Διαδικασιες Bessel

Λεωνίδας Γ. Σκούτας

Επιβλέπων
Βασίλειος Παπακωνσταντίνου
Επίκουρος Καθηγητής

Πανεπιστήμιο Πατρών
Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Μαθηματικών

Πάτρα, Ιούλιος 2009

Πανεπιστήμιο Πατρών, 265 00 Πάτρα
Τμήμα Μαθηματικών, Τομεας Στατιστικής και Επιχειρισιακής Έρευνας
Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών, Μαθηματικά των Υπολογιστών
και των Αποφάσεων

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία του Λεωνίδα Γ. Σκούτα με τίτλο «Διαδικασίες Bessel» εξετάστηκε και εγκρίθηκε από την ακόλουθη Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή:

Βασίλειος Παπακωνσταντίνου,
Επίκουρος Καθηγητής
Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Πατρών

Φίλιππος Αλεβίζος,
Επίκουρος Καθηγητής
Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Πατρών

Ευφροσύνη Μακρή,
Επίκουρος Καθηγήτρια
Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Πατρών

Στην οικογένεια μου, για τη στήριξη και την υπομονή τους.

Η παρουσα Μεταπτυχιακη Εργασια στοιχειοθετηθηκε με το προγραμμα LaTeX (MiKTeX *2.7*). Η συγγραφη εγινε με τη βοηθεια του προγραμματος WinEdit *5.4*. Η τελικη ηλεκτρονικη μορφη (Portable Document Format - PDF) δημιουργηθηκε με το προγραμμα PDF-LaTeX. Για την επεξεργασια των σχηματων χρησιμοποιηθηκαν τα προγραμματα Xfig *3.4* και PaintShop *8.0*.

Περίληψη

Στόχος της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η ανάλυση των διαδικασιών Bessel d-διάστασης. Καταρχάς, θα παρουσιάσουμε το απαιραίτητο μαθηματικό υπόβαθρο, αναλύοντας μερικές βασικές έννοιες από την περιοχή της θεωρίας πιθανοτήτων και των στοχαστικών διαδικασίων. Επίσης ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στο πλέον αντιπροσωπευτικό παράδειγμα των διαδικασίων αυτών: την κίνηση Brown. Συγκεκριμένα, παρουσιάζονται και αναλύονται οι παραλλαγές της κίνησης Brown καθώς τα γεωμετρικά αναλλοίωτα μεγέθη της.

Στη συνέχεια, θα μελετήσουμε τα κύρια χαρακτηριστικά των τρισδιάστατων διαδικασίων Bessel, οι οποίες αναφέρονται αρκετά συχνά κατά την περιγραφή της γραμμικής κίνησης Brown. Τέλος, θα παρουσιάσουμε τις διαδικασίες Bessel d-διάστασης δίνοντας ιδιαίτερη βάση στο τετράγωνο της d-διάστατου διαδικασίας Bessel καθώς και στα κύρια χαρακτηριστικά του.

Ευχαριστίες

Η παρούσα διπλωματική εργασία θα ήταν αδύνατο να εκπονηθεί χωρίς την καθοριστική βοήθεια και συμπαράσταση πολλών ανθρώπων.

Καταρχάς, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντά μου, κ. Βασίλειο Παπακωνσταντίνου, επίκουρο καθηγητή του τμήματος μαθηματικών του πανεπιστημίου Πατρών, γιατί η συνεργασία του μαζί μου υπήρξε καταλυτική στην ολοκλήρωση των προπτυχιακών και μεταπτυχιακών μου σπουδών. Η αμέριστη ηθική συμπαράστασή του, η εμπιστοσύνη του στο άτομό μου, με όπλισε με αυτοπεποίθηση, δύναμη και μου έδωσε το κουράγιο να συνεχίσω την προσπάθειά μου για την ολοκλήρωση της μεταπτυχιακής διατριβής μου.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω και τα άλλα δύο μέλη της Τριμελούς Συμβουλευτικής Επιτροπής, τον επίκουρο καθηγητή κ. Φίλιππος Αλεβίζο και την επίκουρο καθηγήτρια Ευφροσύνη Μακρή για την βοήθεια που μου πρόσφεραν για την συγγραφή αυτής της εργασίας.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τους γονείς Γεράσιμο και Ελένη, την αδερφή μου Μαρία και την Αγγελική, οι οποίοι με στήριξαν με όλη τους τη δύναμη και όλα τα μέσα κατά τη διάρκεια των σπουδών μου.

Λεωνίδας Γ. Σκούτας
Πάτρα, Ιούλιος 2009.

Περιεχόμενα

Μέρος I

Εισαγωγή και Βασικές Έννοιες

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή

Στην παρούσα διπλωματική εργασία θα ασχοληθούμε με τις *διαδικασίες Bessel* διάστασης d. Ξεκινώντας θα δώσουμε κάποιες βασικές έννοιες των τρισδιάστατων διαδικασιών Bessel και στη συνέχεια θα περάσουμε στη γενικότερη περίπτωση, διάστασης d.

Πριν προχωρήσουμε στην περαιτέρω ανάπτυξη αυτού του θέματος, θα δούμε κάποιες έννοιες, για τις οποίες κρίνεται απαραίτητο η υπενθύμιση και η επεξήγησή τους ώστε να είναι περισσότερο κατανοητά τα όσα θα παρουσιάσουμε στη συνέχεια. Για παράδειγμα πρέπει να εξηγήσουμε τι εννοούμε όταν αναφέρουμε την έννοια της στοχαστικής διαδικασίας

1.1 Στοχαστική Διαδικασία

Ορισμός 1.1. (Στοχαστική Διαδικασία). Μια *στοχαστική διαδικασία* είναι μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $X_1, X_2, \ldots$ η οποία περιγράφει ένα φαινόμενο, το οποίο εξελίσσεται χρονικώς κατά τυχαίο τρόπο.

Η φύση, η καθημερινή ζωή, οι επιστήμες μας προσφέρουν μια πληθώρα τέτοιων φαινομένων, φαινόμενα, τα οποία δύναται να παρασταθούν μέσω μιας συνάρτησης δύο μεταβλητών, του χρόνου και της τύχης. Ένα βασικό παράδειγμα είναι η *κίνηση Brown* της γύρης σε υγρό, την οποία θα ορίσουμε στη συνέχεια.

1.1.1 Θεωρητικό Υπόβαθρο

Στο σημείο αυτό θεωρείται αναγκαίο να δώσουμε κάποια γενικά χαρακτηριστικά των διαδικασιών. Γι' αυτό το λόγο, θεωρούμε μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $\{X_n(\omega)\}_{n=1}^{\infty}$, δηλαδή $X_1, X_2, \ldots$.

Ορισμός 1.2. (Δειγματοληπτική Τροχιά). Εάν θεωρήσουμε το $\omega \in \Omega$ σταθερό τότε για κάθε επιλογή του ω προκύπτει μια ακολουθία τιμών:

$$X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots$$

η οποία ονομάζεται *δειγματοληπτική τροχιά* ή απλώς *τροχιά* της στοχαστικής διαδικασίας και συμβολίζεται με $X_n(\omega)$.

Προφανώς κατά την επανάληψη και την καταγραφή των παρατηρήσεων μιας διαδικασίας $X_n(\omega)$ προκύπτουν πολλά δείγματα-τροχιές της διαδικασίας. Αυτές οι τροχιές αποτελούν το ιστορικό αρχείο των δεδομένων του φαινομένου.

Η καταγραφή των γεγονότων αυτών ισοδυναμεί με την επιλογή μιας σ-άλγεβρας γεγονότων του αντίστοιχου πιθανοθεωρητικού χώρου $(\Omega, \mathcal{F})$. Έτσι προκύπτει μια ακολουθία σ-άλγεβρων. Επομένως αν θεωρήσουμε τον αριθμό n ως τη σελίδας του ημερολογίου καταγραφής των γεγονότων τότε προφανώς οι πληροφορίες των n-πρώτων σελίδων περιέχονται στις πληροφορίες των $n+1$ σελίδων.

Μια μαθηματική μοντελοποίηση των παραπάνω είναι η αντιστοίχηση του n με μια ακολουθία σ-άλγεβρων $\{\mathcal{F}_n\}$ με $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{F}$.

Ορισμός 1.3. (Ιστορία). Κάθε ακολουθία σ-άλγεβρων $\{\mathcal{F}_n\}$ του Ω με $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{F}$ ονομάζεται *ιστορία* (των γεγονότων του Ω).

Αν για κάποιο Ω μας παραδίδεται αφ' ενός μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $\{X_n\}$ και εφ' ετέρου μια ιστορία $\{\mathcal{F}_n\}$ δεν είναι αναγκαίο εκ των προτέρων τα γεγονότα, τα οποία παρήχθησαν (ή δύναται να παραχθούν) από την τυχαία μεταβλητή $\{X_n\}$ να συμπίπτουν, να περιγράφονται δηλαδή να είναι μετρήσιμα από την ιστορία $\{\mathcal{F}_n\}$. Εάν όμως τα γεγονότα της $\{X_n\}$ περιέχονται στην $\{\mathcal{F}_n\}$ τότε η $\{X_n\}$ είναι προσηρμοσμένη στην $\{\mathcal{F}_n\}$.

