$

$$S_\sigma = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma h^{1/2} \left\{ h^{\alpha\beta} [G_{25,25} u_\alpha u_\beta + 2G_{25\mu} u_\alpha \partial_\beta X^\mu + G_{\mu\nu} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu] \right. \\ \left. + \varepsilon^{\alpha\beta} [2B_{25\mu} u_\alpha \partial_\beta X^\mu + B_{\mu\nu} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu + 2X'^{25} \partial_\alpha u_\beta] + \alpha' R \Phi \right\}. \quad (3.2)$$

Από τη στιγμή που η εξίσωση κίνησης για τον πολλαπλασιαστή Lagrange είναι

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X'^{25}} = \varepsilon^{\alpha\beta} \partial_\alpha u_\beta = 0, \quad (3.3)$$

μπορούμε να γράψουμε μια λύση ως  $u_\beta = \partial_\beta \phi$  για οποιοδήποτε βαθμωτό  $\phi$ , το οποίο είναι ουσιαστικά το  $X^{25}$ , αφού η αντικατάσταση της λύσης στη δράση μας δίνει την αρχική δράση των πεδίων υποβάθρου.

Μπορούμε, όμως, να βρούμε την εξίσωση κίνησης για την ποσότητα  $u_\alpha$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_\alpha} - \frac{\partial}{\partial \sigma_\beta} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta u_\alpha)} \right) = 0, \quad (3.4)$$

ή

$$h^{\alpha\beta} [G_{25,25} u_\beta + G_{25\mu} \partial_\beta X^\mu] + \varepsilon^{\alpha\beta} [B_{25\mu} \partial_\beta X^\mu + \partial_\beta X'^{25}] = 0, \quad (3.5)$$

την οποία λύνοντας ως προς  $u_\alpha$  και αντικαθιστώντας στην εξίσωση (3.2), παίρνουμε μια δράση που έχει τη μορφή του αρχικού  $\sigma$ -μοντέλου, αλλά με τα πεδία  $\tilde{g}_{\mu\nu}$  και  $\tilde{B}_{\mu\nu}$  να δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{25,25} &= \frac{1}{G_{25,25}}, & e^{2\tilde{\Phi}} &= \frac{e^{2\Phi}}{G_{25,25}}, \\ \tilde{G}_{\mu 25} &= \frac{B_{\mu 25}}{G_{25,25}}, & \tilde{B}_{\mu 25} &= \frac{G_{\mu 25}}{G_{25,25}}, \\ \tilde{G}_{\mu\nu} &= G_{\mu\nu} - \frac{G_{\mu 25} G_{\nu 25} - B_{\mu 25} B_{\nu 25}}{G_{25,25}}, \\ \tilde{B}_{\mu\nu} &= B_{\mu\nu} - \frac{B_{\mu 25} G_{\nu 25} - G_{\mu 25} B_{\nu 25}}{G_{25,25}}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

όπου ένας one-loop (όχι σε tree-level) υπολογισμός δίνει και το νέο dilaton.

## 3.2 Δράσεις κοσμικού όγκου

Οι D-branes είναι δυναμικά αντικείμενα, και ως τέτοια, επηρεάζονται από τις τιμές των διαφόρων πεδίων υποβάθρου της θεωρίας. Ένας τρόπος περιγραφής των D-branes, άλλωστε, είναι μέσω των ανοικτών χορδών που τελειώνουν πάνω σε αυτές. Από τη στιγμή λοιπόν που οι ανοικτές χορδές επηρεάζονται από τα πεδία υποβάθρου, το ίδιο θα πρέπει να συμβαίνει και για τις D-branes. Κατά συνέπεια, θα θέλαμε να βρούμε μια δράση κοσμικού όγκου (world-volume action) για τις D-branes, που να περιγράφει τη δυναμική τους.

Εισάγωντας τις συντεταγμένες  $\xi^\alpha$ ,  $\alpha = 0, \dots, p$  πάνω στη βράνη, μπορούμε αρχικά να γράψουμε μια δράση αντίστοιχη του  $\sigma$ -μοντέλου που περιγράφει την κίνηση της χορδής. Όπως είδαμε προηγουμένως, τα πεδία πάνω στη βράνη θα είναι το εμβαπτισμένο  $X^\mu(\xi)$  και το πεδίο βαθμίδας  $A_\alpha(\xi)$ . Αγνοώντας σε πρώτη φάση το πεδίο βαθμίδας, η δράση θα είναι η

$$S_p = -T_p \int d^{p+1}\xi e^{-\Phi} \sqrt{\det G_{\alpha\beta}}, \quad (3.7)$$

όπου  $T_p$  είναι η τάση της Dp-brane και  $G_{\alpha\beta}$  η επαγόμενη μετρική πάνω στη βράνη

$$G_{\alpha\beta} \equiv \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^\beta} G_{\mu\nu}, \quad (3.8)$$

όπου  $G_{\mu\nu}$  η μετρική του χωρόχρονου. Βέβαια, η δράση αυτή δεν είναι η κατάλληλη για την περιγραφή των D-branes, καθώς λείπουν από αυτήν το πεδίο υποβάθρου  $B_{\mu\nu}$  καθώς και το πεδίο βαθμίδας. Η κατάλληλη δράση θα παρουσιαστεί στην επόμενη παράγραφο.

Μπορούμε, όμως, να βρούμε μια σχέση για την τάση της D-brane από την απλή δράση (3.7). Η τάση της βράνης ελέγχει την αντίδρασή της σε εξωτερικούς παράγοντες που τείνουν να αλλάξουν το σχήμα της, να απορροφήσουν ενέργεια κλπ, όπως ακριβώς συμβαίνει και με την τάση της χορδής. Χρησιμοποιώντας λοιπόν τον T-δυσμό, μπορούμε να βρούμε μια χρήσιμη σχέση που συνδέει τις τάσεις διαφορετικών D-branes. Η μάζα μιας Dp-brane τυλιγμένης γύρω από έναν  $p$ -τόρο,  $T^p$ , είναι

$$T_p e^{-\Phi} \prod_{i=1}^p (2\pi R_i). \quad (3.9)$$

Εφαρμόζοντας τον T-δυσμό στη διεύθυνση  $X^p$  και χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό του dilaton (3.1), μπορούμε να ξαναγράψουμε τη μάζα στις δυϊκές μεταβλητές

ως

$$T_p(2\pi\sqrt{\alpha'})e^{-\Phi'}\prod_{i=1}^{p-1}(2\pi R_i) = T_{p-1}e^{-\Phi'}\prod_{i=1}^{p-1}(2\pi R_i). \quad (3.10)$$

Κατά συνέπεια,

$$T_p = \frac{T_{p-1}}{2\pi\sqrt{\alpha'}}, \quad (3.11)$$

ή εφαρμόζοντας τον δυϊσμό επαναληπτικά, παίρνουμε τη γενική σχέση

$$T_p = T_{p'}(2\pi\sqrt{\alpha'})^{p'-p}. \quad (3.12)$$

Γενικότερα όμως, η τάση μιας Dp-brane για τυχαία τιμή του  $p$  αποδεικνύεται [1] ότι δίνεται από τη σχέση

$$T_{D_p} = \frac{1}{g_s(2\pi)^p(\alpha')^{(p+1)/2}}, \quad (3.13)$$

όπου χρησιμοποιείται η τιμή της  $g_s$  της θεωρίας Τύπου ΙΙΑ εάν το  $p$  είναι άρτιο ή της θεωρίας Τύπου ΙΙΒ εάν το  $p$  είναι περιττό.

### 3.2.1 Η δράση Born-Infeld

Υπάρχουν διάφοροι τρόποι που διαλέγει κανείς ώστε να εξάγει τους όρους της δράσης κοσμικού όγκου. Ένας από αυτούς είναι η χρήση του T-δυϊσμού. Θεωρούμε μια D2-brane που βρίσκεται στις διευθύνσεις  $X^1$  και  $X^2$ , καθώς και ένα σταθερό πεδίο βαθμίδας  $F_{12}$ . Μπορούμε να διαλέξουμε μια βαθμίδα στην οποία  $A_2 = X^1 F_{12}$ . Εφαρμόζοντας τώρα τον T-δυϊσμό στη διεύθυνση  $X^2$  και χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.28), παίρνουμε

$$X'^2 = 2\pi\alpha' X^1 F_{12}, \quad (3.14)$$

που σημαίνει ότι η D1-brane που προκύπτει σχηματίζει γωνία

$$\theta = \tan^{-1}(2\pi\alpha' F_{12}), \quad (3.15)$$

με τον άξονα  $X'^2$ . Έχουμε έτσι ένα γεωμετρικό παράγοντα στη δράση της D1-brane

$$S \sim \int_{D1} ds = \int dX^1 \sqrt{1 + (\partial_1 X'^2)^2} = \int dX^1 \sqrt{1 + (2\pi\alpha' F_{12})^2}. \quad (3.16)$$

Μπορούμε πάντα να 'σπρώξουμε' την D-brane ώστε να ευθυγραμμιστεί με τους άξονες συντεταγμένων, και μετά να την περιστρέψουμε ώστε να φέρουμε το  $F_{\mu\nu}$  σε

διαγώνια μορφή. Με αυτόν τον τρόπο ανάγει κανείς το πρόβλημα σε ένα γινόμενο παραγόντων όπως και στην προηγούμενη σχέση, δίνοντας μια ορίζουσα

$$S \sim \int d^D X \sqrt{\det(\eta_{\mu\nu} + 2\pi\alpha' F_{\mu\nu})}. \quad (3.17)$$

Η δράση (3.17) είναι η δράση Born-Infeld. Η δράση αυτή είναι μάλιστα και η πλήρης δράση για μια D25-brane που γεμίζει όλο τον επίπεδο χώρο, και με τα dilaton και  $B_{\mu\nu}$  να είναι μηδενικά. Η πλήρης δράση για μια τυχαία D-brane, με μη μηδενικά πεδία υποβάθρου περιγράφεται στην επόμενη παράγραφο.

### 3.3 Η δράση Dirac-Born-Infeld

Ξεκινάμε λοιπόν από τη δράση (3.17), όπου  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ , και υποθέτουμε ότι  $D - p - 1$  χωρικές συντεταγμένες είναι πολύ μικροί κύκλοι, αρκετά μικροί ώστε να μπορούμε να αγνοήσουμε τις αντίστοιχες παραγώγους. Οι συμπαγοποιημένες συντεταγμένες θα συμβολίζονται με  $X^m$ ,  $m = p + 1, \dots, D - 1$ , ενώ οι υπόλοιπες με  $X^\alpha$ ,  $\alpha = 0, \dots, p$ . Στην περίπτωση αυτή, ο πίνακας η ορίζουσα του οποίου εμφανίζεται στην (3.17) είναι ο

$$\begin{pmatrix} N & -A^T \\ A & M \end{pmatrix}, \quad (3.18)$$

όπου

$$N = \eta_{\alpha\beta} + 2\pi\alpha' F_{\alpha\beta}, \quad M = \delta_{mn}, \quad A = 2\pi\alpha' \partial_\alpha A_m. \quad (3.19)$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η ορίζουσα μπορεί να γραφτεί ως  $|M||N + A^T M^{-1} A|$ , η δράση γίνεται τότε [6]

$$S \sim - \int d^{p+1} X \sqrt{\det(\eta_{\alpha\beta} + \partial_\alpha X^m \partial_\beta X_m + 2\pi\alpha' F_{\alpha\beta})}, \quad (3.20)$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει τη σχέση (2.28) για να αντικαταστήσουμε τα πεδία βαθμίδας στις T-δυϊκές διευθύνσεις.

Η πλήρης δράση προκύπτει τελικά εισάγοντας μια μη τετριμμένη μετρική και τα πεδία  $B_{\mu\nu}$  και dilaton, και έχει τη μορφή

$$S_p = -T_p \int d^{p+1} \xi e^{-\Phi} \sqrt{\det(G_{\alpha\beta} + B_{\alpha\beta} + 2\pi\alpha' F_{\alpha\beta})}. \quad (3.21)$$

Η δράση (3.21) ονομάζεται δράση Dirac-Born-Infeld, και είναι η δράση μιας Dp-brane για τυχαία πεδία υποβάθρου.

### 3.4 Μη-Αβελιανή επέκταση

Η περίπτωση των  $N$  D-branes είναι πιο πολύπλοκη, καθώς τα διάφορα πεδία πάνω στη βράνη,  $A_\alpha$  και  $X^m$ , γίνονται πίνακες. Στην Αβελιανή περίπτωση, τα πεδία υποβάθρου,  $F_\mu$ , εξαρτώνται από τις πολωμένες συντεταγμένες  $X^m$ . Στη μη-Αβελιανή περίπτωση, με  $N$  D-branes, οι πολωμένες συντεταγμένες είναι  $N \times N$  πίνακες,  $2\pi\alpha'\Phi^m$ , καθώς είναι T-δυϊκές με μη-Αβελιανά πεδία βαθμίδας. Κατά συνέπεια, τα πεδία υποβάθρου  $F_\mu$  θα εμφανίζουν πλέον στη δράση εξάρτηση και από τα μη-Αβελιανά μέρη ως  $F(\Phi)_\mu$ .

Επιπλέον, στη δράση (3.21) χρησιμοποιήσαμε τις μερικές παραγώγους  $\partial_\alpha X^\mu$  σε σχέσεις της μορφής  $F_\alpha = F_\mu \partial_\alpha X^\mu$ . Για να είναι αυτές οι σχέσεις συναλλοίωτες στη μη-Αβελιανή περίπτωση, θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τη συναλλοίωτη παράγωγο ως

$$F_\alpha = F_\mu \mathcal{D}_\alpha X^\mu = F_\mu (\partial_\alpha X^\mu + [A_\alpha, X^\mu]). \quad (3.22)$$

Η εισαγωγή όλων αυτών των μη-Αβελιανών ποσοτήτων απαιτεί τη χρήση του ίχνους, ώστε να έχουμε αναλλοίωτες ποσότητες κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας, για τη χρήση τους στη δράση. Έχοντας κανείς στη διάθεσή του τη νέα δράση, μπορεί να χρησιμοποιήσει ξανά τον T-δυϊσμό ώστε να βρει τη μορφή των χαμηλότερων διαστάσεων, Dp-brane δράσεων. Η μόνη διαφορά με την ανάλυση των προηγούμενων παραγράφων, είναι ότι κρατούνται όροι που περιέχουν μεταθέτες, όπως οι  $[A_\alpha, \Phi^m]$  και  $[\Phi^m, \Phi^n]$ . Μετά από τους απαιτούμενους υπολογισμούς, η δράση στην οποία καταλήγει κανείς [6] είναι η

$$S_p = -T_p \int d^{p+1} \xi e^{-\Phi} \mathcal{L}, \quad \text{όπου} \quad (3.23)$$

$$\mathcal{L} = \text{Tr} \left\{ \sqrt{\det [E_{\alpha\beta} + E_{\alpha i} (Q^{-1} - \delta)^{ij} E_{j\beta} + 2\pi\alpha' F_{\alpha\beta}] \det [Q_j^i]} \right\},$$

όπου  $E_{ij} = g_{ij} + B_{ij}$  και  $Q_j^i = \delta_j^i + 2\pi\alpha' [\Phi^i, \Phi^k] E_{kj}$ .

## Κεφάλαιο 4

# Υπερσυμμετρικές χορδές

Η μποζονική χορδή που παρουσιάστηκε στα προηγούμενα κεφάλαια παρουσιάζει δύο σημαντικά μειονεκτήματα. Το πρώτο είναι ότι στο φάσμα των σωματιδίων εμφανίζονται ταχυονικές καταστάσεις, οι οποίες είναι αφύσικες και θα πρέπει να εξαλειφθούν. Το δεύτερο είναι ότι η θεωρία περιγράφει μόνο μποζόνια και καθόλου φερμιόνια.

Τα δύο αυτά προβλήματα επιλύονται με την εισαγωγή της υπερσυμμετρίας στη θεωρία των χορδών. Υπάρχουν πέντε υπερσυμμετρικές θεωρίες χορδών, ελεύθερες από ανωμαλίες, τρεις από τις οποίες ονομάζονται *υπερχορδές*, ενώ οι υπόλοιπες δύο είναι οι *ετεροτικές χορδές*.

Υπάρχουν κυρίως δύο εναλλακτικοί φορμαλισμοί που χρησιμοποιούνται για τη μελέτη των υπερσυμμετρικών χορδών - ή απλά *υπερχορδών* για συντομία. Ο πρώτος είναι ο *φορμαλισμός RNS*, που αναπτύχθηκε από τους Ramond, Neveu και Schwarz, όπου εισάγεται η υπερσυμμετρία στην κοσμική επιφάνεια της χορδής.

Ο δεύτερος είναι ο *φορμαλισμός GS*, που αναπτύχθηκε από τους Green και Schwarz, ο οποίος είναι υπερσυμμετρικός στο 10-διάστατο χωρόχρονο. Οι δύο αυτές προσεγγίσεις για την περιγραφή των υπερχορδών είναι ισοδύναμες. Στην παρούσα εργασία θα παρουσιαστεί ο φορμαλισμός RNS.

### 4.1 Το μοντέλο RNS

Στον φορμαλισμό RNS, εκτός των συναρτήσεων  $X^\mu(\sigma, \tau)$  που περιγράφουν την εμβάπτιση της κοσμικής επιφάνειας στο χωρόχρονο, εισάγει κανείς τα φερμιονικά πεδία  $\psi^\mu(\sigma, \tau)$ , ώστε να γίνει η θεωρία υπερσυμμετρική. Τα  $X^\mu$  μετασχηματίζονται ως διανύσματα από την οπτική του χωρόχρονου, αλλά ως βαθμωτά πεδία από την οπτική



της κοσμικής επιφάνειας. Αντίστοιχα, τα  $\psi^\mu$  μετασχηματίζονται ως χωροχρονικά διανύσματα, αλλά ως σπίνορες στην κοσμική επιφάνεια.

Διαλέγοντας μια κατάλληλη σύμμορφη βαθμίδα, μαζί με μια κατάλληλη φερμιονική συνθήκη βαθμίδας, παίρνει κανείς μια θεωρία με ολική υπερσυμμετρία, που συμπληρώνεται από διάφορους δεσμούς. Οι δεσμοί αυτοί σχηματίζουν μια άλγεβρα υπερ-Virasoro, γενικεύοντας την απλή άλγεβρα Virasoro της μποζονικής χορδής.

