Πανεπιστημιο Πατρων
Σχολη Θετικων Επιστημων
Τμημα Μαθηματικων

Δ.Π.Μ.Σ. : Τα Μαθηματικα των Υπολογιστων και των Αποφασεων

Βελτιωμενα Διαστηματα Εμπιστοσυνης για την Διασπορα Κανονικου πληθυσμου

Μεταπτυχιακη Διατριβη

Μαρια Χ. Ταφιαδη

Ιανουαριος 2009

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Η παρούσα μεταπτυχιακή διατριβή ανήκει στο επιστημονικό πεδίο της Στατιστικής Θεωρίας Αποφάσεων και αποσκοπεί στην κατασκευή βελτιωμένων διαστημάτων εμπιστοσύνης για την διασπορά ενός πληθυσμού που προέρχεται από κανονική κατανομή.

Η μελέτη του προβλήματος της κατασκευής ενός διαστήματος εμπιστοσύνης για την διασπορά σ^2 μιας κανονικής κατανομής, παρουσιάστηκε στην εργασία του Shorrock (1990). Ειδικότερα, ο Shorrock σε αυτή του τη μελέτη κατασκεύασε διαστήματα εμπιστοσύνης που εξαρτώνταν από την δειγματική διασπορά και από τον δειγματικό μέσο. Συγκεκριμένα, τα νέα αυτά διαστήματα εμπιστοσύνης έχουν το ίδιο μήκος με το κλασικό διάστημα εμπιστοσύνης για την διασπορά σ^2 αλλά, έχουν ομοιόμορφα μεγαλύτερη πιθανότητα κάλυψης.

Για να κατασκευαστεί όμως, ένα διάστημα εμπιστοσύνης για μία άγνωστη παράμετρο πρέπει να διαθέτουμε και τα κατάλληλα εργαλεία. Κρίνεται λοιπόν αναγκαίο, να μελετήσουμε βασικές έννοιες Μαθηματικής Στατιστικής οι οποίες θα μας βοηθήσουν να επιτεύξουμε τον στόχο μας. Τις έννοιες αυτές καθώς και τα απαραίτητα θεωρήματα μπορεί να τα συναντήσει κανείς στο Κεφάλαιο 1.

Στο Κεφάλαιο 2 μελετάμε τα γνωστά σε όλους μας διαστήματα εμπιστοσύνης και πιο συγκεκριμένα, το κλασικό διάστημα ίσων ουρών, το διάστημα εμπιστοσύνης ελαχίστου μήκους, το διάστημα λόγου πιθανοφανειών και τέλος, το αμερόληπτο διάστημα για να γίνουν στη συνέχεια οι απαραίτητες συγκρίσεις με τα νέα διαστήματα που θα παραχθούν. Επιπλέον, αναφέρονται κάποιες κατανομές οι οποίες πρέπει να μελετηθούν λεπτομερώς για να κατασκευαστούν τα νέα αυτά διαστήματα.

Στο Κεφάλαιο 3 κατασκευάζεται ένα διάστημα εμπιστοσύνης ακολουθώντας μία διαδικασία που είναι αντίστοιχη με την μεθοδολογία εύρεσης εκτιμητή τύπου Stein (1964) γι΄ αυτό και το διάστημα που προκύπτει, ονομάζεται διάστημα εμπιστοσύνης τύπου Stein. Για το διάστημα αυτό αποδεικνύεται ότι, η πιθανότητα κάλυψης είναι μεγαλύτερη από αυτή του κλασικού διαστήματος εμπιστοσύνης για τη διασπορά σ^2.

Στο Κεφάλαιο 4 κατασκευάζουμε ένα διάστημα εμπιστοσύνης του οποίου η κατασκευή βασίζεται στην μεθοδολογία εύρεσης του εκτιμητή Brown (1968), γι΄ αυτό και το διάστημα που προκύπτει, ονομάζεται διάστημα εμπισοτσύνης τύπου Brown. Κατόπιν, και σε αναλογία με την μεθοδολογία εύρεσης των εκτιμητών Brewster- Zidek (1974) γενικεύεται το προηγούμενο διάστημα και κατασκευάζεται ένα νέο διάστημα που ονομάζεται διάστημα εμπιστοσύνης Brewster- Zidek, το οποίο με τη σειρά του αποδεικνύεται ότι είναι ένα γενικευμένο διάστημα Bayes.

Μ. Ταφιάδη, Πάτρα 2009.

Κεφάλαιο 1

Ορισμοί και βασικά Θεωρήματα

1.1 Εισαγωγή - Εκτιμητική

Στο αρχικό αυτό κεφάλαιο θα αναφέρουμε κάποιες βασικές έννοιες καθώς επίσης και θεωρήματα που προέρχονται από τις Πιθανότητες και την Μαθηματική Στατιστική.

Ξεκινάμε λοιπόν, με την έννοια του δείγματος, της παραμέτρου και γενικότερα του παραμετρικού χώρου. Θεωρούμε ότι, έχουμε δεδομένα με τη μορφή διανύσματος $\underset{\sim}{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ με από κοινού πυκνότητα πιθανότητας $f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x}; \theta)$, που εξαρτάται από μία άγνωστη παράμετρο θ, η οποία ανήκει σε ένα σύνολο Θ. Το θ καλείται **άγνωστη παράμετρος** και το Θ ονομάζεται **παραμετρικός χώρος**. Στόχος μας είναι, να εκτιμήσουμε μια συνάρτηση του θ έστω, $g(\cdot) : \Theta \to \mathbb{R}^{\kappa}$, $\kappa \geq 1$, η οποία ονομάζεται **παραμετρική συνάρτηση**. Το τυχαίο διάνυσμα $\underset{\sim}{X}$ αναφέρεται ως **δείγμα**.Αν επιπλέον, οι τυχαίες μεταβλητές $X_i, i = 1, 2, \ldots, n$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες δηλαδή, ακολουθούν την ίδια κατανομή τότε, το διάνυσμα $\underset{\sim}{X}$ καλείται **τυχαίο δείγμα**.

Ορισμός 1.1.1. Κάθε συνάρτηση του $\underset{\sim}{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ με πραγματικές τιμές ή με τιμές που δεν περιέχουν την άγνωστη παράμετρο θ καλείται **στατιστική συνάρτηση**.

Ορισμός 1.1.2. Μια στατιστική συνάρτηση, έστω $T = T(\underset{\sim}{X})$, με την επιθημητή ιδιότητα " να είναι κοντά " στην τιμή της άγνωστης παραμέτρου θ, (ή γενικότερα στην άγνωστη τιμή της παραμετρικής συνάρτησης $g(\theta)$ όπου, $g(.) : \Theta \to \mathbb{R}^{\kappa}$, $\kappa \geq 1$) αναφέρεται ως **εκτιμητής** του θ για την παρατηρηθείσα τιμή $\underset{\sim}{x}$ του $\underset{\sim}{X}$.

Ορισμός 1.1.3. Ο εκτιμητής $T = T(\underset{\sim}{X})$, ονομάζεται **αμερόληπτος εκτιμητής** της παραμετρικής συνάρτησης $g(\theta)$ αν,

$$E_{\theta}(T(\underset{\sim}{X})) = g(\theta), \forall \theta \in \Theta.$$

Ένα από τα πιο συνηθισμένα κριτήρια επιλογής εκτιμητών είναι το Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα του εκτιμητή $T(\underset{\sim}{X})$ συμβολικά, $MT\Sigma(T, \theta)$, που ορίζεται παρακάτω.

Ορισμός 1.1.4. Το Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα του εκτιμητή $T(\underset{\sim}{X})$ ορίζεται ως εξής ,

$$MT\Sigma(T, \theta) = E_{\theta}(T(\underset{\sim}{X}) - g(\theta))^2.$$

Πρόταση 1.1.1. *Μία άλλη μορφή του Μ.ΤΣ. είναι αυτή που ακολουθεί,*
$MT\Sigma(T, \theta) = Var_{\theta}(T(\underset{\sim}{X})) + (E_{\theta}(T(\underset{\sim}{X})) - g(\theta))^2$.

Ορισμός 1.1.5. Η ποσότητα $b(T, \theta) = E_{\theta}(T(\underset{\sim}{X})) - g(\theta)$ καλείται μεροληψία ή συστηματικό σφάλμα του εκτιμητή T για την ποσότητα $g(\theta)$.

Παρατήρηση 1.1.1. Οπότε, από τον Ορισμό 1.1.5 η Πρόταση 1.1.1 γίνεται,

$$MT\Sigma(T, \theta) = Var_{\theta}(T(X)) + b^2(T, \theta).$$

Παρατήρηση 1.1.2. Αν T είναι αμερόληπτος εκτιμητής της παραμετρικής συνάρτησης $g(\theta)$ τότε, $MT\Sigma(T, \theta) = Var_{\theta}(T(\underset{\sim}{X}))$.

Ορισμός 1.1.6. Ο εκτιμητής T_1 ονομάζεται καλύτερος από τον T_2 (ως προς το Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα)για την $g(\theta)$ αν,

$$MT\Sigma(T_1, \theta) \leqslant MT\Sigma(T_2, \theta), \forall \theta \in \Theta$$

και επιπλέον,

$$MT\Sigma(T_1, \theta_0) < MT\Sigma(T_2, \theta_0), \text{ για κάποιο } \theta_0 \in \Theta.$$

Ορισμός 1.1.7. Εάν ο εκτιμητής T_1 είναι καλύτερος από τον T_2 (ως προς το το Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα) για την $g(\theta)$ τότε, ο T_2 λέγεται **μη αποδεκτός** για την εκτίμηση της παραμετρικής συνάρτησης $g(\theta)$.

Ορισμός 1.1.8. Ο T ονομάζεται **βέλτιστος εκτιμητής** (ως προς το Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα) για την $g(\theta)$, αν είναι καλύτερος από κάθε άλλο εκτιμητή της παραμετρικής συνάρτησης $g(\theta)$.

Οι ακόλουθες Προτάσεις μας βοηθούν στην εύρεση αμερόληπτων εκτιμητών τόσο για την μέση τιμή όσο, και για τη διασπορά μιας κατανομής όταν, το **δείγμα** μας είναι **τυχαίο**.

Πρόταση 1.1.2. *Έστω $X_1, X_2, ..., X_n$ ένα τυχαίο δείγμα από μία κατανομή με πυκνότητα πιθανότητας $f_1(x,\theta), \theta \in \Theta$ και μέση τιμή $g(\theta) = \mu$ τότε, ο δειγματικός μέσος $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, είναι αμερόληπτος εκτιμητής του μ.*

Πρόταση 1.1.3. *Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ένα τυχαίο δείγμα από μια κατανομή $f_1(x,\theta), \theta \in \Theta$ και $g(\theta) = \sigma^2$ η διασπορά της κατανομής τότε, η δειγματική διασπορά $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ είναι αμερόληπτος εκτιμητής του σ^2. $(n \geq 2)$*

1.2 Α.Ο.Ε.Δ. εκτιμητές

Επειδή είναι γενικά, δύσκολο να βρούμε τον βέλτιστο εκτιμητή στην κλάση των εκτιμητών, περιοριζόμαστε σε αυτή των αμερόληπτων ομοιομόρφως ελάχιστης διασποράς εκτιμητών.

Ορισμός 1.2.1. Η στατιστική συνάρτηση $T = T(\underset{\sim}{X})$ ονομάζεται **Αμερόληπτος Ομοιομόρφως Ελάχιστης Διασποράς** (Α.Ο.Ε.Δ.) εκτιμητής για το $g(\theta)$ εάν,

1. T αμερόληπτος δηλαδή, $E_\theta(T) = g(\theta), \forall\ \theta \in \Theta$.

2. $Var_\theta(T) \leqslant Var_\theta(T_1), \forall\ \theta \in \Theta$ και για κάθε άλλο αμερόληπτο εκτιμητή T_1 του $g(\theta)$.

Από τον παραπάνω ορισμό φαίνεται ότι, για να βρούμε Α.Ο.Ε.Δ. εκτιμητή πρέπει να ελαττώσουμε όσον το δυνατόν περισσότερο τη διασπορά μίας στατιστικής συνάρτησης δηλαδή, για να προκύψει ένας τέτοιος εκτιμητής είναι αναγκαίο αυτός να έχει ελάχιστη διασπορά μεταξύ όλων των αμερόληπτων εκτιμητών. Ουσιαστικά, είναι επιθυμητό να βρούμε ένα κάτω φράγμα για τη διασπορά των αμερόληπτων εκτιμητών αυτής της ποσότητας.Αυτό το κάτω φράγμα μας προσφέρει το **Θεώρημα Cramer-Rao** το οποίο ισχύει όταν επαληθεύονται οι ακόλουθες συνθήκες,

I_1. Ο παραμετρικός χώρος Θ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

I_2. Το σύνολο $S = \{\underset{\sim}{x}; f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x};\theta)\}$ δεν εξαρτάται από το θ. Για κάθε $\underset{\sim}{x} \in\ S$, $\theta \in \Theta$, υπάρχει (και είναι πεπερασμένη) η παράγωγος $\dfrac{\partial}{\partial\theta}\log\ f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x};\theta)$

I_3. $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \dfrac{\partial}{\partial\theta} f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x};\theta)d\underset{\sim}{x} = \dfrac{\partial}{\partial\theta}\int\limits_{\mathbb{R}^n} f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x};\theta)d\underset{\sim}{x}, \forall\theta \in \Theta$

I_4. $\int\limits_{\mathbb{R}^n} T(\underset{\sim}{x})\dfrac{\partial}{\partial\theta} f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x};\theta)d\underset{\sim}{x} = \dfrac{\partial}{\partial\theta}\int\limits_{\mathbb{R}^n} T(\underset{\sim}{x}) f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x};\theta)d\underset{\sim}{x}, \forall\theta \in \Theta$, όπου $T(\underset{\sim}{X})$ είναι μία στατιστική συνάρτηση .

I_5. Ισχύει ότι , $0 < I(\theta) < \infty, \forall\theta \in \Theta$, όπου $I(\theta) = E_\theta(\dfrac{\partial}{\partial\theta}\ln f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x};\theta))^2$.

Η ποσότητα $I(\theta)$ ονομάζεται **αριθμός ή μέτρο πληροφορίας του Fisher**.

Θεώρημα 1.2.1 (Θεώρημα Cramer-Rao). *Έστω* $\underset{\sim}{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ *τυχαίο δείγμα, που προέρχεται από τη κατανομή* $f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x};\theta), \theta \in \Theta$. *Εάν* $T(\underset{\sim}{X})$ *είναι στατιστική συνάρτηση με μέση τιμή* $E_\theta(T(\underset{\sim}{X})) = g(\theta), \forall\theta \in \Theta$ *και ισχύουν οι συνθήκες* $I_1 - I_5$*, τότε*

$$Var_\theta(T(\underset{\sim}{X})) \geqslant \frac{(g'(\theta))^2}{I(\theta)}, \forall\theta \in \Theta.$$

Το κάτω φράγμα για την διασπορά των αμερόληπτων εκτιμητών του $g(\theta)$ ονομάζεται **Cramer-Rao Κάτω Φράγμα** (C.R. - Κ.Φ.) ενώ, για τον υπολογισμό του αριθμού πληροφορίας Fisher χρησιμοποιούμε συνήθως κάποιες βοηθητικές ιδιότητες.

Ιδιότητες

1. $I(\theta) = -E_\theta(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \ln f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x};\theta)), \forall\theta \in \Theta.$

2. Αν το δείγμα $\underset{\sim}{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ αποτελείται από ανεξάρτητες και τυχαίες μεταβλητές όπου, κάθε μια από τις X_i ακολουθεί μία κατανομή με πυκνότητα, $f_{X_i}(x_i;\theta), i = 1, 2, \ldots, n$, τότε

$$I(\theta) = \sum_{i=1}^{n} I_i(\theta)$$

όπου, $I_i(\theta) = E_\theta(\frac{\partial}{\partial\theta} \ln f_{X_i}(x_i;\theta))^2$.

3. Αν το δείγμα $\underset{\sim}{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ είναι τυχαίο τότε,

$$I(\theta) = nI_1(\theta)$$

όπου, $I_1(\theta)$ είναι ο αριθμός πληροφορίας Fisher για κάθε μία από τις $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Η δυσκολία του θεωρήματος Cramer-Rao βρίσκεται στη επαλήθευση των συνθηκών $I_1 - I_5$ αλλά, εξαλοίφεται όταν η οικογένεια κατανομών του τυχαίου διανύσματος $\underset{\sim}{X}$ ανήκει στην **Μονοπαραμετρική Εκθετική Οικογένεια Κατανομών** (Μ.Ε.Ο.Κ.).

Ορισμός 1.2.2. Η οικογένεια κατανομών $\{f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x};\theta), \theta \in \Theta\}$ ανήκει στην **Μονοπαραμετρική Εκθετική Οικογένεια Κατανομών** (Μ.Ε.Ο.Κ.) αν,

1. Το σύνολο $S = \{x; f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x};\theta) > 0\}$ δεν εξαρτάται από το θ.

2. $f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x};\theta) = e^{A(\theta)+B(\underset{\sim}{x})+c(\theta)D(\underset{\sim}{x})}, \forall \underset{\sim}{x} \in S, \theta \in \Theta.$

Θεώρημα 1.2.2. *Αν το δείγμα* $\underset{\sim}{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ *έχει κατανομή με πυκνότητα πιθανότητας* $f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x};\theta)$ *η οποία ανήκει στην Μ.Ε.Ο.Κ. και η* $c(\theta)$ *(που εμφανίζεται στον τύπο της* $f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x};\theta)$*) έχει συνεχή και μη μηδενική παράγωγο* $\forall\theta \in \Theta$*,τότε οι συνθήκες* I_2*,* I_3 *και* I_5 *του Θεωρήματος Cramer-Rao ισχύουν και η* I_4 *ισχύει για κάθε στατιστική συνάρτηση* $T = T(\underset{\sim}{X})$*.*

Η πρόταση που ακολουθεί δίνει έναν τρόπο εύρεσης του Α.Ο.Ε.Δ. εκτιμητή για μία παραμετρική συνάρτηση $g(\theta)$ καθώς επίσης και για γραμμικούς συνδυασμούς αυτής.

Πρόταση 1.2.1. *Αν το δείγμα* $\underset{\sim}{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ *έχει κατανομή με πυκνότητα πιθανότητας* $f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x};\theta)$ *η οποία ανήκει στην Μ.Ε.Ο.Κ. (*$f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x};\theta) = e^{A(\theta)+B(\underset{\sim}{x})+c(\theta)D(\underset{\sim}{x})}$*) και ισχύουν οι ιδιότητες,*

α) Το σύνολο Θ *είναι ανοικτό υποσύνολο του* $\mathbb{R}$*.*

β) Το $c(\theta)$ *έχει συνεχή και μη μηδενική παράγωγο* $\forall\theta \in \Theta$*.*

γ) $0 < I(\theta) < \infty$*.*

Τότε,

1.Η στατιστική συνάρτηση $D(\underset{\sim}{X})$ *είναι Α.Ο.Ε.Δ. εκτιμητής της* $g(\theta) = E_\theta(D(\underset{\sim}{X}))$*.*

2.Η στατιστική συνάρτηση $c_1 D(\underset{\sim}{X}) + c_2$ *με* c_1, c_2 *σταθερές* $c_1 \neq 0$ *είναι ΑΟΕΔ εκτιμητής της* $c_1 g(\theta) + c_2$.

Στη συνέχεια ακολουθεί μία πρόταση που συνδέει για μία ακόμη φορά τις γνωστές συνθήκες I_2 - I_5 με την Μ.Ε.Ο.Κ.

Πρόταση 1.2.2. *Έστω ότι ισχύουν οι συνθήκες* I_2, I_3, I_4 *και* I_5 *του Θεωρήματος Cramer-Rao και η* I_4 *ισχύει για κάποια στατιστική συνάρτηση* $T^* = T^*(\underset{\sim}{X})$, *που είναι αμερόληπτος εκτιμητής του* $g(\theta)$. *Επιπλέον θεωρούμε ότι, η παραμετρική συνάρτηση* $g(\theta)$ *είναι μη σταθερά (σαν συνάρτηση του* θ*) και ότι η* $T^*(\underset{\sim}{X})$ *επιτυγχάνει το C.R.-K.Φ. δηλαδή,*

$$Var_\theta(T^*(\underset{\sim}{X})) = \frac{g'(\theta))^2}{I(\theta)}, \forall \theta \in \Theta,$$

τότε και μόνο τότε, $f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x};\theta) = e^{A(\theta)+B(\underset{\sim}{x})+c(\theta)T^*(\underset{\sim}{x})}, \forall \underset{\sim}{x} \in S, \theta \in \Theta$ *δηλαδή, η κατανομή του δείγματος* $\underset{\sim}{X}$ *ανήκει στην Μ.Ε.Ο.Κ.*

Παρατήρηση 1.2.1. Οι Προτάσεις 1.2.1 και 1.2.2 συνεπάγονται ότι, η εύρεση του εκτιμητή για κάποια παραμετρική συνάρτηση $g(\theta)$ ή για κάποιο γραμμικό μετασχηματισμό αυτής $c_1 \cdot g(\theta) + c_2$ είναι δυνατή με τη χρήση του Θεωρήματος Cramer-Rao αν και μόνο αν, η κατανομή του δείγματος $\underset{\sim}{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ ανήκει στην Μ.Ε.Ο.Κ. και η $g(\theta)$ έχει μια συγκεκριμένη μορφή όπως, $g(\theta) = E_\theta(D(\underset{\sim}{X}))$.

Όπως γίνεται εύκολα αντιληπτό από την παραπάνω παρατήρηση η μέθοδος εύρεσης Α.Ο.Ε.Δ. εκτιμητή με τη χρήση του Θεωρήματος Cramer-Rao (Θεώρημα 1.2.1) μας περιορίζει τόσο ως προς την οικογένεια του δείγματος όσο, ως προς την μορφή των παραμετρικών συναρτήσεων για τις οποίες βρίσκουμε Α.Ο.Ε.Δ. εκτιμητές. Έτσι, κατανοούμε ότι χρειάζεται να εφαρμοστεί μία διαφορετική μέθοδος στην οποία δεν θα τίθενται τέτοιου είδους περιορισμοί και συγχρόνως θα οδηγεί στο επιθυμητό αποτέλεσμα. Συνεπώς, ξεκινάμε το εγχείρημα αυτό εισάγοντας δύο έννοιες την έννοια της Επάρκειας και την έννοια της Πληρότητας.

1.3 Επάρκεια

Ορισμός 1.3.1. Θεωρούμε το δείγμα $\underset{\sim}{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ με κατανομή $f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x};\theta), \theta \in \Theta$. Η στατιστική συνάρτηση $T(\underset{\sim}{X})$ ονομάζεται **επαρκής** αν η δεσμευμένη κατανομή του $\underset{\sim}{X}|T(\underset{\sim}{X}) = t$ δεν εξαρτάται από το θ για κάθε τιμή t για την οποία μπορεί να οριστεί η δεσμευμένη κατανομή.

Ουσιαστικά, αν δοθεί τιμή στην στατιστική συνάρτηση $T(\underset{\sim}{X}) = t$ τότε, το δείγμα $\underset{\sim}{X}$ δεν περιέχει καμία επιπλέον πληροφορία για το θ αφού η κατανομή του δεν το περιέχει. Ένας τρόπος εύρεσης μιας επαρκούς στατιστικής συνάρτησης, εκτός του ορισμού, δίνεται απο την παρακάτω πρόταση, η οποία αναφέρεται και ως **παραγοντικό κριτήριο των Neyman-Fisher**.

Θεώρημα 1.3.1 (παραγοντικό κριτήριο των Neyman-Fisher). *Η στατιστική συνάρτηση $T(\underset{\sim}{X})$ είναι επαρκής αν και μόνο αν, η πυκνότητα μπορεί να γραφεί στη μορφή,*

$$f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x};\theta) = q(T(\underset{\sim}{X});\theta)h(\underset{\sim}{x}), \forall \underset{\sim}{x} \text{ και } \theta \in \Theta,$$

όπου q και h είναι συναρτήσεις.

Παρατήρηση 1.3.1. Ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες για τις επαρκείς στατιστικές συναρτήσεις.

1) Το δείγμα $\underset{\sim}{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ είναι τετριμμένα επαρκής στατιστική συνάρτηση.

2) Η στατιστική συνάρτηση $T(\underset{\sim}{X}) = (X_{(1)}, \ldots, X_{(n)})$ είναι επαρκής όπου, οι $X_{(i)}, i = 1, \ldots, n$ είναι οι διατεταγμένες παρατηρήσεις.

3) Έστω $T_1 = T_1(\underset{\sim}{X})$ επαρκής στατιστική συνάρτηση και $T_2 = K(T_1)(\underset{\sim}{X})$,όπου $K(\cdot)$ είναι "1-1" συνάρτηση τότε, η στατιστική συνάρτηση $T_2(\underset{\sim}{X})$ είναι επαρκής.

Συνήθως,όταν αναφερόμαστε σε επαρκή στατιστική συνάρτηση έχουμε στο νου μας την ελάχιστη επαρκή.

Ορισμός 1.3.2. Ελάχιστη επαρκής στατιστική συνάρτηση είναι μια επαρκής στατιστική συνάρτηση η οποία προέρχεται από την μεγαλύτερη δυνατή "σύμπτηξη" (δηλαδή, έχει την μικρότερη δυνατή διάσταση).

Παρατήρηση 1.3.2. Σχεδόν πάντα, η διάσταση της παραμετρικής συνάρτησης $g(\theta)$ συμπίπτει με την διάσταση της ελάχιστης επαρκούς στατιστικής συνάρτησης.

Στο Θεώρημα που ακολουθεί χρησιμοποιείται η έννοια της επάρκειας στη βελτίωση εκτιμητών.

Θεώρημα 1.3.2 (Rao-Blackwell). *Έστω $T = T(\underset{\sim}{X})$ μία επαρκής στατιστική συνάρτηση και $S = S(\underset{\sim}{X})$ είναι εκτιμητής της παραμετρικής συνάρτησης $g(\theta)$. Θέτουμε $S^* = E_\theta(S|T)$.Τότε,*

1. Η S^* είναι στατιστική συνάρτηση.

2. $E_\theta(S^*) = E_\theta(S), \forall\theta \in \Theta$ έτσι, αν S είναι αμερόληπτος εκτιμητής για την $g(\theta)$ τότε, S^* είναι αμερόληπτος εκτιμητής για την $g(\theta)$.

3. $Var_\theta(S^*) \leqslant Var_\theta(S), \forall\theta \in \Theta$ και ισχύει αυστηρή ανισότητα εκτός εάν, S είναι συνάρτηση της στατιστικής συνάρτησης T οπότε, $S^* = S$.

4. $MT\Sigma(S^*, \theta) \leqslant MT\Sigma(S, \theta), \forall\theta \in \Theta$ και ισχύει αυστηρή ανισότητα εκτός εάν, S είναι συνάρτηση της στατιστικής συνάρτησης T οπότε, $S^* = S$.

Επομένως,αν S είναι ένας εκτιμητής της $g(\theta)$ ο οποίος δεν είναι συνάρτηση της επαρκούς στατιστικής συνάρτησης T τότε, ο S είναι μη αποδεκτός και βελτιώνεται από τον $S^* = E_\theta(S|T)$ που ονομάζεται βελτίωση του S κατά Rao-Blackwell ή **Rao-Blackwell βελτίωση του S**.

Παρατήρηση 1.3.3. Έστω T_1 και T_2 επαρκείς στατιστικές συναρτήσεις και S αμερόληπτος εκτιμητής της $g(\theta)$ τότε, $S_1^* = E_\theta(S|T_1)$ είναι η Rao-Blackwell βελτίωση του S μέσω της T_1 και $S_2^* = E_\theta(S|T_2)$ είναι η Rao-Blackwell βελτίωση του S,μέσω της T_2. Όμως, μέσω του Θεωρήματος 1.3.2 δεν είναι δυνατή η σύγκριση των δύο αυτών βελτιώσεων. Σε αυτό το σημείο, έρχεται να συμβάλλει η έννοια της **πληρότητας**.

1.4 Πληρότητα

Ορισμός 1.4.1. Η στατιστική συνάρτηση $T = T(\underset{\sim}{X})$ ονομάζεται **πλήρης** αν, ισχύει η ακόλουθη σχέση,

$$E_\theta(\phi(T)) = 0, \forall \in \Theta \Rightarrow \phi(t) = 0$$

για κάθε δυνατή τιμή t της T δηλαδή, $\phi(T) = 0$.

Θεώρημα 1.4.1 (Lehmann-Scheffé). *Έστω $T = T(\underset{\sim}{X})$ επαρκής και πλήρης στατιστική συνάρτηση και S είναι ένας αμερόληπτος εκτιμητής του $g(\theta)$. Τότε, $S^* = E_\theta(S|T)$ είναι ο μοναδικός Α.Ο.Ε.Δ. εκτιμητής του $g(\theta)$.*

Κατά συνέπεια, με τη βοήθεια του Θεωρήματος 1.4.1 των Lehmann-Scheffé μπορούμε να βρούμε Α.Ο.Ε.Δ. εκτιμητή με την χρήση επαρκούς και πλήρους στατιστικής συνάρτησης και μάλιστα αν, υπάρχει αυτός ο Α.Ο.Ε.Δ. εκτιμητής είναι και μοναδικός.

Πόρισμα 1.4.1 (Lehmann-Scheffé). *Έστω $T = T(\underset{\sim}{X})$ είναι επαρκής και πλήρης στατιστική συνάρτηση και S είναι ένας αμερόληπτος εκτιμητής της $g(\theta)$, ο οποίος είναι συνάρτηση της επαρκούς και πλήρους T. Τότε, S είναι ο μοναδικός Α.Ο.Ε.Δ. εκτιμητής της $g(\theta)$.*

Παρατήρηση 1.4.1. Το Θεώρημα 1.4.1 και το Πόρισμα 1.4.1 παρέχουν δύο διαφορετικούς τρόπους εύρεσης Α.Ο.Ε.Δ. εκτιμητή ενώ, και οι δύο απαιτούν την εύρεση μιας επαρκούς και πλήρους στατιστικής συνάρτησης. Ειδικότερα, το Θεώρημα 1.4.1 δηλώνει πως αν περαιτέρω βρεθεί ένας οποιοσδήποτε αμερόληπτος εκτιμητής S του $g(\theta)$ τότε, $S^* = E_\theta(S|T)$ είναι Α.Ο.Ε.Δ. εκτιμητής. Επιπλέον, το Πόρισμα 1.4.1 δηλώνει ότι αν βρεθεί αμερόληπτος εκτιμητής του $g(\theta)$ που είναι συνάρτηση της επαρκούς και πλήρους στατιστικής συνάρτησης τότε, αυτός είναι Α.Ο.Ε.Δ. εκτιμητής του $g(\theta)$.

