ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
«ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ & ΤΩΝ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ»

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΑΡΙΘΜΟΣ ΡΟΩΝ ΕΠΙΤΥΧΙΩΝ ΚΑΙ ΑΞΙΟΠΙΣΤΙΑ ΚΥΚΛΙΚΩΝ ΣΥΝΕΧΟΜΕΝΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΑΠΟΤΥΧΙΑΣ

ΜΑΣΤΡΟΓΙΑΝΝΟΠΟΥΛΟΥ Γ. ΕΛΕΝΗ
Α.Μ. 198

Επιβλέπουσα: Ε.Σ. Μακρή
Επίκ. Καθηγήτρια

Πάτρα 2009

Η εργασία αυτή έγινε στα πλαίσια του Διατμηματικού Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών «Μαθηματικά των Υπολογιστών και των Αποφάσεων» υπό την επίβλεψη της Επίκουρου Καθηγήτριας Ευφροσύνης Μακρή.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω την κυρία Μακρή για την καθοδήγησή της και την πολύτιμη βοήθειά της στην εκπόνηση αυτής της διπλωματικής εργασίας.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Εισαγωγή

Θεωρούμε μια ακολουθία από n ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές Bernoulli, $X_1, X_{2,} ..., X_n$ διατεταγμένες σε γραμμή, με πιθανότητα επιτυχίας της X_i, $p_i = P(X_i = 1)$ και πιθανότητα αποτυχίας $q_i = P(X_i = 0) = 1 - p_i$, $i = 1,2,...,n$. Μια ροή επιτυχιών ορίζεται ως μια ακολουθία συνεχόμενων επιτυχημένων δοκιμών (S) στην οποία προηγούνται και έπονται αποτυχημένες δοκιμές (F) ή τίποτε. Μήκος ροής επιτυχιών θεωρείται ο αριθμός των επιτυχιών της. Ο αριθμός των ροών επιτυχιών μήκους k ,$(k \geq 1)$, $N_{n,k}$ βρίσκει πολλές εφαρμογές σε διάφορα επιστημονικά πεδία.

Στις αρχές του 1940 ο αριθμός των ροών επιτυχιών χρησιμοποιήθηκε στους ελέγχους υπόθεσης (run-test) από τους Wold και Wolfowitz (1940), Wolfowitz (1943) και στους ποιοτικούς ελέγχους από τον Mosteller (1941) και Wolfowitz (1943). Πρόσφατα, χρησιμοποιήθηκε με μεγάλη επιτυχία και σε άλλους τομείς, όπως στην αξιοπιστία μηχανικών συστημάτων, στους ελέγχους ποιότητας, στη ψυχολογία, στην οικολογία, σε μελέτες ουρανίου καθώς επίσης και στα αστρονομικά ραντάρ. Σημαντική εφαρμογή της θεωρίας των ροών επιτυχιών συναντάμε επίσης στη μοριακή βιολογία.

Η εύρεση της κατανομής του πλήθους των ροών επιτυχιών χρειάζεται μεγάλη προσπάθεια. Οι Wold και Wolfowitz (1940) πρότειναν για τους ελέγχους υπόθεσης, έναν έλεγχο ο οποίος βασίστηκε στη δεσμευμένη κατανομή του συνολικού αριθμού των μη επικαλυπτόμενων ροών επιτυχιών, $N_{n,k}$, $k \geq 1$, δεδομένου του συνολικού αριθμού των επιτυχιών στην ακολουθία. Στον έλεγχο αυτόν χρησιμοποιήθηκαν μέθοδοι συνδυαστικής ανάλυσης για τον υπολογισμό της ακριβούς κατανομής του συνολικού πλήθους των ροών επιτυχιών.

Η ασυμπτωτική κανονικότητα της μεταβλητής $N_{n,k}$ αποδείχθηκε από τον von Mises και η απόδειξή της παρουσιάζεται στο Feller (1968). Ακριβής έκφραση για τη συνάρτηση πιθανότητας της ίδιας μεταβλητής δόθηκε από τους Philippou και Makri (1986) και Hirano (1986), με μεθόδους συνδυαστικής ανάλυσης.

Οι Fu και Koutras (1994), παρουσίασαν μια μέθοδο για την εύρεση της κατανομής πέντε τυχαίων μεταβλητών που αφορούν τις ροές επιτυχιών, τη μέθοδο της εμβάπτισης της τυχαίας μεταβλητής σε Μαρκοβιανή αλυσίδα. Μια από τις πέντε αυτές τυχαίες μεταβλητές είναι η $N_{n,k}$.

Μεγάλο ενδιαφέρον παρουσιάζει ο αριθμός των μη επικαλυπτόμενων ροών επιτυχιών μήκους k σε n δοκιμές Bernoulli διατεταγμένων σε κύκλο. Στην εργασία αυτή θα μελετήσουμε τη μεταβλητή αυτή, την οποία συμβολίζουμε με $N_{n,k}^C$ και θα προσδιορίσουμε την κατανομή της μέσω συνδυαστικών μεθόδων, αναδρομικών σχέσεων και μέσω της μεθόδου εμβάπτισης σε Μαρκοβιανή αλυσίδα. Η μελέτη θα γίνει για ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές Bernoulli, όχι κατ' ανάγκην ισόνομες.

Στη συνέχεια, σκοπός μας είναι να παρουσιάσουμε την εφαρμογή της κατανομής της τυχαίας μεταβλητής $N_{n,k}^{C}$ στην αξιοπιστία συστημάτων αποτυχίας. Τα συστήματα στα οποία θα αναφερθούμε είναι τα κυκλικά συνεχόμενα k-από-τα-n συστήματα αποτυχίας και τα κυκλικά $m-$συνεχόμενα k-από- τα-n συστήματα αποτυχίας. Κυκλικό συνεχόμενο k-από-τα-n σύστημα αποτυχίας είναι ένα σύστημα n συνιστωσών, διατεταγμένων σε κύκλο, το οποίο αποτυγχάνει αν και μόνο αν αποτύχουν τουλάχιστον k συνεχόμενες συνιστώσες του. Κυκλικό $m-$συνεχόμενο k-από-τα-n σύστημα αποτυχίας είναι ένα σύστημα n συνιστωσών, διατεταγμένων σε κύκλο, το οποίο αποτυγχάνει αν και μόνο αν υπάρχουν τουλάχιστον m μη επικαλυπτόμενες ροές από k συνεχόμενες αποτυχημένες συνιστώσες.

Θα παρουσιάσουμε εκφράσεις για τον υπολογισμό της αξιοπιστίας των παραπάνω συστημάτων μέσω διωνυμικών συντελεστών, πολυωνυμικών συντελεστών, αναδρομικών σχέσεων και μέσω της μεθόδου εμβάπτισης τυχαίας μεταβλητής σε Μαρκοβιανή αλυσίδα.

Τέλος, παρουσιάζονται αριθμητικά παραδείγματα για την διευκρίνιση των μεθόδων που θα αναπτυχθούν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{o}

ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΜΒΑΠΤΙΣΗΣ

1.1 Εμβάπτιση τυχαίας μεταβλητής σε Μαρκοβιανή Αλυσίδα.

Έστω η ακολουθία $X_1, X_2, \ldots, X_n$ από n ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli με πιθανότητες επιτυχίας $p_t = P(X_t = 1)$ και πιθανότητες αποτυχίας $q_t = 1 - p_t$ για $t = 1,2,\ldots,n$. Μια ροή επιτυχιών (ή αποτυχιών) ορίζεται συνήθως ως μια μη διακοπτόμενη ακολουθία από επιτυχίες (S) (ή αποτυχίες (F)). Έστω το σύνολο $\Gamma_n = \{0,1,\ldots,n\}$ και πεπερασμένος χώρος καταστάσεων $\Omega = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\}$.

Ορισμός 1: Μια μη αρνητική τυχαία μεταβλητή $X_{n,k}$ εμβαπτίζεται σε μια πεπερασμένη Μαρκοβιανή αλυσίδα αν:

i) υπάρχει πεπερασμένη Μαρκοβιανή αλυσίδα $\{Y_t : t \in \Gamma_n\}$ ορισμένη στο χώρο καταστάσεων Ω,

ii) υπάρχει πεπερασμένη διαμέριση $\{C_x : x = 0,1,\ldots,l\}$ του χώρου Ω,

iii) για κάθε $x = 0,1,\ldots,l$ ισχύει $P(X_{n,k} = x) = P(Y_n \in C_x)$.

Έστω Λ_t ο πίνακας μετάβασης της πεπερασμένης Μαρκοβιανής αλυσίδας $(\{Y_t : t \in \Gamma_n\}, \Omega)$, U_r το $(1 \times m)$ μοναδιαίο διάνυσμα το οποίο στην $r-$οστή συνιστώσα του έχει μονάδα και μηδέν σε όλες τις υπόλοιπες και U_r' ο ανάστροφος του U_r, διάστασης $(m \times 1)$, τότε

$$U(C_x) = \sum_{r:\alpha_r \in C_x} U_r$$

Θεώρημα 1 (Fu, Koutras 1994)**.** Αν $X_{n,k}$ είναι εμβαπτισμένη σε μια πεπερασμένη Μαρκοβιανή αλυσίδα τότε:

$$P(X_{n,k} = x) = \pi_0 \left(\prod_{t=1}^{n} \Lambda_t \right) U'(C_x)$$

όπου $\pi_0 = \left(P(Y_0 = \alpha_1) \quad P(Y_0 = \alpha_2) \quad \ldots \quad P(Y_0 = \alpha_m)\right)$ ο πίνακας πιθανοτήτων αρχικών καταστάσεων της Μαρκοβιανής αλυσίδας, διάστασης $(1 \times m)$.

Παραθέτουμε τις εξισώσεις Chapman-Kolmogorov οι οποίες αναφέρονται στις ιδιότητες των πινάκων μετάβασης μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας από την κατάσταση i στην κατάσταση j. Θα χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις στην απόδειξη του Θεωρήματος.

Λήμμα 1: Έστω $\{X_n; n \in N\}$ μια ομογενής Μαρκοβιανή αλυσίδα με πιθανότητες μετάβασης n βημάτων $P_{ij}^{(n)} = P(X_{n+m} = j \mid X_m = i)$ $= P(X_n = j \mid X_0 = i)$, και χώρο καταστάσεων $S = \{0,1,...\}$, τότε:

α) $p_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)}$, $i, j \in S$ και $n, m \in N$

β) Αν $P^{(1)} = P = (p_{ij})$ και $P^{(n)} = (p_{ij}^{(n)})$, $i, j \in S$ τότε $P^{(n)} = P^n = P \cdot P \cdots P$

όπου

$$P^{(n)} = \begin{bmatrix} p_{00}^{(n)} & p_{01}^{(n)} & \cdots & p_{0s}^{(n)} \\ p_{10}^{(n)} & p_{11}^{(n)} & \cdots & p_{1s}^{(n)} \\ & \vdots & & \\ p_{s0}^{(n)} & p_{s1}^{(n)} & \cdots & p_{ss}^{(n)} \end{bmatrix}$$

γ) Αν $\alpha_k = P(X_0 = k)$, $k \in S$ τότε $P(X_n = j) = \sum_{k \in S} \alpha_k p_{kj}^{(n)}$, $\forall \ j \in S$

Απόδειξη

α) $p_{ij}^{(n+m)} = P(X_{n+m} = j \mid X_0 = i) = \sum_{k \in S} P(X_{n+m} = j, X_n = k \mid X_0 = i)$

$$= \sum_{k \in S} P(X_{n+m} = j \mid X_n = k) P(X_n = k \mid X_0 = i)$$
$$= \sum_{k \in S} p_{kj}^{(m)} p_{ik}^{(n)}$$

β) Από το (α) $P^{(n+m)} = P^{(n)} \cdot P^{(m)}$ επαγωγικά

- Για $n = 2$: $P^{(2)} = P^{(1+1)} = P^{(1)} \cdot P^{(1)} = P \cdot P = P^2$
- Έστω ότι ισχύει για $n = k$ δηλαδή $P^{(k)} = P^k$
- Θα δείξουμε ότι ισχύει για $n = k + 1$.

Άρα $P^{(k+1)} = P^{(k)} \cdot P^{(1)} = P^k \cdot P = P^{k+1}$

γ) $P(X_n = j) = \sum_{k \in S} P(X_n = j \mid X_0 = k) P(X_0 = k) = \sum_{k \in S} p_{kj}^{(n)} \alpha_k$

Απόδειξη Θεωρήματος

Η τυχαία μεταβλητή $X_{n,k}$ είναι εμβαπτισμένη σε μια πεπερασμένη Μαρκοβιανή αλυσίδα άρα

$$P(X_{n,k} = x) = P(Y_n \in C_x) = \sum_{\alpha_r \in C_x} P(Y_n = \alpha_r) \qquad (1)$$

Εφαρμόζοντας την εξίσωση Chapman-Kolmogorov έχουμε:

$$P(Y_n=\alpha_r)=\sum_{\alpha_j\in\Omega}P(Y_n=\alpha_r\mid Y_0=\alpha_j)P(Y_0=\alpha_j)$$

$$=\left[P(Y_0=\alpha_1),\quad \dots\quad ,P(Y_0=\alpha_m)\right]\begin{bmatrix} P(Y_n=\alpha_1\mid Y_0=\alpha_1) & \cdots & P(Y_n=\alpha_r\mid Y_0=\alpha_1) & \cdots \\ P(Y_n=\alpha_1\mid Y_0=\alpha_2) & \cdots & P(Y_n=\alpha_r\mid Y_0=\alpha_2) & \cdots \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ P(Y_n=\alpha_1\mid Y_0=\alpha_m) & \cdots & P(Y_n=\alpha_r\mid Y_0=\alpha_m) & \cdots \end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}$$

$$=\left[\cdots,\quad P(Y_n=\alpha_r\mid Y_0=\alpha_1)P(Y_0=\alpha_1)+\cdots+P(Y_n=\alpha_r\mid Y_0=\alpha_m)P(Y_0=\alpha_m)\quad ,\cdots\right]\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}$$

$$=P(Y_n=\alpha_r\mid Y_0=\alpha_1)P(Y_0=\alpha_1)+\cdots+P(Y_n=\alpha_r\mid Y_0=\alpha_m)P(Y_0=\alpha_m)$$

$$=\pi_0\left(\prod_{t=1}^{n}\Lambda_t\right)U'_r$$

Τελικά η σχέση (1) γίνεται:

$$P(X_{n,k}=x)=\sum_{\alpha_r\in C_x}\pi_0\left(\prod_{t=1}^{n}\Lambda_t(X)\right)U'_r$$

$$=\pi_0\left(\prod_{t=1}^{n}\Lambda_t(X)\right)\sum_{\alpha_r\in C_x}U'_r$$

$$=\pi_0\left(\prod_{t=1}^{n}\Lambda_t(X)\right)U'(C_x)\text{ , για κάθε } x=0,1,\dots,l$$

Παρατήρηση: Εάν η Μαρκοβιανή αλυσίδα είναι ομογενής (ανεξάρτητες και ισόνομες δοκιμές Bermoulli) τότε $\Lambda_t=\Lambda$ για κάθε $t\in\Gamma_n$, $\prod_{t=1}^{n}\Lambda_t(X)=\Lambda^n$ και $P(X_{n,k}=x)=\pi_0\Lambda^n U'(C_x)$, για κάθε $x=0,1,\dots,l$.

Με βάση τα παραπάνω για να βρούμε την κατανομή μιας τυχαίας μεταβλητής η οποία εμβαπτίζεται σε Μαρκοβιανή αλυσίδα, πρέπει να κατασκευάσουμε:

i) κατάλληλο χώρο καταστάσεων Ω,

ii) κατάλληλη διαμέριση $\{C_x\}$ του χώρου καταστάσεων Ω, και

iii) τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης Λ_t συνδυασμένο με την εμβαπτισμένη Μαρκοβιανή αλυσίδα.

1.2 Κατανομή του πλήθους των μη επικαλυπτόμενων ροών επιτυχιών μήκους k σε ακολουθία n δοκιμών Bernoulli διατεταγμένων σε γραμμή, $N_{n,k}$.

Σε μια σειρά από εργασίες με θέματα αξιοπιστίας από τους Fu (1986), Fu και Hu (1987) και Chao και Fu (1989, 1991) αποδείχθηκε ότι η πιθανότητα να μην υπάρχει ροή επιτυχιών μήκους k, όταν οι ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli είναι διατεταγμένες σε γραμμή, δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$P(N_{n,k}=0)=\pi_0\left(\prod_{t=1}^{n}\Lambda_t\right)U'(C_0) \qquad (1.2.1)$$

όπου $\pi_0=\left(P(Y_0=\alpha_0),P(Y_0=\alpha_1),\ldots,P(Y_0=\alpha_k)\right)=(1,0,\ldots,0)$ πίνακας διάστασης $(1\times(k+1))$ ο οποίος έχει μονάδα στη πρώτη συνιστώσα του και μηδέν σε όλες τις υπόλοιπες,

$U'(C_0)=\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$ διάνυσμα διάστασης $((k+1)\times 1)$ με μηδέν στη τελευταία συνιστώσα του και μονάδα σε όλες τις υπόλοιπες, και

$$\Lambda_t=\left(P\left(Y_t=(y,j)\mid Y_{t-1}=(x,i)\right)\right)=\begin{bmatrix} q_t & p_t & 0 & 0 & \ldots & 0\\ q_t & 0 & p_t & 0 & \ldots & 0\\ & & \cdots & & & \\ q_t & 0 & 0 & 0 & \ldots & p_t\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_t & \vdots & p_t\cdot e_k{}'\\ \ldots & \vdots & \cdots\\ 0 & \vdots & 1\end{bmatrix}$$

ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης, διάστασης $(k+1)\times(k+1)$ με πιθανότητα επιτυχίας p_t και πιθανότητα αποτυχίας $q_t=1-p_t$, $e_k{}'=(0,0,\ldots,1)$ το μοναδιαίο διάνυσμα διάστασης $(1\times k)$.