### 4.1.1 Η δράση της θεωρίας

Η ολικά υπερσυμμετρική δράση της θεωρίας έχει τη μορφή

$$S = -\frac{T}{2} \int d^2\sigma (\partial_\alpha X^\mu \partial^\alpha X_\mu - i \bar{\psi}^\mu \rho^\alpha \partial_\alpha \psi_\mu). \quad (4.1)$$

Ο πρώτος όρος είναι ο ίδιος με τον όρο της δράσης της μποζονικής χορδής, ενώ ο δεύτερος εισάγει τα άμαζα σπινωριακά πεδία. Οι ποσότητες  $\rho^\alpha$  είναι  $2 \times 2$  πίνακες Dirac, ενώ τα πεδία  $\psi = \begin{pmatrix} \psi_- \\ \psi_+ \end{pmatrix}$  είναι σπίνορες Majorana δύο συνιστωσών. Η συνθήκη Majorana σημαίνει ότι τα  $\psi_+$  και  $\psi_-$  είναι πραγματικά σε μια κατάλληλη αναπαράσταση της άλγεβρας Dirac. Μία βολική επιλογή είναι αυτή για την οποία

$$\bar{\psi} \rho^\alpha \partial_\alpha \psi = \psi_- \partial_+ \psi_- + \psi_+ \partial_- \psi_+, \quad (4.2)$$

όπου με  $\partial_\pm$  αναπαρίστανται οι παράγωγοι ως προς τις συντεταγμένες  $\sigma^\pm = \tau \pm \sigma$ . Στη βάση αυτή, οι εξισώσεις κίνησης είναι απλά οι

$$\partial_+ \psi_-^\mu = \partial_- \psi_+^\mu = 0. \quad (4.3)$$

Τα  $\psi_-^\mu$  περιγράφουν τους δεξιά κινούμενους τρόπους ταλάντωσης, ενώ τα  $\psi_+^\mu$  τους αριστερά κινούμενους. Η ύπαρξη της υπερσυμμετρίας φαίνεται από το αναλλοίωτο της δράσης κάτω από τους μετασχηματισμούς

$$\begin{aligned} \delta X^\mu &= i \epsilon \psi_-^\mu \\ \delta \psi_-^\mu &= -2 \partial_- X^\mu \epsilon, \end{aligned} \quad (4.4)$$

ενώ αντίστοιχη συμμετρία υπάρχει και για τους αριστερά κινούμενους τρόπους.

Στη συνέχεια χρειάζεται να ορίσουμε τις συνοριακές συνθήκες, κάτι που επιτυγχάνεται απαιτώντας το μηδενισμό των επιφανειακών όρων κατά τη μεταβολή της δράσης. Στην περίπτωση των ανοικτών χορδών αρχικά, η απαίτηση αυτή δίνει ότι

$\psi_+ = \pm\psi_-$  στα δύο άκρα της χορδής  $\sigma = 0, \pi$ . Το ολικό πρόσημο είναι ζήτημα σύμβασης, οπότε παίρνουμε

$$\psi_+^\mu(0, \tau) = \psi_-^\mu(0, \tau), \quad (4.5)$$

χωρίς βλάβη γενικότητας. Έχουμε με αυτόν τον τρόπο δύο πιθανότητες για το άλλο άκρο της χορδής, παίρνοντας τους τομείς Ramond (R) και Neveu-Schwarz (NS)

$$\begin{aligned} \text{R} &: \psi_+^\mu(\pi, \tau) = \psi^\mu(\pi, \tau) \\ \text{NS} &: \psi_+^\mu(\pi, \tau) = -\psi^\mu(\pi, \tau). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Μπορούμε τότε να εκφράσουμε τις γενικές λύσεις ως σειρές Fourier,

$$\begin{aligned} \text{R} &: \psi_-^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n^\mu e^{-in(\tau-\sigma)} \\ &\psi_+^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n^\mu e^{-in(\tau+\sigma)} \\ \text{NS} &: \psi_-^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{r \in \mathbb{Z}+1/2} b_r^\mu e^{-ir(\tau-\sigma)} \\ &\psi_+^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{r \in \mathbb{Z}+1/2} b_r^\mu e^{-ir(\tau+\sigma)} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Η συνθήκη Majorana σημαίνει ότι  $d_{-n}^\mu = d_n^{\mu\dagger}$  και  $b_{-r}^\mu = b_r^{\mu\dagger}$ . Οι δείκτες  $n$  και  $r$  παίρνουν ακέραιες και ημιακέραιες τιμές αντίστοιχα, οπότε η συνοριακή συνθήκη R δίνει έναν μηδενικό τρόπο ταλάντωσης.

Στην περίπτωση των κλειστών χορδών, μπορούμε να κάνουμε τα  $\psi_+$  και  $\psi_-$  είτε περιοδικά (συνοριακές συνθήκες R) είτε αντιπεριοδικά (συνοριακές συνθήκες NS)

$$\begin{aligned} \psi_+(\pi, \tau) &= \pm\psi_+^\mu(0, \tau), \\ \psi_-(\pi, \tau) &= \pm\psi_-^\mu(0, \tau). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Κατά συνέπεια, για τις κλειστές χορδές έχει κανείς τέσσερις φερμιονικές συνοριακές συνθήκες, τους συνδυασμούς R-R, NS-R, R-NS, NS-NS. Τα αναπτύγματα Fourier για τις κλειστές χορδές είναι ανάλογα με αυτά των ανοικτών.

### 4.1.2 Κβάντωση του μοντέλου RNS

Η κανονική κβάντωση του μοντέλου RNS γίνεται σε αντιστοιχία με την κβάντωση της μποζονικής χορδής. Αρχικά, θα παρουσιάσουμε την περίπτωση των ανοικτών

χορδών. Οι μεταθετικές σχέσεις των  $\alpha_m^\mu$  είναι ίδιες με αυτές της μποζονικής χορδής, ενώ οι φερμιονικοί τρόποι ικανοποιούν τις αντιμεταθετικές σχέσεις

$$\begin{aligned} \text{R} : \{d_m^\mu, d_n^\nu\} &= \eta^{\mu\nu} \delta_{m+n,0} & m, n \in \mathbb{Z} \\ \text{NS} : \{b_r^\mu, b_s^\nu\} &= \eta^{\mu\nu} \delta_{r+s,0} & r, s \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Για τις κλειστές χορδές υπάρχουν οι αντίστοιχες σχέσεις για το δεύτερο σύνολο τρόπων ταλάντωσης. Οι συντελεστές  $d_m^\mu$  και  $b_r^\mu$  μπορούν να ειδωθούν λοιπόν ως τελεστές δημιουργίας και καταστροφής, όπως ακριβώς γίνεται και με τους  $\alpha_n^\mu$ , στην περίπτωση της μποζονικής χορδής.

Στον τομέα NS, λοιπόν, η θεμελιώδης κατάσταση  $|0; p\rangle$  ικανοποιεί την

$$\alpha_m^\mu |0; p\rangle = b_r^\mu |0; p\rangle = 0, \quad m, r > 0, \quad (4.10)$$

που είναι άμεση γενίκευση του ορισμού της θεμελιώδους κατάστασης όπως αυτή ορίστηκε στη μποζονική χορδή. Οι διεγερμένες καταστάσεις ανακτώνται δρώντας τους τελεστές δημιουργίας  $\alpha_{-m}^\mu$  και  $b_{-r}^\mu$  στη θεμελιώδη κατάσταση, και είναι χωροχρονικά μποζόνια. Η θεμελιώδης κατάσταση, όμως, είναι ξανά ταχυονική και θα πρέπει να εξαλειφθεί από το φυσικό φάσμα.

Στον τομέα R, τώρα, υπάρχουν μηδενικοί τρόποι που ικανοποιούν την άλγεβρα

$$\{d_0^\mu, d_0^\nu\} = \eta^{\mu\nu}. \quad (4.11)$$

Αυτή είναι η  $D$ -διάστατη άλγεβρα του Dirac. Κατά συνέπεια, τα  $d_0^\mu$  θα πρέπει να ειδωθούν ως πίνακες Dirac, ενώ όλες οι καταστάσεις στον τομέα R θα είναι σπίνορες, ώστε να παρέχουν χώρους αναπαραστάσεων στους οποίους θα μπορούν να δράσουν οι τελεστές αυτοί. Επομένως, ενώ όλες οι καταστάσεις στον τομέα NS είναι χωροχρονικά μποζόνια, οι καταστάσεις στον τομέα R θα είναι χωροχρονικά φερμιόνια. Τα φερμιόνια ανακτώνται δρώντας τους τελεστές δημιουργίας  $\alpha_{-n}^\mu$  και  $d_{-n}^\mu$  στη θεμελιώδη κατάσταση  $|\psi_0\rangle$ , η οποία ικανοποιεί την

$$\alpha_n^\mu |\psi_0\rangle = d_n^\mu |\psi_0\rangle = 0, \quad (4.12)$$

και είναι ένας άμαζος σπίνορας.

Παρόμοια, μπορεί κανείς να ανακτήσει τους συντελεστές Fourier του ταυυστή ενέργειας ορμής  $T_{\alpha\beta}$  και του υπερ-ρεύματος  $J_\alpha$ . Για τις ανοικτές χορδές, οι συντελεστές των  $J_+, J_-$  συμβολίζονται με  $F_m$  στον τομέα R και  $G_r$  στον τομέα NS. Αντίστοιχες σχέσεις υπάρχουν και για τις κλειστές χορδές.

Στους γεννήτορες Virasoro συνεισφέρουν πλέον εκτός από τους μποζονικούς και οι φερμιονικοί ταλαντωτές, δίνοντας έτσι  $L_m = L_m^{(\alpha)} + L_m^{(NS)/(R)}$ . Το μποζονικό κομμάτι  $L_m^{(\alpha)}$  δίνεται από τη σχέση (1.25), ενώ οι συνεισφορές των φερμιονικών ταλαντωτών στους αντίστοιχους τομείς είναι

$$\begin{aligned} L_m^{(NS)} &= \frac{1}{2} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \left( r + \frac{1}{2}m \right) b_r \cdot b_{m+r}, \\ L_m^{(R)} &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( n + \frac{1}{2}m \right) d_n \cdot d_{m+n}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Επιπλέον, οι ακριβείς σχέσεις για τους τρόπους του υπερ-ρεύματος  $J_\alpha$  είναι

$$\begin{aligned} G_r &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot b_{r+n}, \\ F_m &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot d_{m+n}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Οι τρόποι των  $T_{\alpha\beta}$  και  $J_\alpha$  παράγουν τότε μια υπερσυμμετρική επέκταση της άλγεβρας Virasoro. Στον τομέα NS η άλγεβρα αυτή έχει τη μορφή

$$\begin{aligned} [L_m, L_n] &= (m-n)L_{m+n} + \frac{D}{8}(m^3 - m)\delta_{m+n,0}, \\ [L_m, G_r] &= \left( \frac{1}{2}m - r \right) G_{m+r}, \\ [G_r, G_s] &= 2L_{r+s} + \frac{D}{2} \left( r^2 - \frac{1}{4} \right) \delta_{r+s,0}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

ενώ για τον τομέα R βρίσκει κανείς

$$\begin{aligned} [L_m, L_n] &= (m-n)L_{m+n} + \frac{D}{8}m^3\delta_{m+n,0}, \\ [L_m, F_n] &= \left( \frac{1}{2}m - n \right) F_{m+n}, \\ [F_m, F_n] &= 2L_{m+n} + \frac{D}{2}m^2\delta_{m+n,0}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Ο υπόχωρος των φυσικών καταστάσεων βρίσκεται επιβάλλοντας τους κατάλληλους δεσμούς Virasoro. Πιο συγκεκριμένα, απαιτούμε οι θετικοί τρόποι των γεννητόρων Virasoro να καταστρέφουν τις φυσικές καταστάσεις. Στον τομέα NS οι δεσμοί αυτοί γράφονται ως

$$L_n|\phi\rangle = 0, \quad n > 0,$$

$$\begin{aligned} (L_0 - a)|\phi\rangle &= 0, \\ G_r|\phi\rangle &= 0, \quad r > 0. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Η απουσία καταστάσεων αρνητικής norm επιτυγχάνεται για τις τιμές

$$D = 10 \quad \text{και} \quad a = \frac{1}{2}, \quad (4.18)$$

οπότε και η κρίσιμη τιμή της χωροχρονικής διάστασης της θεωρίας είναι  $D = 10$ . Ανάλογα, στον τομέα R οι δεσμοί είναι οι

$$\begin{aligned} L_n|\phi\rangle &= 0, \quad n > 0, \\ (L_0 - a)|\phi\rangle &= 0, \\ F_n|\phi\rangle &= 0, \quad n \geq 0. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Η κρίσιμη διάσταση είναι και εδώ  $D = 10$ , όπως στον τομέα NS, ενώ η τιμή της παραμέτρου  $a$  είναι  $a = 0$ .

### Το φάσμα των σωματιδίων

Κατασκευάζοντας στη συνέχεια το φάσμα των σωματιδίων στις υπερχορδές, παρατηρούμε αρχικά ότι η τελευταία εκ των εξισώσεων (4.17) δίνει τη σχέση για τη μάζα

$$\alpha' M^2 = N - \frac{1}{2}. \quad (4.20)$$

Ο αριθμητικός τελεστής έχει τώρα έναν επιπλέον όρο που μετρά τις φερμιονικές ταλαντώσεις, και έχει τη μορφή

$$N = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n + \sum_{r=1/2}^{\infty} r b_{-r} \cdot b_r. \quad (4.21)$$

Κατά συνέπεια, η θεμελιώδης κατάσταση του τομέα NS ( $N = 0$ ) είναι όντως ταχυονική, με μάζα  $\alpha' M^2 = -1/2$ . Η ταχυονική κατάσταση αυτή αφαιρείται από το φάσμα μέσω της μεθόδου GSO, που θα παρουσιαστεί παρακάτω. Για να κατασκευάσει κανείς διεγερμένες καταστάσεις στον τομέα NS, δρα τους τελεστές δημιουργίας  $b_{-r}^\mu$  πάνω στη θεμελιώδη κατάσταση. Η πρώτη διεγερμένη κατάσταση, για παράδειγμα, θα είναι η

$$b_{-1/2}^\mu |0; p\rangle, \quad (4.22)$$

με μάζα  $\alpha' M^2 = 0$ . Η πρώτη διεγερμένη κατάσταση, δηλαδή, είναι ένα άμαζο χωροχρονικό μποζόνιο. Όλες οι καταστάσεις στον τομέα NS θα είναι χωροχρονικά μποζόνια.

Αντίστοιχα αποτελέσματα παίρνει κανείς και για τον τομέα R, όπου όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, οι καταστάσεις που προκύπτουν εκεί είναι φερμιονικές. Η συνθήκη μάζας εδώ είναι η

$$\alpha' M^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n + \sum_{m=1}^{\infty} m d_{-m} \cdot d_m. \quad (4.23)$$

Η θεμελιώδης κατάσταση είναι άμαζη και σπινοριακή, ενώ οι διεγερμένες καταστάσεις ανακτώνται δρώντας τους τελεστές δημιουργίας  $\alpha_{-m}^\mu$  και  $d_{-m}^\mu$  στη θεμελιώδη κατάσταση. Όλες οι καταστάσεις στον τομέα R θα είναι χωροχρονικοί σπίνορες, δηλαδή φερμιόνια.

### 4.1.3 Η προβολή GSO

Όπως είδαμε προηγουμένως, ενώ το μοντέλο RNS εισάγει χωροχρονικά φερμιόνια στη θεωρία, παραμένει προβληματικό καθώς η θεμελιώδης κατάσταση του τομέα NS είναι ταχυονική. Επιπλέον, το φάσμα δεν είναι υπερσυμμετρικό, καθώς δεν υπάρχει φερμιόνιο που να έχει την ίδια μάζα με το ταχυόνιο. Τα δύο αυτά προβλήματα λύνονται στη θεωρία υπερχορδών με την προβολή *GSO*, που εισήχθη από τους Gliozzi, Scherk και Olive. Η λεγόμενη προβολή *GSO* είναι προαιρετική στο κλασικό επίπεδο, αλλά η επιβολή της είναι υποχρεωτική κβαντικά, ώστε η θεωρία να είναι ελεύθερη από ανωμαλίες.

Ο προβολικός τελεστής *GSO* στον τομέα NS ορίζεται ως

$$G = -(-1)^{F+1} = (-1)^{\sum_{r=1/2}^{\infty} b_{-r} b_{r+1}}, \quad (4.24)$$

όπου με  $F$  συμβολίζεται ο αριθμός των διεγερμένων  $b$ -ταλαντωτών, δηλαδή ο φερμιονικός αριθμός της κοσμικής επιφάνειας. Ο τελεστής αυτός καθορίζει δηλαδή εάν ο αριθμός των φερμιονικών διεγέρσεων μιας κατάστασης είναι άρτιος ή περιττός. Στον τομέα R ο αντίστοιχος τελεστής ορίζεται ως

$$G = \Gamma_{11} (-1)^{\sum_{n=1}^{\infty} d_{-n} d_n}, \quad (4.25)$$

όπου  $\Gamma_{11}$  είναι το 10-διάστατο ανάλογο του πίνακα Dirac  $\gamma_5$  στις 4 διαστάσεις.

Σύμφωνα με την προβολή GSO, τώρα, κρατάει κανείς στον τομέα NS μόνο τις καταστάσεις με περιττό αριθμό φερμιονικών διεγέρσεων, δηλαδή τις καταστάσεις για τις οποίες

$$(-1)^{F_{NS}} = -1, \quad (4.26)$$

ενώ στον τομέα R μπορεί κανείς να εξαλείψει καταστάσεις με περιττό ή άρτιο αριθμό φερμιονικών διεγέρσεων, ανάλογα με την chirality της θεμελιώδους κατάστασης. Η επιλογή αυτή είναι καθαρά θέμα σύμβασης.

Εφαρμόζοντας την προβολή GSO, η ταχυονική κατάσταση του φάσματος του τομέα NS εξαλείφεται, και η θεμελιώδης κατάσταση του φάσματος είναι τώρα ένα άμαζο μποζόνιο, σε αντιστοιχία με τη θεμελιώδη κατάσταση του φάσματος του τομέα R. Κατά συνέπεια, παρατηρεί κανείς ότι η προβολή GSO κάνει το φάσμα των υπερχορδών υπερσυμμετρικό. Κάτι τέτοιο είναι συνεπές κβαντικά, αφού η άμαζη σπινοριακή θεμελιώδης κατάσταση του τομέα R αναγνωρίζεται ως το *gravitino*, το υπερσυμμετρικό δηλαδή σωματίδιο του βαρυτονίου.

Η υπερσυμμετρία γίνεται επίσης εμφανής εάν εξετάσει κανείς το άμαζο φάσμα της θεωρίας, μετά την προβολή GSO, και συγκρίνοντας τους βαθμούς ελευθερίας. Η άμαζη κατάσταση του τομέα NS είναι πλέον η  $b_{-1/2}^\mu |0; p\rangle$ , η οποία έχει οκτώ βαθμούς ελευθερίας. Από την άλλη πλευρά, η θεμελιώδης φερμιονική κατάσταση είναι ένα άμαζο Majorana-Weyl φερμιόνιο, το οποίο οποίο έχει  $\frac{1}{4} \cdot 2^{d/2} = 8$  βαθμούς ελευθερίας. Υπάρχει δηλαδή ίσος αριθμός μποζονίων και φερμιονίων, όπως απαιτείται από μια θεωρία με χωροχρονική υπερσυμμετρία.