Όπως καταλαβαίνουμε,σε αυτή την μεθοδολογία είναι σημαντική η εύρεση μιας επαρκούς και πλήρους στατιστικής συνάρτησης και μέσω του ορισμού δεν είναι πάντα εύκολο,αλλά αν η κατανομή του δείγματος $\underset{\sim}{X}$ ανήκει στην **Πολυπαραμετρική Εκθετική Οικογένεια Κατανομών**(Π.Ε.Ο.Κ.) τα πράγματα απλοποιούνται.

Ορισμός 1.4.2. Η οικογένεια κατανομών $\{f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x};\theta), \theta \in \Theta\}$ ανήκει στην Πολυπαραμετρική Εκθετική Οικογένεια Κατανομών(Π.Ε.Ο.Κ.),διάστασης k,αν

1.Το σύνολο $S = \{\underset{\sim}{x}; f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x};\theta) > 0\}$ δεν εξαρτάται από το θ.

2.$f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x};\theta) = e^{A(\theta)+B(\underset{\sim}{x})+\sum\limits_{j=1}^{k} c_j D_j(\underset{\sim}{x})}, \forall \underset{\sim}{x} \in S, \theta \in \Theta.$

Παρατήρηση 1.4.2. Η Π.Ε.Ο.Κ. διάστασης 1 συμπίπτει με την Μ.Ε.Ο.Κ.

Πρόταση 1.4.1. *Έστω ότι το δείγμα $\underset{\sim}{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ έχει κατανομή η οποία ανήκει στην ΠΕΟΚ διάστασης k,τότε ισχύουν τα εξής,*

1.Η στατιστική συνάρτηση $T(\underset{\sim}{X}) = (D_1(\underset{\sim}{X}), D_2(\underset{\sim}{X}), \ldots, D_k(\underset{\sim}{X}))$ είναι επαρκής.

2.Αν το πεδίο τιμών του διανύσματος $(c_1(\theta), c_2(\theta), \ldots, c_k(\theta))$ περιέχει ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^k$,τότε η $T(\underset{\sim}{X})$ είναι πλήρης.

Συνεχίζουμε με ένα θεώρημα που αποτελεί μία ακόμη εφαρμογή των εννοιών της επάρκειας και της πληρότητας. Πιο συγκεκριμένα, το παρακάτω θεώρημα, γνωστό ως, **Θεώρημα Basu** δείχνει ότι, υπό ορισμένες συνθήκες μπορεί να αποδειχθεί ανεξαρτησία με τη βοήθεια της επάρκειας και της πληρότητας.

Θεώρημα 1.4.2 (Basu). *Έστω $T = T(\underset{\sim}{X})$ επαρκής και πλήρης στατιστική συνάρτηση και $S = S(\underset{\sim}{X})$ μία στατιστική συνάρτηση, η κατανομή της οποίας δεν εξαρτάται από το θ τότε, οι στατιστικές συναρτήσεις $T(\underset{\sim}{X})$ και $S(\underset{\sim}{X})$ είναι ανεξάρτητες.*

1.5 Εκτίμηση με την Μέθοδο Μεγίστης Πιθανοφάνειας

Η μέθοδος μέγιστης πιθανοφάνειας αποτελεί ένα γενικό τρόπο κατασκευής εκτιμητών για μία άγνωστη παράμετρο θ και στηρίζεται στην αρχή ότι αν έχει παρατηρηθεί η τιμή $\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{x}$ τότε, επιλέγεται σαν εκτίμηση του θ η τιμή $\hat{\theta} = \hat{\theta}(\underset{\sim}{x})$ που μεγιστοποιεί ως προς $\theta \in \Theta$ την πιθανοφάνεια του $\underset{\sim}{x}$. Όλα αυτά θα τα δουμε πιο αναλυτικά παρακάτω.

Ορισμός 1.5.1. Θεωρούμε το δείγμα $\underset{\sim}{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x}; \theta), \theta \in \Theta$, τότε **η συνάρτηση πιθανοφάνειας (ή απλά πιθανοφάνεια)** του θ ορίζεται από την σχέση,

$$L(\theta) = L(\theta|\underset{\sim}{x}) = f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x}; \theta).$$

Συνεχίζουμε παραθέτοντας τον ορισμό του Εκτιμητού Μεγίστης Πιθανοφάνειας (Ε.Μ.Π.).

Ορισμός 1.5.2. Ο εκτιμητής $\hat{\theta} = \hat{\theta}(\underset{\sim}{X})$,που ικανοποιεί τη σχέση

$$L(\hat{\theta}) = \underset{\theta \in \Theta}{sup} L(\theta)$$

ονομάζεται **Εκτιμητής Μεγίστης Πιθανοφάνειας** (Ε.Μ.Π.) του θ.

Παρατήρηση 1.5.1. Από τον προηγουμένο ορισμό φαίνεται ότι ο Ε.Μ.Π. του θ είναι εκείνη η τιμή του θ,η οποία μεγιστοποιεί τη συνάρτηση πιθανοφάνειας. Επειδή η συνάρτηση $\ln x$ είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση του x, η τιμή του θ που μεγιστοποιεί την $L(\theta)$ είναι η ίδια με αυτήν που μεγιστοποιεί την $\ln L(\theta)$.Συνήθως ακολουθούμε αυτήν την διαδικασία όταν το μέγιστο μπορεί να βρεθεί με παραγώγιση.

Παρατήρηση 1.5.2. 1. Η μέθοδος μεγίστης πιθανοφάνειας ισχύει και για το διάνυσμα
$\underset{\sim}{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$

2. Είναι δυνατόν ο εκτιμητής $\hat{\theta}$ να μην μπορεί να βρεθεί σε αναλυτική μορφή τότε, η τιμή του θ για

την οποία επιτυγχάνεται η μεγιστοποιήση της $L(\theta)$ βρίσκεται με μεθόδους αριθμητικής ανάλυσης.

3. Ορισμένες φορές υπάρχουν " παθολογικές καταστάσεις " με την έννοια ότι είτε, δεν υπάρχει τιμή του θ η οποία να μεγιστοποιεί τη συνάρτηση πιθανοφάνειας είτε, υπάρχουν περισσότερα μέγιστα για την $L(\theta)$ και συνεπώς περισσότεροι του ενός Ε.Μ.Π.

Παρατήρηση 1.5.3. Σε αυτό το σημείο αναφέρουμε κάποιες γενικές ιδιότητες των Ε.Μ.Π.

1. Από τον Ορισμό 1.5.2 προκύπτει ότι ο Ε.Μ.Π(αν υπάρχει) παίρνει τιμές μέσα στον παραμετρικό χώρο Θ.

2. Αν ο Ε.Μ.Π. του θ είναι μοναδικός, τότε είναι συνάρτηση της επαρκούς στατιστικής συνάρτησης.

3. Αν $\hat{\theta} = \hat{\theta}(\underset{\sim}{X})$ είναι Ε.Μ.Π. του θ, τότε ο Ε.Μ.Π. της παραμετρικής συνάρτησης $g(\theta)$ είναι ο $g(\hat{\theta})$.

Παρατήρηση 1.5.4. Οι Ε.Μ.Π. έχουν (υπό ορισμένες συνθήκες) κάποιες ασυμπτωτικές ιδιότητες. Αν $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι ένα τυχαίο δείγμα από κατανομή με πυκνότητα πιθανότητας $f_1(x;\theta)$ και συμβολίσουμε με $\hat{\theta}$ τον Ε.Μ.Π. του θ,τότε

1. Η κατανομή του $\hat{\theta}$ είναι κατά προσεγγίση $(n \to +\infty)$ η κανονική κατανομή δηλαδή,

$$\hat{\theta} \sim \mathrm{N}(\theta, \frac{1}{I(\theta)}),$$

όπου $I(\theta)$ είναι ο αριθμός πληροφορίας του Fisher.

2. Ο $\hat{\theta}$ είναι ασυμπτωτικά αποτελεσματικός εκτιμητής, δηλαδή αν κάποιος άλλος εκτιμητής του θ, έστω S_n, έχει κατά προσέγγιση κανονική κατανομή $N(\theta^2, \sigma^2(\theta))$, τότε υπό ορισμένες συνθήκες $\sigma^2(\theta) \geq \frac{1}{I(\theta)}$.

Οι παραπάνω ιδιότητες των Ε.Μ.Π. συνεπάγονται ότι ο $\hat{\theta}$ είναι ασυμπτωτικά Α.Ο.Ε.Δ. για το θ, δηλαδή αν υπάρχουν Α.Ο.Ε.Δ. και Ε.Μ.Π. για κάποια $g(\theta)$, τότε αυτοί δεν διαφέρουν ασυμπτωτικά.

1.6 Εκτιμητές Bayes

1.6.1 Συνάρτηση Ζημίας (Loss Function)-Συνάρτηση Κινδύνου (Risk Function)

Ορισμός 1.6.1. Γενικά, όταν εκτιμούμε μία παραμετρική παράσταση $g(\theta)$ με μία τιμή t, τότε, μπορούμε να ορίσουμε τη **συνάρτηση ζημίας (Loss function)** $L(t, \theta)$. Για την οποία ισχύουν τα εξής,

$$L(t, \theta) \geqslant 0 \text{ για όλα τα } \theta, t$$

και

$$L[g(\theta), \theta] = 0 \text{ για όλα τα } \theta$$

δηλαδή, η ζημία είναι μηδέν όταν η παράμετρος εκτιμάται από τη σωστή τιμή.

Ορισμός 1.6.2. Η ακρίβεια ή μη-ακρίβεια, ενός εκτιμητή T, μετριέται από την **συνάρτηση κινδύνου(risk function)** που ορίζεται ως $R(T, \theta) = E_\theta L[T(\underset{\sim}{X}), \theta]$.

Σε αυτό το σημείο τονίζουμε ότι, το Μ.Τ.Σ. αποτελεί ειδική περίπτωση της συνάρτησης ζημίας οπότε, οι παραπάνω ορισμοί ισχύουν και για το Μ.Τ.Σ. Γενικά, επιθυμούμε να βρούμε έναν εκτιμητή $T = T(\underset{\sim}{X})$ με την ελάχιστη συνάρτηση κινδύνου $R(T, \theta), \forall \theta \in \Theta$. Έτσι, υποχρεωνόμαστε να ακολουθήσουμε ένα νέο σκεπτικό και να δούμε την παράμετρο θ από νέα οπτική γωνία.

1.6.2 Κατανομές και εύρεση εκτιμητή Bayes

Η εκτίμηση κατά Bayes δεν αντιμετωπίζει την παράμετρο θ σαν έναν απλό πραγματικό αριθμό χωρίς καμία ιδιότητα αλλά, δίνει ιδιαίτερη βαρύτητα στις διαφορετικές τιμές του ώστε αυτές να αξιοποιηθούν με τέτοιο τρόπο και να προκύψει καλύτερη εκτίμηση για το θ. Πλέον, θεωρούμε το θ ως μία τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα πιθανότητας $\pi(\theta)$, $\theta \in \Theta$ και τις εξής ιδιότητες,

1. $\pi(\theta) \geq 0, \forall\theta \in \Theta$ και
2. $\int\limits_{\Theta} \pi\left(\theta\right) d\theta = 1$ (ή $\sum\limits_{\theta} \pi\left(\theta\right) = 1$ για Θ αριθμήσιμο)

Η συνάρτηση $\pi(\theta)$ καλείται **εκ των προτέρων κατανομή** του θ κι εκφράζει είτε την προσωπική μας αντίληψη για τις πιθανές τιμές του θ είτε, συνοψίζει κάποιες εκ των προτέρων πληροφορίες για το θ . Θεωρούμε συνάρτηση ζημίας $L(t,\theta)$ και αναζητούμε εκτιμητή T που ελαχιστοποιεί την συνάρτηση κινδύνου $R(T,\theta) = E_{\theta}L[T(\underset{\sim}{X}),\theta]$. Επειδή όμως, το θ είναι πλέον μία τυχαία μεταβλητή και κατά συνέπεια ισχύει το ίδιο και για την συνάρτηση κινδύνου, στόχος μας είναι να ελαχιστοποιήσουμε την μέση τιμή αυτής δηλαδή την,

$$BR\left(T\right) = E(R(T,\theta)) = \int\limits_{\Theta} R(T,\theta)\pi\left(\theta\right) d\theta$$

η οποία καλείται **κίνδυνος Bayes** για τον εκτιμητή T. Κατανοούμε λοιπόν ότι, ο βέλτιστος εκτιμητής είναι εκείνος που ελαχιστοποιεί τον κίνδυνο Bayes κι έτσι οδηγούμαστε στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.6.3. Ο εκτιμητής $T^{*} = T^{*}(\underset{\sim}{X})$ ονομάζεται εκτιμητής Bayes του $g(\theta)$, ως προς τη συνάρτηση ζημίας $L(t,\theta)$ και την εκ των προτέρων κατανομή $\pi(\theta)$ αν,

$$\int\limits_{\Theta} R(T^{*},\theta)\pi\left(\theta\right) d\theta \leq \int\limits_{\Theta} R(T,\theta)\pi\left(\theta\right) d\theta$$

για κάθε εκτιμητή $T = T(\underset{\sim}{X})$.

Για να υπολογίσουμε τον εκτιμητή Bayes κρίνεται αναγκαίο να υπολογίσουμε αρχικά την **εκ των υστέρων κατανομή**. Αφού η παράμετρος θ αντιμετωπίζεται πλέον ως τυχαία μεταβλητή με τιμές στο Θ και κατανομή $\pi(\theta)$, τότε η πυκνότητα του δείγματος $f(\underset{\sim}{x};\theta)$ σαν συνάρτηση του $\underset{\sim}{x}$, για συγκεκριμένο $\theta \in \Theta$ μπορεί να θεωρηθεί ότι εκφράζει την δεσμευμένη κατανομή του $\underset{\sim}{X}$ δοθέντος ότι η τυχαία μεταβλητή με κατανομή $\pi(\theta)$ έχει την συγκεκριμένη τιμή θ. Συνεπώς, το γινόμενο $f(\underset{\sim}{x};\theta) \cdot \pi\left(\theta\right)$ είναι η από κοινού πυκνότητα των $\underset{\sim}{X}$ και θ ενώ, η $f(\underset{\sim}{x}) = \int\limits_{\Theta} f(\underset{\sim}{x};\theta) \cdot \pi\left(\theta\right) d\theta$ είναι η περιθωριακή πυκνότητα του $\underset{\sim}{X}$. Από την άλλη, η δεσμευμένη κατανομή του θ δοθέντος ότι $\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{x}$ είναι η **εκ των υστέρων κατανομή** του θ και δίνεται από τον τύπο που ακολουθεί

$$\pi(\theta/\underset{\sim}{x}) = \frac{f(\underset{\sim}{x};\theta) \cdot \pi(\theta)}{f(\underset{\sim}{x})}$$

Σημειώνουμε ότι, η εκ των υστέρων κατανομή συνοψίζει την πληροφορία για το θ μετά την συλλογή των δεδομένων και έχει τις ιδιότητες της συνάρτησης πυκνότητας.

Παρατήρηση 1.6.1. Είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι, δεν μας ενδιαφέρει ιδιαίτερα η ακριβής συνάρτηση $\pi(\theta/\underset{\sim}{x})$ αλλά, η μορφή της εκ των υστέρων κατανομής για την οποία διαπιστώνουμε ότι ακολουθεί κάποια από τις γνωστές κατανομές.

Σε αυτό το σημείο θα δούμε έναν διαφορετικό τρόπο υπολογισμό του εκτιμητού Bayes.

Θεώρημα 1.6.1. *Για $\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{x}$ ο εκτιμητής Bayes $T^* = T^*(\underset{\sim}{X})$ της παραμετρικής συνάρτησης $g(\theta)$ ως προς τη συνάρτηση ζημίας $L(t,\theta)$ και την εκ των προτέρων κατανομή $\pi(\theta)$ έχει τιμή $T^*(\underset{\sim}{X}) = t^*$ όπου, t^* είναι η τιμή του t που ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση*

$$h^*(t) = \int_{\Theta} L(t,\theta) \cdot \pi(\theta|\underset{\sim}{x}) d\theta.$$

Το παραπάνω θεώρημα αφορά τυχαία συνάρτηση ζημίας $L(t,\theta)$, στην περίπτωση όμως, που η συνάρτηση ζημίας είναι το τετραγωνικό σφάλμα $L(t,\theta) = (t - g(\theta))^2$, τότε η εύρεση του εκτιμητού Bayes γίνεται πιο απλά όπως, φαίνεται στο θεώρημα που ακολουθεί.

Θεώρημα 1.6.2. *Έστω ότι η συνάρτηση ζημίας για τη εκτίμηση του $g(\theta)$ είναι το τετραγωνικό σφάλμα $L(t,\theta) = (t - g(\theta))^2$. Τότε, για $\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{x}$ ο εκτιμητής Bayes $T^* = T^*(\underset{\sim}{X})$ της παραμετρικής συνάρτησης $g(\theta)$ έχει τιμή $T^*(\underset{\sim}{X}) = E_\theta(g(Y))$ όπου, Y είναι μία τυχαία μεταβλητή με κατανομή την εκ των υστέρων κατανομή $\pi(\theta/\underset{\sim}{x})$.*

Ορισμός 1.6.4. Θεωρούμε ένα τυχαίο δείγμα $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim N(\theta, \sigma^2)$ με $\Theta = (-\infty, +\infty)$. Αν $\pi(\theta) = c$ δηλαδή, αν όλες οι τιμές του θ έχουν την ίδια πιθανότητα να συμβούν, τότε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \pi(\theta) d\theta = \int_{-\infty}^{+\infty} c d\theta = +\infty$$

Η $\pi(\theta)$ ονομάζεται **improper prior** κι έχει τις εξής ιδιότητες,

1. $\pi(\theta) \geq 0, \forall \theta \in \Theta$ και

2. $\int_{\Theta} \pi(\theta) d\theta = +\infty$ (ή $\sum_{\theta} \pi(\theta) = +\infty$ για Θ αριθμήσιμο)

Οι εκτιμητές Bayes που βασίζονται στις improper priors (ή διαφορετικά στις noninformative priors όπως αναφέρονται στην βιβλιογραφία) οναμάζονται **γενικευμένοι εκτιμητές Bayes**.

1.7 Ιδιότητα Μονότονου Λόγου Πιθανοφανειών (Μ.Λ.Π.)

Θεωρούμε ένα τυχαίο δείγμα $\underset{\sim}{X}$ που προέρχεται από μία οικογένεια κατανομών $f(\underset{\sim}{x}, \theta)$ και μία στατιστική συνάρτηση $T(\underset{\sim}{X})$. Στη συνέχεια παραθέτουμε δύο ορισμούς που αφορούν μία ιδιότητα της κατανομής του δείγματος.

Ορισμός 1.7.1. Μία οικογένεια κατανομών$f(\underset{\sim}{x}, \theta)$ έχει την ιδιότητα του **μονότονου λόγου πιθανοφανειών** ως προς την στατιστική συνάρτηση $T(\underset{\sim}{X})$ αν και μόνο αν, το πηλίκο $\dfrac{f(\underset{\sim}{x}; \theta_2)}{f(\underset{\sim}{x}; \theta_1)}$ είναι μία αύξουσα συνάρτηση ως προς την $T(\underset{\sim}{X})$ για κάθε $\theta_1 < \theta_2$.

Εναλλακτικά, έχουμε την ακόλουθη πρόταση,

Πρόταση 1.7.1. *Μία οικογένεια κατανομών$f(\underset{\sim}{x}, \theta)$ έχει την ιδιότητα του μονότονου λόγου πιθανοφανειών ως προς την στατιστική συνάρτηση $T(\underset{\sim}{X})$ αν,*

1. Αυτή ανήκει στην Μ.Ε.Ο.Κ. (βλέπε Ορισμό 1.2.2) και η $c(\theta)$ είναι αύξουσα ως προς θ . Σημειώνουμε δε, ότι η ιδιότητα ισχύει για την στατιστική συνάρτηση $T(\underset{\sim}{X}) = D(\underset{\sim}{X})$.

2. Αυτή ανήκει στην Μ.Ε.Ο.Κ. και η $c(\theta)$ είναι φθίνουσα ως προς θ . Σημειώνουμε δε, ότι η ιδιότητα *ισχύει για την στατιστική συνάρτηση* $T(\underset{\sim}{X}) = -D(\underset{\sim}{X})$.

1.8 Θεώρημα Μετασχηματισμού

Θεώρημα 1.8.1. *Έστω* X *μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας* $f_X(x)$. *Θέτουμε* $S = \{x : f_X(x) > 0\}$ *και υποθέτουμε ότι,*

(i) $y = h(x)$ *είναι ένας αμφιμονοσήμαντος (ένα -προς -ένα) μετασχηματισμός (μετρήσιμη συνάρτηση) που απεικονίζει το σύνολο* S *σε ένα σύνολο* T *των* y.

(ii) η αντίστροφη συνάρτηση $x = h^{-1}(y)$ *είναι παραγωγίσιμη και η παράγωγος της είναι συνεχής και μη μηδενική για κάθε* $y \in T$.

Τότε, η τυχαία μεταβλητή $Y = h(X)$ *είναι συνεχής με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας*

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[h^{-1}(y)] \left| \frac{dh^{-1}(y)}{dy} \right| & , y \in T \\ 0 & , \text{αλλού} \end{cases}$$

, όπου $|\cdot|$ *σημαίνει την απόλυτο τιμή της συνάρτησης.*

Κεφάλαιο 2

Διαστήματα Εμπιστοσύνης - Κατανομές

2.1 Κατασκευή Διαστημάτων Εμπιστοσύνης (Δ.Ε.)

Τα διαστήματα εμπιστοσύνης ή πιο γενικά οι περιοχές εμπιστοσύνης αποτελούν τον δεύτερο βασικό κλάδο της Στατιστικής Συμπερασματολογίας μετά την εκτιμητική. Για να ορίσουμε την έννοια του διαστήματος εμπιστοσύνης χρειάζεται να εξετάσουμε τα εξής.

Έστω $T(\underset{\sim}{X})$ ένας εκτιμητής της πραγματικής παραμετρικής συνάρτησης $g(\theta)$. Σε πολλές περιπτώσεις μόνο ο υπολογισμός της τιμής του $T(\underset{\sim}{X})$ δεν αρκεί, πρέπει να δοθεί συγχρόνως και κάποια πληροφορία για την ακρίβεια ή το πιθανό σφάλμα του εκτιμητή. Έτσι, συχνά στις εφαρμογές παρατηρούμε ότι, πλέον η εκτίμηση του $g(\theta)$ είναι η τιμή $T(\underset{\sim}{X}) \pm \varepsilon$, όπου ε είναι το τυπικό σφάλμα του $T(\underset{\sim}{X})$. Οι τιμές των $T(\underset{\sim}{X}) - \varepsilon$ και $T(\underset{\sim}{X}) + \varepsilon$ μπορούν να θεωρηθούν σαν όρια- φράγματα της τιμής του $g(\theta)$. Από την άλλη, ακόμη και αν το τυπικό σφάλμα του εκτιμητή είναι γνωστό δεν υπάρχει καμία εγγύηση ότι σίγουρα το διάστημα $[T(\underset{\sim}{X}) - \varepsilon, T(\underset{\sim}{X}) + \varepsilon]$ περιέχει την τιμή του $g(\theta)$. Στην πραγματικότητα, στα περισσότερα προβλήματα, η πιθανότητα το διάστημα $[T(\underset{\sim}{X}) - b, T(\underset{\sim}{X}) + b]$ να μην περιέχει την τιμή του $g(\theta)$ είναι δεδομένη για κάθε τιμή της σταθεράς b.

Ορισμός 2.1.1. Αν $T_1 = T_1(\underset{\sim}{X})$ και $T_2 = T_2(\underset{\sim}{X})$ είναι στατιστικές συναρτήσεις με $T_1 < T_2$, το τυχαίο διάστημα $[T_1(\underset{\sim}{X}), T_2(\underset{\sim}{X})]$ καλείται **διάστημα εμπιστοσύνης (δ.ε.)** για την πραγματική παραμετρική συνάρτηση $g(\theta)$ με **συντελεστή εμπιστοσύνης (σ.ε.)** $100(1-\alpha)\%$ αν,

$$P_\theta(T_1(\underset{\sim}{X}) \leq g(\theta) \leq T_2(\underset{\sim}{X})) = 1-\alpha, \forall \theta \in \Theta.$$

Σημειώνουμε ότι, σε ορισμένες περιπτώσεις, ειδικά σε διακριτές κατανομές, δεν είναι πάντοτε δυνατό (δηλαδή για κάθε α) να βρούμε ένα διάστημα $[T_1, T_2]$ έτσι ώστε $P_\theta(T_1(\underset{\sim}{X}) \leq g(\theta) \leq T_2(\underset{\sim}{X}))$ να είναι ακριβώς $1-\alpha$. Σε αυτές τις περιπτώσεις προσπαθούμε να βρούμε στατιστικές συναρτήσεις T_1, T_2 έτσι ώστε,

$$P_\theta(T_1(\underset{\sim}{X}) \leq g(\theta) \leq T_2(\underset{\sim}{X})) \geq 1-\alpha, \forall \theta \in \Theta.$$

Ουσιαστικά, θέλουμε η παραπάνω πιθανότητα να βρίσκεται όσο το δυνατό πιο κοντά στη τιμή $1-\alpha$.

Επίσης, σε περιπτώσεις όπως παραπάνω, όπου δε μπορούμε να προσδιορίσουμε διάστημα εμπιστοσύνης με συντελεστή εμπιστοσύνης ακριβώς $100(1-\alpha)\%$, προσπαθούμε και εφ' όσον το μέγεθος του δείγματος είναι " αρκετά μεγάλο " να βρούμε στατιστικές συναρτήσεις T_1, T_2 έτσι ώστε,

$$P_\theta(T_1(\underset{\sim}{X}) \leq g(\theta) \leq T_2(\underset{\sim}{X})) \approx 1-\alpha, \forall \theta \in \Theta.$$

Ένα τέτοιο διάστημα λέγεται **ασυμπτωτικό ή προσεγγιστικό δ.ε.** για το $g(\theta)$ με συντελεστή εμπιστοσύνης $100(1-\alpha)\%$.

Επιπλέον, υπάρχουν περιπτώσεις όπου ενδιαφερόμαστε να βρούμε ένα κάτω ή ένα άνω φράγμα για το $g(\theta)$ τότε λέμε ότι, το **κάτω φράγμα** $T_1(\underset{\sim}{X})$ με συντελεστή εμπιστοσύνης $100(1-\alpha)\%$ ορίζεται από τη σχέση, $P_\theta(T_1(\underset{\sim}{X}) \leq g(\theta)) = 1-\alpha, \forall \theta \in \Theta$. Ενώ αντίστοιχα, το **άνω φράγμα** $T_2(\underset{\sim}{X})$ με συντελεστή εμπιστοσύνης $100(1-\alpha)\%$ ορίζεται από τη σχέση, $P_\theta(T_2(\underset{\sim}{X}) \geq g(\theta)) = 1-\alpha, \forall \theta \in \Theta$.

Σε αυτό το σημείο κρίνεται αναγκαίο να αναφερθούμε και στον συντελεστή εμπιστοσύνης και να τονίσουμε ότι είναι δυνατόν να υπάρχουν πολλά διαστήματα εμπιστοσύνης με τον ίδιο συντελεστή εμπιστοσύνης. Συνεπώς, πρέπει να επιλέξουμε το καλύτερο δ.ε. έχοντας κάποιο κριτήριο. Είναι φανερό ότι, όσο μικρότερο είναι το μήκος του διαστήματος τόσο καλύτερο είναι το διάστημα οπότε, σαν κριτήριο επιλογής μεταξύ διαστημάτων εμπιστοσύνης με τον ίδιο συντελεστή μπορεί να ληφθεί το μήκος αυτών ή η μέση τιμή του μήκους τους γιατί, το μήκος είναι μία τυχαία μεταβλητή. Επίσης, συνίσταται οι στατιστικές συναρτήσεις που αποτελούν τα άκρα του διαστήματος να είναι συναρτήσεις της ελάχιστης επαρκούς στατιστικής συνάρτησης.

Συνεχίζουμε την αναφορά μας στα δ.ε. παραθέτοντας ακολούθως μία γενική μέθοδο κατασκευής αυτών.

2.1.1 Γενική Μέθοδος Κατασκευής δ.ε.

Η μέθοδος αυτή μπορεί να περιγραφεί ως εξής,

1. Προσπαθούμε να βρούμε μία τυχαία μεταβλητή $T = T(\underset{\sim}{X}, \theta)$ που εξαρτάται από το θ αλλά, η κατανομή της δεν εξαρτάται από αυτό. Αυτή η τυχαία μεταβλητή καλείται **ποσότητα οδηγός (pivotal quantity) ή αντιστρεπτή ποσότητα**.

2. Προσδιορίζουμε σταθερές $c_1 < c_2$ έτσι ώστε,

$$P_\theta(c_1 \leq T(\underset{\sim}{X}, \theta) \leq c_2) = 1 - \alpha, \forall \theta \in \Theta, \text{ όπου } 0 < \alpha < 1$$

3. Λύνουμε την διπλή ανισότητα και εφ΄ όσον αυτό είναι δυνατόν καταλήγουμε στη σχέση,

$$P_\theta(T_1(\underset{\sim}{X}) \leq g(\theta) \leq T_2(\underset{\sim}{X})) = 1 - \alpha, \forall \theta \in \Theta.$$

για κάποιες στατιστικές συναρτήσεις $T_1(\underset{\sim}{X}), T_2(\underset{\sim}{X})$. Τότε, το διάστημα $[T_1(\underset{\sim}{X}), T_2(\underset{\sim}{X})]$ είναι δ.ε. για το $g(\theta)$ με σ.ε. $100(1 - \alpha)\%$.