Ο πίνακας $A_t=\begin{bmatrix} q_t & p_t & 0 & \ldots & 0\\ q_t & 0 & p_t & \ldots & 0\\ & & \cdots & & \\ q_t & 0 & 0 & \ldots & 0\end{bmatrix}$ διάστασης $(k\times k)$ παίζει σημαντικό ρόλο στην δημιουργία των πινάκων μετάβασης οι οποίοι είναι συνδεδεμένοι με τους διάφορους τρόπους μέτρησης των ροών επιτυχιών. Η κεντρική ιδέα για να βρούμε την ακριβή κατανομή του αριθμού των ροών επιτυχιών είναι να μεταφέρουμε τον τρόπο που μετράμε την ακολουθία των ανεξαρτήτων δοκιμών Bernoulli σε μια πεπερασμένη Μαρκοβιανή αλυσίδα με κατάλληλο χώρο καταστάσεων και κατάλληλο πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης.

Παρατήρηση: Εάν η Μαρκοβιανή αλυσίδα είναι ομογενής (ανεξάρτητες και ισόνομες δοκιμές Bermoulli) τότε $\Lambda_t = \Lambda$ για κάθε $t \in \Gamma_n$, $\prod_{t=1}^{n} \Lambda_t(N) = \Lambda^n$ και $P(N_{n,k} = x) = \pi_0 \Lambda^n U'(C_x)$, για κάθε $x = 0,1,\ldots,l$.

Παράδειγμα: Έστω η ακολουθία FSSFFSSSSS η οποία είναι αποτέλεσμα 10 ανεξαρτήτων δοκιμών Bernoulli με πιθανότητες επιτυχίας $p_t = P(X_t = 1)$ και πιθανότητες αποτυχίας $q_t = P(X_t = 0) = 1 - p_t$ για t=1,2,…,10. Δοθείσης της ακολουθίας, έστω x η τιμή της τυχαίας μεταβλητής $N_{n,k}$ και k ο αριθμός των συνεχόμενων επιτυχιών μετρώντας προς τα πίσω. Εάν k=2 τότε $N_{10,2} = 3$. Εάν η 11η δοκιμή είναι αποτυχημένη (F) με πιθανότητα q_{11}, τότε η ακολουθία γίνεται FSSFFSSSSSF και σ'αυτή την περίπτωση $N_{11,2} = 3$. Εάν η 11η δοκιμή είναι επιτυχημένη (S) με πιθανότητα p_{11}, τότε η ακολουθία γίνεται FSSFFSSSSSS και σ'αυτή την περίπτωση $N_{11,2} = 4$.

Ένα στοιχείο του χώρου Ω παριστάνεται με (x,i), όπου x είναι το πλήθος των ροών επιτυχιών και i οι επιτυχίες που έπονται από την τελευταία ροή επιτυχιών ή από την αρχή της ακολουθίας. Ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης από την κατάσταση (x,i) στην κατάσταση (y,j) είναι της μορφής $\Lambda_t(N) = \left(P(Y_t = (y,j) \mid Y_{t-1} = (x,i))\right)$.

Για $i = 0$, η κατάσταση $Y_t = (x,0)$ σημαίνει ότι σε μια ακολουθία αποτελεσμάτων μέχρι την t-οστή δοκιμή έχουν εμφανιστεί x ροές επιτυχιών που έχουν επιτευχθεί και το τελευταίο αποτέλεσμα είναι αποτυχία (F). Για ευκολία ορίζουμε $P(Y_0 = (0,0)) = 1$ και η τελευταία κατάσταση της Μαρκοβιανής αλυσίδας είναι μια απορροφητική κατάσταση. Άρα η τελευταία γραμμή του πίνακα Λ_t είναι (0,0,…,1).

Έστω ο χώρος καταστάσεων $\Omega(N_{n,k}) = \left\{ (x,i) : x = 0,1,\ldots,\left[\frac{n}{k}\right] \;\; \text{και} \;\; i = 0,1,\ldots,k-1 \right\}$ και μια πεπερασμένη Μαρκοβιανή αλυσίδα $\{Y_t : t \in \Gamma_n\}$ ορισμένη στο χώρο καταστάσεων Ω ως εξής: για κάθε ακολουθία αποτελεσμάτων από ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli, μήκους t, έστω m ο αριθμός των επιτυχημένων δοκιμών μετρώντας προς τα πίσω (m=0 αν το t-οστό αποτέλεσμα είναι F). Ορίζουμε $Y_t = (x,i)$ αν υπάρχουν x μη επικαλυπτόμενες ροές επιτυχιών με k συνεχόμενες επιτυχίες και $m = i \bmod(k)$. Για δεδομένο x με $0 \le x \le \left[\frac{n}{k}\right]$ εισάγουμε το υποσύνολο του χώρου καταστάσεων Ω, $C_x = \{(x,i): i = 0,1,\ldots,k-1\}$. Τα υποσύνολα αυτά αποτελούν μια διαμέριση του χώρου καταστάσεων $\Omega(N_{n,k})$ και $P(N_{n,k} = x) = P(Y_n \in C_x)$,

$$P(N_{n,k} = x) = \pi_0 \left(\prod_{t=1}^{n} \Lambda_t(N) \right) U'(C_x) \qquad (1.2.2)$$

Ο $\Lambda_t(N)$ είναι ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης από την κατάσταση της τυχαίας μεταβλητής Y_{t-1} στη κατάσταση της Y_t, διάστασης $k\left(\left[\frac{n}{k}\right]+1\right) \times k\left(\left[\frac{n}{k}\right]+1\right)$ και στοιχεία του βρίσκονται από τις σχέσεις:

- Μετάβαση από την κατάσταση (x,i) στην κατάσταση $(x,0)$:

  $P(x,0;x,i) = q_t$ με $0 \le x \le \left[\frac{n}{k}\right]$, $0 \le i \le k-1$
- Μετάβαση από την κατάσταση (x,i) στην κατάσταση $(x,i+1)$:

  $P(x,i+1;x,i) = p_t$ με $0 \le x \le \left[\frac{n}{k}\right]$, $0 \le i \le k-2$
- Μετάβαση από την κατάσταση $(x,k-1)$ στην κατάσταση $(x+1,0)$:

  $P(x+1,0;x,k-1) = p_t$ με $0 \le x \le \left[\frac{n}{k}\right] - 1$

$\pi_0 = \left(P(Y_0 = \alpha_0), P(Y_0 = \alpha_1), \ldots, P(Y_0 = \alpha_{\left(\left[\frac{n}{k}\right]+1\right)\cdot k}) \right) = (1,0,\ldots,0)$ μοναδιαίο διάνυσμα διάστασης $1 \times \left(\left[\frac{n}{k}\right]+1\right)$,

$U'(C_x)$ το διάνυσμα με μονάδα στην τιμή του x που αναφερόμαστε και μηδέν σε όλα τα υπόλοιπα, διάστασης $\left(\left[\frac{n}{k}\right]+1\right) \times 1$.

Παράδειγμα: Σε ακολουθία 5 ανεξάρτητων δοκιμών Bernoulli διατεταγμένων σε γραμμή να βρεθεί η συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής $N_{5,2}$.

Έχουμε ακολουθία πέντε ανεξάρτητων δοκιμών Bernoulli X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 με πιθανότητες επιτυχίας $p_t = P(X_t = 1)$ και πιθανότητες αποτυχίας $q_t = P(X_t = 0)$ για $t = 1,2,3,4,5$. Ο χώρος καταστάσεων της Μαρκοβιανής αλυσίδας είναι: $\Omega = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1),(2,0),(2,1)\}$, ενώ τα σύνολα που αποτελούν τη διαμέριση του Ω είναι: $C_0 = \{(0,0),(0,1)\}$, $C_1 = \{(1,0),(1,1)\}$ και $C_2 = \{(2,0),(2,1)\}$.

Η λύση δίνεται από τη σχέση (1.2.1), όπου έχουμε:
$\pi_0 = \left(P(Y_0 = \alpha_0), P(Y_0 = \alpha_1), P(Y_0 = \alpha_2)\right) = (1,0,0)$

$U'(C_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ και ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης $\Lambda_t = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (0,0) & (0,1) & (1,0) \end{array} \\ \begin{bmatrix} q_t & p_t & 0 \\ q_t & 0 & p_t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$ άρα

$$\prod_{t=1}^{5} \Lambda_t = \begin{bmatrix} q_1 & p_1 & 0 \\ q_1 & 0 & p_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_2 & p_2 & 0 \\ q_2 & 0 & p_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_3 & p_3 & 0 \\ q_3 & 0 & p_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_4 & p_4 & 0 \\ q_4 & 0 & p_4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_5 & p_5 & 0 \\ q_5 & 0 & p_5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{array}{l} q_1q_2q_3q_4q_5 + p_1q_2q_3q_4q_5 + \\ q_1p_2q_3q_4q_5 + q_1q_2p_3q_4q_5 + \\ p_1q_2p_3q_4q_5 + q_1q_2q_3p_4q_5 + \\ p_1q_2q_3p_4q_5 + q_1p_2q_3p_4q_5 \end{array} & \begin{array}{l} q_1q_2q_3q_4p_5 + p_1q_2q_3q_4p_5 + \\ q_1p_2q_3q_4p_5 + q_1q_2p_3q_4p_5 + \\ p_1q_2p_3q_4p_5 \end{array} & \begin{array}{l} q_1q_2q_3p_4p_5 + p_1q_2q_3p_4p_5 + \\ q_1p_2q_3p_4p_5 + q_1q_2p_3p_4 + \\ p_1q_2p_3p_4 + q_1p_2p_3 + \\ p_1p_2 \end{array} \\ \begin{array}{l} q_1q_2q_3q_4q_5 + q_1p_2q_3q_4q_5 + \\ q_1q_2p_3q_4q_5 + q_1q_2q_3p_4q_5 + \\ q_1p_2q_3p_4q_5 \end{array} & \begin{array}{l} q_1q_2q_3q_4p_5 + q_1p_2q_3q_4p_5 \\ + q_1q_2p_3q_4q_5 \end{array} & \begin{array}{l} q_1q_2q_3p_4p_5 + q_1p_2q_3p_4p_5 + \\ q_1q_2p_3p_4 + q_1p_2p_3 + p_1 \end{array} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Άρα με αντικατάσταση στη σχέση (1.2.1) δίνεται ότι

$$\begin{aligned} P(N_{5,2} = 0) = {} & q_1q_2q_3q_4q_5 + p_1q_2q_3q_4q_5 + q_1p_2q_3q_4q_5 + q_1q_2p_3q_4q_5 + p_1q_2p_3q_4q_5 \\ & + q_1q_2q_3p_4q_5 + p_1q_2q_3p_4q_5 + q_1p_2q_3p_4q_5 + q_1q_2q_3q_4p_5 + p_1q_2q_3q_4p_5 \\ & + q_1p_2q_3q_4p_5 + q_1q_2p_3q_4p_5 + p_1q_2p_3q_4p_5 . \qquad (1.2.3) \end{aligned}$$

Ενώ η πιθανότητα να υπάρχει μία ροή επιτυχιών μήκους 2 δίνεται από τη σχέση (1.2.2) όπου $\pi_0 = [1,0,0,0,0,0]$, $U'(C_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης $\Lambda_t(N) = \begin{array}{c} \begin{matrix} (0,0) & (0,1) & (1,0) & (1,1) & (2,0) & (2,1) \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} q_t & p_t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q_t & 0 & p_t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_t & p_t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_t & 0 & p_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_t & p_t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$

άρα

$$\prod_{t=1}^{5} \Lambda_t(N) = \begin{bmatrix} q_1 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q_1 & 0 & p_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_1 & p_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_1 & 0 & p_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_1 & p_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_2 & p_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q_2 & 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_2 & p_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_2 & 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_2 & p_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} q_3 & p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q_3 & 0 & p_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 & p_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 & 0 & p_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_3 & p_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_4 & p_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q_4 & 0 & p_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_4 & p_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_4 & 0 & p_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_4 & p_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} q_5 & p_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q_5 & 0 & p_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_5 & p_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_5 & 0 & p_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_5 & p_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix}$$

με

$$a_{11} = q_1q_2q_3q_4q_5 + p_1q_2q_3q_4q_5 + q_1p_2q_3q_4q_5 + q_1q_2p_3q_4q_5 + p_1q_2p_3q_4q_5 + q_1q_2q_3p_4q_5 + p_1q_2q_3p_4q_5 + q_1p_2q_3p_4q_5,$$

$$a_{12} = q_1q_2q_3q_4p_5 + p_1q_2q_3q_4p_5 + q_1p_2q_3q_4p_5 + q_1q_2p_3q_4p_5 + p_1q_2p_3q_4p_5,$$

$$a_{13} = q_1q_2q_3p_4p_5 + p_1q_2q_3p_4p_5 + q_1p_2q_3p_4p_5 + q_1q_2p_3p_4q_5 + p_1q_2p_3p_4q_5 + q_1p_2p_3q_4q_5$$
$$+ p_1p_2q_3q_4q_5 + p_1p_2p_3q_4q_5 + q_1p_2p_3p_4q_5 + p_1p_2q_3p_4q_5 ,$$
$$a_{14} = q_1q_2p_3p_4p_5 + p_1q_2p_3p_4p_5 + q_1p_2p_3q_4p_5 + p_1p_2q_3q_4p_5 + p_1p_2p_3q_4p_5 ,$$
$$a_{15} = q_1p_2p_3p_4p_5 + p_1p_2q_3p_4p_5 + p_1p_2p_3p_4q_5 ,$$
$$a_{16} = p_1p_2p_3p_4p_5 ,$$
$$a_{21} = q_1q_2q_3q_4q_5 + q_1p_2q_3q_4q_5 + q_1q_2p_3q_4q_5 + q_1q_2q_3p_4q_5 + q_1p_2q_3p_4p_5 ,$$
$$a_{22} = q_1q_2q_3q_4p_5 + q_1p_2q_3q_4p_5 + q_1q_2p_3q_4p_5 ,$$
$$a_{23} = q_1q_2q_3p_4p_5 + q_1p_2q_3p_4p_5 + q_1q_2p_3p_4q_5 + q_1p_2p_3q_4q_5 + p_1q_2q_3q_4q_5 + p_1p_2q_3q_4q_5$$
$$+ p_1q_2p_3q_4q_5 + q_1p_2p_3p_4q_5 + p_1q_2q_3p_4q_5 + p_1p_2q_3p_4q_5 ,$$
$$a_{24} = q_1q_2p_3p_4p_5 + q_1p_2p_3p_4p_5 + p_1q_2q_3q_4p_5 + p_1p_2q_3q_4p_5 + p_1q_2q_3q_4p_5 ,$$
$$a_{25} = q_1p_2p_3p_4p_5 + p_1q_2q_3p_4p_5 + p_1p_2q_3p_4p_5 + p_1q_2p_3p_4q_5 + p_1p_2p_3q_4q_5 ,$$
$$a_{26} = p_1q_2p_3p_4p_5 + p_1p_2p_3q_4p_5 + p_1p_2p_3p_4$$
$$a_{31} = 0 ,$$
$$a_{32} = 0 ,$$
$$a_{33} = q_1q_2q_3q_4q_5 + p_1q_2q_3q_4q_5 + q_1p_2q_3q_4q_5 + q_1q_2p_3q_4q_5 + p_1q_2p_3q_4q_5 + q_1q_2q_3p_4q_5$$
$$+ p_1q_2q_3p_4q_5 + q_1p_2q_3p_4q_5 ,$$
$$a_{34} = q_1q_2q_3q_4p_5 + p_1q_2q_3q_4p_5 + q_1p_2q_3q_4p_5 + q_1q_2p_3q_4p_5 + p_1q_2p_3q_4p_5 ,$$
$$a_{35} = q_1q_2q_3p_4p_5 + p_1q_2q_3p_4p_5 + q_1p_2q_3p_4p_5 + q_1q_2p_3p_4q_5 + p_1q_2p_3p_4q_5$$
$$+ q_1p_2p_3q_4q_5 + p_1p_2q_3q_4q_5 ,$$
$$a_{36} = q_1q_2p_3p_4p_5 + p_1q_2p_3p_4p_5 + q_1p_2p_3q_4p_5 + p_1p_2q_3q_4p_5 + q_1p_2p_3p_4$$
$$+ p_1p_2q_3p_4 + p_1p_2p_3 ,$$
$$a_{41} = 0 ,$$
$$a_{42} = 0 ,$$
$$a_{43} = q_1q_2q_3q_4q_5 + q_1p_2q_3q_4q_5 + q_1q_2p_3q_4q_5 + q_1q_2q_3p_4q_5 + q_1p_2q_3p_4q_5 ,$$
$$a_{44} = q_1q_2q_3q_4p_5 + q_1p_2q_3q_4p_5 + q_1q_2p_3q_4p_5 ,$$
$$a_{45} = q_1q_2q_3p_4p_5 + q_1p_2q_3p_4p_5 + q_1q_2p_3p_4q_5 + p_1p_2p_3q_4p_5 + p_1q_2q_3q_4q_5 ,$$
$$a_{46} = q_1q_2q_3p_4p_5 + p_1p_2p_3q_4p_5 + p_1q_2q_3q_4p_5 + q_1p_2p_3p_4 + p_1q_2q_3p_4 + p_1q_2p_3 + p_1p_2 ,$$
$$a_{51} = 0 ,$$
$$a_{52} = 0 ,$$
$$a_{53} = 0 ,$$
$$a_{54} = 0 ,$$
$$a_{55} = q_1q_2q_3q_4q_5 ,$$
$$a_{56} = q_1q_2q_3q_4p_5 + q_1q_2q_3p_4 + q_1q_2p_3 + q_1p_2 + p_1$$
$$a_{61} = 0 ,$$
$$a_{62} = 0 ,$$
$$a_{63} = 0 ,$$

$a_{64} = 0$,
$a_{65} = 0$,
$a_{66} = 1$.