Επιπλέον, εάν υπάρχει χωροχρονική υπερσυμμετρία, τότε θα πρέπει να υπάρχει ίσος αριθμός μποζονίων και φερμιονίων σε κάθε επίπεδο μάζας, και όχι μόνο στο θεμελιώδες. Εάν συμβολίσουμε με  $d_{NS}(n)$  τον αριθμό των μποζονικών καταστάσεων με  $\alpha' M^2 = n$  και με  $d_R(n)$  τον αριθμό των φερμιονικών καταστάσεων αντίστοιχα, τότε μπορεί να κατασκευάσει κανείς τις γεννήτριες συναρτήσεις

$$\begin{aligned} f_{NS}(w) &= \sum_{n=0}^{\infty} d_{NS}(n) w^n = \frac{1}{2\sqrt{w}} \left( \prod_{m=1}^{\infty} \left( \frac{1+w^{m-1/2}}{1-w^m} \right)^8 - \prod_{m=1}^{\infty} \left( \frac{1-w^{m-1/2}}{1-w^m} \right)^8 \right) \\ f_R(w) &= \sum_{n=0}^{\infty} d_R(n) w^n = 8 \prod_{m=1}^{\infty} \left( \frac{1+w^m}{1-w^m} \right)^8. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Η ισότητα  $f_{NS}(n) = f_R(w)$ , η οποία είχε ήδη αποδειχθεί το 1829 από τον Jacobi, αποτελεί μια καλή ένδειξη της ύπαρξης της υπερσυμμετρίας. Η πλήρης απόδειξη της υπερσυμμετρίας της θεωρίας γίνεται μέσω του φορμαλισμού GS, όπου δίνεται

έμφαση στη χωροχρονική υπερσυμμετρία, και όχι στην υπερσυμμετρία στην κοσμική επιφάνεια.

## 4.2 Οι πέντε θεωρίες των χορδών

### 4.2.1 Υπερχορδές Τύπου I και II

Στις προηγούμενες παραγράφους είδαμε αναλυτικά πως προκύπτει το φάσμα των μποζονικών (NS) και φερμιονικών (R) καταστάσεων των ανοικτών χορδών. Το φάσμα των κλειστών χορδών προκύπτει εύκολα, κατασκευάζοντας ταυυστικά γινόμενα των παραπάνω καταστάσεων. Έχουμε έτσι τέσσερις διακριτούς τομείς των καταστάσεων των κλειστών χορδών: οι  $NS \otimes NS$  και  $R \otimes R$  περιγράφουν χωροχρονικά μποζόνια, ενώ οι  $NS \otimes R$  και  $R \otimes NS$  περιγράφουν χωροχρονικά φερμιόνια.

Πιο συγκεκριμένα, το άμαζο φάσμα των κλειστών χορδών θα έχει τη μορφή

$$(\text{διάνυσμα} + \text{MW spinor}) \otimes (\text{διάνυσμα} + \text{MW spinor}), \quad (4.28)$$

όπου υπάρχουν δύο διαφορετικές πιθανές καταστάσεις, αφού οι Majorana-Weyl σπίνορες μπορεί να έχουν ίδια ή αντίθετη chirality. Όταν οι δύο σπίνορες έχουν αντίθετη chirality, η θεωρία καλείται *θεωρία υπερχορδών Τύπου IIA* και έχει κατοπτρική συμμετρία. Το φάσμα, δηλαδή, της θεωρίας παραμένει αναλλοίωτο κάτω από κατοπτρική ανάκλαση, που σημαίνει ότι η θεωρία IIA διατηρεί την αρτιότητα. Όταν οι δύο σπίνορες έχουν την ίδια chirality, η θεωρία καλείται *θεωρία υπερχορδών Τύπου IIB* και είναι chiral, παραβιάζει δηλαδή την αρτιότητα.

Σε κάθε περίπτωση, υπάρχουν δύο gravitinos, που προέρχονται από τα γινόμενα  $NS \otimes R$  και  $R \otimes NS$ , που είναι πεδία βαθμίδας για την τοπική υπερσυμμετρία. Κατά συνέπεια, αφού οι δύο θεωρίες υπερχορδών Τύπου II έχουν δύο gravitinos, έχουν τοπική  $\mathcal{N} = 2$  υπερσυμμετρία από μια 10-διάστατη σκοπιά. Τα υπερφορτία είναι Majorana-Weyl σπίνορες, που έχουν 16 συνιστώσες, οπότε οι θεωρίες Τύπου II έχουν 32 διατηρούμενα υπερφορτία. Το ποσό αυτό της υπερσυμμετρίας είναι αυτό που ονομάζεται συνήθως  $\mathcal{N} = 8$  στις τέσσερις διαστάσεις. Επιπλέον, τα όρια των χαμηλών ενεργειών αυτών των θεωριών Τύπου IIA και IIB είναι η 10-διάστατη υπερβαρύτητα Τύπου IIA και IIB αντίστοιχα. Τέλος, οι θεωρίες Τύπου II περιέχουν μόνο προσανατολισμένες κλειστές χορδές.



Υπάρχει όμως μία ακόμη θεωρία υπερχορδών, που καλείται *Τύπου I*, η οποία ανακτάται με μια προβολή της θεωρίας Τύπου IIB, όπου κρατά κανείς μόνο το διαγώνιο άθροισμα των δύο gravitinos. Κατά συνέπεια, η θεωρία αυτή έχει  $\mathcal{N} = 1$  υπερσυμμετρία, δηλαδή 16 υπερφορτία, και είναι μια θεωρία μη προσανατολισμένων κλειστών χορδών. Η θεωρία αυτή μπορεί, όμως, να συμπληρωθεί με μη προσανατολισμένες ανοικτές χορδές, εισάγωντας μια ομάδα βαθμίδας Yang-Mills, που κλασικά μπορεί να είναι η  $SO(n)$  ή η  $Sp(n)$ , για οποιαδήποτε τιμή του  $n$ . Σε κβαντικό επίπεδο, όμως, απαιτείται η εισαγωγή της ομάδας  $SO(32)$ , ώστε η θεωρία να είναι ελεύθερη από ανωμαλίες.

### 4.2.2 Ετεροτικές χορδές

Εκτός από τις θεωρίες υπερχορδών Τύπου I και II, υπάρχουν δύο ακόμη υπερσυμμετρικές θεωρίες χορδών, που είναι ελεύθερες από ανωμαλίες σε κβαντικό επίπεδο, και ονομάζονται *ετεροτικές χορδές*. Οι θεωρίες αυτές στηρίζονται σε μια υβριδική κατασκευή, η οποία συνδυάζει τη μποζονική χορδή με τη θεωρία υπερχορδών Τύπου II. Πιο συγκεκριμένα, συνδυάζει κανείς τους αριστερά κινούμενους βαθμούς ελευθερίας της 26-διάστατης μποζονικής χορδής με τους δεξιά κινούμενους βαθμούς ελευθερίας της 10-διάστατης θεωρίας υπερχορδών. Οι ετεροτικές θεωρίες χορδών έχουν  $\mathcal{N} = 1$  υπερσυμμετρία στις δέκα διαστάσεις, οπότε είναι και ελεύθερες από ανωμαλίες σε κβαντικό επίπεδο. Παίρνει κανείς τότε ένα φάσμα που περιέχει άμαζες super Yang-Mills πολυπλέτες και βασίζεται είτε στην ομάδα  $SO(32)$ , είτε στην ομάδα βαθμίδας  $E_8 \times E_8$ .

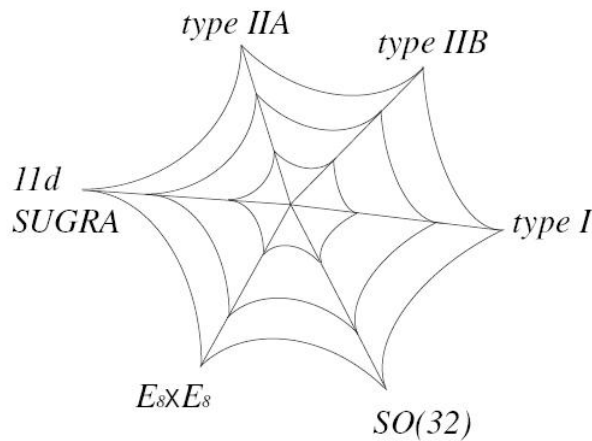
### 4.2.3 Ενοποίηση των θεωριών: η θεωρία M

Υπάρχουν, λοιπόν, πέντε διαφορετικές υπερσυμμετρικές θεωρίες υπερχορδών, οι οποίες είναι ελεύθερες από ανωμαλίες σε κβαντικό επίπεδο, η Τύπου I, οι δύο θεωρίες Τύπου II και οι δύο ετεροτικές θεωρίες. Κάθε μία από αυτές είναι μια 10-διάστατη υπερσυμμετρική θεωρία. Η προβληματική εικόνα της ύπαρξης των πέντε διαφορετικών αυτών θεωριών άλλαξε, όταν ανακαλύφθηκαν οι διάφοροι δυϊσμοί που συνδέουν διαφορετικές θεωρίες των χορδών μεταξύ τους.

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάστηκε αρκετά αναλυτικά ο T-δυϊσμός, που δείχνει ότι υπάρχουν περιπτώσεις με διαφορετικές γεωμετρίες που είναι, όμως, φυσικά ισοδύναμες. Ο T-δυϊσμός συσχετίζει δύο διαφορετικές θεωρίες. Για παράδειγμα, συσχε-

τίζει τις δύο θεωρίες Τύπου II μεταξύ τους, ή τις δύο ετεροτικές θεωρίες. Κατά συνέπεια, οι θεωρίες Τύπου IIA και IIB (όπως και οι δύο ετεροτικές θεωρίες) θα μπορούσαν να ειδωθούν ως μια μοναδική θεωρία.

Υπάρχει ένα δεύτερο είδος δυϊσμού, που καλείται S-δυϊσμός (*S-duality*), ο οποίος συσχετίζει θεωρίες με διαφορετική σταθερά σύζευξης. Πιο συγκεκριμένα, συσχετίζει τη σταθερά σύζευξης  $g_s$  με την ποσότητα  $1/g_s$ . Ως παράδειγμα, αναφέρεται η συσχέτιση της θεωρίας υπερχορδών Τύπου I με την  $SO(32)$  ετεροτική θεωρία. Επομένως, δουλεύοντας κανείς στο όριο της ασθενούς σύζευξης,  $g_s \ll 1$ , με θεωρία διαταραχών, βρίσκει πως συμπεριφέρεται η θεωρία για ισχυρή σύζευξη,  $g_s \gg 1$ .



Σχήμα 4.1. Οι πέντε διαφορετικές θεωρίες χορδών συνδέονται μέσω των δυϊσμών.

Υποστηρίζεται, λοιπόν, ότι οι πέντε αυτές θεωρίες δεν είναι παρά πέντε διαφορετικές εκδοχές μιας ενοποιημένης 11-διάστατης θεωρίας, που ονομάζεται *θεωρία-M* (*M-theory*). Σε χαμηλές ενέργειες η θεωρία-M προσεγγίζεται από μια κλασική θεωρία πεδίου, που ονομάζεται 11-διάστατη υπερβαρύτητα. Η θεωρία-M θα μπορούσε να είναι δηλαδή η κατάλληλη θεωρία για την κβαντική περιγραφή της βαρύτητας, με τις διαφορετικές θεωρίες των χορδών να αποτελούν εκφάνσεις της θεωρίας αυτής στα κατάλληλα όρια. Δυστυχώς, οι εξισώσεις και ο βασικός φορμαλισμός της θεωρίας αυτής είναι ακόμη άγνωστες.

### 4.3 Οι D-branes ως BPS αντικείμενα

Έχει ήδη αναφερθεί ότι οι D-branes που εισήχθησαν στο δεύτερο κεφάλαιο είναι πλέον θεμελιώδη συστατικά της θεωρίας χορδών. Στα δύο επόμενα κεφάλαια, άλλω-

στε, θα δούμε πως χρησιμοποιούνται οι D-branes για την κατασκευή μελανών οπών στη θεωρία χορδών, καθώς και για τη μικροσκοπική περιγραφή της εντροπίας αυτών.

Μια ιδιότητα-κλειδί των D-branes για τις εν λόγω κατασκευές αυτές είναι ότι αυτές αποτελούν BPS αντικείμενα. Οι BPS καταστάσεις είναι και το αντικείμενο των επόμενων παραγράφων.

### 4.3.1 Οι βράνες στην υπερβαρύτητα

Εξετάζοντας αρχικά τις θεωρίες υπερβαρύτητας, παρατηρεί κανείς ότι η ύπαρξη εκτεταμένων αντικειμένων, όπως οι βράνες, είναι φυσική σε αυτές τις θεωρίες.

Ας θεωρήσουμε την περίπτωση της 11-διάστατης υπερβαρύτητας. Το υπερφορτίο  $Q_\alpha$  είναι ένας σπίνορας, με  $\alpha = 1 \cdots 32$ . Ο αντιμεταθέτης δύο συνιστωσών του υπερφορτίου δίνει μια μετατόπιση. Έχουμε δηλαδή

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = (\Gamma^A C)_{\alpha\beta} P_A. \quad (4.29)$$

Επειδή ο αντιμεταθέτης είναι συμμετρικός στα  $\alpha, \beta$ , βρίσκουμε ότι υπάρχουν  $(32 \times 33)/2 = 528$  αντικείμενα στο αριστερό μέλος της εξίσωσης, αλλά μόνο 11 αντικείμενα στο δεξί μέλος, τα  $P_A$ . Γράφοντας στο δεξί μέλος όλους τους πιθανούς όρους που επιτρέπονται από τη συμμετρία Lorentz, βρίσκουμε [3]

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = (\Gamma^A C)_{\alpha\beta} P_A + (\Gamma^A \Gamma^B C)_{\alpha\beta} Z_{AB} + (\Gamma^A \Gamma^B \Gamma^C \Gamma^D \Gamma^E C)_{\alpha\beta} Z_{ABCDE}, \quad (4.30)$$

όπου το  $Z$  είναι ολικά αντισυμμετρικό. Ο αριθμός των  $Z_{AB}$  είναι  ${}^{11}C_2 = 55$ , ενώ ο αριθμός των  $Z_{ABCDE}$  είναι  ${}^{11}C_5 = 478$ , οπότε έχουμε πλέον συνολικά 528 αντικείμενα στο δεξί μέλος της παραπάνω εξίσωσης, σε συμφωνία με τον αριθμό των αντικειμένων στο αριστερό μέλος.

Από τη στιγμή που το  $P_1 \neq 0$ , για παράδειγμα, σημαίνει ότι η διάταξη έχει κάποια ορμή στη διεύθυνση  $X^1$ , θα μπορούσε κανείς να ερμηνεύσει το  $Z_{12} \neq 0$  ως την παρουσία κάποιου εκτεταμένου 2-διάστατου φορτισμένου αντικειμένου, που απλώνεται στις διευθύνσεις  $X^1, X^2$ . Μπορούμε να υποθέσουμε, τότε, ότι υπάρχει στη θεωρία κάποιο 2-διάστατο θεμελιώδες αντικείμενο, η 2-βράνη. Ανάλογα, το φορτίο  $Z_{ABCDE}$  αντιστοιχεί σε μια 5-βράνη της θεωρίας.

Κατά συνέπεια, φαίνεται φυσικό να συμπεριλάβει κανείς συγκεκριμένα εκτεταμένα αντικείμενα στην κβάντωση της 11-διάστατης υπερβαρύτητας. Η σύνδεση των αντικειμένων αυτών με τη θεωρία χορδών γίνεται μέσω της συμπαγοποίησης του

11-διάστατου χωρόχρονου σε ένα μικρό κύκλο, παίρνοντας έτσι έναν 10-διάστατο μη συμαγοποιημένο χωρόχρονο. Τυλίγοντας, τότε, την 2-βράνη γύρω από αυτόν τον μικρό κύκλο, παίρνουμε κάτι που μοιάζει με χορδή σε δέκα διαστάσεις. Η χορδή αυτή είναι ακριβώς η κβαντισμένη χορδή Τύπου ΙΙΑ, με το μέγεθος του μικρού κύκλου να είναι η σταθερά σύζευξης της χορδής.

Από την άλλη πλευρά, εάν δεν τυλίξουμε τη 2-βράνη στον μικρό κύκλο, θα πρέπει να έχουμε εκτεταμένα 2-διάστατα αντικείμενα στη θεωρία χορδών Τύπου ΙΙΑ. Τα αντικείμενα αυτά υπάρχουν στη θεωρία χορδών και είναι οι D-branes που παρουσιάστηκαν στο δεύτερο κεφάλαιο. Παρόμοια επιχειρήματα ισχύουν και για την 5-βράνη.

### 4.3.2 BPS καταστάσεις

Μια πολύ σημαντική ιδιότητα που έχουν οι εν λόγω βράνες είναι ότι όταν βρίσκονται σε μια μη διεγερμένη κατάσταση, διατηρούν κάποιες από τις υπερσυμμετρίες του συστήματος. Βρίσκονται τότε στις λεγόμενες Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield (BPS) καταστάσεις, οι οποίες θα παρουσιαστούν στη συνέχεια.

Θεωρούμε αρχικά μια θεωρία με ένα μόνο υπερφορτίο  $Q = Q^\dagger$ :

$$\{Q, Q\} = 2Q^2 = 2H, \quad (4.31)$$

όπου  $H$  είναι η Hamiltonian. Οι σχέσεις αυτές σημαίνουν ότι υπάρχει ένα κάτω φράγμα στην τιμή της ενέργειας, η οποία δε μπορεί να γίνει ποτέ αρνητική. Εάν

$$H|\psi\rangle = E|\psi\rangle, \quad (4.32)$$

τότε

$$E = \langle\psi|H|\psi\rangle = \langle\psi|Q^2|\psi\rangle = \langle Q\psi|Q\psi\rangle \geq 0, \quad (4.33)$$

όπου η ισότητα ισχύει μόνο όταν

$$Q|\psi\rangle = 0, \quad (4.34)$$

δηλαδή όταν η κατάσταση είναι υπερσυμμετρική. Οι μη υπερσυμμετρικές καταστάσεις ανήκουν σε μια “πολυπλέτα” που περιέχει μια μποζονική  $|B\rangle$  και μια φερμιονική  $|F\rangle$  κατάσταση ίδιας ενέργειας:

$$Q|B\rangle \equiv |F\rangle, \quad Q|F\rangle = Q^2|B\rangle = E|B\rangle. \quad (4.35)$$

Υποθέτουμε, στη συνέχεια, ότι υπάρχουν δύο τέτοιες υπερσυμμετρίες:

$$Q_1^\dagger = Q_1, \quad Q_2^\dagger = Q_2, \quad Q_1^2 = H, \quad Q_2^2 = H, \quad \{Q_1, Q_2\} = Z, \quad (4.36)$$

όπου  $Z$  είναι κάποιο “φορτίο”. Σε αντιστοιχία με τους παραπάνω υπολογισμούς, συμπεραίνει κανείς τώρα ότι

$$0 \leq \langle \psi | (Q_1 \pm Q_2)^2 | \psi \rangle = 2E \pm 2Z, \quad (4.37)$$

που σημαίνει ότι

$$E \geq |Z|, \quad (4.38)$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν

$$(Q_1 - Q_2)|\psi\rangle = 0, \quad \text{ή} \quad (Q_1 + Q_2)|\psi\rangle = 0. \quad (4.39)$$

Διακρίνει τότε κανείς τρία είδη καταστάσεων:

1. Καταστάσεις με  $Q_1|\psi\rangle = Q_2|\psi\rangle = 0$ . Οι καταστάσεις αυτές έχουν μηδενική ενέργεια και δε συνδυάζονται σε κάποια πολυπλέτα. Επίσης, από την εξίσωση (4.37) έχουν  $Z|\psi\rangle = 0$ , οπότε δεν κουβαλάνε κάποιο φορτίο.
2. Καταστάσεις που δεν ανήκουν στην κατηγορία 1, αλλά ικανοποιούν την εξίσωση (4.39). Έστω ότι ισχύει η περίπτωση  $(Q_1 - Q_2)|\psi\rangle = 0$ . Οι καταστάσεις αυτές συνδυάζονται σε μια “μικρή πολυπλέτα” που περιγράφεται από τη βάση  $\{|\psi\rangle, Q_1|\psi\rangle\}$ . Για τις καταστάσεις αυτές ισχύει

$$Q_2|\psi\rangle = Q_1|\psi\rangle, \quad Q_2Q_1|\psi\rangle = Q_1^2|\psi\rangle = E|\psi\rangle, \quad (4.40)$$

οπότε δεν υπάρχουν άλλες γραμμικά ανεξάρτητες καταστάσεις στην πολυπλέτα.