Ορισμός 1.4. (Προσηρμοσμένη Ακολουθία). Μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $\{X_n\}$ ονομάζεται *προσηρμοσμένη ακολουθία* στην ιστορία $\{\mathcal{F}_n\}$ εάν η $\{X_n\}$ είναι μετρήσιμος ως προς την $\mathcal{F}_n$, $\forall n = 1, 2, \ldots$, δηλαδή αν $X_n \in \mathcal{F}_n$.

1.1.2 Στοιχηματική Διαδικασία

Ορισμός 1.5. (Στοιχηματική Διαδικασία - Διακριτή περίπτωση). Μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $X_1, X_2, \ldots$ προσηρμοσμένη στην ιστορία $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots$ ονομάζεται *στοιχηματική* ως προς την ιστορία $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots$ αν:

- $X_n \in L^1 \Leftrightarrow E(|X_n|) < \infty$.
- $E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n$, $n = 1, 2, \ldots$.

Ορισμός 1.6. (Στοιχηματική Διαδικασία - Συνεχής περίπτωση). Μια στοχαστική διαδικασία $X(t)$, $t \in [0, +\infty)$ είναι στοιχηματική ως προς την ιστορία $\mathcal{F}_t$ αν:

- η $X(t)$ είναι ολοκληρώσιμος για κάθε t δηλαδή $X_n \in L^1 \Leftrightarrow E(X_n) < \infty$.
- η $X(t)$ είναι μετρήσιμος ως προς την $\mathcal{F}_t$, για κάθε t, δηλαδή είναι προσαρμοσμένη στην $\mathcal{F}_t$, $X(t) \in \mathcal{F}_t$.
- Για $s \leq t : X(s) = E\left(X(t)|\mathcal{F}_s\right)$.

Ορισμός 1.7. (Υποστοιχηματική Διαδικασία). Μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $\{X_n\}$ προσηρμοσμένη στην ιστορία $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots$ ονομάζεται *ύποστοιχηματική* εάν:

- $X_n \in L^1$
- $E(X_{n+1}|F_n) \leq X_n$

Ορισμός 1.8. (Υπερστοιχηματική Διαδικασία). Μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $\{X_n\}$ προσηρμοσμένη στην ιστορία $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots$ ονομάζεται *υπερστοιχηματική* εάν:

- $X_n \in L^1$
- $E(X_{n+1}|F_n) \geq X_n$

Ορισμός 1.9. (Χρονοδιακόπτης). Έστω ο πιθανοθεωρητικός χώρος $(\Omega, \{\mathcal{F}_k\}, \mathcal{F}, P)$. Η τυχαία μεταβλητή $T : \Omega \to \mathbb{N}$ ονομάζεται *χρονοδιακόπτης* ως προς την ιστορία $\mathcal{F}_k$ εάν το γεγονός $(T = k)$ ανήκει στην σ-άλγεβρα $\mathcal{F}_k \Leftrightarrow \{T = k\} \in \mathcal{F}_k$.

Ορισμός 1.10. (Ομοιόμορφως Ολοκληρώσιμη Ακολουθία). Μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $X_1, X_2, \ldots$ ονομάζεται *ομοιόμορφως ολοκληρώσιμη ακολουθία* αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $M > 0$ με

$$\int_{[|X_n|>M]} |X_n| dP < \epsilon.$$

Ορισμός 1.11. (Τοπικώς Στοιχηματική). Μια προσηρμοσμένη και εκ δεξιών συνεχής διαδικασία X_t ονομάζεται *τοπικώς στοιχηματική* ως προς την ιστορία $\mathcal{F}_t$ και το μέτρο P αν υπάρχει μια ακολουθία χρονοδιακοπτών $\{T_n\}$ τέτοια ώστε:

- η ακολουθία $\{T_n\}$ να είναι αύξουσα και $\lim_{n \to \infty} T_n = +\infty$ σχεδόν βέβαια
- για κάθε n η διαδικασία $X^{T_n}\mathcal{X}_{[T_n > 0]}$ να είναι στοιχηματική ομοιόμορφως ολοκληρώσιμη ως προς $(\mathcal{F}_t, P)$.

1.1.3 Μαρκοβιανή Διαδικασία

Ορισμός 1.12. (Μαρκοβιανή Διαδικασία). Έστω $X(\omega, t) : \Omega \times T \to \mathbb{R}$, $0 \leq s < t$ με $s, t \in T \subseteq \mathbb{R}^+$. Έστω επίσης η σ-άλγεβρα Borel $\mathcal{B} = \sigma\left((-\infty, a]/a \in \mathbb{R}\right)$. Τότε λέμε ότι η $X(\omega, t)$ έχει την *Μαρκοβιανή ιδιότητα* αν:

$$P[X_t \in B/X_\lambda : \lambda \leq s, \lambda \in T] = P[X_t \in B/X_s].$$

Στη συνέχεια θα αναφέρουμε τον ορισμό της *κίνησης Brown*.

1.1.4 Κίνηση Brown

Ορισμός 1.13. (Κίνηση Brown - Περιγραφικός Ορισμός). Η *κίνηση Brown* είναι μια στοχαστική διαδικασία $X(t, \omega)$, η οποία έχει τις εξής ιδιότητες

(1.) Οι τροχιές είναι συνεχής.

(2.) Η ακολουθία διαφορών της είναι ανεξάρτητες.

(3.) Η κατανομή των διαφορών είναι η κανονική κατανομή.

Ορισμός 1.14. (Κίνηση Brown - 1η Μαθηματική Κατασκευή). Η *κίνηση Brown* είναι μια στοχαστική διαδικασία $X(t,\omega) : \Omega \to \mathbb{R}$, η οποία έχει τις εξής ιδιότητες

(1.) $X(0) = 0$ σχεδόν βέβαια.

(2.) Οι τροχιές $t \to X(t)$ είναι συνεχής σχεδόν βέβαια.

(3.) Για κάθε ακολουθία χρονικών στιγμών $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ για τα σύνολα Borel $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset \mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$P\bigg(X(t_1) \in A_1, X(t_2) \in A_2, \ldots, X(t_n) \in A_n\bigg) =$$

$$= \int_{A_1} \int_{A_2} \ldots \int_{A_n} f(t_1, 0, x_1) f(t_2 - t_1, x_1, x_2) \ldots f(t_n - x_{n-1}, x_{n-1}, x_n) dx_1 \ldots dx_n$$

όπου

$$f(t,x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\, e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}}, \qquad x, y \in \mathbb{R},\ t > 0.$$

Παρατήρηση 1.1. Η συνάρτηση $f(t,x,y)$ ονομάζεται *συνάρτηση πιθανότητας μετάβασης* διότι η κίνηση Brown είναι μια Μαρκοβιανή διαδικασία.

Ορισμός 1.15. (Κίνηση Brown - 2η Μαθηματική Κατασκευή). Η *κίνηση Brown* είναι μια στοχαστική διαδικασία $X(t,\omega)$, η οποία έχει τις εξής ιδιότητες

(1.) $X(0) = 0$ σχεδόν βέβαια.

(2.) Οι τροχιές $t \to X(t)$ είναι συνεχής σχεδόν βέβαια.

(3.) Η $X(t)$ έχει ανεξάρτητες διαφορές.

(4.) Η διαφορά $X(t) - X(s)$ για κάθε $0 \leq s < t$ έχει την κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu = 0$ και διασπορά $\sigma = t - s$.

Ορισμός 1.16. (Κίνηση Brown - 3η Μαθηματική Κατασκευή) (Ορισμός κατά Levy). Η *κίνηση Brown* είναι μια στοχαστική διαδικασία $X(t,\omega)$, η οποία έχει τις εξής ιδιότητες

(1.) $X(0) = 0$ σχεδόν βέβαια.

(2.) Οι τροχιές $t \to X(t)$ είναι συνεχής σχεδόν βέβαια.

(3.) Η $X(t)$ είναι στοιχηματική ως προς την ιστορία $\mathcal{F}_t$.

(4.) Η διαδικασία $|X(t)|^2 - t$ είναι στοιχηματική ως προς την ιστορία $\mathcal{F}_t$.

Θεώρημα 1.1. Υπάρχει μια σχεδόν βέβαιως συνεχής διαδικασία B ανεξαρτήτων διαφορών ώστε για κάθε t η τυχαία μεταβλητή B_t να είναι κεντροποιημένη κανονική με διασπορά t.

Μια τέτοια διαδικασία ονομάζεται *τυπική γραμμική κίνηση Brown* ή απλά *κίνηση Brown*. Αφού κατασκευάσαμε την τυπική γραμμική κίνηση Brown, μπορούμε να κατασκευάσουμε μια πληθώρα ενδιαφερόντων διαδικασιών. Μερικές εξ' αυτών είναι οι εξής:

(1.) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η διαδικασία $X_t^x = x + B_t$ καλείται κίνηση Brown αρχίζουσα από το x ή εν συντομία KB(x).

(2.) Έστω οι $B_t^1, B_t^2, \ldots, B_t^d$, d ανεξάρτητα αντίγραφα της B_t, τότε ορίζουμε μια διαδικασία X με χώρο καταστάσεων τον $\mathbb{R}^d$ κατά τρόπο ώστε η συνιστώσα i της X_t να είναι η B_t^i. Αυτή η διαδικασία καλείται d-διάστατος κίνηση Brown και είναι μια συνεχής κανονική διαδικασία, η οποία μηδενίζεται τη χρονική στιγμή μηδέν. Προσθέτοντας το x, όπως και προηγουμένως την αναγκάζουμε να αρχίζει από το $x \in \mathbb{R}^d$ και γράφουμε εν συντομία KB$^d(x)$.