Με αντικατάσταση στη σχέση (1.2.2) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} P(N_{5,2} = 1) = {} & q_1 q_2 q_3 p_4 p_5 + p_1 q_2 q_3 p_4 p_5 + q_1 p_2 q_3 p_4 p_5 + q_1 q_2 p_3 p_4 q_5 + p_1 q_2 p_3 p_4 q_5 \\ & + q_1 p_2 p_3 q_4 q_5 + p_1 p_2 q_3 q_4 q_5 + p_1 p_2 p_3 q_4 q_5 + q_1 p_2 p_3 p_4 q_5 \\ & + p_1 p_2 q_3 p_4 q_5 \; q_1 q_2 p_3 p_4 p_5 + p_1 q_2 p_3 p_4 p_5 + q_1 p_2 p_3 q_4 p_5 \\ & + p_1 p_2 q_3 q_4 p_5 + p_1 p_2 p_3 q_4 p_5 \end{aligned} \qquad (1.2.4)$$

Επίσης $P(N_{5,2} = 2) = q_1 p_2 p_3 p_4 p_5 + p_1 p_2 q_3 p_4 p_5 + p_1 p_2 p_3 p_4 q_5 + p_1 p_2 p_3 p_4 p_5$

Παρατήρηση: Σε περίπτωση ανεξάρτητων και ισόνομων δοκιμών Bernoulli με κοινή πιθανότητα επιτυχίας p και πιθανότητα αποτυχίας q έχουμε
$P(N_{5,2} = 0) = q^5 + 5pq^4 + 6p^2q^3 + p^3q^2$, $\quad P(N_{5,2} = 1) = 4q^3p^2 + 9q^2p^3 + 2p^4q$ και $P(N_{5,2} = 2) = p^5 + 3p^4q$.

Παράδειγμα: Ας δούμε μία αριθμητική εφαρμογή του παραπάνω παραδείγματος. Σε ακολουθία 5 ανεξάρτητων δοκιμών Bernoulli $X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4,\ X_5$ διατεταγμένων σε γραμμή με πιθανότητες επιτυχίας $P(X_t = 1) = p_t = \dfrac{1}{t+1}$, για $t = 1,2,3,4,5$ θα βρούμε την συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής $N_{5,2}$.

Οι πιθανότητες επιτυχίας είναι $p_1 = P(X_1 = 1) = \dfrac{1}{2}$, $p_2 = P(X_2 = 1) = \dfrac{1}{3}$, $p_3 = P(X_3 = 1) = \dfrac{1}{4}$, $p_4 = P(X_4 = 1) = \dfrac{1}{5}$ και $p_5 = P(X_5 = 1) = \dfrac{1}{6}$. Ενώ οι πιθανότητες αποτυχίας είναι $q_1 = P(X_1 = 0) = 1 - p_1 = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$,
$q_2 = P(X_2 = 0) = 1 - p_2 = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$, $q_3 = P(X_3 = 0) = 1 - p_3 = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$,
$q_4 = P(X_4 = 0) = 1 - p_4 = 1 - \dfrac{1}{5} = \dfrac{4}{5}$ και $q_5 = P(X_5 = 0) = 1 - p_5 = 1 - \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{6}$.

Με αντικατάσταση στις σχέσεις (1.2.3) και (1.2.4) έχουμε:

$P(N_{5,2} = 0) = \dfrac{531}{720}$, $P(N_{5,2} = 1) = \dfrac{179}{720}$ και $P(N_{5,2} = 2) = \dfrac{10}{720}$.

1.3 Κατανομή του πλήθους των μη επικαλυπτόμενων ροών επιτυχιών μήκους k σε ακολουθία n δοκιμών Bernoulli διατεταγμένων σε κύκλο , $N_{n,k}^{C}$.

Για να βρούμε την κατανομή του αριθμού των μη επικαλυπτόμενων ροών επιτυχιών μήκους k σε ακολουθία n δοκιμών Bernoulli διατεταγμένων σε κύκλο, θα εργαστούμε με την τεχνική της εμβάπτισης και θα στηριχθούμε στην κατανομή των μη επικαλυπτόμενων ροών επιτυχιών μήκους k στη γραμμή. Θα συμβολίσουμε με $N_{n,k}^{C}$ το πλήθος των μη επικαλυπτόμενων ροών επιτυχιών μήκους k σε ακολουθία n δοκιμών Bernoulli διατεταγμένων σε κύκλο.

Θεώρημα 2 (Koutras, Papadopoulos, Papastavridis 1995)**.** Η κατανομή του $N_{n,k}^{C}$ δίνεται από τον τύπο

$$P(N_{n,k}^{C}=x)=\sum_{i=0}^{\min\{kx+k-1,n-1\}}\alpha_i\beta_i+\delta_{x,\left[\frac{n}{k}\right]}\prod_{j=0}^{n}p_j \quad ,\ x=0,1,\ldots,\left[\frac{n}{k}\right] \qquad (1.3.1)$$

όπου $\alpha_i=e_1\left(\prod_{t=i+2}^{n}\Lambda_t(N)\right)U_{kx-i}{}'$ με

$U_i'=\sum_{j=i+1}^{\min\left\{i+k,\left(\left[\frac{n}{k}\right]+1\right)\cdot k\right\}}e_j \quad , \quad i\geq 1$ ή $U_{-i}'=\sum_{j=1}^{k-i}e_j,\quad i=0,1,\ldots,k-1,\quad \beta_i=\left(\prod_{j=0}^{i}p_j\right)q_{i+1}$ και $p_0=P(X_0=1)=1$.

Απόδειξη

Το πεδίο τιμών της τυχαίας μεταβλητής x είναι $x=0,1,...,\left[\frac{n}{k}\right]$

- Στην περίπτωση που $x=\left[\frac{n}{k}\right]$ μια ευνοϊκή περίπτωση είναι όλες οι δοκιμές να είναι επιτυχημένες (S), δηλαδή

$$P\left(\prod_{j=1}^{n}X_j=1\right)=\prod_{j=1}^{n}P(X_j=1)=\prod_{j=1}^{n}p_j$$

- Αν $0\leq x\leq\left[\frac{n}{k}\right]$, ορίζουμε το ενδεχόμενο A_i= {η 1η αποτυχία εμφανίστηκε στην $i+1$ δοκιμή}, $i=0,1,...,n-1$.

Άρα $P(A_i)=P\left(\prod_{j=0}^{i}X_j=1,X_{i+1}=0\right)$

$$=\prod_{j=0}^{i}P\left(X_j=1\right)\cdot P\left(X_{i+1}=0\right)$$

$$= \left(\prod_{j=0}^{i} p_j \right) q_{i+1}$$
$$= \beta_i$$

- Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας έχουμε

$$P(N_{n,k}^C = x) = \sum_{i=0}^{n-1} P\left(N_{n,k}^C = x \mid A_i\right) P(A_i) \qquad (1)$$

Υπολογισμός του $P(N_{n,k}^C = x \mid A_i)$:

- Για $i = yk + s$, όπου

y : το πλήθος των ροών επιτυχιών μήκους k στις i πρώτες επιτυχίες, $y \geq 1$

s : το πλήθος των επιτυχιών μετά τη συμπλήρωση της τελευταίας ροής επιτυχιών, με $0 \leq s \leq k-1$

$$P(N_{n,k}^C = x \mid A_i) = P\left(Y_n \in \{(x-y;j) : j+i<k\} \text{ ή } Y_n \in \{(x-y-1;j) : j+i \geq k\} \mid Y_{i+1} = (0{,}0) \right)$$

$$= P\left(Y_n \in \{(x-y;j) : j+i<k\} \mid Y_{i+1} = (0{,}0)\right) + P\left(Y_n \in \{(x-y-1;j) : j+i \geq k\} \mid Y_{i+1} = (0{,}0)\right)$$

$$= P\left(Y_n \in C_{x-y} \mid Y_{i+1} = (0{,}0)\right) + P\left(Y_n \in C_{x-y-1} \mid Y_{i+1} = (0{,}0)\right)$$

$$= P\left(Y_n \in C_{x-y}\right) + P\left(Y_n \in C_{x-y-1}\right)$$

$$= e_1 \left(\prod_{t=i+2}^{n} \Lambda_t(N) \right) U'_{k(x-y)} + e_1 \left(\prod_{t=i+2}^{n} \Lambda_t(N) \right) U'_{k(x-y-1)}$$

$$= e_1 \left(\prod_{t=i+2}^{n} \Lambda_t(N) \right) \left[U'_{k(x-y)} + U'_{k(x-y-1)} \right]$$

$$= e_1 \left(\prod_{t=i+2}^{n} \Lambda_t(N) \right) \left[\sum_{j=kx-ky+1}^{\min\left\{kx-ky+k, \left(\left[\frac{n}{k}\right]+1\right)\cdot k\right\}} e_j + \sum_{j=kx-ky-k+1}^{\min\left\{kx+ky, \left(\left[\frac{n}{k}\right]+1\right)\cdot k\right\}} e_j \right]$$

$$= e_1 \left(\prod_{t=i+2}^{n} \Lambda_t(N) \right) \left[\sum_{j=kx-ky-k+1}^{\min\left\{kx-ky+k, \left(\left[\frac{n}{k}\right]+1\right)\cdot k\right\}} e_j \right]$$

$$= e_1\left(\prod_{t=i+2}^{n}\Lambda_t(N)\right)U'_{kx-i}\ .$$

άρα $\quad P(N_{n,k}^{C}=x\mid A_i)=e_1\left(\prod_{t=i+2}^{n}\Lambda_t(N)\right)U'_{kx-i}=\alpha_i\ .$

- Για $0\le i\le k-1$

$$P(N_{n,k}^{C}=x\mid A_i)=P\Big(Y_n\in\{(x;j):j+i<k\}\ \ ή\ \ Y_n\in\{(x-1;j):j+i\ge k\}\mid Y_{i+1}=(0,0)\Big)$$

$$=P\big(Y_n\in\{(x;j):j+i<k\}\mid Y_{i+1}=(0,0)\big)+P\big(Y_n\in\{(x-1;j):j+i\ge k\}\mid Y_{i+1}=(0,0)\big)$$

$$=P\big(Y_n\in C_x\mid Y_{i+1}=(0,0)\big)+P\big(Y_n\in C_{x-1}\mid Y_{i+1}=(0,0)\big)$$

$$=P\big(Y_n\in C_x\big)+P\big(Y_n\in C_{x-1}\big)$$

$$=e_1\left(\prod_{t=i+2}^{n}\Lambda_t(N)\right)U'_{kx}+e_1\left(\prod_{t=i+2}^{n}\Lambda_t(N)\right)U'_{k(x-1)}$$

$$=e_1\left(\prod_{t=i+2}^{n}\Lambda_t(N)\right)\left[U'_{kx}+U'_{k(x-1)}\right]$$

$$=e_1\left(\prod_{t=i+2}^{n}\Lambda_t(N)\right)\left[\sum_{j=kx+1}^{\min\left\{kx+k,\left(\left[\frac{n}{k}\right]+1\right)\cdot k\right\}}e_j+\sum_{j=kx-k+1}^{\min\left\{kx,\left(\left[\frac{n}{k}\right]+1\right)\cdot k\right\}}e_j\right]$$

$$=e_1\left(\prod_{t=i+2}^{n}\Lambda_t(N)\right)\left[\sum_{j=kx-k+1}^{\min\left\{kx+k,\left(\left[\frac{n}{k}\right]+1\right)\cdot k\right\}}e_j\right]$$

$$=e_1\left(\prod_{t=i+2}^{n}\Lambda_t(N)\right)U'_{kx-i}$$

άρα $\quad P(N_{n,k}^{C}=x\mid A_i)=e_1\left(\prod_{t=i+2}^{n}\Lambda_t(N)\right)U'_{kx-i}=\alpha_i$

Τελικά με αντικατάσταση στη σχέση (1) έχουμε:

$$P(N_{n,k}^{C}=x)=\sum_{i=0}^{\min\{kx-k+1,n-1\}}\alpha_i\beta_i+\delta_{x,\left[\frac{n}{k}\right]}\left(\prod_{j=0}^{n}p_j\right)\ ,\quad 0\le x\le\left[\frac{n}{k}\right]$$

Η πιθανότητα να μην υπάρχει μη επικαλυπτόμενη ροή επιτυχιών μήκους k σε ακολουθία n ανεξάρτητων δοκιμών Bernoulli διατεταγμένων σε κύκλο δίνεται από τον τύπο:

$$P(N_{n,k}^{C}=0)=\sum_{i=0}^{k-1}\alpha_i\beta_i\ ,\quad n>k \qquad (1.3.2)$$

όπου α_i είναι το άθροισμα των $k-i$ πρώτων στοιχείων της 1ης γραμμής του πίνακα που προκύπτει από το γινόμενο των πινάκων μετάβασης $\prod_{t=i+2}^{n}\Lambda_t$.

Παρατήρηση: Στην περίπτωση που έχουμε ομογενή Μαρκοβιανή αλυσίδα τότε

$$\prod_{t=i+2}^{n}\Lambda_t=\Lambda^{n-i-1}$$

Παράδειγμα: Σε ακολουθία 5 ανεξάρτητων δοκιμών Bernoulli διατεταγμένων σε κύκλο θα βρούμε την συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής $N_{5,2}^{C}$

Ο χώρος καταστάσεων της Μαρκοβιανής αλυσίδας είναι: $\Omega=\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1),(2,0),(2,1)\}$, ενώ τα σύνολα που αποτελούν τη διαμέριση του Ω είναι: $C_0=\{(0,0),(0,1)\}$, $C_1=\{(1,0),(1,1)\}$ και $C_2=\{(2,0),(2,1)\}$.

