ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ-ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
**"ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ"**

**ΚΡΗΤΙΚΟΥ ΜΑΓΔΑ**

# ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ ΚΟΣΤΟΥΣ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑΣ-ΑΜΟΙΒΩΝ ΕΝΟΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΑΝΘΡΩΠΙΝΟΥ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΤΕΧΝΙΚΩΝ GOAL PROGRAMMING

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΠΑΤΡΑ 2009

*Στους γονείς μου.*

# Ευχαριστίες

Περατώνοντας τον κύκλο των μεταπτυχιακών σπουδών μου με την ολοκλήρωση της διπλωματικής αυτής εργασίας, θα ήθελα να εκφράσω αρχικά τις θερμές μου ευχαριστίες στον επιβλέποντα καθηγητή κ. Νίκο Τσάντα. Με τις συνεχείς του υποδείξεις, το διαρκές και αμέριστο ενδιαφέρον του, με παρότρυνε να συνεχίσω και με στήριξε στην πορεία μου. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω και τα υπόλοιπα μέλη της τριμελούς επιτροπής, επίκουρο καθηγητή κ. Ε. Μακρή και τον επίκουρο καθηγητή κ. Β. Παπακωνσταντίνου, οι οποίοι υποστήριξαν και ενέκριναν την διπλωματική αυτή εργασία.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους φίλους, συμφοιτητές μου και μη, που είναι δίπλα μου όλα αυτά τα χρόνια με στηρίζουν και με συμβουλεύουν όποτε το έχω ανάγκη. Ειδικά την φίλη Φωτεινή Γριβοκωστοπούλου, που με βοηθούσε πάντα με καλή διάθεση να ξεπεράσω τις αντιξοότητες που προέκυπταν. Τέλος, ένα μεγάλο ευχαριστώ θέλω να πω στους γονείς μου και στα αδέρφια μου, που είναι πάντα δίπλα μου για να με στηρίζουν και να με βοηθούν, με την αγάπη με την οποία με περιβάλουν και για όσα έχουν κάνει για μένα όλα αυτά τα χρόνια.

**Περιεχόμενα**


Περίληψη………………………………………………………………………………. 5

Κεφάλαιο 1

1.1 Οι στοχαστικές διαδικασίες……………………………………………. 9

1.2 Οι Μαρκοβιανές Στοχαστικές διαδικασίες……………………………. 14

1.3 Μαθηματικά Μοντέλα……………………………………..................... 17

1.4 Το μη Ομογενές Μαρκοβιανό Σύστημα………………………………. 21

1.5 Θεωρία Ελέγχου Μη Ομογενών Μαρκοβιανών Συστημάτων ……… 26

1.6 Πολυκριτήριος Γραμμικός Προγραμματισμός………………………… 28

Κεφάλαιο 2

2.1 Ένα μοντέλο κόστους-αμοιβών…………………………….………… 31

2.2 Βελτιστοποιώντας τη στρατηγική εισόδου…………………………… 35

Κεφάλαιο 3

3.1 Εφαρμογή (η περίπτωση του μοντέλου 2.13………………………… 51

Βιβλιογραφία……………………………………………………………………….. 57

## Περίληψη

Στην παρούσα εργασία παρουσιάζονται εφαρμογές των στοχαστικών διαδικασιών στα λεγόμενα κοινωνικά συστήματα από τη σκοπιά του προγραμματισμού ανθρώπινου δυναμικού (manpower planning). Ο προγραμματισμός του ανθρώπινου δυναμικού έχει να κάνει με την κατάλληλη τοποθέτηση των μελών του συστήματος στις σωστές θέσεις, σε αριθμούς οι οποίοι εγγυώνται την ομαλή λειτουργία.

Αρχικά αναπτύσσουμε το μη ομογενές Μαρκοβιανό σύστημα (ΜΟΜΣ), το οποίο έχει ως βάση του τις Μαρκοβιανές αλυσίδες: η συμπεριφορά του καθορίζεται από την οριακή ή σε πεπερασμένο χρόνο συμπεριφορά μιας μη ομογενούς Μαρκοβιανής αλυσίδας. Το ΜΟΜΣ, είναι ένα μαθηματικό μοντέλο, το οποίο αποτέλεσε μια θεωρία ενοποίησης μέσα σε ένα κοινό πλαίσιο, πολλών γνωστών στοχαστικών μοντέλων προγραμματισμού ανθρώπινου δυναμικού.

Στη συνέχεια επικεντρωνόμαστε στον έλεγχο της συμπεριφοράς του μοντέλου. Για το σκοπό αυτό, ορίζουμε μια σχέση για το αναμενόμενο κόστος λειτουργίας και αμοιβών του ΜΟΜΣ. Στη σχέση αυτή δίνουμε τη γενικότερη δυνατή μορφή, έτσι ώστε να περιλαμβάνει ως ειδικές περιπτώσεις αρκετές από τις παραλλαγές των συναρτήσεων κόστους-αμοιβών που υπάρχουν.

Τέλος, με τη βοήθεια του προγραμματισμού στόχων (Goal Programming), ελέγχουμε τις ροές του ΜΟΜΣ προκειμένου να επιτευχθεί μια ικανοποιητική συμπεριφορά σύμφωνα με κάποιους στόχους, καθώς το σύστημα περνάει τις τρεις φάσεις λειτουργίας του, δηλ. την παροδική, την ημι-παροδική και τη φάση στατιστικής ισορροπίας.

**Λέξεις κλειδιά**: Προγραμματισμός Ανθρώπινου Δυναμικού, Θεωρία Ελέγχου, Προγραμματισμός Στόχων

## Abstract

Manpower Planning deals with aspects of Human Resources Management and has been given considerable attention in the last decades. In the attempt to simulate the evolution of a manpower system and predict its future properties, mathematical models were proved to be extremely helpful both for descriptive and optimization purposes. Manpower systems have been modeled in several ways, deterministic or stochastic. Our presentation builds on the 'Non-Homogeneous Markov System' (NHMS) a model developed by one of the pioneers of the area, prof. Vassiliou.

The attempt of determine and regulate future structures in a manpower planning system is based mainly on the selection of appropriate recruitment distribution vectors. This effort gives rise to the control problem in mathematical manpower planning. The control of manpower systems has been of considerable concern in recent times. In a series of articles and books beginning back in the early 70's, the problem of finding appropriate recruitment policies was considered, and various mathematical models were developed according to several criteria and practical considerations.

In the present work aspiration levels and priorities using goal programming are employed in a NHMS which evolves in three phases, the transient, the semi-transient and the equilibrium phase. The general goal programming framework is used in several variations which depend on the phase, in order to detect appropriate input policies that can achieve a satisfactory trade off between operational cost and target attainability.


**Keywords**: Manpower Planning; Control Theory; Goal Programming

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ

## 1.1 ΟΙ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ

Η εφαρμογή της Στατιστικής Επιστήμης στα φυσικά φαινόμενα, έφερε τη Θεωρία Πιθανοτήτων αντιμέτωπη με ερωτήματα τα οποία δεν ήταν δυνατόν να αντιμετωπιστούν με τη μέχρι τότε θεμελίωσή της. Συγκεκριμένα, ενώ στα φαινόμενα αυτά έμπαινε δυναμικά η έννοια της ακολουθίας ενδεχομένων στο χρόνο ή και στο χώρο, η Θεωρία Πιθανοτήτων δεν παρείχε ούτε καν γενικά πλαίσια μέσα στα οποία θα έπρεπε να κινηθεί ο ερευνητής για να τα αναλύσει. Προέκυψε έτσι η ανάγκη ανάπτυξης ενός υπόβαθρου μελέτης τέτοιων φαινομένων, η εύρεση δηλαδή των πιθανοθεωρητικών νόμων που θα καθόριζαν τη συμπεριφορά τους. Έτσι γεννήθηκε η **θεωρία των στοχαστικών διαδικασιών**. Στοχαστική διαδικασία, ονομάζουμε μία οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $X(t)$ ή $X_t$, ορισμένων σε συγκεκριμένο δειγματοχώρο, όπου *t* είναι μία παράμετρος η οποία παίρνει τιμές από ένα σύνολο δεικτών Τ. Η πραγμάτωση της στοχαστικής διαδικασίας $\{X(t), t \in T\}$, είναι μία απεικόνιση σε κάθε $t \in T$ μίας τιμής $X(t)$. Το σύνολο των δεικτών μπορεί να αντιστοιχεί σε διακεκριμένες τιμές χρονικών στιγμών $T = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ οπότε η $\{X(t), t \in T\}$ παριστάνει διαδοχικά ενδεχόμενα μέσα στο χρόνο (π.χ. αποτέλεσμα t-οστής ρίψης νομίσματος). Το σύνολο των δεικτών, πιο γνωστό ως *παραμετρικός χώρος*, μπορεί να είναι διακριτό ή συνεχές. Τέλος, το σύνολο όλων των δυνατών τιμών των τυχαίων μεταβλητών ονομάζεται *χώρος καταστάσεων* και μπορεί να είναι ποιοτικός ή ποσοτικός, διακριτός ή συνεχής. Όταν είναι αριθμήσιμος ή πεπερασμένος, η διαδικασία ονομάζεται **αλυσίδα**.

Ο Bhat (1984) μέσα σε λίγες γραμμές δίνει το ακριβές νόημα της ανάγκης ανάπτυξης των στοχαστικών διαδικασιών ως ένα κομμάτι της Θεωρίας Πιθανοτήτων που συμπληρώνει τα εργαλεία που προσφέρει η Στατιστική: *Μετά τη συλλογή των πραγματικών δεδομένων, προσαρμόζουμε μια θεωρητική συνάρτηση κατανομής για* *να εξάγουμε διάφορα συμπεράσματα. Αν η προσαρμογή είναι καλή (με βάση κάποιο test ), τότε οι ιδιότητες του συνόλου των δεδομένων μπορούν να προσεγγισθούν από τις ιδιότητες της κατανομής. Με όμοιο τρόπο, έστω μία διαδικασία που υπαγορεύεται από ένα οποιοδήποτε φυσικό φαινόμενο και η οποία φαίνεται να συμπεριφέρεται ως στοχαστική διαδικασία. Η γνώση της συμπεριφοράς της στοχαστικής διαδικασίας είναι επιθυμητή, έτσι ώστε να εξηγήσουμε το φυσικό φαινόμενο, ή ακόμα, να προβλέψουμε και να παρέμβουμε, στο χρόνο, στο χώρο και γενικά καθώς το σύστημα κινείται στον παραμετρικό χώρο*.

Η θεωρία των Στοχαστικών Διαδικασιών αποτελεί ένα λαμπρό παράδειγμα σύνθεσης της μαθηματικής σκέψης με τις φυσικές και κοινωνικές επιστήμες. Βρίσκεται εκεί που η μαθηματική επιστήμη έχει πια συλλάβει το φυσικό νόημα ενός προβλήματος και καταφέρνει να το εκφράσει ικανοποιητικά στη δική της γλώσσα. Η ιδέα μιας τέτοιας θεωρίας ξεκίνησε από τον Poincare αλλά άρχισε να αναπτύσσεται διαισθητικά κι αργότερα πιθανοθεωρητικά θεμελιωμένη, στις αρχές του αιώνα μας. Οι πρώτες δημοσιεύσεις είχαν ως κύριο αντικείμενο έρευνας την μέσα στο χρόνο ανέλιξη ενός μεταβλητού συστήματος, το οποίο μπορούσε να δεχτεί επιρροές από το περιβάλλον του. Πρωτοπόροι θεωρούνται οι Bachelier(1900), Fokker και Plack (Diffusion Theory). Ο Bachelier, μελετώντας τις μεταπτώσεις των τιμών της αγοράς κατέληξε σε κάποια μορφή στοχαστικής διαδικασίας. Το 1903 ο Lundberg δημοσίευσε τη διατριβή του στην οποία ασχολήθηκε με διάφορα προβλήματα σχετικά με τις εισπράξεις ασφαλιστικών οργανισμών. Το αποτέλεσμα ήταν μια καινούρια διαδικασία της οποίας ειδική περίπτωση είναι η Poisson. Η τελευταία, προτάθηκε από τον Erlang το 1909. Ο Einstein στη προσπάθεια του να περιγράψει την συμπεριφορά σωματιδίου σε υγρό κάτω από τυχαίες μοριακές επιδράσεις εφάρμοσε παρόμοια διαδικασία μ' αυτήν που πρότεινε ο Bachelier (κίνηση Brown, 1905). Ο Geiger (1908) επίσης μελέτησε το φαινόμενο της ραδιενεργού αποσύνθεσης με τη βοήθεια των στοχαστικών διαδικασιών.

Η δεύτερη δεκαπενταετία του αιώνα μας θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως η περίοδος της προετοιμασίας. Οι Khinchin A., Kolmogorov A., Levy P., Lindberg J., Bernstein S., Feller W., Wiener A. και πολλοί άλλοι έδωσαν στη Θεωρία Πιθανοτήτων τα απαραίτητα εφόδια για την ανάπτυξη των Στοχαστικών Διαδικασιών. Σταθμό στη μαθηματική θεμελίωση της θεωρίας των στοχαστικών διαδικασιών απετέλεσε η εργασία του μεγάλου ρώσσου μαθηματικού Kolmogorov A., (1931). Σίγουρα, αν το 1920 υπήρχαν ακόμα ισχυρισμοί ότι η θεωρία αυτή δεν ανήκε στο μαθηματικό χώρο, μετά την παρουσίαση της δουλειάς του Kolmogorov, ήταν πια αδύνατο να στηριχτεί μία παρόμοια άποψη. Η ανάπτυξη που ακολούθησε τον Kolmogorov ήταν εντυπωσιακή. Χαρακτηριστικά συγγράμματα που ήλθαν ως απόσταγμα της δουλειάς που έγινε είναι των Khinchin (1938), Feller (1969), Doob (1953), Tacacs (1960), Cox και Miller (1964), Karlin και Taylor (1975), Bhat (1984), Bailey (1964), Tijms (1986), Parzen (1962), Bartlett (1955), Dynkin (1965), Rosenblatt (1962), Levy (1948), Cramer και Leadbetter (1966).

Όπως αναφέρθηκε, το κίνητρο για την ανάπτυξη των στοχαστικών διαδικασιών ήταν τα διάφορα φυσικά φαινόμενα ή συστήματα στα οποία κύρια χαρακτηριστικά τους ήταν οι αλλαγές στο χρόνο και στο χώρο των καταστάσεων τους. Σε κάθε περίπτωση, πρέπει να καθοριστεί ο χώρος των καταστάσεων και το πιθανοθεωρητικό πλαίσιο που θα ρυθμίσει τη ''μετάβαση'' του συστήματος από μία κατάσταση σε μία άλλη μέσα στον παραμετρικό χώρο. Ο όρος **σύστημα** εκφράζει το σύνολο των οντοτήτων οι οποίες με τον τρόπο που συσχετίζονται αποτελούν μια ολότητα. Η κατάσταση του συστήματος καθορίζεται από το σύνολο των στοιχείων (ποιοτικών ή ποσοτικών) που περιγράφουν το σύστημα σε μία χρονική στιγμή.

Πέρα από τις φυσικές επιστήμες οι οποίες έδωσαν και το έναυσμα, είχαμε σιγά-σιγά και μοντέλα στοχαστικών διαδικασιών σε ασφαλιστικά προβλήματα, στη θεωρία αποθηκών, στα κοινωνικά συστήματα, στις ουρές αναμονής, στην εξάπλωση επιδημιών, στους υπολογιστές, στη θεωρία αξιοπιστίας κ.λ.π.

Σ' αυτήν την εργασία παρουσιάζουμε εφαρμογές των στοχαστικών διαδικασιών στα λεγόμενα **κοινωνικά συστήματα** από τη σκοπιά του **προγραμματισμού ανθρώπινου δυναμικού (manpower planning)**. Σε ένα τέτοιο σύστημα έχουμε ένα αριθμό βαθμίδων στις οποίες κατανέμονται τα μέλη του, και τα οποία κινούνται από βαθμίδα σε βαθμίδα (ή έξω από το σύστημα) με βάση κάποιο πιθανοθεωρητικό νόμο.

Ο προγραμματισμός ανθρώπινου δυναμικού είναι μία ''τέχνη'' που η προέλευση της χάνεται στους αιώνες. Ο Tompkins (1971), αναφέρθηκε στο μέγεθος του εργατικού δυναμικού και τη χρονική διάρκεια κατασκευής των πυραμίδων στην αρχαία Αίγυπτο. Τα μεγέθη αυτά κυμαίνονταν από τέσσερις έως εκατό χιλιάδες εργάτες και από είκοσι έως εξήντα πέντε χρόνια. Είναι προφανές ότι κάποιοι άνθρωποι περνούσαν όλη τους τη ζωή σ' αυτό το έργο. Είναι επίσης φανερό ότι με κάποιο τρόπο οι αρχαίοι Αιγύπτιοι θα έπρεπε να έκαναν κατανομή του προσωπικού στις διάφορες δραστηριότητες κι ακόμα, θα είχαν κάποιο κανονισμό ιεραρχίας, εκπαίδευσης, ωραρίου κ.λ.π. (Όσον αφορά τις αμοιβές και κίνητρα αποδοτικότητας δεν θα είχαν και μεγάλο πρόβλημα δεδομένου ότι τότε ήκμαζε η δουλεία και η ανθρώπινη ζωή είχε μικρή ή και καθόλου αξία). Ανάλογα προβλήματα θα πρέπει να αντιμετώπισαν οι αρχαίοι προγραμματιστές ανθρώπινου δυναμικού επιφορτισμένοι με την οργάνωση των στρατευμάτων των Περσών, του Μ. Αλεξάνδρου, ή των Ρωμαίων αργότερα. Σίγουρα με κάποιο τρόπο θα ρυθμίζονταν η ιεραρχία, οι αμοιβές, η στρατολόγηση, οι υπηρεσίες και γενικά όλα τα προβλήματα που προκύπτουν για τη διατήρηση ενός οργανωμένου μάχιμου σώματος. Προβλήματα που δεν διαφέρουν και πολύ στα σημερινά στρατεύματα. Οι παλαιότερες αναφορές έρευνας σχετικής με την πρόβλεψη της ανάπτυξης ενός κοινωνικού συστήματος οφείλονται στα ασφαλιστικά μαθηματικά, (Graunt, 1662).