Οι καταστάσεις αυτές ικανοποιούν τη σχέση

$$E = |Z| > 0, \quad (4.41)$$

και καλούνται BPS καταστάσεις. Επίσης, από την εξίσωση (4.37), η κατάσταση με  $Z > 0$  ικανοποιεί την  $(Q_1 - Q_2)|\psi\rangle = 0$ , ενώ η κατάσταση με  $Z < 0$  ικανοποιεί την  $(Q_1 + Q_2)|\psi\rangle = 0$ .

3. Καταστάσεις που δεν καταστρέφονται από κανένα γραμμικό συνδυασμό των  $Q_1, Q_2$ . Οι καταστάσεις αυτές συνδυάζονται σε μια “μεγάλη πολυπλέτα”

$$\{|\psi\rangle, Q_1|\psi\rangle, Q_2|\psi\rangle, Q_2Q_1|\psi\rangle\},$$

και έχουν  $E > |Z| > 0$ .

Τέλος, μια πολύ σημαντική ιδιότητα των καταστάσεων που ικανοποιούν το όριο BPS,  $M = |Z|$ , είναι ότι οι καταστάσεις αυτές είναι ευσταθείς, καθώς έχουν το μέγιστο φορτίο για δοσμένη μάζα  $M$ . Επιπλέον, η συσχέτιση αυτή δεν αλλάζει ακόμη κι αν σπάσει η υπερσυμμετρία. Η μόνη περίπτωση που μπορεί να γίνει κάτι τέτοιο είναι εάν κάποια άλλη αναπαράσταση γίνει εκφυλισμένη με την BPS πολυπλέτα, ώστε να συνδυαστούν και να δημιουργήσουν μια μεγάλη πολυπλέτα, όπως συμβαίνει στο μηχανισμό Higgs.

Οι θεμελιώδεις καταστάσεις των D-branes είναι κι αυτές BPS καταστάσεις, που σημαίνει ότι είναι ευσταθείς και διατηρούν κάποιες από τις υπερσυμμετρίες του συστήματος. Το γεγονός αυτό είναι πολύ σημαντικό, καθώς μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει τις καταστάσεις αυτές αλλάζοντας τη σύζευξη από ασθενή σε ισχυρή, και να ελέγξει έτσι εικασίες που αφορούν τη συμπεριφορά των χορδών στο όριο της ισχυρής σύζευξης. Επιπλέον, οι BPS D-branes χρησιμοποιούνται για την κατασκευή μελανών οπών, όπως θα δούμε στα επόμενα κεφάλαια.

### 4.3.3 Φορτία και βράνες στις θεωρίες υπερχορδών

Στις θεωρίες Τύπου ΙΙΑ και ΙΙΒ υπάρχουν τα πεδία του τομέα NS-NS

$$\Phi, G_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}, \quad (4.42)$$

όπου το τελευταίο είναι ένας αντισυμμετρικός τανυστής τάξης δύο. Όπως είδαμε και στην παράγραφο 1.3, η θεμελιώδης κλειστή χορδή συζεύγνυται ηλεκτρικά με το πεδίο  $B_{\mu\nu}$  όπως ακριβώς συζεύγνυται το σημειακό σωματίδιο με το πεδίο βαθμίδας Maxwell,  $A_\mu$ , μέσω της σχέσης (1.60). Θα έχουμε δηλαδή μια σύζευξη της χορδής με το πεδίο  $B_{\mu\nu}$  μέσω του όρου

$$\nu_1 \int_{\mathcal{M}_2} B_{(2)} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{\mathcal{M}_2} B_{(2)}, \quad (4.43)$$

όπου  $\mathcal{M}_2$  είναι η κοσμική επιφάνεια με συντεταγμένες  $\xi^a$  και  $B_{(2)} = B_{ab}d\xi^a d\xi^b$ , όπου  $B_{ab}$  είναι το pullback του  $B_{\mu\nu}$ . Μέσω του Hodge δυϊσμού μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα 6-form δυναμικό  $B_{(6)}$ , μέσω της σχέσης  $dB_{(6)} = *dB_{(2)}$ . Το 5-διάστατο αντικείμενο που συζεύγνυται ηλεκτρικά με το δυναμικό αυτό μέσω της σύζευξης  $\nu \int_{\mathcal{M}_6} B_{(6)}$  είναι ένα NS-NS φορτισμένο αντικείμενο και καλείται NS5-brane.

Στον τομέα R-R, υπάρχουν επιπλέον δυναμικά:

$$\text{Τύπου ΙΙΑ: } C_{(1)}, C_{(3)}, C_{(5)}, C_{(7)}$$

$$\text{Τύπου IIB: } C_{(0)}, C_{(2)}, C_{(4)}, C_{(6)}, C_{(8)}. \quad (4.44)$$

Τα αντικείμενα που συζεύγγονται με τα δυναμικά αυτά είναι οι Dp-branes, μέσω της ηλεκτρικής σύζευξης

$$\mu_p \int_{\mathcal{M}_{p+1}} C_{(p+1)}, \quad (4.45)$$

μέσω του  $(p + 1)$ -διάστατου κοσμικού όγκου  $\mathcal{M}_{p+1}$ . Η διατήρηση του φορτίου και της ενέργειας σημαίνουν ότι ένα φορτισμένο αντικείμενο δε μπορεί να αποσυντεθεί σε άλλα αντικείμενα μικρότερης μάζας, τα οποία θα μπορούσαν να κουβαλάνε το φορτίο. Βρίσκει κανείς τότε [14] ότι οι Dp-branes με άρτιο  $p$  είναι ευσταθή αντικείμενα στη θεωρία Τύπου ΙΑ και ασταθή στην Τύπου ΙΒ. Ανάλογα, οι Dp-branes με περιττό  $p$  είναι ευσταθείς στη θεωρία Τύπου ΙΒ και ασταθείς στην θεωρία Τύπου ΙΑ. Οι D-branes που μπορεί να έχει κανείς δηλαδή είναι οι

$$\begin{aligned} \text{Τύπου ΙΑ: } & D0, D2, D4, D6, D8 \\ \text{Τύπου ΙΒ: } & D1, D3, D5, D7, D9, \end{aligned} \quad (4.46)$$

όπου οι D0, D1, D2 και D3-branes κουβαλάνε ηλεκτρικό φορτίο, ενώ οι υπόλοιπες μαγνητικό.

Οι θεμελιώδεις χορδές, λοιπόν, δε μπορούν να κουβαλάνε φορτία R-R, παρά μόνο φορτία Kalb-Ramond. Το γεγονός ότι οι D-branes κουβαλάνε R-R φορτία είναι συνεπές με την ιδιότητά τους ως BPS αντικείμενα, καθώς ως τέτοια, θα πρέπει να κουβαλάνε διατηρούμενα φορτία. Στην περίπτωση της θεωρίας υπερχορδών Τύπου ΙΙ, το μόνο σύνολο φορτίων με τις σωστές ιδιότητες Lorentz είναι τα αντισυμμετρικά R-R φορτία.

## Κεφάλαιο 5

# Η γεωμετρία των D-branes

Όπως είδαμε στα προηγούμενα κεφάλαια, οι D-branes είναι θεμελιώδη αντικείμενα της θεωρίας χορδών, τα οποία έχουν μάζα και φορτίο. Θα μπορούσε να υποστηριχθεί, λοιπόν, ότι οι βράνες είναι λύσεις των εξισώσεων κίνησης στο όριο των χαμηλών ενεργειών, παράγοντας έτσι το βαρυτικό τομέα και άλλα πεδία όπως τα διάφορα αντισυμμετρικά τανυστικά πεδία ή το dilaton. Οι διάφορες διατάξεις βρανών μπορούν να ειδωθούν δηλαδή ως υπόβαθρα στα οποία οι χορδές θα μπορούσαν να διαδίδονται. Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε τέτοιες λύσεις, δίνοντας έμφαση στην αναλογία της γεωμετρίας που προκύπτει με τη γεωμετρία των κλασικών μελανών οπών, όπως αυτή είναι γνωστή από τη γενική θεωρία της σχετικότητας. Η περιγραφή αυτής της γεωμετρίας είναι το πρώτο βήμα που κάνει κανείς για την κατασκευή των μελανών οπών στα πλαίσια της θεωρίας χορδών.

### 5.1 Μελανές οπές σε 4 διαστάσεις

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζεται μια σύντομη επισκόπηση των ιδιοτήτων των 4-διάστατων μελανών οπών, όπως αυτές προκύπτουν από τις εξισώσεις της γενικής θεωρίας της σχετικότητας. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στις ιδιότητες και τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της extremal Reissner-Nordstrom μελανής οπής, η οποία κατασκευάζεται και περιγράφεται στα πλαίσια της θεωρίας χορδών μέσω των D-branes, όπως θα δούμε στο κεφάλαιο 6.



### 5.1.1 Το σύστημα Einstein-Maxwell

Η δράση Einstein-Hilbert για την περίπτωση όπου έχουμε σύζευξη της βαρύτητας με τον ηλεκτρομαγνητισμό είναι η

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} (R - GF_{\mu\nu}F^{\mu\nu}), \quad (5.1)$$

όπου  $G$  είναι η σταθερά του Νεύτωνα και  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ . Οι εξισώσεις κίνησης που προκύπτουν με λογισμό μεταβολών από τη δράση ως προς  $g_{\mu\nu}$  είναι οι εξισώσεις Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (5.2)$$

όπου ο τανυστής ενέργειας - ορμής είναι ο

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left( g^{\gamma\delta} F_{\mu\gamma} F_{\nu\delta} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\gamma\delta} F^{\gamma\delta} \right). \quad (5.3)$$

Αναζητώντας λύσεις με σφαιρική συμμετρία, βρίσκει κανείς τη μετρική

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2MG}{r} + \frac{GQ^2}{r^2} \right) dt^2 + \left( 1 - \frac{2MG}{r} + \frac{GQ^2}{r^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_2^2, \quad (5.4)$$

όπου  $d\Omega_2^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$  είναι η μετρική μιας σφαίρας  $S^2$  σε πολικές συντεταγμένες. Η μετρική (5.4) ονομάζεται λύση Reissner-Nordstrom, και αναπαριστά μια μελανή οπή μάζας  $M$  και ηλεκτρικού φορτίου  $Q$ . Στα παρακάτω η σταθερά  $G$  τίθεται ίση με τη μονάδα.

### 5.1.2 Η λύση Schwarzschild

Στην περίπτωση που η μελανή οπή δεν είναι φορτισμένη, δηλαδή  $Q = 0$ , η λύση που παίρνουμε είναι η μελανή οπή Schwarzschild

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \left( 1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_2^2. \quad (5.5)$$

Η λύση αυτή έχει ορισμένες συμμετρίες. Κατ' αρχάς, δεν υπάρχει εκπεφρασμένη εξάρτηση από το χρόνο  $t$  και τη γωνία  $\phi$ . Υπάρχει δηλαδή ένα ζευγάρι συμμετριών που προέρχεται από το γεγονός ότι η μετρική παραμένει αναλλοίωτη κάτω από μετατοπίσεις σε αυτές τις συντεταγμένες. Με άλλα λόγια, η λύση είναι στατική, και συμμετρική ως προς τον άξονα  $\phi$ , ενώ φυσικά υπάρχει και η σφαιρική συμμετρία.

Για να γίνει πιο εμφανής η σφαιρική συμμετρία, είναι προτιμότερο να κάνουμε αλλαγή συντεταγμένων στις λεγόμενες *ιστροπικές συντεταγμένες*, που ονομάζονται έτσι επειδή το ακτινικό μέρος της μετρικής είναι σύμμορφο ως προς αυτό του επίπεδου χώρου. Αλλάζοντας, λοιπόν, στη νέα συντεταγμένη  $\rho$  που ορίζεται ως

$$r = \rho \left( 1 + \frac{M}{2\rho} \right)^2, \quad (5.6)$$

η μετρική γίνεται

$$ds^2 = -\frac{\left(1 - \frac{M}{2\rho}\right)^2}{\left(1 + \frac{M}{2\rho}\right)^2} dt^2 + \left(1 + \frac{M}{2\rho}\right)^4 (dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (5.7)$$

όπου  $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$ .

Η σφαιρική επιφάνεια  $r = r_H = 2M$  (ή αντίστοιχα η επιφάνεια  $\rho = M/2$  στο σύστημα συντεταγμένων (5.7)) ονομάζεται *ορίζοντας γεγονότων* της μελανής οπής. Από τη μορφή της μετρικής (5.5) παρατηρούμε ότι για  $r > r_H$  οι συντεταγμένες  $t$  και  $r$  είναι χρονοειδής και χωροειδής αντίστοιχα. Για  $r < r_H$ , όμως, οι συντεταγμένες  $t$  και  $r$  αλλάζουν ρόλο μεταξύ τους. Κατά συνέπεια, ένα αντικείμενο το οποίο εισέρχεται δηλαδή στη μελανή οπή περνώντας τον ορίζοντα γεγονότων δε μπορεί να βγει από αυτήν, καθώς όλες οι μελλοντικές διαδρομές βρίσκονται στην διεύθυνση της μείωσης του  $r$ . Για  $r = 0$  υπάρχει μια ιδιομορφία, η οποία είναι χωροειδής.

### 5.1.3 Η λύση Reissner-Nordstrom

Η περίπτωση αυτή αντιστοιχεί σε μελανές οπές με μη μηδενικό φορτίο,  $Q \neq 0$ . Και σε αυτήν την περίπτωση υπάρχει η σφαιρική συμμετρία, όπως προηγουμένως, ενώ η λύση είναι και στατική. Στην περίπτωση της λύσης Reissner-Nordstrom, όμως, υπάρχουν δύο ορίζοντες, στις θέσεις

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}. \quad (5.8)$$

Για  $r = 0$  υπάρχει πάλι μια ιδιομορφία, η οποία είναι όμως χρονοειδής. Στα παραπάνω έχουμε υποθέσει ότι βρισκόμαστε στην περίπτωση  $M \geq Q$ , καθώς εάν  $M \leq Q$  δεν υπάρχουν ορίζοντες γεγονότων, και η ιδιομορφία ονομάζεται *γυμνή* (naked singularity). Η περίπτωση αυτή θεωρείται μη πραγματοποιήσιμη από φυσική άποψη, ενώ έρχεται και σε αντίθεση με την εικασία της κοσμικής λογοκρισίας (cosmic censorship conjecture).

### Extremality και η συνθήκη BPS

Υπάρχει και μια τρίτη περίπτωση, για τη λύση Reissner-Nordstrom, στην οποία έχει κανείς  $M = Q$ . Η λύση αυτή είναι γνωστή ως “extremal” λύση Reissner-Nordstrom, η απλά ως extremal μελανή οπή. Σε αυτήν την περίπτωση οι δύο ορίζοντες συμπίπτουν στην επιφάνεια  $r = Q$ . Αλλάζοντας συντεταγμένες σε  $R = r - Q$ , η μετρική μπορεί να ξαναγραφτεί ως

$$ds^2 = -\frac{R^2}{(R+Q)^2} dt^2 + \frac{(R+Q)^2}{R^2} [dR^2 + R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)], \quad (5.9)$$

όπου φαίνεται ότι έχει μια πολύ ειδική ισοτροπική μορφή. Η λύση, λοιπόν, μπορεί να γραφτεί και στη μορφή

$$ds^2 = -e^{2U} dt^2 + e^{-2U} (dR^2 + R^2 d\Omega_2^2), \quad (5.10)$$

όπου

$$e^{-U} = 1 + \frac{Q}{R}. \quad (5.11)$$

Η τελευταία αυτή μορφή της μετρικής είναι ιδιαίτερα χρήσιμη, καθώς θα δούμε ότι γενικεύεται εύκολα, όπως για περιπτώσεις που περιλαμβάνουν περισσότερες διαστάσεις, εκτεταμένα αντικείμενα ή παρουσία διαφόρων πεδίων.

Όταν η extremal μελανή οπή προκύπτει ως λύση σε υπερσυμμετρικές θεωρίες, τότε το όριο  $M \geq Q$  είναι ουσιαστικά ένα BPS όριο (σε αναλογία με όσα παρουσιάστηκαν στην παράγραφο 4.3.2), και η ικανοποίησή του σημαίνει ότι η extremal μελανή οπή συμπεριφέρεται ως ένα BPS αντικείμενο, διατηρώντας τις μισές υπερσυμμετρικές του συστήματος. Η χρήση της ιδιότητας αυτή παίζει καθοριστικό ρόλο στην κατασκευή και την περιγραφή των συγκεκριμένων μελανών οπών στη θεωρία χορδών μέσω D-branes.

### Πολλαπλές μελανές οπές και πολυκεντρικές λύσεις

Υπάρχει μια απλή γενίκευση της extremal λύσης για την περίπτωση  $N$  διακριτών μελανών οπών του ίδιου τύπου. Η μετρική αυτής της πολυκεντρικής λύσης είναι η

$$ds^2 = -e^{2U} dt^2 + e^{-2U} (dR^2 + R^2 d\Omega_2^2), \quad (5.12)$$

όπου

$$e^{-U} = 1 + \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\vec{R} - \vec{R}_i|}, \quad (5.13)$$

και  $\vec{R}_i$  είναι το διάνυσμα θέσης του κέντρου της  $i$ -οστής μελανής οπής μάζας  $m_i = q_i$ . Το ολικό φορτίο του συστήματος θα είναι  $Q = \sum_{i=1}^n q_i$ , το οποίο είναι ίσο και με την ολική μάζα. Κατά συνέπεια, από τη στιγμή που η ολική μάζα-ενέργεια είναι απλά το άθροισμα των επιμέρους μαζών-ενεργειών των μελανών οπών, δεν υπάρχει επιπλέον ενέργεια στο σύστημα που να προέρχεται από το έργο δυνάμεων αλληλεπιδράσεις (no-force condition).

### Γεωμετρία κοντά στον ορίζοντα

Ενδιαφέρον παρουσιάζει επίσης η γεωμετρία του χωρόχρονου κοντά στον ορίζοντα της μελανής οπής. Εξετάζοντας τη γειτονιά του ορίζοντα  $R = 0$ , παίρνουμε από την εξίσωση (5.9) τη μετρική

$$ds^2 = -\frac{R^2}{Q^2}dt^2 + \frac{Q^2}{R^2}dR^2 + Q^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (5.14)$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι το χωρικό μέρος της λύσης έχει την τοπολογία ενός απείρως μακριού σωλήνα ή “λαιμού” (throat)  $\mathbb{R} \times S^2$ , με ακτίνα που ορίζεται από το φορτίο. Η ολική γεωμετρία της λύσης είναι γνωστή ως σύμπαν Bertotti-Robinson, με τοπολογία  $\text{AdS}_2 \times S^2$ , όπου ο δισδιάστατος χωρόχρονος Anti-de Sitter είναι το  $(t, R)$  κομμάτι της λύσης.