Παρατήρηση 2.1.1. Αξίζει να αναφέρουμε ότι αν το δείγμα $\underset{\sim}{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ είναι τυχαίο και προέρχεται από (απολύτως) συνεχή κατανομή τότε, υπάρχει ποσότητα οδηγός. Η ποσότητα αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην εύρεση δ.ε. για ορισμένες παραμετρικές συναρτήσεις $g(\theta)$. Όμως, αυτή η ποσότητα οδηγός δεν είναι κατ΄ ανάγκη συνάρτηση της επαρκούς στατιστικής συνάρτησης και συνεπώς, το διάστημα εμπιστοσύνης που θα προκύψει μπορεί να είναι αμφιβόλου αξίας. Σε αυτές τις περιπτώσεις συνίσταται να αναζητούνται άλλες ποσότητες οδηγοί που να είναι συναρτήσεις της ελάχιστης επαρκούς στατιστικής συνάρτησης.

2.2 Κατασκευή δ.ε για την διασπορά της κανονικής κατανομής

Σκοπός αυτής της παραγράφου είναι, η κατασκευή διαστημάτων εμπιστοσύνης για την διασπορά σ^2 της κανονικής κατανομής χρησιμοποιώντας, γνωστές μεθόδους οι οποίες αναφέρονται και στην εργασία των Tate and Klett (1959). Έχουμε αναφέρει ότι, $S^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ είναι Α.Ο.Ε.Δ. εκτιμητής του σ^2 $(n \geq 2)$ και ότι, $\bar{X} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$, είναι αμερόληπτος εκτιμητής του μ.

Πρόταση 2.2.1. *Η τυχαία μεταβλητή* $\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{X_i - \bar{X}}{\sigma}\right)^2 \sim X^2_{n-1}$.

Απόδειξη

Αφού $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τυχαίο δείγμα $\sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow$

$\dfrac{X_1-\mu}{\sigma}, \dfrac{X_2-\mu}{\sigma}, \ldots, \dfrac{X_n-\mu}{\sigma}$ ανεξάρτητες τ.μ. $\sim N(0,1) \Rightarrow$

$\left(\dfrac{X_1-\mu}{\sigma}\right)^2, \left(\dfrac{X_2-\mu}{\sigma}\right)^2, \ldots, \left(\dfrac{X_n-\mu}{\sigma}\right)^2$ ανεξάρτητες τ.μ. $\sim X^2_1 \Rightarrow$

Από τις αναπαραγωγικές ιδιότητες, $\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2 \sim X^2_{\sum_{i=1}^{n} 1} \equiv X^2_n$

Τώρα, χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Basu θα αποδείξουμε ότι, $\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{X_i - \bar{X}}{\sigma}\right)^2 \sim X^2_{n-1}$. Θα δείξουμε ότι, οι συναρτήσεις $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ και $(X_1 - \bar{X}, X_2 - \bar{X}, \ldots, X_n - \bar{X})$ είναι ανεξάρτητες. Θα αποδείξουμε την ανεξαρτησία για οποιαδήποτε τιμή του ζεύγους (μ, σ^2). Ξεκινάμε θεωρώντας μία δεδομένη τιμή για την διασπορά $\sigma^2 = \sigma_0^2$. Αρχικά, πρέπει να βρούμε μία επαρκή και πλήρη στατιστική συνάρτηση. Το δείγμα μας προέρχεται από κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma_0^2)$ οπότε, $\theta = \mu \in \Theta$. Η συνάρτηση πυκνότητας δίνεται από τον τύπο, $f_1(x;\theta) = exp\{-\frac{\theta^2}{2\sigma^2} - \frac{1}{2}\log(2\pi\sigma^2) - \frac{x^2}{2\sigma^2} + \frac{\theta}{\sigma^2}x\}$. Συνεπώς, η οικογένεια $\{f_1(x;\theta) : \theta \in \Theta\}$ ανήκει στην Μ.Ε.Ο.Κ. με $A(\theta) = -\frac{\theta^2}{2\sigma^2}$, $B(x) = -\frac{1}{2}\log(2\pi\sigma^2) - \frac{x^2}{2\sigma^2}$, $C_1(\theta) = \frac{\theta}{\sigma^2}$, $D_1(x) = x$. Επειδή το Πεδίο τιμών της συνάρτησης $(C_1(\theta), \theta \in \Theta)$ είναι το R προφανώς περιέχει ένα ανοικτό σύνολο κι επομένως από την Πρόταση 1.4.1 η στατιστική συνάρτηση $T = T(\underset{\sim}{X}) = \sum\limits_{i=1}^{n} D_1(x_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ είναι επαρκής και πλήρης.

Επίσης, θέτουμε $X_i = Z_i + \theta$ με, $i = 1, 2, \ldots, n$ οπότε, $(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$ είναι ένα δείγμα του οποίου η κατανομή δεν εξαρτάται απο την άγνωστη παράμετρο αφού, αυτή είναι η $N(0, \sigma_0^2)$. Επιπλέον, $\bar{X} = \bar{Z} + \theta$ με, $\bar{Z} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} Z_i$. Έτσι, και η κατανομή του $S = (Z_1 - \bar{Z}, Z_2 - \bar{Z}, \ldots, Z_n - \bar{Z})$ δεν εξαρτάται από το θ γεγονός που συνεπάγεται ότι, $S = (Z_1 - \bar{Z}, Z_2 - \bar{Z}, \ldots, Z_n - \bar{Z}) = (X_1 - \bar{X}, X_2 - \bar{X}, \ldots, X_n - \bar{X})$. Συνεπώς, έχουμε ότι, η $T(\underset{\sim}{X})$ είναι επαρκής και πλήρης και ότι $S = (X_1 - \bar{X}, X_2 - \bar{X}, \ldots, X_n - \bar{X})$ έχει κατανομή που δεν εξαρτάται από την άγνωστη παράμετρο. Επομένως, $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ και $(X_1 - \bar{X}, X_2 - \bar{X}, \ldots, X_n - \bar{X})$ από το θεώρημα του Basu είναι ανεξάρτητες για κάθε τιμή του $\theta = \mu$. Όμως, εφ' όσον η τιμή $\sigma^2 = \sigma_0^2$ είναι τυχαία συμπεραίνουμε ότι, η ανεξαρτησία ισχύει για κάθε τιμή (μ, σ^2). Οπότε, $\sum\limits_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma} \right)^2 \sim X_{n-1}^2$.

Παρατήρηση 2.2.1. Επειδή πρόκειται να χρησιμοποιήσουμε ευρέως την X_n^2 κατανομή, συμβολίζουμε ως, $f_n(\cdot)$ την πυκνότητα πιθανότητας αυτής, όταν οι βαθμοί ελευθερίας ειναι n και ως $F_n(\cdot)$ την συνάρτηση κατανομής αυτής αντίστοιχα. Αν η τυχαία μεταβλητή πάρει την τιμή x τότε, η f_n δίνεται από τον τύπο, $f_n(x) = \dfrac{x^{n/2-1} \cdot e^{-x/2}}{2^{n/2} \cdot \Gamma(\frac{n}{2})}$, με $x > 0$.

Ορισμός 2.2.1. Αν η τυχαία μεταβλητή $Y \sim X_n^2$ και $F_n(c) = 1 - \beta$ τότε, το c ονομάζεται **β-ποσοστιαίο σημείο** της X^2 με n βαθμούς ελευθερίας. Συμβολικά, γράφουμε ότι, $c = X_{n,\beta}^2$.

2.2.1 Δ.ε Ίσων Ουρών

Πρόταση 2.2.2. *Έστω* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *τυχαίο δείγμα* $\sim N(\mu, \sigma^2)$. *Το διάστημα εμπιστοσύνης ίσων ουρών για την διασπορά* σ^2 *με συντελεστή εμπιστοσύνης* $100(1-\alpha)\%$ *είναι,*

$$\left[\frac{\sum\limits_{\imath=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2}{c_2}, \frac{\sum\limits_{\imath=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2}{c_1}\right],$$

όπου c_1, c_2 *δίνονται από την λύση του συστήματος,*

$$I_{E.T.}: \begin{cases} \int_{c_2}^{\infty} f_{n-1}(x)dx = \frac{\alpha}{2} \\ \int_{c_1}^{c_2} f_{n-1}(x)dx = 1-\alpha \end{cases}$$

, με $0 < \alpha < 1$.

Απόδειξη

Με τη βοήθεια της Πρότασης 2.2.1 προφανώς, η στατιστική συνάρτηση $T(\underset{\sim}{X}) = \sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\bar{X}}{\sigma}\right)^2 \sim X_{n-1}^2$ είναι μία ποσότητα οδηγός.

Θεωρούμε σταθερές $c_1 < c_2$ έτσι ώστε,

$$P_\theta(c_1 \leq T(\underset{\sim}{X}, \theta) \leq c_2) = 1-\alpha \Leftrightarrow$$
$$P_\theta(c_1 \leq \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\bar{X}}{\sigma}\right)^2 \leq c_2) = 1-\alpha \Leftrightarrow$$
$$P_\theta\left(\frac{\sum\limits_{\imath=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2}{c_2} \leq \sigma^2 \leq \frac{\sum\limits_{\imath=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2}{c_1}\right) = 1-\alpha$$

Από την παραπάνω διαδικασία προέκυψε το γενικό διάστημα εμπιστοσύνης για την παράμετρο σ^2, το οποίο έχει την μορφή,

$$\left[\frac{\sum\limits_{\imath=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2}{c_2},\frac{\sum\limits_{\imath=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2}{c_1}\right]$$

Το μόνο που απομένει πλέον είναι να υπολογίσουμε τις σταθερές c_1, c_2 ώστε να προκύψει δ.ε. εμπιστοσύνης ίσων ουρών. Ουσιαστικά, αναζητούμε τα c_1, c_2 ώστε να ισχύει ότι,

$$P_\theta(T(\underset{\sim}{X}) < c_1) + P_\theta(T(\underset{\sim}{X}) > c_2) = \alpha \Rightarrow$$

$$P_\theta(T(\underset{\sim}{X}) < c_1) = \alpha/2 \quad \text{και} \quad P_\theta(T(\underset{\sim}{X}) > c_2) = \alpha/2$$

Όμως, εφ' όσον $T(\underset{\sim}{X}) = \sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\bar{X}}{\sigma}\right)^2 \sim X^2_{n-1}$ από τις παραπάνω πιθανότητες προκύπτει αντίστοιχα ότι,

$$F_{n-1}(c_1) = \alpha/2 \quad \text{και} \quad F_{n-1}(c_2) = 1-\alpha/2 \Rightarrow$$
$$c_1 = F^{-1}_{n-1}(\alpha/2) \quad \text{και} \quad c_2 = F^{-1}_{n-1}(1-\alpha/2)$$

Λόγω του Ορισμού 2.2.1 για τις σταθερές c_1, c_2 έχουμε ότι,

$$c_1 = X^2_{n-1;1-\alpha/2} \quad \text{και} \quad c_2 = X^2_{n-1;\alpha/2}$$

Άρα, η τελική μορφή του δ.ε. ίσων ουρών είναι η παρακάτω,

$$\left[\frac{\sum\limits_{\imath=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2}{X^2_{n-1;\alpha/2}},\frac{\sum\limits_{\imath=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2}{X^2_{n-1;1-\alpha/2}}\right]$$

Οι εξισώσεις που επιλύσαμε για να προκύψει το ζητούμενο διάστημα εμπιστοσύνης ήταν ουσιαστικά οι,

$$P_\theta(T(\underset{\sim}{X}) < c_1) = \alpha/2, \quad P_\theta(T(\underset{\sim}{X}) > c_2) = \alpha/2 \quad \text{και} \quad P_\theta(c_1 \leq T(\underset{\sim}{X}) \leq c_2) = 1-\alpha$$

Αν τώρα παρατηρήσουμε πιο προσεκτικά θα δούμε ότι, οι παραπάνω εξισώσεις μπορούν να αντικατασταθούν από ένα σύστημα του οποίου η επίλυση μας δίνει το δ.ε. ίσων ουρών. Το σύστημα αυτό είναι το εξής,

$$I_{E.T.} : \begin{cases} \int_{c_2}^{\infty} f_{n-1}(x)dx = \frac{\alpha}{2} \\ \int_{c_1}^{c_2} f_{n-1}(x)dx = 1-\alpha \end{cases}$$

, με $0 < \alpha < 1$.

2.2.2 Δ.ε. Ελαχίστου Μήκους

Πρόταση 2.2.3. *Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τυχαίο δείγμα $\sim N(\mu, \sigma^2)$. Το διάστημα εμπιστοσύνης ελαχίστου μήκους για την διασπορά σ^2 με συντελεστή εμπιστοσύνης $100(1-\alpha)\%$ είναι,*

$$\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X} \right)^2}{c_2}, \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X} \right)^2}{c_1} \right],$$

όπου c_1, c_2 δίνονται από την λύση του συστήματος,

$$I_{M.L.} : \begin{cases} f_{n+3}(c_1) = f_{n+3}(c_2) \\ \int_{c_1}^{c_2} f_{n-1}(x)dx = 1-\alpha \end{cases}$$

, με $0 < \alpha < 1$.

Απόδειξη

Ξεκινάμε με το ίδιο ακριβώς σκεπτικό που ξεκινήσαμε και την κατασκευή του δ.ε. ίσων ουρών δηλαδή, χρησιμοποιούμε τους αμερόληπτους εκτιμητές S^2 και $\bar{X}$ και προσπαθούμε να βρούμε την ελάχιστη επαρκή στατιστική συνάρτηση. Έτσι, προκύπτει η ίδια ποσότητα οδηγός $T(\underset{\sim}{X}) = \sum\limits_{i=1}^{n} (\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma})^2 \sim X^2_{n-1}$. Κατανοούμε δηλαδή ότι, προς το παρόν δεν έχει προκύψει κάτι διαφορετικό όσον αφορά στην αρχική διαδικασία. Έτσι, το διάστημα που προκύπτει είναι και πάλι της μορφής,

$$\left[\frac{\sum\limits_{\imath=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2}{c_2}, \frac{\sum\limits_{\imath=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2}{c_1}\right]$$

Το μοναδικό σημείο που κάνει αυτή τη μέθοδο να διαφέρει είναι, ο υπολογισμός των άγνωστων σταθερών c_1, c_2 γιατί, αναζητάμε πλέον τα c_1, c_2 έχοντας ως κριτήριο την ελαχοστοποίηση του μήκοσυ του διαστήματος. Το μήκος του διαστήματος είναι,

$$l = \sum_{\imath=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2 \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2}\right)$$

και για να το ελαχιστοποιήσουμε, αρκεί να ελαχιστοποιήσουμε την ποσότητα

$$l^* = \frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} \tag{2.1}$$

υπό την προυπόθεση ότι,

$$F_{n-1}(c_2) - F_{n-1}(c_1) = 1 - \alpha. \tag{2.2}$$

Η διαδικασία έχει ως εξής, αρχικά θεωρούμε $c_2 = c_2(c_1)$, παίρνουμε την Σχέση (2.1) και την παραγωγίζουμε ως προς c_1 οπότε,

$$-\frac{1}{c_1^2}+\frac{1}{c_2^2}\frac{dc_2}{dc_1}=0 \Rightarrow$$

$$\frac{dc_2}{dc_1}=\frac{c_2^2}{c_1^2} \tag{2.3}$$

Συνεχίζουμε παραγωγίζοντας την Σχέση (2.2) ως προς c_1 και προκύπτει ότι,

$$f_{n-1}(c_2)\frac{dc_2}{dc_1}-f_{n-1}(c_1)=0 \overset{(2.3)}{\Rightarrow}$$
$$f_{n-1}(c_2)\frac{dc_2^2}{dc_1^2}-f_{n-1}(c_1)=0 \Rightarrow$$

$$c_1^2 f_{n-1}(c_1)=c_2^2 f_{n-1}(c_2) \tag{2.4}$$

Συνεπώς, για να βρούμε το δ.ε. ελαχίστου μήκους χρειάζεται να λύσουμε το ακόλουθο σύστημα,

$$\begin{cases} c_1^2 f_{n-1}(c_1)=c_2^2 f_{n-1}(c_2) \\ F_{n-1}(c_2)-F_{n-1}(c_1)=1-\alpha \end{cases}$$

Αν παρατηρήσουμε πιο προσεκτικά θα δούμε ότι η Σχέση (2.2) μπορεί να γραφεί σαν ολοκλήρωμα ως εξής, $\int_{c_1}^{c_2} f_{n-1}(x)dx=\epsilon$. Συνεχίζουμε κάνοντας κάποιες πράξεις και με την Σχέση (2.4) για να καταλήξουμε με αυτόν τον τρόπο στην τελική μορφή του διαστήματος. Έχουμε λοιπόν ότι,

$$c_1^2\cdot f_{n-1}(c_1)=c_2^2\cdot f_{n-1}(c_2) \Rightarrow$$
$$c_1^2\cdot\frac{c_1^{\frac{n-1}{2}-1}\cdot e^{-\frac{c_1}{2}}}{2^{\frac{n-1}{2}}\cdot\Gamma(\frac{n-1}{2})}=c_2^2\cdot\frac{c_2^{\frac{n-1}{2}-1}\cdot e^{-\frac{c_2}{2}}}{2^{\frac{n-1}{2}}\cdot\Gamma(\frac{n-1}{2})} \Rightarrow$$
$$\frac{c_1^{\frac{n+3}{2}-1}\cdot e^{-\frac{c_1}{2}}}{2^{\frac{n+3}{2}}\cdot\Gamma(\frac{n+3}{2})}=\frac{c_2^{\frac{n+3}{2}-1}\cdot e^{-\frac{c_2}{2}}}{2^{\frac{n+3}{2}}\cdot\Gamma(\frac{n+3}{2})} \Rightarrow$$
$$f_{n+3}(c_1)=f_{n+3}(c_2)$$

Άρα, η τελική μορφή του δ.ε. ελαχίστου μήκους είναι η παρακάτω,

$$I_{M.L.}: \begin{cases} f_{n+3}(c_1) = f_{n+3}(c_2) \\ \int_{c_1}^{c_2} f_{n-1}(x)dx = 1-\alpha \end{cases}$$

, με $0 < \alpha < 1$.

2.2.3 Δ.ε. Λόγου Πιθανοφανειών

Πρόταση 2.2.4. *Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τυχαίο δείγμα $\sim N(\mu, \sigma^2)$. Το διάστημα εμπιστοσύνης λόγου πιθανοφανειών για την διασπορά σ^2 με συντελεστή εμπιστοσύνης $100(1-\alpha)\%$ είναι,*

$$\left[\frac{\sum\limits_{\imath=1}^{n} \left(X_i - \bar{X} \right)^2}{c_2}, \frac{\sum\limits_{\imath=1}^{n} \left(X_i - \bar{X} \right)^2}{c_1} \right],$$

όπου c_1, c_2 δίνονται από την λύση τού συστήματος,

$$I_{L.R.}: \begin{cases} f_{n+1}(c_1) = f_{n+1}(c_2) \\ \int_{c_1}^{c_2} f_{n-1}(x)dx = 1-\alpha \end{cases}$$

, *με* $0 < \alpha < 1$.

Απόδειξη

Για να κατασκευάσουμε το δ.ε. λόγου πιθανοφανειών βασιζόμαστε στον έλεγχο λόγου πιθανοφανειών, της μηδενικής υπόθεσης $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ κατά της εναλλακτικής $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$. Εδώ, η άγνωστη παράμετρος είναι το $\theta = (\mu, \sigma^2) \in R \times R^+ = \Theta$ ενώ, $\Theta_0 = \{\theta = (\mu, \sigma_0^2) : \mu \in R\} = R \times \sigma_0^2$. Η συνάρτηση πιθανοφάνειας δίνεται από την ακόλουθη σχέση, $L(\theta) = f(\underset{\sim}{x}; \theta) = \dfrac{1}{\sigma^n (\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum\limits_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2}$.

Συμβολίζουμε με $\hat{\theta}$ τον εκτιμητή μέγιστης πιθανοφάνειας του $\theta \in \Theta$ δηλαδή, $\hat{\theta} = (\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2)$, όπου $\hat{\mu} = \bar{X}$ και $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2$. Ενώ, με $\hat{\theta}_0$ συμβολίζουμε τον εκτιμητή μέγιστης πιθανοφάνειας του $\theta \in \Theta_0$ δηλαδή, $\hat{\theta}_0 = (\hat{\mu}_0, \hat{\sigma}_0^2)$, όπου $\hat{\mu}_0 = \bar{X}$ και $\hat{\sigma}_0^2 = \sigma_0^2$. Αρχικά, στόχος μας είναι να κατασκευάσουμε έναν έλεγχο λόγου πιθανοφανειών γεγονός που μας παραπέμπει στην αναζήτηση του λόγου, $\lambda(\underset{\sim}{X}) = \dfrac{\underset{\theta\in\Theta}{sup} L(\theta)}{\underset{\theta\in\Theta_0}{sup} L(\theta)} = \dfrac{L(\hat{\theta})}{L(\hat{\theta}_0)}$. Οπότε,

$$\lambda(\underset{\sim}{X}) = \frac{L(\hat{\theta})}{L(\hat{\theta}_0)} \Rightarrow$$

$$\lambda(\underset{\sim}{X}) = \frac{\dfrac{1}{\hat{\sigma}^n(\sqrt{2\pi})^n} \cdot e^{-\frac{1}{2\hat{\sigma}^2}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2}}{\dfrac{1}{\sigma_0^n(\sqrt{2\pi})^n} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2}} \Rightarrow$$

$$\lambda(\underset{\sim}{X}) = \frac{\sigma_0^n}{\hat{\sigma}^n} \cdot e^{-\frac{1}{2\hat{\sigma}^2}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2 + \frac{1}{2\sigma_0^2}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2} \Rightarrow$$

$$\lambda(\underset{\sim}{X}) = \frac{\sigma_0^n}{\hat{\sigma}^n} \cdot e^{-\frac{1}{2\hat{\sigma}^2}\cdot n\hat{\sigma}^2 + \frac{1}{2\sigma_0^2}\cdot n\hat{\sigma}^2} \Rightarrow$$

$$\lambda(\underset{\sim}{X}) = \frac{\sigma_0^n}{\hat{\sigma}^n} \cdot e^{-\frac{n}{2} + \frac{n}{2}\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2}} \Rightarrow$$

$$\lambda(\underset{\sim}{X}) = \left(\frac{\sigma_0^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot n^{\frac{n}{2}} \cdot e^{-\frac{n}{2}} \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2}{\sigma_0^2}}$$

Συνεπώς, ο έλεγχος λόγου πιθανοφανειών έχει ως εξής, $\quad \phi(\underset{\sim}{X}) = \begin{cases} 1 & , \lambda(\underset{\sim}{X}) > k \\ 0 & , \lambda(\underset{\sim}{X}) \leq k \end{cases}$

Από τον έλεγχο παρατηρούμε ότι, αποδεχόμαστε την μηδενική υπόθεση $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$, αν

$$\lambda(\underset{\sim}{X}) \leq k \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\sigma_0^2}{\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X} \right)^2} \right)^{\frac{n}{2}} \cdot n^{\frac{n}{2}} \cdot e^{-\frac{n}{2}} \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X} \right)^2}{\sigma_0^2}} \leq k \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\sigma_0^2}{\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X} \right)^2} \right)^{\frac{n}{2}} \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X} \right)^2}{\sigma_0^2}} \leq c \ ,$$

όπου $c = n^{-\frac{n}{2}} \cdot e^{\frac{n}{2}}$.

Έτσι, η περιοχή αποδοχής της μηδενικής υπόθεσης είναι η ακόλουθη,

$$A(\sigma_0^2) = \left\{ \underset{\sim}{x} : \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X} \right)^2}{\sigma_0^2} \right)^{\frac{n}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X} \right)^2}{\sigma_0^2}} \geq c \right\}$$

Συνεπώς, το δ.ε. λόγου πιθανοφανειών για την διασπορά σ^2 έχει την εξής μορφή,

$$C(\underset{\sim}{X}) = \left\{ \sigma^2 : \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X} \right)^2}{\sigma^2} \right)^{\frac{n}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X} \right)^2}{\sigma^2}} \geq c \right\}$$

Σημειώνουμε ότι, το δ.ε. $C(\underset{\sim}{X})$ εξαρτάται από το $\underset{\sim}{X}$ μέσω της στατιστικής συνάρτησης, $T(\underset{\sim}{X}) = \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X} \right)^2$, δηλαδή $C(T) = \{\sigma^2 : L(T) \leq \sigma^2 \leq U(T)\}$, όπου οι συναρτήσεις $L(T)$ και $U(T)$ ορίζονται έτσι ώστε,

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2}{L\left(\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2\right)}\right)^{\frac{n}{2}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2}{L\left(\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2\right)}}=\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2}{U\left(\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2\right)}\right)^{\frac{n}{2}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2}{U\left(\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2\right)}} \tag{2.5}$$

Όμως, γνωρίζουμε ότι, το δ.ε. είναι της μορφής,

$$\left[\frac{\sum_{\imath=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2}{c_2},\frac{\sum_{\imath=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2}{c_1}\right].$$

Κάτι που μας οδηγεί στο συμπέρασμα πως, $L(T)=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2}{c_2}$ και $U(T)=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2}{c_1}$.

Επομένως, από την Σχέση (2.5) προκύπτει ότι,

$$c_2^{\frac{n}{2}}\cdot e^{-\frac{c_2}{2}}=c_1^{\frac{n}{2}}\cdot e^{-\frac{c_1}{2}}\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\Gamma(\frac{n+2}{2})\cdot 2^{\frac{n+2}{2}}}\cdot c_2^{\frac{n+2}{2}-1}\cdot e^{-\frac{c_2}{2}}=\frac{1}{\Gamma(\frac{n+2}{2})\cdot 2^{\frac{n+2}{2}}}\cdot c_1^{\frac{n+2}{2}-1}\cdot e^{-\frac{c_1}{2}}\Leftrightarrow$$

$$f_{n+2}(c_2)=f_{n+2}(c_1)$$

Άρα, η τελική μορφή του διαστήματος είναι η ακόλουθη,

$$I_{L.R.}:\begin{cases} f_{n+2}(c_1)=f_{n+2}(c_2)\\ \int_{c_1}^{c_2}f_{n-1}(x)dx=1-\alpha\end{cases}$$

, με $0<\alpha<1$.

2.2.4 Αμερόληπτο Δ.ε.

Πριν ξεκινήσουμε την κατασκευή ενός αμερόληπτου δ.ε. επιβάλλεται, για την καλύτερη κατανόηση όλων όσων θα μελετήσουμε πιο κάτω να αναφέρουμε τον ορισμό του διαστήματος αυτού.

Ορισμός 2.2.2. Ένα διάστημα $I = [T_1(\underset{\sim}{X}), T_2(\underset{\sim}{X})]$, με συντελεστή εμπιστοσύνης $1-\alpha$, καλείται **αμερόληπτο** αν για την πιθανότητα λανθασμένης κάλυψης ισχύει ότι,

$$P_{\mu,\sigma^2}(\sigma_0^2 \in I) \leq 1-\alpha, \quad \text{για κάθε } \sigma^2 \neq \sigma_0^2, \quad 0<\alpha<1 \, .$$

Πρόταση 2.2.5. *Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τυχαίο δείγμα $\sim N(\mu, \sigma^2)$. Το διάστημα εμπιστοσύνης ελαχίστου μήκους για την διασπορά σ^2 με συντελεστή εμπιστοσύνης $100(1-\alpha)\%$ είναι,*

$$\left[\frac{\sum_{\imath=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2}{c_2}, \frac{\sum_{\imath=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2}{c_1} \right],$$

όπου c_1, c_2 δίνονται από την λύση του συστήματος,

$$I_{S.U.} : \begin{cases} f_{n+1}(c_1) = f_{n+1}(c_2) \\ \int_{c_1}^{c_2} f_{n-1}(x)dx = 1-\alpha \end{cases}$$

, με $0<\alpha<1$.