Είναι φανερό, ότι ο προγραμματισμός του ανθρώπινου δυναμικού έχει να κάνει με την *κατάλληλη τοποθέτηση των μελών του συστήματος στις σωστές θέσεις, σε αριθμούς οι οποίοι εγγυώνται την ομαλή λειτουργία, η οποία βέβαια μπορεί να εκφράζεται από διάφορες παραμέτρους*. Ο προηγούμενος ορισμός δόθηκε στα τέλη της δεκαετίας του 60 και υπήρξε ιδιαίτερα δημοφιλής σε όλη τη δεκαετία του 70. Με την εξέλιξη όμως της έρευνας στο χώρο αυτό, η στρατηγική κατευθύνεται στη μελέτη του συστήματος σε συνάφεια με ένα σύνολο από κάποιους μακροπρόθεσμους ή βραχυπρόθεσμους στόχους.

Όπως αναφέρουν οι Grinold και Marshall (1977), οι άνθρωποι, οι θέσεις εργασίας, ο χρόνος και το χρήμα είναι τα βασικά συστατικά ενός κοινωνικού συστήματος. Ο επιχειρησιακός ερευνητής είναι αναγκασμένος να γνωρίζει τις αλληλεπιδράσεις των τεσσάρων αυτών παραγόντων για να καθορίσει και να εφαρμόσει τη σωστή πολιτική οργάνωσης του ανθρώπινου δυναμικού. Ο Purkiss (1981) αναφέρει ότι οι βασικές αρχές του προγραμματισμού ανθρώπινου δυναμικού πρέπει να λαμβάνουν υπόψη τη συνοχή των μελών ενός οργανισμού αλλά και την εύρεση εναλλακτικών λύσεων για τη διαχείριση του αναπόφευκτου χάσματος που υπάρχει ανάμεσα στην προσφορά εργασίας και του υπάρχοντος εργατικού δυναμικού. Ακόμα, θα πρέπει να λαμβάνονται σοβαρά υπόψη οι προσωπικές φιλοδοξίες και οι ευκαιρίες που παρέχει το σύστημα στα μέλη του έτσι ώστε η πολιτική που θα υιοθετηθεί να μην προκαλέσει προβλήματα. *Καθώς ο χρόνος παρέρχεται, ο επιχειρησιακός ερευνητής χρησιμοποιώντας ως εργαλεία τις μεταβάσεις, τις προσλήψεις και την έξοδο από το σύστημα, προσπαθεί να το οδηγήσει στην καταλληλότερη δομή, ή τουλάχιστον να το φέρει όσο πιο κοντά γίνεται σε μια επιθυμητή κατάσταση.*

Δυστυχώς, (ή ευτυχώς), οι πειραματισμοί στα κοινωνικά συστήματα για τον έλεγχο της σωστής λειτουργίας ενός μοντέλου είναι ριψοκίνδυνοι και συνήθως καταλήγουν σε εντελώς αντίθετα αποτελέσματα. Εδώ υπεισέρχονται και κοινωνικά προβλήματα. Το ανθρώπινο δυναμικό αντιδρά στις αλλαγές, πολλές φορές νευρικά και βίαια ενώ δεν υπάρχουν αντικειμενικά μέτρα εκτίμησης της ανθρώπινης συμπεριφοράς. Άλλωστε, ο προγραμματιστής ανθρώπινου δυναμικού δεν είναι λογικό να έχει δικαίωμα μιας τέτοιας δυναμικής παρέμβασης στο σύστημα που μελετά. Από την άλλη μεριά, η “μαθηματικοποίηση” της ανθρώπινης συμπεριφοράς είναι ίσως το κρισιμότερο ερώτημα στο οποίο ο ερευνητής καλείται να δώσει λύσεις.

Πρωτοποριακές εργασίες που σχετίζονται με τη μελέτη ενός κοινωνικού συστήματος λαμβάνοντας υπόψη την ύπαρξη των βαθμίδων και της ιεραρχίας είναι των Seal (1945), Vajda (1947,1948), Young and Almond (1961), Gani (1963). Οι Coleman (1964), Steindhl (1965) και Bartholomew(1967), έκαναν την αρχική σύνδεση της θεωρίας των στοχαστικών διαδικασιών με τα κοινωνικά συστήματα. Από τότε παρατηρείται μία αλματώδης ανάπτυξη της βιβλιογραφίας γύρω από την κατασκευή στοχαστικών μοντέλων ανθρώπινου δυναμικού. Ενδεικτικά αναφέρονται οι Charnes, Cooper and Niehaus (1968,1972), Bartholomew (1973, 1975, 1976, 1977), Morgan (1971), Purkiss και Richardson (1971), Vajda (1971, 1975, 1978), Davies (1973, 1975), Grinold και Stanford (1974), Young (1965, 1969, 1972), Young και Vassiliou (1974). Μία ικανοποιητική συλλογή υπάρχει στο βιβλίο του Bartholomew (1982).

## 1.2. ΟΙ ΜΑΡΚΟΒΙΑΝΕΣ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ

Οι στοχαστικές διαδικασίες που προκύπτουν από φυσικά φαινόμενα ή συστήματα, είναι τέτοιες ώστε συνήθως, για δοσμένο σύνολο δεικτών μέσα από τον παραμετρικό χώρο, οι τιμές των τυχαίων μεταβλητών να παρουσιάζουν κάποια εξάρτηση. Όσο πολυπλοκώτερη είναι η εξάρτηση των τυχαίων μεταβλητών τόσο πιο δύσκολο είναι να αναλυθεί η στοχαστική διαδικασία.

Έστω μία στοχαστική διαδικασία σε χώρο καταστάσεων διακριτό, $S = \{1, 2, 3, ..., k\}$. Έστω ακόμα ότι ο παραμετρικός χώρος είναι επίσης διακριτός. Μία τέτοια στοχαστική διαδικασία ονομάζεται **Μαρκοβιανή αλυσίδα** αν η τιμή της τ.μ. $X_n$ για δοσμένες τιμές $X_0, ..., X_{n-1}$, εξαρτάται μόνο από την $X_{n-1}$. Δηλαδή ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$p_{ij}(n) = \Pr ob\left[X_n = j \ / X_{n-1} = i_{n-1}, ..., X_0 = i_0\right] = \Pr ob\left[X_n = j / X_{n-1} = i_{n-1}\right]$$

όπου η δεσμευμένη πιθανότητα $p_{ij}(n)$ λέγεται **πιθανότητα μετάβασης** από την κατάσταση *i* στην *j* και αναφέρονται ως στοιχεία ενός πίνακα $\mathbf{P}(t)$, ο οποίος ονομάζεται **πίνακας μετάβασης** της μαρκοβιανής αλυσίδας. Στον πίνακα αυτό, η *i*-γραμμή και η *j*-στήλη αντιστοιχούν στην *i* και *j* κατάσταση του χώρου των καταστάσεων $S$:

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ ... \\ k \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & ... & k \end{array} \\ \begin{bmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) & ... & p_{1k}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) & ... & p_{2k}(t) \\ ... & ... & ... & ... \\ p_{k1}(t) & p_{k2}(t) & ... & p_{kk}(t) \end{bmatrix} \end{array}$$

Ο πίνακας $\mathbf{P}(t)$, $t = 0, 1, 2, ...$ είναι τετραγωνικός μη αρνητικός και το άθροισμα κάθε γραμμής του είναι ίσο με τη μονάδα (στοχαστικός).

Όταν οι πιθανότητες μετάβασης είναι ανεξάρτητες από τη χρονική στιγμή στην οποία γίνεται η παρατήρηση, η αλυσίδα ονομάζεται **ομογενής**. Σ' αυτή την περίπτωση μπορούμε να γράψουμε ότι:

$$\Pr ob\left[X_n = j / X_{n-1} = i\right] = \Pr ob\left[X_{n+k} = j / X_{n+k-1} = i\right]$$

για $k = -(n-1), -(n-2), ..., -1, 0, 1, 2, ...$, δηλαδή η πιθανότητα μετάβασης είναι πάντα:

$$p_{ij} = \Pr ob\left[X_n = j / X_{n-1} = i\right]$$

Στην αντίθετη περίπτωση η αλυσίδα ονομάζεται **μη ομογενής**.

Ο Andrey Markov ήταν αυτός που πρώτος εισήγαγε την ιδέα της Μαρκοβιανής ιδιότητας σε μία στοχαστική διαδικασία (η οποία γι' αυτό πήρε το όνομά του). Ο Markov συνδύασε τις μαθηματικές του γνώσεις με την αγάπη του για την ποίηση μελετώντας τη διαδοχή των φωνηέντων στο ποίημα του Puskin "Eygeni Onegin". Ουσιαστικά η ιδέα ήταν η απόρριψη της ανεξαρτησίας των τυχαίων μεταβλητών στη διαδικασία αλλά και ο περιορισμός της εξάρτησης μόνο ως προς το ακριβώς προηγούμενο βήμα. Έτσι, έγινε μία λογική γενίκευση η οποία όμως σωστά περιορίστηκε σε πλαίσια τα οποία θα διευκόλυναν τη μελέτη από τη σκοπιά της φυσικής σημασίας του παρατηρούμενου φαινομένου. Το μοντέλο που έφτιαξε ο Markov ήταν πολύ απλό, αλλά έδινε μία καλή εκτίμηση της εναλλαγής των συμφώνων και των φωνηέντων και του έδωσε την ευκαιρία να υπολογίσει την συχνότητα εμφάνισης των συμφώνων στο ποίημα του Puskin. Πάνω στην ιδέα του Markov εργάστηκαν πολλοί ερευνητές και η συνεισφορά των Bernstein (1946), Feller (1938), Frechet (1937), Romanovsky (1949), Hajnal (1956,1958), Dobrushin (1953, 1956), Sarymsakov (1954), Doeblin (1938), Kolmogorov (1937), ήταν σημαντική. Η επέκταση που δόθηκε αφορούσε το συνεχή χώρο παραμέτρων (Kolmogorov, Feller, Doeblin), καθώς και τις μη ομογενείς αλυσίδες (Bernstein, Doeblin, Dobrushin, Hajnal).

Κλασσική θεωρείται η μονογραφία του Doob (1953), ενώ, από τους νεώτερους αναφέρουμε τους Chung (1967), Chiang (1968), Cox και Miller (1965), Kemeny and Snell (1976), Feller (1968, 1971), Iosifescu (1979), Isaacson and Madsen (1976), Karlin and Taylor (1975), Seneta (1977), Ross (1983), Tijms (1986), Bartholomew (1982), Bartlett (1978). Στους δυο τελευταίους μπορούμε να βρούμε μια ενδιαφέρουσα συλλογή εφαρμογών μαρκοβιανών αλυσίδων στα κοινωνικά συστήματα καθώς επίσης και πλήρη βιβλιογραφική αναφορά.

## 1.3. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ

Η πολυπλοκότητα και η επένδυση που έχει γίνει σ' ένα πραγματικό φαινόμενο ή σύστημα, μας οδηγούν συχνά στην έμμεση ανάλυση του μέσω ενός **μαθηματικού μοντέλου**. Πρόκειται για προσομοίωση του πραγματικού συστήματος στο οποίο οι σημαντικές σχέσεις μεταξύ των στοιχείων του αντικαθιστούνται από μαθηματικές οντότητες. Τα ασήμαντα, κατά την κρίση του ερευνητή στοιχεία, αγνοούνται. Ένα μαθηματικό μοντέλο, έχει το πλεονέκτημα να είναι λιγότερο ακριβό στη χρήση, λιγότερο επικίνδυνο (ας θυμηθούμε τα κοινωνικά προβλήματα που ενδέχεται να προκύψουν από τον πειραματισμό πάνω σ' ένα κοινωνικό σύστημα ) και ευκολότερο στη διαχείριση.

Τα μαθηματικά μοντέλα διαιρούνται σε **προσδιοριστικά** και **στοχαστικά**. Στα πρώτα, δεν υπάρχει παράγοντας αβεβαιότητας, ενώ, στα στοχαστικά μοντέλα, υπεισέρχεται η τυχαιότητα ως καθοριστικός παράγοντας της συμπεριφοράς του συστήματος. Η έκφραση της γίνεται μέσω τυχαίων μεταβλητών που αντικαθιστούν τις αντίστοιχες παραμέτρους. Η πραγματικότητα συνήθως συμβαδίζει με την τυχαιότητα, οπότε, με αυτή την έννοια, ένα στοχαστικό μοντέλο είναι ρεαλιστικότερο. Σε κάθε περίπτωση το φαινόμενο είναι αυτό που θα καθορίσει την κατασκευή και την μορφή του μοντέλου. Στα κοινωνικά συστήματα, το κύριο συστατικό αβεβαιότητας που είναι η ανθρώπινη συμπεριφορά, δεν είναι πάντα αποτέλεσμα ενσυνείδητων αντιδράσεων του πληθυσμού, αλλά επηρεάζεται και από εξωγενείς παράγοντες.

Η κατασκευή ενός μαθηματικού μοντέλου ακολουθεί μια ιεραρχική υλοποίηση τεσσάρων φάσεων.

- Η πρώτη φάση χαρακτηρίζεται από την πλήρη αναγνώριση του συστήματος που έχουμε να μελετήσουμε. Σ' αυτή τη φάση θα πρέπει να απαντήσουμε στο κυριώτερο ίσως ερώτημα που προκύπτει: *γιατί πρέπει να μελετηθεί το συγκεκριμένο σύστημα και σε τι συμπεράσματα περιμένουμε να καταλήξουμε από αυτή τη μελέτη;*

- Η δεύτερη φάση αφορά στην κατασκευή του μοντέλου. Πρέπει να συγκεντρωθούν τα κατάλληλα δεδομένα αυτά που θ' αποτελέσουν τις πληροφορίες εισόδου (INPUT). Οι μεταβλητές του προβλήματος και οι σχέσεις που έχει η μια με την άλλη θα πρέπει να μεταφραστούν σε μαθηματικές εξισώσεις ικανές να εκφράσουν τις παραδοχές και τις υποθέσεις που έγιναν. Ακόμα, θα πρέπει να καθοριστούν οι πληροφορίες εξόδου (OUTPUT) που χρειαζόμαστε για την επόμενη φάση.
- Στην τρίτη φάση έχουμε επίλυση και έλεγχο των αποτελεσμάτων που παρέχει το μοντέλο. Στη φάση αυτή έχουμε μελέτη της συμπεριφοράς του μοντέλου και κατ' επέκταση του συστήματος. Μπορούμε να κάνουμε στατιστική επεξεργασία των αποτελεσμάτων και επιπλέον λειτουργική επεξεργασία στην οποία διάφορες εναλλακτικές λύσεις δοκιμάζονται για τη βελτιστοποίηση της λειτουργίας του συστήματος.
- Η φάση αυτή είναι αλληλένδετη με τις δυο προηγούμενες. Περιέχει τις έννοιες της επαλήθευσης (verification) και της εγκυρότητας (validation) του μοντέλου. Η επαλήθευση σχετίζεται με τα μαθηματικά που χρησιμοποιήθηκαν αυτά καθ' αυτά και τη σωστή λειτουργία τους. Η εγκυρότητα έχει να κάνει με το πόσο κοντά βρίσκεται το μοντέλο στο σύστημα. Κάτω από αυτή τη λογική δεν μπορεί βέβαια να υπάρξει απόλυτος έλεγχος αν ένα μοντέλο είναι έγκυρο ή όχι.

Ένα μαθηματικό μοντέλο, στοχαστικό ή προσδιοριστικό, κατασκευάζεται για να δώσει απαντήσεις σε κάποια ερωτήματα που έχουν προκύψει κατά τη μελέτη ενός φαινομένου. Τα ερωτήματα προκύπτουν κατά την πρώτη φάση ανάπτυξης του όπως την περιγράψαμε παραπάνω. Απαντώντας στη βασική ερώτηση αυτής της φάσης, καθορίζονται και οι αντικειμενικοί στόχοι οι οποίοι μπορεί να είναι ένας ή και περισσότεροι από τους ακόλουθους:

1. Περιγραφή του συστήματος.
2. Πρόβλεψη μελλοντικής συμπεριφοράς.
3. Μελέτη ειδικών περιπτώσεων που προκύπτουν σπάνια στο σύστημα αλλά ενδέχεται να προκαλέσουν απρόβλεπτες και ίσως ανεπιθύμητες ανακατατάξεις.
4. Εύρεση αιτιών για ήδη γνωστή αλλά ανεξήγητη συμπεριφορά του συστήματος.
5. Εύρεση βέλτιστης πολιτικής και στρατηγικής λειτουργίας.
6. Συμβολή στην κατασκευή ενός συστήματος ελέγχοντας *a priori* τα προβλήματα που μπορεί να προκύψουν όταν εφαρμοστούν τα πλαίσια που έχουμε υπόψη.
7. Εκτίμηση διαφόρων μέτρων του συστήματος ή και εύρεση χαρακτηριστικών εκτίμησης σε πρωτογενή βάση.

Δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι οι άνθρωποι είναι άμεσα συνδεδεμένοι με τα μοντέλα. Είναι οι σχεδιαστές, οι χρήστες, συλλέγουν τα δεδομένα, αλλά πολλές φορές αποτελούν και το στοιχείο μελέτης τους. Η ανάπτυξη μοντέλων για πληθυσμιακά συστήματα συμπίπτει και με την πρώτη αναφορά απόπειρας κατασκευής μαθηματικού μοντέλου. Ο Malthus το 1798 έκανε δυο βασικές υποθέσεις προκειμένου να αναλύσει την αυξομείωση του ανθρώπινου πληθυσμού. Πρώτον ότι η τροφή είναι αναγκαία για την ύπαρξη του ανθρώπου, και δεύτερον, ότι η έλξη μεταξύ των δυο φίλων είναι αναγκαία για την αναπαραγωγή του είδους. Ακολούθως, διαπίστωσε ότι η γεωμετρική αύξηση του πληθυσμού έρχεται σε αντίθεση με το γραμμικό ρυθμό παραγωγής των αγαθών που η γη είναι ικανή να διαθέσει για τη διατροφή. Έτσι κατέληξε στο συμπέρασμα ότι το ανθρώπινο είδος θα βρεθεί αντιμέτωπο με ένα υπαρκτό δυσεπίλυτο πρόβλημα. (Είναι τραγικό να διαπιστώνουμε στις μέρες μας ότι το πρόβλημα υπάρχει και εμφανίζεται με τη μορφή άνισης κατανομής των πόρων μεταξύ των αναπτυσσόμενων και ανεπτυγμένων κρατών). Το 1907, για το ίδιο πρόβλημα, ο Lotka κατασκεύασε αρχικά ένα στοιχειώδες μοντέλο, κι αργότερα μαζί με τον Sharpe (1911), ένα μοντέλο μαθηματικά θεμελιωμένο.