Η λύση δίνεται από τη σχέση (1.3.2)

$$P(N_{5,2}^{C}=0)=\sum_{i=0}^{2-1}\alpha_i\beta_i=\alpha_0\beta_0+\alpha_1\beta_1 \qquad (2)$$

με $\Lambda_t=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc}(0,0) & (0,1) & (1,0)\end{array} \\ \begin{bmatrix} q_t & p_t & 0 \\ q_t & 0 & p_t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\end{array}$

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= e_1\left(\prod_{t=0+2}^{5}\Lambda_t\right)U_0' \\
&= e_1\left(\prod_{t=2}^{5}\Lambda_t\right)\sum_{j=1}^{2}e_j \\
&= \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} q_2 & p_2 & 0 \\ q_2 & 0 & p_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} q_3 & p_3 & 0 \\ q_3 & 0 & p_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} q_4 & p_4 & 0 \\ q_4 & 0 & p_4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} q_5 & p_5 & 0 \\ q_5 & 0 & p_5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\cdot\begin{bmatrix}1 \\ 1 \\ 0\end{bmatrix} \\
&= q_2q_3q_4q_5+p_2q_3q_4q_5+q_2p_3q_4q_5+q_2q_3p_4q_5+p_2q_3p_4q_5+q_2q_3q_4p_5 \\
&\quad +p_2q_3q_4p_5+q_2p_3q_4p_5
\end{aligned}$$

$$\beta_0 = \left(\prod_{j=0}^{0} p_j\right) q_1 = q_1$$

άρα $\alpha_0\beta_0 = q_1q_2q_3q_4q_5 + q_1p_2q_3q_4q_5 + q_1q_2p_3q_4q_5 + q_1q_2q_3p_4q_5 + q_1p_2q_3p_4q_5 + q_1q_2q_3q_4p_5 + q_1p_2q_3q_4p_5 + q_1q_2p_3q_4p_5$

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= e_1\left(\prod_{t=1+2}^{5}\Lambda_t\right)U'_{-1} \\
&= e_1\left(\prod_{t=3}^{5}\Lambda_t\right)\sum_{j=1}^{1} e_j \\
&= \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix} q_3 & p_3 & 0 \\ q_3 & 0 & p_3 \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} q_4 & p_4 & 0 \\ q_4 & 0 & p_4 \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} q_5 & p_5 & 0 \\ q_5 & 0 & p_5 \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\right)\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \\
&= q_3p_4q_5 + p_3q_4q_5 + q_3p_4q_5
\end{aligned}$$

$$\beta_1 = \left(\prod_{j=0}^{1} p_j\right) q_2 = p_1q_2$$

άρα $\alpha_1\beta_1 = p_1q_2q_3q_4q_5 + p_1q_2p_3q_4q_5 + p_1q_2q_3p_4q_5$

Οπότε με αντικατάσταση στη (2) έχουμε:

$$\begin{aligned}
P(N^C_{5,2} = 0) = {} & q_1q_2q_3q_4q_5 + q_1p_2q_3q_4q_5 + q_1q_2p_3q_4q_5 + q_1q_2q_3p_4q_5 \\
& + q_1p_2q_3p_4q_5 + q_1q_2q_3q_4p_5 + q_1p_2q_3q_4p_5 + q_1q_2p_3q_4p_5 \\
& + p_1q_2q_3q_4q_5 + p_1q_2p_3q_4q_5 + p_1q_2q_3p_4q_5
\end{aligned} \qquad (1.3.3)$$

Ενώ η πιθανότητα να υπάρχει μία ροή επιτυχιών μήκους 2 δίνεται από τη σχέση (1.3.1), όπου

$$P(N^C_{5,2} = 1) = \sum_{i=0}^{3}\alpha_i\beta_i = \alpha_0\beta_0 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3$$

$e_1 = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$, $U'_2 = \sum_{j=3}^{4} e_j = \begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\\0\\0\end{bmatrix}$ και

$$\Lambda_t(N)=\begin{array}{c} \begin{matrix} (0,0) & (0,1) & (1,0) & (1,1) & (2,0) & (2,1) \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} q_t & p_t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q_t & 0 & p_t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_t & p_t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_t & 0 & p_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_t & p_t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Έχουμε $\alpha_0 = e_1\left(\prod_{t=0+2}^{4}\Lambda_t\right)U_2'$

$$= e_1\left(\prod_{t=2}^{4}\Lambda_t\right)\sum_{j=3}^{4} e_j$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} q_2 & p_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q_2 & 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_2 & p_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_2 & 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_2 & p_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\cdot\begin{bmatrix} q_3 & p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q_3 & 0 & p_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 & p_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 & 0 & p_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_3 & p_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} q_4 & p_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q_4 & 0 & p_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_4 & p_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_4 & 0 & p_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_4 & p_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\cdot\begin{bmatrix} q_5 & p_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q_5 & 0 & p_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_5 & p_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_5 & 0 & p_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_5 & p_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= q_2q_3p_4p_5 + p_2q_3p_4p_5 + q_2p_3p_4q_5 + p_2p_3q_4q_5 + p_2p_3p_4q_5 + q_2p_3p_4p_5 + p_2p_3q_4p_5$$

$$\beta_0 = \left(\prod_{j=0}^{0} p_j\right)q_1 = q_1$$

άρα $\alpha_0\beta_0 = q_1q_2q_3p_4p_5 + q_1p_2q_3p_4p_5 + q_1q_2p_3p_4q_5 + q_1p_2p_3q_4q_5 + q_1p_2p_3p_4q_5 + q_1q_2p_3p_4p_5 + q_1p_2p_3q_4p_5$

$$\alpha_1 = e_1\left(\prod_{t=1+2}^{5}\Lambda_t\right)U_1'$$

$$= e_1\left(\prod_{t=3}^{5}\Lambda_t\right)\sum_{j=2}^{3}e_j$$

$$= \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} q_3 & p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q_3 & 0 & p_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 & p_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 & 0 & p_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_3 & p_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\cdot\begin{bmatrix} q_4 & p_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q_4 & 0 & p_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_4 & p_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_4 & 0 & p_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_4 & p_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} q_5 & p_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q_5 & 0 & p_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_5 & p_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_5 & 0 & p_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_5 & p_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$= q_3q_4p_5 + p_3q_4p_5 + q_3p_4p_5 + p_3p_4q_5$$

$$\beta_1 = \left(\prod_{j=0}^{1}p_j\right)q_1 = p_1q_2$$

άρα $\alpha_1\beta_1 = p_1q_2q_3q_4p_5 + p_1q_2p_3q_4p_5 + p_1q_2q_3p_4p_5 + p_1q_2p_3p_4q_5$

$$\alpha_2 = e_1\left(\prod_{t=2+2}^{5}\Lambda_t\right)U_0'$$

$$= e_1\left(\prod_{t=4}^{5}\Lambda_t\right)\sum_{j=1}^{2}e_j$$

$$= \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} q_4 & p_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q_4 & 0 & p_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_4 & p_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_4 & 0 & p_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_4 & p_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\cdot\begin{bmatrix} q_5 & p_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q_5 & 0 & p_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_5 & p_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_5 & 0 & p_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_5 & p_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= q_4 q_5 + p_4 q_5 + q_4 p_5$$

$$\beta_2 = \left(\prod_{j=0}^{2} p_j \right) q_3 = p_1 p_2 q_3$$

άρα $\alpha_2 \beta_2 = p_1 p_2 q_3 q_4 q_5 + p_1 p_2 q_3 p_4 q_5 + p_1 p_2 q_3 q_4 p_5$

$$\alpha_3 = e_1 \left(\prod_{t=3+2}^{5} \Lambda_t \right) U'_{-1}$$

$$= e_1 \left(\prod_{t=5}^{5} \Lambda_t \right) \sum_{j=1}^{1} e_j$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_5 & p_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q_5 & 0 & p_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_5 & p_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_5 & 0 & p_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_5 & p_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= q_5$$

$$\beta_3 = \left(\prod_{j=0}^{3} p_j \right) q_4 = p_1 p_2 p_3 q_4$$

άρα $\alpha_3 \beta_3 = p_1 p_2 p_3 q_4 q_5$

Τελικά

$$\begin{aligned} P(N_{5,2}^{C} = 1) = {} & q_1 q_2 q_3 p_4 p_5 + q_1 p_2 q_3 p_4 p_5 + q_1 q_2 p_3 p_4 q_5 + q_1 p_2 p_3 q_4 q_5 + q_1 p_2 p_3 p_4 q_5 \\ & + q_1 q_2 p_3 p_4 p_5 + q_1 p_2 p_3 q_4 p_5 + p_1 q_2 q_3 q_4 p_5 + p_1 q_2 p_3 q_4 p_5 \\ & + p_1 q_2 q_3 p_4 p_5 + p_1 q_2 p_3 p_4 q_5 + p_1 p_2 q_3 q_4 q_5 + p_1 p_2 q_3 p_4 q_5 \\ & + p_1 p_2 q_3 q_4 p_5 + p_1 p_2 p_3 q_4 q_5 \end{aligned} \tag{1.3.4}$$

Επίσης

$$P(N_{5,2}^{C}=2)=\sum_{i=0}^{4}\alpha_i\beta_i+\prod_{j=0}^{5}p_j=\alpha_0\beta_0+\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3+\alpha_4\beta_4+p_1p_2p_3p_4p_5$$

Έχουμε
$$\begin{aligned}\alpha_0&=e_1\left(\prod_{t=0+2}^{5}\Lambda_t\right)U_4'\\&=e_1\left(\prod_{t=2}^{5}\Lambda_t\right)\sum_{j=5}^{6}e_j\\&=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}q_2&p_2&0&0&0&0\\q_2&0&p_2&0&0&0\\0&0&q_2&p_2&0&0\\0&0&q_2&0&p_2&0\\0&0&0&0&q_2&p_2\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}\cdot\\&\quad\begin{bmatrix}q_3&p_3&0&0&0&0\\q_3&0&p_3&0&0&0\\0&0&q_3&p_3&0&0\\0&0&q_3&0&p_3&0\\0&0&0&0&q_3&p_3\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}q_4&p_4&0&0&0&0\\q_4&0&p_4&0&0&0\\0&0&q_4&p_4&0&0\\0&0&q_4&0&p_4&0\\0&0&0&0&q_4&p_4\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}\cdot\\&\quad\begin{bmatrix}q_5&p_5&0&0&0&0\\q_5&0&p_5&0&0&0\\0&0&q_5&p_5&0&0\\0&0&q_5&0&p_5&0\\0&0&0&0&q_5&p_5\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\1\end{bmatrix}\\&=p_2p_3p_4p_5\end{aligned}$$

$$\beta_0=\left(\prod_{j=0}^{0}p_j\right)q_1=q_1$$

άρα $\alpha_0\beta_0=q_1p_2p_3p_4p_5$

$$\begin{aligned}\alpha_1&=e_1\left(\prod_{t=1+2}^{5}\Lambda_t\right)U_3'\\&=e_1\left(\prod_{t=3}^{5}\Lambda_t\right)\sum_{j=4}^{5}e_j\end{aligned}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} q_3 & p_3 & 0 & 0 & 0 & 0\\ q_3 & 0 & p_3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & q_3 & p_3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & q_3 & 0 & p_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_3 & p_3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot$$

$$\begin{bmatrix} q_4 & p_4 & 0 & 0 & 0 & 0\\ q_4 & 0 & p_4 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & q_4 & p_4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & q_4 & 0 & p_4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_4 & p_4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} q_5 & p_5 & 0 & 0 & 0 & 0\\ q_5 & 0 & p_5 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & q_5 & p_5 & 0 & 0\\ 0 & 0 & q_5 & 0 & p_5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_5 & p_5\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$= p_3 p_4 p_5$$

$$\beta_1 = \left(\prod_{j=0}^{1} p_j\right) q_1 = p_1 q_2$$

άρα $\alpha_1 \beta_1 = p_1 q_2 p_3 p_4 p_5$

$$\alpha_2 = e_1 \left(\prod_{t=2+2}^{5} \Lambda_t\right) U_2'$$

$$= e_1 \left(\prod_{t=4}^{5} \Lambda_t\right) \sum_{j=3}^{4} e_j$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} q_4 & p_4 & 0 & 0 & 0 & 0\\ q_4 & 0 & p_4 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & q_4 & p_4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & q_4 & 0 & p_4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_4 & p_4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot$$

$$\begin{bmatrix} q_5 & p_5 & 0 & 0 & 0 & 0\\ q_5 & 0 & p_5 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & q_5 & p_5 & 0 & 0\\ 0 & 0 & q_5 & 0 & p_5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_5 & p_5\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$= p_4 p_5$$

$$\beta_2 = \left(\prod_{j=0}^{2} p_j\right) q_3 = p_1 p_2 q_3$$

άρα $\alpha_2 \beta_2 = p_1 p_2 q_3 p_4 p_5$

$$\alpha_3 = e_1 \left(\prod_{t=3+2}^{5} \Lambda_t\right) U_1'$$

$$= e_1 \left(\prod_{t=5}^{5} \Lambda_t\right) \sum_{j=2}^{3} e_j$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_5 & p_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q_5 & 0 & p_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_5 & p_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_5 & 0 & p_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_5 & p_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = p_5$$

$$\beta_3 = \left(\prod_{j=0}^{3} p_j\right) q_4 = p_1 p_2 p_3 q_4$$

άρα $\alpha_3 \beta_3 = p_1 p_2 p_3 q_4 p_5$

$$\alpha_4 = e_1 \left(\prod_{t=3+3}^{5} \Lambda_t\right) U_0'$$

$$= e_1 \left(\prod_{t=6}^{5} \Lambda_t\right) \sum_{j=1}^{2} e_j$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$$

$$\beta_4 = \left(\prod_{j=0}^{4} p_j\right) q_5 = p_1 p_2 p_3 p_4 q_5$$

άρα $\alpha_4 \beta_4 = p_1 p_2 p_3 p_4 q_5$

Τελικά

$$P(N_{5,2}^{C}=2)=q_1p_2p_3p_4p_5+p_1q_2p_3p_4p_5+p_1p_2q_3p_4p_5+p_1p_2p_3q_4p_5+p_1p_2p_3p_4q_5$$
$$+p_1p_2p_3p_4p_5\,. \qquad (1.3.5)$$

Παρατήρηση: Στην περίπτωση που οι δοκιμές Bernoulli είναι ανεξάρτητες και ισόνομες με κοινή πιθανότητα επιτυχίας p και πιθανότητα αποτυχίας q τότε
$P(N_{5,2}^{C}=0)=q^5+5q^4p+5q^3p^2$, $P(N_{5,2}^{C}=1)=5q^3p^2+10q^2p^3$ και
$P(N_{5,2}^{C}=2)=p^5+5qp^4$.

Παράδειγμα: Ας δούμε μία αριθμητική εφαρμογή του παραπάνω παραδείγματος. Σε ακολουθία 5 ανεξάρτητων δοκιμών Bernoulli $X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4,\ X_5$ διατεταγμένων σε κύκλο με πιθανότητες επιτυχίας $P(X_t=1)=p_t=\dfrac{1}{t+1}$, για $t=1,2,3,4,5$ να βρεθεί η συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής $N_{5,2}^{C}$.

Οι πιθανότητες επιτυχίας είναι $p_1=P(X_1=1)=\dfrac{1}{2}$, $p_2=P(X_2=1)=\dfrac{1}{3}$, $p_3=P(X_3=1)=\dfrac{1}{4}$, $p_4=P(X_4=1)=\dfrac{1}{5}$ και $p_5=P(X_5=1)=\dfrac{1}{6}$. Ενώ οι πιθανότητες αποτυχίας είναι $q_1=P\left(X_1=0\right)=\dfrac{1}{2}$, $q_2=P(X_2=0)=\dfrac{2}{3}$, $q_3=P(X_3=0)=\dfrac{3}{4}$, $q_4=P(X_4=0)=\dfrac{4}{5}$ και $q_5=P(X_5=0)=\dfrac{5}{6}$.

Σύμφωνα με τους γενικούς τύπους (1.3.3), (1.3.4) και (1.3.5) που βρήκαμε παραπάνω έχουμε:
$P(N_{5,2}^{C}=0)=\dfrac{499}{720}$, $P(N_{5,2}^{C}=1)=\dfrac{205}{720}$ και $P(N_{5,2}^{C}=2)=\dfrac{16}{720}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{Ο}

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli με κοινή πιθανότητα επιτυχίας p και πιθανότητα αποτυχίας $q=1-p$ διατεταγμένες σε κύκλο και θα εργαστούμε με μεθόδους συνδυαστικής αναλύσης. Στην εργασία αυτή χρησιμοποιείται ο ακόλουθος ορισμός του διωνυμικού συντελεστή

$$\binom{n}{m}=\begin{cases}1, & \alpha\nu \;\; n\geq 0, m\geq 0 \;\; \acute{\eta} \;\; n\geq 0, m=n \\ \prod_{k=1}^{m}(n-k+1)\Big/\prod_{k=1}^{m}k, & \alpha\nu \;\; n>m>0 \\ 0, & \delta\iota\alpha\varphi o\rho\varepsilon\tau\iota\kappa\acute{\alpha}\end{cases}$$

2.1 Από κοινού κατανομή του πλήθους των μη επικαλυπτόμενων ροών επιτυχιών μήκους k σε n ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli διατεταγμένες σε κύκλο, $N_{n,k}^{C}$ και του συνολικού αριθμού των επιτυχιών , S_n .

Έστω κυκλική ακολουθία από n ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli με κοινή πιθανότητα επιτυχίας p και πιθανότητα αποτυχίας $q=1-p$. Έστω $N_{n,k}^{C}$ το πλήθος των μη επικαλυπτόμενων ροών επιτυχιών μήκους k και S_n ο συνολικός αριθμός των επιτυχιών.

Θεώρημα 3 (Charalambides 1994)**.** Η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας $p_n(x,y)=P(N_{n,k}^{C}=x, S_n=y)$ για $x=0,1,\ldots,\left[\frac{y}{k}\right]$ και $y=0,1,\ldots,n$ δίνεται από τον τύπο

$$p_n(x,y)=\begin{cases}\binom{n-y+x-1}{x}N_c(y-kx,n-y,k)p^y q^{n-y}, & x=0,1,\ldots,\left[\frac{y}{k}\right], \quad y=0,1,\ldots,n-1 \\ p^n \quad , & x=\left[\frac{n}{k}\right], \quad y=n\end{cases}$$

όπου $N_c(y-kx,n-y,k)=\dfrac{n}{n-y}\sum_{j=0}^{n-y}(-1)^j\binom{n-y}{j}\binom{n-kx-kj-1}{n-y-1}$

$$=\sum_{j=0}^{n-y}(-1)^j\binom{n-y}{j}\frac{n}{n-kx-kj}\binom{n-kx-kj}{n-y}$$

είναι το πλήθος των κυκλικών μεταθέσεων των $y-kx$ επιτυχιών στις $n-y$ κάλπες έτσι ώστε κάθε κάλπη να περιέχει το πολύ $k-1$ επιτυχίες.

Για την απόδειξη του Θεωρήματος θα χρησιμοποιήσουμε τα ακόλουθα Λήμματα.

Λήμμα 2. Ο αριθμός των διαφορετικών διατάξεων n όμοιων αντικειμένων σε r διαφορετικές κάλπες δίνεται από

$$\binom{n+r-1}{r-1} = \binom{n+r-1}{n}$$

Απόδειξη

Μια τέτοια διάταξη αντιστοιχεί στους συνδυασμούς με επαναλήψεις των n ανά r.