Απόδειξη

Όπως και πριν ο έλεγχος που κάνουμε αφορά την διασπορά και έχει την εξής μορφή, $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ κατά της εναλλακτικής υπόθεσης $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$. Ξεκινάμε με το ίδιο ακριβώς σκεπτικό που ξεκινήσαμε και την κατασκευή των παραπάνω δ.ε. δηλαδή, χρησιμοποιούμε τους αμερόληπτους εκτιμητές S^2 και $\bar{X}$ και προσπαθούμε να βρούμε την ελάχιστη επαρκή στατιστική συνάρτηση. Έτσι, προκύπτει η ίδια ποσότητα οδηγός $T(\underset{\sim}{X}) = \sum_{i=1}^{n} (\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma})^2 \sim X_{n-1}^2$. Εκτός από την ποσότητα οδηγό, χρειάζεται να ορίσουμε και την λεγόμενη περιοχή αποδοχής της μηδενικής υπόθεσης H_0 για να καταλήξουμε στι επιθυμητό αποτέλεσμα. Έστω ότι αποδεχόμαστε την μηδενική υπόθεση όταν,

$$P_{\mu,\sigma^2}(T_1(\underset{\sim}{X}) \leq \sigma_0^2 \leq T_2(\underset{\sim}{X})) = \varepsilon > 1 - \alpha \quad \Leftrightarrow$$

$$\int_{c_1}^{c_2} f_{n-1}(x)dx = \varepsilon \quad \text{, όπου } c_1, c_2 : \text{άγνωστες σταθερές.}$$

Εφ΄ όσον είδαμε την περιοχή αποδοχής της H_0 κατανοούμε πως, το συμπλήρωμα αυτής είναι η περιοχή απόρριψης δηλαδή, η περιοχή όπου, $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$. Πιο συγκεκριμένα, αυτή είναι η ακόλουθη,

$$P_{\mu,\sigma^2}(T_1(\underset{\sim}{X}) \leq \sigma_0^2 \leq T_2(\underset{\sim}{X})) = \varepsilon' \leq 1 - \alpha$$

Στόχος μας είναι, να υπολογίσουμε τα άκρα αυτού του διαστήματος. Θεωρούμε λοιπόν, σταθερές c_1, c_2 τέτοιες ώστε,

$$P(c_1 \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2}{\sigma_0^2} \leq c_2) = \varepsilon' \Leftrightarrow$$

$$P(\sigma_0^2 \cdot c_1 \leq \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 \leq \sigma_0^2 \cdot c_2) = \varepsilon' \Leftrightarrow$$

$$P(\frac{\sigma_0^2 \cdot c_1}{\sigma^2} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} \leq \frac{\sigma_0^2 \cdot c_2}{\sigma^2}) = \varepsilon' \Leftrightarrow$$

$$P(\frac{\sigma_0^2 \cdot c_1}{\sigma^2} \leq T(\underset{\sim}{X}) \leq \frac{\sigma_0^2 \cdot c_2}{\sigma^2}) = \varepsilon' \Leftrightarrow$$

$$\int_{\frac{\sigma_0^2 \cdot c_1}{\sigma^2}}^{\frac{\sigma_0^2 \cdot c_2}{\sigma^2}} f_{n-1}(x)dx = \varepsilon' \tag{2.6}$$

Συνεχίζουμε παραγωγίζοντας τη Σχέση (2.6) ως προς σ_0^2 κι έχουμε ότι,

$$\frac{c_2}{\sigma^2} \cdot f_{n-1}(\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2} \cdot c_2) - \frac{c_1}{\sigma^2} \cdot f_{n-1}(\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2} \cdot c_1) = 0 \Leftrightarrow$$

$\frac{c_2}{\sigma^2} \cdot \frac{1}{\Gamma(\frac{n-1}{2}) \cdot 2^{\frac{n-1}{2}}} \cdot (\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2} \cdot c_2)^{\frac{n-1}{2}-1} \cdot e^{-\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2} \cdot \frac{c_2}{2}} = \frac{c_1}{\sigma^2} \cdot \frac{1}{\Gamma(\frac{n-1}{2}) \cdot 2^{\frac{n-1}{2}}} \cdot (\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2} \cdot c_1)^{\frac{n-1}{2}-1} \cdot e^{-\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2} \cdot \frac{c_1}{2}} \quad \overset{H_0}{\Longleftrightarrow}$

$c_1^{\frac{n+1}{2}-1} \cdot e^{-\frac{c_1}{2}} = c_2^{\frac{n+1}{2}-1} \cdot e^{-\frac{c_2}{2}} \Leftrightarrow$

$f_{n+1}(c_1) = f_{n+1}(c_2)$

Άρα, συνοψίζοντας βλέπουμε ότι το σύστημα που πρέπει να επιλυθεί για να κατασκευαστεί το αμερόληπτο δ.ε. είναι αυτό που ικανοποιεί το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων,

$$I_{S.U.} : \begin{cases} f_{n+1}(c_1) = f_{n+1}(c_2) \\ \int_{c_1}^{c_2} f_{n-1}(x)dx = 1 - \alpha \end{cases}$$

, με $0 < \alpha < 1$.

2.3 Χρήσιμες Κατανομές

Στην παράγραφο αυτή αναφέρουμε κάποιες κατανομές και ειδικότερα, την δημιουργία συγκεκριμένων κατανομών, οι οποίες θα παίξουν καθοριστικό ρόλο στην κατασκευή των βελτιωμένων δ.ε. για το σ^2. Έστω ότι, αρχικά, διαθέτουμε δύο τυχαία διανύσματα, $\underset{\sim}{X}_1 = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ και $\underset{\sim}{X}_2 = (X_{n+1}, X_{n+2}, \dots, X_{n+p})$ που ακολουθούν πολυδιάστατες κανονικές κατανομές, $\underset{\sim}{X}_1 \sim MVN_n(\underset{\sim}{0}, \sigma^2 I_n)$ και $\underset{\sim}{X}_2 \sim MVN_p(\underset{\sim}{\mu}, \sigma^2 I_p)$, όπου $\underset{\sim}{\mu} = (\mu_{n+1}, \mu_{n+2}, \dots, \mu_{n+p})$ το διάνυσμα των μέσων. Ορίζουμε ως, $S^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2$ και $T^2 = \sum\limits_{i=n+1}^{n+p} X_i^2$ τυχαίες μεταβλητές για τις οποίες θα δείξουμε ότι, ακολουθούν τις κατανομές $S^2 \sim \sigma^2 X_n^2$ και $T^2 \sim \sigma^2 X_p^2(\eta)$, με $\eta = \|\mu\|^2/\sigma^2$. Σημειώνουμε ότι, η X_n^2 αναπαριστά μία κεντρική X^2 κατανομή με n βαθμούς ελευθερίας ενώ, η $X_p^2(\eta)$ αναπαριστά μία μη κεντρική X^2 κατανομή με p βαθμούς ελευθερίας και η παράμετρο μη κεντρικότητας, της οποίας ο ορισμός δίνεται παρακάτω.

Ορισμός 2.3.1. Αν $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με $X_i \sim N(\mu_i, 1)$ $i = 1, \ldots, n$ τότε, η κατανομή της $X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$ καλείται **μη κεντρική** X^2 **κατανομή** με n βαθμούς ελευθερίας και παράμετρο μη κεντρικότητας $\delta = \mu_1^2 + \mu_2^2 + \cdots + \mu_n^2 = \|\mu\|^2$ και συμβολίζεται με $X_n^2(\delta)$.

Πρόταση 2.3.1. *Η στατιστική συνάρτηση* $S^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2$ *προέρχεται από την* X^2 *κατανομή με* n *βαθμούς ελευθερίας.*

Απόδειξη

Έχουμε ότι, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τυχαίο διάνυσμα $\sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow$

$\dfrac{X_1}{\sigma}, \dfrac{X_2}{\sigma}, \ldots, \dfrac{X_n}{\sigma}$ ανεξάρτητες τ.μ. $\sim N(0,1) \Rightarrow$

$\left(\dfrac{X_1}{\sigma}\right)^2, \left(\dfrac{X_2}{\sigma}\right)^2, \ldots, \left(\dfrac{X_n}{\sigma}\right)^2$ ανεξάρτητες τ.μ. $\sim X_1^2 \Rightarrow$

Από τις αναπαραγωγικές ιδιότητες, $\sum\limits_{i=1}^{n} \left(\dfrac{X_i}{\sigma}\right)^2 \sim X^2_{\sum\limits_{i=1}^{n} 1} \equiv X_n^2 \Rightarrow$

$\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \sigma^2 \cdot X_n^2 \Rightarrow S^2 \sim \sigma^2 X_n^2.$

Πρόταση 2.3.2. *Η στατιστική συνάρτηση* $T^2 = \sum\limits_{i=n+1}^{n+p} X_i^2$ *προέρχεται από την μη κεντρική* X^2 *κατανομή με* p *βαθμούς ελευθερίας και παράμετρο μη κεντρικότητας* $\eta = \|\mu\|^2/\sigma^2$.

Απόδειξη

Έχουμε ότι, $\underset{\sim}{X}_2 = (X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots, X_{n+p}) \sim MVN_p(\underset{\sim}{\mu}, \Sigma)$, όπου $\underset{\sim}{\mu} = (\mu_{n+1}, \mu_{n+2}, \ldots, \mu_{n+p})$ το διάνυσμα των μέσων και $\Sigma = \sigma^2 I_p$ ο πίνακας διασπορών- συνδιασπορών. Θα δείξουμε ότι,
$\underset{\sim}{X}_2{}' \Sigma^{-1} \underset{\sim}{X}_2 \sim X_p^2(\eta)$ με, $\eta = \underset{\sim}{\mu}' \Sigma^{-1} \underset{\sim}{\mu}$. Εφ' όσον ο πίνακας $\Sigma > 0$, αυτό μας εξασφαλίζει την ύπαρξη του αντιστρόφου του, $\Sigma^{-1} > 0$. Από τις ιδιότητες της τετραγωνικής ρίζας του θετικά ορισμένου

πίνακα έχουμε ότι, $\Sigma^{-1} = \Sigma^{-1/2}\Sigma^{-1/2}$. Οπότε, $\underset{\sim}{X_2}'\Sigma^{-1}\underset{\sim}{X_2} = \underset{\sim}{X_2}'\Sigma^{-1/2}\Sigma^{-1/2}\underset{\sim}{X_2} = \|\Sigma^{-1/2}\underset{\sim}{X_2}\|^2$. Σε αυτό το σημείο, θεωρούμε το διάνυσμα $\underset{\sim}{Y} = \Sigma^{-1/2}\underset{\sim}{X_2} \sim MVN_p(\Sigma^{-1/2}\underset{\sim}{\mu}, \Sigma^{-1/2}\Sigma\Sigma^{-1/2}) = MVN_p(\Sigma^{-1/2}\underset{\sim}{\mu}, I_p)$. Συνεπώς, μπορούμε να γράψουμε ότι, $\underset{\sim}{Y} = \underset{\sim}{Z} + \Sigma^{-1/2}\underset{\sim}{\mu}$, όπου $\underset{\sim}{Z} \sim MVN_p(\underset{\sim}{0}, I_p)$. Οπότε, $\underset{\sim}{X_2}'\Sigma^{-1}\underset{\sim}{X_2} = \|\underset{\sim}{Z} + \Sigma^{-1/2}\underset{\sim}{\mu}\|^2 \sim X_p^2(\eta)$ με, $\eta = \|\Sigma^{-1/2}\underset{\sim}{\mu}\|^2 = (\Sigma^{-1/2}\underset{\sim}{\mu})'(\Sigma^{-1/2}\underset{\sim}{\mu}) = \underset{\sim}{\mu}'\Sigma^{-1}\underset{\sim}{\mu}$. Εδώ όμως, $\Sigma = \sigma^2 I_p$ κάτι που συνεπάγεται ότι, $\underset{\sim}{X_2}'\Sigma^{-1}\underset{\sim}{X_2} = \underset{\sim}{X_2}'(\sigma^2 I_p)^{-1}\underset{\sim}{X_2} = (\sigma^2)^{-1}\underset{\sim}{X_2}'\underset{\sim}{X_2} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=n+1}^{n+p} X_i^2 \sim X_p^2(\eta)$, με $\eta = \underset{\sim}{\mu}'(\sigma^2 I_p)^{-1}\underset{\sim}{\mu} = (\sigma^2)^{-1}\underset{\sim}{\mu}'\underset{\sim}{\mu} = \frac{1}{\sigma^2}\|\mu\|^2$. Άρα, η στατιστική συνάρτηση $T^2 = \sum_{i=n+1}^{n+p} X_i^2 \sim X_p^2(\eta)$, με $\eta = \|\mu\|^2/\sigma^2$.

Η επαρκής στατιστική συνάρτηση που θα χρησιμοποιηθεί για την άγνωστη παράμετρο $(\sigma^2, \underset{\sim}{\mu})$ είναι η $(S^2, \underset{\sim}{X_2})$. Το πρόβλημα εύρεσης ενός καλού διαστήματος εμπιστοσύνης για την διασπορά σ^2, το οποίο δεν εξαρτάται μόνο από το S^2, μπορεί να αντιμετωπιστεί ως ένα πρόβλημα της θεωρίας αποφάσεων. Θεωρούμε ως, $I(S^2, \underset{\sim}{X_2}) = (\varphi_1(S^2, \underset{\sim}{X_2}), \varphi_2(S^2, \underset{\sim}{X_2}))$ το δ.ε. για την διασπορά και ισχυριζόμαστε ότι, ο κίνδυνος που προκαλεί η χρήση του διαστήματος $I(S^2, \underset{\sim}{X_2})$ είναι ίσος με την πιθανότητα να μην καλυφθεί η πραγματική τιμή του σ^2 δηλαδή, $R((\sigma^2, \underset{\sim}{\mu}), I) = P(\sigma^2 \notin I(S^2, \underset{\sim}{X_2}))$. Το παραπάνω πρόβλημα παραμένει αμετάβλητο αν εφαρμόσουμε το σύνολο Γ των μετασχηματισμών (k, Γ) που σχηματίζονται ως εξής,

$$\begin{gathered}(S^2, \underset{\sim}{X_2}) \to (k^2 S^2, k\Gamma\underset{\sim}{X_2})\\ (\sigma^2, \underset{\sim}{\mu}) \to (k^2\sigma^2, k\Gamma\underset{\sim}{\mu})\\ \varphi_i(S^2, \underset{\sim}{X_2}) \to k^2\varphi_i(S^2, \underset{\sim}{X_2}) \qquad i = 1, 2,\end{gathered}$$

όπου $k > 0$ θετικός αριθμός και Γ πραγματικός ορθογώνιος πίνακας διάστασης $p \times p$. Τώρα, πλέον τα δ.ε. κάτω από τους παραπάνω μετασχηματισμούς είναι της μορφής $(\varphi_1(Z^2)S^2, \varphi_2(Z^2)S^2)$ όπου, φ_1, φ_2 θετικές συναρτήσεις και $Z^2 = \dfrac{T^2}{T^2 + S^2}$. Γενικά, στόχος μας είναι να κατασκευαστούν δ.ε. για την διασπορά τα οποία, βασίζονται στις συναρτήσεις S^2 και Z^2 κι έχουν το ίδιο μήκος με το δ.ε. ελαχίστου μήκους $(S^2/c_1, S^2/c_2)$ που, κατασκευάστηκε νωρίτερα και τα άκρα δίνονταν από την επίλυση του παρακάτω συστήματος,

$$I_{M.L.}: \begin{cases} f_{n+3}(c_1) = f_{n+3}(c_2) \\ \int_{c_1}^{c_2} f_{n-1}(x)dx = 1-\alpha \end{cases}$$

, με $0 < \alpha < 1$.

Έτσι, αναζητούμε διαστήματα της μορφής $(\varphi(Z^2)S^2, \varphi((Z^2)+c)S^2)$, με $c = 1/c_2 - 1/c_1$ και φ: θετική συνάρτηση του Z^2.

Επειδή τα ανώτερα και τα κατώτερα όρια του διαστήματος εξαρτώνται από την παράμετρο $(\sigma^2, \underset{\sim}{\mu})$ και ο κίνδυνος εξαρτάται αντίστοιχα από την παράμετρο μη κεντρικότητας η προσπαθούμε να περιορίσουμε το πρόβλημα σε γνωστές κεντρικές X^2 κατανομές. Πιο συγκεκριμένα, χρησιμοποιούμε τη μη κεντρική X^2 κατανομή και απαιτούμε την ύπαρξη μιας τυχαίας μεταβλητής K που ακολουθεί την κατανομή Poisson με μέσο ίσο με $\eta/2$. Εφ'οσον η τυχαία μεταβλητή K ακολουθεί Poisson με μέσο ίσο με $\eta/2$ αντιλαμβανόμαστε ότι, $K \sim P(\eta/2)$. Έτσι, έχοντας στην διάθεσή μας τα παραπάνω δεδομένα διατυπώνουμε την πρόταση που ακολουθεί,

Πρόταση 2.3.3.

1. Η τυχαία μεταβλητή $T^2 = \sum\limits_{i=n+1}^{n+p} X_i^2 \sim \sigma^2 X_p^2(\eta)$ *δεδομένης της* K *προέρχεται από* $T^2|K \sim X_{p+2k}^2$,

2. Η τυχαία μεταβλητή $T^2 + S^2$ *δεδομένης της* K *προέρχεται από* $(T^2+S^2)|K \sim X_{n+p+2k}^2$,

3. Η τυχαία μεταβλητή $Z^2 = \dfrac{T^2}{T^2+S^2}$ *δεδομένης της* K *προέρχεται από* $Z^2|K \sim B(\frac{p}{2}+k, \frac{n}{2})$,

4. Οι τυχαίες μεταβλητές $Z^2 = \dfrac{T^2}{T^2+S^2}$ *και* T^2+S^2 *δοθέντος* K *είναι ανεξάρτητες.*

Απόδειξη 1.

Αφού $T^2 = \sum\limits_{i=n+1}^{n+p} X_i^2 \sim \sigma^2 X_p^2(\eta)$ η συνάρτηση πυκνότητας δίνεται από τον ακόλουθο τύπο,
$P(T^2 = t^2) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(t^2)^{\frac{p}{2}+k-1} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}}{\Gamma(\frac{p}{2}+k) \cdot 2^{\frac{p}{2}+k}} \cdot \dfrac{\eta^k \cdot e^{-\eta}}{k!} \cdot \sigma^2$. Αν παρατηρήσουμε πιο προσεκτικά θα διαπιστώσουμε ότι, η παραπάνω πυκνότητα είναι στην ουσία μία μίξη κατανομών που προέρχονται από μία κεντρική

X^2 κατανομή και από μία κατανομή Poisson. Ειδικότερα, το κλάσμα $\dfrac{(t^2)^{\frac{p}{2}+k-1} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}}{\Gamma(\frac{p}{2}+k) \cdot 2^{\frac{p}{2}+k}}$ αποτελεί την πυκνότητα μιας τυχαίας μεταβλητής που προέρχεται από την κατανομή X^2_{p+2k} και το κλάσμα $\dfrac{\eta^k \cdot e^{-\eta}}{k!}$ είναι η πυκνότητα μιας τυχαίας μεταβλητής που προέρχεται από την κατανομή Poisson με παράμετρο η. Άρα, η τυχαία μεταβλητή $T^2|K$ ακολουθεί την κεντρική X^2_{p+2k}.

Απόδειξη 2.

Αφού $T^2 = \sum_{i=n+1}^{n+p} X_i^2 \sim \sigma^2 X_p^2(\eta)$ και $S^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \sigma^2 X_n^2$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές έχουμε ότι, $T^2 + S^2 \sim \sigma^2 X^2_{n+p}(\eta)$. Θέτουμε $X = T^2 + S^2$ κι έχουμε ότι η συνάρτηση πυκνότητας δίνεται από τον εξής τύπο, $P(X = x) = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{x^{\frac{n+p}{2}+k-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}}}{\Gamma(\frac{n+p}{2}+k) \cdot 2^{\frac{n+p}{2}+k}} \cdot \dfrac{\eta^k \cdot e^{-\eta}}{k!} \cdot \sigma^2$. Όμοια με πριν, παρατηρώντας την πυκνότητα αυτή διαπιστώνουμε ότι είναι μία μίξη κατανομών που προέρχονται από μία κεντρική X^2 κατανομή και από μία κατανομή Poisson. Πιο συγκεκριμένα, το κλάσμα $\dfrac{x^{\frac{n+p}{2}+k-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}}}{\Gamma(\frac{n+p}{2}+k) \cdot 2^{\frac{n+p}{2}+k}}$ αποτελεί την πυκνότητα μιας τυχαίας μεταβλητής που προέρχεται από την κατανομή X^2_{n+p+2k} και το κλάσμα $\dfrac{\eta^k \cdot e^{-\eta}}{k!}$ είναι η πυκνότητα μιας τυχαίας μεταβλητής που προέρχεται από την κατανομή Poisson με παράμετρο η. Άρα, η τυχαία μεταβλητή $T^2 + S^2|K$ ακολουθεί την κεντρική X^2_{n+p+2k}.

Πριν συνεχίσουμε στη επόμενη απόδειξη, κρίνεται αναγκαίο να αναφέρουμε μία παρατήρηση που συνδέει την κέντρική X^2 κατανομή και μία *Gamma* κατανομή.

Παρατήρηση 2.3.1. Έστω X μία τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την $Gamma(\alpha, \beta)$ τότε, η πυκνότητα αυτής δίνεται από τον τύπο: $f(x) = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha) \cdot \beta^\alpha} \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-\frac{x}{\beta}}$, με $x > 0$. Στην περίπτωση όπου, $\alpha = n/2$ και $\beta = 2$ τότε, η $f(x)$ γίνεται $f(x) = \dfrac{1}{\Gamma(n/2) \cdot 2^{n/2}} \cdot x^{(n/2)-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}}$, με $x > 0$ και έχουμε ότι, $X \sim Gamma(n/2, 2) \equiv X_n^2$.

Απόδειξη 3.

Εφ'οσον θέλουμε να δείξουμε ότι, η τυχαία μεταβλητή $Z^2 = \dfrac{T^2}{T^2+S^2}|K \sim B(\frac{p}{2}, \frac{n}{2})$ κι έχουμε ότι, $T^2|K \sim X^2_{p+2k} \equiv Gamma(\frac{p+2k}{2}, 2)$ και $(T^2+S^2)|K \sim X^2_{n+p+2k} \equiv Gamma(\frac{n+p+2k}{2}, 2)$ θα αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα γενικά και θα ακολουθήσουμε το εξής σκεπτικό. Θα θεωρήσουμε δύο τυχαίες μεταβλητές $X_1 \sim Gamma(\alpha, 2)$ και $X_2 \sim Gamma(\beta, 2)$ ανεξάρτητες και θα αποδείξουμε ότι, η νέα μεταβλητή $Y_1 = \dfrac{X_1}{X_1+X_2}$ προέρχεται από την κατανομή $B(\alpha, \beta)$ δηλαδή, ότι η συνάρτηση πυκνότητας αυτής δίνεται από τον τύπο $f_{Y_1}(y_1) = \dfrac{1}{B(\alpha,\beta)} \cdot y_1^{\alpha-1} \cdot (1-y_1)^{\beta-1}$, με $0 < y_1 < 1$ και $\alpha, \beta > 0$ όπου, $B(\alpha,\beta) = \dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}$. Θέτουμε $Y_2 = X_1 + X_2$ και χρησιμοποιούμε το θεώρημα του αντίστροφου μετασχηματισμού, (Θεώρημα 1.8.1).

Θεωρούμε την συνάρτηση $h : (X_1, X_2) \to (\dfrac{X_1}{X_1+X_2}, X_1+X_2)$, τότε η αντίστροφη αυτής είναι η $h^{-1} : (Y_1, Y_2) \to (g_1(Y_1,Y_2), g_2(Y_1,Y_2))$.

$$\text{Αφού,} \quad \left.\begin{array}{r} Y_1 = \dfrac{X_1}{X_1+X_2} \\ Y_2 = X_1 + X_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \begin{array}{c} X_1 = Y_1 \cdot Y_2 \\ X_2 = Y_2 - Y_1 \cdot Y_2 = Y_2(1-Y_1) \end{array}$$

Συνεχίζουμε κατασκευάζοντας την Ιακωβιανή ορίζουσα κι έχουμε ότι,

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial Y_1} & \frac{\partial X_1}{\partial Y_2} \\ \frac{\partial X_2}{\partial Y_1} & \frac{\partial X_2}{\partial Y_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Y_2 & Y_1 \\ -Y_2 & 1-Y_1 \end{vmatrix} = Y_2(1-Y_1) + Y_1 \cdot Y_2 = Y_2$$

Σε αυτό το σημείο θα υπολογίσουμε την από κοινού κατανομή των τυχαίων μεταβλητών X_1, X_2. Δεδομένου ότι, αυτές είναι ανεξάρτητες η από κοινού πυκνότητα πιθανότητας δίνεται από την ακόλουθη σχέση,

$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2) \Rightarrow$

$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)\cdot 2^\alpha} \cdot x_1^{\alpha-1} \cdot e^{-\frac{x_1}{2}} \cdot \dfrac{1}{\Gamma(\beta)\cdot 2^\beta} \cdot x_2^{\beta-1} \cdot e^{-\frac{x_2}{2}} \Rightarrow$

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)\cdot 2^{\alpha+\beta}}\cdot x_1^{\alpha-1}\cdot x_2^{\beta-1}\cdot e^{-\frac{x_1+x_2}{2}} \qquad \text{με, } x_1,x_2>0.$$

Έτσι, η από κοινού πυκνότητα των μεταβλητών Y_1, Y_2 γίνεται,

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) = f_{X_1,X_2}(y_1\cdot y_2, y_2(1-y_1))\cdot|J| \Rightarrow$$

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)\cdot 2^{\alpha+\beta}}\cdot(y_1\cdot y_2)^{\alpha-1}\cdot[y_2(1-y_1)]^{\beta-1}\cdot e^{-\frac{y_1\cdot y_2+y_2(1-y_1)}{2}}\cdot y_2 \Rightarrow$$

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)\cdot 2^{\alpha+\beta}}\cdot y_1^{\alpha-1}\cdot(1-y_1)^{\beta-1}\cdot y_2^{\alpha+\beta-1}\cdot e^{-\frac{y_2}{2}}$$

με, $0<y_1<1$ γιατί, $(y_1 = \frac{x_1}{x_1+x_2} \Rightarrow x_1 < x_1+x_2)$ και $y_2>0$.

Αφού βρήκαμε την από κοινού κατανομή των Y_1, Y_2 το μόνο που απομένει για να βρούμε την περιθώρια πυκνότητα της Y_1 είναι να ολοκληρώσουμε την τελευταία σχέση. Έχουμε λοιπόν ότι,

$$f_{Y_1}(y_1) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)\cdot 2^{\alpha+\beta}}\cdot y_1^{\alpha-1}\cdot(1-y_1)^{\beta-1}\cdot\int_0^{+\infty} y_2^{\alpha+\beta-1}\cdot e^{-\frac{y_2}{2}}dy_2 \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{c} f_{Y_1}(y_1) = \dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)}\cdot y_1^{\alpha-1}\cdot(1-y_1)^{\beta-1}\cdot\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)\cdot 2^{\alpha+\beta}}\cdot y_2^{\alpha+\beta-1}\cdot e^{-\frac{y_2}{2}}dy_2 \\ \int_0^{+\infty}\dfrac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)\cdot 2^{\alpha+\beta}}\cdot y_2^{\alpha+\beta-1}\cdot e^{-\frac{y_2}{2}}dy_2 = 1 \end{array}\right\}\Rightarrow$$

(η ολοκληρώσιμη ποσότητα ολοκληρώνει στη μονάδα γιατί, αποτελεί συνάρτηση πυκνότητας τυχαίας μεταβλητής από κατανομή $Gamma(\alpha+\beta,2)$)

$$\Rightarrow f_{Y_1}(y_1) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)}\cdot y_1^{\alpha-1}\cdot(1-y_1)^{\beta-1} \Rightarrow$$

$$f_{Y_1}(y_1) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)}\cdot y_1^{\alpha-1}\cdot(1-y_1)^{\beta-1}.$$

Άρα, αποδείξαμε ότι η τυχαία μεταβλητή $Y_1 \sim B(\alpha,\beta)$. Στην περίπτωσή μας, οι μεταβλητές X_1, X_2 είναι οι $T^2|K \sim X^2_{p+2k} \equiv Gamma(p/2+k,2)$ και $S^2 \sim \sigma^2 X_n^2 \equiv Gamma(n/2,2)$ αντίστοιχα.

Κατ' αρχήν, επιβάλλεται οι μεταβλητές $T^2|K$ και $S^2|K$ να πληρούν τις προϋποθέσεις του θεωρήματος αντίστροφου μετασχηματισμού. Ουσιαστικά, αρκεί να δείξουμε ότι, $T^2|K$ και S^2 είναι ανεξάρτητες δεδομένου ότι, S^2, K ανεξάρτητες. Όμως, από τον ορισμό των T^2, S^2 ισχύει το ζητούμενο, γεγονός που μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι, η τυχαία μεταβλητή $Z^2 = \dfrac{T^2}{T^2 + S^2}|K \sim B(\frac{p}{2} + k, \frac{n}{2})$.

Απόδειξη 4.

Στόχος μας είναι να αποδείξουμε ότι, οι τυχαίες μεταβλητές $Z^2|K$ και $T^2 + S^2|K$ είναι ανεξάρτητες με τη βοήθεια του θεωρήματος του Basu, (Θεώρημα 1.4.2). Ειδικότερα, αναζητάμε μία επαρκή και πλήρη στατιστική συνάρτηση και μία δεύτερη στατιστική συνάρτηση της οποίας η κατανομή δεν εξαρτάται από την άγνωστη παράμετρο. Γνωρίζουμε ότι, $Z^2|K \sim B(\frac{p}{2} + k, \frac{n}{2})$. Επίσης, εξ' ορισμού του δείγματος η $(S^2, \underset{\sim}{X}_2)$ είναι επαρκής και πλήρης στατιστική συνάρτηση όμως, $\underset{\sim}{X}_2 = (X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots, X_{n+p})$ και $T^2 = \sum\limits_{i=n+1}^{n+p} X_i^2 \sim \sigma^2 X_p^2(\eta)$ οπότε, (S^2, T^2) επαρκής και πλήρης στατιστική συνάρτηση για την ποσότητα $(\sigma^2, \underset{\sim}{\mu})$. Εν κατακλείδι έχουμε ότι, η $T^2 + S^2|K$ είναι επαρκής και πλήρης και ότι η κατανομή της $Z^2|K$ δεν εξαρτάται από την άγνωστη παράμετρο $(\sigma^2, \underset{\sim}{\mu})$. Άρα, πληρούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του Basu και οι τυχαίες μεταβλητές $Z^2|K$ και $T^2 + S^2|K$ είναι ανεξάρτητες.

Κεφάλαιο 3

Διάστημα Εμπιστοσύνης τύπου Stein

Στο κεφάλαιο αυτό θεωρούμε ως δεδομένα τα δύο τυχαία διανύσματα, $\underset{\sim}{X}_1 = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ και $\underset{\sim}{X}_2 = (X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots, X_{n+p})$ που ακολουθούν πολυδιάστατες κανονικές κατανομές, $\underset{\sim}{X}_1 \sim MVN_n(\underset{\sim}{0}, \sigma^2)$, $\underset{\sim}{X}_2 \sim MVN_p(\underset{\sim}{\mu}, \sigma^2)$, με $\underset{\sim}{\mu} = (\mu_{n+1}, \mu_{n+2}, \ldots, \mu_{n+p})$ το διάνυσμα των μέσων και προσπαθούμε να κατασκευάσουμε ένα βελτιωμένο, ως προς την πιθανότητα κάλυψης, δ.ε. από αυτό της μορφής, $I_0 = \left(\frac{S^2}{c_2}, \frac{S^2}{c_1}\right)$, $S^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2$, για την διασπορά της κανονικής κατανομής, που δόθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Υπολογίζεται ότι μία επαρκής και πλήρης στατιστική συνάρτηση για την παράμετρο $(\sigma^2, \underset{\sim}{\mu})$ είναι η $(S^2, \underset{\sim}{X}_2)$, οπότε αν θέλουμε να παράγουμε ένα καλύτερο δ.ε. από το I_0, για το σ^2, θα πρέπει να λάβουμε υπ' όψιν μας και τα δεδομένα από το $\underset{\sim}{X}_2$. Για τον σκοπό αυτό θεωρούμε δ.ε. της μορφής $I_\varphi(S^2, Z^2) = (\varphi_s(Z^2)S^2, (\varphi_s(Z^2) + c)S^2)$, όπου $Z^2 = \frac{T^2}{T^2 + S^2}$, $T^2 = \sum\limits_{i=n+1}^{n+p} X_i^2$, $c = \frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_1}$ και φ είναι μία θετική συνάρτηση συνάρτηση του Z^2. Σκοπός μας, λοιπόν, είναι να μεγιστοποιήσουμε την πιθανότητα κάλυψης $P(\sigma^2 \in I_\varphi)$ ως προς τη θετική συνάρτηση $\varphi(\cdot)$. Η διαδικασία που θα ακολουθήσουμε είναι αντίστοιχη με την μεθοδολογία εύρεσης του εκτιμητή τύπου Stein(1964) και γι' αυτό τα διαστήματα εμπιστοσύνης που πρόκειται να παραχθούν ονομάζονται δ.ε. τύπου Stein. Τα αποτελέσματα αυτού του κεφαλαίου δίνονται στην εργασία του Shorrock(1990).