Με την ανάπτυξη των στοχαστικών διαδικασιών, άρχισε συστηματική εφαρμογή τους για την κατασκευή στοχαστικών μοντέλων για κοινωνικά συστήματα. Οι Seal (1945), Barlett (1946), Vajda (1947, 1948), Kendall (1949), Rice και συνεργάτες (1950, 1952), Lane and Andrew (1955) και Bartholomew (1959) ανέπτυξαν διάφορα στοχαστικά μοντέλα για την αυξομείωση του πληθυσμού και αργότερα για συστήματα ανθρώπινου δυναμικού γενικότερα.

Το 1961 οι Young και Almond έφτιαξαν ένα μοντέλο για τις μεταβάσεις του προσωπικού στο Βρετανικό σύστημα Ανώτατης Παιδείας. Ο Bartholomew το 1963 κατασκεύασε τα στοχαστικά μοντέλα της θεωρίας ανανέωσης για τα πληθυσμιακά συστήματα. Οι Young και Vassiliou (1974) κατασκεύασαν το πρώτο μη γραμμικό στοχαστικό μοντέλο.

Η χρήση αναλυτικών στοχαστικών μοντέλων για τον προγραμματισμό ανθρώπινου δυναμικού αναπτύχθηκε με αλματώδη ρυθμό από τη δεκαετία του 1970 και μετά. Η έρευνα δεν περιορίστηκε, όπως είναι φυσικό, στην κατασκευή των μοντέλων. Οι ερευνητές προχώρησαν στη μελέτη της ασυμπτωτικής τους συμπεριφοράς και ευστάθειας. Η εντροπία εισήχθηκε ως μέτρο της κατανομής της εμπειρίας του συστήματος. Η θεωρία ελέγχου και ο έλεγχος υποθέσεων για τις προβλέψεις στο σύστημα που περιγράφουν καθώς επίσης και η μελέτη άλλων μορφών συμπεριφοράς (π.χ. της κυκλικής) αποτέλεσαν πεδία έρευνας για τα μοντέλα προγραμματισμού ανθρώπινου δυναμικού.

Το μοντέλο που θα αναπτύξουμε στη συνέχεια, έχει ως βάση του τις Μαρκοβιανές αλυσίδες: η συμπεριφορά του καθορίζεται από την οριακή ή σε πεπερασμένο χρόνο συμπεριφορά μιας μη ομογενούς Μαρκοβιανής αλυσίδας.

## 1.4. ΤΟ ΜΗ ΟΜΟΓΕΝΕΣ ΜΑΡΚΟΒΙΑΝΟ ΣΥΣΤΗΜΑ (ΜΟΜΣ)

Ο Vassiliou (1982) ανέπτυξε το **μη ομογενές Μαρκοβιανό σύστημα**, ένα μαθηματικό μοντέλο, το οποίο αποτέλεσε μια θεωρία ενοποίησης μέσα σε ένα κοινό πλαίσιο, πολλών γνωστών στοχαστικών μοντέλων προγραμματισμού ανθρώπινου δυναμικού. Όπως αναφέρθηκε νωρίτερα, σε αυτά τα μοντέλα ενδιαφερόμαστε για τον πληθυσμό που βρίσκεται σε κάθε βαθμίδα, ενώ, οι παρατηρήσεις μας γίνονται σε διακριτές χρονικές στιγμές. Γνωρίζουμε το συνολικό αριθμό των μελών του συστήματος, ο οποίος μπορεί να είναι σταθερός ή να δίνεται από μία ακολουθία μέσα στο χρόνο.

Θεωρούμε ένα σύστημα του οποίου τα μέλη ταξινομούνται σε k καταστάσεις σύμφωνα με κάποιο χαρακτηριστικό τους. Τα μέλη του συστήματος, μπορεί να είναι άνθρωποι, βιολογικοί οργανισμοί, σωματίδια στον αέρα, φυτά πειραματικής φυτείας κ.ο.κ. Για παράδειγμα, στην περίπτωση των ανθρώπων, η ταξινόμηση θα μπορούσε να γίνει με χαρακτηριστικά όπως η ηλικία, το εισόδημα, η κοινωνική τάξη, ο τόπος διαμονής τους, κ.λ.π.

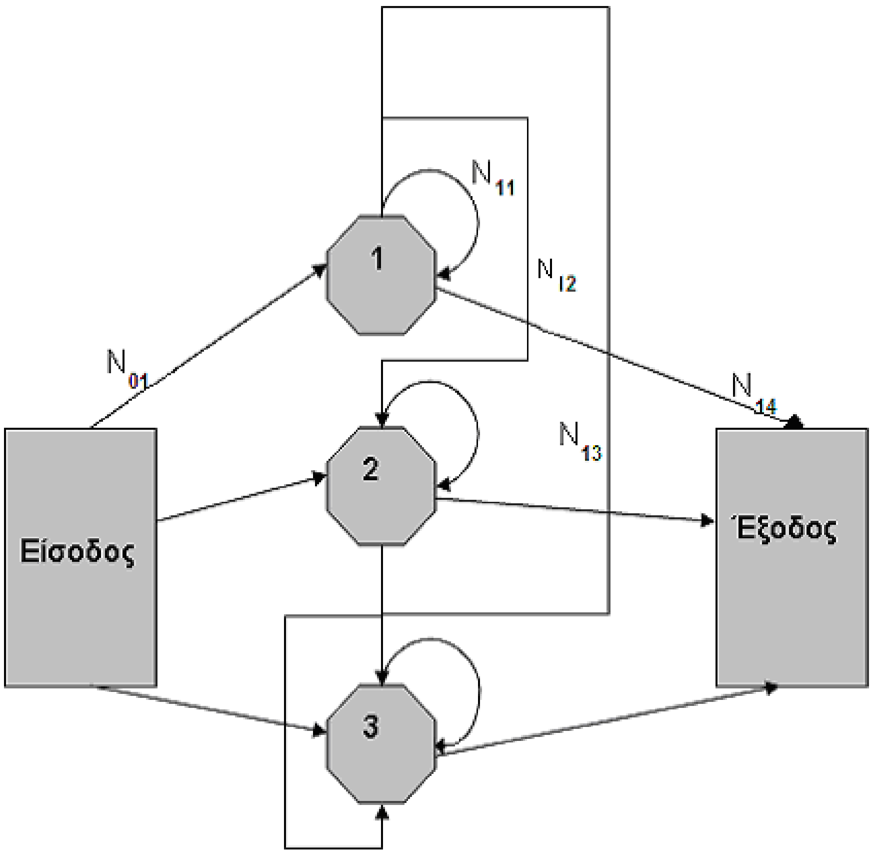
Ας είναι $S=\{1,2,3,...,k\}$ ο χώρος καταστάσεων (βαθμίδων) του συστήματος. Κάθε μέλος του συστήματος ανήκει σε ακριβώς μία κατάσταση. Τα πιο κοινά από τα σύμβολα που χρησιμοποιούνται είναι τα ακόλουθα:

$t$: η παράμετρος που δηλώνει το χρόνο (γενικότερα το “βήμα”), $t=0,1,2,...$

$N_i(t)$: ο αναμενόμενος αριθμός μελών του συστήματος στην *i* κατάσταση τη χρονική στιγμή $t$ $(t=0,1,2,...,$ και $i=1,2,3,...,k)$.

$p_{ij}(t)$: η πιθανότητα μετάβασης ενός μέλους του συστήματος από την κατάσταση *i* στη *j* στο χρονικό διάστημα $[t,t+1)$.

$p_{0i}(t)$: η πιθανότητα ένα μέλος που θα μπει στο σύστημα στο χρονικό διάστημα $[t,t+1)$. να πάει στην κατάσταση *i*.




Σχήμα 1: **Ροές** εσωτερικές, εισόδου και εξόδου ενός ΜΟΜΣ με k=3 κλάσεις

$p_{k+1,i}(t)$: η πιθανότητα ένα μέλος που βρίσκεται στην κατάσταση *i* να εγκαταλείψει το σύστημα στο χρονικό διάστημα $[t, t+1)$. Η υποθετική k+1 κατάσταση συμβολίζει το εξωτερικό περιβάλλον απωλειών από το σύστημα.

$T(t)$: ο συνολικός (αναμενόμενος) αριθμός των μελών του συστήματος τη χρονική στιγμή $t$. Θεωρείται γνωστός.

$\Delta T(t)$: η διαφορά μεγέθους του συστήματος $\Delta T(t) = T(t+1) - T(t)$ στο διάστημα $[t, t+1)$. Θεωρούμε ότι τα νέα μέλη εισέρχονται όλα μαζί στο τέλος του διαστήματος.

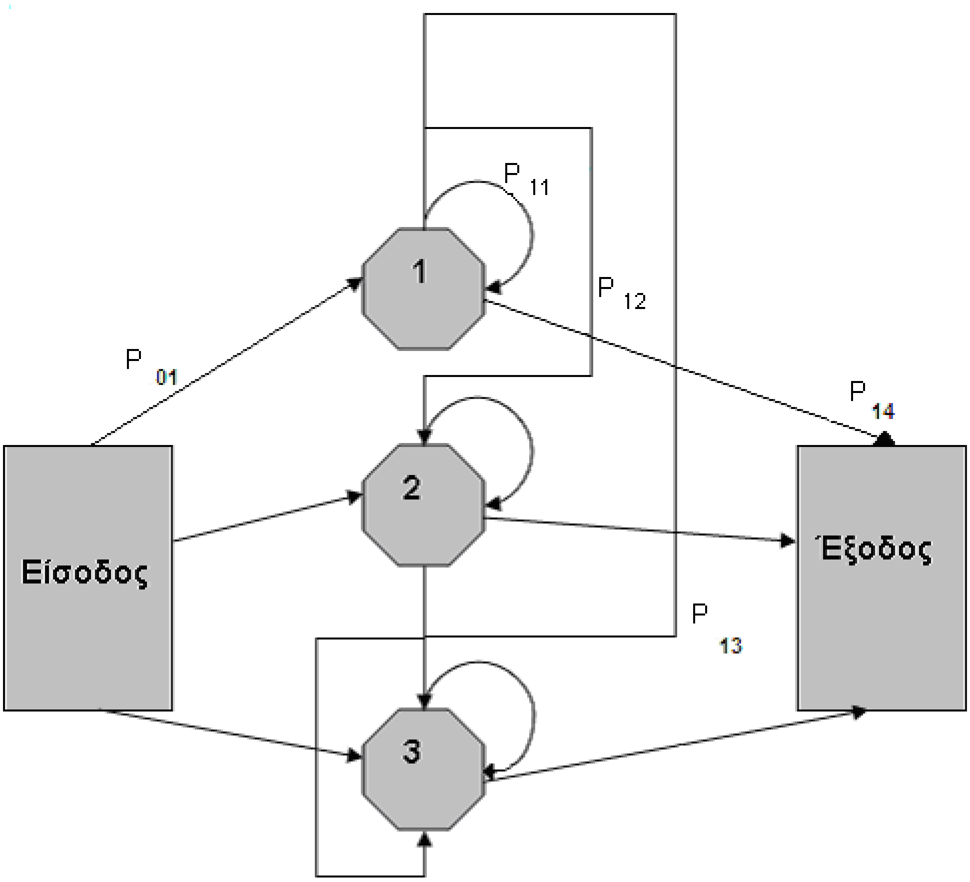
$N_{ij}(t)$: ο (αναμενόμενος) αριθμός των μελών του συστήματος που μεταβαίνουν από την κατάσταση *i* στην κατάσταση *j* στο χρονικό διάστημα $[t, t+1)$.

$N_{k+1}(t):$ ο (αναμενόμενος) αριθμός των μελών που θα αποχωρήσουν απ' το σύστημα στο χρονικό διάστημα $[t, t+1)$.

Έτσι *παράμετροι κίνησης* του ΜΟΜΣ, όπως και οποιουδήποτε άλλου συστήματος ανθρώπινου δυναμικού, είναι: (i) οι πιθανότητες μετάβασης, (ii) οι πιθανότητες εισόδου ή πρόσληψης και (iii) οι πιθανότητες εξόδου ή απώλειας. Όλες είναι συναρτήσεις του χρόνου. Τα σχήματα 1 και 2 παριστάνουν ένα ΜΟΜΣ με 3 καταστάσεις (βαθμίδες) καθώς επίσης και τις παραμέτρους κίνησής του.

Ορίζουμε ακόμα τα ακόλουθα:

**P**(*t*): ο πίνακας μετάβασης του οποίου το στοιχείο που ορίζεται από την *i* γραμμή και την *j* στήλη είναι η πιθανότητα μετάβασης $p_{ij}(t)$. Θεωρείται γενικά υπο-στοχαστικός.




Σχήμα 2: **Πιθανότητες** εσωτερικής μετάβασης, εισόδου και εξόδου ενός ΜΟΜΣ με k=3 κλάσεις

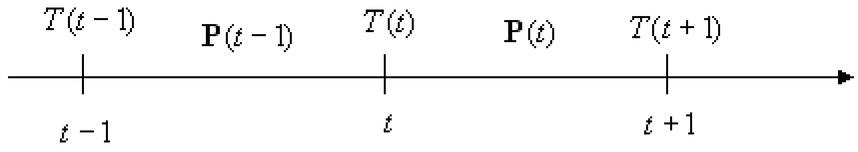
$\mathbf{p}_0(t)$: το διάνυσμα πιθανοτήτων εισόδου (πρόσληψης) $\mathbf{p}_0(t) = (p_{01}(t), ..., p_{0k}(t))$.

Πρόκειται για ένα στοχαστικό διάνυσμα.

$\mathbf{p}_{k+1}(t)$: το διάνυσμα πιθανοτήτων εξόδου (απώλειας) $\mathbf{p}_{k+1}(t) = (p_{k+1,1}(t), ..., p_{k+1,k}(t))$.

Προφανώς ισχύει: $\sum_{j=1}^{k} p_{ij}(t) + p_{i,k+1} = 1$

Οι ακολουθίες: $\{P(t)\}_{t=0}^{\infty}$, $\{p_0(t)\}_{t=0}^{\infty}$, $\{p_{k+1}(t)\}_{t=0}^{\infty}$ και $\{T(t)\}_{t=0}^{\infty}$ παρέχουν τις επαρκείς πληροφορίες για να απαντηθούν τα σημαντικά ερωτήματα της θεωρίας των ΜΟΜΣ. Για το λόγο αυτό, λέμε ότι αυτές οι τέσσερις ακολουθίες καθορίζουν πλήρως το ΜΟΜΣ. Η μη ομογενής Μαρκοβιανή διαδικασία που ορίζει η ακολουθία πινάκων μετάβασης, ονομάζεται **εμβαπτισμένη μη ομογενής Μαρκοβιανή αλυσίδα** (imbedded non-homogeneous Markov chain). Η πληθυσμιακή δομή του συστήματος σε κάθε χρονική στιγμή καθορίζεται από το διάνυσμα $\mathbf{N}(t) = (N_1(t), N_2(t), ..., N_k(t))$ των μελών του σε κάθε μια κατάσταση.




Η κίνηση των μελών του συστήματος ανάμεσα στις βαθμίδες, προς και έξω από αυτό περιγράφεται από το ακόλουθο μοντέλο (βασική εξίσωση διαφορών):

$$\mathbf{N}(t+1) = \mathbf{N}(t)\mathbf{P}(t) + [\mathbf{N}(t)\mathbf{p'}_{k+1}(t) + \Delta T(t)]\mathbf{p}_0(t) \qquad (1.1)$$

όπου

$\mathbf{N}(t)\mathbf{P}(t)$: οι εσωτερικές μετακινήσεις του συστήματος

$\mathbf{N}(t)\mathbf{p}'_{k+1}(t)\mathbf{p}_0(t)$: το πλήθος των νέων μελών του συστήματος που θα καλύψουν τις αποχωρήσεις $N_{k+1}(t) = \mathbf{N}(t)\mathbf{p}'_{k+1}(t)$.

$\Delta T(t)\mathbf{p}_0(t)$: το πλήθος των νέων μελών του συστήματος που αντιστοιχούν στην μεταβολή του μεγέθους του μεταξύ των χρονικών στιγμών $t+1$ και $t$ (ισχύει $\Delta T(t) = T(t+1) - T(t)$).

Η (1.1) γράφεται

$$\mathbf{N}(t+1) = \mathbf{N}(t)\mathbf{Q}(t) + [\Delta T(t)]\mathbf{p}_0(t) \tag{1.2}$$

όπου $\mathbf{Q}(t) = \mathbf{P}(t) + \mathbf{p}'_{k+1}(t)\mathbf{p}_0(t)$ ο επεκταμένος πίνακας μετάβασης του συστήματος. Έστω $\mathbf{Q} = \{q_{ij}\}$ $i, j \in \{1,2,...,k\}$. Τότε

$$\sum_{j=1}^{k} q_{ij} = \sum_{j=1}^{k} [p_{ij} + p_{ik+1} p_{0j}] = \sum_{j=1}^{k} p_{ij} + p_{ik+1} \sum_{j=1}^{k} p_{0j} = \sum_{j=1}^{k} p_{ij} + p_{ik+1} = 1, \quad \forall i \in \{1,2,...,k\}$$

και επομένως ο πίνακας $\mathbf{Q}$ είναι στοχαστικός.

Μερικές από τις κυριότερες εργασίες πάνω στις οποίες στηρίχτηκε η ανάπτυξη του ΜΟΜΣ και στις οποίες αναλύθηκαν διάφορα στοχαστικά μοντέλα για πληθυσμιακά συστήματα είναι οι Prais (1955), Pollard (1966), Hodge (1966), Wynn and Sales (1973), Marshall (1975), Feichtinger (1976), Conlisk (1976), Leeson (1979), Gani (1963), Vajda (1975, 1978a, 1978b), Young και Almond (1961), Young και Vassiliou (1974), Vassiliou (1976, 1978), Bartholomew (1982).