(3.) Εξαιτίας της συνέχειας των τροχιών ισχύει ότι:

$$\sup\{B_s, 0 \le s \le t\} = \sup\{B_s, 0 \le s \le t, s \in \mathbb{Q}\}$$

Εξ' αυτού μπορούμε να ορίσουμε μια άλλη διαδικασία S θέτοντας $S_t = \sup_{s \le t} B_s$. Παρόμοια ορίζονται και οι διαδικασίες $|B_t|$, $B_t^* = \sup_{s \le t} |B_t|$ και $B_t^+ = \sup_{s \le t}(0, |B_t|)$.

Τελειώντας την περιγραφή της κίνησης Brown θα περιγράψουμε μερικά γεωμετρικώς αναλλοίωτα μεγέθη της.

Πρόταση 1.1. Έστω B μια τυπική γραμμική κίνηση Brown. Τότε ισχύουν τα εξής:

- (*Χρονική ομοιογένεια*): Για κάθε $s > 0$ η διαδικασία $B_{t+s} - B_s$, με $t \geq 0$ είναι μια κίνηση Brown ανεξαρτήτως της $\sigma(B_k, k \leq s)$.
- (*Συμμετρία*): Η διαδικασία $-B_t$, με $t \geq 0$ είναι μια κίνηση Brown.
- (*Κλιμάκωση*): Για κάθε $c > 0$ η διαδικασία cB_{t/c^2}, με $t \geq 0$ είναι μια κίνηση Brown.
- (*Χρονοαναστροφή*): Η διαδικασία X οριζόμενη ως $X_0 = 0$, $X_t = tB_{\frac{1}{t}}$ για $t > 0$ είναι μια κίνηση Brown.

Μέρος II

Διαδικασίες Bessel

Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο 2

Τρισδιάστατες Διαδικασίες Bessel

2.1 Εισαγωγή

Όπως αναφέραμε στο προηγούμενο κεφάλαιο θα μελετήσουμε τις τρισδιάστατες διαδικασίες Bessel, οι οποίες αναφέρονται αρκετά συχνά κατά την περιγραφή της γραμμικής κίνησης Brown. Θα αρχίσουμε με την μελέτη της Ευκλείδιας στάθμης της KB^d (όπου d είναι ένας ακέραιος αριθμός μεγαλύτερος του ένα) και έστω p_t το μέτρο (μήκος) της KB^d και με P_x συμβολίζουμε το μέτρο πιθανότητας της KB^d αρχίζοντες από το x και με $\mathcal{F}_t$ συμβολίζουμε την πλήρη ιστορία Brown.

Πρόταση 2.1. [3, σελ. 281] Για κάθε $d \geq 1$ η διαδικασία p_t, με $t \geq 0$ είναι μια ομοιογενής $(\mathcal{F}_t)$-Μαρκοβιανή διαδικασία ως προς κάθε P_x, $x \in \mathbb{R}^d$. Για $d \geq 2$, η ημιομάδα της P_t^d δίνεται στο $[0, +\infty)$ μέσω των πυκνοτήτων:

$$p_t^d(a,b) = \left(\frac{a}{t}\right)\left(\frac{b}{t}\right)^{\frac{d}{2}} I_{\frac{d}{2}-1}\left(\frac{ab}{t}\right) e^{-(a^2+b^2)/2t}$$

και

$$p_t^d(0,b) = \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) 2^{\frac{d}{2}-1} t^{-\frac{d}{2}} b^{d-1} e^{-b^2/2t}$$

όπου η I_ν ονομάζεται τροποποιημένη συνάρτηση Bessel δείκτου ν.

Η τροποποιημένη συνάρτηση Bessel τύπου ν, I_ν, αποτελεί μια λύση της τροποποιημένης διαφορικής εξίσωσης Bessel

$$x^2 y''(x) + x y'(x) - (x^2 + \nu^2) y(x) = 0.$$

Για τον υπολογισμό της χρησιμοποιούμε την εξής σχέση:

$$I_\nu(x) = -i^{-\nu} J_\nu(ix)$$

όπου

$$J_\nu(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{2r+\nu}}{\Gamma(r+1)\Gamma(r+\nu+1)}$$

η οποία αποτελεί μια λύση της διαφορικής εξίσωσης Bessel $2^{\text{ης}}$ τάξης

$$x^2 y''(x) + x y'(x) + (x^2 + \nu^2) y(x) = 0, \quad \text{με } \nu \in \mathbb{K}$$

.

Ορισμός 2.1. [3, σελ. 282] (d-Διάστατος Διαδικασία Bessel). Μια Μαρκοβιανή διαδικασία με ημιομάδα την P_t^d καλείται *d-διάστατος διαδικασία Bessel.*

Προφανώς οι διαδικασίες Bessel είναι και διαδικασίες Feller.

2.1.1 Διαδικασία Feller

Ορισμός 2.2. (Διαδικασία Feller). Η *διαδικασία Feller* είναι μια Μαρκοβιανή διαδικασία, η οποία έχει μια συνάρτηση μεταβάσεως Feller [2].

Όπου μια συνάρτηση μετάβασης Feller ονομάζεται μια συνάρτηση μετάβασης συνδεδεμένη με μια ημιομάδα Feller και μια ημιομάδα Feller στον $C_0(E)$ είναι μια οικογένεια T_t με $t \geq 0$ θετικών γραμμικών τελεστών στον $C_0(E)$, τέτοια ώστε:

- $T_0 = Id$ και $\|T_t\| \leq 1$, $\forall t$.
- $T_{t+s} = T_t \cdot T_s$ για κάθε ζεύγος $s, t \geq 0$.
- $\lim\limits_{t \to 0} \|T_t f - f\| = 0 \ \forall f \in C_0(E)$.

Πρόταση 2.2. Με κάθε ημιομάδα Feller στον E συνδέεται με μία μοναδική ομοιογενής συνάρτηση μεταβάσεως P_t με $t \geq 0$ στον $(E, \mathcal{E})$ τέτοια ώστε

$$T_t f(x) = P_t f(x) \quad \forall f \in C_0(E) \text{ και } \forall x \in E$$

Όπου η συνάρτηση μεταβάσεως στον μετρήσιμο χώρο $(E, \mathcal{E})$ είναι μια οικογένεια $P_{s,t}$ με $0 \leq s < t$ πιθανοτήτων μεταβάσεως στον $(E, \mathcal{E})$ τέτοια ώστε για κάθε τριάδα πραγματικών αριθμών $s < t < u$ να ισχύει ότι:

$$\int P_{s,t}(x, dy) P_{t,u}(y, A) = P_{s,u}(x, A)$$

για κάθε ζεύγος $x \in E$ και $A \in \mathcal{E}$. Αυτή η σχέση είναι γνωστή και ως *εξίσωση των Chapman-Kolmogorov*. Η συνάρτηση μεταβάσεως θα ονομάζεται ομογενής, εάν η $P_{s,t}$ εξαρτάται από το s και το t μόνο μέσω της διαφοράς $t - s$. Τότε θα γράφουμε P_t αντί του $P_{0,t}$ και η παραπάνω εξίσωση γίνεται ως εξής:

$$P_{t+s}(x, A) = \int P_s(x, dy) P_t(y, A)$$

για κάθε $s, t \geq 0$ με άλλα λόγια η οικογένεια $\{P_t, t \geq 0\}$ αποτελεί μια ημιομάδα.

Χάριν συντομίας θα γράφουμε BES^d και $\mathrm{BES}^d(x)$ με τα οποία θα συμβολίζουμε μια d-διάστατη διαδικασία Bessel αρχίζουσα από το $x \geq 0$.

Όλα αυτά δηλώνουν ότι το μήκος μιας KB^d αποτελεί μια πραγματοποίηση μιας BES^d. Είναι προφανές, εκ των ιδιοτήτων της KB^d ότι μια BES^d δεν μηδενίζεται ποτέ μετά τη στιγμή μηδέν, όταν το $d \geq 2$ και επιπλέον για $d \geq 3$ είναι μεταβατική διαδικασία δηλαδή συγκλίνει σχεδόν βέβαια στο άπειρο.

Από εδώ και στο εξής θα εστιάσουμε την προσοχή μας στις τρισδιάστατες διαδικασίες Bessel BES^3, τις οποίες θα συμβολίζουμε με p_t.

2.2 Τρισδιάστατες Διαδικασίες Bessel

Πρόταση 2.3. Αν η p_t είναι μια BES^3 με $x \geq 0$, τότε υπαρχει μια κίνηση Brown β με

$$p_t = x + \beta_t + \int_0^t p_s^{-1} ds$$

Επιπλέον η p_t^{-1} είναι τοπικώς στοιχηματική.