3.1 Κατασκευή δ.ε. τύπου Stein

Όπως αναφέραμε και προηγουμένως, επιθυμούμε να μεγιστοποιήσουμε ως προς $\varphi(\cdot)$ την $P(\sigma^2 \in I_\varphi) = P(\varphi S^2 \leq \sigma^2 \leq (\varphi + c)S^2)$. Για να περιορίσουμε το πρόβλημα θεώρησης μη κεντρικών X^2 κατανομών, χρησιμοποιούμε τα αποτελέσματα της Παραγράφου 2.3, οπότε το πρόβλημα ανάγεται σε αυτό της μεγιστοποίησης ως προς $\varphi(\cdot)$ της δεσμευμένης πιθανότητας κάλυψης, $P(\varphi S^2 \leq \sigma^2 \leq (\varphi + c)S^2 | Z^2 = z^2, K = k)$.

Πρόταση 3.1.1. *Θεωρούμε την συνάρτηση $\varphi = \varphi(z^2)$ η οποία μεγιστοποιεί την δεσμευμένη πιθανότητα κάλυψης, $P(\varphi S^2 \leq \sigma^2 \leq (\varphi + c)S^2 | Z^2 = z^2, K = k)$. Αυτή η πιθανότητα κάλυψης είναι ανάλογη του ολοκληρώματος $\int_\varphi^{\varphi+c} f_{n+p+2k+4}\left(\frac{1}{1-z^2} \cdot \frac{1}{y}\right) dy$, δηλαδή*

$$P(\varphi S^2 \leq \sigma^2 \leq (\varphi + c)S^2 | Z^2 = z^2, K = k) \propto \int_\varphi^{\varphi+c} f_{n+p+2k+4}\left(\frac{1}{1-z^2} \cdot \frac{1}{y}\right) dy. \tag{3.1}$$

Απόδειξη

Στόχος μας είναι να μεγιστοποιήσουμε την πιθανότητα κάλυψης, $P(\varphi S^2 \leq \sigma^2 \leq (\varphi + c)S^2) = P(\varphi S^2 \leq \sigma^2 \leq (\varphi + c)S^2 | Z^2 = z^2, K = k) \cdot P(Z^2 = z^2, K = k)$. Δηλαδή, αρκεί να μεγιστοποιήσουμε την $P(\varphi S^2 \leq \sigma^2 \leq (\varphi + c)S^2 | Z^2 = z^2, K = k)$. Από την Πρόταση 2.3.3, $(T^2 + S^2)|K \sim X^2_{n+p+2k}$ και $Z^2|K \sim B(\frac{p}{2} + k, \frac{n}{2})$.

Επίσης,

$$S^2 = S^2 + T^2 - T^2 = (T^2 + S^2)\left(1 - \frac{T^2}{T^2 + S^2}\right) = (T^2 + S^2)(1 - Z^2) \tag{3.2}$$

Οπότε, η πιθανότητα κάλυψης γίνεται,

$P(\varphi S^2 \leq \sigma^2 \leq (\varphi + c)S^2 | Z^2 = z^2, K = k) =$

$P(\frac{1}{\varphi + c} \leq \frac{S^2}{\sigma^2} \leq \frac{1}{\varphi} | Z^2 = z^2, K = k) \overset{(3.2)}{=}$

$$P(\frac{1}{\varphi + c} \leq \frac{(T^2 + S^2)(1 - Z^2)}{\sigma^2} \leq \frac{1}{\varphi} | Z^2 = z^2, K = k) =$$

$$P(\frac{1}{(\varphi + c)(1 - z^2)} \leq \frac{T^2 + S^2}{\sigma^2} \leq \frac{1}{\varphi(1 - z^2)} | Z^2 = z^2, K = k) \Rightarrow$$

$$P(\varphi S^2 \leq \sigma^2 \leq (\varphi + c)S^2 | Z^2 = z^2, K = k) = \int_{\frac{1}{(\varphi+c)(1-z^2)}}^{\frac{1}{\varphi(1-z^2)}} \frac{1}{\Gamma(\frac{n+p+2k}{2}) \cdot 2^{\frac{n+p+2k}{2}}} \cdot x^{\frac{n+p+2k}{2} - 1} \cdot e^{-\frac{x}{2}} dx \tag{3.3}$$

Σε αυτό το σημείο κάνουμε μία αλλαγή μεταβλητής και θέτουμε, $x = \frac{1}{1 - z^2} \cdot \frac{1}{y} \quad \Rightarrow$ $dx = -\frac{1}{1 - z^2} \cdot \frac{1}{y^2} \cdot dy$ τότε αν, $x \rightarrow \frac{1}{(\varphi + c)(1 - z^2)} \quad \Rightarrow y \rightarrow \varphi + c$ και αν, $x \rightarrow \frac{1}{\varphi(1 - z^2)} \quad \Rightarrow$ $y \rightarrow \varphi$. Τώρα, θα δούμε πώς γίνεται η ολοκληρώσιμη ποσότητα μετά από την παραπάνω αλλαγή. Ξεκινάμε παίρνοντας τον κάθε όρο ξεχωριστά κι έχουμε,

- $x^{\frac{n+p+2k}{2} - 1} = \left(\frac{1}{1 - z^2}\right)^{\frac{n+p+2k}{2} - 1} \cdot \left(\frac{1}{y}\right)^{\frac{n+p+2k}{2} - 1}$

- $\frac{1}{1 - z^2} \cdot \frac{1}{y^2} \cdot x^{\frac{n+p+2k}{2} - 1} = \left(\frac{1}{1 - z^2}\right)^{\frac{n+p+2k}{2}} \cdot \left(\frac{1}{y}\right)^{\frac{n+p+2k}{2} + 1} =$

$$= \left(\frac{1}{1 - z^2}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{1}{1 - z^2} \cdot \frac{1}{y^2}\right)^{\frac{n+p+2k+4}{2} - 1} = (1 - z^2) \cdot \left(\frac{1}{1 - z^2} \cdot \frac{1}{y^2}\right)^{\frac{n+p+2k+4}{2} - 1}$$

- $2^{\frac{n + p + 2k}{2}} = 2^{\frac{n + p + 2k + 4}{2} - 2} = 2^{\frac{n + p + 2k + 4}{2}} \cdot 2^{-2} \Rightarrow \quad \frac{1}{2^{\frac{n+p+2k}{2}}} = \frac{2^2}{2^{\frac{n+p+2k+4}{2}}}$

- $e^{-\frac{x}{2}} = e^{-\frac{\frac{1}{1-z^2} \cdot \frac{1}{y^2}}{2}}$

- $\frac{1}{\Gamma(\frac{n+p+2k}{2})} = \frac{\frac{n+p+2k}{2} \cdot (\frac{n+p+2k}{2} + 1)}{\Gamma(\frac{n+p+2k}{2} + 2)} = \frac{A}{\Gamma(\frac{n+p+2k+4}{2})}$, όπου $A = \frac{n + p + 2k}{2} \cdot \left(\frac{n + p + 2k}{2} + 1\right)$

Μετά από όλα τα παραπάνω, η Σχέση (3.3) γίνεται,

$P(\varphi S^2 \leq \sigma^2 \leq (\varphi + c)S^2 | Z^2 = z^2, K = k) =$

$$= -\int_{\varphi+c}^{\varphi} A \cdot \frac{2^2}{\Gamma(\frac{n+p+2k+4}{2}) \cdot 2^{\frac{n+p+2k+4}{2}}} \cdot (1-z^2) \cdot \left(\frac{1}{1-z^2} \cdot \frac{1}{y^2}\right)^{\frac{n+p+2k+4}{2}-1} \cdot^{-\frac{\frac{1}{1-z^2} \cdot \frac{1}{y^2}}{2}} dy \Rightarrow$$

$P(\varphi S^2 \leq \sigma^2 \leq (\varphi + c)S^2 | Z^2 = z^2, K = k) =$

$$= A \cdot 2^2 \cdot (1-z^2) \int_{\varphi}^{\varphi+c} \frac{1}{\Gamma(\frac{n+p+2k+4}{2}) \cdot 2^{\frac{n+p+2k+4}{2}}} \cdot \left(\frac{1}{1-z^2} \cdot \frac{1}{y^2}\right)^{\frac{n+p+2k+4}{2}-1} \cdot^{-\frac{\frac{1}{1-z^2} \cdot \frac{1}{y^2}}{2}} dy \Rightarrow$$

$$P(\varphi S^2 \leq \sigma^2 \leq (\varphi + c)S^2 | Z^2 = z^2, K = k) \propto \int_{\varphi}^{\varphi+c} f_{n+p+2k+4}\left(\frac{1}{1-z^2} \cdot \frac{1}{y^2}\right) dy.$$

Συνεχίζουμε δίνοντας τη μορφή του διαστήματος εμπιστοσύνης τύπου Stein η οποία είναι,

$I_{\varphi}(S^2, Z^2) = (\varphi_s(Z^2)S^2, (\varphi_s(Z^2) + c)S^2)$ όπου, $\varphi_s(z^2) = min[\varphi(0, z^2), \frac{1}{c_2}]$. Στόχος μας είναι να αποδείξουμε ότι, το διάστημα $I_S(S^2, Z^2)$ έχει μεγαλύτερη πιθανότητα κάλυψης από το αρχικό δ.ε. $I_0 = (\frac{S^2}{c_2}, \frac{S^2}{c_1})$ χρησιμοποιώντας την Σχέση (3.1). Όλα αυτά θα διατυπωθούν καλύτερα σε ένα θεώρημα που θα αποδειχθεί παρακάτω. Προς το παρόν, θα αναφέρουμε ένα λήμμα το οποίο παίζει καθοριστικό ρόλο στην απόδειξη του θεωρήματος που αφορά την ζητούμενη πιθανότητα κάλυψης.

Λήμμα 3.1.1. Θεωρούμε δύο μονοκόρυφες πυκνότητες f, g κι έστω ότι, η $\varphi = \varphi_f$ μεγιστοποιεί την $\int_{\varphi}^{\varphi+c} f(x)dx$ και ότι, η $\varphi = \varphi_g$ μεγιστοποιεί την $\int_{\varphi}^{\varphi+c} g(x)dx$. Τότε, αν η f/g είναι αύξουσα συνάρτηση προκύπτει πως, $\varphi_f > \varphi_g$.

Απόδειξη

Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(\varphi) = \int_{\varphi}^{\varphi+c} f(x)dx$ η οποία, παρουσιάζει μέγιστο στο σημείο $\varphi = \varphi_f$. Συνεπώς, ισχύει ότι, $\frac{d}{d\varphi}F(\varphi)|_{\varphi=\varphi_f} = 0 \Leftrightarrow f(\varphi_f + c) - f(\varphi_f) = 0 \Leftrightarrow$

$$f(\varphi_f + c) = f(\varphi_f) \tag{3.4}$$

Αν $\varphi^* < \varphi_f$, τότε $\frac{d}{d\varphi}F(\varphi)|_{\varphi=\varphi^*} > 0 \Leftrightarrow f(\varphi^*+c) > f(\varphi^*)$

και αν $\varphi^* > \varphi_f$, τότε $\frac{d}{d\varphi}F(\varphi)|_{\varphi=\varphi^*} < 0 \Leftrightarrow f(\varphi^*+c) - f(\varphi^*) < 0 \Rightarrow f(\varphi^*+c) < f(\varphi^*)$

θεωρούμε τη συνάρτηση $G(\varphi) = \int_{\varphi}^{\varphi+c} g(x)dx$ η οποία, παρουσιάζει μέγιστο στο σημείο $\varphi = \varphi_g$, ισχύει ότι, $\frac{d}{d\varphi}G(\varphi)|_{\varphi=\varphi_g} = 0 \Leftrightarrow g(\varphi_g+c) - g(\varphi_g) = 0$

$$g(\varphi_g+c) = g(\varphi_g) \tag{3.5}$$

Αντίστοιχα, αν $\varphi^* < \varphi_g$ τότε, $g(\varphi^*+c) > g(\varphi^*)$ και αν

$$\varphi^* > \varphi_g \Rightarrow g(\varphi^*+c) < g(\varphi^*) \tag{3.6}$$

Διαιρούμε κατά μέλη τις Σχέσεις (3.4) και (3.5) κι έχουμε ότι,

$$\frac{f(\varphi_f+c)}{g(\varphi_g+c)} = \frac{f(\varphi_f)}{g(\varphi_g)} \Rightarrow \frac{f(\varphi_f+c)}{g(\varphi_f+c)} \cdot \frac{g(\varphi_f+c)}{g(\varphi_g+c)} = \frac{f(\varphi_f)}{g(\varphi_g)} \overset{f/g\nearrow\varphi}{\Longrightarrow}$$
$$\frac{f(\varphi_f)}{g(\varphi_f)} \cdot \frac{g(\varphi_f+c)}{g(\varphi_g+c)} < \frac{f(\varphi_f)}{g(\varphi_g)} \overset{(3.5)}{\Longrightarrow} g(\varphi_f+c) < g(\varphi_f)$$

Οπότε, από τη Σχέση (3.6) καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι, $\varphi_f > \varphi_g$.

Παρατήρηση 3.1.1. Σημειώνουμε ότι, επειδή η ολοκληρωτέα ποσότητα $f_{n+p+2k+4}\left(\frac{1}{1-z^2}\cdot\frac{1}{y}\right)$ αποτελεί μονοκόρυφη συνάρτηση του y (παρουσιάζει δηλαδή, τοπικό μέγιστο ως προς y) η συνάρτηση $\varphi = \varphi(k, z^2)$ είναι μοναδική λύση της εξίσωσης, $f_{n+p+2k+4}\left(\frac{1}{1-z^2}\cdot\frac{1}{\varphi}\right) = f_{n+p+2k+4}\left(\frac{1}{1-z^2}\cdot\frac{1}{\varphi+c}\right)$.

Θεώρημα 3.1.1. *Η πιθανότητα κάλυψης του διαστήματος* $I_\varphi(S^2, Z^2) = (\varphi_s(Z^2)S^2, (\varphi_s(Z^2)+c)S^2)$ *είναι ομοιόμορφα μεγαλύτερη από αυτή του κλασικού διαστήματος εμπιστοσύνης* $I_0 = (\frac{S^2}{c_2}, \frac{S^2}{c_1})$*, για όλες τις τιμές της παραμέτρου μη κεντρικότητας* $\eta = \dfrac{\|\underset{\sim}{\mu}\|^2}{\sigma^2}$.

Απόδειξη

Για να αποδείξουμε το παραπάνω θεώρημα θα χρησιμοποιήσουμε το Λήμμα 3.1.1 και ειδικότερα, θα αξιοποιήσουμε την συνάρτηση φ. Έχουμε λοιπόν ότι, η συνάρτηση $\varphi(0, z^2)$ μεγιστοποιεί το ολοκλήρωμα $\int_{\varphi(0,z^2)}^{\varphi(0,z^2)+c} f_{n+p+4}\left(\dfrac{1}{1-z^2} \cdot \dfrac{1}{y}\right) dy$ και ότι η συνάρτηση $\varphi(k, z^2)$ μεγιστοποιεί το ολοκλήρωμα $\int_{\varphi(k,z^2)}^{\varphi(k,z^2)+c} f_{n+p+2k+4}\left(\dfrac{1}{1-z^2} \cdot \dfrac{1}{y}\right) dy$ και θα δείξουμε ότι, το πηλίκο $\dfrac{f_{n+p+4}(x)}{f_{n+p+2k+4}(x)}$ είναι φθίνουσα συνάρτηση του x με, $x = \dfrac{1}{1-z^2} \cdot \dfrac{1}{y}$.

Έχουμε ότι,

$$\frac{f_{n+p+4}(x)}{f_{n+p+2k+4}(x)} = \frac{\frac{1}{\Gamma(\frac{n+p+4}{2}) \cdot 2^{\frac{n+p+4}{2}}} \cdot x^{\frac{n+p+4}{2}-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}}}{\frac{1}{\Gamma(\frac{n+p+2k+4}{2}) \cdot 2^{\frac{n+p+2k+4}{2}}} \cdot x^{\frac{n+p+2k+4}{2}-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}}} = \frac{\Gamma(\frac{n+p+2k+4}{2})}{\Gamma(\frac{n+p+4}{2})} \cdot 2^k \cdot x^{-k} \quad \searrow x$$

Όμως, αφού $x = \dfrac{1}{1-z^2} \cdot \dfrac{1}{y}$ και $\dfrac{f_{n+p+4}(x)}{f_{n+p+2k+4}(x)} \searrow x$ προκύπτει ότι,

$$\frac{f_{n+p+4}(\frac{1}{1-z^2} \cdot \frac{1}{y})}{f_{n+p+2k+4}(\frac{1}{1-z^2} \cdot \frac{1}{y})} = \frac{\Gamma(\frac{n+p+2k+4}{2})}{\Gamma(\frac{n+p+4}{2})} \cdot [2 \cdot (1-z^2)]^k \cdot y^k \quad \nearrow y$$

Οπότε, από το Λήμμα 3.1.1 προκύπτει ότι, $\varphi(0, z^2) > \varphi(k, z^2)$.

Επιπλέον, η συνάρτηση $\varphi = \frac{1}{c_2}$ μεγιστοποιεί το ολοκλήρωμα $\int_{\frac{1}{c_2}}^{\frac{1}{c_2}+c} f_{n+4}(\frac{1}{y})dy$ και η συνάρτηση $\varphi(0,0)$ μεγιστοποιεί το ολοκλήρωμα $\int_{\varphi(0,0)}^{\varphi(0,0)+c} f_{n+p+4}(\frac{1}{y})dy$. Αρκεί να δείξουμε ότι, το πηλίκο $\dfrac{f_{n+4}(x)}{f_{n+p+4}(x)}$ είναι φθίνουσα συνάρτηση του x με, $x = \frac{1}{y}$. Έχουμε,

$$\frac{f_{n+4}(x)}{f_{n+p+4}(x)} = \frac{\frac{1}{\Gamma(\frac{n+4}{2})\cdot 2^{\frac{n+4}{2}}} \cdot x^{\frac{n+4}{2}-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}}}{\frac{1}{\Gamma(\frac{n+p+4}{2})\cdot 2^{\frac{n+p+4}{2}}} \cdot x^{\frac{n+p+4}{2}-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}}} = \frac{\Gamma(\frac{n+p+4}{2})}{\Gamma(\frac{n+4}{2})} \cdot 2^{\frac{p}{2}} \cdot x^{-\frac{p}{2}} \quad \searrow x$$

Όμως, αφού $x = \frac{1}{y}$ και $\dfrac{f_{n+4}(x)}{f_{n+p+4}(x)} \searrow x$ προκύπτει ότι,

$$\frac{f_{n+4}(\frac{1}{y})}{f_{n+p+4}(\frac{1}{y})} = \frac{\Gamma(\frac{n+p+4}{2})}{\Gamma(\frac{n+4}{2})} \cdot 2^{\frac{p}{2}} \cdot y^{\frac{p}{2}} \quad \nearrow y$$

Οπότε, από το Λήμμα 3.1.1 προκύπτει ότι, $\dfrac{1}{c_2} > \varphi(0,0)$. Από την άλλη η συνάρτηση φ είναι συνεχής ως προς z^2 κάτι που συνεπάγεται ότι, $\dfrac{1}{c_2} > \varphi(0,z^2)$ για, κάποιες τιμές του z^2 που βρίσκονται σε ένα διάστημα κοντά στο 0^+.

Έτσι έχουμε ότι, $\left.\begin{array}{c} \varphi(k,z^2) < \varphi(0,z^2) \\ \varphi(0,z^2) < \frac{1}{c_2} \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi(k,z^2) < \varphi(0,z^2) < \dfrac{1}{c_2}$

Παρατήρηση 3.1.2. Σε αυτό το σημείο τονίζουμε πως, ήταν απαραίτητη η χρήση του $\varphi(0,0)$ γιατί ήταν αδύνατη η απευθείας σύγκριση των τιμών $\varphi(0,z^2)$ και $\dfrac{1}{c_2}$. Ειδικότερα, αξιοποιώντας πάλι το Λήμμα 3.1.1 δεν ήταν δυνατό να προκύψει κάποιο συμπέρασμα όσον αφορά στην μονοτονία του πηλίκου που έπρεπε να μελετηθεί και κατ΄ επέκταση όσον αφορά στην διάταξη των τιμών της φ .

Καταφέραμε δηλαδή, να δημιουργήσουμε μία μορφή διάταξης παρεμβάλλοντας μία νέα τιμή η οποία,θα αξιοποιηθεί για την σύγκριση των πιθανοτήτων κάλυψης των αντίστοιχων διαστημάτων εμπιστοσύνης. Επειδή όμως, από την Παρατήρηση 3.1.1 βλέπουμε πως η πυκνότητα $f_{n+p+2k+4}\left(\dfrac{1}{1-z^2}\cdot\dfrac{1}{y}\right)$ είναι μονοκόρυφη, δεδομένης της προαναφερθείσας διάταξης για τις αντίστοιχες πιθανότητες ισχύει το εξής,

$$P_{\varphi(0,z^2)<\frac{1}{c_2}}(\sigma^2 \in I_{\varphi(0,z^2)}) > P(\sigma^2 \in I_0). \tag{3.7}$$

Επιπρόσθετα, η πιθανότητα κάλυψης δίνεται από τη Σχέση (3.1)

$$P(\varphi S^2 \leq \sigma^2 \leq (\varphi + c)S^2 | Z^2 = z^2, K = k) \propto \int_{\varphi}^{\varphi+c} f_{n+p+2k+4}\left(\frac{1}{1-z^2} \cdot \frac{1}{y}\right) dy.$$

και πλέον έχουμε ότι,

$$P(\sigma^2 \in I_s) = P_{\varphi(0,z^2)<\frac{1}{c_2}}(\sigma^2 \in I_{\varphi(0,z^2)}) + P_{\frac{1}{c_2}<\varphi(0,z^2)}(\sigma^2 \in I_0) \overset{(3.7)}{\Longrightarrow}$$

$$P(\sigma^2 \in I_s) > P_{\varphi(0,z^2)<\frac{1}{c_2}}(\sigma^2 \in I_0) + P_{\frac{1}{c_2}<\varphi(0,z^2)}(\sigma^2 \in I_0) \Rightarrow$$

$$P(\sigma^2 \in I_s) > P(\sigma^2 \in I_0).$$

Συμπέρασμα 3.1.1. Από το παραπάνω θεώρημα διαπιστώνουμε και επιβεβαιωμένα πλέον ότι, αυτό που ονομάζουμε διάστημα εμπιστοσύνης τύπου Stein(1964) έχει πράγματι μεγαλύτερη πιθανότητα κάλυψης από το κλασικό διάστημα εμπιστοσύνης $I_0 = (\frac{S^2}{c_2}, \frac{S^2}{c_1})$, της παραμέτρου σ^2.

Κεφάλαιο 4

Γενικευμένο Διάστημα Εμπιστοσύνης Bayes

Στο κεφάλαιο αυτό θωρούμε, πάλι, το μοντέλο του Κεφαλαίου 3, δηλαδή θεωρούμε τα δεδομένα $\underset{\sim}{X}_1 = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$, $\underset{\sim}{X}_2 = (X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots, X_{n+p})$ που ακολουθούν πολυδιάστατες κανονικές κατανομές, $\underset{\sim}{X}_1 \sim MVN_n(\underset{\sim}{0}, \sigma^2 I_n)$ και $\underset{\sim}{X}_2 \sim MVN_p(\underset{\sim}{\mu}, \sigma^2 I_p)$, με $\underset{\sim}{\mu} = (\mu_{n+1}, \mu_{n+2}, \ldots, \mu_{n+p})$ το διάνυσμα των μέσων και προσπαθούμε να κατασκευάσουμε ένα βελτιωμένο δ.ε. από αυτό της μορφής, $I_0 = \left(\frac{S^2}{c_2}, \frac{S^2}{c_1}\right)$, $S^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$. Όπως και στο προηγούμενο κεφάλαιο, χρησιμοποιούμε διαστήματα της μορφής $I_\varphi(S^2, Z^2) = (\varphi_s(Z^2)S^2, (\varphi_s(Z^2) + c)S^2)$ όπου $Z^2 = \frac{T^2}{T^2 + S^2}$, $T^2 = \sum_{i=n+1}^{n+p} X_i^2$, $c = \frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_1}$ και φ είναι μία θετική συνάρτηση συνάρτηση του Z^2 κι επιλέγουμε εκείνο το διάστημα I_φ το οποίο μεγιστοποιεί την πιθανότητα κάλυψης $P(\sigma^2 \in I_\varphi)$, με τη διαφορά ότι για να αποφύγουμε τις μη κεντρικές X^2 κατανομές μεγιστοποιούμε, ως προς $\varphi(\cdot)$, την ακόλουθη δεσμευμένη πιθανότητα κάλυψης $P(\varphi S^2 \leq \sigma^2 \leq (\varphi + c)S^2 | Z^2 \leq r, K = 0)$. Επειδή η μεθοδολογία, που μας οδηγεί στο επιθυμητό δ.ε. , είναι ανάλογη με την μέθοδο εύρεσης εκτιμητών τύπου Brown(1968) γι' αυτό και το δ.ε. που παράγεται ονομάζεται διάστημα εμπιστοσύνης τύπου Brown.

Ακολούθως, και σε αναλογία με την μεθοδολογία εύρεσης εκτιμητών τύπου Brewster and Zidek(1974), γενικεύουμε το παραπάνω αποτέλεσμα κατασκευάζοντας δ.ε. τύπου Brewster and Zidek, το οποίο αποδεικνύεται ότι συμπίπτει με ένα συγκεκριμένο γενικευμένο διάστημα εμπιστοσύνης Bayes. Τα αποτελέσματα αυτού του καφαλαίου βρίσκονται στην εργασία του Shorrock(1990).