Για τα ΜΟΜΣ έχει ήδη αναπτυχθεί μία αρκετά μεγάλη βιβλιογραφία, στην οποία μελετούνται πολλά από τα κύρια προβλήματα, που αφορούν στα συστήματα αυτά, όπως η ασυμπτωτική συμπεριφορά (Vassiliou (1981a, 1981c, 1982a)), η ευστάθεια (Vassiliou (1981b)), η συμπεριφορά των διακυμάνσεων και των συνδιακυμάνσεων των πληθυσμών σε κάθε κατάσταση (Vassiliou and Gerontidis (1985), Tsaklidis and Vassiliou (1988a, 1988b)), η κυκλική συμπεριφορά του ΜΟΜΣ (Vassiliou and Tsantas (1984b), Vassiliou (1984a, 1986), Georgiou and Vassiliou (1992)), η ταχύτητα σύγκλισης στην κατάσταση στατικής ισορροπίας (Vassiliou and Georgiou (1990), Vassiliou and Tsaklidis (1989)) και, τέλος, ο έλεγχος της συμπεριφοράς του ΜΟΜΣ (Vassiliou and Tsantas (1984a, 1984b), Vassiliou and Georgiou (1990)).

## 1.5. ΘΕΩΡΙΑ ΕΛΕΓΧΟΥ ΜΗ ΟΜΟΓΕΝΩΝ ΜΑΡΚΟΒΙΑΝΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Στην παρούσα εργασία ασχολούμαστε με πτυχές της **Θεωρίας Ελέγχου.** Η Θεωρία Ελέγχου για συστήματα ανθρώπινου δυναμικού χρησιμεύει καθοριστικά στη διαδικασία λήψης αποφάσεων, αφού παρέχει την ευχέρεια επέμβασης στο σύστημα και ελέγχου της πορείας του στο χρόνο. Η ιδέα του ελέγχου σε συστήματα ανθρώπινου δυναμικού με χρήση της Μαρκοβιανής αλυσίδας εμφανίζεται πρώτα σε μία εργασία του Bartholomew (1969) και αργότερα αναπτύσσεται αναλυτικότερα από τον ίδιο (Bartholomew (1973)). Στη συνέχεια, ένα πλήθος επιστημόνων ασχολήθηκε με το πρόβλημα του ελέγχου σε συστήματα ανθρώπινου δυναμικού με έλεγχο κυρίως του διανύσματος των πιθανοτήτων εισόδου. Σημαντικά αποτελέσματα μπορούμε να βρούμε στις εργασίες των Davies (1973, 1975, 1981, 1982, 1983), Forbes (1971), Bartholomew (1975, 1977, 1979), Grinold and Stanford (1974), Grinold and Marshall (1977), Vajda (1975, 1978), Canon, Cullum and Polack (1970), Charnes, Cooper and Niehaus (1971), Morgan (1971), Purkiss and Richardson (1971).

Ειδικότερα για την περίπτωση των ΜΟΜΣ ο έλεγχος ασχολείται ουσιαστικά με δύο διαφορετικά προβλήματα. Το πρώτο είναι η εύρεση των ασυμπτωτικά προσιτών δομών από μία αρχική και της βέλτιστης στρατηγικής, η οποία θα οδηγήσει το σύστημα σε μία συγκεκριμένη δομή (**attainability**). Σε ένα ΜΟΜΣ τρεις διαφορετικοί παράμετροι μπορούν να θεωρηθούν ως παράμετροι ελέγχου: οι πιθανότητες (i) εισόδου, (ii) εξόδου και (iii) των εσωτερικών μεταβάσεων. Η πιο συνηθισμένη μέθοδος ελέγχου, δεδομένου ότι ασχολούμαστε με συστήματα ανθρώπινου δυναμικού, χρησιμοποιεί ως παράμετρο ελέγχου το διάνυσμα των πιθανοτήτων εισόδου. Συνεπώς, το πρόβλημα μεταφράζεται στην εύρεση όλων των ασυμπτωτικών δομών $\mathbf{N}(\infty)$, για τις οποίες υπάρχει οριακό διάνυσμα πιθανοτήτων εισόδου $\mathbf{p}_0 = \lim_{t\to\infty}\mathbf{p}_0(t)$ τέτοιο, ώστε $\lim_{t\to\infty}\mathbf{N}(t) = \mathbf{N}(\infty)$, και στην προσπάθεια βέλτιστης μετάβασης σε μία επιθυμητή δομή. Το δεύτερο πρόβλημα ασχολείται με την εύρεση της βέλτιστης πολιτικής διατήρησης μίας επιθυμητής δομής (**maintainability**).

Ο έλεγχος του ΜΟΜΣ μελετήθηκε αρχικά από τους Vassiliou and Tsantas (1984a, 1984b). Σε πρώτη φάση αναπτύχθηκε το πρόβλημα της διατήρησης μίας επιθυμητής σχετικής πληθυσμιακής δομής $\mathbf{q}(t) = \mathbf{N}(t)/T(t)$ σε πεπερασμένο χρόνο, ενώ σε δεύτερη φάση κατασκευάστηκε ένας αλγόριθμος βέλτιστης διατήρησης μίας δομής, χρησιμοποιώντας συνδυασμό τεχνικών ακεραίου και δυναμικού προγραμματισμού, μέσω της ελαχιστοποίησης μίας αντικειμενικής συνάρτησης. Οι Vassiliou and Georgiou (1990) μελέτησαν τις ασυμπτωτικά προσιτές δομές σε ένα ΜΟΜΣ με παράμετρο ελέγχου την είσοδο. Επιπλέον, οι Vassiliou, Georgiou and Tsantas (1990) υπολόγισαν το σύνολο όλων των οριακών διανυσμάτων των μέσων τιμών, διασπορών και συνδιασπορών υπό τον έλεγχο του οριακού διανύσματος πιθανοτήτων εισόδου. Αργότερα ο Georgiou (1992) μελέτησε το πρόβλημα της μερικής διατήρησης (partial maintainability) και του ελέγχου ενός ΜΟΜΣ σε συστήματα ανθρώπινου δυναμικού.

## 1.6. ΠΟΛΥΚΡΙΤΗΡΙΟΣ ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

Ο πολυκριτήριος ή πολυστοχικός γραμμικός προγραμματισμός αποτελεί γενίκευση αλλά ταυτόχρονα αναπόσπαστο μέρος του γ.π. και χαρακτηρίζεται από την ύπαρξη πολλαπλών υπό μεγιστοποίηση/ελαχιστοποίηση αντικειμενικών συναρτήσεων. Ένα πολυκριτήριο πρόγραμμα μεγιστοποίησης γράφεται:

Να μεγιστοποιηθούν οι n αντικειμενικές συναρτήσεις

$$g_1(x) = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1l}x_l$$

$$g_2(x) = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \ldots + c_{2l}x_l$$

…………………………………………..

$$g_n(x) = c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + \ldots + c_{nl}x_l$$

υπό τους περιορισμούς

$$\mathbf{x} \in F = \left\{ \mathbf{x} \in R^t \, / \, \mathbf{Ax} \le \mathbf{b}, \mathbf{x} \ge \mathbf{0} \right\}$$

όπου *F* είναι η επιτρεπτή περιοχή των λύσεων η οποία οριοθετείτε από σύστημα γραμμικών ανισοεξισώσεων, ενώ $\mathbf{A}, \mathbf{x}$ και $\mathbf{b}$ είναι αντίστοιχα πίνακες διαστάσεων mxl, lx1 και mx1.

Η πολυκριτήρια θεώρηση στο γραμμικό μοντέλο πηγάζει από την επιθυμία του αναλυτή να καταστήσει περισσότερο ρεαλιστικό το μοντέλο του, να πάρει δηλαδή υπ' όψη του περισσότερα από ένα κριτήρια βελτιστοποίησης. Βέβαια, η μορφή αυτή μοντελοποίησης προϋποθέτει τη γραμμικότητα όλων των κριτηρίων, πράγμα που σημαίνει, ότι θα πρέπει να ανευρεθούν οι επιπρόσθετοι συντελεστές των αντικειμενικών συναρτήσεων $c_{ij}, i = 1,2,\ldots,n$. Επιπλέον, είναι ευνόητο ότι δεν περιμένουμε να υπάρχει κάποια λύση που να βελτιστοποιεί όλα τα κριτήρια. Σκοπός μας είναι να βρεθεί μια *λύση που να ικανοποιεί τους περιορισμούς του προβλήματος και να είναι όσο το δυνατόν πιο κοντά στις βέλτιστες τιμές των πολλών αντικειμενικών συναρτήσεων.* Τέλος, πρέπει να σημειωθεί ότι, ένα πολυκριτήριο πρόβλημα απόφασης ανήκει στην κατηγορία των προβλημάτων χαμηλού βαθμού δόμησης, είναι δηλαδή πρόβλημα στο οποίο η ορθολογική λύση αποτελεί αντικείμενο προοδευτικής αναζήτησης, (συνήθως) μέσω μίας διαδικασίας δοκιμής-σφάλματος. Οι σύγχρονες μέθοδοι του πολυκριτήριου γραμμικού προγραμματισμού είναι αλληλεπιδραστικού χαρακτήρα, περιέχουν δηλαδή φάσεις υπολογισμού (επίτευξη εναλλακτικών λύσεων, αξιολόγηση των επιπτώσεων μίας λύσης πάνω στα κριτήρια) και φάσεις διαλόγου ανθρώπου-μηχανής, που αποσκοπούν στο να κατανοήσει ο αποφασίζων τις δικές του προτιμήσεις και να καθοδηγηθεί προς την ικανοποιητικότερη λύση. Γνωστές μέθοδοι είναι η Λεξικογραφική Βελτιστοποίηση, η μέθοδος του Ολικού Κριτηρίου και **ο Προγραμματισμός Στόχων** τον οποίο και χρησιμοποιούμε στην παρούσα εργασία. Ο Προγραμματισμός Στόχων χρησιμοποιήθηκε αρχικά από τους Charnes και Ferguson το 1955, αν και το πραγματικό όνομα εμφανίζεται αρχικά σε ένα κείμενο του 1961 από τον Charnes. Ο Schniederjans, το 1995, έδωσε μια εκτενή βιβλιογραφία σχετικά με το προγραμματισμό στόχων, ενώ οι Jones και Tamiz καταγράφουν μια σχολιασμένη συλλογή άρθρων της περιόδου 1990-2000.

Η μέθοδος αποσκοπεί στη μετατροπή πολυκριτήριου γ.π. σε μονοκριτήριο. Για το σκοπό αυτό, ο αποφασίζων πρέπει να ορίσει για κάθε ένα εκ των κριτηρίων μια τιμή στόχο που θέλει να πετύχει, έστω $s_1, s_2, \ldots, s_n$. Το μοντέλο μετατρέπει όλες τις αντικειμενικές συναρτήσεις σε περιορισμούς με την εισαγωγή μεταβλητών απόκλισης (σφάλματος) $d_i^+, d_i^-$ από τους στόχους: η πρώτη $(d_i^+)$ ισούται με την ποσότητα που η λύση υπερτερεί του στόχου και η δεύτερη $(d_i^-)$ με την ποσότητα κατά την οποία υπολείπεται του στόχου. Στη γενική περίπτωση το μοντέλο γράφεται:

$$\min z = \sum_{i=1}^{n} p_i f_i(d_1^+, d_1^-, d_2^+, d_2^-, \ldots, d_n^+, d_n^-)$$

κάτω από τους περιορισμούς

$$\sum_{j=1}^{l} c_{ij} x_j + d_i^- - d_i^+ = s_i, i = 1,2,...,n$$
$$\mathbf{x} \in F$$
$$d_i^- \geq 0, d_i^+ \geq 0, i = 1,2,...n$$

όπου εκτός από τα συνήθη δεδομένα υπεισέρχονται και τα εξής:

$s_i$: η αριθμητική τιμή του στόχου

$p_i$: ο βαθμός προτεραιότητας(βάρος) του στόχου i

$d_i^+$: το πλεόνασμα αγαθού ή μέσου ως προς το στόχο $s_i$

$d_i^-$: το έλλειμμα αγαθού ή μέσου ως προς το στόχο $s_i$

$f_i$: μία γραμμική συνάρτηση των μεταβλητών $d_i^+$ και $d_i^-$.

Φανερά, ανάλογα με τη φύση του υπό μελέτη προβλήματος, ορισμένες μεταβλητές $d_i^-$ ή $d_i^+$ μπορούν να μην περιλαμβάνονται μέσα στη γραμμική συνάρτηση $f_i$.

Παρατηρήσεις

1. Η ανωτέρω βελτιστοποίηση συνεπάγεται τη σχέση $d_i^- . d_i^+$=0 για κάθε i, δηλαδή, μία τουλάχιστον μεταβλητή απόκλισης έχει (άριστη) τιμή ίση με μηδέν.
2. Το παραπάνω μοντέλο έχει υποστεί πληθώρα βελτιώσεων, με κυριώτερη την αναβάθμισή του στο λεγόμενο *αλληλεπιδραστικό προγραμματισμό στόχων*.
3. Η μέθοδος του προγραμματισμού στόχων μπορεί να επεκταθεί στην ανάλυση ευαισθησίας και παραμετροποίηση τόσο των συντελεστών βαρύτητας των κριτηρίων $p_1$ και $p_2$ όσο και των τιμών των στόχων $s_1$ και $s_2$.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ

## 2.1 ΕΝΑ ΜΟΝΤΕΛΟ ΚΟΣΤΟΥΣ-ΑΜΟΙΒΩΝ

Θεωρούμε ότι έχουμε ένα ΜΟΜΣ όπως αυτό ορίστηκε στην παράγραφο 1.4. Το σύστημα, που έχει χώρο καταστάσεων $S = \{1,2,...,k\}$ περιγράφεται πλήρως από τις δοθείσες -γνωστές- ακολουθίες: $\{\mathbf{P}(t)\}_{t=0}^{\infty}$ των πινάκων με τις πιθανότητες μετάβασης, $\{\mathbf{p}_{k+1}(t)\}_{t=0}^{\infty}$ των διανυσμάτων απώλειας, $\{\mathbf{p}_0(t)\}_{t=0}^{\infty}$ των διανυσμάτων εισόδου και $\{T(t)\}_{t=0}^{\infty}$ του συνολικού πληθυσμού. Τότε (βλ. εξίσωση 1.2), το διάνυσμα με τους αναμενόμενους πληθυσμούς (κατάσταση του ΜΟΜΣ) στο χρόνο $t$ είναι

$$\mathbf{N}(t+1) = \mathbf{N}(t)\mathbf{Q}(t) + [\Delta T(t)]\mathbf{p}_0(t) \tag{2.1}$$

όπου $\mathbf{Q}(t) = \mathbf{P}(t) + \mathbf{p'}_{k+1}(t)\mathbf{p}_0(t)$ ο επεκταμένος πίνακας μετάβασης του συστήματος.

Όπως αναφέραμε και στο προηγούμενο κεφάλαιο, κατά την τελευταία εικοσαετία έλαβε χώρα μία συνεχής ερευνητική προσπάθεια γύρω από τον έλεγχο της στρατηγικής εισόδου νέων μελών σε ένα σύστημα ανθρώπινου δυναμικού. Το πρόβλημα αυτό συνδέθηκε συνήθως με έναν ή συνδυασμό των κατωτέρων στόχων:

- Επίτευξη μιας επιθυμητής δομής
- Ελαχιστοποίηση του αριθμού βημάτων μέχρι να φτάσουμε σε μια επιθυμητή δομή
- Ελαχιστοποίηση του κόστους λειτουργίας

Οι ρίζες του προβλήματος βρίσκονται στους Bartholomew (1973, 1982), Vajda (1975, 1978), Grinold and Stanford (1974) και Mehlmann (1980). Ειδικότερες εργασίες πάνω στα ΜΟΜΣ είναι αυτές των Vassiliou and Tsantas (1984a,b), Georgiou and Vassiliou (1997).

Στο κεφάλαιο αυτό ξεκινάμε ορίζοντας ένα μοντέλο για το αναμενόμενο κόστος λειτουργίας και αμοιβών του ΜΟΜΣ. Στο μοντέλο αυτό δίνουμε τη γενικότερη δυνατή μορφή, ώστε να περιλαμβάνει ως ειδικές περιπτώσεις τις διάφορες παραλλαγές των συναρτήσεων κόστους ή/και αμοιβών που υπάρχουν στη βιβλιογραφία. Αποσκοπούμε στο να μπορεί να χρησιμοποιηθεί το μοντέλο

i) Για να δώσει το κόστος αμοιβών του συστήματος όταν αυτό λειτουργεί κάτω από μία δοσμένη στρατηγική εισόδου νέων μελών.

ii) Σε προβλήματα βελτιστοποίησης, είτε ως δείκτης σύγκλισης σε κάποια επιθυμητή δομή, είτε για την ελαχιστοποίηση γενικότερα του κόστους λειτουργίας.

Υποθέτουμε ότι η μεταβλητή ελέγχου είναι το διάνυσμα εισόδου, δηλαδή η ακολουθία διανυσμάτων $\{\mathbf{p}_0(t)\}_{t=0}^{\infty}$. Υπενθυμίζουμε ότι $\mathbf{p}_0(t) = \{p_{01}(t),..., p_{0k}(t)\}$ όπου $k$ το πλήθος των βαθμίδων του συστήματος και $p_{0j}(t)$ η πιθανότητα ένα νέο μέλος να εισέλθει στη βαθμίδα $j$, στο χρόνο $t$. Έχει αποδειχθεί ότι (Vassiliou and Georgiou, 1990), κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες, ένα ΜΟΜΣ φτάνει σε κάποια οριακή κατάσταση. Πρακτικά αυτό σημαίνει ότι η ακολουθία των διανυσμάτων $\mathbf{N}(t)$ των αναμενόμενων τιμών των μελών κάθε κατάστασης, συγκλίνει σε κάποιο διάνυσμα $\mathbf{N}^*$. Τα αποτελέσματα που μας ενδιαφέρουν συνοψίζονται στο επόμενο θεώρημα (Vassiliou and Georgiou, 1990).