Πόρισμα 2.1. [3, σελ. 283] Έστω P_x^3 το μέτρο πιθανοτήτων, το οποίο περιγράφει την $\mathrm{BES}^3(x)$ με $x > 0$ και T_a ο χρόνος πρώτης εισόδου του $a > 0$. Για $0 < a < x < b$ ισχύει ότι:

$$P_x^3[T_a > T_b] = \frac{b^{-1} - x^{-1}}{b^{-1} - a^{-1}}$$

και

$$P_x^3[T_a > \infty] = \frac{a}{x}.$$

Επιπλέον η $J_0 = \inf_{s \geq 0} P_s$ είναι ομοιόμορφως κατανεμημένη στο $[0, x]$.

2.2.1 Θεώρημα Pitman

Θεώρημα 2.1. [3, σελ. 283] (Pitman). Η διαδικασία $p_t = 2S_t - B_t$ είναι $\mathrm{BES}^3(0)$, όπου B είναι μια $\mathrm{KB}^1(0)$ και $S_t = \sup_{s \leq t} B_s$ και $J_t = \inf_{s \geq t} p_s$, τότε οι διαδικασίες $(2S_t - B_t, S_t)$ και (p_t, J_t) έχουν τον ίδιο νόμο.

Πόρισμα 2.2. [3, σελ. 284] Η δεσμευμένη κατανομή της S_t καθώς επίσης και της $S_t - B_t$, ως προς την $\mathcal{F}_t^{2S-B}$ είναι η ομοιόμορφη κατανομή στο $[0, 2S_t - B_t]$.

Πόρισμα 2.3. [3, σελ. 285] Αν p είναι μια $\mathrm{BES}^3(x)$, τότε η $B_t = 2J_t - p_t$ είναι κίνηση Brown αρχίζοντες από το $2J_0 - x$ και $\mathcal{F}_t^B = \sigma(J_t, \mathcal{F}_t^p)$.

Πριν αναφέρουμε το ακόλουθο πόρισμα, θα δώσουμε την έννοια του τοπικού χρόνου μέσω του Θεωρήματος Tanaka

2.2.2 Θεώρημα Tanaka

Θεώρημα 2.2. (Tanaka). Για κάθε πραγματικό αριθμό a, υπαρχει μια αύξουσα συνεχής διαδικασία L^a λεγόμενη τοπικός χρόνος της X στο a τέτοια ώστε:

$$\begin{aligned}
|X_t - a| &= |X_0 - a| + \int_0^t sgn(X_s - a) dX_s + L_t^a \\
|X_t - a|^+ &= |X_0 - a|^+ + \int_0^t \mathcal{X}_{(X_s > a)} dX_s + \frac{1}{2} L_t^a \\
|X_t - a|^- &= |X_0 - a|^- - \int_0^t \mathcal{X}_{(X_s \leq a)} dX_s + \frac{1}{2} L_t^a
\end{aligned}$$

Πόρισμα 2.4. Η διαδικασία $B_t = \displaystyle\int_0^t sgn(B_s) dB_s$ είναι τυπική κίνηση Brown και $\mathcal{F}_t^p = \mathcal{F}_t^{|B|}$. Επιπλέον ισχύει ότι

$$L_t = \sup_{s \leq t} (-B_s)$$

2.2.3 3-Διάστατες Διαδικασίες Bessel - Τοπικοί Χρόνοι

Πόρισμα 2.5. [3, σελ. 285] Αν B είναι ΚΒ(0) και L ο τοπικός της χρόνος στο 0, τότε η $|B| + L$ είναι $\mathrm{BES}^3(0)$.

Πρόταση 2.4. [3, σελ. 285] Έστω p μια BES^3. Αν T είναι χρονοδιακόπτης της δισδιάστατης διαδικασίας (p, J), με $p_T = J_T$, τότε η $p_{T+t} - p_T$ είναι BES$^3(0)$ ανεξάρτητα της $\{p_t, t < T\}$.

Η πρώτη στιγμή όπου η p φτάνει το απόλυτο ελάχιστό της, ο $\tau = \inf\{t, p_t = J_0\}$ ικανοποιεί προφανώς τη συνθήκη της Προτάσης 2.4. Επειδή μια BES^3 δεν αγγίζει ποτέ το 0, προκύπτει ότι ο T είναι ο μόνος χρόνος για τον οποίο η p ισούτε με J_0. Υπενθυμίζουμε ότι η $p_t = J_0$ είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο $[0, x]$ και διατυπώνουμε την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 2.5. [3, σελ. 286] Έστω p μια BES$^3(x)$, με $x > 0$. Η διαδικασία $(p_t, t < T)$ είναι ισοδύναμη της $(B_t, t < T_\gamma)$ όπου B είναι μια KB(x) και T_γ είναι ο χρόνος πρώτης επισκέψεως της B ενός ανεξάρτητου σημείου γ ομοιόμορφως κατανεμημένο στο $[0, x]$.

2.2.4 Θεώρημα Williams

Θεώρημα 2.3. [3, σελ. 286] (Williams). Επιλογή του $c > 0$ και των τεσσάρων ανεξάρτητων στοιχείων του:

(1.) μιας τυχαίας μεταβλητής a ομοιόμορφα κατανεμημένης στο δίαστημα $[0, c]$.

(2.) μιας KB(c) καλούμενη B.

(3.) δύο BES$^3(0)$ καλούμενες p και $\tilde{p}$

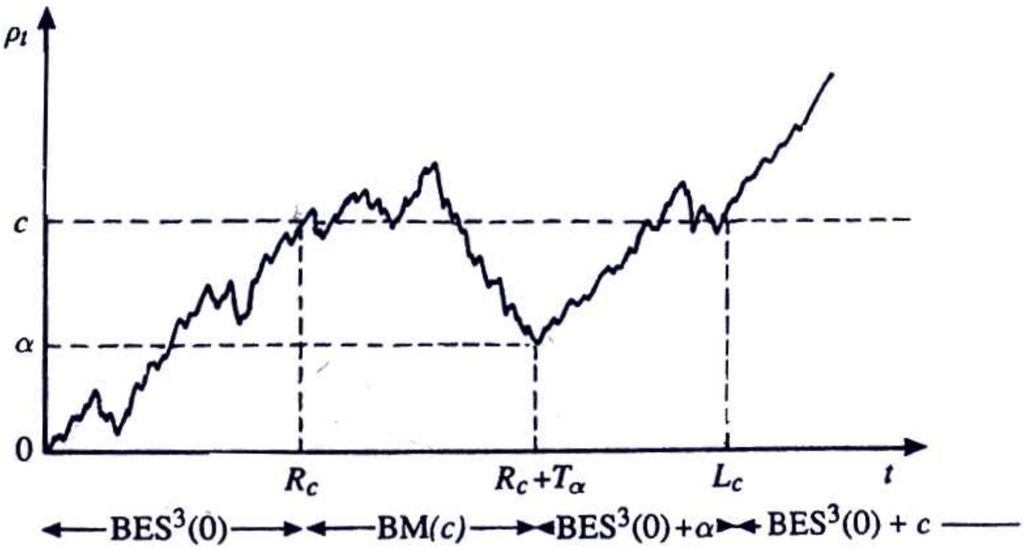
θέτουμε

$$R_c = \inf\{t : p_t = c\} \quad \text{και} \quad T_a = \inf\{t : B_t = a\}$$

Τότε η διαδικασία X, η οποία δινέται από

$$X_t = \begin{cases} p_t, & t < R_c \\ B_t - R_c, & R_c \le t < R_c + T_a \\ a + \tilde{p}_t - R_c - T_a, & t \ge R_c + T_a \end{cases}$$

είναι BES$^3(0)$.



Εικόνα 2.1: Θεώρημα Williams - Η παράμετρος a είναι ομοιόμορφος κατανεμημένη στο διάστημα $[0, c]$.

Λήμμα 2.1. Εάν η p είναι $\mathrm{BES}^3(x)$, με $x > 0$, τότε η p^{-1} είναι μια χρονοαλλαγμένη $\mathrm{KB}(x^{-1})$ περιορισμένη στο $[0, T_0]$.

Ορισμός 2.3. (Χρονοαλλαγή). Μια *χρονοαλλαγή* c είναι μια οικογένεια C_s, με $s \geq 0$ χρονοδιακοπτών τέτοια ώστε οι απεικονίσεις $s \to C_s$ να είναι σχεδόν βέβαια αύξουσες και εκ δεξιών συνεχείς.

Πρόταση 2.6. [3, σελ. 287] Έστω B μια ΚΒ(a), με $a > 0$ και $M = \max\{B_t, t < T_0\}$ τότε ισχύουν τα εξής:

- η τυχαία μεταβλητή M έχει πυκνότητα ax^{-2} στο $[-a, +\infty)$
- υπάρχει σχεδόν βέβαια ένας μοναδικός χρόνος $\nu < T_0$ με $B_\nu = M$

Επι πλέον, δεσμευμένος στο $M = m$,

- οι διαδικασίες $X^1 = (B_t, t < \nu)$ και $X^2 = (B_{\nu+t}, 0 \leq t < T_0 - \nu)$ είναι ανεξάρτητες.
- η διαδικασία X^1 είναι $\mathrm{BES}^3(a)$ εξελλισσόμενη ώσπου να αγγίξει το m
- η διαδικασία $m - X^2$ είναι $\mathrm{BES}^3(0)$ εξελισσόμενη ώσπου να αγγίξει το m.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

d-Διάστατες Διαδικασίες Bessel

Από εδώ και στο εξής θα ασχοληθούμε με τη γενικότερη περίπτωση των διαδικασιών Bessel διαστάσεως d. Αρχικά όμως θα υπενθυμίσουμε τον τρόπο υπολογισμού των στοχαστικών ολοκληρωμάτων.