4.1 Δ.ε. τύπου Brown

Πρόταση 4.1.1. *Θεωρούμε την συνάρτηση $\varphi = \varphi_0(r)$ η οποία μεγιστοποιεί την πιθανότητα κάλυψης $P(\varphi S^2 \leq \sigma^2 \leq (\varphi+c)S^2 | Z^2 \leq r, K=0)$, για όλες τις τιμές του r, $\quad 0<r<1$. Αυτή η πιθανότητα είναι ανάλογη του ολοκληρώματος $\int_{\varphi}^{\varphi+c} f_{n+4}\left(\frac{1}{y}\right) \cdot F_p\left(\frac{r}{1-r}\cdot\frac{1}{y}\right) dy$, δηλαδή*

$$P(\varphi S^2 \leq \sigma^2 \leq (\varphi+c)S^2 | Z^2 \leq r, K=0) \propto \int_{\varphi}^{\varphi+c} f_{n+4}\left(\frac{1}{y}\right) \cdot F_p\left(\frac{r}{1-r}\cdot\frac{1}{y}\right) dy. \tag{4.1}$$

Απόδειξη

Στόχος μας είναι να μεγιστοποιήσουμε την πιθανότητα κάλυψης,

$P(\varphi S^2 \leq \sigma^2 \leq (\varphi+c)S^2) = P(\varphi S^2 \leq \sigma^2 \leq (\varphi+c)S^2 | Z^2 \leq r, K=0)\cdot P(Z^2 \leq r, K=0)$. Δηλαδή, αρκεί να μεγιστοποιήσουμε την $P(\varphi S^2 \leq \sigma^2 \leq (\varphi+c)S^2 | Z^2 \leq r, K=0)$. Από την Πρόταση 2.3.3, $(T^2+S^2)|K \sim X^2_{n+p+2k}$ και $Z^2|K \sim B(\frac{p}{2}+k, \frac{n}{2})$ εδώ όμως, που δεσμεύουμε ως προς K δίνοντας την τιμή $k=0$ προκύπτει ότι, $(T^2+S^2)|K \sim X^2_{n+p}$ και $Z^2|K \sim B(\frac{p}{2}, \frac{n}{2})$

Επίσης,

$$S^2 = S^2 + T^2 - T^2 = (T^2+S^2)\left(1 - \frac{T^2}{T^2+S^2}\right) = (T^2+S^2)(1-Z^2) \tag{4.2}$$

Οπότε, η δεσμευμένη πιθανότητα κάλυψης γίνεται,

$$P(\varphi S^2 \leq \sigma^2 \leq (\varphi+c)S^2 | Z^2 \leq r, K=0) = P(\frac{1}{\varphi+c} \leq \frac{S^2}{\sigma^2} \leq \frac{1}{\varphi} | Z^2 \leq r, K=0) \overset{(4.2)}{=}$$

$$P(\frac{1}{\varphi+c} \leq \frac{(T^2+S^2)(1-Z^2)}{\sigma^2} \leq \frac{1}{\varphi} | Z^2 \leq r, K=0) =$$

$$P(\frac{1}{(\varphi+c)(1-z^2)} \leq \frac{T^2+S^2}{\sigma^2} \leq \frac{1}{\varphi(1-z^2)} | Z^2 \leq r, K=0) \overset{z^2=u}{=} \int_0^r \int_{\frac{1}{(\varphi+c)(1-u)}}^{\frac{1}{\varphi(1-u)}} f_{n+p}(x) g(u) dx du \Rightarrow$$

$$P(\varphi S^2 \leq \sigma^2 \leq (\varphi+c)S^2 | Z^2 \leq r, K=0) =$$

$$= \int_0^r \int_{\frac{1}{(\varphi+c)(1-u)}}^{\frac{1}{\varphi(1-u)}} \frac{1}{\Gamma(\frac{n+p}{2}) \cdot 2^{\frac{n+p}{2}}} \cdot x^{\frac{n+p}{2}-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{B(p/2, n/2)} \cdot u^{p/2-1} \cdot (1-u)^{n/2-1} dx du \qquad (4.3)$$

Σε αυτό το σημείο κάνουμε μία αλλαγή μεταβλητής και θέτουμε, $x = \frac{1}{1-u} \cdot \frac{1}{y} \quad \Rightarrow$ $dx = -\frac{1}{1-u} \cdot \frac{1}{y^2} \cdot dy$, τότε αν $x \to \frac{1}{(\varphi+c)(1-u)} \quad \Rightarrow y \to \varphi + c$ και αν, $x \to \frac{1}{\varphi(1-u)} \quad \Rightarrow$ $y \to \varphi$. Τώρα, θα δούμε πώς γίνεται η ολοκληρώσιμη ποσότητα μετά από την παραπάνω αλλαγή. Ξεκινάμε παίρνοντας τον κάθε όρο ξεχωριστά κι έχουμε,

◇ $x^{\frac{n+p}{2}-1} = \left(\frac{1}{1-u}\right)^{\frac{n+p}{2}-1} \cdot \left(\frac{1}{y}\right)^{\frac{n+p}{2}-1}$

◇ $\frac{1}{1-u} \cdot \frac{1}{y^2} \cdot x^{\frac{n+p}{2}-1} = \left(\frac{1}{1-u}\right)^{\frac{n+p}{2}} \cdot \left(\frac{1}{y}\right)^{\frac{n+p}{2}+1}$

◇ $\left(\frac{1}{1-u}\right)^{\frac{n+p}{2}} \cdot u^{p/2-1} \cdot (1-u)^{n/2-1} = u^{p/2-1} \cdot \left(\frac{1}{1-u}\right)^{\frac{n+p}{2}-\frac{n}{2}+1} = u^{p/2-1} \cdot \left(\frac{1}{1-u}\right)^{p/2-1+2} =$ $\left(\frac{u}{1-u}\right)^{p/2-1} \cdot \left(\frac{1}{1-u}\right)^2$

◇ $\left(\frac{1}{y}\right)^{\frac{n+p}{2}+1} = \left(\frac{1}{y}\right)^{\frac{n}{2}+2} \cdot \left(\frac{1}{y}\right)^{\frac{p}{2}-1} = \left(\frac{1}{y}\right)^{\frac{n+4}{2}-1} \cdot \left(\frac{1}{y}\right)^{p/2-1} \cdot \frac{1}{y}$

◇ $e^{-\frac{x}{2}} = e^{-\frac{\frac{1}{y} \cdot \frac{1}{1-u}}{2}} = e^{-\frac{1}{y} \cdot \frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{1}{y} \cdot \frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{y} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-u}} = e^{-\frac{\frac{1}{y}}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{y} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(-1 + \frac{1}{1-u}\right)} = e^{-\frac{\frac{1}{y}}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{y} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{u}{1-u}} = e^{-\frac{\frac{1}{y}}{2}} \cdot e^{-\frac{\frac{u}{1-u} \cdot \frac{1}{y}}{2}}$

Γνωρίζουμε ότι, $B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha) \cdot \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$ οπότε,

$$\diamond \quad \frac{1}{\Gamma(\frac{n+p}{2})\cdot 2^{\frac{n+p}{2}}}\cdot\frac{1}{B(p/2,n/2)} = \frac{1}{\Gamma(\frac{n+p}{2})\cdot 2^{\frac{n+p}{2}}}\cdot\frac{\Gamma(\frac{n+p}{2})}{\Gamma(p/2)\cdot\Gamma(n/2)} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n/2)\cdot 2^{n/2}}\cdot\frac{1}{\Gamma(p/2)\cdot 2^{p/2}} = \frac{n/2\cdot(n/2+1)\cdot 2^2}{\Gamma(\frac{n+4}{2})\cdot 2^{\frac{n+4}{2}}}\cdot\frac{1}{\Gamma(p/2)\cdot 2^{p/2}} =$$

$$= \frac{A}{\Gamma(\frac{n+4}{2})\cdot 2^{\frac{n+4}{2}}}\cdot\frac{1}{\Gamma(p/2)\cdot 2^{p/2}} \qquad \text{, όπου } A = n/2\cdot(n/2+1)\cdot 2^2 = n\cdot(n+2).$$

Μετά από όλα τα παραπάνω η Σχέση (4.3) γίνεται,

$$P(\varphi S^2 \le \sigma^2 \le (\varphi+c)S^2 | Z^2 \le r, K=0) =$$

$$= -\int_0^r\int_{\varphi+c}^{\varphi}\frac{A}{\Gamma(\frac{n+4}{2})\cdot 2^{\frac{n+4}{2}}}\cdot\left(\frac{1}{y}\right)^{\frac{n+4}{2}-1}\cdot e^{-\frac{\frac{1}{y}}{2}}\cdot\frac{1}{\Gamma(p/2)\cdot 2^{p/2}}\cdot\left(\frac{u}{1-u}\cdot\frac{1}{y}\right)^{p/2-1}\cdot e^{-\frac{\frac{u}{1-u}\cdot\frac{1}{y}}{2}}\cdot\left(\frac{1}{1-u}\right)^2\cdot \frac{1}{y}dydu \Rightarrow$$

$$P(\varphi S^2 \le \sigma^2 \le (\varphi+c)S^2 | Z^2 \le r, K=0) = \int_0^r\int_{\varphi}^{\varphi+c} A\cdot f_{n+4}\left(\frac{1}{y}\right)\cdot f_p\left(\frac{u}{1-u}\cdot\frac{1}{y}\right)\cdot\left(\frac{1}{1-u}\right)^2\cdot\frac{1}{y}\cdot dydu \Rightarrow$$

$$P(\varphi S^2 \le \sigma^2 \le (\varphi+c)S^2 | Z^2 \le r, K=0) = \int_0^r\int_{\varphi}^{\varphi+c} A\cdot f_{n+4}\left(\frac{1}{y}\right)\cdot f_p\left(\frac{u}{1-u}\cdot\frac{1}{y}\right) dy\cdot d\left(\frac{u}{1-u}\cdot\frac{1}{y}\right) \Rightarrow$$

$$P(\varphi S^2 \le \sigma^2 \le (\varphi+c)S^2 | Z^2 \le r, K=0) = \int_{\varphi}^{\varphi+c} A\cdot f_{n+4}\left(\frac{1}{y}\right) dy \int_0^{\frac{r}{1-r}\cdot\frac{1}{y}} f_p(w)dw \Rightarrow$$

$$P(\varphi S^2 \le \sigma^2 \le (\varphi+c)S^2 | Z^2 \le r, K=0) = A\cdot\int_{\varphi}^{\varphi+c} f_{n+4}\left(\frac{1}{y}\right)\cdot F_p\left(\frac{r}{1-r}\cdot\frac{1}{y}\right) dy \Rightarrow$$

$$P(\varphi S^2 \le \sigma^2 \le (\varphi+c)S^2 | Z^2 \le r, K=0) \propto \int_{\varphi}^{\varphi+c} f_{n+4}\left(\frac{1}{y}\right)\cdot F_p\left(\frac{r}{1-r}\cdot\frac{1}{y}\right) dy.$$

Συνεχίζουμε δίνοντας τη μορφή του διαστήματος εμπιστοσύνης τύπου Brown η οποία είναι,

$$I_1(S^2, Z^2; r) = \begin{cases} (S^2/c_2, S^2/c_1), & \text{αν} \quad Z^2 > r \\ (\varphi_0(r)S^2, (\varphi_0(r)+c)S^2), & \text{αν} \quad Z^2 \le r \end{cases}$$

Σημειώνουμε ότι, για $r = 1$ το παραπάνω διάστημα εμπιστοσύνης συμπίπτει με το κλασικό δ.ε. $(S^2/c_2, S^2/c_1)$. Στόχος μας είναι να αποδείξουμε ότι, το νέο αυτό διάστημα έχει μεγαλύτερη πιθανότητα κάλυψης από το αρχικό δ.ε. χρησιμοποιώντας τη Σχέση (4.1) και το Λήμμα 3.1.1.

Παρατήρηση 4.1.1. Σημειώνουμε ότι, επειδή η ολοκληρωτέα ποσότητα του παραπάνω ολοκληρώματος, $f_{n+4}\left(\frac{1}{y}\right) \cdot F_p\left(\frac{r}{1-r} \cdot \frac{1}{y}\right)$, αποτελεί μονοκόρυφη συνάρτηση του y (παρουσιάζει δηλαδή, τοπικό μέγιστο ως προς y) η συνάρτηση $\varphi = \varphi_0(r)$ είναι μοναδική λύση της εξίσωσης,

$$f_{n+4}\left(\frac{1}{\varphi}\right) \cdot F_p\left(\frac{r}{1-r} \cdot \frac{1}{\varphi}\right) = f_{n+4}\left(\frac{1}{\varphi+c}\right) \cdot F_p\left(\frac{r}{1-r} \cdot \frac{1}{\varphi+c}\right).$$

Θεώρημα 4.1.1. *Η πιθανότητα κάλυψης του διαστήματος $I_1(S^2, Z^2; r)$ είναι ομοιόμορφα μεγαλύτερη από αυτή του κλασικού διαστήματος εμπιστοσύνης $I_0 = (S^2/c_2, S^2/c_1)$, για όλες τις τιμές του $r \in (0,1)$.*

Απόδειξη

Για να αποδείξουμε το παραπάνω θεώρημα θα χρησιμοποιήσουμε το Λήμμα 3.1.1 και θα συγκρίνουμε τις τιμές $\varphi_0(r)$ και $1/c_2$ με απώτερο σκοπό να δημιουργηθεί μία μορφή διάταξης. Έχουμε λοιπόν ότι, η συνάρτηση $\varphi_0(r)$ μεγιστοποιεί το ολοκλήρωμα $\int_{\varphi_0(r)}^{\varphi_0(r)+c} f_{n+4}\left(\frac{1}{y}\right) \cdot F_p\left(\frac{r}{1-r} \cdot \frac{1}{y}\right) dy$ και ότι η συνάρτηση $1/c_2$ μεγιστοποιεί το ολοκλήρωμα $\int_{1/c_2}^{(1/c_2)+c} f_{n+4}\left(\frac{1}{y}\right) dy$. Προασπαθούμε να δείξουμε ότι, το πηλίκο $\dfrac{f_{n+4}(\frac{1}{y})}{f_{n+4}(\frac{1}{y}) \cdot F_p(\frac{r}{1-r} \cdot \frac{1}{y})} = \dfrac{1}{F_p(\frac{r}{1-r} \cdot \frac{1}{y})}$ είναι αύξουσα συνάρτηση του y . Ορίζουμε ως,

$g(y) = F_p\left(\frac{r}{1-r} \cdot \frac{1}{y}\right) = \int_0^{\frac{r}{1-r} \cdot \frac{1}{y}} f_p(u) du$

Η παράγωγος αυτής είναι, $g^{'}(y) = -\dfrac{r}{1-r} \cdot \dfrac{1}{y^2} \cdot f_p\left(\dfrac{r}{1-r} \cdot \dfrac{1}{y}\right)$. Σε αυτό το σημείο, θα μελετήσουμε το πρόσημο της παραγώγου για να βγάλουμε συμπεράσματα για την μονοτονία της συνάρτησης g.

Αφού, $r \in (0,1) \Rightarrow r < 1 \Rightarrow \left.\begin{array}{c} 1-r > 0 \\ r > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{r}{1-r} > 0$

Επίσης, $\dfrac{1}{y^2} > 0$ και $f_p\left(\dfrac{r}{1-r} \cdot \dfrac{1}{y}\right) > 0$ (είναι συνάρτηση πυκνότητας).

Συνεπώς, διαπιστώνουμε ότι, $g^{'}(y) < 0 \Rightarrow g(y) \searrow y \Rightarrow \dfrac{1}{g(y)} \nearrow y \Rightarrow \dfrac{1}{F_p\left(\dfrac{r}{1-r} \cdot \dfrac{1}{y}\right)} \nearrow y$.

Οπότε, από το Λήμμα 3.1.1 προκύπτει ότι, $1/c_2 > \varphi_0(r)$.

Καταφέραμε δηλαδή, να δημιουργήσουμε μία μορφή διάταξης η οποία,θα αξιοποιηθεί για την σύγκριση των πιθανοτήτων κάλυψης των αντίστοιχων διαστημάτων εμπιστοσύνης. Επειδή όμως, από την Παρατήρηση 4.1.1 βλέπουμε πως η πυκνότητα $f_{n+4}\left(\dfrac{1}{y}\right) \cdot F_p\left(\dfrac{r}{1-r} \cdot \dfrac{1}{y}\right)$ είναι μονοκόρυφη, δεδομένης της προαναφερθείσας διάταξης για τις αντίστοιχες πιθανότητες ισχύει το εξής,

$$P_{\varphi_0(r) < \frac{1}{c_2}}(\sigma^2 \in I_{1\varphi_0(r)}) > P(\sigma^2 \in I_0). \tag{4.4}$$

Επιπρόσθετα, η πιθανότητα κάλυψης δίνεται από τη Σχέση (4.1)

$P(\varphi S^2 \leq \sigma^2 \leq (\varphi + c)S^2 | Z^2 \leq r, K = 0) \propto \int_{\varphi}^{\varphi+c} f_{n+4}\left(\dfrac{1}{y}\right) \cdot F_p\left(\dfrac{r}{1-r} \cdot \dfrac{1}{y}\right) dy.$

και πλέον έχουμε ότι,

$P(\sigma^2 \in I_1) = P_{\varphi_0(r) < \frac{1}{c_2}}(\sigma^2 \in I_{1\varphi_0(r)}) + P_{\frac{1}{c_2} < \varphi_0(r)}(\sigma^2 \in I_0) \overset{(4.4)}{\Longrightarrow}$

$P(\sigma^2 \in I_1) > P_{\varphi_0(r) < \frac{1}{c_2}}(\sigma^2 \in I_0) + P_{\frac{1}{c_2} < \varphi_0(r)}(\sigma^2 \in I_0) \Rightarrow$

$P(\sigma^2 \in I_1) > P(\sigma^2 \in I_0).$

Συμπέρασμα 4.1.1. Από το παραπάνω θεώρημα διαπιστώνουμε και επιβεβαιωμένα πλέον ότι, το διάστημα εμπιστοσύνης τύπου Brown έχει πράγματι μεγαλύτερη πιθανότητα κάλυψης από το κλασικό διάστημα εμπιστοσύνης της παραμέτρου σ^2.

4.2 Δ.ε. τύπου Brewster and Zidek

Μέχρι τώρα, κατασκευάσαμε ένα δ.ε. της μορφής

$$I_1(S^2, Z^2; r) = \begin{cases} (S^2/c_2, S^2/c_1), & \text{αν} \quad Z^2 > r \\ (\varphi_0(r)S^2, (\varphi_0(r)+c)S^2), & \text{αν} \quad Z^2 \leq r \end{cases}$$

το οποίο είναι καλύτερο όσον αφορά στην πιθανότητα κάλυψης από το κλασικό δ.ε. $(S^2/c_2, S^2/c_1)$. Στόχος μας είναι, να βελτιώσουμε αυτό το νέο διάστημα $I_1(S^2, Z^2; r)$, $r \in (0,1)$ δημιουργώντας μία διαμέριση στο $(0,1)$. Από τη μορφή του δ.ε. I_1 παρατηρούμε ότι, αν $Z^2 > r$ τότε, προκύπτει το κλασικό δ.ε.

Πρόταση 4.2.1. *Το διάστημα εμπιστοσύνης,*

$$I_2(S^2, Z^2; r) = \begin{cases} (S^2/c_2, S^2/c_1), & \text{αν} \quad Z^2 > r \\ (\varphi_0(r)S^2, (\varphi_0(r)+c)S^2), & \text{αν} \quad r_1 < Z^2 \leq r \\ (\varphi_0(r_1)S^2, (\varphi_0(r_1)+c)S^2), & \text{αν} \quad Z^2 \leq r_1 \end{cases} \tag{4.5}$$

με $r_1 < r$ και $r, r_1 \in (0,1)$ έχει μεγαλύτερη πιθανότητα κάλυψης από το δ.ε. $I_1(S^2, Z^2; r)$ δηλαδή, ισχύει ότι $P(\sigma^2 \in I_2) > P(\sigma^2 \in I_1)$.

Απόδειξη

Ξεκινάμε αναζητώντας ένα σημείο $r_1 \in (0,1)$, με $r_1 < r$ τέτοιο ώστε, $\varphi_0(r_1) < \varphi_0(r) < \frac{1}{c_2}$. Στην απόδειξη του Θεωρήματος 4.1.1 δείξαμε ότι, $\varphi_0(r) < \frac{1}{c_2}$ μένει λοιπόν να δείξουμε ότι, $\varphi_0(r_1) < \varphi_0(r)$. Για μία ακόμη φορά θα χρησιμοποιήσουμε το Λήμμα 3.1.1 και θα συγκρίνουμε τις τιμές $\varphi_0(r_1)$ και $\varphi_0(r)$ με απώτερο σκοπό να δημιουργηθεί μία μορφή διάταξης και κατ' επέκταση μία διαμέριση. Έχουμε λοιπόν ότι, η συνάρτηση $\varphi_0(r)$ μεγιστοποιεί το ολοκλήρωμα $\int_{\varphi_0(r)}^{\varphi_0(r)+c} f_{n+4}\left(\frac{1}{y}\right) \cdot F_p\left(\frac{r}{1-r} \cdot \frac{1}{y}\right) dy$ και ότι, η συνάρτηση $\varphi_0(r_1)$ μεγιστοποιεί το ολοκλήρωμα $\int_{\varphi_0(r_1)}^{\varphi_0(r_1)+c} f_{n+4}\left(\frac{1}{y}\right) \cdot F_p\left(\frac{r_1}{1-r_1} \cdot \frac{1}{y}\right) dy$. Αρκεί να δείξουμε ότι, το πηλίκο $\dfrac{f_{n+4}(\frac{1}{y}) \cdot F_p(\frac{r}{1-r}\frac{1}{y})}{f_{n+4}(\frac{1}{y}) \cdot F_p(\frac{r_1}{1-r_1}\frac{1}{y})} = \dfrac{F_p(\frac{r}{1-r}\frac{1}{y})}{F_p(\frac{r_1}{1-r_1}\frac{1}{y})} \nearrow y$. Σε αυτό το σημείο, χρησιμοποιώντας την Παρατήρηση 4.4.1 διαπιστώνουμε πως, αρκεί να δείξουμε ότι, $\dfrac{f_p(\frac{r}{1-r}\frac{1}{y})}{f_p(\frac{r_1}{1-r_1}\frac{1}{y})} \nearrow y$.

Έχουμε ότι,

$$\frac{f_p(\frac{r}{1-r}\frac{1}{y})}{f_p(\frac{r_1}{1-r_1}\frac{1}{y})} = \frac{\dfrac{1}{\Gamma(p/2)\cdot 2^{p/2}} \cdot (\frac{r}{1-r}\frac{1}{y})^{p/2-1} \cdot e^{-\frac{(\frac{r}{1-r}\frac{1}{y})}{2}}}{\dfrac{1}{\Gamma(p/2)\cdot 2^{p/2}} \cdot (\frac{r_1}{1-r_1}\frac{1}{y})^{p/2-1} \cdot e^{-\frac{(\frac{r_1}{1-r_1}\frac{1}{y})}{2}}} =$$

$$= \left[\frac{r\cdot(1-r_1)}{r_1(1-r)}\right]^{p/2-1} \cdot e^{\frac{1}{2y}\cdot(-\frac{r}{1-r}+\frac{r_1}{1-r_1})} = \left[\frac{r\cdot(1-r_1)}{r_1(1-r)}\right]^{p/2-1} \cdot e^{\frac{1}{2y}\cdot\frac{r_1-r}{(1-r)\cdot(1-r_1)}} \Rightarrow$$

$$\frac{f_p(\frac{r}{1-r}\frac{1}{y})}{f_p(\frac{r_1}{1-r_1}\frac{1}{y})} = \left[\frac{r\cdot(1-r_1)}{r_1(1-r)}\right]^{p/2-1} \cdot e^{\frac{1}{2y}\cdot\frac{r_1-r}{(1-r)\cdot(1-r_1)}} \nearrow y\ , \quad \text{γιατί } r, r_1 \in (0,1) \text{ και } r > r_1.$$

Οπότε, από το Λήμμα 3.1.1 συμπεραίνουμε ότι, $\varphi_0(r_1) < \varphi_0(r)$. Επειδή όμως, η συνάρτηση $f_{n+4}\left(\frac{1}{y}\right) \cdot F_p\left(\frac{r}{1-r} \cdot \frac{1}{y}\right)$ είναι μονοκόρυφη, δεδομένης της προαναφερθείσας διάταξης για τις αντίστοιχες πιθανότητες ισχύει το εξής,

$$P_{\varphi_0(r_1)<\varphi_0(r)}(\sigma^2 \in I_{2\varphi_0(r_1)}) > P_{\varphi_0(r)}(\sigma^2 \in I_{1\varphi_0(r)}) > P(\sigma^2 \in I_0).$$

Συμπέρασμα 4.2.1. Από τα παραπάνω διαπιστώνουμε ότι, τα διαστήματα της μορφής που παρουσιάζονται στη Σχέση (4.5) έχουν μεγαλύτερη πιθανότητα κάλυψης και από τα δ.ε. $I_1(S^2, Z^2; r)$ αλλά, και από το κλασικό δ.ε. $I_0 = (S^2/c_2, S^2/c_1)$. Κατασκευάσαμε δηλαδή, καλύτερα δ.ε για την διασπορά όσον αφορά στην πιθανότητα κάλυψης.

Εφ΄ όσον, με την παραπάνω διαδικασία κατασκευάσαμε ένα δ.ε. που είναι καλύτερο από το προηγούμενο οδηγούμαστε, στην κατασκευή μιας διαμέρισης του διαστήματος $(0, 1)$.
Θέτουμε, $r_0 = 0 < r_1 < r_2 < \cdots < r_m < 1 = r_\infty$ με, $\underset{k\to\infty}{lim} r_k = 1$ και πολύ μικρές διαφορές έτσι ώστε, $\underset{m\to\infty}{lim}\underset{1\leq j\leq m}{max}|r_j - r_{j-1}| = 0$. Μετά από αυτή την διαμέριση προκύπτουν διαστήματα της μορφής,

$$I_1(S^2, Z^2; r_1) = \begin{cases} (S^2/c_2, S^2/c_1), & \text{αν} \quad Z^2 > r_1 \\ (\varphi_0(r)S^2, (\varphi_0(r) + c)S^2), & \text{αν} \quad Z^2 \leq r_1 \end{cases}$$

$$I_2(S^2, Z^2; r_1, r_2) = \begin{cases} (S^2/c_2, S^2/c_1), & \text{αν} \quad Z^2 > r_1 \\ (\varphi_0(r)S^2, (\varphi_0(r) + c)S^2), & \text{αν} \quad r_2 < Z^2 \leq r_1 \\ (\varphi_0(r_1)S^2, (\varphi_0(r_1) + c)S^2), & \text{αν} \quad Z^2 \leq r_2 \end{cases}$$

.

.

$$I_m(S^2, Z^2; r_1, r_2, \ldots, r_m) = \begin{cases} I_{m-1}, & \text{αν} \quad Z^2 > r_m \\ (\varphi_0(r_m)S^2, (\varphi_0(r_m) + c)S^2), & \text{αν} \quad Z^2 \leq r_m \end{cases}$$

όπου, το επόμενο διάστημα αποτελεί βελτίωση το προηγούμενου.

Συμπέρασμα 4.2.2. Ουσιαστικά, με αυτόν τον τρόπο κατασκευάσαμε ένα τεμαχισμένο δ.ε. αφού οι μορφές του είναι διαφορετικές, για τις διάφορες τιμές του Z^2. Συνεπώς, για να αποφύγουμε αυτά τα τεμαχισμένα διαστήματα, παίρνουμε το όριο του I_m για, $m \to \infty$ και οδηγούμαστε σε ένα δ.ε. τύπου Brewster and Zidek αφού, πλέον αναφερόμαστε στην τυχαία μεταβλητή Z^2 ως μία ενιαία τιμή δηλαδή, $0 < Z^2 < 1$. Άρα, το διάστημα εμπιστοσύνης τύπου Brewster and Zidek είναι της μορφής $I_{BZ}(S^2, Z^2) = (\varphi_0(Z^2)S^2, (\varphi_0(Z^2) + c)S^2)$.

Στόχος μας είναι να αποδείξουμε ότι, το δ.ε. τύπου Brewster and Zidek,

$$I_{BZ}(S^2, Z^2) = (\varphi_0(Z^2)S^2, (\varphi_0(Z^2) + c)S^2)$$

έχει μεγαλύτερη πιθανότητα κάλυψης από το κλασικό δ.ε. $I_0 = (S^2/c_2, S^2/c_1)$. Για να το καταφέρουμε αυτό επιβάλλεται να χρησιμοποιήσουμε το λήμμα, το θεώρημα και την πρόταση που ακολουθούν.

Λήμμα 4.2.1. Θεωρούμε $g(x)$ μία φραγμένη συνάρτηση του x έτσι ώστε, $|g(x)| \leq B$ και $\int_0^{+\infty} g(x) f_{p+2k}(x) dx = 0, \forall k \geq 0$. Τότε, $g(x) \equiv 0$ σχεδόν παντού στο $(-\infty, +\infty)$.

Παρατήρηση 4.2.1. Αν παρατηρήσουμε πιο προσεκτικά θα διαπιστώσουμε ότι, το ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} g(x) f_{p+2k}(x) dx = 0, \forall k \geq 0$ μας δείχνει ότι $E[g(X)] = 0$, όπου X προέρχεται από την κατανομή $X \sim X^2_{p+2k}$. Οπότε, αφού $E[g(X)] = 0 \Rightarrow g(X) = 0$ σχεδόν παντού στο R.

Θεώρημα 4.2.1 (Θεώρημα φραγμένης σύγκλισης). *Έστω f_n ακολουθία ολοκληρώσιμων συναρτήσεων που συγκλίνει σχεδόν παντού σε μία μετρήσιμη συνάρτηση f. Αν $|f_n(x)| \leq g(x)$ σχεδόν παντού και $g(x)$ ολοκληρώσιμη, τότε η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη και μάλιστα,* $\underset{n\to\infty}{lim} \int |f_n(x) - f(x)| d\mu = 0$

Πρόταση 4.2.2. *Η συνάρτηση φ_0 , η οποία είναι λύση της εξίσωσης,*

$$f_{n+4}\left(\frac{1}{\varphi}\right) \cdot F_p\left(\frac{r}{1-r} \cdot \frac{1}{\varphi}\right) = f_{n+4}\left(\frac{1}{\varphi+c}\right) \cdot F_p\left(\frac{r}{1-r} \cdot \frac{1}{\varphi+c}\right)$$

είναι μία αύξουσα συνάρτηση.