***Θεώρημα 2.1*** *Δίνεται ένα ΜΟΜΣ το οποίο περιγράφεται από τις ακολουθίες* $\{P(t)\}_{t=0}^{\infty}$, $\{p_0(t)\}_{t=0}^{\infty}$, $\{p_{k+1}(t)\}_{t=0}^{\infty}$ και $\{T(t)\}_{t=0}^{\infty}$. *Υποθέτουμε ότι* $\lim_{t\to\infty} \| P(t) - P \| = 0$, $\lim_{t\to\infty} \| P(t) - P \| = 0$, $\lim_{t\to\infty} \| P_{k+1}(t) - p_{k+1} \| = 0$, $\lim_{t\to\infty} \| p_0(t) - p_0 \| = 0$ *και* $\lim_{t\to\infty} T(t) = T$. *Σε όλες τις περιπτώσεις η σύγκλιση είναι γεωμετρική. Έστω επίσης ότι ο πίνακας* $\mathbf{Q} = \mathbf{P} + \mathbf{p}'_{k+1}\mathbf{p}_0$ *είναι πλήρως κανονικός. Τότε υπάρχει το* $\lim_{t\to\infty} \mathbf{N}(t) = \mathbf{N}^*$ *και είναι ίσο με* $T\mathbf{q}^*$, *όπου* $\mathbf{q}^*$ *η γραμμή του ευσταθούς πίνακα* $\mathbf{Q}^* = \lim_{t\to\infty} \mathbf{Q}^t$.

Για τη δημιουργία του μοντέλου αμοιβών βασιζόμαστε σε κλασσικές ιδέες από την περιοχή των **Μαρκοβιανών Διαδικασιών Απόφασης**. Ο Howard (1960), έδωσε το έναυσμα για την ανάπτυξη μιας ολόκληρης θεωρίας πάνω στις Μ.Δ.Α. με το μοντέλο αμοιβών που επινόησε (Markov Processes with rewards). Χρησιμοποιώντας το αρχικό του μοντέλο ως βάση, καθόρισε τη συμπεριφορά του και σε κατάσταση στατιστικής ισορροπίας. Η μορφή στην οποία κατέληξε απετέλεσε το υλικό γύρω από το οποίο ανέπτυξε ένα πρωτότυπο αλγόριθμο ελαχιστοποίησης του κόστους κίνησης σε μια Μαρκοβιανή αλυσίδα. Στο βιβλίο του Bhat (1984) περιέχεται ένας διαφορετικός και εξίσου ενδιαφέρων τρόπος κατάληξης στην οριακή μορφή του μοντέλου του Howard. Ο Smallwood (1965) ασχολήθηκε μ' ένα μοντέλο που περιείχε το λεγόμενο παράγοντα ελάττωσης (discount factor), μια παράθεση του υλικού μπορούμε να βρούμε στον White (1978). Μεταγενέστερη δουλειά, κάπως σχετική μ' αυτό που θα μας απασχολήσει, έχει γίνει από τους Havin M. (1985) και White (1987).

Θα πρέπει βέβαια να σημειώσουμε, ότι ο κοινός παρανομαστής των παραπάνω ερευνητών αλλά και του υλικού που ακολουθεί, είναι η ιδέα αντιστοίχησης αμοιβών για κάθε κίνηση ή αλλαγή του συστήματος. Από κει και πέρα, θα συνδυάσουμε την ιδέα των αμοιβών, με το ΜΟΜΣ, για να φτιάξουμε ένα μοντέλο που θα αποδίδει αμοιβές ή κόστος, σε σχέση με τη συμπεριφορά των μελών του συστήματος (μετάβαση, εγκατάλειψη, είσοδος, θέση στο σύστημα). Το πρόβλημα προφανώς μπορεί να τεθεί είτε ως μεγιστοποίηση των αμοιβών είτε ως ελαχιστοποίηση του κόστους. Μαθηματικά είναι ισοδύναμα και θα περιοριστούμε στο δεύτερο.

Ορίζουμε τις ακόλουθες παραμέτρους:

$\mathbf{S}(t)$: διάνυσμα $k \times 1$ με στοιχεία $s_i(t),\ (i = 1, 2, ..., k)$ τα οποία εκφράζουν το κόστος που επιβαρύνεται το σύστημα για κάθε άτομο της βαθμίδας $i$ στο χρόνο $t$ (και θα μπορούσε να εκφράζει την αμοιβή του).

$\mathbf{R}(t)$: $k \times k$ πίνακας με στοιχεία $r_{ij}(t),\ (i, j = 1, 2, ..., k)$ τα οποία εκφράζουν το κόστος για τη μετάβαση ενός μέλους από την κατάσταση $i$ στην κατάσταση $j$ (το οποίο θα μπορούσε να είναι η διαφορά στη μισθολογική κλίμακα.

$\mathbf{C}(t)$: $k \times k$ πίνακας με στοιχεία $c_{ij}(t) = p_{ij}(t) \cdot r_{ij}(t)$ για $i, j = 1,2,...,k$.

$\mathbf{r}_{k+1}(t)$ $k \times 1$ διάνυσμα με στοιχεία $r_{ik+1}(t)$ $(i = 1,...,k)$, που συμβολίζουν το κόστος εγκατάλειψης ενός μέλους από τη βαθμίδα $i$.

$\mathbf{w}(t)$: $k \times 1$ διάνυσμα με στοιχεία $w_i(t) = p_{ik+1}(t) \cdot r_{ik+1}(t)$, $i = 1,...,k$.

$\mathbf{r}_0(t)$: $k \times 1$ διάνυσμα με στοιχεία $r_{0i}(t)$ $(i = 1,...,k)$, το κόστος ενός νεοεισερχόμενου στη βαθμίδα $i$ μέλους.

$\mathbf{G}(t)$: $1 \times k$ διάνυσμα με στοιχεία $G_i(t)$, τα οποία εκφράζουν το αναμενόμενο κόστος με το οποίο επιβαρύνθηκε το σύστημα σε ότι είχε σχέση με τη βαθμίδα $i$ όταν το σύστημα λειτούργησε από τη χρονική στιγμή 0 μέχρι την χρονική στιγμή $t$. Το διάνυσμα αυτό καλείται **διάνυσμα κόστους**.

$\mathbf{S}_d(t)$: $k \times k$ διαγώνιος πίνακας με τα στοιχεία $s_i$ τα οποία εκφράζουν το κόστος που επιβαρύνεται το σύστημα για κάθε άτομο της βαθμίδας $i$ στο χρόνο $t$ (και θα μπορούσε να εκφράζει την αμοιβή του).

$\mathbf{W}_d(t)$: $k \times k$ διαγώνιος πίνακας με τα στοιχεία $w_i = p_{ik+1}(t) r_{ik+1}(t)$ για $i = 1,...,k$, τα οποία δίνουν τα αναμενόμενα κόστη απώλειας για κάθε βαθμίδα.

$\mathbf{R}_{0d}(t)$: $k \times k$ διαγώνιος πίνακας με τα στοιχεία $r_{0i}(t)$ τα οποία εκφράζουν το κόστος ενός νεοεισερχόμενου μέλους στη βαθμίδα $i$ (εκπαίδευση, απειρία, ή ακόμα αποζημίωση στο σύστημα που ανήκε προηγουμένως).

Στο δοσμένο χρονικό διάστημα $[t-1, t)$, τα κόστη που μας απασχολούν είναι τέσσερα: (α) το κόστος που υφίσταται το σύστημα στο τέλος της περιόδου για τους ανθρώπους που παραμένουν στο σύστημα, (β) το κόστος για τις πάσης φύσεως εσωτερικές μετακινήσεις, (γ) το κόστος απώλειας και (δ) το κόστος για τα νεοεισερχόμενα μέλη. Θα μελετήσουμε το σύστημα σε δύο συνεχή βήματα $\mathbf{N}(t-1)$ και $\mathbf{N}(t)$. Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω καταλήγουμε στην κατωτέρω εξίσωση διαφορών ως το **μοντέλο κίνησης-αμοιβών-κόστους** ενός ΜΟΜΣ:

$$\begin{aligned}\mathbf{G}(t) = \quad & \mathbf{N}(t)\mathbf{S}_d(t) \\ & + \mathbf{N}(t-1)\mathbf{C}(t-1) \\ & + \mathbf{N}(t-1)\mathbf{W}_d(t-1) \\ & + \left[\mathbf{N}(t-1)\mathbf{p}^{'}_{\mathbf{k+1}}(t-1) + \Delta T(t-1)\right]\mathbf{p_o}(t-1)\mathbf{R}_{0d}(t-1) \end{aligned} \tag{2.2}$$

## 2.2 ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΩΝΤΑΣ ΤΗ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ ΕΙΣΟΔΟΥ

Υποθέτουμε ότι αρχίζουμε να παρατηρούμε τη συμπεριφορά ενός ΜΟΜΣ σε κάποια χρονική στιγμή $t$. Προκειμένου να δώσουμε απάντηση στο πρόβλημα της εύρεσης της βέλτιστης πολιτικής εισόδου με αντικειμενικό στόχο την ελαχιστοποίηση του κόστους λειτουργίας αμοιβών, είναι αναγκαίο να καθοριστεί η μορφή του μοντέλου (2.2) σ’ όλες τις φάσεις που περνά το σύστημα, καθώς το $t \to \infty$. Ένα σύστημα όπως αυτό το οποίο περιγράφεται στο Θεώρημα 2.1 διέρχεται τρεις φάσεις: παροδική, ημιπαροδική και φάση στατιστικής ισορροπίας.

<u>**Α. Παροδική φάση:**</u> Το ΜΟΜΣ αναπτύσσεται από βήμα σε βήμα υπακούοντας στο πιθανοθεωρητικό πλαίσιο που υπαγορεύεται από τις ακολουθίες $\{P(t)\}_{t=0}^{\infty}$, $\{p_{k+1}(t)\}_{t=0}^{\infty}$, $\{p_0(t)\}_{t=0}^{\infty}$ και από το συνολικό πληθυσμό $\{T(t)\}_{t=0}^{\infty}$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει δείκτης $t_0$ τέτοιος ώστε για κάθε $t > t_0$ να είναι $P(t) = P,\ p_{k+1}(t) = p_{k+1}$ και $T(t) = T$. Κατά τη

διάρκεια της πεπερασμένης παροδικής περιόδου το μοντέλο κόστους αμοιβών (2.2) παίρνει τιμές οι οποίες καθορίζονται από το ΜΟΜΣ μέσω της πολιτικής εισόδου $p_0(t)$ και της αντίστοιχης πληθυσμιακής δομής η οποία προκύπτει από αυτή. Η ελαχιστοποίηση του κόστους λειτουργίας αφορά στην κατάλληλη επιλογή του $p_0(t)$ μέχρι να φτάσουμε στο συγκεκριμένο δείκτη $t_0$, οπότε περνάμε στην:

**<u>Β. Ημι-παροδική φάση:</u>** Για $t = t_0$ η αναμενόμενη δομή του συστήματος όπως προήλθε από την παροδική φάση θα δίνεται από το διάνυσμα $\mathbf{N}(t_0)$. Εδώ ενδέχεται οι παράμετροι κόστους αμοιβών και λειτουργίας να μην έχουν συγκλίνει ακόμα. Έστω ότι υπάρχει δείκτης $t_u \geq t_0$ έτσι ώστε για κάθε $t \geq t_u$ να είναι: $\mathbf{S}_d(t) = \mathbf{S}_d, \mathbf{R}(t) = \mathbf{R}$, $\mathbf{R}_{0d}(t) = \mathbf{R}_{0d}, \mathbf{W}_d(t) = \mathbf{W}$. Από αυτή τη χρονική στιγμή και μετά το σύστημα θα συγκλίνει πια με γεωμετρική ταχύτητα, στην οριακή δομή $\mathbf{N}^* = T\mathbf{q}^*$. Αυτό υποθέτουμε ότι συμβαίνει μέχρι κάποιο δείκτη $t_s > t_u$.

**<u>Γ. Φάση στατιστικής ισορροπίας:</u>** Είναι η περίοδος που διέρχεται το σύστημα για $t > t_s$ όπου $\mathbf{N}(t) = \mathbf{N}^*$. Με κατάλληλο χειρισμό των μοντέλων αναμενόμενου κόστους θα προσπαθήσουμε να οδηγήσουμε το ΜΟΜΣ σε μία φάση στατιστικής ισορροπίας η οποία να έχει ένα ελάχιστο αναμενόμενο κόστος λειτουργίας αμοιβών σε κάθε βήμα.

Στη συνέχεια θα συζητήσουμε πιθανές παραλλαγές του προγραμματισμού στόχων για το σύστημα που περιγράψαμε παραπάνω (ΜΟΜΣ), προκειμένου να επιτευχθεί μια ικανοποιητική συμπεριφορά σύμφωνα με συγκεκριμένους στόχους. Κατόπιν θα ερευνήσουμε την εφαρμογή αυτών των παραλλαγών στις τρεις φάσεις που διέρχεται το σύστημα. Η σχετική βιβλιογραφία (Georgiou, 1999) δείχνει ότι μπορούμε να εκμεταλλευτούμε τις προτεραιότητες και τα βάρη της σχετικής μεθοδολογίας, προκειμένου να πετύχουμε τη ζητούμενη κάθε φορά βελτιστοποίηση. Χωρίς την απώλεια της γενικότητας, δεχόμαστε ότι ο έλεγχος του ΜΟΜΣ αρχίζει τη χρονική στιγμή 0. Επιπλέον, όντας στην παροδική φάση, εφαρμόζεται μια βελτιστοποίηση ενός βήματος κάθε φορά, και στη συνέχεια ο μελετητής επανεξετάζει την πολιτική του μελετώντας την πραγματική κατάσταση του συστήματος.

Το σύνολο των περιορισμών

$$\mathbf{N}_j(t)-\sum_{i=1}^{k}\mathbf{N}_i(t-1)\mathbf{p}_0(t-1)+[\sum_{i=1}^{k}\mathbf{N}_i(t-1)\mathbf{p}_{i,k+1}(t-1)+T(t)-T(t-1)]\mathbf{p}_{0j}(t-1)=0 \qquad (2.3)$$

για $j=1,...,k$

σχετίζει την προκύπτουσα δομή με την τρέχουσα καθώς επίσης και με την πολιτική εισόδου.

Το πρώτο σύνολο στόχων είναι σχετικό με τα κόστη. Από τον πίνακα (2.2) έχουμε

$$\begin{aligned}&\mathbf{N}_j(t)\mathbf{s}_j(t)+\sum_{i=1}^{k}\mathbf{N}_i(t-1)\mathbf{c}_{ij}(t-1)+\mathbf{N}_j(t-1)\mathbf{w}_j(t-1)+\\&+[\sum_{i=1}^{k}\mathbf{N}_i(t-1)\mathbf{p}_{i,k+1}(t-1)+T(t)-T(t-1)]\mathbf{p}_{0j}(t-1)\mathbf{r}_{0j}(t-1)+d_{1j}^{-}-d_{1j}^{+}=0\end{aligned} \qquad (2.4)$$

για $j=1,...,k$

Το δεύτερο σύνολο στόχων αφορά την επιθυμητή δομή. Σε κάθε βήμα, το επιθυμητό μέγεθος της κάθε βαθμίδας $j$ ορίζεται ως $\mathbf{N}_j^*$. Επομένως θα είναι

$$\mathbf{N}_j^*-\mathbf{N}_j(t)+d_{2j}^{-}+d_{2j}^{+}=0 \qquad (2.5)$$

για $j=1,...,k$

Ένας άλλος περιορισμός που επιβάλλεται από το ΜΟΜΣ είναι ο

$$\sum_{j=1}^{k} \mathbf{p}_{0j}(t-1) = 1 \tag{2.6}$$

αφού πρόκειται για ένα στοχαστικό διάνυσμα. Τέλος είναι $\mathbf{p}_0(t-1) \geq 0, \mathbf{N}(t) \geq 0,$ και όλες οι μεταβλητές απόκλισης μη αρνητικές.

Τότε θα μπορούσαμε να έχουμε:

(α) Ως πρώτη προτεραιότητα την ελαχιστοποίηση του κόστους.

Λεξικογραφική ελαχιστοποίηση $a = \{a_1, a_2\}$, όπου

$$a_1 = \sum_{j=1}^{k} d_{1j}^{+} \qquad a_2 = \sum_{j=1}^{k} d_{2j}^{-} + d_{2j}^{+} \tag{2.7α}$$

(β) Ως πρώτη προτεραιότητα την επιθυμητή δομή

Λεξικογραφική ελαχιστοποίηση $a = \{a_1, a_2\}$, όπου

$$a_1 = \sum_{j=1}^{k} d_{2j}^{-} + d_{2j}^{+} \qquad a_2 = \sum_{j=1}^{k} d_{1j}^{+} \tag{2.7β}$$

Η περίπτωση (α) παραγάγει ισοδύναμα αποτελέσματα με ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης κόστους χωρίς περιορισμούς που να επιβάλλονται στη δομή. Η περίπτωση (β) είναι ισοδύναμη με ένα πρόβλημα attainability (βλ. σελ. 19) το οποίο δεν απαιτεί ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους λειτουργίας. Το πλεονέκτημα από μια τέτοια προσέγγιση σε σχέση με προηγούμενες (π.χ. Georgiou και Vassiliou, 1997), είναι ότι συμπεριλαμβάνει όλες τις πληροφορίες που απαιτούνται για την επίτευξη των στόχων χωριστά για κάθε βαθμίδα, κι άρα παρέχει ένα ελεγχόμενο εργαλείο για την παρουσίαση της ανάλυσης ευαισθησίας. Επίσης με την διαφοροποίηση που μπορεί να γίνει στη σειρά των προτεραιοτήτων (αντιστροφή στη συγκεκριμένη περίπτωση), μπορούν να αντιμετωπισθούν θέματα σχετικά με τον καθορισμό των στόχων.

(γ) Ως πρώτη προτεραιότητα την ελαχιστοποίηση του κόστους με χρήση βαρών.