Λήμμα 3 (Riordan 1958). Ο αριθμός των διαφορετικών διανομών n όμοιων αντικειμένων σε r διαφορετικές κάλπες έτσι ώστε κάθε κάλπη να περιέχει το πολύ $k-1$ αντικείμενα δίνεται από

$$N(n,r,k) = \sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{k}\right]} (-1)^j \binom{r}{j} \binom{n+r-jk-1}{r-1}$$

Απόδειξη

Θεωρούμε τη γεννήτρια συνάρτηση

$$g(t) = (1+t+t^2+\ldots+t^{k-1})^r = \underbrace{(1+t+\ldots+t^{k-1})\cdot(1+t+\ldots+t^{k-1})\cdots(1+t+\ldots+t^{k-1})}_{r \quad \varphi o \rho \acute{\varepsilon} \varsigma}$$

Η συνάρτηση αυτή είναι ένα πολυώνυμο ως προς t βαθμού $r(k-1)$. Δηλαδή $g(t) = a_0 t^0 + a_1 t^1 + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n + \ldots + a_{r(k-1)} t^{r(k-1)}$ όπου τα a_i είναι οι συντελεστές του πολυωνύμου και είναι πραγματικοί αριθμοί.

Ο συντελεστής a_n παριστάνει όλους τους δυνατούς τρόπους που μπορούν να συνδυαστούν δυνάμεις του t κάθε μια μέσα από κάποιο παράγοντα $1+t+\ldots+t^{k-1}$, έτσι ώστε όταν πολλαπλασιαστούν να προκύψει το t^n. Οι συντελεστές αυτοί ισοδυναμούν με όλους τους δυνατούς τρόπους διανομής n όμοιων σφαιρών σε r διαφορετικές κάλπες με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε μία από τις r κάλπες να περιέχει το πολύ $k-1$ σφαίρες.

$$g(t) = (1+t+t^2+\ldots+t^{k-1})^r = \underbrace{(1+t+\ldots+t^{k-1})\cdot(1+t+\ldots+t^{k-1})\cdots(1+t+\ldots+t^{k-1})}_{r \quad \varphi o \rho \acute{\varepsilon} \varsigma}$$

$$= \left(\frac{1-t^k}{1-t}\right)^r$$

$$= \frac{(1-t^k)^r}{(1-t)^r}$$

$$= (1-t^k)^r (1-t)^{-r}$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} \left(-t^k\right)^i \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \binom{r+j-1}{r-1} \cdot t^j \right)$$

Ο συντελεστής του t^n είναι $a_n = \sum_{\substack{i,j \ni \\ ik+j=n}} (-1)^j \binom{r}{i} \binom{r+j-1}{r-1}$

όπου $ik + j = n \Rightarrow j = n - ik$

και τελικά $a_n = \sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{k}\right]} (-1)^i \binom{r}{i} \binom{n+r-ik-1}{r-1}$.

Απόδειξη Θεωρήματος

Έστω ότι κάθε επιτυχία συμβολίζεται με S, ενώ κάθε αποτυχία με F. Τα στοιχεία ω του δειγματικού χώρου Ω μιας κυκλικής ακολουθίας από n ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli είναι μία κυκλική μετάθεση $(i_1, i_2, ..., i_n)$ από n επιτυχίες (S) και αποτυχίες (F).

Το γεγονός $\left\{ \omega \in \Omega : N_{n,k}{}^c = x,\ S_n(\omega) = y \right\}$ περιέχει την μετάθεση $(i_1, i_2, ..., i_n)$ των y επιτυχιών και $n-y$ αποτυχιών, η οποία περιέχει x μη επικαλυπτόμενες ροές επιτυχιών μήκους k. Ο αριθμός αυτών των μεταθέσεων ορίζεται ως εξής. Πρώτα απ'όλα οι $n-y$ αποτυχίες τοποθετούνται σε ένα κύκλο και δημιουργούν $n-y$ κάλπες (κάθε κάλπη δημιουργείται μεταξύ δύο αποτυχιών).

Για $0 \le x \le \left[\frac{y}{k}\right]$ και $0 \le y \le n-1$ οι τρόποι να τοποθετηθούν x μη επικαλυπτόμενες ροές επιτυχιών μήκους k σε $n-y$ κάλπες σύμφωνα με το Λήμμα 2 είναι

$$\binom{n-y+x-1}{x}.$$

Οι $y-kx$ επιτυχίες που απέμειναν, με $0 \le y-kx \le (k-1)(n-y)$, θα πρέπει να διανεμηθούν στις $n-y$ κάλπες με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε κάλπη να περιέχει το πολύ $k-1$ επιτυχίες. Ο αριθμός αυτών των διανομών σύμφωνα με το Λήμμα 3 ισούται με

$$N(y-kx, n-y, k) = \sum_{j=0}^{n-y} (-1)^j \binom{n-y}{j} \binom{n-kx-kj-1}{n-y}$$

Βάσει της Βασικής Αρχής Απαρίθμησης ο συνολικός αριθμός διανομών των y επιτυχιών σε $n-y$ κάλπες έτσι ώστε να δημιουργηθούν x μη επικαλυπτόμενες ροές επιτυχιών μήκους k είναι,

$$\binom{n-y+x-1}{x} N(y-kx, n-y, k)$$

Επιπλέον, κάθε μία από αυτές τις κυκλικές μεταθέσεις δίνουν n κυκλικές διατάξεις με περιστροφή. Δηλαδή

$$n\binom{n-y+x-1}{x} N(y-kx, n-y, k).$$

Αλλά οι μεταθέσεις αυτές είναι ανά $n-y$ όμοιες. Συνεπώς ο αριθμός των κυκλικών διατάξεων των y επιτυχιών και των $n-y$ αποτυχιών έτσι ώστε να δημιουργηθούν x μη επικαλυπτόμενες ροές επιτυχιών μήκους k, δίνεται από

$$N_c(y-kx, n-y, k) = \frac{n}{n-y} N(y-kx, n-y, k)$$

Λόγω του ότι οι τυχαίες μεταβλητές Bernoulli $X_1, X_2, ..., X_n$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες με κοινή πιθανότητα επιτυχίας p και κοινή πιθανότητα αποτυχίας q, κάθε μια από αυτές τις κυκλικές διατάξεις έχει πιθανότητα $p^y q^{n-y}$, δηλαδή

$$P\left(N_{n,k}^C = x, S_n = y\right) = \binom{n-y+x-1}{x} \frac{n}{n-y} N(y-kx, n-y, k) p^y q^{n-y}$$

$$= \binom{n-y+x-1}{x} N_c(y-kx, n-y, k) p^y q^{n-y}$$

Για $x = \left[\frac{n}{k}\right]$, $y = n$ ισχύει ότι

$$P\left(N_{n,k}^C = x, S_n = y\right) = p^n.$$

Παρατήρηση: Στην παραπάνω σχέση δίνεται η πιθανότητα για ακέραιες τιμές των μεταβλητών x και y έτσι ώστε να δημιουργηθούν x μη επικαλυπτόμενες ροές επιτυχιών μήκους k, το y παίρνει τιμές: $kx \le y \le kx + (k-1)(n-y) \Rightarrow 0 \le y - kx \le (k-1)(n-y)$.

Στην περίπτωση όμως που $y - kx > (k-1)(n-y)$ τότε δεν μπορούμε να τοποθετήσουμε τις $y-kx$ επιτυχίες στις $n-y$ κάλπες έτσι ώστε να μη δημιουργηθεί κι άλλη ροή επιτυχιών μήκους k, δηλαδή $N_c(y-kx, n-y, k) = 0$ και άρα

$$P\left(N_{n,k}^C = x, S_n = y\right) = 0$$

2.2 Κατανομή του πλήθους των μη επικαλυπτόμενων ροών επιτυχιών μήκους k σε n ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli διατεταγμένες σε κύκλο, $N_{n,k}^{C}$ με χρήση διωνυμικών συντελεστών.

Έχοντας βρει την από κοινού συνάρτηση πιθανότητας των $N_{n,k}^{C}$ και S_n μπορούμε να βρούμε την κατανομή της $N_{n,k}^{C}$.

Θεώρημα 4 (Charalambides 1994)**.** Η συνάρτηση πιθανότητας $p_n(x) = P(N_{n,k}^{C} = x)$ δίνεται από τον τύπο

$$P\left(N_{n,k}^{C} = x\right) = p^{n}\left\{\sum_{r=1}^{n-kx}\binom{r+x-1}{x}N_{c}(n-r-kx,r,k)\left(\frac{q}{p}\right)^{r} + \delta_{x,\left[\frac{n}{k}\right]}\right\}, \qquad (2.2.1)$$

$x = 0,1,\ldots,\left[\dfrac{n}{k}\right]$. Με $[s]$ συμβολίζεται το κάτω ακέραιο μέρος του s, $\delta_{x,s}$ είναι η δέλτα συνάρτηση του Kronecker που δίνεται από $\delta_{x,s} = \begin{cases} 1, & x = s \\ 0, & x \neq s \end{cases}$ και

$$N_{c}(n-r-kx,r,k) = \frac{n}{r}\sum_{j=0}^{r}(-1)^{j}\binom{r}{j}\binom{n-kx-kj-1}{r-1}$$
$$= \sum_{j=0}^{r}(-1)^{j}\binom{r}{j}\frac{n}{n-kx-kj}\binom{n-kx-kj}{j}$$

είναι το πλήθος των κυκλικών διατάξεων των $n-r-kx$ επιτυχιών στις r κάλπες με την προϋπόθεση κάθε κάλπη να περιέχει το πολύ $k-1$ επιτυχίες.

Απόδειξη

Αφού έχουμε βρει την από κοινού συνάρτηση πιθανότητας των $N_{n,k}^{C}$ και S_n.

$$P\left(N_{n,k}^{C} = x, S_n = y\right) = \begin{cases} \binom{n-y+x-1}{x} N_c(y-kx, n-y, k)p^{y}q^{n-y}, & x=0,1,\ldots,\left[\dfrac{y}{k}\right], \quad y=0,1,\ldots,n-1 \\ p^{n}\ , & x=\left[\dfrac{n}{k}\right], \quad y=n \end{cases}$$

μπορούμε να βρούμε την περιθώρια συνάρτηση πιθανότητας της $N_{n,k}^{C}$ αθροίζοντας ως προς όλες τις δυνατές τιμές της τυχαίας μεταβλητής S_n

$$
\begin{aligned}
p_n(x) &= P\left(N_{n,k}^{C} = x\right) \\
&= \sum_{y} P\left(N_{n,k}^{C} = x, S_n = y\right) \\
&= P\left(N_{n,k}^{C} = x, S_n = n\right) + \sum_{r=1}^{n-kx} P(N_{n,k}^{C} = x, S_n = n-r) \\
&= p_n(x,n) + \sum_{r=1}^{n-kx} p_n(x, n-r) \\
&= p^n \delta_{x,\left[\frac{n}{k}\right]} + \sum_{r=1}^{n-kx} \binom{n-n+r+x-1}{x} N_c(n-r-kx, r, k) p^{n-r} q^r \\
&= p^n \delta_{x,\left[\frac{n}{k}\right]} + \sum_{r=1}^{n-kx} \binom{r+x-1}{x} N_c(n-r-kx, r, k) p^{n-r} q^r \\
&= p^n \left\{ \delta_{x,\left[\frac{n}{k}\right]} + \sum_{r=1}^{n-kx} \binom{r+x-1}{x} N_c(n-r-kx, r, k) \left(\frac{q}{p}\right)^r \right\}
\end{aligned}
$$

Παράδειγμα: Δίνεται ακολουθία από 12 ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli διατεταγμένες σε κύκλο, με πιθανότητα επιτυχίας $p = \frac{3}{4}$ και πιθανότητα αποτυχίας $q = 1 - p = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$. Θα υπολογίσουμε την πιθανότητα να υπάρχουν 3 μη επικαλυπτόμενες ροές επιτυχιών μήκους 3.

Θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση (2.2.1) για $n = 12$, $k = 3$ και $x = 3$. Άρα έχουμε

$$
\begin{aligned}
P(N_{12,3}^{C} = 3) = p_{12}(3) &= \left(\frac{3}{4}\right)^{12} \left\{ \delta_{3,\left[\frac{12}{3}\right]} + \sum_{r=1}^{12-3\cdot 3} \binom{r+3-1}{3} N_c\left(12 - r - 3\cdot 3, r, 3\right) \left(\frac{1/4}{3/4}\right)^r \right\} \\
&= \left(\frac{3}{4}\right)^{12} \left\{ \sum_{r=1}^{3} \binom{r+3-1}{3} N_c(3-r, r, 3) \left(\frac{1}{3}\right)^r \right\} \\
&= \left(\frac{3}{4}\right)^{12} \left\{ \binom{3}{3} N_c(2,1,3) \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \binom{4}{3} N_c(1,2,3) \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \binom{5}{3} N_c(0,3,3) \left(\frac{1}{3}\right)^3 \right\} \quad (1)
\end{aligned}
$$

Θα υπολογίσουμε τις κυκλικές διατάξεις

$$N_c(2,1,3)=\frac{12}{1}\sum_{j=0}^{1}(-1)^j\binom{1}{j}\binom{3-3\cdot j-1}{1-1}=12\left[\binom{1}{0}\binom{2}{0}-\binom{1}{1}\binom{-1}{0}\right]=12$$

$$N_c(1,2,3)=\frac{12}{2}\sum_{j=0}^{2}(-1)^j\binom{2}{j}\binom{3-3\cdot j-1}{2-1}=6\left[\binom{2}{0}\binom{2}{1}-\binom{2}{1}\binom{-1}{1}+\binom{2}{2}\binom{-4}{1}\right]=12$$

$$N_c(0,3,3)=\frac{12}{3}\sum_{j=0}^{3}(-1)^j\binom{3}{j}\binom{3-3\cdot j-1}{3-1}=4\left[\binom{3}{0}\binom{2}{2}-\binom{3}{1}\binom{-1}{2}+\ldots\right]=4$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (1) έχουμε

$$P(N_{12,3}^{C}=3)=\left(\frac{3}{4}\right)^{12}\left\{\binom{3}{3}12\left(\frac{1}{3}\right)^{1}+\binom{4}{3}12\left(\frac{1}{3}\right)^{2}+\binom{5}{3}4\left(\frac{1}{3}\right)^{3}\right\}\cong 0{,}342573881.$$

Μια παρόμοια έκφραση μπορεί να δοθεί από τους Makri, Philippou, Psillakis (2007) ως μια ειδική περίπτωση του αριθμού των l-επικαλυπτόμενων ροών επιτυχιών μήκους k, αν θέσουμε $l=0$.

Θεώρημα 5 (Makri, Philippou, Psillakis 2007)**.** Η κατανομή του πλήθους των μη επικαλυπτόμενων ροών επιτυχιών μήκους k δίνεται από

$$P\left(N_{n,k}^{C}=0\right)=\sum_{y=\left[\frac{n}{k}\right]}^{n}p^{n-y}q^{y}\,\frac{n}{y}\,C(n-y,y,k-1)$$

και για $x\geq 1$

$$P\left(N_{n,k}^{C}=x\right)=\sum_{y=1}^{n-kx}p^{n-y}q^{y}\,\frac{n}{y}\sum_{i=1}^{y}\binom{y}{i}\binom{x-1}{i-1}C(n-y-kx,y,k-1)+p^{n}\delta_{x,\left[\frac{n}{k}\right]}\qquad(2.2.2)$$

όπου $C(a,r,m-1)=\sum_{j=0}^{\left[\frac{a}{m}\right]}(-1)^j\binom{r}{l}\binom{a-mj+r-1}{r-1}$ είναι οι τρόποι που μπορούν να τοποθετηθούν a όμοιες σφαίρες σε r διαφορετικές κάλπες, έτσι ώστε κάθε κάλπη να περιέχει το πολύ $m-1$ σφαίρες.

Παράδειγμα: Δίνεται ακολουθία από 12 ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli διατεταγμένες σε κύκλο, με πιθανότητα επιτυχίας $p=\frac{3}{4}$ και πιθανότητα αποτυχίας $q = 1 - p = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$. Θα υπολογίσουμε την πιθανότητα να υπάρχουν 3 μη επικαλυπτόμενες ροές επιτυχιών μήκους 3.

Θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση (2.2.2) για $n = 12$, $k = 3$ και $x = 3$. Άρα έχουμε

$$P\left(N_{n,k}^{C} = 3\right) = \sum_{y=1}^{12-3\cdot 3} \left(\frac{3}{4}\right)^{12-y} \left(\frac{1}{4}\right)^{y} \frac{12}{y} \sum_{i=1}^{y} \binom{y}{i} \binom{3-1}{i-1} C(12-y-3\cdot 3, y, 3-1) + \left(\frac{3}{4}\right)^{12} \delta_{x,\left[\frac{12}{3}\right]}$$

$$= \sum_{y=1}^{3} \left(\frac{3}{4}\right)^{12-y} \left(\frac{1}{4}\right)^{y} \frac{12}{y} \sum_{i=1}^{y} \binom{y}{i} \binom{2}{i-1} C(3-y, y, 2)$$

$$= \left(\frac{3}{4}\right)^{11} \left(\frac{1}{4}\right) \frac{12}{1} \sum_{i=1}^{1} \binom{1}{i} \binom{2}{i-1} C(2,1,2) + \left(\frac{3}{4}\right)^{10} \left(\frac{1}{4}\right)^{2} \frac{12}{2} \sum_{i=1}^{2} \binom{2}{i} \binom{2}{i-1} C(1,2,2)$$
$$+ \left(\frac{3}{4}\right)^{9} \left(\frac{1}{4}\right)^{3} \frac{12}{3} \sum_{i=1}^{3} \binom{3}{i} \binom{2}{i-1} C(0,3,2)$$

$$= \left(\frac{3}{4}\right)^{11} \left(\frac{1}{4}\right) 12 \cdot C(2,1,2) + \left(\frac{3}{4}\right)^{10} \left(\frac{1}{4}\right)^{2} 6 \cdot 4 \cdot C(1,2,2)$$
$$+ \left(\frac{3}{4}\right)^{9} \left(\frac{1}{4}\right)^{3} 4 \cdot 10 \cdot C(0,3,2) \qquad (2)$$

Θα υπολογίσουμε τους συντελεστές

$$C(2,1,2) = \sum_{j=0}^{\left[\frac{2}{3}\right]} (-1)^{j} \binom{1}{j} \binom{2 - 3\cdot j + 1 - 1}{1-1} = \binom{1}{0}\binom{2}{0} = 1$$

$$C(1,2,2) = \sum_{j=0}^{\left[\frac{1}{3}\right]} (-1)^{j} \binom{2}{j} \binom{1 - 3\cdot j + 2 - 1}{2-1} = \binom{2}{0}\binom{2}{1} = 2$$

$$C(0,3,2) = \sum_{j=0}^{\left[\frac{0}{3}\right]} (-1)^{j} \binom{3}{j} \binom{0 - 3\cdot j + 3 - 1}{3-1} = \binom{3}{0}\binom{2}{2} = 1$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (2) έχουμε

$$P\left(N_{n,k}^{C} = 3\right) = 12 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{11} \left(\frac{1}{4}\right) + 48 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{10} \left(\frac{1}{4}\right)^{2} + 40 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{9} \left(\frac{1}{4}\right)^{3} \cong 0{,}34257388.$$

2.3 Κατανομή του πλήθους των μη επικαλυπτόμενων ροών επιτυχιών μήκους k σε n ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli διατεταγμένες σε κύκλο, $N_{n,k}^{C}$ με χρήση πολυωνυμικών συντελεστών.

Έστω $X_1,\ldots,X_n$ ακολουθία από n ανεξάρτητες και ισόνομες δοκιμές Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p και πιθανότητα αποτυχίας $q=1-p$, $i=1,\ldots,n$. Οι Philippou, Makri (1986) και Hirano (1986) ανεξάρτητα, έδειξαν ότι η συνάρτηση πιθανότητας του πλήθους των μη επικαλυπτόμενων ροών επιτυχιών μήκους k σε n ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli διατεταγμένες σε γραμμή, δίνεται από

$$P(N_{n,k}=x)=\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{x_1,\ldots,x_k}\binom{x_1+\ldots+x_k+x}{x_1,\ldots,x_k,x}p^n\left(\frac{q}{p}\right)^{x_1+\ldots+x_k},\quad x=0,1,\ldots,\left[\frac{n}{k}\right]$$

όπου το εσωτερικό άθροισμα είναι σε όλους τους μη αρνητικούς ακεραίους $x_1,\ldots,x_k$ οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση $\sum_{j=1}^{k}jx_j=n-i-kx$.

Θεώρημα 6 (Makri, Philippou 1994) **.** Έστω $N_{n,k}^{C}$ το πλήθος των μη επικαλυπτόμενων ροών επιτυχιών μήκους k σε n ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli διατεταγμένων σε κύκλο τότε,

$$P\left(N_{n,k}^{C}=x\right)=qp^{n-1}\sum_{i=1}^{k}i\sum\nolimits_1\binom{x_1+\ldots+x_k+x}{x_1,\ldots,x_k,x}\left(\frac{q}{p}\right)^{x_1+\ldots+x_k}$$
$$+kqp^{n-1}\sum_{i=1}^{k}\sum\nolimits_1\frac{x}{x_1+\ldots x_k+1}\binom{x_1+\ldots+x_k+x}{x_1,\ldots,x_k,x}\left(\frac{q}{p}\right)^{x_1+\ldots+x_k}+p^n\delta_{x,\left[\frac{n}{k}\right]}$$

όπου δ είναι η συνάρτηση δέλτα του Kronecker και το άθροισμα $\sum_1=\sum_{x_1,\ldots,x_k}$ είναι σε όλους τους μη αρνητικούς ακεραίους $x_1,\ldots,x_k$ οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση $\sum_{j=1}^{k}jx_j=n-i-kx$.

Για την απόδειξη του Θεωρήματος θα χρησιμοποιήσουμε τα παρακάτω Λήμματα.

Λήμμα 4. Έστω $N_{n,k}^{C}$, δ και $\sum_1$ όπως ορίστηκαν παραπάνω. Τότε για $x=0,1,\ldots,\left[\frac{n}{k}\right]$ ισχύει

$$P\left(N_{n,k}^{C}=x\right)=qp^{n-1}\sum_{r=0}^{x}\sum_{i=1}^{k}i\sum{}_{1}\binom{x_1+\ldots+x_k+x-r}{x_1,\ldots,x_k,x-r}\left(\frac{q}{p}\right)^{x_1+\ldots+x_k}$$
$$+qp^{n-1}\zeta(1,x)\zeta(1,k)\sum_{r=0}^{x-1}\sum_{i=1}^{k-1}(k-i)\sum{}_{1}\binom{x_1+\ldots+x_k+x-r-1}{x_1,\ldots,x_k,x-r-1}\left(\frac{q}{p}\right)^{x_1+\ldots+x_k}$$
$$+p^{n}\delta_{x,\left[\frac{n}{k}\right]}$$

όπου $\zeta(v,u)=\begin{cases}1, & \alpha\nu \quad u\geq v\\ 0, & \delta\iota\alpha\phi o\rho\varepsilon\tau\iota\kappa\acute{\alpha}\end{cases}$

Απόδειξη

Όπως στο προηγούμενο Θεώρημα με S συμβολίζουμε την επιτυχία και F την αποτυχία σε ένα πείραμα Bernoulli. Ένα τυπικό στοιχείο του $\left(N_{n,k}^{C}=x\right)$ είναι μια κυκλική διάταξη της μορφής

$$\underbrace{\underbrace{SS\ldots S}_{k}\ldots\underbrace{SS\ldots S}_{k}}_{r}\underbrace{SS\ldots S}_{\alpha}F\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{x_1+\ldots+x_k+x-r}\underbrace{SS\ldots S}_{\beta} \quad \text{με} \quad 0\leq x\leq\left[\frac{n}{k}\right] \qquad (2.3.1)$$

τέτοια ώστε x_1 από τα a είναι $e_1=F$, x_2 από τα a είναι $e_2=SF$,…, x_k από τα a είναι $e_k=\underbrace{SS\ldots S}_{k-1}F$ ενώ τα $x-r$ από τα a είναι $\tilde{e}_k=\underbrace{SS\ldots S}_{k}$ και οι μη αρνητικοί ακέραιοι $x_1,\ldots,x_k$ ικανοποιούν τη σχέση $\sum_{j=1}^{k}jx_j=n-1-kx-(\alpha+\beta)$ με $0\leq r\leq x$, $0\leq\alpha,\beta\leq k-1$ και $\alpha+\beta\leq k-1$

ή μια κυκλική διάταξη μορφής

$$\underbrace{\underbrace{SS\ldots S}_{k}\ldots\underbrace{SS\ldots S}_{k}}_{r}\underbrace{SS\ldots S}_{\alpha}F\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{x_1+\ldots+x_k+x-r-1}\underbrace{SS\ldots S}_{\beta} \quad \text{με} \quad 1\leq x\leq\left[\frac{n}{k}\right] \qquad (2.3.2)$$

όπου οι μη αρνητικοί ακέραιοι $x_1,\ldots,x_k$ ικανοποιούν τη σχέση $\sum_{j=1}^{k}jx_j=n-1-k(x-1)-(\alpha+\beta)$ με $x\geq 1$, $0\leq r\leq x-1$, $1\leq\alpha,\beta\leq k-1$ και $k\leq\alpha+\beta\leq 2k-2$

ή μια διάταξη της μορφής

$$\underbrace{SS\ldots S}_{n} \quad \text{για} \quad x=\left[\frac{n}{k}\right]. \qquad (2.3.3)$$

Για δεδομένα r, x_j $(1 \le j \le k)$, a και β το πλήθος των διατάξεων της μορφής (2.3.1) είναι

$$\binom{x_1+\ldots+x_k+x-r}{x_1,\ldots,x_k,x-r}$$

όπου κάθε μία από αυτές τις διατάξεις έχει πιθανότητα

$$P\Bigg(\underbrace{\underbrace{SS\ldots S}_{k}\ldots\underbrace{SS\ldots S}_{k}}_{r}\underbrace{SS\ldots S}_{\alpha}F\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{x_1+\ldots+x_k+x-r}\underbrace{SS\ldots S}_{\beta}\Bigg)=p^{kr}p^{\alpha}qq^{x_1}p^{x_2}q^{x_2}p^{2x_3}q^{x_3}\ldots p^{(k-1)x_k}q^{x_k}p^{k(x-r)}p^{\beta}$$

$$=q^{1+(x_1+\ldots+x_k)}p^{\alpha+\beta+kr+x_2+2x_3+\ldots+(k-1)x_k+kx-kr}.$$

Όμως $x_1+2x_2+\ldots+kx_k=n-1-kx-(\alpha+\beta)\Rightarrow\alpha+\beta=n-1-kx-x_1-2x_2-\ldots-kx_k$
και $\alpha+\beta+kr+x_2+2x_3+\ldots+(k-1)x_k+kx-kr=n-1-(x_1+\ldots+x_k)$
άρα

$$P\Bigg(\underbrace{\underbrace{SS\ldots S}_{k}\ldots\underbrace{SS\ldots S}_{k}}_{r}\underbrace{SS\ldots S}_{\alpha}F\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{x_1+\ldots+x_k+x-r}\underbrace{SS\ldots S}_{\beta}\Bigg)=qp^{n-1}\left(\frac{q}{p}\right)^{x_1+\ldots+x_k}.$$

Για δεδομένα r, x_j $(1 \le j \le k)$, α και β το πλήθος των διατάξεων της μορφής (2.3.2) είναι

$$\binom{x_1+\ldots+x_k+x-r-1}{x_1,\ldots,x_k,x-r-1}$$

όπου κάθε μία από αυτές τις διατάξεις έχει πιθανότητα

$$P\Bigg(\underbrace{\underbrace{SS\ldots S}_{k}\ldots\underbrace{SS\ldots S}_{k}}_{r}\underbrace{SS\ldots S}_{\alpha}F\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{x_1+\ldots+x_k+x-r-1}\underbrace{SS\ldots S}_{\beta}\Bigg)=p^{kr}p^{\alpha}qq^{x_1}p^{x_2}q^{x_2}p^{2x_3}q^{x_3}\ldots p^{(k-1)x_k}q^{x_k}p^{k(x-r-1)}p^{\beta}$$

$$=q^{1+(x_1+\ldots+x_k)}p^{\alpha+\beta+kr+x_2+2x_3+\ldots+(k-1)x_k+kx-kr-k}.$$

Όμως
$x_1+2x_2+\ldots+kx_k=n-1-kx+k-(\alpha+\beta)\Rightarrow\alpha+\beta=n-1-kx+k-x_1-2x_2-\ldots-kx_k$
και $\alpha+\beta+kr+x_2+2x_3+\ldots+(k-1)x_k+kx-kr-k=n-1-(x_1+\ldots+x_k)$
άρα

$$P\Bigg(\underbrace{\underbrace{SS\ldots S}_{k}\ldots\underbrace{SS\ldots S}_{k}}_{r}\underbrace{SS\ldots S}_{\alpha}F\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{x_1+\ldots+x_k+x-r-1}\underbrace{SS\ldots S}_{\beta}\Bigg)=qp^{n-1}\left(\frac{q}{p}\right)^{x_1+\ldots+x_k}.$$

Η διάταξη της μορφής (2.3.3) έχει πιθανότητα $P\Big(\underbrace{SS\ldots S}_{n}\Big)=p^n$.

Άρα

$$P\left(N_{n,k}^{C}=x\right)=\sum_{r=0}^{x}\sum_{\alpha=0}^{k-1}\sum_{\beta=0}^{k-1}\sum{}_1'\binom{x_1+\ldots+x_k+x-r}{x_1,\ldots,x_k,x-r}qp^{n-1}\left(\frac{q}{p}\right)^{x_1+\ldots+x_k}$$

$$+\zeta(1,x)\zeta(1,k)\sum_{r=0}^{x-1}\sum_{\alpha=0}^{k-1}\sum_{\substack{\beta=0\\ k\le\alpha+\beta\le 2k-2}}^{k-1}\sum{}_1''\binom{x_1+\ldots+x_k+x-r-1}{x_1,\ldots,x_k,x-r-1}qp^{n-1}\left(\frac{q}{p}\right)^{x_1+\ldots+x_k}$$

$$+p^n\delta_{x,\left[\frac{n}{k}\right]}$$

$$=\sum_{r=0}^{x}\sum_{\alpha+\beta=0}^{k-1}(\alpha+\beta+1)\sum{}_1'\binom{x_1+\ldots+x_k+x-r}{x_1,\ldots,x_k,x-r}qp^{n-1}\left(\frac{q}{p}\right)^{x_1+\ldots+x_k}$$

$$+\zeta(1,x)\zeta(1,k)\sum_{r=0}^{x-1}\sum_{\alpha+\beta=k}^{2k-2}(2k-\alpha-\beta-1)\sum{}_1''\binom{x_1+\ldots+x_k+x-r-1}{x_1,\ldots,x_k,x-r-1}$$

$$qp^{n-1}\left(\frac{q}{p}\right)^{x_1+\ldots+x_k}+p^n\delta_{x,\left[\frac{n}{k}\right]}$$

$$=qp^{n-1}\sum_{r=0}^{x}\sum_{i=1}^{k}i\sum{}_1\binom{x_1+\ldots+x_k+x-r}{x_1,\ldots,x_k,x-r}\left(\frac{q}{p}\right)^{x_1+\ldots+x_k}$$

$$+qp^{n-1}\sum_{r=0}^{x}\sum_{i=1}^{k-1}(k-i)\sum{}_1\binom{x_1+\ldots+x_k+x-r-1}{x_1,\ldots,x_k,x-r-1}\left(\frac{q}{p}\right)^{x_1+\ldots+x_k}+p^n\delta_{x,\left[\frac{n}{k}\right]}$$

όπου το άθροισμα $\sum{}_1'=\sum_{x_1,\ldots,x_k}$ είναι σε όλους τους μη αρνητικούς ακεραίους $x_1,\ldots,x_k$ οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση $\sum_{j=1}^{k}jx_j=n-1-kx-(\alpha+\beta)$ και το $\sum{}_1''=\sum_{x_1,\ldots,x_k}$ είναι σε όλους τους μη αρνητικούς ακεραίους $x_1,\ldots,x_k$ οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση $\sum_{j=1}^{k}jx_j=n-1-k(x-1)-(\alpha+\beta)$.