3.1 Στοχαστικά Ολοκληρώματα

Πρόταση 3.1. Αν οι X και Y είναι δύο συνεχείς υποστοιχηματικές τότε ισχύει ότι:

$$X_tY_t = X_0Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + < X, Y >_t$$

όπου $< X, Y >_t = \int_0^t X_s Y_s dS$.

Ειδικά αν έχουμε $X = Y$ τότε:

$$X_t^2 = X_0^2 + 2\int_0^t X_s dX_s + < X, X >_t$$

και αν X είναι ΚΒ έχουμε:

$$B_t^2 - t = 2\int_0^t B_s dB_s$$

αφού $< X, X >_t = t$ και $X_0 = 0$.

Θεώρημα 3.1. [5] **(Itô).** Έστω $X = (X^1, X^2, \ldots, X^d)$ ένα συνεχές ημιστοιχηματικό διάνυσμα και $F \in \mathbb{C}^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ τότε η $F(X)$ είναι συνεχής ημιστοιχηματική και

$$F(X_t) = F(X_0) + \sum_i \int_0^t \frac{\partial F}{\partial X_i}(X_s) dX_s^i + \frac{1}{2}\sum_{i,j}\int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(X_s) d < X^i, X^j >_s$$

όπου $< X^i, X^j >_s = \int_0^s X_t^i X_t^j dt$.

Εαν B είναι μια ΚΒ^d και θέσουμε $p = |B|$ τότε χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 3.1 προκύπτει ότι

$$p_t^2 = p_0^2 + 2\sum_{i=1}^d \int_0^t B_s^i dB_s + dt$$

Στη συνέχεια, θεωρούμε τις εξής περιπτώσεις για τις τιμές του d.

- Για $d > 1$ η p_t είναι σχεδόν βεβαία μεγαλύτερη του μηδενός.
- Για $d = 1$ το σύνολο $\{s : p_s = 0\}$ έχει μέτρο Lebesque μηδέν.

ώστε για όλες τις παραπάνω περιπτώσεις θεωρούμε τη διαδικασία:

$$\beta_t = \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{B_s^i}{p_s} dB_s^i$$

η οποία λόγω του ότι $< \beta, \beta >_t = t$ είναι μια γραμμική κίνηση Brown. Επομένως η p_t^2 ικανοποιεί τη στοχαστική διαφορική εξίσωση:

$$p_t^2 = p_0^2 + 2\int_0^t p_s d\beta_s + dt$$

3.2 Τετράγωνο της d-Διάστατης Διαδικασίας Bessel

Για να συνεχίσουμε την ανάλυση μας, θεωρούμε τη στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$z_t = x + 2\int_0^t \sqrt{|z_t|}d\beta_s + dt$$

Επειδή ισχύει ότι $|\sqrt{z} - \sqrt{z'}| < \sqrt{|z - z'|}$ για κάθε $z, z' > 0$ η παραπάνω εξίσωση έχει μοναδική ισχυρή λύση για κάθε d και για κάθε x. Επιπλέον για $d = x = 0$, αυτή η λύση είναι η $z_t = 0$ και με βάση τα συγκριτικά θεωρήματα εξασφαλίζεται ότι για όλες τις περιπτώσεις ισχύει ότι $z_t \geq 0$ σχεδόν βέβαια. Επομένως το σύμβολο της απολύτου τιμής στην παραπάνω στοχαστική διαφορική εξίσωση είναι περιττό.

Ορισμός 3.1. [3, σελ. 491] (Τετράγωνο της d-διάστατης διαδικασίας Bessel). Για κάθε $d \geq 0$ και για κάθε $x \geq 0$, η μοναδική ισχυρή λύση της εξίσωσης

$$z_t = x + 2\int_0^t \sqrt{z_s}dB_s + dt$$

ονομάζεται *τετράγωνο της d-διάστατης διαδικασίας Bessel*, η οποία αρχίζει από το x και συμβολίζεται με $\mathrm{BESQ}^d(x)$.

Ο αριθμός d είναι η διάσταση της $\mathrm{BESQ}^d(x)$. Ο νόμος της $\mathrm{BESQ}^d(x)$ στον $\mathbb{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ συμβολίζεται με Q_x^d. Εισάγουμε επίσης τον αριθμό $\nu = \frac{d}{2} - 1$, ο οποίος καλείται δείκτης της αντίστοιχης διαδικασία και γράφουμε $\mathrm{BESQ}^{(\nu)}$ αντί $\mathrm{BESQ}^d(x)$ και $Q^{(\nu)}$ αντί Q_x^d αντίστοιχα.

Έτσι ορίσαμε μια μονοπαραμετρική οικογένεια διαδικασιών, η οποία για ακέραιες τιμές της διάστασης d συμπίπτει με το τετράγωνο της απολύτου τιμής (του μέτρου) της KB^d.

Για κάθε t και κάθε $a > 0$ η απεικόνιση $x \to Q_x^d[X_t \geq a]$, όπου X είναι η διαδικασία συντεταγμένων είναι αύξουσα λόγω των συγκριτικών θεωρημάτων, επομένως είναι Borel-μετρήσιμος. Επίσης με βάση το θεωρήμα μονότονου κλάσεως (Θεώρημα 3.2) προκύπτει ότι η $x \to Q_x^d[X_t \in A]$ είναι Borel-μετρήσιμη, για κάθε σύνολο Borel A.

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε κάποιους ορισμούς έτσι ώστε να εξηγήσουμε καλύτερα την σημασία της έννοιας *Borel μετρήσιμος*.

3.2.1 Borel Μετρήσιμος

Ορισμός 3.2. (Μετρήσιμος Χώρος). *Μετρήσιμος χώρος* είναι ένα ζεύγος (Ω, Σ) όπου Ω είναι ένα σύνολο και Σ μια σ-άλγεβρα υποσύνολων του Ω.

Με τον όρο σ-άλγεβρα εννοούμε μια κλάση υποσυνόλων του Ω, η οποία είναι κλειστή ως προς το συμπλήρωμα και ως προς αριθμήσιμες το πολύ ενώσεις. Με άλλα λόγια μια κλάση υποσυνόλων Σ του συνόλου Ω είναι σ-άλγεβρα εάν έχει τις εξής ιδιότητες:

- $A \in \Sigma \Rightarrow A^C \in \Sigma$.
- $A_n \in \Sigma \Rightarrow \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$, με $n = 1, 2, \ldots$

Ορισμός 3.3. (Άλγεβρα του Borel). Εαν Ω είναι μετρήσιμος ή γενικότερα τοπολογικός χώρος η *άλγεβρα του Borel* ορίζεται ως η άλγεβρα που παράγεται από όλα τα ανοιχτά σύνολα του Ω. Με άλλα λόγια, *άλγεβρα του Borel* είναι η ελάχιστη σ-άλγεβρα που περιέχει όλα τα ανοιχτά σύνολα του Ω. Τα στοιχεία αυτής της άλγεβρας ονομάζονται *σύνολα Borel*.

Ορισμός 3.4. (Borel Μετρήσιμος). Έστω (Ω, Σ) μετρήσιμος χώρος και X μετρικός χώρος. Μια συνάρτηση $f : \Omega \to X$ ονομάζεται *Borel μετρήσιμος* εαν για κάθε ανοιχτό σύνολο A του X το σύνολο $f^{-1}(A)$ είναι μετρήσιμο, δηλαδή $f^{-1}(A) \in \Sigma$, όπου Σ είναι η άλγεβρα του Borel που παράγεται από τα ανοιχτά σύνολα του X.

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε τέσσερις παραλλαγές του θεωρήματος της μονοτόνου κλάσεως.

3.2.2 Θεώρημα Μονοτόνου Κλάσεως

Θεώρημα 3.2. (Θεώρημα Μονοτόνου Κλάσεως - 1η παραλλαγή). Έστω $\mathfrak{F}$ μια συλλογή υποσυνόλων του Ω με

- $\Omega \in \mathfrak{F}$.
- Αν $A \cdot B \in \mathfrak{F}$ και $A \subset B$ τότε $B \backslash A \in \mathfrak{F}$.
- Αν η $\{A_n\}$ είναι μια αύξουσα ακολουθία στοιχείων της $\mathfrak{F}$, τότε $\bigcup A_n \in \mathfrak{F}$.
- Αν $\mathcal{F} \subset \mathfrak{F}$, όπου $\mathcal{F}$ είναι πλήρης ως προς πεπερασμένες τομές τότε $\sigma(\mathcal{F}) \subset \mathfrak{F}$

Θεώρημα 3.3. (Θεώρημα Μονοτόνου Κλάσεως - 2η παραλλαγή). Έστω H ένας διανυσματικός χώρος φραγμένων πραγματικών συναρτήσεων επί του Ω όπου

- Ο H περιέχει τις σταθερές συναρτήσεις.
- Αν η $\{h_n\}$ είναι μια αύξουσα ακολουθία θετικών στοιχείων του H ώστε το $h = \sup h_n$ να είναι φραγμένο, τότε $h \in H$.