Τα παραπάνω σημαίνουν ότι από μια υπερσυμμετρική σκοπιά, η extremal μελανή οπή μπορεί να χαρακτηριστεί ως σολιτόνιο. Η λύση στο άπειρο είναι ο επίπεδος χωρόχρονος, και η λύση αυτή διατηρεί όλες τις υπερσυμμετρίες. Σε τυχαία ακτίνα, υπάρχουν οι μισές, αφού η extremal Reissner-Nordstrom είναι BPS αντικείμενο, όπως αναφέρθηκε παραπάνω. Μπορεί ναδειχθεί, όμως, ότι και η Bertotti-Robinson γεωμετρία είναι μέγιστα υπερσυμμετρική, όπως και ο επίπεδος χωρόχρονος. Κατά συνέπεια η extremal Reissner-Nordstrom μελανή οπή συμπεριφέρεται ως σολιτονική λύση ανάμεσα στις δύο καταστάσεις κενού της θεωρίας. Κάτι αντίστοιχο συμβαίνει και στις extremal brane λύσεις, όπως θα δούμε παρακάτω.

#### 5.1.4 Κοσμολογική σταθερά: de Sitter και Anti-de Sitter

Οι εξισώσεις Einstein μπορούν να γενικευτούν με διάφορους τρόπους. Ένας από αυτούς είναι η εισαγωγή της ίδιας της μετρικής, πολλαπλασιασμένη με κάποια σταθερά

$\Lambda$ , αφού έχουμε συναλλοίωτη διατήρηση αυτής,  $\nabla_\mu g^{\mu\nu} = 0$ , όπως απαιτείται. Οι εξισώσεις Einstein προκύπτουν τότε με λογισμό μεταβολών από τη δράση

$$S = \int d^m x \mathcal{L} = \int d^m x \sqrt{-g}(R - 2\Lambda), \quad (5.15)$$

και είναι οι

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 0, \quad (5.16)$$

όπου  $\Lambda$  είναι η λεγόμενη *κοσμολογική σταθερά*. Εάν θεωρήσουμε τον όρο που περιέχει την κοσμολογική σταθερά ως ένα είδος τανυστή ενέργειας - ορμής,

$$T_{\mu\nu} = -\Lambda g_{\mu\nu}, \quad (5.17)$$

τότε η κοσμολογική σταθερά μπορεί να ερμηνευτεί ως η “ενεργειακή πυκνότητα του κενού”, μια πηγή ενέργειας και ορμής που είναι παρούσα ακόμη και απουσία πεδίων ύλης. Εναλλακτικά, η κοσμολογική σταθερά  $\Lambda$  μπορεί να θεωρηθεί και ως μια ενδογενής καθολική πίεση. Ανάλογα με το πρόσημο που έχει η κοσμολογική σταθερά αντιστοιχεί σε κοσμολογική διαστολή ( $\Lambda > 0$ ) ή συστολή ( $\Lambda < 0$ ).

Ο χώρος Minkowski δεν αποτελεί πλέον λύση των εξισώσεων Einstein. Αντί αυτού, υπάρχουν κάποιες υψηλά συμμετρικές λύσεις, αντίστοιχες του χώρου Minkowski. Οι λύσεις αυτές καλούνται *μέγιστα συμμετρικές* (maximally symmetric) και ικανοποιούν τη συνθήκη

$$R_{\lambda\mu\kappa\nu} = \mp \frac{2}{\ell^2}(g_{\lambda\kappa}g_{\mu\nu} - g_{\lambda\nu}g_{\mu\kappa}), \quad \text{ή } R_{\mu\nu} = \pm \frac{2\Lambda}{D-2}g_{\mu\nu}, \quad (5.18)$$

όπου

$$\ell^2 = -\frac{(D-1)(D-2)}{2\Lambda}. \quad (5.19)$$

Οι πιο απλές λύσεις της παραπάνω εξίσωσης για χώρους με μετρική  $(+++ \dots)$  είναι οι σφαίρες  $S^D$ . Για μετρική  $(-+++ \dots)$ , οι χώροι που μας ενδιαφέρουν έχουν τη μορφή

$$ds^2 = -\left(1 - \pm \frac{r^2}{\ell^2}\right) dt^2 + \left(1 - \pm \frac{r^2}{\ell^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_{D-2}^2, \quad (5.20)$$

όπου  $d\Omega_{D-2}^2$  είναι η μετρική μιας μοναδιαίας  $D-2$  σφαίρας.

Η κοσμολογική σταθερά ορίζει μια κλίμακα μήκους,  $\ell$ . Όσο μεγαλύτερη είναι η κοσμολογική σταθερά, τόσο μικρότερη είναι η κλίμακα. Το όριο  $r \ll \ell$  μας πηγαίνει δηλαδή τοπικά στο χώρο Minkowski, ενώ για  $r \simeq \ell$  ή μεγαλύτερο, δε μπορούμε να αγνοήσουμε την επίδραση της κοσμολογικής σταθεράς.

### Ο χωρόχρονος de Sitter και η σφαίρα

Στην περίπτωση όπου η κοσμολογική σταθερά έχει θετικό πρόσημο, προκύπτει ο χώρος de Sitter. Στην τιμή  $r = \ell$  υπάρχει ένας ορίζοντας και, από τη στιγμή που το  $r$  δε μπορεί να γίνει μεγαλύτερο του  $\ell$ , μπορούμε να γράψουμε  $r = \ell \sin \theta$ . Κάνοντας μια αναλυτική συνέχιση του χρόνου  $it = \ell \psi$ , και με λίγους υπολογισμούς, παίρνουμε τη μετρική

$$ds^2 = \ell^2(d\theta^2 + \cos^2 \theta d\psi^2 + \sin^2 \theta d\Omega_{D-2}^2), \quad (5.21)$$

η οποία είναι η μετρική μιας σφαίρας  $S^D$ , ακτίνας  $\ell$ , εφόσον οι  $\psi$  και  $\theta$  έχουν την κατάλληλη περιοδικότητα.

### Ο χωρόχρονος Anti-de Sitter

Στην περίπτωση της αρνητικής κοσμολογικής σταθεράς, μπορούμε να θέσουμε  $r = \ell \sinh \rho$ , ώστε παίρνουμε την μετρική

$$ds^2 = -\cosh^2 \rho dt^2 + \ell^2 d\rho^2 + \ell^2 \sinh^2 \rho d\Omega_{D-2}^2, \quad (5.22)$$

η οποία μπορεί να προκύψει και ως μια αναλυτική συνέχιση της μετρικής της σφαίρας  $S^D$ , που δόθηκε στην εξίσωση (5.21).

### Επιστρέφοντας στην extremal λύση

Εξετάζοντας τον τανυστή Ricci στο extremal όριο της μελανής οπής Reissner-Nordstrom, στις συντεταγμένες  $R = r - Q$ , στη γειτονιά του ορίζοντα  $r = Q$ , έχουμε

$$R_{tt} = \frac{R^2}{Q^4}; \quad R_{rr} = -\frac{1}{R^2}; \quad R_{\theta\theta} = 1; \quad R_{\phi\phi} = \sin^2 \theta. \quad (5.23)$$

Κατά συνέπεια, συγκρίνοντας με την εξίσωση (5.14), παίρνουμε

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= -\frac{1}{Q^2} g_{\mu\nu}, & \text{για } \mu, \nu = t \text{ ή } r \\ R_{\mu\nu} &= +\frac{1}{Q^2} g_{\mu\nu}, & \text{για } \mu, \nu = \theta \text{ ή } \phi. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Από τη στιγμή που ο τανυστής του Maxwell υπακούει τις ίδιες σχέσεις, μπορούμε να πούμε ότι η ροή εξαιτίας του φορτίου της μελανής οπής είναι ουσιαστικά υπεύθυνη για την ύπαρξη της κοσμολογικής σταθεράς.

## 5.2 Η γεωμετρία των D-branes

Θεωρούμε τώρα το όριο των χαμηλών ενεργειών των θεωριών Τύπου ΙΙΑ και ΙΙΒ, το οποίο είναι η 10-διάστατη υπερβαρύτητα, όπου έχουμε και επιπλέον πεδία προερχόμενα από τους τομείς R-R και NS-NS.

### 5.2.1 Η οικογένεια των p-brane λύσεων

Υπάρχει εδώ μια οικογένεια 10-διάστατων λύσεων, οι οποίες παράγουν τη βαρύτητα, το dilaton, και τα R-R δυναμικά, η οποία γράφεται ως

$$dS^2 = Z_p^{-1/2}(r) \left( -K(r)dt^2 + \sum_{i=1}^p dx_i^2 \right) + Z_p^{1/2}(r) \left( \frac{dr^2}{K(r)} + r^2 d\Omega_{8-p}^2 \right), \quad (5.25)$$

όπου  $d\Omega_{8-p}^2$  είναι η μετρική της μοναδιαίας  $S^{8-p}$  σφαίρας, και

$$\begin{aligned} Z_p(r) &= 1 + \alpha_p \left( \frac{r_p}{r} \right)^{7-p}, \\ K(r) &= 1 - \left( \frac{r_H}{r} \right)^{7-p}, \\ e^{2\Phi} &= g_s^2 Z_p(r)^{\frac{(3-p)}{2}}, \\ C_{(p+1)} &= g_s^{-1} [Z_p(r)^{-1} - 1] dx^0 \wedge \cdots \wedge dx^p. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Επίσης, στα παραπάνω είναι

$$\begin{aligned} r_p^{7-p} &= d_p (2\pi)^{p-2} g_s N \alpha'^{(\tau-p)/2}, & d_p &= 2^{7-2p} \pi^{\frac{(9-3p)}{2}} \Gamma\left(\frac{7-p}{2}\right), \\ \alpha_p &= \sqrt{1 + \left( \frac{r_H^{7-p}}{2r_p^{7-p}} \right)^2} - \frac{r_H^{7-p}}{2r_p^{7-p}}. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Οι λύσεις αυτές αναπαριστούν  $p$ -διάστατα αντικείμενα, τα οποία καλούνται p-branes. Οι βράνες αυτές βρίσκονται στις  $(x^1, x^2, \dots, x^p)$  διαστάσεις και κινούνται στο χρόνο. Διαγράφουν δηλαδή έναν  $(p+1)$ -διάστατο κοσμικό όγκο, με γεωμετρία  $\mathbb{R}^{p+1}$ , γενικεύοντας τη κοσμική γραμμή των μελανών οπών που μελετήσαμε προηγουμένως. Μπορεί να παρατηρήσει κανείς, επίσης, ότι η λύση χωρίζεται στις κάθετες και παράλληλες συντεταγμένες, όπως ακριβώς συμβαίνει και στη λύση των μελανών οπών (5.4). Από την προηγούμενη ανάλυση των λύσεων της μελανής οπής, λοιπόν, συμπεραίνουμε ότι και οι λύσεις των p-branes θα έχουν έναν ορίζοντα στην ακτίνα  $r = r_H$  και μια ιδιομορφία στη θέση  $r = 0$ .

### 5.2.2 Το extremal όριο και συμπιπτουσες $D$ -branes

Όπως και στην περίπτωση της φορτισμένης μελανής οπής, υπάρχουν extremal όρια των παραπάνω λύσεων, αν και υπάρχουν κάποιες διαφορές ανάμεσα στις δύο περιπτώσεις. Οι περιπτώσεις αυτές είναι επιπλέον BPS καταστάσεις της 10-διάστατης υπερσυμμετρικής άλγεβρας. Το extremal όριο είναι για  $\alpha_p = 1$ , όπου οι λύσεις είναι οι

$$\begin{aligned} ds^2 &= H_p^{-1/2} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + H_p^{1/2} dx^i dx^i, \\ e^{2\Phi} &= g_s^2 H_p^{\frac{(3-p)}{2}}, \\ C_{(p+1)} &= -(H_p^{-1} - 1) g_s^{-1} dx^0 \wedge \cdots \wedge dx^p, \end{aligned} \quad (5.28)$$

όπου  $\mu = 0, \dots, p$ , και  $i = p+1, \dots, 9$ , ενώ η αρμονική συνάρτηση  $H_p$  είναι η

$$H_p = 1 + \left( \frac{r_p}{r} \right)^{7-p}, \quad (5.29)$$

με το  $r_p$  να δίνεται από τη σχέση (5.27).

Μπορούμε να συγκρίνουμε την παραπάνω λύση με την εξίσωση (5.9), όπου η extremal μελανή οπή είναι γραμμένη σε ισοτροπική μορφή, σε αναλογία με τη λύση (5.28). Επιπλέον, υπάρχει αντίστοιχα μια πολυκεντρική γενίκευση της λύσης (5.28), γράφοντας απλά την αρμονική συνάρτηση ως

$$H_p = 1 + \sum_{i=1}^N \frac{r_p^{7-p}}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^{7-p}}. \quad (5.30)$$

Η λύση αυτή περιγράφει  $N$  διαφορετικές βράνες τοποθετημένες σε τυχαίες θέσεις, οι οποίες δίνονται από τα διανύσματα  $\vec{r}_i$ . Η μάζα της λύσης είναι το άθροισμα των επιμέρους μαζών και είναι ίση με το ολικό φορτίο, κάτι που αποτελεί ένδειξη ότι η λύση αυτή είναι BPS αντικείμενο. Δεν υπάρχει δηλαδή ενέργεια που να προέρχεται από αλληλεπιδράσεις μεταξύ των  $p$ -branes.

Σε όλες τις περιπτώσεις, εκτός της  $p = 3$ , ο ορίζοντας που βρίσκεται στη θέση  $r = 0$  είναι μια ιδιόμορφη περιοχή μηδενικής επιφάνειας, αφού η ακτίνα της  $S^{8-p}$  σφαίρας μηδενίζεται εκεί. Στην περίπτωση όπου  $p = 3$ , ο ορίζοντας είναι πεπερασμένος και έχει μέγεθος  $r_3^{1/2} = \alpha' (4\pi g_s N)^{1/2}$ . Η γεωμετρία είναι  $\text{AdS}_5 \times S^5$ , με τα μεγέθη του κάθε παράγοντα να ορίζονται από την  $r_3^{1/2}$ . Υπάρχει, δηλαδή, άλλη μία αναλογία με την περίπτωση της Reissner-Nordstrom οπής, η εμφάνιση αυτής της ομαλής γεωμετρίας κοντά στον ορίζοντα.



Μπορεί κανείς να κατασκευάσει πιο πολύπλοκες λύσεις που διατηρούν λιγότερες υπερσυμμετρίες (στην extremal περίπτωση), συνδυάζοντας τις απλές αυτές λύσεις με διάφορους τρόπους. Ένας τέτοιος συνδυασμός οδηγεί στην κατασκευή λύσεων με πεπερασμένης επιφάνειας ορίζοντα, που αντιστοιχούν σε R-R φορτισμένες μελανές σπές Reissner-Nordstrom και διάφορες γενικεύσεις τους, κάτι που θα παρουσιαστεί στο κεφάλαιο 6.

Επιπλέον, υπάρχει μια στενή σύνδεση ανάμεσα στις λύσεις αυτές και τις D-branes. Οι λύσεις (5.28) είναι R-R φορτισμένες, αλλά γνωρίζουμε ότι τα μόνα αντικείμενα που μπορούν να κουβαλάνε φορτία R-R είναι οι D-branes. Μπορούμε να θεωρήσουμε, τότε, ότι οι λύσεις (5.28) κατασκευάζονται από D-branes, τοποθετώντας ουσιαστικά  $N$  Dp-branes στο σημείο  $r = 0$ .

Για κάθε Dp-brane που τοποθετούμε προστίθεται άλλο ένα σύνορο στο πρόβλημα, ώστε ένα τυπικό διάγραμμα θα έχει έναν παράγοντα  $g_s N$ , αφού κάθε σύνορο φέρνει έναν παράγοντα  $g_s$ , ενώ υπάρχει και το ίχνος πάνω στους  $N$  παράγοντες Chan-Paton. Η θεωρία διαταραχών για τις ανοικτές χορδές είναι τότε σωστή στο όριο  $g_s N < 1$ . Στην περιοχή αυτή, όμως, η λύση (5.28) δεν είναι σωστή, καθώς το τυπικό τετραγωνικό αναλλοίωτο της καμπυλότητας συμπεριφέρεται ως

$$R^2 \sim \left(\frac{r_p}{r}\right)^{7-p} \sim g_s N \left(\frac{\sqrt{\alpha'}}{r}\right)^{7-p}. \quad (5.31)$$

Από την άλλη πλευρά, για η λύση (5.28) έχει ασθενή καμπυλότητα για  $g_s N > 1$ , ώστε μπορεί να θεωρηθεί σωστή. Στην περιοχή αυτή, βέβαια, η θεωρία διαταραχών καταρρέει.

Κατά συνέπεια, υπάρχουν δύο συμπληρωματικές περιγραφές που μπορεί να χρησιμοποιήσει κανείς. Στην πρώτη περίπτωση, από τη στιγμή που οι λύσεις υπερβαρύτητας έχουν παραχθεί μέσω της θεωρίας διαταραχών, με  $g_s < 1$ , μπορεί κανείς να δουλέψει με τις παραπάνω λύσεις, αρκεί να θεωρήσει ότι το  $N$  είναι πολύ μεγάλο. Επειδή μάλιστα οι D-branes περιγράφονται στις χαμηλές ενέργειες από θεωρίες βαθμίδας, η περιγραφή αυτή δίνει τη δυνατότητα συσχέτισης μη τετριμμένων καμπυλωμένων γεωμετριών με θεωρίες βαθμίδας. Αυτή είναι και η βάση για τις λεγόμενες αντιστοιχίες μεταξύ θεωριών βαθμίδας και γεωμετρίας, όπως η AdS/CFT αντιστοιχία.

Στη δεύτερη περιγραφή, μπορεί κανείς να δουλέψει με τυχαίο  $N$ , και να θεωρήσει το  $g_s$  μεγάλο, χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα της περιοχής όπου το  $g_s$  είναι μικρό, καθώς οι D-branes είναι BPS αντικείμενα. Αυτή είναι και η βάση για την επιτυχή

μικροσκοπική περιγραφή της εντροπίας των R-R φορτισμένων μελανών οπών, που θα παρουσιαστεί στο κεφάλαιο 6.

### 5.3 Κατασκευάζοντας p-brane γεωμετρία με Dp-branes

Θεωρούμε λοιπόν ότι βρισκόμαστε στην πρώτη περίπτωση από αυτές που περιγράψαμε παραπάνω, όπου η γεωμετρία του χωρόχρονου (5.28) κατασκευάζεται από  $N \gg 1$  D-branes, ενώ  $g_s < 1$ . Ένας τρόπος που μπορεί κανείς να κατασκευάσει τη γεωμετρία αυτή, είναι να φέρει μία μία τις  $N$  D-branes από το άπειρο.