Λήμμα 5. Έστω $\binom{x_1+\ldots+x_k}{x_1,\ldots,x_k}=\frac{(x_1+\ldots+x_k)!}{x_1!\ldots x_k!}$. Για $x=0,1,\ldots$ έχουμε

$$\sum_{r=0}^{x}\binom{x_1+\ldots+x_k+r}{x_1,\ldots,x_k,r}=\frac{x+1}{x_1+\ldots+x_k+1}\binom{x_1+\ldots+x_k+x+1}{x_1,\ldots,x_k,x+1}$$

Απόδειξη

$$\binom{x_1+\ldots+x_k+r}{x_1,\ldots,x_k,r}=\frac{(x_1+\ldots+x_k+r)!}{x_1!\ldots x_k!r!}$$

$$=\frac{(x_1+\ldots+x_k+r)!\ \ (x_1+\ldots+x_k)!}{x_1!\ldots x_k!r!\ \ (x_1+\ldots+x_k)!}$$

$$=\frac{(x_1+\ldots+x_k)!}{x_1!\ldots x_k!}\ \frac{(x_1+\ldots+x_k+r)!}{r!(x_1+\ldots+x_k)!}$$

$$=\frac{(x_1+\ldots+x_k)!}{x_1!\ldots x_k!}\binom{x_1+\ldots+x_k+r}{r}$$

$$=\frac{(x_1+\ldots+x_k)!}{x_1!\ldots x_k!}\left[\binom{x_1+\ldots+x_k+r+1}{r}-\binom{x_1+\ldots+x_k+r}{r-1}\right]$$

$$=\frac{(x_1+\ldots+x_k)!}{x_1!\ldots x_k!}\left[\frac{(x_1+\ldots+x_k+r+1)!}{r!(x_1+\ldots+x_k+1)!}-\frac{(x_1+\ldots+x_k+r)!}{(r-1)!(x_1+\ldots+x_k+1)!}\right]$$

$$=\frac{(x_1+\ldots+x_k)!(x_1+\ldots+x_k+r+1)!}{r!x_1!\ldots x_k!(x_1+\ldots+x_k+1)!}-\frac{(x_1+\ldots+x_k)!(x_1+\ldots+x_k+r)!}{(r-1)!x_1!\ldots x_k!(x_1+\ldots+x_k+1)!}$$

$$=\frac{(x_1+\ldots+x_k+r+1)!}{r!x_1!\ldots x_k!(x_1+\ldots+x_k+1)}-\frac{(x_1+\ldots+x_k+r)!}{(r-1)!x_1!\ldots x_k!(x_1+\ldots+x_k+1)}$$

$$=\frac{(r+1)(x_1+\ldots+x_k+r+1)!}{(r+1)!x_1!\ldots x_k!(x_1+\ldots+x_k+1)}-\frac{r(x_1+\ldots+x_k+r)!}{r!x_1!\ldots x_k!(x_1+\ldots+x_k+1)}$$

$$=\frac{r+1}{x_1+\ldots+x_k+1}\binom{x_1+\ldots+x_k+r+1}{x_1,\ldots,x_k,r+1}-\frac{r}{x_1+\ldots+x_k+1}\binom{x_1+\ldots+x_k+r}{x_1,\ldots,x_k,r}$$

Για $x = 0,1,\ldots$ έχουμε

$$\sum_{r=0}^{x}\binom{x_1+\ldots+x_k+r}{x_1,\ldots,x_k,r} = \sum_{r=0}^{x}\frac{r+1}{x_1+\ldots+x_k+1}\binom{x_1+\ldots+x_k+r+1}{x_1,\ldots,x_k,r+1}$$

$$-\sum_{r=0}^{x}\frac{r}{x_1+\ldots+x_k+1}\binom{x_1+\ldots+x_k+r}{x_1,\ldots,x_k,r}$$

$$=\frac{x+1}{x_1+\ldots+x_k+1}\binom{x_1+\ldots+x_k+x+1}{x_1,\ldots,x_k,x+1}.$$

Παρατήρηση: Η ιδιότητα του Τριγώνου Pascal για διωνυμικούς συντελεστές είναι:

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}.$$

Απόδειξη Θεωρήματος

Για $x = 0,1,\ldots$, σύμφωνα με το Λήμμα 5 έχουμε

$$\zeta(1,x)\cdot\sum_{r=0}^{x-1}\binom{x_1+\ldots+x_k+x-r-1}{x_1,\ldots,x_k,x-r-1} = \frac{x}{x_1+\ldots+x_k+1}\binom{x_1+\ldots+x_k+x}{x_1,\ldots,x_k,x}$$

και

$$\sum_{r=0}^{x}\binom{x_1+\ldots+x_k+x-r}{x_1,\ldots,x_k,x-r} = \binom{x_1+\ldots+x_k+x}{x_1,\ldots,x_k,x} + \zeta(1,x)\cdot\sum_{r=1}^{x}\binom{x_1+\ldots+x_k+x-r}{x_1,\ldots,x_k,x-r}$$

$$=\binom{x_1+\ldots+x_k+x}{x_1,\ldots,x_k,x} + \frac{x}{x_1+\ldots+x_k+1}\binom{x_1+\ldots+x_k+x}{x_1,\ldots,x_k,x}$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις αυτές στο Λήμμα 4 έχουμε

$$P\left(N_{n,k}^{C} = x\right) = qp^{n-1}\sum_{i=1}^{k} i \sum_{1}\binom{x_1+\ldots+x_k+x}{x_1,\ldots,x_k}\left(\frac{q}{p}\right)^{x_1+\ldots+x_k}$$

$$+qp^{n-1}\sum_{i=1}^{k} i \sum_{1}\frac{x}{x_1+\ldots+x_k+x}\binom{x_1+\ldots+x_k+x}{x_1,\ldots,x_k,x}\left(\frac{q}{p}\right)^{x_1+\ldots+x_k}$$

$$+qp^{n-1}\sum_{i=1}^{k-1}(k-i)\sum{}_1\frac{x}{x_1+\ldots+x_k+x+1}\binom{x_1+\ldots+x_k+x}{x_1,\ldots,x_k,x}\left(\frac{q}{p}\right)^{x_1+\ldots+x_k}$$

$$+p^n\delta_{x,\left[\frac{n}{k}\right]}$$

$$=qp^{n-1}\sum_{i=1}^{k}i\sum{}_1\binom{x_1+\ldots+x_k+x}{x_1,\ldots,x_k,x}\left(\frac{q}{p}\right)^{x_1+\ldots+x_k}$$

$$+kqp^{n-1}\sum_{i=1}^{k}\sum{}_1\frac{x}{x_1+\ldots+x_k+1}\binom{x_1+\ldots+x_k+x}{x_1,\ldots,x_k,x}\left(\frac{q}{p}\right)^{x_1+\ldots+x_k}+p^n\delta_{x,\left[\frac{n}{k}\right]}.$$

Παράδειγμα: Έστω ακολουθία 8 δοκιμών Bernoulli διατεταγμένων σε κύκλο με πιθανότητα επιτυχίας κάθε δοκιμής $p_i=p=0{,}8$ για $i=1,2,\ldots,8$ και πιθανότητα αποτυχίας $q_i=q=1-p=0{,}2$. Θα υπολογίσουμε την πιθανότητα το πλήθος των μη επικαλυπτόμενων ροών επιτυχιών μήκους 3 να είναι 1, χρησιμοποιώντας τα τρία παραπάνω Θεωρήματα.

Σύμφωνα με το Θεώρημα 4 (Charalambides 1994)

$$P(N_{8,3}^C=1)=0{,}8^8\left\{\delta_{1,\left[\frac{8}{3}\right]}+\sum_{r=1}^{8-3\cdot1}\binom{r+1-1}{1}N_c\left(8-r-3\cdot1,r,3\right)\left(\frac{0{,}2}{0{,}8}\right)^r\right\}$$

$$=0{,}8^8\left\{\sum_{r=1}^{5}r\cdot N_c(5-r,r,3)\cdot0{,}25^r\right\}$$

$$=0{,}8^8\Big\{1\cdot0{,}25\cdot N_c(4,1,3)+2\cdot N_c(3,2,3)\cdot0{,}25^2+3\cdot N_c(2,3,3)\cdot0{,}25^3$$

$$+4\cdot N_c(1,4,3)\cdot0{,}25^4+5\cdot N_c(0,5,3)\cdot0{,}25^5\Big\}\qquad(1)$$

Θα υπολογίσουμε τις κυκλικές διατάξεις

$$N_c(4,1,3)=\frac{8}{1}\sum_{j=0}^{1}(-1)^j\binom{1}{j}\binom{5-3\cdot j-1}{1-1}=8\left[\binom{1}{0}\binom{4}{0}-\binom{1}{1}\binom{1}{0}\right]=0$$

$$N_c(3,2,3)=\frac{8}{2}\sum_{j=0}^{2}(-1)^j\binom{2}{j}\binom{5-3\cdot j-1}{2-1}=4\left[\binom{2}{0}\binom{4}{1}-\binom{2}{1}\binom{1}{1}+\binom{2}{2}\binom{-2}{1}\right]=8$$

$$N_c(2,3,3)=\frac{8}{3}\sum_{j=0}^{3}(-1)^j\binom{3}{j}\binom{5-3\cdot j-1}{3-1}=\frac{8}{3}\left[\binom{3}{0}\binom{4}{2}-\binom{3}{1}\binom{1}{2}+\ldots\right]=16$$

$$N_c(1,4,3)=\frac{8}{4}\sum_{j=0}^{4}(-1)^j\binom{4}{j}\binom{5-3\cdot j-1}{4-1}=2\left[\binom{4}{0}\binom{4}{3}-\binom{4}{1}\binom{1}{3}+\ldots\right]=8$$

$$N_c(0,5,3)=\frac{8}{5}\sum_{j=0}^{5}(-1)^j\binom{5}{j}\binom{5-3\cdot j-1}{5-1}=\frac{8}{5}\left[\binom{5}{0}\binom{4}{4}-\binom{5}{1}\binom{1}{4}+\ldots\right]=\frac{8}{5}$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (1) έχουμε

$$P(N_{8,3}^{C}=1)=0{,}8^8\left\{1\cdot 0{,}25\cdot 0+2\cdot 8\cdot 0{,}25^2+3\cdot 16\cdot 0{,}25^3+4\cdot 8\cdot 0{,}25^4+5\cdot\frac{8}{5}\cdot 0{,}25^5\right\}$$
$$\cong 0{,}315883\,.$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 5 (Makri, Philippou, Psillakis 2007)

$$P\left(N_{8,3}^{C}=1\right)=\sum_{y=1}^{8-3\cdot 1}0{,}8^{8-y}\cdot 0{,}2^{y}\cdot\frac{8}{y}\sum_{i=1}^{y}\binom{y}{i}\binom{0}{i-1}C\left(8-y-3\cdot 1,y,2\right)$$

$$=\sum_{y=1}^{5}0{,}8^{8-y}\cdot 0{,}2^{y}\cdot\frac{8}{y}\sum_{i=1}^{y}\binom{y}{i}\binom{0}{i-1}C\left(5-y,y,2\right)$$

$$=0{,}8^7\cdot 0{,}2\cdot\frac{8}{1}\binom{1}{1}\binom{0}{0}C\left(4,1,2\right)$$

$$+0{,}8^6\cdot 0{,}2^2\cdot\frac{8}{2}\left[\binom{2}{1}\binom{0}{0}C\left(3,2,2\right)+\binom{2}{2}\binom{0}{1}C\left(3,2,2\right)\right]$$

$$+0{,}8^5\cdot 0{,}2^3\cdot\frac{8}{3}\left[\binom{3}{1}\binom{0}{0}C\left(2,3,2\right)+\binom{3}{2}\binom{0}{1}C\left(2,3,2\right)+\ldots\right]$$

$$+0{,}8^4\cdot 0{,}2^4\cdot\frac{8}{4}\left[\binom{4}{1}\binom{0}{0}C\left(1,4,2\right)+\binom{4}{2}\binom{0}{1}C\left(1,4,2\right)+\ldots\right]$$

$$+0{,}8^3\cdot 0{,}2^5\cdot\frac{8}{5}\left[\binom{5}{1}\binom{0}{0}C\left(0,5,2\right)+\binom{5}{2}\binom{0}{1}C\left(0,5,2\right)+\ldots\right] \qquad (2)$$

Θα υπολογίσουμε τους συντελεστές

$$C(4,1,2)=\sum_{j=0}^{\left[\frac{4}{3}\right]}(-1)^j\binom{1}{j}\binom{4-3j+1-1}{1-1}=\sum_{j=0}^{1}(-1)^j\binom{1}{j}\binom{4-3j}{0}=\binom{1}{0}\binom{4}{0}-\binom{1}{1}\binom{1}{0}=0$$

$$C(3,2,2)=\sum_{j=0}^{\left[\frac{3}{3}\right]}(-1)^j\binom{2}{j}\binom{3-3j+2-1}{1-1}=\sum_{j=0}^{1}(-1)^j\binom{2}{j}\binom{4-3j}{1}=\binom{2}{0}\binom{4}{1}-\binom{2}{1}\binom{1}{1}=2$$

$$C(2,3,2)=\sum_{j=0}^{\left[\frac{2}{3}\right]}(-1)^j\binom{3}{j}\binom{2-3j+3-1}{3-1}=\sum_{j=0}^{0}(-1)^j\binom{3}{j}\binom{4-3j}{2}=\binom{3}{0}\binom{4}{2}=6$$

$$C(1,4,2)=\sum_{j=0}^{\left[\frac{1}{3}\right]}(-1)^j\binom{4}{j}\binom{1-3j+4-1}{4-1}=\sum_{j=0}^{0}(-1)^j\binom{4}{j}\binom{4-3j}{3}=\binom{4}{0}\binom{4}{3}=4$$

$$C(0,5,2)=\sum_{j=0}^{\left[\frac{0}{3}\right]}(-1)^j\binom{5}{j}\binom{0-3j+4-1}{5-1}=\sum_{j=0}^{0}(-1)^j\binom{5}{j}\binom{4-3j}{4}=\binom{5}{0}\binom{4}{4}=1$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (2) έχουμε

$$\begin{aligned}P\left(N_{8,3}^{C}=1\right)&=0{,}8^7\cdot 0{,}2\cdot\frac{8}{1}\cdot 1\cdot 0+0{,}8^6\cdot 0{,}2^2\cdot\frac{8}{2}\cdot 2\cdot 2+0{,}8^5\cdot 0{,}2^3\cdot\frac{8}{3}\cdot 3\cdot 6\\&\quad+0{,}8^4\cdot 0{,}2^4\cdot\frac{8}{4}\cdot 4\cdot 4+0{,}8^3\cdot 0{,}2^5\cdot\frac{8}{5}\cdot 5\cdot 1\\&\cong 0{,}315883.\end{aligned}$$

Και σύμφωναμε το Θεώρημα 6 (Makri, Philippou 1994)

$$\begin{aligned}P\left(N_{8,3}^{C}=1\right)&=0{,}2\cdot 0{,}8^7\sum_{i=1}^{3} i\sum\nolimits_1\binom{x_1+x_2+x_3+1}{x_1,x_2,x_3,1}\left(\frac{0{,}2}{0{,}8}\right)^{x_1+x_2+x_3}\\&\quad+3\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8^7\sum_{i=1}^{3}\ \sum\nolimits_1\frac{1}{x_1+.x_2+x_3+1}\binom{x_1+x_2+x_3+1}{x_1,x_2,x_3,1}\left(\frac{0{,}2}{0{,}8}\right)^{x_1+x_2+x_3}+0{,}8^8\,\delta_{1,\left[\frac{8}{3}\right]}\end{aligned}\quad (3)$$

το άθροισμα $\sum_1=\sum_{x_1,x_2,x_3}$ είναι σε όλους τους μη αρνητικούς ακεραίους x_1,x_2,x_3 οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση

$$\sum_{j=1}^{3} jx_j=8-i-3\cdot 1=5-i$$

- για $i=1$

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4$

4	0	0
2	1	0
1	0	1
0	2	0

- για $i=2$

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3$

3	0	0
1	1	0
0	0	1

- για $i=3$

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2$

2	0	0
0	1	0

Με αντικατάσταση στη σχέση (3) έχουμε

$$
\begin{aligned}
P\left(N_{8,3}^{C}=1\right) = 0{,}2\cdot 0{,}8^{7}\Bigg\{ & 1\cdot\binom{4+0+0++1}{4,0,0,1}(0{,}25)^{4} + 1\cdot\binom{2+1+0+1}{2,1,0,1}(0{,}25)^{3} \\
& + 1\cdot\binom{1+0+1+1}{1,0,1,1}(0{,}25)^{2} + 1\cdot\binom{0+2+0+1}{0,2,0,1}(0{,}25)^{2} \\
& + 2\cdot\binom{3+0+0+1}{3,0,0,1}(0{,}25)^{3} + 2\cdot\binom{1+1+0+1}{1,1,0,1}(0{,}25)^{2} \\
& + 2\cdot\binom{0+0+1+1}{0,0,1,1}(0{,}25)^{1} + 3\cdot\binom{2+0+0+1}{2,0,0,1}(0{,}25)^{2} \\
& + 3\cdot\binom{0+1+0+1}{0,1,0,1}(0{,}25)^{1}\Bigg\} + 3\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8^{7}\left\{\frac{1}{5}\cdot\binom{4+0+0++1}{4,0,0,1}(0{,}25)^{4}\right.
\end{aligned}
$$

$$+\frac{1}{4}\cdot\binom{2+1+0+1}{2,1,0,1}(0{,}25)^3+\frac{1}{3}\cdot\binom{1+0+1+1}{1,0,1,1}(0{,}25)^2$$

$$+\frac{1}{3}\cdot\binom{0+2+0+1}{0,2,0,1}(0{,}25)^2+\frac{1}{4}\cdot\binom{3+0+0+1}{3,0,0,1}(0{,}25)^3$$

$$+\frac{1}{3}\cdot\binom{1+1+0+1}{1,1,0,1}(0{,}25)^2+\frac{1}{2}\cdot\binom{0+0+1+1}{0,0,1,1}(0{,}25)^1$$

$$\left.+\frac{1}{3}\cdot\binom{2+0+0+1}{2,0,0,1}(0{,}25)^2+\frac{1}{2}\cdot\binom{0+1+0+1}{0,1,0,1}(0{,}25)^1\right\}$$

$\cong 0{,}315883$.

2.4 Αναδρομικές σχέσεις για την κατανομή του πλήθους των μη επικαλυπτόμενων ροών επιτυχιών μήκους k σε n ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli διατεταγμένες σε κύκλο, $N_{n,k}^{C}$.

Στη συνέχεια δίνεται σχέση μεταξύ των συναρτήσεων πιθανότητας των τυχαίων μεταβλητών $N_{n,k}$ και $N_{n,k}^{C}$.