Αν το B είναι ένα υποσύνολο του H, το οποίο παραμένει αναλοίωτο ως προς τον πολλαπλασιασμό, σημειακώς, τότε ο H περιέχει όλες τις φραγμένες συναρτήσεις, οι οποίες είναι $\sigma(B)$-μετρήσιμες.

Τα προηγούμενα θεωρήματα εδώ εφαρμόζονται με την εξής δομή: Έστω μια οικογένεια απεικονίσεων f_i, $i \in I$ του Ω σε μετρήσιμους χώρους $(E_i, \mathcal{E}_i)$. Έστω ότι για κάθε $i \in I$ υπάρχει μια υποκλάση N_i του $\mathcal{E}_i$ κλειστή σε πεπερασμένες τομές και με $\sigma(N_i) = \mathcal{E}_i$, τότε ισχύουν τα εξής

Θεώρημα 3.4. (Θεώρημα Μονοτόνου Κλάσεως - 3η παραλλαγή). Έστω N η οικογένεια συνόλων της μορφής $\bigcap_{i \in I} f_i^{-1}(A_i)$ όπου τα A_i διατρέχουν τα N_i και το J διατρέχει τα πεπερασμένα υποσύνολα του I, τότε $\sigma(N) = \sigma(f_i, i \in I)$.

Θεώρημα 3.5. (Θεώρημα Μονοτόνου Κλάσεως - 4η παραλλαγή). Έστω H ένας διανυσματικός χώρος πραγματικών συναρτήσεων επί του Ω περιέχων του $\mathcal{X}_\Omega$, το οποίο ικανοποιεί τη δεύτερη συνθήκη του Θεωρήματος 3.3 και περιέχει όλες τις συναρτήσεις $\mathcal{X}_\Gamma$ για κάθε $\Gamma \in N$. Τότε ο H περιέχει όλες τις φραγμένες πραγματικές συναρτήσεις, οι οποίες είναι $\sigma(f_i, i \in I)$ μετρήσιμες.

3.2.3 Αθροίσιμος Ιδιότητα των BES^d

Θεώρημα 3.6. Εάν για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$ υπάρχει μια και μόνο λύση P_x του στοιχηματικού προβλήματος $\pi(x, a, b)$ και αν για κάθε $A \in B(\mathbb{R}^d)$ και $t \geq 0$ η απεικόνιση $x \to P_x[X_t \in A]$ είναι μετρήσιμη τότε η $(X_t, P_x, x \in \mathbb{R}^d)$ είναι Μαρκοβιανή ακολουθία με συνάρτηση μεταβάσεως την $P_t(x, A) = P_x[X_t \in A]$.

Επομένως, λαμβάνοντας υπόψην το παραπάνω θεώρημα, συνεπάγεται ότι αυτές οι διαδικασίες είναι Μαρκοβιανές. Στην πραγματικότητα είναι διαδικασίες Feller (για τις οποίες αναφερθήκαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο) κάτι το οποίο θα αποτελέσει πόρισμα της επόμενης αθροισίμου ιδιότητος της οικογένειας BES^d.

Αν P και Q είναι δύο μέτρα πιθανοτήτων στον $\mathbb{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ θα συμβολίζουμε με $P * Q$ την συνέλιξη των P και Q, δηλαδή την εικόνα του $P \otimes Q$ στον $\mathbb{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, μέσω της απεικονίσεως $(\omega, \omega') \to \omega + \omega'$.

Θεώρημα 3.7. Για κάθε $d, d' \geq 0$ και $x, x' \geq 0$ ισχύει:

$$Q_x^d * Q_{x'}^{d'} = Q_{x+x'}^{d+d'}$$

Πόρισμα 3.1. [3, σελ. 493] Αν μ είναι ένα μέτρο στον $\mathbb{R}^+$ τέτοιο ώστε

$$\int_0^\infty (1+t)d\mu(t) < \infty$$

τότε υπάρχουν δύο αριθμοί A_μ και B_μ τέτοιοι ώστε

$$Q_x^d \left[e^{\int_0^\infty X_t d\mu(t)} \right] = A_\mu^x B_\mu^d$$

όπου X είναι η διαδικασία συντεταγμένων.

Επιλέγοντας $\mu = \lambda \epsilon_t$ λαμβάνουμε τον μετασχηματισμό του Laplace της συνάρτησεως μεταβάσεως της BESQ^d. Οι τιμές των A_μ και B_μ υπολογίζονται θέτοντας $d = 1$. Τότε για $\lambda > 1$ έχουμε

$$\begin{aligned} Q_x^1 \left[e^{-\lambda X_t} \right] &= Q_x^1 \left[e^{-\lambda \int_0^\infty X_s \epsilon_t(ds)} \right] \\ &= E_{\sqrt{x}} \left[e^{-\lambda B_t^2} \right] \end{aligned} \tag{3.1}$$

όπου B είναι KB^1. Αυτό υπολογίζεται εύκολα και ισούται με

$$(1+2\lambda t)^{-\frac{1}{2}} e^{-\lambda x/(1+2\lambda t)}$$

Άρα αντικαθιστώντας το παραπάνω αποτέλεσμα στην σχέση (3.1) έχουμε:

$$Q_x^d e^{-\lambda X_t} = (1+2\lambda t)^{-\frac{1}{2}} e^{-\lambda x/(1+2\lambda t)}$$

Αντιστρέφοντας αυτόν τον μετασχηματισμό του Laplace λαμβάνουμε το εξής πόρισμα.

Πόρισμα 3.2. [3, σελ. 493] Για $d > 0$ η ημιομάδα της BESQ^d έχει πυκνότητα στο y ίση με

$$q_t^d(x,y) = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{y} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-(x+y)/2t} I_\nu(\sqrt{xy}/t), \quad t > 0,\ x > 0$$

όπου ν είναι ο αντίστοιχος δείκτης του d και I_ν είναι η συνάρτηση Bessel δείκτου ν.

Για $x = 0$ αυτή η πυκνότητα γίνεται

$$q_t^d(0,y) = (2t)^{-\frac{d}{2}} \Gamma \left(\frac{d}{2} \right)^{-1} y^{\frac{d}{2}-1} e^{-y/2t}$$

Επιπλέον η ημιομάδα της BESQ^0 δίνεται από τη σχέση:

$$Q_t^0(x,\cdot) = e^{-x/2t}\epsilon_0 + \Xi_t(x,\cdot)$$

όπου η $\Xi_t(x,\cdot)$ έχει την πυκνότητα:

$$q_t^0 = (2t)^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-(x+y)/2t} I_1(\sqrt{xy}/t)$$

Συνέπεια όλων των παραπάνω είναι όπως προαναφέρθηκε ότι η BESQ^d είναι διαδικασία Feller. Αυτό φαίνεται, είτε μέσω των τιμών της πυκνότητας, είτε παρατηρώντας ότι για κάθε $f \in \mathbb{C}_0([0,+\infty)$ η $Q_x^d[f(X_t)]$ είναι συνεχής και ως προς x και ως προς t, όπου αυτό προκύπτει από την ειδική περίπτωση όπου $f(x) = e^{-\lambda x}$ και χρησιμοποιώντας το θεώρημα Stone-Weierstrass (Θεώρημα 3.8). Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε κάποιες ιδιότητες:

(1.) Για $d \geq 3$ η διαδικασία BESQ^d είναι μεταβατική ενώ για $d < 3$ είναι επανερχόμενη.

(2.) Για $d \geq 2$ το σύνολο $\{0\}$ είναι πολικό ενώ για $d < 2$ έχει καταληφθεί σχεδόν βέβαια. Επιπλέον για $d = 0$ το $\{0\}$ είναι σημείο απορροφήσεως διότι η διαδικασία $X \equiv 0$ αποτελεί προφανώς λύσης της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης

$$z_t = x + 2\int_0^t \sqrt{z_s}dB_s + dt$$

Θεώρημα 3.8. (Stone-Weierstrass). Θεωρούμε ένα συμπαγή χώρο Hausdoff X και το σύνολο $C(X)$ όλων των συνεχών μιγαδικών συναρτήσεων του X. Θεωρούμε επίσης το υποσύνολο $\mathcal{U}$ του $C(X)$, το οποίο είναι μια άλγεβρα, κλειστό ως προς την ομοιόμορφη τοπολογία $C(X)$, το οποίο περιέχει τις σταθερές συναρτήσεις και το οποίο περιέχει επαρκώς συναρτήσεις, έτσι ώστε να διαχωρίσουμε τα στοιχεία του X. Καθώς το $\mathcal{U}$ είναι άλγεβρα ονομάζεται αυτοσυμπληρωματικό, εάν κάθε συνθήκη συζυγίας κάθε συνάρτησης στον $\mathcal{U}$ ανήκει στον $\mathcal{U}$.

Επισημαίνουμε ότι, το παραπάνω θεώρημα αναφέρει ότι εάν το $\mathcal{U}$ είναι αυτοσυμπληρωματικό τότε το $\mathcal{U} = C(X)$.

Θεώρημα 3.9. (Πολικό Σύνολο). Για μια Μαρκοβιανή διαδικασία με χώρο καταστάσεων E ένα σύνολο Borel A, θα λέμε ότι είναι *πολικό σύνολο* αν

$$P_z[T_A < \infty] = 0, \quad \forall z \in E$$

Δύο βασικές ιδιότητες των Μαρκοβιανών είναι οι εξής:

(1.) Εάν συγκλίνουν στο άπειρο λέγονται *μεταβατικές*.