Απόδειξη

Αρκεί να δείξουμε ότι, αν $w_1 < w_2 \quad \Rightarrow \varphi_0(w_1) \leq \varphi_0(w_2)$. Θεωρούμε ότι, $\varphi_0(w_1) > \varphi_0(w_2)$ και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Από την Παρατήρηση 4.1.1 βλέπουμε ότι, η ποσότητα $f_{n+4}\left(\frac{1}{y}\right) \cdot F_p\left(\frac{w}{1-w} \cdot \frac{1}{y}\right)$ είναι μονοκόρυφη συνάρτηση του y γεγονός που σημαίνει ότι, έχει τοπικό ακρότατο. Οπότε, για την παράγωγο έχουμε ότι,

$$\frac{d}{d\varphi}\left\{\int_{\varphi}^{\varphi+c} f_{n+4}\left(\frac{1}{y}\right) \cdot F_p\left(\frac{w}{1-w} \cdot \frac{1}{y}\right) dy\right\} = 0 \Leftrightarrow$$

$$L(\varphi(w_1)) = f_{n+4}\left(\frac{1}{\varphi+c}\right)\cdot F_p\left(\frac{w_1}{1-w_1}\cdot\frac{1}{\varphi+c}\right) - f_{n+4}\left(\frac{1}{\varphi}\right)\cdot F_p\left(\frac{w_1}{1-w_1}\cdot\frac{1}{\varphi}\right) = 0$$

Οπότε, $L(\varphi_0(w_1)) = 0 \Leftrightarrow$

$$f_{n+4}\left(\frac{1}{\varphi_0(w_1)+c}\right)\cdot F_p\left(\frac{w_1}{1-w_1}\cdot\frac{1}{\varphi_0(w_1)+c}\right) - f_{n+4}\left(\frac{1}{\varphi_0(w_1)}\right)\cdot F_p\left(\frac{w_1}{1-w_1}\cdot\frac{1}{\varphi_0(w_1)}\right) = 0$$

Όμως, αφού $\varphi_0(w_1) > \varphi_0(w_2)$ προκύπτει ότι, $L(\varphi_0(w_2)) > 0 \Leftrightarrow$

$$f_{n+4}\left(\frac{1}{\varphi_0(w_2)+c}\right)\cdot F_p\left(\frac{w_1}{1-w_1}\cdot\frac{1}{\varphi_0(w_2)+c}\right) - f_{n+4}\left(\frac{1}{\varphi_0(w_2)}\right)\cdot F_p\left(\frac{w_1}{1-w_1}\cdot\frac{1}{\varphi_0(w_2)}\right) > 0 \tag{4.6}$$

και $\varphi_0(w_2)$ τέτοιο ώστε,

$$f_{n+4}\left(\frac{1}{\varphi_0(w_2)+c}\right)\cdot F_p\left(\frac{w_2}{1-w_2}\cdot\frac{1}{\varphi_0(w_2)+c}\right) - f_{n+4}\left(\frac{1}{\varphi_0(w_2)}\right)\cdot F_p\left(\frac{w_2}{1-w_2}\cdot\frac{1}{\varphi_0(w_2)}\right) = 0 \tag{4.7}$$

Όπότε, η Σχέση (4.6) γίνεται,

$$f_{n+4}\left(\frac{1}{\varphi_0(w_2)+c}\right)\cdot F_p\left(\frac{w_1}{1-w_1}\cdot\frac{1}{\varphi_0(w_2)+c}\right) > f_{n+4}\left(\frac{1}{\varphi_0(w_2)}\right)\cdot F_p\left(\frac{w_1}{1-w_1}\cdot\frac{1}{\varphi_0(w_2)}\right) \overset{(4.7)}{\Leftrightarrow}$$

$$\frac{f_{n+4}\left(\frac{1}{\varphi_0(w_2)}\right)\cdot F_p\left(\frac{w_2}{1-w_2}\cdot\frac{1}{\varphi_0(w_2)}\right)\cdot F_p\left(\frac{w_1}{1-w_1}\cdot\frac{1}{\varphi_0(w_2)+c}\right)}{F_p\left(\frac{w_2}{1-w_2}\cdot\frac{1}{\varphi_0(w_2)+c}\right)} >$$

$$> f_{n+4}\left(\frac{1}{\varphi_0(w_2)}\right)\cdot F_p\left(\frac{w_1}{1-w_1}\cdot\frac{1}{\varphi_0(w_2)}\right) \Leftrightarrow$$

$$\frac{F_p\left(\frac{w_1}{1-w_1}\cdot\frac{1}{\varphi_0(w_2)}\right)}{F_p\left(\frac{w_2}{1-w_2}\cdot\frac{1}{\varphi_0(w_2)}\right)} < \frac{F_p\left(\frac{w_1}{1-w_1}\cdot\frac{1}{\varphi_0(w_2+c)}\right)}{F_p\left(\frac{w_2}{1-w_2}\cdot\frac{1}{\varphi_0(w_2+c)}\right)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{F_p\left(\frac{\frac{w_1}{1-w_1}}{\frac{w_2}{1-w_2}}\cdot\frac{w_2}{1-w_2}\cdot\frac{1}{\varphi_0(w_2)}\right)}{F_p\left(\frac{w_2}{1-w_2}\cdot\frac{1}{\varphi_0(w_2)}\right)} < \frac{F_p\left(\frac{\frac{w_1}{1-w_1}}{\frac{w_2}{1-w_2}}\cdot\frac{w_2}{1-w_2}\cdot\frac{1}{\varphi_0(w_2+c)}\right)}{F_p\left(\frac{w_2}{1-w_2}\cdot\frac{1}{\varphi_0(w_2+c)}\right)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{F_p(\beta\cdot x_1)}{F_p(x_1)} < \frac{F_p(\beta\cdot x_2)}{F_p(x_2)}, \qquad \text{όπου } \beta = \frac{\frac{w_1}{1-w_1}}{\frac{w_2}{1-w_2}} < 1 \text{ (αφού } w_1 < w_2) \text{ και } x_1 > x_2.$$

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι έχουμε καταλήξει σε άτοπο χρησιμοποιώντας την ιδιότητα του μονότονου λόγου πιθανοφανειών (Ορισμός 1.7.1) της κατανομής $Gamma$ για την παράμετρο κλίμακος και την Πρόταση 4.4.1. Οπότε, αρκεί να αποδειχθεί ότι, $\frac{F_p(\beta\cdot x_1)}{F_p(x_1)} > \frac{F_p(\beta\cdot x_2)}{F_p(x_2)}$, με $\beta < 1$ και $x_1 > x_2$. Όντως από την Πρόταση 4.4.2 προκύπτει ότι ισχύει η τελευταία ανισότητα, οπότε οδηγούμαστε σε άτοπο. Άρα, αν $w_1 < w_2 \quad \Rightarrow \varphi_0(w_1) \leq \varphi_0(w_2) \quad \Rightarrow \varphi_0(w) \nearrow w$.

Θεώρημα 4.2.2. *Η πιθανότητα κάλυψης του διαστήματος $I_{BZ}(S^2, Z^2)$ είναι αυστηρά μεγαλύτερη από αυτή του $[S^2/c_2, S^2/c_1]$ για όλες τις τιμές του $\eta = \frac{\|\underset{\sim}{\mu}\|^2}{\sigma^2}$.*

Απόδειξη

Τα σημεία της διαμέρισης του διαστήματος $I_m(S^2, Z^2; r_1, r_2, \ldots, r_m)$ τείνουν σε αυτά του διαστήματος $I_{BZ}(S^2, Z^2)$ και από το Θεώρημα 4.2.1 , για κάθε k, έχουμε για την πιθανότητα κάλυψης ότι,

$$P(\sigma^2 \in I_{BZ}(S^2, Z^2)|K = k) \geq P(\sigma^2 \in [S^2/c_2, S^2/c_1]|K = k). \tag{4.8}$$

Συμβολικά (αφού $K \sim P(\eta/2)$) γράφουμε ότι,

$$P(\sigma^2 \in I_{BZ}(S^2, Z^2)|\eta) \geq P(\sigma^2 \in [S^2/c_2, S^2/c_1]|\eta).$$

Έστω ότι η παραπάνω ανισότητα δεν είναι αυστηρή, δηλαδή υπάρχει $\eta_0 > 0$ τέτοιο ώστε,

$$P(\sigma^2 \in I_{BZ}(S^2, Z^2)|\eta_0) = P(\sigma^2 \in [S^2/c_2, S^2/c_1]|\eta_0) = 1-\alpha, \qquad \text{όπου } 0<\alpha<1.$$

Επίσης, εφ' όσον $K \sim P(\eta/2)$ για $\eta > 0$ έχουμε ότι, $P(K=k) > 0, \quad \forall k \geq 0$. Συνεπώς, από την Σχέση (4.8) προκύπτει ότι,

$$P(\sigma^2 \in I_{BZ}(S^2, Z^2)|K=k) = 1-\alpha, \quad \forall k \geq 0. \tag{4.9}$$

Σε αυτό το σημείο χρησιμοποιώντας την ανεξαρτησία των τυχαίων μεταβλητών S^2 και Z^2 δοθέντος K θα δείξουμε ότι,

$$P(\sigma^2 \in I_{BZ}(S^2, Z^2)|K=k) = \int \left\{ \int_{1/(u+c)}^{1/u} f_n(s^2) ds^2 \right\} f_{p+2k}(t^2) dt^2,$$

όπου $u = \varphi_0(t^2/(t^2+s^2)) = \varphi_0(z^2)$.

Έχουμε ότι, $P(\sigma^2 \in I_{BZ}(S^2, Z^2)|K=k) = P(\varphi_0(Z^2)S^2 \leq \sigma^2 \leq (\varphi_0(Z^2)+c)S^2|K=k)$. Από την Πρόταση 2.3.3, $(T^2+S^2)|K \sim X^2_{n+p+2k}$ και $Z^2|K \sim B(\frac{p}{2}+k, \frac{n}{2})$.

Επίσης,

$$S^2 = S^2 + T^2 - T^2 = (T^2+S^2)\left(1 - \frac{T^2}{T^2+S^2}\right) = (T^2+S^2)(1-Z^2) \tag{4.10}$$

Οπότε, η πιθανότητα κάλυψης γίνεται,

$$P(\varphi_0(Z^2)S^2 \leq \sigma^2 \leq (\varphi_0(Z^2)+c)S^2|K=k) =$$

$$P(\frac{1}{\varphi_0(Z^2)+c} \leq \frac{S^2}{\sigma^2} \leq \frac{1}{\varphi_0(Z^2)}|K=k) \overset{(4.10)}{=}$$

$$P(\frac{1}{\varphi_0(Z^2)+c} \leq \frac{(T^2+S^2)(1-Z^2)}{\sigma^2} \leq \frac{1}{\varphi_0(Z^2)}|K=k) \overset{\varphi_0(z^2)=u}{=}$$

$$P(\frac{1}{u+c} \cdot \frac{1}{1-z^2} \leq \frac{T^2+S^2}{\sigma^2} \leq \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{1-z^2}|K=k) =$$

$$= \int_0^1 \int_{\frac{1}{u+c}\cdot\frac{1}{(1-z^2)}}^{\frac{1}{u}\cdot\frac{1}{(1-z^2)}} f_{n+p+2k}(x) \cdot g(z^2) dx dz^2 \Rightarrow$$

$$P(\varphi_0(Z^2)S^2 \le \sigma^2 \le (\varphi_0(Z^2)+c)S^2|K=k) =$$

$$= \int_0^1 \int_{\frac{1}{u+c}\cdot\frac{1}{(1-z^2)}}^{\frac{1}{u}\cdot\frac{1}{(1-z^2)}} \frac{1}{\Gamma(\frac{n+p+2k}{2})\cdot 2^{\frac{n+p+2k}{2}}} \cdot x^{\frac{n+p+2k}{2}-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{B(p/2+k, n/2)} \cdot (z^2)^{p/2+k-1} \cdot (1-z^2)^{n/2-1} dx dz^2 \tag{4.11}$$

Σε αυτό το σημείο κάνουμε τις εξής αντικαταστάσεις, $z^2 = \dfrac{t^2}{t^2+s^2}$ και $x = t^2+s^2$ με αποτέλεσμα να υπάρχουν αλλαγές και στην ολοκληρώσιμη ποσότητα. Έτσι έχουμε ότι,

◇ $(z^2)^{p/2+k-1} = (t^2)^{p/2+k-1} \cdot (t^2+s^2)^{1-p/2-k}$

◇ $(1-z^2)^{n/2-1} = \left(1 - \dfrac{t^2}{t^2+s^2}\right)^{n/2-1} = \left(\dfrac{s^2}{t^2+s^2}\right)^{n/2-1} = (s^2)^{n/2-1} \cdot (t^2+s^2)^{1-n/2}$

◇ $x^{\frac{n+p+2k}{2}-1} = (t^2+s^2)^{\frac{n+p+2k}{2}-1}$

◇ $x^{\frac{n+p+2k}{2}-1} \cdot (z^2)^{p/2+k-1} \cdot (1-z^2)^{n/2-1} =$

$(t^2+s^2)^{\frac{n+p+2k}{2}-1} \cdot (t^2)^{p/2+k-1} \cdot (t^2+s^2)^{1-p/2-k} \cdot (s^2)^{n/2-1} \cdot (t^2+s^2)^{1-n/2} =$

$(t^2+s^2)^{\frac{n+p+2k}{2}-1} \cdot (t^2+s^2)^{2-\frac{n+p+2k}{2}} \cdot (s^2)^{n/2-1} \cdot (t^2)^{\frac{p+2k}{2}-1} =$

$(s^2)^{n/2-1} \cdot (t^2)^{\frac{p+2k}{2}-1} \cdot (t^2+s^2)$

◇ $e^{-\frac{x}{2}} = e^{\frac{t^2+s^2}{2}} = e^{-\frac{s^2}{2}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}$

◇ $2^{\frac{n+p+2k}{2}} = 2^{n/2} \cdot 2^{\frac{p+2k}{2}}$

Γνωρίζουμε ότι, $B(\alpha,\beta) = \dfrac{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$ οπότε,

◇ $\dfrac{1}{\Gamma(\frac{n+p+2k}{2})} \cdot \dfrac{1}{B(p/2+k,n/2)} = \dfrac{1}{\Gamma(\frac{n+p+2k}{2})} \cdot \dfrac{\Gamma(\frac{n+p+2k}{2})}{\Gamma(p/2+k)\cdot\Gamma(n/2)} = \dfrac{1}{\Gamma(n/2)} \cdot \dfrac{1}{\Gamma(\frac{p+2k}{2})}$

Επίσης, έχουμε ότι, $x = t^2+s^2$ και $z^2 = \dfrac{t^2}{t^2+s^2} \Rightarrow t^2 = (t^2+s^2)\cdot z^2$. Συνεπώς, θα βρούμε αρχικά την Ιακωβιανή ορίζουσα και στη συνέχεια θα υπολογίσουμε τα διαφορικά.

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t^2} & \frac{\partial x}{\partial (t^2+s^2)} \\ \frac{\partial z^2}{\partial t^2} & \frac{\partial z^2}{\partial (t^2+s^2)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{s^2}{(t^2+s^2)^2} & -\dfrac{t^2}{(t^2+s^2)^2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{t^2+s^2}$$

$$\left.\begin{array}{r} \diamond \quad dxdz^2 = d(t^2+s^2)\cdot d\left(\dfrac{t^2}{t^2+s^2}\right) = dt^2\cdot d(t^2+s^2)|J| = \dfrac{1}{t^2+s^2}\cdot dt^2 \cdot d(t^2+s^2) \\ \text{όμως,} \quad \dfrac{d(t^2+s^2)}{ds^2} = 1 \Rightarrow d(t^2+s^2) = ds^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$dxdz^2 = \frac{1}{t^2+s^2}\cdot dt^2 \cdot ds^2$$

Επιπλέον,

$$\begin{cases} x \to \dfrac{1}{u}\cdot\dfrac{1}{(1-z^2)} & \Rightarrow (t^2+s^2) \to \dfrac{1}{u}\cdot\dfrac{t^2+s^2}{s^2} \\ x \to \dfrac{1}{u+c}\cdot\dfrac{1}{(1-z^2)} & \Rightarrow (t^2+s^2) \to \dfrac{1}{u+c}\cdot\dfrac{t^2+s^2}{s^2} \end{cases} \tag{4.12}$$

Όμως, το s^2 μπορεί να γραφεί ως εξής, $s^2 = \dfrac{s^2}{t^2+s^2}\cdot(t^2+s^2)$ συνεπώς, η Σχέση (4.12) γίνεται,

$$\begin{cases} (t^2+s^2) \to \dfrac{1}{u}\cdot\dfrac{t^2+s^2}{s^2} \Rightarrow s^2 \to \dfrac{1}{u} \\ (t^2+s^2) \to \dfrac{1}{u+c}\cdot\dfrac{t^2+s^2}{s^2} \Rightarrow s^2 \to \dfrac{1}{u+c} \end{cases}$$

Μετά από όλα τα παραπάνω η Σχέση (4.11) γίνεται,

$P(\sigma^2 \in I_{BZ}(S^2, Z^2)|K=k) =$

$$\int_0^1 \int_{\frac{1}{u+c}}^{\frac{1}{u}} \frac{1}{\Gamma(n/2)\cdot 2^{n/2}}\cdot(s^2)^{n/2-1}\cdot e^{-\frac{s^2}{2}}\cdot\frac{1}{\Gamma(\frac{p+2k}{2})\cdot 2^{\frac{p+2k}{2}}}\cdot(t^2)^{\frac{p+2k}{2}-1}\cdot e^{-\frac{t^2}{2}}\cdot(t^2+s^2)\cdot\frac{1}{t^2+s^2}\cdot dt^2\cdot ds^2 \Rightarrow$$

$$P(\sigma^2 \in I_{BZ}(S^2, Z^2)|K=k) = \int \left\{\int_{1/(u+c)}^{1/u} f_n(s^2)ds^2\right\} f_{p+2k}(t^2)dt^2, \tag{4.13}$$

όπου $u = \varphi_0(t^2/(t^2+s^2)) = \varphi_0(z^2)$.

Συνεπώς, από τις Σχέσεις (4.9) , (4.13) και το Λήμμα 4.2.1 συνεπάγεται ότι,

$\int_{1/(u+c)}^{1/u} f_n(s^2)ds^2 \equiv 1-\alpha, \quad \forall t^2 > 0$. Επειδή όμως, η σχέση $\int_{1/(\varphi+c)}^{1/\varphi} f_n(s^2)ds^2 = 1-\alpha$ έχει ως μοναδική λύση την $\varphi = 1/c_2$ προκύπτει ότι $c_2 \equiv \varphi_0\left(\frac{T^2}{T^2+S^2}\right) = \varphi_0(Z^2)$. Όμως αυτό δεν μπορεί να ισχύει , γιατί από την Πρόταση 4.2.2 η συνάρτηση φ_0 είναι αύξουσα. Κατ΄ επέκταση, η ανισότητα $P(\sigma^2 \in I_{BZ}(S^2, Z^2)|K=k) \geq P(\sigma^2 \in [S^2/c_2, S^2/c_1]|K=k)$ είναι αυστηρή, δηλαδή το δ.ε. Brewster- Zidek $I_{BZ}(S^2, Z^2)$ έχει αυστηρά μεγαλύτερη πιθανότητα κάλυψης από το κλασικό διάστημα $[S^2/c_2, S^2/c_1]$.

4.3 Δ.ε. Bayes

Σε αυτή την παράγραφο θα αποδείξουμε ότι, το διάστημα εμπιστοσύνης τύπου Brewster and Zidek είναι ένα γενικευμένο διάστημα Bayes μεταξύ των διαστημάτων εμπιστοσύνης της μορφής $(\varphi_0(Z^2)S^2, (\varphi_0(Z^2)+c)S^2)$, που έχουν ίδιο μήκος.

Θεώρημα 4.3.1. *Μεταξύ των διαστημάτων της μορφής* $[\varphi(Z^2)S^2, (\varphi(Z^2)+c)S^2]$, *το δ.ε.* $I_{BZ}(S^2, Z^2)$ *είναι ένα γενικευμένο διάστημα Bayes με improper prior κατανομή*

$$\pi(\eta) = \frac{p}{4}\int_0^\infty e^{-\frac{\eta z}{2}} \cdot (1+z)^{-p/2}dz. \tag{4.14}$$

Απόδειξη

Θα κάνουμε μία αλλαγή μεταβλητής και αρχικά θα δείξουμε ότι, η εκ των προτέρων κατανομή δίνεται από την εξίσωση,

$$\pi(\eta) = \beta\int_0^1 y^{\beta-2} \cdot e^{-\frac{t}{y}}dy, \quad \text{όπου} \quad \beta = p/2. \tag{4.15}$$

Ξεκινάμε θέτοντας $y = \dfrac{1}{1+z} \quad \Rightarrow dy = -\dfrac{1}{(z+1)^2}dz \quad \Rightarrow dz = -(z+1)^2dy \quad \Rightarrow dz = -\dfrac{1}{y^2}dy$, τότε αν $z \to 0 \quad \Rightarrow y \to 1$ και αν, $z \to \infty \quad \Rightarrow y \to 0$. Τώρα, θα δούμε πώς γίνεται η ολοκληρώσιμη ποσότητα μετά από την παραπάνω αλλαγή. Ξεκινάμε παίρνοντας τον κάθε όρο ξεχωριστά κι έχουμε,

- $\diamond \quad e^{-\frac{\eta z}{2}} = e^{-\frac{\eta\cdot(\frac{1}{y}-1)}{2}} = e^{-\frac{\eta}{2}\cdot\frac{1}{y}} \cdot e^{\frac{\eta}{2}} = e^{-\frac{t}{y}} \cdot e^{t}, \quad$ όπου $t = \dfrac{\eta}{2}$
- $\diamond \quad (1+z)^{-p/2} = (\frac{1}{y})^{-p/2} = y^{p/2} = y^{\beta}, \quad$ όπου $\beta = p/2$.

Οπότε, η Σχέση (4.14) έχει ως εξής,

$\pi(\eta) = \dfrac{p}{4}\int_1^0 e^{-\frac{t}{y}} \cdot e^t \cdot y^\beta \cdot (-\dfrac{1}{y^2})dy = \dfrac{p}{2}\cdot\dfrac{e^t}{2}\int_0^1 e^{-\frac{t}{y}} \cdot y^{\beta-2}dy = \beta\cdot\dfrac{e^t}{2}\int_0^1 y^{\beta-2}\cdot e^{-\frac{t}{y}}dy.$

Συνεπώς, η εκ των προτέρων κατανομή είναι η $\pi(\eta) = \beta\int_0^1 y^{\beta-2}\cdot e^{-\frac{t}{y}}dy$.

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας την Πρόταση 4.4.3 θα χρησιμοποιήσουμε prior όχι ως προς η αλλά, την αντίστοιχη prior ως προς k

$$\pi(k) = \frac{p/2}{k+p/2} \tag{4.16}$$

η οποία είναι improper.

Στην Πρόταση 4.4.3 αποδεικνύουμε ότι, η πυκνότητα του γινομένου $X \cdot Y$ είναι ίση με $\pi(\eta) = \beta\int_0^1 y^{\beta-2}\cdot e^{-\frac{t}{y}}dy, \quad$ όπου $\beta = p/2$ και ότι η ροπή k-τάξης δίνεται από την σχέση $E((X\cdot Y)^k) = \dfrac{k!}{1+\frac{k}{\beta}}$. Οπότε, αρχικά θα δείξουμε ότι και η ροπή k-τάξης της κατανομής $\pi(\eta)$ είναι ίση με,

$$E((\eta)^k) = k!\cdot\frac{\beta}{\beta+k} \tag{4.17}$$

$E((\eta)^k) = \int_0^{+\infty}\eta^k\cdot\pi(\eta)d\eta = \int_0^{+\infty}\eta^k\cdot\beta\int_0^1 y^{\beta-2}\cdot e^{-t/y}dyd\eta \overset{t=\eta}{=}$

$\beta\int_0^1 y^{\beta-2}\int_0^{+\infty}\eta^k\cdot e^{-\eta/y}d\eta dy = \beta\int_0^1 y^{\beta-2}\cdot y^{k+1}\cdot\Gamma(k+1)dy =$

$\beta\int_0^1 y^{\beta-2}\cdot y^{k+1}\cdot k!dy = \beta\cdot k!\int_0^1 y^{\beta+k-1}dy = \beta\cdot k!\left[\dfrac{y^{\beta+k}}{\beta+k}\right]_0^1 \Rightarrow$

$E((\eta)^k) = k!\cdot\dfrac{\beta}{\beta+k}$

Γνωρίζουμε ότι, $K \sim P(\eta)$ οπότε, η πυκνότητα δίνεται από την σχέση $P(K = k, \eta) = e^{-\eta} \cdot \dfrac{\eta^k}{k!} = f(k, \eta), \eta > 0$. Σε αυτό το σημείο αναζητούμε την περιθώρια κατανομή της K. Συνεπώς,

$$\left.\begin{array}{c} f(k) = \pi(k) = \int_0^{+\infty} e^{-\eta} \cdot \dfrac{\eta^k}{k!} d\eta = \dfrac{1}{k!} \int_0^{+\infty} \eta^k \cdot e^{-\eta} d\eta \\ \text{Αν} \quad \eta \sim Exp(1) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\pi(k) = \frac{1}{k!} \cdot E(\eta^k) \overset{(4.17)}{=} \frac{1}{k!} \cdot k! \cdot \frac{\beta}{\beta + k} \overset{\beta = p/2}{\Longrightarrow} \pi(k) = \frac{p/2}{k + p/2}$$

Εφ΄ όσον υπολογίσαμε την εκ των προτέρων κατανομή $\pi(k)$ στόχος μας είναι, να υπολογίσουμε την εκ των υστέρων κατανομή $\pi(k|z^2)$ η οποία θα μας οδηγήσει στην κατασκευή ενός δ.ε. Bayes. Γενικά γνωρίζουμε ότι, $\pi(\theta|x) = \dfrac{\pi(x|\theta) \cdot \pi(\theta)}{\sum\limits_{\theta} \pi(x|\theta) \cdot \pi(\theta)}$ οπότε εδώ αναζητούμε την $\pi(k|z^2)$ η οποία είναι ίση με,

$$\pi(k|z^2) = \frac{\pi(z^2|k) \cdot \pi(k)}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} \pi(z^2|k) \cdot \pi(k)} \tag{4.18}$$

Όμως, $Z^2|K \sim B(p/2 + k, n/2) \Rightarrow$

$$\pi(z^2|k) = f(z^2|k) = \frac{1}{B(p/2 + k, n/2)} \cdot (z^2)^{p/2+k-1} \cdot (1 - z^2)^{n/2-1}, 0 < z^2 < 1,$$

όπου $\quad \dfrac{1}{B(p/2 + k, n/2)} = \dfrac{\Gamma(\frac{n+p}{2} + k)}{\Gamma(p/2 + k) \cdot \Gamma(n/2)} \quad$ και $\pi(k) = \dfrac{p/2}{k + p/2}$.

Οπότε, από τη Σχέση (4.18) προκύπτει ότι, $\pi(k|z^2) = \dfrac{\frac{\Gamma(\frac{n+p}{2}+k)}{\Gamma(p/2+k)} \cdot \frac{(z^2)^{p/2+k-1}}{k+p/2}}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{n+p}{2}+k)}{\Gamma(p/2+k)} \cdot \frac{(z^2)^{p/2+k-1}}{k+p/2}}$

Σε αυτό το σημείο επιβάλλεται, για να έχουν νόημα όσα αναφέρουμε, να ελέγξουμε αν συγλίνει η σειρά $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f(z^2|k) \cdot \pi(k) = \dfrac{p/2}{\Gamma(n/2)} \cdot \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{\Gamma(\frac{n+p}{2} + k)}{\Gamma(p/2 + k)} \cdot \dfrac{(z^2)^{p/2+k-1}}{k + p/2} \cdot (1 - z^2)^{n/2-1}$.

Ονομάζουμε ως $\alpha_k = \dfrac{\Gamma(\frac{n+p}{2}+k)}{\Gamma(p/2+k)} \cdot \dfrac{(z^2)^{p/2+k}}{k+p/2}$ και στη συνέχεια χρησιμοποιούμε το Κριτήριο Λόγου(Πρόταση 4.4.4) οπότε έχουμε,

$$\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} = \frac{\frac{\Gamma(\frac{n+p}{2}+k+1)}{\Gamma(p/2+k+1)}}{\frac{\Gamma(\frac{n+p}{2}+k)}{\Gamma(p/2+k)}} \cdot \frac{p/2+k}{p/2+k+1} \cdot z^2 = \frac{\Gamma(\frac{n+p}{2}+k+1)\cdot\Gamma(p/2+k)}{\Gamma(\frac{n+p}{2}+k)\cdot\Gamma(p/2+k+1)} \cdot \frac{p/2+k}{p/2+k+1} \cdot z^2 =$$

$$\frac{\frac{n+p}{2}+k}{p/2+k} \cdot \frac{p/2+k}{p/2+k+1} \cdot z^2 = \frac{\frac{n+p}{2}+k}{p/2+k+1} \cdot z^2 \Rightarrow \left|\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k}\right| = \left|\frac{\frac{n+p}{2}+k}{p/2+k+1} \cdot z^2\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to+\infty} \left|\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k}\right| = \lim_{k\to+\infty} \left|\frac{\frac{n+p}{2}+k}{p/2+k+1} \cdot z^2\right| = |z^2| \overset{z^2 \geq 0}{=} z^2 < 1, \text{ γιατί } \quad 0 < z^2 < 1.$$

Άρα, αφού $L = \lim_{k\to+\infty} \left|\dfrac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k}\right| < 1$ η σειρά συγκλίνει για $0 < z^2 < 1$.

Στην Πρόταση 4.4.6 αποδεικνύουμε ότι, η πιθανότητα κάλυψης που δίνεται από την Σχέση (4.1) είναι ανάλογη με την ποσότητα

$$\int_{\frac{1}{\varphi+c}}^{\frac{1}{\varphi}} \sum_{k=0}^{+\infty} f_{(S^2|Z^2,K)}(S^2|Z^2,K) \cdot f(Z^2|K=k) \cdot \pi(k) ds^2,$$

η οποία είναι ίση με την εκ των υστέρων πιθανότητα κάλυψης, δεδομένου του Z^2, ενός διαστήματος εμπιστοσύνης της μορφής $(\varphi S^2, (\varphi+c)S^2)$. Έτσι, αφού το διάστημα εμπιστοσύνης τύπου Brewster-Zidek μεγιστοποιεί την πιθανότητα κάλυψης που δίνεται από την Σχέση (4.1), αυτό σημαίνει ότι μεγιστοποιεί και την εκ των υστέρων πιθανότητα κάλυψης με αποτέλεσμα να συμπεράνουμε πως το διάστημα αυτό είναι ένα γενικευμένο διάστημα Bayes με εκ των προτέρων κατανομή $\pi(\eta)$.