Έστω ότι έχουμε φέρει κάποιες βράνες από το  $r = \infty$  στη θέση  $r = 0$ , και φέρνουμε την επόμενη βράνη, στα πεδία υποβάθρου που δημιουργούνται από τις υπόλοιπες  $N$  βράνες. Από τη στιγμή που οι βράνες έχουν  $p$  κοινές διευθύνσεις όπου δεν υπάρχουν πεδία υποβάθρου, μπορούμε να αγνοήσουμε τις συγκεκριμένες διευθύνσεις, έτσι ώστε το πρόβλημα ανάγεται στην κίνηση ενός σωματιδίου στις υπόλοιπες  $9 - p$  χωρικές διευθύνσεις, και στην εύρεση της μάζας του και του δυναμικού μέσα στο οποίο κινείται.

Αξιοποιώντας το γεγονός ότι γνωρίζουμε τη δράση κοσμικού όγκου των D-branes σε χαμηλές ενέργειες, καταλήγει κανείς [6] ότι η ζητούμενη δράση είναι η

$$\begin{aligned} S &= \mu_p V_p \int dt \left( -g_s^{-1} H_p^{-1} + \frac{1}{2g_s} v^2 + g_s^{-1} H_p^{-1} - g_s^{-1} \right) \\ &= \int dt \mathcal{L} = \int dt \left( \frac{1}{2} m_p v^2 - m_p \right), \end{aligned} \quad (5.32)$$

όπου  $V_p = \int d^p x$  είναι ο χωρικός κοσμικός όγκος της βράνης και  $v$  η ταχύτητα με την οποία φέρνουμε τη βράνη από το άπειρο. Καταλήγουμε δηλαδή σε μια δράση που είναι ισοδύναμη με τη Lagrangian  $\mathcal{L}$  ενός ελεύθερου σωματιδίου, μάζας  $m_p$ , το οποίο κινείται σε σταθερό δυναμικό. Κατά συνέπεια, η αρχική ιδέα της κατασκευής της γεωμετρίας (5.28) με συνεχή μεταφορά βρανών από το άπειρο είναι λογική. Επιπλέον, δεν υπάρχει κάποιο μη τετριμμένο δυναμικό στη Lagrangian για τη διαδικασία αυτή, οπότε δε χρειάζεται κάποια δύναμη για να γίνει αυτό. Δεν υπάρχει δηλαδή ενέργεια που να οφείλεται σε αλληλεπιδράσεις. Η απουσία ενέργειας αλληλεπιδράσεων είναι άλλη μια επαναδιατύπωση του ότι οι βράνες αυτές είναι ουσιαστικά BPS καταστάσεις. Αυτό φαίνεται και από το γεγονός ότι το R-R φορτίο είναι ίσο με την τάση, και ικανοποιεί το κατώτατο όριο BPS.

## Κεφάλαιο 6

### D-Branes και μελανές οπές

Στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε την αναλογία της γεωμετρίας που δημιουργούν οι D-branes, με τη γεωμετρία της extremal Reissner-Nordstrom μελανής οπής. Η αναλογία αυτή αποτελεί μια καλή ένδειξη ότι οι μελανές οπές θα μπορούσαν να κατασκευαστούν στη θεωρία χορδών με κατάλληλες διατάξεις από D-branes. Κάτι τέτοιο είναι όντως εφικτό στη θεωρία χορδών, και θα παρουσιαστεί στο παρόν κεφάλαιο. Πιο συγκεκριμένα, θα παρουσιαστεί η κατασκευή της extremal μελανής οπής σε 4 και 5 διαστάσεις.

Η επαλήθευση της ανωτέρω κατασκευής γίνεται με την ταυτοποίηση των θερμοδυναμικών ποσοτήτων της μελανής οπής. Για το λόγο αυτό, οι δύο πρώτες παράγραφοι του παρόντος κεφαλαίου αφορούν τις θερμοδυναμικές ιδιότητες των κλασικών μελανών οπών, δηλαδή της θερμοκρασίας και της εντροπίας τους. Στην περιγραφή των μελανών οπών μέσω D-branes θα παρουσιαστεί επίσης και η μικροσκοπική εξαγωγή της εντροπίας Bekenstein-Hawking, σε πλήρη συμφωνία με τη μακροσκοπική εξαγωγή αυτής.

## 6.1 Η θερμοδυναμική των μελανών οπών

### 6.1.1 Το ολοκλήρωμα διαδρομών και ο Ευκλείδειος λογισμός

Μια απόπειρα κατασκευής ενός φορμαλισμού ολοκληρωμάτων διαδρομών (path integral) για την κβαντική βαρύτητα θα είχε τη μορφή

$$Z = \int \mathcal{D}[g, \varphi] e^{iI[g, \varphi]}, \quad (6.1)$$

για κάποια κατάλληλη επιλογή του μέτρου ολοκλήρωσης  $\mathcal{D}[g, \varphi]$  της μετρικής  $g$  και των πεδίων ύλης  $\varphi$ . Η δράση για την βαρύτητα σε μια περιοχή  $\mathcal{M}$  μπορεί να συμπληρωθεί από έναν όρο που υπολογίζεται στο σύνορο  $\partial\mathcal{M}$ , ο οποίος μηδενίζεται ως έχει κατά το λογισμό μεταβολών, αλλά συνεισφέρει μη μηδενικές κάθετες παραγώγους πάνω στο σύνορο. Η δράση γράφεται δηλαδή και ως

$$I = \frac{1}{16\pi} \int_{\mathcal{M}} \sqrt{-g} R d^D x + \frac{1}{8\pi} \int_{\partial\mathcal{M}} \sqrt{-h} K d^{D-1} x, \quad (6.2)$$

όπου  $h_{\mu\nu}$  είναι η επαγόμενη μετρική στο σύνορο και  $K$  είναι η εξωγενής (extrinsic) καμπυλότητα του συνόρου. Κρατώντας σταθερή τη μετρική στο σύνορο, παίρνει κανείς με λογισμό μεταβολών τις εξισώσεις Einstein.

Επειδή η δράση  $I$  είναι θετική, το ολοκλήρωμα διαδρομών αποκλίνει. Για το λόγο αυτό κάνει κανείς μια στροφή Wick στον άξονα του χρόνου, αντικαθιστώντας  $t \rightarrow -it$ , ώστε το ολοκλήρωμα διαδρομών γίνεται

$$Z = \int \mathcal{D}[g, \varphi] e^{-I^E[g, \varphi]}, \quad (6.3)$$

όπου  $I^E = -iI$  είναι η Ευκλείδεια δράση, η οποία για πραγματικά πεδία είναι πραγματική. Το τέχνασμα αυτό βοηθά στη σύγκλιση του ολοκληρώματος, ενώ η μετρική από  $(-+++ \dots +)$  έχει γίνει  $(++++ \dots +)$ . Μπορούμε να υπολογίσουμε τότε το ολοκλήρωμα διαδρομών κατά αυτόν τον τρόπο, και στη συνέχεια να κάνουμε μια στροφή πίσω στη Lorentzian μετρική.

Με το φορμαλισμό αυτό μπορεί κανείς να ορίσει επίσης την κανονική θερμοδυναμική ολότητα. Το πλάτος μετάβασης από την κατάσταση  $(g_1, \varphi_1)$  τη χρονική στιγμή  $t_1$ , στην κατάσταση  $(g_2, \varphi_2)$  τη χρονική στιγμή  $t_2$  είναι

$$\langle (g_2, \varphi_2); t_2 | (g_1, \varphi_1); t_1 \rangle = \int \mathcal{D}[g, \varphi] e^{iI[g, \varphi]}. \quad (6.4)$$

Περνώντας στην εικόνα του Heisenberg, η παραπάνω ποσότητα γίνεται

$$\langle (g_2, \varphi_2) | e^{-iHt_2} e^{iHt_1} | (g_1, \varphi_1) \rangle = \langle (g_2, \varphi_2) | e^{-iH(t_2-t_1)} | (g_1, \varphi_1) \rangle. \quad (6.5)$$

Θεωρούμε τώρα ότι  $(g_1, \varphi_1) = (g_2, \varphi_2)$ . Γράφοντας  $t_2 - t_1 = -i\beta$ , και αθροίζοντας σε ένα πλήρες σύνολο ιδιοκαταστάσεων  $(\psi_n, E_n)$  της Hamiltonian, παίρνουμε τη συνάρτηση επιμερισμού

$$Z = \sum_n e^{-\beta E_n}. \quad (6.6)$$

Η θερμοκρασία του συστήματος είναι  $T = \beta^{-1}$ , ενώ η πιθανότητα να βρίσκεται στην  $n$ -οστή κατάσταση είναι ίση με

$$p_n = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_n}. \quad (6.7)$$

Η εξίσωση (6.6) αναπαριστά το ίδιο σύστημα που αναπαρίσταται και από την εξίσωση (6.3), με τα πεδία  $(g, \varphi)$  να είναι περιοδικά στο  $\tau$ , με περίοδο  $\beta$ .

### 6.1.2 Η ημικλασική προσέγγιση

Αν και στη θεωρία χορδών δεν ακολουθεί κανείς το φορμαλισμό των ολοκληρωμάτων διαδρομών, αναμένει όμως, στο όριο των χαμηλών ενεργειών, να καταλήξει σε μια δράση αντίστοιχη με αυτή που μελετήσαμε παραπάνω, ανεξάρτητα από τη φύση του μικροσκοπικού μοντέλου του συστήματος. Οι μακροσκοπικές προβλέψεις, δηλαδή, της προσέγγισης που ακολουθούμε, θα πρέπει να συμπίπτουν με τα ημικλασικά αποτελέσματα που λαμβάνονται από την παραπάνω δράση.

Στο ημικλασικό όριο, το ολοκλήρωμα διαδρομών γίνεται

$$Z = e^{-I^E} \equiv e^{-\beta W}, \quad (6.8)$$

όπου το  $W$  είναι το ενεργό θερμοδυναμικό δυναμικό

$$W = E - TS, \quad (6.9)$$

όπου  $T$  είναι η θερμοκρασία και  $S$  η εντροπία του συστήματος. Στο όριο αυτό μπορεί κανείς να υπολογίσει διάφορες ποσότητες, όπως η μέση ενέργεια ή η εντροπία του συστήματος. Για τη μέση ενέργεια, έχουμε

$$\langle E \rangle = \frac{1}{Z} \sum_n E_n e^{-\beta E_n} = -\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} = -\frac{\partial \log Z}{\partial \beta} = \frac{\partial I^E}{\partial \beta}. \quad (6.10)$$

Αντίστοιχα παίρνει κανείς για την εντροπία ότι

$$S = - \sum_n p_n \log p_n, \quad (6.11)$$

ή μετά από λίγες πράξεις

$$S = \beta \langle E \rangle - I^E. \quad (6.12)$$

Οι δύο αυτές σχέσεις για την ενέργεια και την εντροπία θα χρησιμοποιηθούν παρακάτω στις περιπτώσεις των μελανών οπών Schwarzschild και Reissner-Nordstrom.

### 6.1.3 Η θερμοκρασία των μελανών οπών

Η μετρική για τις λύσεις Schwarzschild και Reissner-Nordstrom παρουσιάστηκε στο κεφάλαιο 5. Επεκτείνουμε εδώ τη λύση αυτή, σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν στις προηγούμενες παραγράφους, μέσω του μετασχηματισμού  $t \rightarrow -i\tau$ , με περίοδο  $\beta$ , παίρνοντας

$$ds^2 = V d\tau^2 + V^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_2^2, \quad (6.13)$$

$$\text{με} \quad V = \left( 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right). \quad (6.14)$$

Η λύση αυτή έχει νόημα στην περιοχή  $r_+ \leq r \leq \infty$ , όπου  $r_+ = M + \sqrt{M^2 - Q^2}$  είναι ο αρχικός ορίζοντας της μελανής οπής. Στη γειτονιά του  $r = r_+$  η γεωμετρία δεν είναι ακριβώς  $\mathbb{R}^2 \times S^2$ , αφού υπάρχει μια κωνική ιδιομορφία εκεί λόγω των συντεταγμένων  $(r, \tau)$ , οι οποίες δεν έχουν σωστή περιοδικότητα για τυχαίο  $\beta$ .

Το πρόβλημα εύρεσης της θερμοκρασίας της μελανής οπής, μάλιστα, ανάγεται τελικά στην εξάλειψη της συγκεκριμένης ιδιομορφίας. Εξασφαλίζοντας λοιπόν ότι ο απειροστός λόγος της περιφέρειας (γύρω από το  $\tau$ ) προς την ακτίνα είναι  $2\pi$  όταν πλησιάζει κανείς την αρχή του συστήματος  $\mathbb{R}^2$ , έχουμε

$$2\pi = \lim_{r \rightarrow r_+} \frac{\Delta\tau}{V^{-1/2}} \frac{d(V^{1/2})}{dr} \implies \frac{4\pi}{\beta} = V'|_{r=r_+}, \quad (6.15)$$

όπου  $\Delta\tau = \beta = 1/T$ . Από τις δύο παραπάνω σχέσεις θα έχουμε τελικά

$$\frac{1}{\beta} = T = \frac{Mr_+ - Q^2}{2\pi r_+^3} = \frac{\sqrt{M^2 - Q^2}}{4\pi M(M + \sqrt{M^2 - Q^2}) - 2\pi Q^2}, \quad (6.16)$$

ή για την περίπτωση της λύσης Schwarzschild, όπου  $Q = 0$ ,

$$T = \frac{1}{8\pi M}, \quad (6.17)$$

που δείχνει ότι οι μεγάλες μελανές οπές είναι αρκετά ψυχρές, ενώ οι μικρότερες είναι πιο θερμές. Κάτι τέτοιο είναι άλλωστε συμβατό με τις παρατηρήσεις που έχουμε, αφού σημαίνει ότι οι αστροφυσικές μελανές οπές έχουν αμελητέα μάζα εξαιτίας αυτής της ακτινοβολίας. Οι ασυμπτωτικά επίπεδες μελανές οπές, μάλιστα, έχουν αρνητική ειδική θερμότητα, αφού μειώνοντας την ενέργεια (μάζα) του συστήματος αυξάνεται ο ρυθμός με τον οποίο αυτή χάνεται.

Αξίζει επίσης να σημειωθεί ότι για τη φορτισμένη οπή, η θερμοκρασία μηδενίζεται στο extremal όριο, όπου  $r_+ = Q = M$ . Το αποτέλεσμα αυτό ταιριάζει με το γεγονός ότι η extremal λύση είναι ουσιαστικά μια BPS κατάσταση, οπότε και η μηδενική θερμοκρασία είναι συμβατή με την ευστάθειά της. Επιπλέον, η θερμοδυναμική διατηρεί την ιδέα της κοσμικής λογοκρισίας, αφού η οπή δε μπορεί να ακτινοβολήσει περισσότερο και να γίνει ένα αντικείμενο με γυμνή ιδιομορφία.

## 6.2 Ο λογισμός της Ευκλείδειας δράσης

Παρουσιάζεται στη συνέχεια ο τρόπος με τον οποίο υπολογίζει κανείς την Ευκλείδεια δράση, ώστε να υπολογίσει στο ημικλασικό όριο τη θερμοκρασία και την εντροπία των μελανών οπών. Ο υπολογισμός γίνεται για τις μελανές οπές Schwarzschild και Reissner-Nordstrom.

### 6.2.1 Η δράση για τη Schwarzschild

Ο χωρόχρονος Schwarzschild είναι ασυμπτωτικά επίπεδος, οπότε υπολογίζει κανείς τη δράση χρησιμοποιώντας τον επίπεδο χωρόχρονο ως υπόβαθρο. Και για τους δύο χωροχρόνους το βαθμωτό Ricci είναι μηδενικό, οπότε μένει μόνο ο δεύτερος όρος της εξίσωσης (6.2).

Υπολογίζουμε αρχικά την εξωγενή καμπυλότητα

$$K_{\mu\nu} = \frac{1}{2} n_\alpha G^{\alpha\beta} \partial_\beta G_{\mu\nu}, \quad (6.18)$$

η οποία δίνει [6] τις μη μηδενικές συνιστώσες

$$K_{tt} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2}} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{2M}{r^2},$$

$$K_{\theta\theta} = \frac{1}{2} \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2}} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) 2r,$$

$$\begin{aligned}
K_{\phi\phi} &= \frac{1}{2} \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2}} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) 2r \sin^2 \theta, \\
K = G^{\mu\nu} K_{\mu\nu} &= \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2} r^2} [2r - 3M],
\end{aligned} \tag{6.19}$$

ενώ θέτοντας  $M = 0$  παίρνουμε για το χώρο Minkowski  $K = 2/r$ . Το μέτρο ολοκλήρωσης στο σύνορο είναι

$$\sqrt{h} = r^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2} \sin \theta, \tag{6.20}$$

ενώ η περίοδος για το φανταστικό χρόνο είναι  $\Delta\tau = \beta$ . Επομένως, έχουμε για το χώρο Schwarzschild

$$\int \sqrt{h} K d^3x = \beta 4\pi(2r - 3M). \tag{6.21}$$

Για το χώρο Minkowski το μέτρο είναι  $\sqrt{h} = r^2 \sin \theta$ , ενώ η θερμοκρασία δεν είναι  $\beta$ , αλλά μετατοπισμένη στην τιμή  $\beta(1 - 2M/r)^{1/2}$ . Παίρνουμε λοιπόν το αποτέλεσμα

$$\int \sqrt{h} K d^3x = \beta 4\pi 2r \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2}, \tag{6.22}$$

ώστε η διαφορά των δράσεων στο όριο  $R \rightarrow \infty$  είναι

$$I^E = \beta \frac{M}{2}. \tag{6.23}$$

Χρησιμοποιώντας τώρα τις σχέσεις (6.10) και (6.12), μπορούμε να υπολογίσουμε την ενέργεια και την εντροπία αντίστοιχα, παίρνοντας

$$\langle E \rangle = \frac{M}{2} + \frac{\beta}{2} \frac{\partial M}{\partial \beta} = M, \tag{6.24}$$

για την ενέργεια, ενώ η εντροπία είναι

$$S = \beta M - \frac{\beta M}{2} = \frac{8\pi M^2}{2} = \frac{\mathcal{A}}{4}, \tag{6.25}$$

όπου  $\mathcal{A}$  είναι η επιφάνεια του ορίζοντα της μελανής οπής. Παρατηρούμε επίσης οτι τα αποτελέσματα αυτά επιβεβαιώνουν την έκφραση για το θερμοδυναμικό δυναμικό

$$W \equiv \frac{I}{\beta} = \frac{M}{2} = M - TS. \tag{6.26}$$



### 6.2.2 Η δράση για τη Reissner-Nordstrom

Με παρόμοιους υπολογισμούς για την περίπτωση της φορτισμένης μελανής οπής, παίρνει κανείς ξανά το αποτέλεσμα της σχέσης (6.23), όπου το  $\beta$  δίνεται τώρα από τη σχέση (6.16). Η δράση πρέπει να συμπληρωθεί, όμως, από τη συνεισφορά του όρου Maxwell, ο οποίος μετατρέπεται σε συνοριακό όρο

$$I_M = -\frac{1}{16\pi} \int_{\mathcal{M}} \sqrt{g} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d^D x = -\frac{1}{8\pi} \int_{\partial\mathcal{M}} A_\mu F^{\mu\nu} dS_\nu, \quad (6.27)$$

όπου έχει χρησιμοποιηθεί και η συνθήκη  $\nabla_\nu F^{\mu\nu} = 0$ .