Λεξικογραφική ελαχιστοποίηση $a = \{a_1, a_2\}$, όπου

$$a_1 = \sum_{j=1}^{k} \gamma_1 d_{1j}^{+} \quad a_2 = \sum_{j=1}^{k} \gamma_{2j} (d_{2j}^{-} + d_{2j}^{+}) \tag{2.8}$$

Πρόκειται για μια (λογική) επέκταση, όπου οι συντελεστές $\gamma_{1j}$ δείχνουν την σχετική σημασία των ανεπιθύμητων αποκλίσεων που δημιουργούν τα επιθυμητά επίπεδα όσον αφορά τους συντελεστές κόστους. Η ίδια ερμηνεία ισχύει για τους συντελεστές $\gamma_{2j}$ που σχετίζονται με τους στόχους. Οι ανωτέρω προτεραιότητες μπορούν να αντιστραφούν ως ακολούθως:

Λεξικογραφική ελαχιστοποίηση $a = \{a_1, a_2\}$, όπου

$$a_1 = \sum_{j=1}^{k} \gamma_{2j} (d_{2j}^{-} + d_{2j}^{+}) \qquad a_2 = \sum_{j=1}^{k} \gamma_{1j} d_{1j}^{+} \tag{2.9}$$

(δ) Γενίκευση των ανωτέρω ιδεών

Λεξικογραφική ελαχιστοποίηση $a = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$, όπου

$$a_1 = \sum_{j \in P_l} \gamma_{1j} d_{1j}^{+} \quad a_2 = \sum_{j \in P_l} \gamma_{2j} (d_{2j}^{-} + d_{2j}^{+}) \tag{2.10}$$

και $P_l$ η ομάδα προτεραιότητας $l$, $l = 1,2,...,m.$

Οι ανωτέρω γενικοί τύποι όταν εφαρμόζονται στις διάφορες βαθμίδες του συστήματος, ή με διάφορες προτεραιότητες και βάρη αναμένεται να δώσουν τα αποτελέσματα που θα επιτρέψουν τη περαιτέρω έρευνα του συστήματος σχετικά με τις αλλαγές μεταξύ όχι μόνο των δαπανών και των στόχων αλλά και μεταξύ των βαθμίδων.

(ε) Γενίκευση των ανωτέρω ιδεών

Λεξικογραφική ελαχιστοποίηση $a = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$, όπου

$$a_l = \sum_{j \in P_l} [\delta_1 d_{1j}^{+} + \delta_2 (d_{2j}^{-} + d_{2j}^{+})] \qquad (2.11)$$

και $P_l$ η ομάδα προτεραιότητας $l$, $l = 1,2,...,m.$

Στον παραπάνω τύπο τα βάρη $\delta_1$ και $\delta_2$ δείχνουν τη σχετική σημασία μεταξύ της ελαχιστοποίησης του κόστους και της επίτευξης της δομής μιας βαθμίδας του συστήματος. Παρόμοιοι ή διαφορετικοί τύποι έχουν χρησιμοποιηθεί εκτενώς στη σχετική βιβλιογραφία, ανάλογα με τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά του μελετώμενου συστήματος. Προφανώς, για ένα σύστημα με πολλές βαθμίδες, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε συνδυασμό αυτών των τύπων προκειμένου να έχουμε καλύτερα αποτελέσματα.

Όπως αναφέρθηκε θα δούμε κάποιες παραλλαγές στόχων σχετικά με τα γνωστά προβλήματα ελέγχου των μη ομογενών Μαρκοβιανών συστημάτων (ΜΟΜΣ). Αυτές οι παραλλαγές μπορούν να εφαρμοστούν σε όλη τη διάρκεια της διαδικασίας ελέγχου του συστήματος, δηλαδή και στις τρεις φάσεις που διέρχεται το σύστημα προς την ασυμπτωτική δομή.

Το γενικό πρόβλημα διατηρησιμότητας (maintainability, βλ. σελ. 19) επικεντρώνεται στη διατήρηση μιας συγκεκριμένης δομής του συστήματος σε διαδοχικές χρονικές στιγμές. Το πρόβλημα μπορεί να εξαρτάται από την τρέχουσα δομή $\mathbf{N}(t-1)$ ή μπορεί να είναι ανεξάρτητο από τη δομή αλλά να ζητείται να εντοπισθούν όλες οι πιθανές δομές που μπορούν να διατηρηθούν, έχοντας ως δεδομένο τις παραμέτρους της εσωτερικής κινητικότητας. Αν το σύστημα είναι επεκτάσιμο, τότε η $\mathbf{N}(t-1)$ δεν μπορεί να διατηρηθεί αυστηρά, αν και μπορεί να εξεταστεί μερική διατηρησιμότητα υπό διάφορες συνθήκες. Ανάλογες ιδέες μπορούν να χρησιμοποιούν τη σχετική δομή:

$$\mathbf{q}(t-1) = \mathbf{N}(t-1)/T(t-1)$$

Το γεγονός ότι δεν μπορούμε να διατηρήσουμε την δοσμένη δομή όταν το σύστημα επεκτείνεται ($T(t) > T(t-1)$), μπορεί εν μέρει να αντιμετωπιστεί με τη χρήση του προγραμματισμού στόχων με μια συνάρτηση όπως τις (2.8) ή (2.9) ή (2.10). Για παράδειγμα μπορούμε να έχουμε το ακόλουθο πρόγραμμα:

*Lex Min* $\mathrm{a} = \{a_1, a_2\}$ όπου

$$\alpha_1 = \sum_{j=1}^{k} \gamma_{2j}(d_{2j}^- + d_{2j}^+) \text{ και } a_2 = \sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{k}} \gamma_{1\mathrm{j}} \ \mathrm{d}_{1\mathrm{j}}^+$$

κάτω από τους περιορισμούς

$$\mathbf{N}_j(t) - \sum_{i=1}^{k} \mathbf{N}_i(t-1)\mathbf{p}_{ij}(t-1) + [\sum_{i=1}^{k} \mathbf{N}_i(t-1)\mathbf{p}_{ik+1}(t-1) + T(t) - T(t-1)]\mathbf{p}_{0j}(t-1) = 0 \quad \text{για } j = 1,2,$$

$$\mathbf{N}_j(t)\mathbf{s}_j(t) - \sum_{i=1}^{k} \mathbf{N}_i(t-1)\mathbf{c}_{ij}(t-1) + \mathbf{N}_j(t)\mathbf{w}_j(t) + [\sum_{i=1}^{k} \mathbf{N}_i(t-1)\mathbf{p}_{ik+1}(t-1) +$$

$$+ T(t) - T(t-1)]\mathbf{p}_{0j}(t-1)\mathbf{r}_{0j}(t-1) + d_{1j}^- - d_{1j}^+ = 0 \quad \text{για } j = 1,2,...,k$$

$$\mathbf{N}_j(t-1) - \mathbf{N}_j(t) + d_{2j}^- + d_{2j}^+ = 0 \quad \text{για } j = 1,2,...,k$$

$$\sum_{j=1}^{k} \mathbf{p}_{0j}(t-1) = 1$$

(2.12)

όπου $\mathbf{p}_0(t-1) \geq 0, \mathbf{N}(t) \geq 0$

και όλες τις μεταβλητές απόκλισης μη αρνητικές.

Οι στόχοι, μπορούν να ομαδοποιηθούν στο πρώτο επίπεδο προτεραιοτήτων με τα κατάλληλα βάρη. Όπως είναι προφανές, για μια επέκταση του συστήματος όλα τα παραπάνω δεν μπορούν να επιτευχθούν ακριβώς, κι άρα οι προτεραιότητες μεταξύ των στόχων θα πρέπει να επανεξεταστούν.

Μπορούμε επίσης να θεωρήσουμε την ενδιαφέρουσα περίπτωση κατά την οποία η υπάρχουσα δομή για ένα δεδομένο χρονικό σημείο $t-1$ δεν είναι ακόμη γνωστή, (επειδή, για παράδειγμα, δεν έχουν ακόμα επιτύχει αυτό το συγκεκριμένο χρονικό σημείο). Καθορίζοντας το $\mathbf{N}(t)=\mathbf{N}(t-1)$ και με την αντικατάσταση των στόχων σχετικά με τα επιθυμητά επίπεδα για το σύστημα, έχουμε ένα πρόγραμμα που δίνει την διατηρηθείσα δομή (η οποία εξαρτάται από τις τρέχουσες παραμέτρους κίνησης), με το ελάχιστο κόστος για το σύστημα.

Το γεγονός ότι δεν μπορούμε πάντα να διατηρήσουμε μια απόλυτη δομή αν το σύστημα επεκτείνεται ($T(t)>T(t-1)$), μπορεί να αντιμετωπιστεί χρησιμοποιώντας σχετικές δομές. Για αυτή την περίπτωση, ένα γνωστό πρόβλημα που βρέθηκε στη βιβλιογραφία είναι ο καθορισμός της πολιτικής εισόδου που θα μπορούσε να διατηρήσει την $\mathbf{q}(t-1)$ για ένα (ή περισσότερα) βήματα:

*Lex Min* $\mathrm{a}=\{a_1,a_2\}$ όπου

$$\alpha_1=\sum_{j=1}^{k}\gamma_{2j}(d_{2j}^{-}+d_{2j}^{+}) \text{ και } a_2=\sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{k}}\gamma_{1\mathrm{j}}\ \mathrm{d}_{1\mathrm{j}}^{+}$$

κάτω από τους περιορισμούς

$$\mathbf{N}_j(t)-\sum_{i=1}^{k}\mathbf{N}_i(t-1)\mathbf{p}_{ij}(t-1)+[\sum_{i=1}^{k}\mathbf{N}_i(t-1)\mathbf{p}_{ik+1}(t-1)+T(t)-T(t-1)]\mathbf{p}_{0j}(t-1)=0 \quad \text{για } j=1,2,$$

$$\mathbf{N}_j(t)\mathbf{s}_j(t)-\sum_{i=1}^{k}\mathbf{N}_i(t-1)\mathbf{c}_{ij}(t-1)+\mathbf{N}_j(t)\mathbf{w}_j(t)+[\sum_{i=1}^{k}\mathbf{N}_i(t-1)\mathbf{p}_{ik+1}(t-1)+$$
$$+T(t)-T(t-1)]\mathbf{p}_{0j}(t-1)\mathbf{r}_{0j}(t-1)+d_{1j}^{-}-d_{1j}^{+}=0 \quad \text{για } j=1,2,...,k$$

$$\frac{1}{T(t-1)}\mathbf{N}_j(t-1)-\frac{1}{T(t)}\mathbf{N}_j(t)+d_{2j}^{-}+d_{2j}^{+}=0 \quad \text{για } j=1,2,...,k$$

$$\sum_{j=1}^{k}\mathbf{p}_{0j}(t-1)=1$$

όπου $\mathbf{p}_0(t-1)\geq 0, \mathbf{N}(t)\geq 0$ (2.13)

και όλες τις μεταβλητές απόκλισης μη αρνητικές.

Είναι αναμενόμενο ότι, αν η σχετική δομή $\mathbf{q}(t-1)=\frac{1}{T(t-1)}\mathbf{N}(t-1)$ ανήκει στην κυρτή περιοχή (Vassiliou και Tsantas, 1984a, b), με τον προγραμματισμό στόχων θα βρούμε τη μοναδική πολιτική εισόδου που τη διατηρεί. Στην γενική περίπτωση που η σχετική δομή μπορεί να μην ανήκει σε αυτή την περιοχή, το πρόγραμμα θα υπολογίσει το βέλτιστο αποτέλεσμα σε συνδυασμό με τις προσλήψεις, και σύμφωνα με τις προτεραιότητες ή τα βάρη που συνοδεύουν τις μεταβλητές απόκλισης στην επίτευξη των στόχων. Παρόμοια θέματα μπορούν να υπάρξουν εάν υποθέσουμε ότι αναζητούμε μια γενική σχετική δομή που να μπορεί να διατηρηθεί και ταυτόχρονα να πληρούνται κάποιες προϋποθέσεις. Στην περίπτωση αυτή, η άγνωστη παράμετρος είναι η $\mathbf{q}(t-1)=\mathbf{q}(t)=\mathbf{q}$ καθώς και η πολιτική εισόδου. Ψάχνουμε για τη σχετική δομή (που ανήκει στην κυρτή περιοχή) και ικανοποιεί τους στόχους (σύμφωνα με τις προτεραιότητες και τα βάρη που θα δοθούν).

Το πρόβλημα αφορά την διατήρηση ενός δεδομένου υποσύνολου της δομής, σε ένα ή περισσότερα βήματα. Μια εκτενής ανάλυση του προβλήματος μπορεί να βρεθεί στον Vajda (1978), ενώ αργότερα ο Georgiou (1992) μελέτησε ικανές και αναγκαίες προϋποθέσεις για την ασυμπτωτική δομή των κυρτών περιοχών στο μη ομογενές Μαρκοβιανό σύστημα.

Το ακόλουθο πρόγραμμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να βρει τη βέλτιστη πολιτική εισόδου και τα διανύσματα απωλειών, χρησιμοποιώντας μια συνάρτηση με βάρη.

*Lex Min* $\mathrm{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ όπου

$$\alpha_1 = \sum_{j=1}^{k} \gamma_{2j}(d_{2j}^{-} + d_{2j}^{+}) \text{ και } a_2 = \sum_{j=1}^{k} \gamma_{1j}\ \mathrm{d}_{1j}^{+} \text{ και } a_3 = \sum_{j \in \bigcup_{i=1}^{m} s_i} \gamma_{1j} d_{1j}^{+}$$

κάτω από τους περιορισμούς

$$\mathbf{N}_j(t) - \sum_{i=1}^{k} \mathbf{N}_i(t-1)\mathbf{p}_{ij}(t-1) + [\sum_{i=1}^{k} \mathbf{N}_i(t-1)\mathbf{p}_{ik+1}(t-1) + T(t) - T(t-1)]\mathbf{p}_{0j}(t-1) = 0 \quad \text{για } j = 1, 2,$$

$$\mathbf{N}_j(t)\mathbf{s}_j(t) + \sum_{i=1}^{k} \mathbf{N}_i(t-1)\mathbf{c}_{ij}(t-1) + \mathbf{N}_j(t)\mathbf{w}_j(t) + [\sum_{i=1}^{k} \mathbf{N}_i(t-1)\mathbf{p}_{ik+1}(t-1) +$$
$$+ T(t) - T(t-1)]\mathbf{p}_{0j}(t-1)\mathbf{r}_{0j}(t-1) + d_{1j}^{-} - d_{1j}^{+} = 0 \quad \text{για } j = 1, 2, ..., k$$

$$\sum_{j \in s_i} \mathbf{N}_j(t-1) - \sum_{j \in s_i} \mathbf{N}_j(t) + d_{2j}^{-} + d_{2j}^{+} = 0 \quad \text{για } j = 1, 2, ..., k$$

$$\sum_{j=1}^{k} \mathbf{p}_{0j}(t-1) = 1$$

όπου $\mathbf{p}_0(t-1) \geq 0, \mathbf{N}(t) \geq 0$ (2.14)

και όλες τις μεταβλητές απόκλισης μη αρνητικές.

Στην παροδική φάση, εάν μπορούμε να λάβουμε αξιόπιστες προβλέψεις για τις παραμέτρους κίνησης και κόστους για περισσότερα από ένα βήματα μπροστά, τότε μπορούμε εναλλακτικά να χρησιμοποιήσουμε μια πολυσταδιακή προσέγγιση για τον υπολογισμό των πολιτικών εισόδου (βλ. για παράδειγμα Bartholomew 1982, Charnes 1971). Αυτή η προσέγγιση ισχύει επίσης και κατά τη διάρκεια της ημι-παροδικής περιόδου μια και όλες οι παράμετροι προσεγγίζουν τα όρια τους ύστερα από ένα πεπερασμένο αριθμό βημάτων (ή με γεωμετρικό ρυθμό). Μια ενδιαφέρουσα προσέγγιση που θα μπορούσε να εφαρμοστεί κατά τη διάρκεια της παροδικής περιόδου, είναι ο πολυκριτήριος προγραμματισμός στόχων, με τους στόχους να αφορούν σχετικές δομές οι οποίες πρέπει να ικανοποιούν οικονομικούς, κοινωνικούς ή άλλους περιορισμούς που επιβάλλονται από την Διοίκηση.

Σε αυτήν την περίπτωση τόσο οι ενδιάμεσες δομές όσο και οι πολιτικές εισόδου είναι οι μεταβλητές απόφασης ενώ η γενική διατύπωση εμφανίζεται να είναι μη γραμμική. Αν και μπορούμε να συνεχίσουμε με μια μη γραμμική προσέγγιση, προτείνουμε να χρησιμοποιηθούν μεταβλητές που δείχνουν την είσοδο προσώπων στο σύστημα με απόλυτους αριθμούς (inflows), και να παρακάμψουμε αυτή την δυσκολία χρησιμοποιώντας μια γραμμική δομή. Οι αντικειμενικές συναρτήσεις μπορεί να περιλαμβάνουν τις προτεραιότητες που σχετίζονται με την επίτευξη των σχετικών δομών. Υποθέτουμε ότι έχουμε ένα επεκτεινόμενο σύστημα. Αρχίζουμε να μετράμε από τη χρονική στιγμή $t=0$ και οι προβλέψεις είναι διαθέσιμες για $t=1,2,...,t_{F-1}$. Ακολουθεί μια διατύπωση αυτού του προβλήματος:

$$Lex\ Min\ \ \mathrm{a}=\{a_1,a_2,...,a_m\}\ \ \text{όπου}$$

$$\alpha_{\mathrm{j}}=\sum_{j\in P_l(t)}[\delta_1 d_{1j}^-(t)+\delta_2(d_{2j}^+(t))+\mathrm{d}_{2\mathrm{j}}^+(\mathrm{t}))$$

και $P_l$ η ομάδα προτεραιότητας $l$, $l=1,2,...,m.$ Τα βάρη σε κάθε βαθμίδα $j$ είναι καθορισμένα ώστε να αντανακλούν τη σχετική σημασία μεταξύ της επίτευξης των σχετικών δομών επίτευξης και της βελτιστοποίησης κόστους για αυτήν την βαθμίδα. Είναι λογικό να υποθέσουμε ότι οι στόχοι attainability θα συμπεριληφθούν στις πρώτες ομάδες προτεραιοτήτων αν και μικτές προτεραιότητες μεταξύ του κόστους και των σχετικών δομών μπορούν επίσης να καθοριστούν.