4.3.1 Δ.ε. Bayes για το σ^2, ως προς την εκ των προτέρων κατανομή του Jeffreys'

Μία από τις πιο γνωστές μεθόδους για την επιλογή μίας μη πληροφοριακής (noinformative) εκ των προτέρων κατανομής δίνεται από τον Jeffreys (1946) η οποία εκλέγει ως

$$\pi(\theta) = (I(\theta))^{1/2},$$

όπου $I(\theta)$, είναι ο αριθμός πληροφορίας του Fisher, ο οποίος συναντάται στο Θεώρημα Cramer- Rao (Θεώρημα 1.2.1). Αν $\underset{\sim}{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_k)'$ είναι ένα διάνυσμα, τότε ο Jeffreys'(1961) χρησιμοποιεί ως

$$\pi(\theta) =\mid I(\underset{\sim}{\theta}) \mid^{1/2},$$

όπου ως $|\cdot|$ συμβολίζουμε τη ορίζουσα και $I(\underset{\sim}{\theta})$ είναι ένας $k \times k$ πίνακας και αναφέρεται ως πίνακας πληροφορίας του Fisher, με το (i, j) στοιχείο του να δίνεται από την σχέση,

$$I_{ij}(\underset{\sim}{\theta}) = -E_\theta \left[\frac{\partial^2}{\partial\theta_i \cdot \partial\theta_j} lnf(x|\underset{\sim}{\theta}) \right].$$

Πρόταση 4.3.1. *Αν $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, με $\mu \in R$ και $\sigma^2 > 0$ άγνωστα, τότε ο πίνακας πληροφορίας του Fisher δίνεται από τη σχέση* $I(\underset{\sim}{\theta}) = \begin{pmatrix} 1/\sigma^2 & 0 \\ 0 & 2/\sigma^2 \end{pmatrix}$

Απόδειξη

Επειδή $\theta = (\mu, \sigma^2)$, σύμφωνα με τα παραπάνω, ο πίνακας πληροφορίας του Fisher θα είναι,

$$I(\underset{\sim}{\theta}) = -E_\theta \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial\mu^2} lnf(x|\underset{\sim}{\theta}) & \frac{\partial^2}{\partial\mu \cdot \partial\sigma^2} lnf(x|\underset{\sim}{\theta}) \\ \frac{\partial^2}{\partial\mu \cdot \partial\sigma^2} lnf(x|\underset{\sim}{\theta}) & \frac{\partial^2}{\partial\sigma^2} lnf(x|\underset{\sim}{\theta}) \end{pmatrix},$$

όπου $f(x|\theta) = -ln\sigma - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}$. Επομένως,

$$\frac{\partial^2}{\partial\mu^2} lnf(x|\underset{\sim}{\theta}) = \frac{\partial^2}{\partial\mu^2}\left[-ln\sigma - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] = -\frac{1}{\sigma^2}$$
$$\frac{\partial^2}{\partial\mu\cdot\partial\sigma^2} lnf(x|\underset{\sim}{\theta}) = \frac{\partial^2}{\partial\mu\cdot\partial\sigma^2}\left[-ln\sigma - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] = \frac{2\cdot(\theta-x)}{\sigma^3}$$
$$\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2} lnf(x|\underset{\sim}{\theta}) = \frac{\partial^2}{\partial\sigma^2}\left[-ln\sigma - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] = \frac{1}{\sigma^2} - \frac{3\cdot(x-\theta)^2}{\sigma^4}.$$

Τελικά, προκύπτει ότι,

$$I(\underset{\sim}{\theta}) = -E_\theta \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sigma^2} & \frac{2\cdot(\theta-x)}{\sigma^3} \\ \frac{2\cdot(\theta-x)}{\sigma^3} & \frac{1}{\sigma^2} - \frac{3\cdot(x-\theta)^2}{\sigma^4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sigma^2 & 0 \\ 0 & 2/\sigma^2 \end{pmatrix}$$

Παρατήρηση 4.3.1. Λόγω της Πρότασης 4.3.1, η εκ των προτέρων κατανομή του Jeffreys θα είναι, $\pi(\theta) = \left(\frac{1}{\sigma^2}\cdot\frac{2}{\sigma^2}\right)^{1/2} \propto \frac{1}{\sigma^2}$.

Πρόταση 4.3.2. *Το Δ.Ε. ελαχίστου μήκους για το σ^2, $\left(\frac{S^2}{c_2}, \frac{S^2}{c_1}\right)$, όπου c_1 και c_2 δίνονται από τις εξισώσεις,*

$$I_{M.L.} : \begin{cases} f_{n+4}(c_1) = f_{n+4}(c_2) \\ \int_{c_1}^{c_2} f_n(x)dx = 1-\alpha \end{cases}$$

, με $0 < \alpha < 1$

συμπίπτει με το γενικευμένο δ.ε. Bayes ως προς την prior $\pi(\sigma^2) = \frac{1}{\sigma^2}$ (Jeffreys' prior).

Απόδειξη

Γενικά, προσπαθούμε να ελέγξουμε τη μορφή που θα έχει το δ.ε. Bayes αν μας δοθεί ως εκ των προτέρων κατανομή η $\pi(\sigma^2) = \dfrac{1}{\sigma^2}, \sigma^2 > 0$. Αρχικά, θα υπολογίσουμε την εκ των υστέρων κατανομή

$$f(\sigma^2|x) = \frac{f(x;\sigma^2) \cdot \pi(\sigma^2)}{\int_{\sigma^2} f(x;\sigma^2) \cdot \pi(\sigma^2) d\sigma^2} \tag{4.19}$$

Εδώ, $X = S^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \sigma^2 \cdot X_n^2$ οπότε,

$f(x;\sigma^2) = \sigma^2 \cdot \dfrac{1}{\Gamma(n/2) \cdot 2^{n/2}} \cdot x^{n/2-1} \cdot e^{-x/2} \Rightarrow$

$f(x;\sigma^2) \cdot \dfrac{1}{\sigma^2} = \dfrac{1}{\Gamma(n/2) \cdot 2^{n/2}} \cdot x^{n/2-1} \cdot e^{-x/2} \Rightarrow$

$f(x;\sigma^2) \cdot \pi(\sigma^2) = \dfrac{1}{\Gamma(n/2) \cdot 2^{n/2}} \cdot x^{n/2-1} \cdot e^{-x/2}$

$f(\sigma^2|x) \propto \dfrac{1}{\Gamma(n/2) \cdot 2^{n/2}} \cdot x^{n/2-1} \cdot e^{-x/2} \equiv X_n^2$

Οπότε, λόγω της Σχέσης (4.19) προκύπτει ότι, $f(\sigma^2|x) \equiv X_n^2$. Συνεπώς, εφ' όσον γνωρίζουμε την κατανομή της $\sigma^2|x \sim X_n^2$ μπορούμε να κατασκευάσουμε το δ.ε. Bayes. Έτσι έχουμε,

$$P\left(\frac{S^2}{c_2} \leq \sigma^2 \leq \frac{S^2}{c_1}\right) = P(c_1 \leq \frac{S^2}{\sigma^2} \leq c_2) = \int_{c_1}^{c_2} \frac{1}{\Gamma(n/2) \cdot 2^{n/2}} \cdot (\sigma^2)^{n/2-1} \cdot e^{-(\sigma)^2/2} d\sigma^2 \Rightarrow$$

$$P(c_1 S^2 \leq \sigma^2 \leq c_2 S^2) = F_n(c_2) - F_n(c_1) \tag{4.20}$$

Τώρα, θα αποδείξουμε ότι το δ.ε. Bayes που θα προκύψει αξιοποιώντας την συγκεκριμένη prior είναι το γνωστό δ.ε. ελαχίστου μήκους. Αν παρατηρήσουμε πιο προσεκτικά την Σχέση (4.20) θα διαπιστώσουμε πως, αυτή θυμίζει μία από τις εξισώσεις που αντιστοιχούν στο δ.ε. ελαχίστου μήκους. Παίρνουμε το μήκος του διαστήματος και προσπαθούμε να το ελαχιστοποιήσουμε ακολουθώντας την εξής διαδικασία. Προσπαθούμε να ελαχιστοποιήσουμε την ποσότητα

$$l^* = \frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} \tag{4.21}$$

υπό την προϋπόθεση ότι,

$$F_n(c_2) - F_n(c_1) = 1 - \alpha. \tag{4.22}$$

Αρχικά θεωρούμε $c_2 = c_2(c_1)$, παίρνουμε την Σχέση (4.21) και την παραγωγίζουμε ως προς c_1 οπότε,

$$-\frac{1}{c_1^2} + \frac{1}{c_2^2}\frac{dc_2}{dc_1} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{dc_2}{dc_1} = \frac{c_2^2}{c_1^2} \tag{4.23}$$

Συνεχίζουμε παραγωγίζοντας την εξίσωση (4.22) ως προς c_1 και προκύπτει ότι,

$$f_n(c_2) \cdot \frac{dc_2}{dc_1} - f_n(c_1) = 0 \overset{(4.23)}{\Rightarrow}$$

$$f_n(c_1) = \frac{c_2^2}{c_1^2} f_n(c_2) \Rightarrow$$

$$c_1^2 f_n(c_1) = c_2^2 f_n(c_2) \Rightarrow$$

$$c_1^2 \cdot \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2}) \cdot 2^{\frac{n}{2}}} \cdot c_1^{\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-\frac{c_1}{2}} = c_2^2 \cdot \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2}) \cdot 2^{\frac{n}{2}}} \cdot c_2^{\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-\frac{c_2}{2}} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\Gamma(\frac{n+4}{2}) \cdot 2^{\frac{n+4}{2}}} \cdot c_1^{\frac{n+4}{2}-1} \cdot e^{-\frac{c_1}{2}} = \frac{1}{\Gamma(\frac{n+4}{2}) \cdot 2^{\frac{n+4}{2}}} \cdot c_2^{\frac{n+4}{2}-1} \cdot e^{-\frac{c_2}{2}} \Rightarrow$$

$$f_{n+4}(c_1) = f_{n+4}(c_2)$$

Συνεπώς, για να βρούμε το δ.ε. ελαχίστου μήκους χρειάζεται να λύσουμε το ακόλουθο σύστημα,

$$I_{M.L.} : \begin{cases} f_{n+4}(c_1) = f_{n+4}(c_2) \\ \int_{c_1}^{c_2} f_n(x)dx = 1 - \alpha \end{cases}$$

, με $0 < \alpha < 1$

4.4 Βοηθητικά Αποτελέσματα

Πρόταση 4.4.1. *Η κατανομή Gamma(α,θ), με $\alpha,\theta > 0$ έχει την ιδιότητα του Μονότονου Λόγου Πιθανοφανειών (Μ.Λ.Π.) ως προς την στατιστική συνάρτηση $T(X) = X$.*

Απόδειξη

Θεωρούμε, λοιπόν, τυχαία μεταβλητή $X \sim Gamma(\alpha,\theta)$, η οποία έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x;\theta) = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)\cdot\theta^{\alpha}} \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-\frac{x}{\theta}} \quad , x > 0, \quad \alpha,\theta > 0.$
Έστω $\theta_1 < \theta_2$, θα αποδείξουμε ότι ο λόγος $\dfrac{f(x;\theta_2)}{f(x;\theta_1)}$ είναι μονότονος ως προς μία στατιστική συνάρτηση $T(X) = X$.

Έχουμε, $\dfrac{f(x;\theta_2)}{f(x;\theta_1)} = \dfrac{\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)\cdot\theta_2^{\alpha}} \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-\frac{x}{\theta_2}}}{\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)\cdot\theta_1^{\alpha}} \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-\frac{x}{\theta_1}}} = \left(\dfrac{\theta_1}{\theta_2}\right)^{\alpha} \cdot e^{x\cdot\left(\frac{1}{\theta_1}-\frac{1}{\theta_2}\right)} \nearrow x = T(X),$

γιατί $\theta_1 < \theta_2 \quad \Rightarrow \dfrac{1}{\theta_1} > \dfrac{1}{\theta_2} \quad \Rightarrow \dfrac{1}{\theta_1} - \dfrac{1}{\theta_2} > 0.$

Πρόταση 4.4.2 (Cohen (1972), Lemma 4.2). *Έστω μία τυχαία μεταβλητή $X \sim X_p^2$ με συνάρτηση κατανομής $F_p(x)$, τότε το πηλίκο $\dfrac{F_p(x;\theta_2)}{F_p(x;\theta_1)} \nearrow x$, με $\theta_1,\theta_2 > 0$ ($\theta_1 < \theta_2$).*

Απόδειξη

Στην Πρόταση 4.4.1 αποδείξαμε ότι οι κατανομές *Gamma* έχουν την ιδιότητα του Μ.Λ.Π. Όμως, από την Παρατήρηση 2.3.1 προκύπτει ότι, και η $X_p^2 \equiv Gamma(p/2, 2)$ έχει την ίδια ιδιότητα ως προς τη στατιστική συνάρτηση $T(X) = x$.

Συνεπώς, αφού $\dfrac{f_p(x;\theta_2)}{f_p(x;\theta_1)} \nearrow x$ έχουμε ότι, αν $x > y \quad \Rightarrow \dfrac{f_p(x;\theta_2)}{f_p(x;\theta_1)} > \dfrac{f_p(y;\theta_2)}{f_p(y;\theta_1)} \quad \Rightarrow$

$$f_p(x;\theta_2)\cdot f_p(y;\theta_1) - f_p(x;\theta_1)\cdot f_p(y;\theta_2) > 0 \tag{4.24}$$

Θέτουμε ως $u(x) = \dfrac{F_p(x;\theta_2)}{F_p(x;\theta_1)}$ και θα αποδείξουμε ότι, η συνάρτηση $u(x)$ είναι αύξουσα ως προς x.

Οπότε αρκεί να δείξουμε ότι, $\dfrac{du(x)}{dx} > 0$.

$$\frac{du(x)}{dx} = F_p(x;\theta_1)\cdot f_p(x;\theta_2) - F_p(x;\theta_2)\cdot f_p(x;\theta_1) = \int_0^x [f_p(x;\theta_2)\cdot f_p(y;\theta_1) - f_p(x;\theta_1)\cdot f_p(y;\theta_2)]dy \overset{(4.24)}{\Rightarrow}$$
$$\frac{du(x)}{dx} > 0 \quad \Rightarrow u(x) \nearrow x \quad \Rightarrow \frac{F_p(x;\theta_2)}{F_p(x;\theta_1)} \nearrow x.$$

Παρατήρηση 4.4.1. Μία εναλλακτική μορφή της προηγούμενης πρότασης για μία τυχαία μεταβλητή X που προέρχεται από μία κεντρική X_p^2 είναι η ακόλουθη, αν $\dfrac{f_p(\alpha x)}{f_p(\beta x)} \nearrow x \Rightarrow \quad \dfrac{F_p(\alpha x)}{F_p(\beta x)} \nearrow x$ με, $\alpha, \beta > 0 \quad (\alpha < \beta)$.

Πρόταση 4.4.3. *Θεωρούμε δύο ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές X, Y που προέρχονται από εκθετική κατανομή, με μέσο $\mu = 1$, δηλαδή $X, W \sim Exp(1)$. Έστω ότι, $Y = e^{-\frac{W}{\beta}}$, τότε η πυκνότητα του γινομένου $X \cdot Y$ είναι ίση με $\pi(\eta) = \beta \int_0^1 y^{\beta-2} \cdot e^{-\frac{t}{y}} dy$, όπου $\beta = p/2$ και η ροπή k-τάξης του γινομένου $X \cdot Y$ δίνεται από την σχέση $E((X\cdot Y)^k) = \dfrac{k!}{1+\frac{k}{\beta}}$.*

Απόδειξη

Αρχικά, αναζητούμε την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής Y μέσω του θεωρήματος αντίστροφου μετασχηματισμού (Θεώρημα 1.8.1). Αφού $X, W \sim Exp(1)$ οι συναρτήσεις πυκνότητας των X, W είναι,

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, \text{αν} \quad x > 0 \\ 0, \text{αν} \quad x \leq 0 \end{cases} \quad \text{και} \quad g(w) = \begin{cases} e^{-w}, \text{αν} \quad w > 0 \\ 0, \text{αν} \quad w \leq 0 \end{cases} \quad \text{αντίστοιχα.}$$

Θεωρούμε ότι, $Y = e^{-\frac{W}{\beta}} = h(W) \Rightarrow W = h^{-1}(Y)$. Έχουμε ότι, $y = e^{-\frac{w}{\beta}} \overset{y>0}{\Longrightarrow} -\frac{w}{\beta} = lny \Rightarrow$ $w = -\beta \cdot lny$. Όμως, $w > 0 \Rightarrow -\beta \cdot lny > 0 \Rightarrow 0 < y < 1$. Η παράγωγος είναι ίση με

$\frac{d}{dy}h^{-1}(y) = -\frac{\beta}{y}$ οπότε, $f_Y(y) = g_W\left(h^{-1}(y)\right)\left|\frac{d}{dy}h^{-1}(y)\right| = e^{-(-\beta \cdot lny)} \cdot \frac{\beta}{y} = y^{\beta} \cdot \frac{\beta}{y} \Rightarrow$
$f_Y(y) = \beta \cdot y^{\beta-1}$, $0 < y < 1$. Θέτουμε ότι $Z = X \cdot Y \Rightarrow X = \frac{Z}{Y}$, $Y = Y$ και θεωρούμε την συνάρτηση $h : (X, Y) \to (Z, Y)$. Στη συνέχεια, για να υπολογίσουμε την από κοινού κατανομή των Z, Y και κατ΄ επέκταση την περιθώρια της Y υπολογίζουμε την Ιακωβιανή ορίζουσα. Αυτή είναι,

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial x}{\partial y} \\ \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{y} & -\frac{z}{y^2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{y}$$

Η από κοινού κατανομή των X, Y είναι, η $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) = e^{-x} \cdot \beta \cdot y^{\beta-1}$, $x > 0, 0 < y < 1$. Οπότε, η από κοινού κατανομή των Z, Y είναι η

$f_{Z,Y}(z, y) = f_{X,Y}(\frac{z}{y}, y) \cdot |J| = e^{-\frac{z}{y}} \cdot \beta \cdot y^{\beta-1} \cdot \frac{1}{y} = e^{-\frac{z}{y}} \cdot \beta \cdot y^{\beta-2}$. Στη συνέχεια θα ολοκληρώσουμε αυτή την πυκνότητα και θα βρούμε την περιθώρια κατανομή της Z. Έχουμε λοιπόν ότι,

$f_Z(z) = \int_0^1 e^{-\frac{z}{y}} \cdot \beta \cdot y^{\beta-2} dy = \beta \int_0^1 e^{-\frac{z}{y}} \cdot y^{\beta-2} dy$.
Συνεπώς, η πυκνότητα του γινομένου $X \cdot Y$ είναι η, $\pi(\eta) = \beta \int_0^1 y^{\beta-2} \cdot e^{-\frac{t}{y}} dy$, όπου $\beta = p/2$.

Σε αυτό το σημείο θα βρούμε την τιμή της k-ροπής του $X \cdot Y$ δηλαδή, του Z. Οπότε, αρκεί να δείξουμε ότι, $E(Z^k) = \frac{k!}{1 + \frac{k}{\beta}}$.

$E(Z^k) = \int_0^{+\infty} z^k \cdot \beta \int_0^1 y^{\beta-2} \cdot e^{-\frac{z}{y}} dydz = \beta \int_0^1 y^{\beta-2} \int_0^{+\infty} z^k \cdot e^{-\frac{z}{y}} dzdy =$

$= \beta \int_0^1 y^{\beta-2} \cdot y^{k+1} \cdot \Gamma(k+1) dy = \beta \int_0^1 y^{\beta-2} \cdot y^{k+1} \cdot k! dy \Rightarrow$

$E(Z^k) = \beta \cdot k! \int_0^1 y^{\beta+k-1} dy = \beta \cdot k! \left[\frac{y^{\beta+k}}{\beta + k}\right]_0^1 = \beta \cdot k! \cdot \frac{1}{\beta + k} \Rightarrow$

$E((X \cdot Y)^k) = \frac{k!}{1 + \frac{k}{\beta}}$.

Πρόταση 4.4.4 (**Κριτήριο λόγου** D'Alembert). *Θεωρούμε τη σειρά* $\sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k$ *της οποίας οι όροι είναι πραγματικοί αριθμοί. Ονομάζουμε ως* $L = \lim_{k\to+\infty} \left|\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k}\right|$ *κι έχουμε ότι,*

1. Αν $L < 1$, *τότε η σειρά συγκλίνει απολύτως.*

2. Αν $L > 1$, *τότε η σειρά αποκλίνει.*

3. Αν $L = 1$, *τότε δεν γνωρίζουμε.*

Πρόταση 4.4.5 (**Abramowitz M. and Stegun I. A. (1965)**). *Θεωρούμε μία τυχαία μεταβλητή* X *που προέρχεται από μία κεντρική* X_p^2 *με συνάρτηση πυκνότητας* $f_p(x) = \dfrac{1}{\Gamma(\frac{p}{2}) \cdot 2^{\frac{p}{2}}} \cdot x^{\frac{p}{2}-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}}$, $x > 0$, *τότε συνάρτηση κατανομής αυτής δίνεται από τον τύπο,*

$$F_p(u) = \frac{1}{\Gamma(\frac{p}{2}+1)} \cdot e^{-\frac{u}{2}} \cdot \left(\frac{u}{2}\right)^{\frac{p}{2}} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(\frac{p}{2}+1) \cdot \left(\frac{u}{2}\right)^k}{\Gamma(\frac{p}{2}+k+1)}, u > 0. \tag{4.25}$$

Απόδειξη

Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση κατανομής μίας τυχαίας μεταβλητής X που προέρχεται από μία κεντρική X_p^2 είναι ίση με,

$$F_p(u) = \int_0^u \frac{1}{\Gamma(\frac{p}{2}) \cdot 2^{\frac{p}{2}}} \cdot t^{\frac{p}{2}-1} \cdot e^{-\frac{t}{2}} dt = \int_0^u \frac{1}{\Gamma(\frac{p}{2}) \cdot 2^{\frac{p}{2}}} \cdot e^{-\frac{t}{2}} d\left(\frac{t^{\frac{p}{2}}}{\frac{p}{2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\frac{p}{2}) \cdot \frac{p}{2} \cdot 2^{\frac{p}{2}}} \cdot u^{\frac{p}{2}} \cdot e^{-\frac{u}{2}} + \tfrac{1}{2} \cdot \int_0^u \frac{1}{\Gamma(\frac{p}{2}) \cdot \frac{p}{2} \cdot 2^{\frac{p}{2}}} \cdot t^{\frac{p}{2}} \cdot e^{-\frac{t}{2}} dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\frac{p}{2}+1)} \cdot \left(\tfrac{u}{2}\right)^{\frac{p}{2}} \cdot e^{-\frac{u}{2}} + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{\Gamma(\frac{p}{2}+1) \cdot (\frac{p}{2}+1)} \cdot \left(\tfrac{u}{2}\right)^{\frac{p}{2}+1} \cdot e^{-\frac{u}{2}} + \tfrac{1}{2^2} \cdot \int_0^u \frac{1}{\Gamma(\frac{p}{2}+2) \cdot 2^{\frac{p}{2}+1}} \cdot t^{\frac{p}{2}+1} \cdot e^{-\frac{t}{2}} dt \Rightarrow$$

Συνεχίζοντας την ολοκλήρωση κατά παράγοντες καταλήγουμε στο εξής,

$$F_p(u) = \frac{1}{\Gamma(\frac{p}{2}+1)} \cdot \left(\tfrac{u}{2}\right)^{\frac{p}{2}} \cdot e^{-\frac{u}{2}} \left\{ 1 + \frac{\frac{u}{2}}{\frac{p}{2}+1} + \frac{(\frac{u}{2})^2}{(\frac{p}{2}+1) \cdot (\frac{p}{2}+2)} + \dots \right\} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\frac{p}{2}+1)} \cdot \left(\tfrac{u}{2}\right)^{\frac{p}{2}} \cdot e^{-\frac{u}{2}} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\frac{p}{2} \cdot (\frac{u}{2})^k}{\frac{p}{2} \cdot (\frac{p}{2}+1) \dots (\frac{p}{2}+k)} \Rightarrow$$

$$F_p(u) = \tfrac{1}{\Gamma(\frac{p}{2}+1)} \cdot e^{-\frac{u}{2}} \cdot \left(\tfrac{u}{2}\right)^{\frac{p}{2}} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(\frac{p}{2}+1) \cdot \left(\frac{u}{2}\right)^k}{\Gamma(\frac{p}{2}+k+1)}.$$

Πρόταση 4.4.6. *Η δεσμευμένη πιθανότητα κάλυψης* $P(\varphi S^2 \leq \sigma^2 \leq (\varphi + c)S^2 | Z^2 \leq r, K = 0) \propto \int_{\varphi}^{\varphi+c} f_{n+4}\left(\frac{1}{y}\right) \cdot F_p\left(\frac{r}{1-r} \cdot \frac{1}{y}\right) dy$ *(Σχέση (4.1)) είναι ίση με*

$z^2(1-z^2) \cdot \int_{\frac{1}{\varphi+c}}^{\frac{1}{\varphi}} \sum_{k=0}^{+\infty} f_{(S^2|Z^2,K)}(S^2|Z^2,K) \cdot f(Z^2|K=k) \cdot \pi(k) ds^2$

Απόδειξη

Ξεκινάμε με το ολοκλήρωμα της Σχέσης (4.1) κι έχουμε ότι,

$$\int_{\varphi}^{\varphi+c} f_{n+4}\left(\tfrac{1}{y}\right) \cdot F_p\left(\frac{r}{1-r} \cdot \frac{1}{y}\right) dy \overset{s^2=\frac{1}{y}}{=} A \int_{\frac{1}{\varphi+c}}^{\frac{1}{\varphi}} f_{n+4}(s^2) \cdot F_p\left(\frac{z^2}{1-z^2} \cdot s^2\right) \cdot \left(\frac{1}{s^2}\right)^2 ds^2 \overset{(4.25)}{=}$$

$$= n \cdot (n+2) \int_{\frac{1}{\varphi+c}}^{\frac{1}{\varphi}} \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2}+2)} \cdot 2^{\frac{n}{2}+2} \cdot (s^2)^{\frac{n}{2}+1} \cdot e^{-\frac{s^2}{2}} \cdot \left(\frac{1}{s^2}\right)^2 \cdot$$

$$\cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(\frac{p}{2}+1) \cdot \left(\frac{z^2}{1-z^2} \cdot \frac{s^2}{2}\right)^k}{\Gamma(\frac{p}{2}+k+1)} \cdot \frac{1}{\Gamma(\frac{p}{2}+1) \cdot 2^{\frac{p}{2}}} \cdot \left(\frac{z^2}{1-z^2} \cdot s^2\right)^{\frac{p}{2}} e^{-\frac{z^2}{1-z^2} \cdot \frac{s^2}{2}} ds^2 =$$

$$= z^2(1-z^2) \cdot \int_{\frac{1}{\varphi+c}}^{\frac{1}{\varphi}} \sum_{k=0}^{+\infty} f_{(S^2|Z^2,K)}(S^2|Z^2,K) \cdot \frac{\Gamma(\frac{n+p}{2}+k)}{\Gamma(\frac{p}{2}+k) \cdot \Gamma(\frac{n}{2})} \cdot (z^2)^{\frac{p}{2}+k-1} \cdot (1-z^2)^{\frac{n}{2}-1} \cdot \frac{\frac{p}{2}}{\frac{p}{2}+k} ds^2,$$

όπου

$$f_{(S^2|Z^2,K)}(S^2|Z^2,K) = n \cdot (n+2) \cdot [z^2(1-z^2)]^{-1} \cdot \frac{\Gamma(\frac{p}{2}+k) \cdot \Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n+p}{2}+k)} \cdot (z^2)^{-\frac{p}{2}-k+1} \cdot (1-z^2)^{-\frac{n}{2}+1} \cdot \frac{\frac{p}{2}+k}{\frac{p}{2}} \cdot e^{-\frac{s^2}{2}} \cdot$$

$$\frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2}+2) \cdot \Gamma(\frac{p}{2}+k+1)} \cdot \frac{1}{2^{\frac{n}{2}+2+k+\frac{p}{2}}} \cdot (s^2)^{\frac{n}{2}-1+k+\frac{p}{2}} \cdot e^{-\frac{z^2}{1-z^2} \cdot \frac{s^2}{2}} \cdot (z^2)^{k+\frac{p}{2}} \cdot (1-z^2)^{-k-\frac{p}{2}} \Rightarrow$$

$$f_{(S^2|Z^2,K)}(S^2|Z^2,K) = n \cdot (n+2) \cdot \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}+2) \cdot \Gamma(\frac{n+p}{2}+k)} \cdot \frac{1}{2^{\frac{n+p}{2}+k+2}} \cdot \frac{1}{(1-z^2)^{\frac{n+p}{2}+k}} \cdot (s^2)^{\frac{n+p}{2}+k-1} \cdot e^{-\frac{1}{1-z^2} \cdot \frac{s^2}{2}}$$

Όμως, πρέπει να ισχύει ότι, $\int_0^{+\infty} f_{(S^2|Z^2,K)}(S^2|Z^2,K) ds^2 = 1$.

Πράγματι, $\int_0^{+\infty} f_{(S^2|Z^2,K)}(S^2|Z^2,K)ds^2 =$

$$\int_0^{+\infty} n\cdot(n+2)\cdot\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}+2)\cdot\Gamma(\frac{n+p}{2}+k)}\cdot\frac{1}{2^{\frac{n+p}{2}+k+2}}\cdot\frac{1}{(1-z^2)^{\frac{n+p}{2}+k}}\cdot(s^2)^{\frac{n+p}{2}+k-1}\cdot e^{-\frac{1}{1-z^2}\cdot\frac{s^2}{2}}ds^2 =$$

$$n\cdot(n+2)\cdot\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}+2)\cdot\Gamma(\frac{n+p}{2}+k)}\cdot\frac{1}{2^{\frac{n+p}{2}+k+2}}\cdot\frac{1}{(1-z^2)^{\frac{n+p}{2}+k}}\cdot\int_0^{+\infty}(s^2)^{\frac{n+p}{2}+k-1}\cdot e^{-\frac{1}{1-z^2}\cdot\frac{s^2}{2}}ds^2 =$$

$$\frac{2^2\cdot\frac{n}{2}\cdot(\frac{n}{2}+1)\cdot\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}+2)\cdot\Gamma(\frac{n+p}{2}+k)}\cdot\frac{1}{2^{\frac{n+p}{2}+k+2}}\cdot\frac{1}{(1-z^2)^{\frac{n+p}{2}+k}}\cdot\Gamma(\frac{n+p}{2}+k)\cdot 2^{\frac{n+p}{2}+k}\cdot(1-z^2)^{\frac{n+p}{2}+k} = 1.$$

Βιβλιογραφία

[1] Abramowitz, M. and Stegun, I. A. (1965). , *Handbook of Mathematical Functions, with, Formulas, Graphs, and Math. Tables.* , Dover, New York.

[2] Brewster, J.F. and Zidek J.V. (1974) . Improving on equivariant estimators. , *Ann. Statist.*,**2**, 21-38.

[3] Brown, L.D. (1968) . Inadmissibility of the usual estimators of scale parameters in problems with unknown location and scale parameters. , *Ann. Math. Statist.*, **39**, 29-48.

[4] Cohen, A. (1972) . Improved confidence intervals for the variance of a normal distribution. , *J. Amer. Statist. Assoc.*, **67**, 382-387

[5] Jeffreys, H. (1946) . An invariant form for the prior probability in estimations problems. , *Proceedings of the royal society of London series A. Mathematical and physical sciences*, **186**, (1007) : 453-461.

[6] Shorrock, G. (1990) . Improved confidence intervals for a normal variance. , *Ann. Statist.*, **18**, 972-980.

[7] Stein C. (1964) . Inadmissibility of the usual estimator for the variance of the normal distribution with unknown mean. , *Ann. Inst. Statist. Math.*, **16**, 155-160.

[8] Tate, R. F. and Klett, G. W. (1959) . Optimal confidence intervals for the variance of a normal distribution. , *J. Amer. Statist. Assoc.*, **54**, 674-682.