Παρατηρεί κανείς ότι η συνήθης έκφραση για το δυναμικό βαθμίδας, γραμμένο ως 1-μορφή  $A = A_t dt$ , όπου  $A_t = Q/r$ , είναι ιδιόμορφη, αφού το  $dt$  γίνεται άπειρο στον ορίζοντα. Για το λόγο αυτό ορίζουμε μια τιμή του δυναμικού στον ορίζοντα,  $\Phi = Q/r_+$ , και επαναορίζουμε το δυναμικό μέσω ενός μετασχηματισμού βαθμίδας:

$$A = Q \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_+} \right) dt. \quad (6.28)$$

Γνωρίζοντας επιπλέον ότι οι μόνες μη μηδενικές συνιστώσες του  $F_{\mu\nu}$  είναι οι  $F_{rt} = -Q/r^2$ , το ολοκλήρωμα για τη δράση υπολογίζεται εύκολα, δίνοντας στο όριο  $R \rightarrow \infty$  το αποτέλεσμα

$$I_M = -\frac{\beta}{2} Q\Phi. \quad (6.29)$$

Κατά συνέπεια, η ολική δράση γίνεται

$$I^E = \frac{\beta}{2} [M - Q\Phi]. \quad (6.30)$$

Στο ημικλασικό όριο η ποσότητα αυτή μπορεί να εξισωθεί με  $\beta W$ , όπου το θερμοδυναμικό δυναμικό είναι

$$W = M - TS - Q\Phi, \quad (6.31)$$

όπου το  $\Phi$  παίζει το ρόλο κάπου χημικού δυναμικού για το  $Q$ . Χρησιμοποιώντας τις γνωστές θερμοδυναμικές σχέσεις, υπολογίζει κανείς τότε τις ποσότητες

$$\begin{aligned} E &= \left( \frac{\partial I}{\partial \beta} \right)_\Phi - \frac{\Phi}{\beta} \left( \frac{\partial I}{\partial \Phi} \right)_\beta = M, \\ S &= \beta \left( \frac{\partial I}{\partial \beta} \right)_\Phi - I = \frac{\mathcal{A}}{4}, \\ Q &= -\frac{1}{\beta} \left( \frac{\partial I}{\partial \Phi} \right)_\beta = Q, \end{aligned} \quad (6.32)$$

όπου  $\mathcal{A}$  είναι η επιφάνεια του ορίζοντα της μελανής οπής.

### 6.2.3 Οι θερμοδυναμικοί νόμοι

Η αναγνώριση της θερμοδυναμικής συμπεριφοράς των μελανών οπών οφείλεται στην παρατήρηση ότι η επιφάνεια του ορίζοντα μιας απομονωμένης μελανής οπής δε δύναται να μειωθεί από καμία φυσική διαδικασία. Η πρόταση αυτή είναι φυσικά ανάλογη του δεύτερου νόμου της θερμοδυναμικής, όπου το ίδιο ακριβώς συμβαίνει με την εντροπία.

Συνδυάζοντας τα παραπάνω με το γεγονός ότι υπάρχει μια θερμοκρασία που σχετίζεται με μια μελανή οπή, εξαιτίας της ακτινοβολίας Hawking, καταλήγει κανείς στη σχέση Bekenstein-Hawking που συσχετίζει την εντροπία με την επιφάνεια του ορίζοντα ως

$$S = \frac{A}{4}, \quad (6.33)$$

όπως ακριβώς υπολογίστηκε στις περιπτώσεις Schwarzschild και Reissner-Nordstrom. Μπορεί μάλιστα κανείς να γράψει ένα ‘πρώτο θερμοδυναμικό νόμο’ για τις μελανές οπές,

$$TdS = dE + pdV \leftrightarrow dM = \frac{1}{8\pi} \kappa dA + \Omega_H dJ + Qd\Phi, \quad (6.34)$$

όπου  $\Omega_H$  και  $J$  είναι η γωνιακή ταχύτητα και η στροφορμή για την περίπτωση της περιστρεφόμενης μελανής οπής (της λύσης Kerr).

## 6.3 Μελανές οπές στη θεωρία χορδών

Το γεγονός ότι οι μελανές οπές υπακούν τους νόμους της θερμοδυναμικής, σημαίνει ότι η ίδια η βαρύτητα έχει κάποια βαθύτερη δομή, η οποία δεν έχει κατανοηθεί πλήρως. Αυτό που θέλει να βρει κανείς δηλαδή, όπως και στη συνηθισμένη θερμοδυναμική, είναι μια μικροσκοπική περιγραφή από την οποία να προκύπτουν οι παραπάνω νόμοι.

Μια τέτοια περιγραφή επιτυγχάνεται στα πλαίσια της θεωρίας χορδών, όπου μπορεί κανείς χρησιμοποιώντας D-branes να βρει μια μικροσκοπική περιγραφή για μια συγκεκριμένη ομάδα μελανών οπών, και να εξάγει από αυτήν τις ίδιες ακριβώς θερμοδυναμικές σχέσεις που παρουσιάστηκαν προηγουμένως.

Η βασική ιδέα είναι η εξής: αρχικά, μελετά κανείς μια κατάσταση της θεωρίας στην ασθενή σύζευξη και υπολογίζει την εντροπία της κατάστασης, η οποία θα είναι ο λογάριθμος του αριθμού των καταστάσεων με ίδια μάζα και φορτία. Στη συνέχεια περνάμε σε ισχυρή σύζευξη, όπου η βαρυτική σύζευξη επίσης αυξάνεται και το αντικείμενο γίνεται μια μελανή οπή με μεγάλη ακτίνα. Για τη μελανή οπή αυτή υπολογίζει κανείς την εντροπία Bekenstein, και συγκρίνει τα δύο αποτελέσματα.

Για να έχει νόημα μια τέτοια διαδικασία, όμως, θα πρέπει η πυκνότητα των καταστάσεων να μην αλλάζει καθώς περνάμε από ασθενή σε ισχυρή σύζευξη. Για το λόγο αυτό χρησιμοποιούνται οι BPS καταστάσεις, ο αριθμός των οποίων δεν αλλάζουν καθώς η σύζευξη παίρνει μεγαλύτερες τιμές. Χρησιμοποιώντας, λοιπόν, D-branes, μπορούμε να κατασκευάσουμε μια 5-διάστατη και μια 4-διάστατη extremal μελανή οπή, όπου απαιτούνται τρία και τέσσερα είδη φορτίων αντίστοιχα.

Παρακάτω περιγράφουμε την κατασκευή τέτοιων μελανών οπών, τη μικροσκοπική περιγραφή της εντροπίας τους καθώς και αποκλίσεις από το extremal όριο.

## 6.4 $D = 5$ μελανές οπές

Η περίπτωση των 5-διάστατων μελανών οπών είναι η απλούστερη, καθώς απαιτούνται μόνο τρία είδη φορτίων για την κατασκευή τους. Η μικροσκοπική περιγραφή της εντροπίας των 5-διάστατων μελανών οπών, όπως έγινε από τους Strominger και Vafa [13], ήταν η πρώτη φορά όπου η εντροπία Bekenstein-Hawking υπολογίστηκε μετρώντας κβαντικές καταστάσεις σε μια θεωρία της κβαντικής βαρύτητας, σε περισσότερες από  $2 + 1$  διαστάσεις.

### 6.4.1 Κατασκευάζοντας τη μελανή οπή

Για να κατασκευάσουμε την 5-διάστατη μελανή οπή Reissner-Nordstrom, στο extremal όριο, ξεκινάμε με έναν 10-διάστατο χωρόχρονο και κάνουμε συμπαγοποίηση σε έναν  $T^5 = S^1 \times T^4$ , στις διευθύνσεις  $(x^5, x^6, \dots, x^9)$ . Οι μη συμπαγοποιημένες διευθύνσεις είναι δηλαδή οι  $(x^0, \dots, x^4)$ . Υπάρχει μια λύση στην υπερβαρύτητα Τύπου IIB, η οποία αναπαριστά (α) D5-branes τυλιγμένες στον  $T^5$ , (β) D1-branes τυλιγμένες στη διεύθυνση  $x^5$  και (γ) κάποια ορμή,  $p$ , στη διεύθυνση  $x^5$ . Τέλος, κάνοντας αναγωγή Kaluza-Klein στις υπόλοιπες μη συμπαγοποιημένες διαστάσεις, παίρνουμε ένα σημειακό αντικείμενο, την extremal Reissner-Nordstrom μελανή οπή. Η μετρική έχει τη μορφή [8]

$$ds^2 = -[f(r)]^{-2/3} \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) dt^2 + [f(r)]^{1/3} \left(\frac{dr^2}{1 - \frac{r_0^2}{r^2}} + r^2 d\Omega_3^2\right), \quad (6.35)$$

όπου

$$f(r) \equiv \left(1 + \frac{r_1^2}{r^2}\right) \left(1 + \frac{r_5^2}{r^2}\right) \left(1 + \frac{r_n^2}{r^2}\right), \quad (6.36)$$

και

$$r_1^2 = r_0^2 \sinh^2 \alpha, \quad r_5^2 = r_0^2 \sinh^2 \gamma, \quad r_n^2 = r_0^2 \sinh^2 \sigma. \quad (6.37)$$

Η λύση αυτή αναπαριστά μια μελανή οπή με έναν εξωτερικό ορίζοντα στη θέση  $r = r_0$  και έναν εσωτερικό ορίζοντα στη θέση  $r = 0$ . Θα πρέπει να σημειωθεί ότι δεν υπάρχουν πουθενά D-branes στο χωρόχρονο ως φυσικά αντικείμενα στην παραπάνω λύση, απλά έχουμε αντιστοιχήσει τα φορτία που έχει η παραπάνω λύση με τα αντίστοιχα των διαφόρων D-branes. Τα αντίστοιχα φορτία  $Q_1, Q_5, N$  δίνονται από τις σχέσεις

$$Q_1 = \frac{V r_0^2 \sinh 2\alpha}{2g_s}, \quad Q_5 = \frac{r_0^2 \sinh 2\gamma}{2g_s}, \quad N = \frac{NR^2 r_0^2 \sinh 2\sigma}{2g_s^2}, \quad (6.38)$$

όπου  $V$  είναι ο όγκος του  $T^4$  στις διευθύνσεις  $x^6 \cdots x^9$ ,  $R$  είναι η ακτίνα του κύκλου  $x^5$  και  $g_s$  η σύζευξη της χορδής. Το φορτίο  $N$  προέρχεται από τη διεύθυνση  $x^5$ , ενώ η μάζα της μελανής οπής δίνεται από τη σχέση

$$M = \frac{RVr_0^2}{2g_s^2} (\cosh 2\alpha + \cosh 2\gamma + \cosh 2\sigma). \quad (6.39)$$

Μπορούμε στη συνέχεια να υπολογίσουμε τις ημικλασικές θερμοδυναμικές ιδιότητες της μελανής οπής. Οι εκφράσεις που παίρνει τότε κανείς είναι οι

$$S = \frac{\mathcal{A}_{10}}{4G_N^{10}} = \frac{\mathcal{A}_5}{4G_N^5} = \frac{2\pi RVr_0^3}{g_s^2} \cosh \alpha \cosh \gamma \cosh \sigma, \quad (6.40)$$

για την εντροπία, ενώ η θερμοκρασία Hawking είναι ίση με

$$T = \frac{1}{2\pi r_0 \cosh \alpha \cosh \gamma \cosh \sigma}. \quad (6.41)$$

### Τα extremal και near-extremal όρια

Το extremal όριο της παραπάνω μελανής οπής αντιστοιχεί στα όρια

$$r_0^2 \rightarrow 0, \quad \text{και} \quad \alpha, \gamma, \sigma \rightarrow \infty, \quad (6.42)$$

κρατώντας τις τιμές των φορτίων  $Q_1, Q_5$  και  $N$  σταθερές. Στο όριο αυτό οι δύο οριζόντες συμπίπτουν. Από τις παραπάνω σχέσεις, παρατηρούμε ότι η θερμοκρασία Hawking μηδενίζεται, ενώ η εντροπία και η μάζα της μελανής οπής παραμένουν πεπερασμένες. Η εντροπία στο extremal όριο παίρνει τη μορφή

$$S = 2\pi \sqrt{Q_1 Q_5 N}, \quad (6.43)$$

εξαρτάται δηλαδή μόνο από τα τρία φορτία και όχι από άλλες παραμέτρους όπως τη σύζευξη της χορδής ή τον όγκο των συμπαγοποιημένων διευθύνσεων.

Το near-extremal όριο αντιστοιχεί στην περιοχή όπου το  $r_0$  είναι μικρό και τα  $\alpha, \gamma, \sigma$  μεγάλα. Οι σχετικές τιμές των  $\alpha, \gamma, \sigma$  σχετίζονται με την ολική συνεισφορά των φορτίων στη μάζα (6.39). Οι near-extremal μελανές οπές που είναι ευκολότερο να αναλυθούν μέσω των D-branes είναι αυτές για τις οποίες  $\sigma \ll \alpha, \gamma$ , ή  $r_0, r_n \ll r_1, r_5$ , που σημαίνει ότι η συνεισφορά στη μάζα (6.39) λόγω των D-branes είναι πολύ μεγαλύτερη από τη συνεισφορά της ορμής. Το όριο αυτό ονομάζεται στη βιβλιογραφία ως *αραιωμένο αέριο* (dilute gas). Στο όριο αυτό η μάζα και η εντροπία της near-extremal μελανής οπής παίρνουν τη μορφή

$$M = \frac{RQ_1}{g_s} + \frac{RVQ_5}{g_s} + \frac{RVr_0^2}{2g_s^2} \cosh 2\sigma, \quad (6.44)$$

και

$$S = 2\pi \frac{R\sqrt{V}r_0}{g_s} \sqrt{Q_1Q_5} \cosh \sigma \quad (6.45)$$

αντίστοιχα.

Οι λύσεις αυτές είναι καλά ορισμένες μόνο όταν οι καμπυλότητες είναι παντού μικρότερες του  $\alpha'$ , ώστε οι διορθώσεις χαμηλών ενεργειών στη δράση να είναι αγνοήσιμες. Η απαίτηση αυτή μεταφράζεται ως τα όρια

$$g_s Q_1 \gg 1, \quad g_s Q_5 \gg 1, \quad g_s^2 N \gg 1. \quad (6.46)$$

Στην περιοχή αυτή, η κλασική λύση περιγράφεται κατάλληλα στη θεωρία χορδών από ένα σύνολο D-branes.

### Περιστρεφόμενες $D = 5$ μελανές οπές

Στις πέντε διαστάσεις είναι εφικτό μια μελανή οπή με τρία φορτία να περιστρέφεται και να παραμένει υπερσυμμετρική, κάτι που δεν ισχύει στις τέσσερις διαστάσεις, ακόμη και στο extremal όριο. Στην 5-διάστατη μελανή οπή, ο μόνος τρόπος για τον οποίο διατηρείται το 1/8 των 32 υπερσυμμετριών είναι αυτός όπου έχουμε ταυτόχρονη περιστροφή σε δύο ορθογώνια επίπεδα, με ίδια στροφορμή. Εισάγοντας λοιπόν τις γωνιακές συντεταγμένες

$$\begin{aligned} x^1 &= r \cos \theta \cos \psi, & x^2 &= r \cos \theta \sin \psi \\ x^3 &= r \sin \theta \cos \phi, & x^4 &= r \sin \theta \sin \phi, \end{aligned} \quad (6.47)$$

τότε

$$dx^i dx^i = dr^2 + r^2 d\Omega_3^2, \quad (6.48)$$

και περιγράφει τον Ευκλείδειο χώρο για

$$\begin{aligned} d\Omega_3^2 &= d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2 + \cos^2 \theta d\psi^2 \\ \text{με} \quad &0 \leq \theta \leq \pi/2, \quad 0 \leq \phi, \psi \leq 2\pi. \end{aligned} \quad (6.49)$$

Η μετρική της υπερσυμμετρικής περιστρεφόμενης μελανής οπής είναι τότε μια γενίκευση της σχέσης (6.35),

$$ds^2 = -f^{2/3} \left( dt - \frac{a}{r^2} \sin^2 \theta d\phi + \frac{a}{r^2} \cos^2 \theta d\psi \right)^2 + f^{1/3} (dr^2 + r^2 d\Omega_3^2), \quad (6.50)$$

όπου το  $f$  δίνεται πάλι από τη σχέση (6.36). Η μετρική αυτή περιγράφει ταυτόχρονη περιστροφή στα επίπεδα 12 και 34. Η παράμετρος  $a$  σχετίζεται με τις  $J_{12} = J_{34} = J$  μέσω της σχέσης

$$J = \frac{\pi a}{4G_5}. \quad (6.51)$$

Υπολογίζοντας την επιφάνεια του ορίζοντα στη θέση  $r = 0$ , και κατά συνέπεια την εντροπία, βρίσκει κανείς ότι αυτή είναι ίση με

$$S = \frac{A}{4G_5} = 2\pi \sqrt{Q_1 Q_5 N - J^2}. \quad (6.52)$$

### 6.4.2 Μικροσκοπική περιγραφή της εντροπίας

Έχοντας εξάγει τις θερμοδυναμικές ποσότητες με ημικλασικά επιχειρήματα, παρουσιάζουμε στη συνέχεια μια μικροσκοπική περιγραφή της εντροπίας της ανωτέρω μελανής οπής στα πλαίσια της θεωρίας χορδών, κατασκευασμένη από D-branes.

Η περιγραφή βασίζεται στη θεωρία χορδών Τύπου IIB σε έναν  $T^5 \times S^1$ . Μπορεί να θεωρήσει κανείς ότι τα φορτία  $Q_1$  και  $Q_5$  προέρχονται από κάποιες D1-branes και D5-branes αντίστοιχα, όπου οι πρώτες είναι τυλιγμένες γύρω από τη σφαίρα  $S^1$  ενώ οι τελευταίες γύρω από τον  $T^5$ . Υπάρχει ακόμη στη διάταξη και κάποια ορμή  $N/R$ , στην  $S^1$ , η πηγή της οποίας θα παρουσιαστεί παρακάτω.

Το γεγονός ότι υπάρχουν  $Q_1$  μονάδες φορτίου που σχετίζονται με τις D1-branes σημαίνει ότι υπάρχουν  $Q_1$  περιτυλίξεις των D1-branes γύρω από τον κύκλο  $S^1$ . Κατά συνέπεια, υπάρχει μια ασάφεια, καθώς αυτό μπορεί να πραγματοποιηθεί με πολλούς τρόπους. Οι δύο ακραίες πιθανότητες είναι (α) να υπάρχουν  $Q_1$  D1-branes τυλιγμένες μία φορά η κάθε μία γύρω από τον κύκλο και (β) να υπάρχει μία μόνο D1-brane

τυλιγμένη  $Q_1$  φορές. Όλες μαζί, οι διαφορετικές πιθανότητες αντιστοιχούν στους επιμερισμούς του  $Q_1$ . Όταν υπάρχουν λοιπόν περισσότερες από μία D1-branes, απαιτεί κανείς αυτές να διαμορφώνουν μια δέσμια κατάσταση ώστε το αντικείμενο που προκύπτει να αντιστοιχεί σε μία μόνο μελανή οπή. Τα ίδια επιχειρήματα ισχύουν και για τις D5-branes και τα φορτία  $Q_5$ . Σε κάθε περίπτωση, όμως, θα πρέπει η διάταξη των D1-D5-branes να παράγει μια δέσμια κατάσταση, ώστε να καταλήγει κανείς σε ένα μόνο τοπικό αντικείμενο στις μη συμπαγοποιημένες διαστάσεις.