κάτω από τους περιορισμούς

$$\mathbf{N}_j(t)-\sum_{i=1}^{k}\mathbf{N}_i(t-1)\mathbf{p}_{ij}(t-1)+u_j(t-1)=0 \quad \text{για}\ j=1,2,...,k,\ \ t=1,2,...,t_F$$

$$\mathbf{N}_j(t)\mathbf{s}_j(t)+\sum_{i=1}^{k}\mathbf{N}_i(t-1)\mathbf{c}_{ij}(t-1)+\mathbf{N}_j(t)\mathbf{w}_j(t)+u_j(t-1)\mathbf{r}_{0j}(t-1)+d_{1j}^-(t-1)-d_{1j}^+(t-1)=0$$

$$\text{για}\ \ j=1,2,...,k,\ \ t=1,2,...,t_F$$

$$\sum_{j=1}^{k}\mathbf{N}_j(t)=T(t)\ \ \text{για}\ \ t=1,2,...,t_F \tag{2.15}$$

$$\mathbf{q}_j^* - \frac{1}{T(t)}\mathbf{N}_j(t) + d_{2j}^-(t-1) + d_{2j}^+(t-1) = 0 \quad \text{για } j = 1,2,...,k, \;\; t = 1,2,...,t_F$$

όπου $u(t-1) \geq 0, \mathbf{N}(t) \geq 0$

και όλες τις μεταβλητές απόκλισης μη αρνητικές.

Η ανωτέρω μοντελοποίηση θα μπορούσε να επεκταθεί για να συμπεριλάβει ενδιάμεσους στόχους των σχετικών δομών. Με αυτήν την παραλλαγή ολοκληρώνουμε την παρουσίαση των διατυπώσεων του προγραμματισμού στόχων που επιχειρήσαμε στην παρούσα εργασία και εμφανίζονται σε διάφορες μορφές στην βιβλιογραφία. Όπως αναφέραμε αυτές οι παραλλαγές μπορούν να χρησιμοποιηθούν προκειμένου να καθοδηγηθεί το σύστημα από την παροδική φάση του σε μια φάση ισορροπίας. Είναι εμφανές ότι στην παροδική φάση ένα μόνο στάδιο ή μια πολυκριτήρια παραλλαγή από όλες τις ανωτέρω μπορεί να υιοθετηθεί προκειμένου να καθοδηγηθεί το σύστημα προς την ημι-παροδική φάση. Κατά τη διάρκεια της ημι-παροδικής φάσης, η εφαρμογή μιας μικρής τροποποίησης της τελευταίας παραλλαγής φαίνεται να ταιριάζει καλύτερα, διότι το σύστημα συμπεριφέρεται ομοιογενώς στο χρόνο και ο στόχος να επιτύχουμε μια επιθυμητή ασυμπτωτική δομή σύμφωνα με το κόστος φαίνεται να είναι λογική. Εάν αναμένεται ότι ο πρωταρχικής σπουδαιότητας στόχος είναι να ικανοποιηθούν τα επιθυμητά επίπεδα σχετικά με τις βαθμίδες, τότε ένας ελεύθερος ή χρόνου έλεγχος μπορεί να εφαρμοστεί (Bartholomew, 1982) μέχρι την ικανοποιητική επίτευξη των στόχων. Εάν το σύστημα λειτουργεί για ένα λογικά μεγάλο αριθμό μεταβάσεων στο χρόνο με την ίδια κινητικότητα και παραμέτρους κόστους, τότε η ασυμπτωτική δομή μπορεί να διατηρηθεί χρησιμοποιώντας μια πολιτική προσλήψεων η οποία εύκολα καθορίζεται. Υποθέστε ότι το σύστημα εισάγεται στην ημι-παροδική φάση στο χρόνο $t = t_0$. Τότε

$Lex\ Min$ $\mathrm{a} = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$ όπου

$\alpha_j = \sum_{j \in P_l(t)} [\delta_1 d_{1j}^-(t) + \delta_2 (d_{2j}^+(t)) + \mathrm{d}_{2j}^+(\mathrm{t}))$ και $P_l$ η ομάδα προτεραιότητας $l$, $l = 1,2,...,m.$

κάτω από τους περιορισμούς

$$\mathbf{N}_j(t) - \sum_{i=1}^{k} \mathbf{N}_i(t-1)\mathbf{p}_{ij} + u_j(t-1) = 0 \quad \text{για } j = 1,2,...,k, \quad t = t_0, t_0 + 1, ..., t_F$$

$$\mathbf{N}_j(t)\mathbf{s}_j + \sum_{i=1}^{k} \mathbf{N}_i(t-1)\mathbf{c}_{ij} + \mathbf{N}_j(t)\mathbf{w}_j + u_j(t-1)\mathbf{r}_{0j} + d_{1j}^-(t-1) - d_{1j}^+(t-1) = 0$$

$$\text{για } j = 1,2,...,k, \quad t = t_0, t_0 + 1, ..., t_F$$

$$\sum_{j=1}^{k} \mathbf{N}_j(t) = T(t) \text{ για } t = t_0 + 1, ..., t_F$$

$$\mathbf{q}_j^* - \frac{1}{T(t)} \mathbf{N}_j(t) + d_{2j}^-(t) + d_{2j}^+(t) = 0 \quad \text{για } j = 1,2,...,k, \quad t = t_0 + 1, ..., t_F$$

όπου $u(t-1) \geq 0, \mathbf{N}(t) \geq 0$ (2.16)

και όλες τις μεταβλητές απόκλισης μη αρνητικές.

Το πρόβλημα επιλύεται για $t_F^* = t_0, t_0 + 1, ...$ μέχρι που οι τιμές των μεταβλητών απόκλισης να θεωρηθούν ικανοποιητικές ή η επιθυμητή δομή να επιτευχθεί.

Κατά τη διάρκεια της φάσης ισορροπίας, η δομή του συστήματος (ο συνολικός αριθμός των μελών συγκλίνει σε μια ποσότητα) ανήκει στο σύνολο των ασυμπτωτικά attainable δομών. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα πρόγραμμα που θα συμβιβάσει το ασυμπτωτικό κόστος, την επιθυμητή δομή, και τις ασυμπτωτικές δομές και στη συνέχεια, θα χρησιμοποιήσουμε τα αποτελέσματα για να δομήσουμε τα προσδόκιμα επιθυμητά επίπεδα που πρέπει να χρησιμοποιηθούν κατά τη διάρκεια της ημι-παροδικής περιόδου. Ένα πρόγραμμα που περιλαμβάνει όσα αναφέρθηκαν παραπάνω είναι το εξής:

$$Lex\ Min\ \ \mathrm{a} = \{a_1, a_2, ..., a_m\} \ \text{όπου}$$

$$\alpha_j = \sum_{j \in P_l(t)} [\delta_1 d_{1j}^- + \delta_2 (d_{2j}^+) + \mathrm{d}_{2j}^+) \quad \text{και } P_l \text{ η ομάδα προτεραιότητας } l, \ l = 1,2,...,m.$$

κάτω από τους περιορισμούς

$$\mathbf{N}_j^*(t) - \sum_{i=1}^{k} \mathbf{N}_i^* \mathbf{p}_{ij} + u_j^* = 0 \quad \text{για } \ j = 1,2,..,k$$

$$\mathbf{N}_j^* s_j + \sum_{i=1}^{k} \mathbf{N}_i^* \mathbf{c}_{ij} + \mathbf{N}_j^* \mathbf{w}_j + u_j^* \mathbf{r}_{0j} + d_{1j}^- - d_{1j}^+ = 0 \quad \text{για } \ j = 1, 2, ..., k,$$

$$\sum_{j=1}^{k} \mathbf{N}_j(t) = T$$

$$\widehat{\mathbf{q}}_j - \frac{1}{T} \mathbf{N}_j^* + d_{2j}^- + d_{2j}^+ = 0 \quad \text{για } j = 1, 2, ..., k$$

όπου $u \geq 0, \mathbf{N}^* \geq 0$

και όλες τις μεταβλητές απόκλισης μη αρνητικές. (2.17)

Στην ανωτέρω διατύπωση του στόχου, $\hat{\mathbf{q}}_j$ είναι τα επιθυμητά επίπεδα για την σχετική δομή του συστήματος όπως έχει καθοριστεί από τη Διοίκηση, η οποία μπορεί να μην ανήκει στην ασυμπτωτική περιοχή. Με αλλά λόγια $(1/T)\mathbf{N}_j^*$ είναι η ασυμπτωτικά σχετική δομή που είναι "πλησιέστερα" στον στόχο σύμφωνα με τις επιθυμίες και τις προτεραιότητες που επιβάλλονται. Συμβολίζοντας με $\mathbf{q}_j^* = (1/T)\mathbf{N}_j^*$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτό το αποτέλεσμα ως το επιθυμητό επίπεδο στόχου στην ημι-παροδική φάση. Εάν το $\hat{\mathbf{q}}_j$ ανήκει στην ασυμπτωτική περιοχή τότε υπάρχει η πιθανότητα η δομή να επιτευχθεί επακριβώς (εξαρτάται από τις προτεραιότητες στις αντικειμενικές συναρτήσεις). Σίγουρα, εάν η $T(t)$ συγκλίνει, ο σχετικός και ο απόλυτος στόχος για το μέγεθος του πληθυσμού στις βαθμίδες είναι ισοδύναμοι. Εάν η ανωτέρω ακολουθία τείνει στο άπειρο τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε σχετικές εκφράσεις κόστους (Georgiou and Vassiliou 1997) και τις σχετικές δομές για να μετατρέψουμε τους στόχους μας και τις πιθανότητες με παρόμοια συλλογιστική.

Ωστόσο, διάφορες διατυπώσεις που αφορούν τα επιθυμητά επίπεδα και τις προτεραιότητες μπορούν να εφαρμοσθούν κατά την διάρκεια των τριών φάσεων μέσω των οποίων περνά το σύστημα.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ

## 3.1 ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Στο σημείο αυτό θα δούμε μια εφαρμογή των παραλλαγών του προγραμματισμού στόχων που αναπτύχθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο (μοντέλο 2.13) Δίνεται ένα ΜΟΜΣ με 4 καταστάσεις (βαθμίδες) για το οποίο υποθέτουμε τις παραμέτρους:

$$\mathbf{P}(0)=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{R}(0)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

$\mathbf{p}_{k+1}(0)=[\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{6},\frac{1}{3}]^T$ , $\mathbf{r}_{k+1}(0)=[16,20,36,60]^T$ , $\mathbf{r}_0(0)=[1,2,3,4]^T$ και $\mathbf{s}(1)=[7,12,15,20]^T$

Με απλούς υπολογισμούς βρίσκουμε ότι

$$\mathbf{C}(0)=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} & \frac{5}{8} \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{10}{3} \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{w}(0)=[4,5,6,20]$$

Θεωρούμε ότι ο οργανισμός ξεκινάει τη λειτουργία του τη μηδενική στιγμή με πληθυσμό $T(0)=1000$ ο οποίος κατανέμεται ισόποσα στις 4 βαθμίδες. Στο τέλος αυτής της 1ης χρονικής περιόδου ο πληθυσμός δίνεται ότι θα είναι $T(1)=1200$. Χρησιμοποιώντας την προσέγγιση (2.13) οι στόχοι έχουν ως εξής:

$$Min\ d_{24}^{-}+d_{24}^{+}$$

$$Min\ d_{23}^{-}+d_{23}^{+}$$

$$Min\ d_{11}^{+}+d_{12}^{+}$$

$$Min\ d_{13}^{+}+d_{14}^{+}$$

κάτω από τους περιορισμούς κίνησης του ΜΟΜΣ:

$$N_1(1)-450p_{01}(0)=62.5$$

$$N_2(1)-450p_{02}(0)=187.5$$

$$N_3(1)-450p_{03}(0)=229.17$$

$$N_4(1)-450p_{04}(0)=270.83$$

$$p_{01}(0)+p_{02}(0)+p_{03}(0)+p_{04}(0)=1$$

τους περιορισμούς που αφορούν τους στόχους που τέθηκαν:

$$-7N_1(1)-450p_{01}(0)-d_{11}^-+d_{11}^+=1062.5$$

$$-12N_2(1)-900p_{02}(0)-d_{12}^-+d_{12}^+=1500$$

$$-15N_3(1)-1350p_{03}(0)-d_{13}^-+d_{13}^+=2020.83$$

$$-20N_4(1)-1800p_{04}(0)-d_{14}^-+d_{14}^+=6364.58$$

και τους στόχους που αφορούν τη μερική διατήρηση της σχετικής δομής:

$$0.000833N_3(1)-d_{23}^-+d_{23}^+=0.25$$

$$0.000833N_4(1)-d_{24}^-+d_{24}^+=0.25$$

Τέλος, όλες οι μεταβλητές (άγνωστοι) είναι μη αρνητικές.

Από τη λύση του προβλήματος έχουμε:

$$\mathbf{p}_0(0)=[0.77724, 0, 0.15767, 0.06509],\ \mathbf{N}(1)=[412.26, 187.5, 300.12, 300.12]$$

Οι συνιστώσες $p_{03}(0)$ και $p_{04}(0)$ που υποδεικνύονται εξασφαλίζουν τη ζητούμενη μερική διατηρησιμότητα των βαθμίδων 3 και 4, ενώ το διάνυσμα κόστους είναι:

$$\mathbf{G}(1)=[4298.08, 3750, 6735.4, 5784.1]$$

Για τη συνέχεια, υποθέτουμε ότι η Διοίκηση δέχτηκε την προτεινόμενη πολιτική και τη χρονική στιγμή 1 είναι $\mathbf{N}(1) = [400,200,300,300]$. Θα επαναλάβουμε την μέθοδο έχοντας ως παραμέτρους:

$$\mathbf{P}(1) = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{5}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{R}(1) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

$\mathbf{p}_{k+1}(1) = [\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{6},\frac{1}{2}]^T$ , $\mathbf{r}_{k+1}(1) = [20,24,42,60]^T$ , $\mathbf{r}_0(1) = [2,3,3,5]^T$ , $\mathbf{s}(2) = [7,12,15,20]^T$ και

$T(2) = 2000$ άτομα. Τότε οι στόχοι γράφονται:

$Min\; d_{24}^- + d_{24}^+$

$Min\; d_{23}^- + d_{23}^+$

$Min\; d_{11}^+ + d_{12}^+$

$Min\; d_{13}^+ + d_{14}^+$

ενώ οι περιορισμοί που προκύπτουν είναι οι ακόλουθοι:

$N_1(2) - 1125\, p_{01}(1) = 150$

$N_2(2) - 1125\, p_{02}(1) = 175$

$N_3(2) - 1125\, p_{03}(1) = 275$

$N_4(2) - 1125\, p_{04}(1) = 275$

$p_{01}(1) + p_{02}(1) + p_{03}(1) + p_{04}(1) = 1$

$$-7N_1(2) - 2250\, p_{01}(1) - d_{11}^- + d_{11}^+ = 2300$$

$$-12N_2(2) - 3375\, p_{02}(1) - d_{12}^- + d_{12}^+ = 1000$$

$$-15N_3(2) - 3375\, p_{03}(1) - d_{13}^- + d_{13}^+ = 3000$$

$$-20N_4(2) - 5625\, p_{04}(1) - d_{14}^- + d_{14}^+ = 10500$$

$$0.0005N_1(2) - d_{21}^- + d_{21}^+ = 0.3333$$

$$0.0005N_2(2) - d_{22}^- + d_{22}^+ = 0.1667$$

$$0.0005N_3(2) - d_{23}^- + d_{23}^+ = 0.25$$

$$0.0005N_4(2) - d_{24}^- + d_{24}^+ = 0.25$$

Τότε προτεινόμενη πολιτική εισόδου θα είναι η $\mathbf{p}_0(1) = [0.6, 0, 0.2, 0.2]$ που οδηγεί στη δομή $\mathbf{N}(2) = [825, 175, 500, 500]$ με διάνυσμα κόστους $\mathbf{G}(2) = [9425, 3100, 11175, 21625]$.

Ακολουθούν οθόνες από το λογισμικό winQSB για τα δύο βήματα κίνησης του ΜΟΜΣ που περιγράφηκαν πιο πάνω.