(2.) Ενώ αν επανέρχονται σε τυχόντα μεγάλα χρονικά διαστήματα, σε σχετικά μικρά σύνολα, για παράδειγμα σε ανοιχτές σφαίρες πολύ μικρής ακτίνας λέγονται *επανερχόμενες*.

Πρόταση 3.2. Έστω $x \in E$ και $\sigma_x = \inf\{t > 0 : X_t \neq x\}$, τότε υπάρχει μια σταθερά $a \in [0, +\infty)$ εξαρτώμενη από το x τέτοια ώστε

$$P_x[\sigma_x > t] = e^{at}$$

Παρατήρηση 3.1. Η παραπάνω πρόταση οδηγεί σε μια ταξινόμηση των σημείων. Εάν $a = \infty$ τότε ο σ_x είναι μηδέν P_x-σχεδόν βέβαια με άλλα λόγια η διαδικασία εγκαταλείπει το x αμέσως. Εάν το $a = 0$ τότε η διαδικασία δεν εγκαταλείπει το x ποτέ και λέμε ότι είναι μια *παγίδα* ή ένα *σημείο απορροφήσεως*.

Αυτές οι παρατηρήσεις όμως δεν περιγράφουν την συμπεριφορά της BESQ^d για μικρά d. Θέτοντας όμως:

$$\begin{cases} S_\nu(x) = -x^{-\nu} & \text{για } \nu > 0 \\ S_0(x) = \log x & \text{για } \nu = 0 \\ S_\nu(x) = x^{-\nu} & \text{για } \nu < 0 \end{cases}$$

και αν T είναι ο χρόνος πρώτης εισόδου στο $\{0\}$, τότε χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 3.1 προκύπτει ότι η $S_\nu(X)^T$ είναι τοπικώς σχηματική υπό τον Q_x^d. Προφανώς η S_ν

είναι *συνάρτηση κλίμακος* για την BESQ^d και προκύτει ότι για $0 \leq d < 2$ το σημείο 0 καταλαμβάνεται σχεδόν βέβαια καθώς επίσης ότι η διαδικασία είναι μεταβατική για $d > 2$.

3.2.4 Συνάρτηση Κλίμακος

Ορισμός 3.5. (Συνάρτηση Κλίμακος). Έστω μια συνεχής και αύξουσα συνάρτησης S στον E τέτοια ώστε για κάθε $a, b, x \in E$ με $l \leq a < x < b \leq r$ να ισχύει ότι:

$$P_x[T_b < T_a] = \frac{S(x) - S(a)}{S(b) - S(a)}$$

με $T_x = \inf\{t > 0 : X_t = x\}$. Τότε η συνάρτηση S ονομάζεται *συνάρτηση κλίμακος*.

Παρατήρηση 3.2. Έστω $\tilde{S}$ μια άλλη συνάρτηση με τις ίδιες ακριβώς ιδιότητες με τη συνάρτηση S του παραπάνω ορισμού τότε

$$\tilde{S} = aS + b, \quad \text{με } a > 0 \text{ και } b \in \mathbb{R}.$$

Παρατήρηση 3.3. Η συνάρτηση S της παραπάνω πρότασης ονομάζεται *συνάρτηση κλίμακος* της X.

Στη συνέχεια επανερχόμαστε στις BESQ^d.

Πρόταση 3.3. [3, σελ. 494]

- Για $d = 0$ το σημείο 0 είναι *απορροφητικό*.
- Για $d > 0$ το σημείο 0 είναι *άμα-ανακλαστικό*.

Ορισμός 3.6. (Βραδέως - Ακαριαίως Ανακλαστικό Σημείο). Το σημείο 0 θα ονομάζεται *βραδέως ανακλαστικό*, εάν $m(\{0\}) > 0$ και *ακαριαίως ανακλαστικό*, όταν $m(\{0\}) = 0$ όπου $m(\cdot)$ είναι το μέτρο Lebesque.

Ορισμός 3.7. [8] **(Μετρο Lebesque).** Με τον όρο *μέτρο Lebesque* στους πραγματικούς αριθμούς εννοούμε ένα μέτρο επί της άλγεβρας Borel έτσι ώστε $\mu(I) < \infty$ για κάθε φραγμένο διάστημα I. Ως συνάρτηση κατανομής εννοούμε μια συνάρτηση $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η οποία είναι

- μη φθίνουσα ($a > b \Rightarrow F(a) \leq F(b)$) και
- εκ δεξιών συνεχής $\lim_{x \to x_0^+} F(x) = F(x_0)$.

Στη συνέχεια θα περιγράψουμε τις ιδιότητες κλιμακώσεως της BESQ^d.

(Ιδιότητα της Κλίμακος Brown). Αν η B είναι μια τυπική KB^d και $B_t^x = x + B_t$ τότε για κάθε πραγματικό αριθμό $c > 0$ οι διαδικασίες $B_{c^2 t}^x$ και cB_t^x έχουν τον ίδιο νόμο. Αυτή η ιδιότητα ονομάζεται *ιδιότητα της κλίμακος Brown.* Οι διαδικασίες BESQ^d έχουν μια ιδιότητα της ίδιας κατηγορίας.

Πρόταση 3.4. Αν X είναι μια BESQ$^d(x)$, τότε για κάθε $c > 0$ η διαδικασία $c^{-1}X_{ct}$ είναι BESQ$^d(\frac{x}{c})$.

Στη συνέχεια θα επανέρθουμε στο Πόρισμα 3.1 για να δείξουμε πως υπολογίζονται οι σταθερές A_μ και B_μ. Αυτό θα οδηγήσει στο ακριβή υπολογισμό των νόμων κάποιων συναρτησιδών Brown. Υπενθυμίζουμε ότι αν το μ είναι *μέτρο Radon* στο $[0, +\infty)$ τότε η διαφορική εξίσωση (υπό την έννοια των κατανομών) $\phi'' = \phi_\mu$ έχει μοναδική λύση ϕ_μ, η οποία είναι θετική, μη αύξουσα στο $[0, +\infty)$ και τέτοια ώστε $\phi_\mu(0) = 1$. Η συνάρτηση ϕ_μ είναι κυρτή άρα υπάρχει η εκ δεξιών παράγωγος ϕ'_μ και είναι αρνητική.

Επιπλέον, επειδή η ϕ_μ είναι μη αύξουσα έχουμε ότι

$$\phi_\mu(\infty) = \lim_{x\to\infty} \phi_\mu(x)$$

Το παραπάνω όριο υπάρχει και ανήκει στο $[0, 1]$. Πραγματι ισχύει ότι

$$\lim_{x\to\infty} \phi_\mu(\infty) < 1$$

εκτός της τετριμένης περιπτώσεως $\mu = 0$ όντως, αν $\phi_\mu(\infty) = 1$ τότε η ϕ_μ ταυτίζεται με το 1 και $\mu = 0$.

Από εδώ και στο εξής θα υποθέσουμε ότι

$$\int (1 + x) d\mu(x) < \infty$$

και από αυτό συνεπάγεται ότι

$$\phi_\mu(\infty) > 0$$

Θέτουμε $X_\mu = \displaystyle\int_0^\infty X_t d\mu(t)$. Σε αυτό το πλαίσιο λαμβάνουμε την ακριβή τιμή των σταθερών A_μ και B_μ του πορίσματος.

Θεώρημα 3.10. Με βάση τις παραπάνω προϋποθέσεις ισχύει ότι:

$$Q_x^d[e^{-\frac{1}{2}X_\mu}] = \phi_\mu(\infty)^{\frac{d}{2}} e^{\frac{x}{2}\phi'_\mu(0)}.$$

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω αποδεικνύεται το τύπο των Cameron-Martin.

Τύπος (Cameron-Martin).

$$E\left[e^{-\lambda \int_0^1 B_s ds}\right] = \left(\cosh \sqrt{2\lambda}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

όπου B είναι μια τυπική γραμμική κίνηση Brown.

Εδώ παρουσιάζεται ο τύπος των Cameron-Martin, ο οποίος αρχικά εδείχθει μέσω αναλυτικών μεθόδων αλλά προκύπτει θέτοντας $x = 0$ και $d = 1$ στο ακόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 3.3.

$$Q_x^d\left[e^{-\frac{b}{2}\int_0^1 X_s ds}\right] = (\cosh b)^{-\frac{d}{2}}\, e^{-\frac{1}{2}xb\tanh b}.$$

Εώς εδώ έχουμε ασχοληθεί με τα τετράγωνα των διαδικασιών Bessel. Τώρα θα ασχοληθούμε με τις διαδικασίες Bessel καθ′ αυτές. Η συνάρτηση $x \to \sqrt{x}$ είναι ένας ομοιομορφισμός του $\mathbb{R}^+$. Συνεπώς αν η X είναι Μαρκοβιανή διαδικασία στο $\mathbb{R}^+$ τότε η $\sqrt{X}$ είναι επίσης Μαρκοβιανή. Εφαρμόζοντας αυτά στην οικογένεια των BESQ^d προκύπτει η οικογένεια των καθ′ αυτών διαδικασιών Bessel.

Ορισμός 3.8. (Ομοιομορφισμός). Ο *ομοιομορφισμός* είναι ένας ισομορφισμός μεταξύ δύο τοπολογικών χώρων. Χρειάζεται για την διατήρηση των συνόρων Borel.