Όσον αφορά την ορμή τώρα, η συμμετρία του συστήματος δεν επιτρέπει στις (στερεές) βράνες να κουβαλάνε ορμή. Επιπλέον, για να μη παραβιάζεται η BPS κατάσταση, θα πρέπει οι διεγέρσεις των βράνων που κουβαλάνε ορμή να είναι άμαζες. Επομένως, η ορμή  $N/R$  θα πρέπει να περιέχεται στις άμαζες ανοικτές χορδές. Υπάρχουν διάφοροι τύποι τέτοιων ανοικτών χορδών: αυτές που πηγαίνουν από την D1-brane σε μια άλλη D1-brane, οι οποίες συμβολίζονται με  $(1, 1)$ , καθώς και οι αντίστοιχες  $(5, 5)$ ,  $(1, 5)$  και  $(5, 1)$ . Η ορμή  $N/R$  μεταφέρεται λοιπόν από άμαζες μποζονικές και φερμιονικές ανοικτές χορδές, σε μονάδες  $1/R$ , ενώ υπάρχουν συνολικά  $4Q_1Q_5$  άμαζες καταστάσεις στο σύστημα (με τον ίδιο αριθμό μποζονικών και φερμιονικών καταστάσεων, αφού η θεωρία είναι υπερσυμμετρική).

Έχουμε ουσιαστικά τότε μια 2-διάστατη θεωρία πεδίου. Η ενέργεια του συστήματος είναι  $E = N/R$ . Ο αριθμός των τρόπων με τους οποίους μπορεί να μοιραστεί η ολική ορμή  $N$  στις ανοικτές μποζονικές και φερμιονικές χορδές δίνεται από τη συνάρτηση επιμερισμού [11]

$$Z = \left[ \prod_{N=1}^{\infty} \frac{1 + w^N}{1 - w^N} \right]^{4Q_1Q_5} \equiv \sum \Omega(N)w^N, \quad (6.53)$$

όπου  $\Omega(N)$  είναι ο αριθμός των μικροκαταστάσεων με ενέργεια  $E = N/R$ . Για μεγάλο  $N$ , η παραπάνω σχέση δίνει

$$\Omega(N) \sim \exp(2\pi\sqrt{Q_1Q_5N}), \quad (6.54)$$

και η σχέση του Boltzmann για την εντροπία,  $S = \ln \Omega(N)$ , δίνει τη σχέση

$$S = 2\pi\sqrt{Q_1Q_5N}, \quad (6.55)$$

σε συμφωνία με τη σχέση (6.43), η οποία προέκυψε με καθαρά ημικλασικά επιχειρήματα.

**Near-extremal  $D = 5$  μελανές οπές**

Η μικροσκοπική περιγραφή της εντροπίας των near-extremal μελανών οπών είναι γενικά αρκετά δυσκολότερη. Στο όριο του αραιωμένου αερίου, όμως, υπάρχει ακριβής συμφωνία στις εντροπίες των δύο διαφορετικών περιγραφών.

Ξεκινώντας με ένα σύστημα από D1-branes και D5-branes, όπως προηγουμένως, προσθέτουμε κάποια επιπλέον ενέργεια και ορμή στο σύστημα. Η ενέργεια αυτή διεγείρει τους αριστερά κινούμενους και δεξιά κινούμενους τρόπους ταλάντωσης του συστήματος. Οι ενέργειες των τρόπων αυτών υπολογίζονται από τις σχέσεις (6.38) και (6.44) ως

$$M - \frac{Q_5 R V}{g_s} - \frac{Q_1 R}{g_s} = \frac{R V r_0^2}{2g_s^2} \cosh 2\sigma = \frac{N_L + N_R}{R}, \quad (6.56)$$

και

$$N = \frac{R^2 V r_0^2}{2g_s^2} \sinh 2\sigma = N_L - N_R. \quad (6.57)$$

Υπολογίζει κανείς τότε τις ποσότητες  $N_L, N_R$  με όρους των παραμέτρων της μελανής οπής. Ο υπολογισμός της εντροπίας γίνεται τότε όπως και στην extremal περίπτωση, και βρίσκει κανείς ότι [8]

$$S = 2\pi \sqrt{Q_1 Q_5 N_L} + 2\pi \sqrt{Q_1 Q_5 N_R}. \quad (6.58)$$

Το αποτέλεσμα αυτό συμπίπτει ακριβώς με την εντροπία της near extremal μελανής οπής στο όριο του αραιωμένου αερίου (6.45).

Η περίπτωση αυτή είναι και η πιο απλή. Μπορεί όμως να θεωρήσει κανείς και πιο γενικές near extremal μελανές οπές, μακριά από το όριο του αραιωμένου αερίου. Σε μια τέτοια περίπτωση θα πρέπει να λάβει κανείς υπ' όψιν του και καταστάσεις που δεν είναι BPS, οι οποίες αποσυντίθενται, οπότε και το πρόβλημα υπολογισμού της εντροπίας μικροσκοπικά γίνεται πολύ δυσκολότερο.

**Περιστροφόμενες  $D = 5$  μελανές οπές**

Μπορεί κανείς να εξάγει ακόμη μια μικροσκοπική περιγραφή για τις 5-διάστατες περιστροφόμενες υπερσυμμετρικές μελανές οπές. Χρησιμοποιώντας κάποια πιο πολύπλοκα επιχειρήματα, η εντροπία υπολογίζεται να είναι ακριβώς ίση με αυτήν της σχέσης (6.52). Περισσότερες λεπτομέρειες μπορούν να βρεθούν στη βιβλιογραφία [11].



## 6.5 $D = 4$ μελανές οπές

Στη συνέχεια παρουσιάζεται συνοπτικά η κατασκευή 4-διάστατων μελανών οπών, μέσω των D-branes, για τις οποίες απαιτούνται 4 φορτία. Η 4-διάστατη μετρική, ανάλογη της 5-διάστατης μετρικής (6.35) είναι τώρα η

$$ds^2 = -f^{-1/2}(dt^2) + f^{1/2}(dr^2 + r^2 d\Omega_2^2), \quad (6.59)$$

όπου

$$f = \prod_{i=1}^4 \left(1 + \frac{r_i}{r}\right). \quad (6.60)$$

Στην περίπτωση όπου όλα τα  $r_i$  είναι ίσα, η παραπάνω μετρική ανάγεται στη μετρική της extremal Reissner-Nordstrom μελανής οπής (5.10). Η μάζα της μελανής οπής θα είναι ίση με

$$M = \sum_{i=1}^4 M_i, \quad \text{με} \quad M_i = \frac{r_i}{4G_4}, \quad (6.61)$$

ενώ η επιφάνεια του ορίζοντα στη θέση  $r = 0$  θα είναι

$$\mathcal{A} = 4\pi\sqrt{r_1 r_2 r_3 r_4}. \quad (6.62)$$

Μπορεί κανείς να υπολογίσει τότε την εντροπία της μελανής οπής, η οποία θα είναι

$$S = \frac{\mathcal{A}}{4G_4} = 16\pi G_4 \sqrt{M_1 M_2 M_3 M_4}. \quad (6.63)$$

### Κατασκευή με βράνες στην θεωρία χορδών τύπου IIA

Μπορούμε στη συνέχεια να συσχετίσουμε τις τέσσερις μάζες με κάποια ηλεκτρικά ή μαγνητικά φορτία, χρησιμοποιώντας τέσσερα είδη βρανων ή διεγέρσεων. Μπορούμε να θεωρήσουμε τη συμπαγοποιημένη θεωρία Τύπου IIA σε έναν 6-διάστατο τόρο,  $S^1 \times \dots \times S^6$ , όπου οι κύκλοι έχουν ακτίνες  $R^1, \dots, R^6$ . Μία διάταξη από βράνες η οποία διατηρεί το 1/8 της υπερσυμμετρίας, οπότε και είναι κατάλληλη, είναι η ακόλουθη:  $Q_1$  D2-branes τυλιγμένες στους κύκλους  $S^1$  και  $S^6$ ,  $Q_2$  D6-branes τυλιγμένες και στους έξι κύκλους,  $Q_3$  NS5-branes τυλιγμένες στους πέντε πρώτους κύκλους και  $Q_4$  μονάδες ορμής στον πρώτο κύκλο. Οι μάζες που αντιστοιχούν σε αυτές τις διεγέρσεις είναι οι

$$M_1 = \frac{1}{g_s l_s^3} (R_1 R_6) Q_1,$$

$$\begin{aligned}
M_2 &= \frac{1}{g_s l_s^7} (R_1 \cdots R_6) Q_2, \\
M_3 &= \frac{1}{g_s^2 l_s^6} (R_1 \cdots R_5) Q_3, \\
M_4 &= \frac{1}{R_1} Q_4.
\end{aligned} \tag{6.64}$$

Εισάγοντας τις μάζες αυτές στην εντροπία και χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$G_4 = \frac{G_{10}}{(2\pi R_1) \cdots (2\pi R_6)} = \frac{g_s^2 l_s^8}{8R_1 \cdots R_6}, \tag{6.65}$$

παίρνουμε την τελική μορφή της σχέσης που δίνει την εντροπία της 4-διάστατης αυτής μελανής οπής

$$S = 2\pi \sqrt{Q_1 Q_2 Q_3 Q_4}, \tag{6.66}$$

όπου φαίνεται μια ισχυρή αναλογία με τη σχέση που δίνει την εντροπία της 5-διάστατης μελανής οπής, (6.43).

### Μικροσκοπική περιγραφή της εντροπίας

Αφαιρώντας τις NS5-branes, η παραπάνω διάταξη της θεωρίας Τύπου ΙΙΑ δεν είναι παρά μια δυϊκή περιγραφή της διάταξης που περιγράψαμε στην παράγραφο 6.4.2 για τις 5-διάστατες μελανές οπές. Οι 2-branes και οι 6-branes διαμορφώνουν κάποια δέσμια κατάσταση, ενώ η ορμή μεταφέρεται από τις άμαζες ανοικτές χορδές  $(2, 2)$ . Υπάρχουν συνολικά  $4Q_1 Q_2$  μποζόνια και άλλα τόσα φερμιόνια που μπορούν να μεταφέρουν την ορμή. Ο αριθμός των καταστάσεων του συστήματος προκύπτει από την  $(1 + 1)$ -διάστατη σχέση για την εντροπία [9]

$$S = \sqrt{\frac{\pi(2N_B + N_f)EL}{6}}, \tag{6.67}$$

όπου  $N_B$  ( $N_F$ ) είναι ο αριθμός των ειδών των δεξιά κινούμενων μποζονίων (φερμιονίων),  $E$  είναι η ολική ενέργεια και  $L$  το μέγεθος του κουτιού. Αντικαθιστώντας τις σχέσεις  $N_B = N_F = 4Q_1 Q_2$  και  $E = 2\pi Q_4/L$ , βρίσκουμε το ήδη γνωστό αποτέλεσμα (6.43)

$$S = 2\pi \sqrt{Q_1 Q_2 Q_4}. \tag{6.68}$$

Στην 4-διάστατη περίπτωση, τώρα, για να έχει κανείς πεπερασμένη επιφάνεια πρέπει να προσθέσει  $Q_3$  NS5-branes στη διάταξη. Οι D2-branes αλληλεπιδρούν πλέον με όλες τις NS5-branes. Όταν μια 2-brane και μια 5-brane συναντιούνται, τότε η

πρώτη σπάει σε δύο κομμάτια, ώστε οι  $Q_1$  2-branes με τοπολογία τόρου σπάνε σε  $Q_3Q_1$  κυλινδρικές 2-branes, κάθε μια από τις οποίες είναι δέσμια από ένα ζευγάρι 5-branes. Οι ανοικτές χορδές που μεταφέρουν την ορμή κουβαλάνε τότε έναν επιπλέον βαθμό ελευθερίας, που περιγράφει το ζευγάρι των 5-branes στο οποίο βρίσκονται ανάμεσα. Ο αριθμός των ειδών γίνεται τότε  $N_B = N_F = 4Q_1Q_2Q_3$ . Αντικαθιστώντας στη σχέση (6.67), μαζί με την  $E = 2\pi Q_4/L$ , παίρνουμε για την εντροπία τη σχέση

$$S = 2\pi\sqrt{Q_1Q_2Q_3Q_4}, \quad (6.69)$$

σε πλήρη συμφωνία με τη σχέση (6.66).

## Κεφάλαιο 7

### Επίλογος και συμπεράσματα

Η θεωρία των χορδών αποτελεί σήμερα ένα από τα πλουσιότερα πεδία της σύγχρονης θεωρητικής και μαθηματικής φυσικής. Ξεκινώντας ως ένα πιθανό μοντέλο για τη μαθηματική περιγραφή των ισχυρών αλληλεπιδράσεων, η θεωρία χορδών κατέληξε να είναι όχι μόνο η βασική υποψήφια θεωρία για την κβαντική περιγραφή της βαρύτητας, αλλά και των τεσσάρων θεμελιωδών αλληλεπιδράσεων που γνωρίζουμε στη φύση. Κατά συνέπεια, τα θέματα με τα οποία μπορεί να ασχοληθεί κανείς τόσο σε μεταπτυχιακό επίπεδο, όσο και σε ερευνητικό, είναι αμέτρητα, είτε από φυσικής είτε από μαθηματικής πλευράς. Το βασικό πρόβλημα που κυριαρχεί σήμερα όμως στον τομέα, είναι η άμεση σύνδεση της θεωρίας με το φυσικό, παρατηρήσιμο κόσμο, και η εξαγωγή προβλέψεων που θα επαληθεύσουν την ισχύ της θεωρίας.

Η παρούσα διπλωματική εργασία αποτελεί μια συνοπτική εισαγωγή στις βασικές έννοιες της θεωρίας χορδών, δίνοντας έμφαση σε σχετικά σύγχρονες τεχνικές, όπως είναι η χρήση των D-branes. Η ανακάλυψη των διαφόρων δυϊσμών μεταξύ των διαφορετικών θεωριών των χορδών και η συνειδητοποίηση των D-branes ως θεμελιώδη συστατικά της θεωρίας, δείχνει ότι πίσω από την εικόνα που παίρνει κανείς μέσω της διαταρακτικής θεωρίας χορδών, κρύβεται κάποια μη διαταρακτική θεωρία, η λεγόμενη θεωρία-M, η οποία είναι ίσως η σωστή θεωρία της κβαντικής βαρύτητας και της ενοποίησης των αλληλεπιδράσεων. Δυστυχώς, η πρόοδος που έχει γίνει προς αυτήν την κατεύθυνση είναι ακόμη πολύ μικρή, και οι ζητούμενες εξισώσεις δεν έχουν ακόμη βρεθεί.

Ένα μεγάλο μέρος της παρούσας εργασίας αφιερώθηκε στην περιγραφή της κατασκευής μελανών οπών στη θεωρία χορδών, με τη χρήση των D-branes. Η μικροσκοπική περιγραφή της εντροπίας των μελανών οπών που κατασκευάστηκαν αποτελεί μία

μεγάλη επιτυχία της θεωρίας χορδών, καθώς είναι η πρώτη επιτυχής μικροσκοπική περιγραφή της εντροπίας Bekenstein-Hawking που γίνεται από μια θεωρία κβαντικής βαρύτητας. Η αδυναμία περιγραφής των μελανών οπών και της Μεγάλης Έκρηξης αποτέλεσαν άλλωστε το έναυσμα για την αναζήτηση μιας κβαντικής θεωρίας της βαρύτητας. Επιπλέον, η περιγραφή 4-διάστατων μελανών οπών στα πλαίσια της θεωρίας χορδών αποτέλεσε ένα σημαντικό βήμα για τη σύνδεση της θεωρίας με το φυσικό κόσμο, παρά το γεγονός ότι οι extremal μελανές οπές δεν παρατηρούνται στη φύση.

Η θεωρία χορδών έδωσε επίσης το έναυσμα - και το μοντέλο για τη θεωρητική περιγραφή - για την αναζήτηση κοσμολογικών μοντέλων που βασίζονται σε περισσότερες από 4 χωροχρονικές διαστάσεις, ιδρύοντας ένα ολόκληρο κοσμολογικό πεδίο, αυτό των λεγόμενων brane-world μοντέλων, κάποια από τα οποία είναι μάλιστα ελέγξιμα από τις πειραματικές δυνατότητες του επιταχυντή LHC στο CERN. Τέλος, η AdS/CFT αντιστοιχία αποτελεί σήμερα ένα πολλά υποσχόμενο κυρίαρχο ερευνητικό πεδίο, που ίσως βοηθήσει τελικά στην ευρύτερη κατανόηση των διαφόρων θεωριών βαθμίδας.

Κατά συνέπεια, η θεωρία χορδών φαίνεται να παραμένει ένα υποσχόμενο ερευνητικό πεδίο σήμερα, το οποίο θα μπορούσε να προσφέρει τόσο στη φυσική, όσο και στα μαθηματικά. Απομένει να αποδειχθεί κατά πόσον η θεωρία θα μπορέσει να εξάγει μια φυσική περιγραφή του κόσμου, ή όχι.

# Βιβλιογραφία

- [1] Becker K., Becker M., Schwarz J.H., [2007], *String Theory and M-Theory: A Modern Introduction*, Cambridge University Press.
- [2] Carroll S.M., [1997], *Lecture Notes on General Relativity*, arXiv:gr-qc/9712019v1.
- [3] Das S.R., Mathur S.D., [2001], *The Quantum Physics of Black Holes: Results from String Theory*, arXiv:gr-qc/0105063v1.
- [4] Green M.B., Schwarz J.H., Witten E., [1987], *Superstring Theory: vol 1, Introduction*, Cambridge University Press.
- [5] Horowitz G.T., [1996], *The Origin of Black Hole Entropy in String Theory*, arXiv:gr-qc/960405v1.
- [6] Johnson C.V., [2006], *D-Branes*, Cambridge University Press.
- [7] Kiritsis E., [1998], *Introduction to Superstring Theory*, arXiv:hep-th/9709062v2.
- [8] Maldacena J.M., [1997], *Black Holes and D-branes*. arXiv:hep-th/9705078v1.
- [9] Maldacena J.M., Strominger A., [1996], *Statistical Entropy of Four-Dimensional Extremal Black Holes*, arXiv:hep-th/9603060v1.
- [10] Mohaupt T., [2002], *Introduction to String Theory*, arXiv:hep-th/0207249v1.
- [11] Peet A.W., [2000], *TASI Lectures on Black Holes in String Theory*, arXiv:hep-th/0008241v2.
- [12] Schwarz J.H., [2000], *Introduction to Superstring Theory*, arXiv:hep-ex/0008017v1.

- [13] Strominger E., Vafa C., [1996], *Microscopic Origin of the Bekenstein-Hawking Entropy*, arXiv:hep-th/9601029v2.
- [14] Zwiebach B., [2004], *A First Course in String Theory*, Cambridge University Press.