## Από τη χρονική στιγμή *t* = 0 στη χρονική στιγμή *t* = 1

| Variable | p01 | p02 | p03 | p04 | N1 | N2 | N3 | N4 | d11- | d11+ | d12- | d12+ | d13- | d13+ | d14- | d14+ | d21- | d21+ | d22- | d22+ | d23- | d23+ | d24- | d24+ | Direction | R. H. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Min:G1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | 1 | | |
| Min:G2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | 1 | | | | |
| Min:G3 | | | | | | | | | | 1 | | 1 | | | | | | | | | | | | | | |
| Min:G4 | | | | | | | | | | | | | | 1 | | 1 | | | | | | | | | | |
| C1 | -450 | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | = | 62.5 |
| C2 | | -450 | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | = | 187.5 |
| C3 | | | -450 | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | = | 229.17 |
| C4 | | | | -450 | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | = | 270.83 |
| C5 | -450 | | | | -7 | | | | -1 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | = | 1062.5 |
| C6 | | -900 | | | | -12 | | | | | -1 | 1 | | | | | | | | | | | | | = | 1500 |
| C7 | | | -1350 | | | | -15 | | | | | | -1 | 1 | | | | | | | | | | | = | 2020.83 |
| C8 | | | | -1800 | | | | -20 | | | | | | | -1 | 1 | | | | | | | | | = | 5364.58 |
| C9 | 1 | 1 | 1 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | = | 1 |
| C12 | | | | | | | 000833 | | | | | | | | | | | | | | -1 | 1 | | | = | 0.25 |
| C13 | | | | | | | | 000833 | | | | | | | | | | | | | | | -1 | 1 | = | 0.25 |
| C14 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | >= | 0 |
| C15 | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | >= | 0 |
| C16 | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | >= | 0 |
| C17 | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | >= | 0 |
| C18 | | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | >= | 0 |
| C19 | | | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | >= | 0 |
| C20 | | | | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | >= | 0 |
| C21 | | | | | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | >= | 0 |
| LowerB | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | |
| UpperB | M | M | M | M | M | M | M | M | M | M | M | M | M | M | M | M | M | M | M | M | M | M | M | M | | |
| Variable | itinuous | itinuous | itinuous | itinuous | itinuous | itinuous | itinuous | itinuous | itinuous | itinuous | itinuous | itinuous | itinuous | itinuous | itinuous | itinuous | itinuous | itinuous | itinuous | itinuous | itinuous | itinuous | itinuous | itinuous | | |

| | 12:54:23 | | Friday | June | 05 | 2009 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Goal Level | Decision Variable | Solution Value | Unit Cost or Profit c(j) | Total Contribution | Reduced Cost | Allowable Min. c(j) | Allowable Max. c(j) | | | |
| 1 | G1 | p01 | 0,78 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | |
| 2 | G1 | p02 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | M | | | |
| 3 | G1 | p03 | 0,16 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | |
| 4 | G1 | p04 | 0,07 | 0 | 0 | 0 | -0,37 | 0,37 | | | |
| 5 | G1 | N1 | 412,26 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | |
| 6 | G1 | N2 | 187,50 | 0 | 0 | 0 | 0 | M | | | |
| 7 | G1 | N3 | 300,12 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | |
| 8 | G1 | N4 | 300,12 | 0 | 0 | 0 | 0,00 | 0,00 | | | |

## Από τη χρονική στιγμή $t$ = 1 στη χρονική στιγμή $t$ = 2

| Variabl | p01 | p02 | p03 | p04 | N1 | N2 | N3 | N4 | d11- | d11+ | d12- | d12+ | d13- | d13+ | d14- | d14+ | d21- | d21+ | d22- | d22+ | d23- | d23+ | d24- | d24+ | Directio | R. H. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Min:G1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | 1 | | |
| Min:G2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | 1 | | | | |
| Min:G3 | | | | | | | | | | 1 | | 1 | | | | | | | | | | | | | | |
| Min:G4 | | | | | | | | | | | | | | 1 | | 1 | | | | | | | | | | |
| C1 | -1125 | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | = | 150 |
| C2 | | -1125 | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | = | 175 |
| C3 | | | -1125 | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | = | 275 |
| C4 | | | | -1125 | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | = | 275 |
| C5 | -2250 | | | | -7 | | | | -1 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | = | 2300 |
| C6 | | -3375 | | | | -12 | | | | | -1 | 1 | | | | | | | | | | | | | = | 1000 |
| C7 | | | -3375 | | | | -15 | | | | | | -1 | 1 | | | | | | | | | | | = | 3000 |
| C8 | | | | -5625 | | | | -20 | | | | | | | -1 | 1 | | | | | | | | | = | 10500 |
| C9 | 1 | 1 | 1 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | = | 1 |
| C21 | | | | | 0.0005 | | | | | | | | | | | | -1 | 1 | | | | | | | = | 0.3333 |
| C20 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | -1 | 1 | | | | | = | 0.1667 |
| C12 | | | | | | | 0.0005 | | | | | | | | | | | | | | -1 | 1 | | | = | 0.25 |
| C13 | | | | | | | | 0.0005 | | | | | | | | | | | | | | | -1 | 1 | = | 0.25 |
| C14 | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | >= | 0 |
| C15 | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | >= | 0 |
| C16 | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | >= | 0 |
| C17 | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | >= | 0 |
| C18 | | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | >= | 0 |
| C19 | | | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | >= | 0 |
| C20 | | | | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | >= | 0 |
| C21 | | | | | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | | >= | 0 |
| LowerB | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | |
| UpperB | M | M | M | M | M | M | M | M | M | M | M | M | M | M | M | M | M | M | M | M | M | M | M | M | | |
| Variabl | tinuous | tinuous | tinuous | tinuous | tinuous | tinuous | tinuous | tinuous | tinuous | tinuous | tinuous | tinuous | tinuous | tinuous | tinuous | tinuous | tinuous | tinuous | tinuous | tinuous | tinuous | tinuous | tinuous | tinuous | | |

| | 12:58:45 | | Friday | June | 05 | 2009 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Goal Level | Decision Variable | Solution Value | Unit Cost or Profit c(j) | Total Contribution | Reduced Cost | Allowable Min. c(j) | Allowable Max. c(j) | | | |
| 1 | G1 | p01 | 0,60 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | |
| 2 | G1 | p02 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | M | | | |
| 3 | G1 | p03 | 0,20 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | |
| 4 | G1 | p04 | 0,20 | 0 | 0 | 0 | -0,56 | 0,56 | | | |
| 5 | G1 | N1 | 825,00 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | |
| 6 | G1 | N2 | 175,00 | 0 | 0 | 0 | 0 | M | | | |
| 7 | G1 | N3 | 500,00 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | |
| 8 | G1 | N4 | 500,00 | 0 | 0 | 0 | 0,00 | 0,00 | | | |

# ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ


Bachelier, L. (1900). Theorie de la speculation. Ann. Ecole Norm. Sup. 17.21.86

Bailey, N. (1964). The Elements of Stochastic Processes. Wiley, New York.

Bartholomew, D. J. (1959). Note on the measurement and prediction of labour turnover, J. R. Stat. Soc. A122, pp. 232-239.

Bartholomew, D. J. (1969). A mathematical Analysis of Structural Control in a Graded Manpower System. Paper P.3. Research Program in University Administration, University of California.

Bartholomew, D. J. (1975). A stochastic control problem in the Social Sciences. Bull. Int. Stat. Inst. 46, pp. 670-680.

Bartholomew, D. J. (1976). Statistical problems of prediction and control in manpower planning. Math. Scientist. 1, pp. 133-144.

Bartholomew, D. J. (1977). Maintaining a grade or age structure in stochastic environment. Adv. Appl. Prob. 9, pp. 1-17.

Bartholomew, D. J., 1967, 1973, 1982. Stochastic Models for Social Processes, 1st, 2nd, 3rd ed. Wiley, Chistester.

Bartlett, M. S. (1978). An Introduction to Stochastic Processes. Cambridge University Press, Cambridge.

Bartlett, M. S. (1956). Deterministic and Stochastic models for recurrent epidemics. Proc. Third Berkeley Symposium Math. Stat. Prob. 4, pp. 81-89.

Bartlett, M. S. (1978). An Indroduction to Stochastic Processes. 3rd ed, Cambridge University Press, Cambridge.

Berstein, S. N. (1946). Probability theory, 4th ed. Gostekhizdat

Bhat, N.Y. (1984). Elements of Applied Stochastic Processes, 2nd ed. Wiley, New York.

Canon, M. D., C. D. Cullum and E. Polack (1970). Theory of Optimal Control and Mathematical Programming. McGraw-Hill.

Charnes, A., W. Cooper, and R. J. Niehaus (1968). A goal programming model for manpower planning. In: J. Blood (Ed.), Management Science in Planning and Control, Technical Association of the Pulp and Paper Industry, New York.

Charnes, A., W. Cooper, and R. J. Niehaus (1972). Studies in Manpower Planning. Office of Civilian Management, Dpt. Of the Navy, Washington, D.C.

Chiang, C. L. (1968). Introduction to Stochastic Processes on Biostatistics. Wiley, New York.

Chung, K. L. (1967). Markov Chains with Stationary Transition Probabilities, 2nd Ed. Springer-Verlag, Berlin.

Coleman, J.C. (1964). Introduction to mathematical Sociology. The Free Press of Glencoe and Collier_Macmilian, London.

Conlisk, J. (1976). Interactive Markov Chains. J. Math. Sos. 4, pp. 157-185.

Cox, D. R. and H. D. Miller (1965). The Theory of Stochastic Processes. Mrthuen, London.

Cramer, H. and M. R. Leadbetter (1967). Stationary and Related Stochastic Processes. Wiley, New York.

Davies, G.S. (1973). Structural control in a graded manpower system. Man. Sci.20, pp. 76-84.

Davies, G.S. (1975). Maintainability of structures in Markov chain models under recruitment control. J. Appl. Prob. 12, pp. 376-382.

Davies, G.S. (1981). Maintainable regions in a Markov manpower model. J. Appl. Prob. 12, pp. 376-382.

Davies, G.S. (1982). Control of grade sizes in a partially stochastic Markov manpower model. J. Appl. Prob. 19, pp. 439-443.

Davies, G.S. (1983). A note on the geometric/probabilistic relationship in a Markov model. J. Appl. Prob. 20, pp. 423-428.

Dobrushin, R.L. (1953). Limit Theorems for Markov Chains of two States. Izv. Akad. Nauk S.S.S.R., Ser. Mat. 17, pp. 291-330.

Dobrushin, R.L. (1956). Central limit Theorems for a non-stationary Markov Chain II. Theory of Prob. and its Appl.1, pp. 329-382. (Engl. Transl.)

Doeblin, W. (1938). Expose de la Theorie des chaines simples constante de Markoff a un nombre fini d' etats. Rev. math. De l' Union Interbalkanique i, ii.

Doob, J. L. (1953). Stochastic Processes. Wiley, New York.

Dynkin, E. (1965). Theory of Markov Processes. Academic Press, New York.

Einstein, A. (1956). Investigations on the theory of the Brownian movement. Dover, New York (translation of Einstein's 1905 paper)

Feichtinger, G. (1976). On the generalization of stable age distributions to Gani-type person-flow models. Adv. Appl. Prob. 8, pp. 433-445.

Feller, W. (1938). On the Theory of Stochastic Processes. Uspekhi mat. nauk. Issue 5.

Feller, W. (1968). An Introduction to Probability Theory and its Applications, Vol. I 3rd ed. Wiley, New York.

Feller, W. (1971). An Indroduction to Probability Theory and its applications Vol II 2nd ed. Wiley, New York.

Forbes, A. F. (1971). Non-parametric methods of estimating the survivor function, Statistician 20, pp. 27-52.

Frechet, M. (1937). Recherces theoriques modernes. Traite ducalcul des Probabilites I-II, Paris.

Gani, J. (1963). Formulate for projecting enrolments and degrees awarded in universities. J. R. Stat. Soc. A126.

Georgiou, A. C. (1999). Aspirations and priorities in a three phase approach of a non homogeneous Markov system. Eur. J. of Oper. Res. 116, pp. 565-583.

Graunt, J. (1662). Natural and political observations.upon Bills of Mortality. John Martyn. London.

Grinold, R.C. and K. Marshall (1977). Manpower Planning Models. North Holland, Amsterdam.

Grinold, R.C. and R. E. Stanford (1974). Optimal control of a graded Manpower System. Man. Sci.20, pp. 1201-1215.

Hajnal, J. (1956). The ergodic properties of non-homogeneous finite Markov chains, Proc. Camb. Phil. Soc. 52, pp. 67-77.

Hajnal, J. (1958). Weak ergodicity in non-homogeneous Markov chains. Proc. Camb. Phil.Soc. 54, pp. 233-246.

Hodge, R. W. (1966). Occupational mobility as a probability process. De mography 4, pp. 19-34.

Iosifescu, M. (1978). Finite Markov Processes and their Applications. Wiley, New York.

Isaacson, D. and G.R.Madsen (1976). Markov Chains Theory and Applications. Wiley, New York.

Karlin, S. and H. Taylor (1975). A First Course in Stochastic Processes, 2nd ed. Academic Press, New York.

Kemeny, J. G. and J. L. Snell (1976). Finite Markov Chains. Springer-Verlag, Berlin.

Kendall, D. G. (1949). Stochastic Processes and Population Growth. J. R. Stat. Soc. B2, pp. 230-264.

Khinchin, A. U. (1938). Correlation Theory of Stationary Stochastic Processes. Uspekhi mat. nauk. Issue 5.

Kolmogorov, A. M. (1931). Uber die analytischen Methoden in der Wahrsceinlichkeitsrechnung. Mathematische Ann. 104, pp. 418-425.

Kolmogorov, A. M. (1937). Basic Concepts of Probability Theory. ONTI.

Lane, K. F. and J. E. Andrew (1955). A method of labour turnover analysis J. R. Stat. Soc. A118, pp. 296-323.

Leeson, W. G. (1979). Wastage in a hierarchical Manpower System. J. Opl. Res. Soc. 30, pp. 341-348.

Levy, P. (1948). Processus Stochastiques et Mouvement Brownien. Gauthier-Villars, Paris.

Lundberg, F. (1903). Appoximerad framstallning av sannoliknetsfunktione, Aterfor Sakring av Kollektivrisker. Ph. D. Thesis. Uppsala.

Marshall, M.L. (1975). Equalibrium age distributions for graded systems. J. R. Statist. Soc. A138, pp. 62-69.

Morgan, R.W., (1971). The use of a steady state model to obtain the recruitment, retirement an promotion policies of an expanding organization. D. J. Bartholomew and B.R. Morris (Eds.), Aspects of Manpower Planning, English Universities Press, London, pp. 283-291.

Parzen, E. (1962). Stochastic Processes. Holden-Day, San Francisco.

Pollard, J. H. (1966). On the use of the direct matrix product in analyzing certain stochastic population models. Biometrika 53, pp. 397-415.

Prais, J. L. (1955). Measuring social mobility. J. R. Stat. Soc. A 118, pp. 56-66.

Purkiss, C. (1981). Corporate Manpower Planning: a review of models. Eur. J. of Oper. Res. 8, pp. 315-323.

Purkiss, C. and Z. J. Richardson (1971). Planning recruitment in the steel Industry. In: D. J. Bartholomew and B.R. Morris (Eds.), Aspects of Manpower Planning, English Universities Press, London, pp. 65-74.

Rice, A. K., J. M. Hill and E. L. Trist (1950). The representation of labour turnover as a social process. Human Relations 5, pp. 347-371.

Romanovsky, V. (1949). Discrete Markov Chains. Gos-Gostekhizdat.

Rosenblatt, M. (1962). Random Processes. Oxford University Press, N.Y.

Ross, S. M. (1985). Introduction to Probability Models, 3rd ed. Academic Press, New York.

Sarymasakov, T. A. (1954). Fundamentals in the Theory of Markov Processes. Gostekhizdat.

Seal, H. L. (1945). The mathematics of a population composed of k stationary strata each recruited from the stratum below and supported at the lowest level by a uniform annual number of entrants. Biometrika 33, pp. 226-230.

Seneta, E. (1973). Non-negative Matrices. George Allen & Unvin, London.

Sharpe, F.R. and A. I. Lotka, (1911). A problem in age distribution. Phil. Mag. 21, pp. 435-438.

Steindhl, J. (1965). Random Processes and the growth of firms. Griffin, London.

Tacacs, L. (1960). Stochastic Processes. Methuen, London.

Tijms, H. (1986). Stochastic Models and Analysis, a computational approach. Wiley, Chichester.

Tompkin, P. (1971). Secrets of the Great Pyramid. Harper and Row, New York.

Tsaklidis G. and P.-C.G. Vassiliou (1989a). Infinite product of matrices with some negative elements and row sums equal to one. Linear Alg. And its Appl.

Tsaklidis G. and P.-C.G. Vassiliou (1989b). The rate of convergence of the vector of variances and covariances in nonhomogeneous Markov systems. J. Appl. Prob.

Vassiliou, P.- C.G. (1976). A Markov Chain Model for Wastage in Manpower Systems. Opl. Res. Q. 27, pp. 57-70.

Vassiliou, P.- C.G. (1978). A High Order Non-linear Markovian Model fro Promotion in Manpower Systems. J. R. Statist. Soc. A141, pp. 86-94.

Vassiliou, P.- C.G. (1981a). On the Asymptotic Behaviour of Age Distributions in Manpower Systems. J. Oper. Res. Soc. 32, pp. 503-506.

Vassiliou, P.- C.G. (1981b). Stability in a non-homogeneous Markov chain model in Manpower Systems. J. Appl. Prob. 18, pp. 924-930.

Vassiliou, P.- C.G. (1981c).On the limiting behaviour of a non-homogeneous Markov chain model in manpower systems. Biometrika 68, pp. 557-561.

Vassiliou, P.- C.G. (1982). Asymptotic behaviour of Markov systems. J. Appl. Prob. 19, pp. 815-857.

Vassiliou, P.- C.G. (1984a). Cyclic behaviour and asymptotic stability of non homogeneous Markov systems. J. Appl. Prob. 21, 315-325.

Vassiliou, P.- C.G. (1986). Asymptotic variability of non-homogeneous Markov systems under cyclic behaviour. Eur. J. of Oper. Res. 27, pp. 215-228.

Vassiliou, P.- C.G. and I. Gerontidis (1985). Variances and covariances of the grade sizes in manpower systems. J. Appl. Prob. 22, pp. 583-597.

Vassiliou, P.- C.G. and G. Tsaklidis (1990). V-matrices as covariance matrices in homogeneous Markov systems. Proc. of the IMA conference on matrix theory.

Vassiliou, P.- C.G. and N. Tsantas (1984a). Stochastic control in nonhomogeneous Markov systems. Intern. J. Computer Math. 16, pp. 139-155.

Vassiliou, P.- C.G. and N. Tsantas (1984b). Maintainability of structures in non homogeneous Markov systems under cyclic behaviour and input control. Siam J. Appl. Math. 44, pp. 1014-1022.

Vajda, S. (1947). The stratified semi-stationary population. Biometrika 48, pp. 243-254.

Vajda, S. (1948). Introduction to a mathematical theory of a graded stationary population. Bull. Del d' Ass. Actuair. Suisses 48, pp. 251-273.

Vajda, S. (1975). Mathematical aspects of Manpower Planning. Operat. Res. Quart. 26, pp. 527-542.

Vajda, S. (1978a). Maintainability and preservation of graded population structure. – TIMS Studies in Management Sciences 8, pp. 219-230.

Vajda, S. (1978b). Mathematics of Manpower Planning, Wiley, Chichester.

Wynn, H. P. and P. Sales (1973a). A simple model for projecting means and variances of population grade sizes. In: Stochastic Analysis of National Manpower Problems, Research Report, University of Kent.

Wynn, H. P. and P. Sales (1973b).The mover-stayer model and the 1963 labour mobility survey. In: Stochastic Analysis on National Manpower Problems, Research Report, University Of Kent.

Young, A. (1965). The Remuneration of University Teachers. 1964-65. Association of University Teachers, London.

Young, A. and G. Almond (1961). Predicting distributions of staff. Comp. J. 3, pp. 246-250.

Young, A. and P.-C. G.Vassiliou (1974). A non-linear model on the promotion of staff. J. R. Statist. Soc. A137, pp. 584-595.