3.3 Διαδικασία Bessel Διάστασης d

Ορισμός 3.9. [3, σελ. 498] (Διαδικασία Bessel Διάστασης d). Η τετραγωνική ρίζα της $\mathrm{BESQ}^d(a^2)$ με $d \geq 0$ και $a \geq 0$ ονομάζεται *διαδικασία Bessel διαστάσεως* d αρχίζουσα από το a και συμβολίζεται ως $\mathrm{BES}^d(a)$. Ο νόμος της θα συμβολίζεται με P_a^d.

Κάποιες ιδιότητες των BESQ^d μεταφέρονται σε παρόμοιες ιδιότητες των BES^d. Οι διαδικασίες Bessel είναι διαδικασίες Feller με συνεχείς τροχιές. Επίσης η συνάρτηση κλίκακος της BES^d μπορεί να επιλεγεί ίση με

$$\begin{cases} -x^{-2\nu} & \text{για } \nu > 0 \\ 2\log x & \text{για } \nu = 0 \\ x^{-2\nu} & \text{για } \nu < 0 \end{cases}$$

και με αυτή την επιλογή της συναρτήσεως κλίμακος, προκύπτει ότι το μέτρο ταχύτητας δίνεται μέσω των πυκνοτήτων:

$$\begin{cases} \dfrac{-x^{2\nu+1}}{\nu} & \text{για } \nu > 0 \\ x & \text{για } \nu = 0 \\ -\dfrac{-x^{2\nu+1}}{\nu} & \text{για } \nu < 0 \end{cases}$$

3.3.1 Μέτρο Ταχύτητας

Ορισμός 3.10. (Μέτρο Ταχύτητας). Το μέτρο m ονομάζεται *μέτρο ταχύτητας* της διαδικασίας X.

Θεώρημα 3.11. Υπάρχει ένα και μοναδικό *μέτρο Radon* στο εσωτερικό του E έτσι ώστε για κάθε ανοιχτό υποδιάστημα $I = (a, b)$, με $[a, b] \subset E$ να ισχύει ότι

$$m_I(x) = \int G_I(x, y) m(dy)$$

όπου

$$G_I(x, y) = \begin{cases} \dfrac{(s(x) - s(a))(s(b) - s(y))}{s(b) - s(a)}, & \text{αν } a \le x \le y \le b \\ \dfrac{(s(y) - s(a))(s(b) - s(x))}{s(b) - s(a)}, & \text{αν } a \le y \le x \le b \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Η πυκνότητα της ημιομάδας προκύπτει από την αντίστοιχη BESQ^d μέσω απλής αλλαγής μεταβλητής και για $d > 0$ ισούτε με

$$p_t^d(x, y) = t^{-1} \left(\frac{y}{x}\right)^{\nu} e^{-(x^2+y+2)/2t} I_\nu(xy/t), \qquad \text{για } x > 0 \text{ και } t > 0$$

και

$$p_t^d(0, y) = 2^{-\nu} t^{-(\nu+1)} \Gamma(\nu + 1)^{-1} y^{2\nu+1} e^{-y^2/2t}$$

Παρατηρούμε ότι επειδή $d \ge 2$ το σημείο 0 είναι πολικό για την $\mathrm{BESQ}^d(x)$, με $x > 0$

μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 3.1 σε αυτή τη διαδικασία, την οποία συμβολίζουμε με X και στη συνάρτηση $\sqrt{x}$. Έτσι λαμβάνουμε τα εξής:

$$X_t^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x} + b_t + \frac{d-1}{2}\int_0^t X_s^{-\frac{1}{2}} ds$$

όπου b είναι μια κίνηση Brown. Με άλλα λόγια η $\mathrm{BES}^d(a)$, με $a > 0$ αποτελεί τη λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης.

$$p_t = a + b_t + \frac{d-1}{2}\int_0^t p_s^{-1} ds$$

Πρόταση 3.5. Η BES^d έχει την ιδιότητα κλιμακώσεως του Brown.

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε μια άλλη αναλλοίωτη ιδιότητα αυτής της οικογένεια διαδικασιών. Έστω X^d μια οικογένεια λύσεων διαχύσεως της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης

$$X_t^d = x + b_t + \int_0^t b_d(X_s^d) ds$$

όπου b_d είναι η οικογένεια συναρτήσεων του Borel.

3.3.2 Διαδικασία Διαχύσεως

Ορισμός 3.11. (Διαδικασία Διαχύσεως). Μια Μαρκοβιανή διαδικασία X με χώρο καταστάσεων στο $\mathbb{R}^d$ θα λέγεται ότι είναι μια *διαδικασία διαχύσεως* με γεννήτρια L αν:

- έχει συνεχείς τροχιές
- $\forall x \in \mathbb{R}^d$ και $f \in C_k^\infty$ ισχύει

$$E_x\Big[f(X_t)\Big] = f(x) + E_x\left[\int_0^t Lf(X_s) ds\right]$$

Υπενθυμίζουμε ότι η γεννήτρια L ονομάζεται και *δεύτερης τάξεως διαφορικός τελεστής* με

$$L = \frac{1}{2}\sum_{ij=1}^{d} a_{ij}(\cdot)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{d} b_i(\cdot)\frac{\partial}{\partial x_i}$$

όπου a και b πίνακες.

Έστω f μια θετική αυστηρώς αύξουσα C^2-συνάρτηση έχουσα αντίστροφο την f^{-1}. Θα καταγράψουμε τις συνθήκες υπό τις οποίες η διαδικασία $f(X_t^d)$ ανήκει στην ίδια οικογένεια εκτός μιας καταλλήλου χρονοαλλαγής.

Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 3.1 προκύπτει ότι:

$$f(X_t^d) = f(x) + \int_0^t f'(X_s^d)dB_s + \int_0^r \left(f'(X_s^d)b_d(X_s^d) + \frac{1}{2}f''(X_s^d)\right)ds$$

θέτοντας

$$r_t = \inf\{u : \int_0^u f'^2(X_s^d)ds > t\}$$

και

$$y_t^d = f(X_{r_t}^d)$$

η παραπάνω εξίσωση καταλήγει στην

$$y_t^d = f(x) + b_t + \int_0^t \left(\left(f'b_s + \frac{1}{2}f''\right)/f'^2\right) of^{-1}(y_s^d)ds$$

όπου b είναι μια κίνηση Brown. Εάν βρεθεί ένα d τέτοιο ώστε

$$\left(f'b_d + \frac{1}{2}f''\right)/f'^2 = b_J o f$$

τότε η διαδικασία y^d θα ικανοποιεί μια στοχαστική διαφορική εξίσωση της δοθείσης οικογένειας. Αυτό μας οδηγεί στο επόμενο αποτέλεσμα, όπου η p_ν είναι $\mathrm{BES}^{(\nu)}$.

Πρόταση 3.6. Έστω p και q δύο συζυγής αριθμοί, δηλαδή $p^{-1}+q^{-1}=1$. Αν $\nu > -\frac{1}{q}$ τότε υπάρχει μια $\mathrm{BES}^{(\nu q)}$, οριζόμενη επί του ιδίου χώρου πιθανοτήτων ως p_ν τέτοια ώστε

$$qp_\nu^{\frac{1}{q}} = p_{\nu q}\left(\int_0^1 p_\nu^{-\frac{2}{p}}(s)ds\right)$$

Παρατήρηση 3.4. Στο πλαίσιο της προηγούμενης πρότασης αν $p_\nu(0) = 0$ σχεδόν βέβαια, τότε:

$$\int_0^1 p_\nu^{-\frac{2}{p}}(s)ds = \left(\int_0^1 p_{\nu q}^{2q/p}(s)ds\right)^{-\frac{1}{q}}$$

Ευρετήριο

Βιβλιογραφία

[1] J.B. Fraleigh, *A First Course in Abstract Algebra*, Addison-Wesley Publishing Company, 3rd edition, 1999.

[2] D. Revuz and M. Yor, *Continuous Martingales and Brownian Motion*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1999.

[3] D. Revuz and M. Yor, *Στοιχηματικές Στοχαστικές Διαδικασίες Συνεχούς Χρόνου & Κινήσεις Brown*, Leader Books, 2004.

[4] Χρ. Λάγκαρη, *Θεωρία Στοχαστικών Διαδικασίων*, Πανεπιστημιακό τυπογραφείο Ιωαννίνων, Ιωάννινα, 2001.

[5] Β. Παπακωνσταντίνου, *Στοχαστική Ανάλυση: Σημειώσεις του Μαθήματος*, Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών, Πάτρα, 2003.

[6] Β. Παπακωνσταντίνου, *Στοχαστικές Διαδικασίες*, Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών, Πάτρα, 2006.

[7] Π.Δ. Σιαφαρίκας, *Ειδικές Συναρτήσεις*, Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών, Πάτρα, 2003.

[8] Ε.Κ. Υφαντής, *Εισαγωγή στη Θεωρία Μέτρου: Θεωρία, Ασκήσεις και Εφαρμογές*, Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών, Πάτρα, 1998.

Πανεπιστημιο Πατρων,
Σχολη Θετικων Επιστημων,
Τμημα Μαθηματικων,
Τομεας Πιθανοτητων και Στατιστικης.