Θεώρημα 7 (Makri, Philippou 1994)**.** Έστω $N_{n,k}^{C}$ και $N_{n,k}$ οι τυχαίες μεταβλητές που παριστάνουν το πλήθος των μη επικαλυπτόμενων ροών επιτυχιών μήκους k σε n ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli διατεταγμένες σε κύκλο και γραμμή, αντίστοιχα. Θέτουμε $m=\min\{k(x+1)-1,n-2\}$. Τότε για $x=0,1,\ldots,\left[\frac{n}{k}\right]$ έχουμε

$$P\left(N_{n,k}^{C}=x\right)=\sum_{i=0}^{m}(i+1)q^2p^iP\left(N_{n-i-2,k}=x-\left[\frac{i}{k}\right]\right)+nqp^{n-1}\delta_{x,\left[\frac{n-1}{k}\right]}+p^n\delta_{x,\left[\frac{n}{k}\right]}$$

όπου δ η δέλτα συνάρτηση του Kronecker.

Απόδειξη

Έστω ότι $x = 0,1,\dots,\left[\frac{n}{k}\right]$. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα

A_j ={ j επιτυχίες (S) προηγούνται της πρώτης αποτυχίας (F)}, $j = 1,\dots,m$

B_l ={ l επιτυχίες (S) έπονται της τελευταίας αποτυχίας (F)}, $l = 1,\dots,m$

και $0 \le l + j \le m$

άρα $A_j = \left(X_1 = X_2 = \dots = X_j = 1,\ \ X_{j+1} = 0 \right)$

και $B_l = \left(X_{n-l} = 0,\ \ X_{n-l+1} = X_{n-l+2} = \dots = X_{n-1} = X_n = 1 \right)$.

Ορίζουμε επίσης τα σύνολα

$C = \bigcup_{i=1}^{m} \left\{ X_i = 0,\ \ X_j = 1\ \ (1 \le j \ne i \le m) \right\}$, με $P(C) = nqp^{n-1}$

και $D = \{X_1 = X_2 = \dots = X_n = 1\}$, με $P(D) = p^n$.

Ενώ ισχύει ότι $\left(N_{n,k}^C \ne \left[\frac{n-1}{k}\right] \right) \bigcap C = \varnothing$, $\left(N_{n,k}^C \ne \left[\frac{n}{k}\right] \right) \bigcap D = \varnothing$ και

$$\left(N_{n,k}^C = x\right) = \bigcup_{\substack{j=0 \\ l+j\le m}}^{m} \bigcup_{l=0}^{m} \left[\left(N_{n,k}^C = x\right) \bigcap A_j \bigcap B_l \right] \bigcup \left[\left(N_{n,k}^C = x\right) \bigcap C \right] \bigcup \left[\left(N_{n,k}^C = x\right) \bigcap D \right]$$

άρα

$$\begin{aligned}
P\left(N_{n,k}^C = x\right) &= \sum_{j=0}^{m} \sum_{l=0}^{m} P(A_j)P(B_l)P\left(N_{n,k}^C = x \mid A_j \bigcap B_l\right) + P(C)P\left(N_{n,k}^C = x \mid C\right) \\
&\qquad + P(D)P\left(N_{n,k}^C = x \mid D\right) \\
&= \sum_{l+j=0}^{m} (l+j+1)p^j qqp^l P\left(N_{n-2-l-j,k} = x - \left[\frac{l+j}{k}\right] \right) + nqp^{n-1}\delta_{x,\left[\frac{n-1}{k}\right]} \\
&\qquad + p^n \delta_{x,\left[\frac{n}{k}\right]} \\
&= \sum_{i=0}^{m} (i+1)q^2 p^i P\left(N_{n-2-i,k} = x - \left[\frac{i}{k}\right] \right) + nqp^{n-1}\delta_{x,\left[\frac{n-1}{k}\right]} + p^n \delta_{x,\left[\frac{n}{k}\right]}.
\end{aligned}$$

2.5 Δεσμευμένη κατανομή του πλήθους των μη επικαλυπτόμενων ροών επιτυχιών μήκους k σε n ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli διατεταγμένες σε κύκλο, $N_{n,k}^{C}$ δοθέντος του συνολικού αριθμού επιτυχιών, S_n .

Η περιθώρια κατανομή του S_n είναι διωνυμική με πιθανότητα επιτυχίας p και συνάρτηση πιθανότητας

$$P(S_n = y) = \binom{n}{y} p^y q^{n-y} \ , \ y = 0,1,\ldots,n$$

Θεώρημα 8 (Charalambides 1994). Η δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας του $p_n(x \mid y) = P(N_{n,k}^{C} = x \mid S_n = y)$ για $x = 0,1,\ldots,\left[\frac{y}{k}\right]$ και $y = 0,1,\ldots,n$ δίνεται από

$$p_n(x \mid y) = \begin{cases} \dfrac{\binom{n-y+x-1}{x} N_c(y-kx, n-y, k)}{\binom{n}{y}} & , x = 0,1,\ldots,\left[\frac{y}{k}\right], \ \ y = 0,1,\ldots,n-1 \\[2ex] 1, & x = \left[\frac{n}{k}\right], \ \ y = n \end{cases}$$

Απόδειξη

- Για $x = 0,1,\ldots,\left[\frac{y}{k}\right]$ και $y = 0,1,\ldots,n-1$

$$p_n(x \mid y) = \frac{p_n(x,y)}{P(S_n = y)}$$

$$= \frac{\binom{n-y+x-1}{x} N_c(y-kx, n-y, k) p^y q^{n-y}}{\binom{n}{y} p^y q^{n-y}}$$

$$= \frac{\binom{n-y+x-1}{x} N_c(y-kx, n-y, k)}{\binom{n}{y}}$$

- Για $x = \left[\dfrac{n}{k}\right]$ και $y = n$

$$p_n(x \mid y) = \frac{p_n(x,n)}{P(S_n = n)} = \frac{p^n}{p^n} = 1.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{Ο}

ΑΞΙΟΠΙΣΤΙΑ ΚΥΚΛΙΚΟΥ ΣΥΝΕΧΟΜΕΝΟΥ k-ΑΠΟ-ΤΑ-n ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΑΠΟΤΥΧΙΑΣ

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με την αξιοπιστία κυκλικών k-από-τα-n συστημάτων αποτυχίας.

Λέγοντας αξιοπιστία, εννοούμε τον βαθμό βεβαιότητας ότι ένα σύστημα θα λειτουργήσει επιτυχώς σε ένα συγκεκριμένο περιβάλλον και για ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα.

k-από-τα-n σύστημα αποτυχίας είναι το σύστημα εκείνο το οποίο αποτελείται από n συνιστώσες και παύει να λειτουργεί αν και μόνο αν εμφανιστούν k αποτυχημένες συνιστώσες του.

Κυκλικό συνεχόμενο k-από-τα-n σύστημα αποτυχίας ονομάζεται το κυκλικό σύστημα που αποτελείται από n συνιστώσες και το οποίο παύει να λειτουργεί αν και μόνο αν εμφανιστούν k συνεχόμενες αποτυχημένες συνιστώσες.

3.1 Αξιοπιστία κυκλικού συνεχόμενου k-από-τα-n συστήματος αποτυχίας με χρήση διωνυμικών συντελεστών.

Θεωρούμε ένα κυκλικό σύστημα του οποίου οι συνιστώσες λειτουργούν ανεξάρτητα με κοινή αξιοπιστία κάθε συνιστώσας p. Η τιμή της συνάρτησης πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής $N_{n,k}^{C}$ για $x=0$ είναι η πιθανότητα το μήκος της μεγαλύτερης ροής επιτυχιών σε μια κυκλική ακολουθία από n ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli, να είναι μικρότερο ή ίσο του $k-1$. Αν συμβολίσουμε με L_n^C την τυχαία μεταβλητή που παριστάνει το μέγιστο μήκος ροής επιτυχιών σε n ανεξάρτητα πειράματα Bernoulli διατεταγμένα σε κύκλο, τότε χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.2.1) έχουμε

$$\begin{aligned}
p_n(0) &= P\left(L_n^C < k\right) \\
&= P\left(L_n^C \le k-1\right) \\
&= p^n \left\{ \delta_{0,\left[\frac{n}{k}\right]} + \sum_{r=1}^{n} \binom{r+0-1}{0} N_c(n-r-0,r,k) \left(\frac{q}{p}\right)^r \right\} \\
&= p^n \delta_{0,\left[\frac{n}{k}\right]} + \sum_{r=0}^{n} p^{n-r} q^r N_c(n-r,r,k) - p^n
\end{aligned}$$

$$= \sum_{r=0}^{n} p^{n-r} q^{r} \left[\sum_{j=0}^{\left[\frac{n-r}{k}\right]} (-1)^{j} \binom{r}{j} \frac{n}{n-kj} \binom{n-kj}{j} \right] - p^{n} + p^{n} \delta_{0,\left[\frac{n}{k}\right]}$$

$$= \sum_{j=0}^{\left[\frac{n-1}{k}\right]} (-1)^{j} \frac{n}{n-kj} \binom{n-kj}{j} \sum_{r=j}^{n-kj} \binom{n-kj-j}{r-j} p^{n-r} q^{r} - p^{n} + p^{n} \delta_{0,\left[\frac{n}{k}\right]} \qquad (1)$$

Το $\sum_{r=j}^{n-kj} \binom{n-kj-j}{r-j} p^{n-r} q^{r}$ αν θέσουμε $r-j=l \Rightarrow r=l+j$ γίνεται $\sum_{l=0}^{n-kj-j} \binom{n-kj-j}{l} p^{n-l-j} q^{l+j} = \sum_{l=0}^{n-kj-j} \binom{n-kj-j}{l} p^{n-kj-l-j} q^{l} p^{kj} q^{j}$ όπου με χρήση του Διωνυμικού Θεωρήματος προκύπτει ότι $\sum_{r=j}^{n-kj} \binom{n-kj-j}{r-j} p^{n-r} q^{r} = p^{kj} q^{j}$.

Άρα με αντικατάσταση στη σχέση (1) έχουμε

$$p_{n}(0) = \sum_{j=0}^{\left[\frac{n-1}{k}\right]} (-1)^{j} \frac{n}{n-kj} \binom{n-kj}{j} p^{jk} q^{j} - p^{n} + p^{n} \delta_{0,\left[\frac{n}{k}\right]}.$$

Αν εναλλάξουμε τα p και q τότε η πιθανότητα $P\left(L_{n}^{C} < k\right)$ είναι η πιθανότητα να μην εμφανιστεί ροή αποτυχιών μήκους μεγαλύτερου ή ίσου του k σε n ανεξάρτητες και ισόνομες δοκιμές Bernoulli. Η πιθανότητα αυτή δίνει την αξιοπιστία ενός κυκλικού συνεχόμενου k-από-τα-n συστήματος αποτυχίας. Συμβολίζουμε την αξιοπιστία ενός κυκλικού συνεχόμενου k-από-τα-n συστήματος αποτυχίας με $R_{C}(p;k,n)$ και θα δίνεται από τη σχέση

$$R_{C}(p;k,n) = \sum_{j=0}^{\left[\frac{n-1}{k}\right]} (-1)^{j} \frac{n}{n-kj} \binom{n-kj}{j} q^{jk} p^{j} - q^{n} \ , \ n \geq k \qquad (3.1.1)$$

(Charalambides 1991). Μια ισοδύναμη έκφραση αυτής της πιθανότητας δόθηκε το 1985 από τους Lambiris και Papastavridis.

Επίσης σύμφωνα με το Θεώρημα 5 των Makri, Philippou, Psillakis (2007) εάν στη σχέση $P\left(N_{n,k}^{C}=0\right)=\sum_{y=\left[\frac{n}{k}\right]}^{n} p^{n-y}q^{y}\frac{n}{y}C(n-y,y,k-1)$ εναλλάξουμε τα p και q προκύπτει η αξιοπιστία ενός κυκλικού συνεχόμενου k-από-τα-n συστήματος αποτυχίας, άρα

$$R_C(p;k,n)=\sum_{y=\left[\frac{n}{k}\right]}^{n} q^{n-y}p^{y}\frac{n}{y}C(n-y,y,k-1) \qquad (3.1.2)$$

Παράδειγμα: Δίνεται κυκλικό σύστημα από 14 ανεξάρτητες συνιστώσες με πιθανότητα επιτυχίας $p=\frac{1}{3}$ και πιθανότητα αποτυχίας $q=1-p=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$. Θα υπολογίσουμε την αξιοπιστία ενός κυκλικού συνεχόμενου 5-από-τα-14 συστήματος αποτυχίας.

Σύμφωνα με τη σχέση (3.1.1) έχουμε

$$R_C\left(\frac{1}{3};5,14\right)=\sum_{j=0}^{\left[\frac{14-1}{5}\right]}(-1)^j\frac{14}{14-5j}\binom{14-5j}{j}\left(\frac{2}{3}\right)^{5j}\left(\frac{1}{3}\right)^{j}-\left(\frac{2}{3}\right)^{14}$$

$$=\sum_{j=0}^{2}(-1)^j\frac{14}{14-5j}\binom{14-5j}{j}\left(\frac{2}{3}\right)^{5j}\left(\frac{1}{3}\right)^{j}-\left(\frac{2}{3}\right)^{14}$$

$$=\frac{14}{14}\cdot\binom{14}{0}\left(\frac{2}{3}\right)^{0}\left(\frac{1}{3}\right)^{0}-\frac{14}{9}\binom{9}{1}\left(\frac{2}{3}\right)^{5}\left(\frac{1}{3}\right)^{1}+\frac{14}{4}\binom{4}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{10}\left(\frac{1}{3}\right)^{2}-\left(\frac{2}{3}\right)^{14}$$

$$\cong 0{,}422497515.$$

Παράδειγμα: Δίνεται κυκλικό σύστημα από 8 ανεξάρτητες συνιστώσες με πιθανότητα επιτυχίας $p=\frac{1}{3}$ και πιθανότητα αποτυχίας $q=\frac{2}{3}$. Θα υπολογίσουμε την αξιοπιστία ενός κυκλικού συνεχόμενου 3-από-τα-8 συστήματος αποτυχίας.

Θα χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις (3.1.1) και (3.1.2) για $n=8$, $k=3$, $p=\frac{1}{3}$ και $q=\frac{2}{3}$.

Σύμφωνα με τη σχέση (3.1.1) έχουμε

$$R_C\left(\frac{1}{3};3,8\right)=\sum_{j=0}^{\left[\frac{8-1}{5}\right]}(-1)^j\frac{8}{8-3j}\binom{8-3j}{j}\left(\frac{2}{3}\right)^{3j}\left(\frac{1}{3}\right)^{j}-\left(\frac{2}{3}\right)^{8}$$

$$=\sum_{j=0}^{2}(-1)^j\frac{8}{8-3j}\binom{8-3j}{j}\left(\frac{2}{3}\right)^{3j}\left(\frac{1}{3}\right)^{j}-\left(\frac{2}{3}\right)^{8}$$

$$=\frac{8}{8}\cdot\binom{8}{0}\left(\frac{2}{3}\right)^{0}\left(\frac{1}{3}\right)^{0}-\frac{8}{5}\binom{5}{1}\left(\frac{2}{3}\right)^{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{1}+\frac{8}{2}\binom{2}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{6}\left(\frac{1}{3}\right)^{2}-\left(\frac{2}{3}\right)^{8}$$

$$\cong 0{,}209876544\,.$$

Ενώ σύμφωνα με τη σχέση (3.1.2) έχουμε

$$R_C\left(\frac{1}{3};3,8\right)=\sum_{y=\left[\frac{8}{3}\right]}^{8}\left(\frac{2}{3}\right)^{8-y}\left(\frac{1}{3}\right)^{y}\frac{8}{y}C(8-y,y,3-1)$$

$$=\left(\frac{2}{3}\right)^{6}\left(\frac{1}{3}\right)^{2}\frac{8}{2}C(6,2,2)+\left(\frac{2}{3}\right)^{5}\left(\frac{1}{3}\right)^{3}\frac{8}{3}C(5,3,2)+\left(\frac{2}{3}\right)^{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{4}\frac{8}{4}C(4,4,2)$$

$$+\left(\frac{2}{3}\right)^{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{5}\frac{8}{5}C(3,5,2)+\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{6}\frac{8}{6}C(2,6,2)+\left(\frac{2}{3}\right)^{1}\left(\frac{1}{3}\right)^{7}\frac{8}{7}C(1,7,2)$$

$$+\left(\frac{2}{3}\right)^{0}\left(\frac{1}{3}\right)^{8}\frac{8}{8}C(0,8,2) \qquad (1)$$

Θα υπολογίσουμε τους συντελεστές

$$C(6,2,2)=\sum_{j=0}^{\left[\frac{6}{3}\right]}(-1)^j\binom{2}{j}\binom{6-3j+2-1}{2-1}=\binom{2}{0}\binom{7}{1}-\binom{2}{1}\binom{4}{1}+\binom{2}{2}\binom{1}{1}=0$$

$$C(5,3,2)=\sum_{j=0}^{\left[\frac{5}{3}\right]}(-1)^j\binom{3}{j}\binom{5-3j+3-1}{3-1}=\binom{3}{0}\binom{7}{2}-\binom{3}{1}\binom{4}{2}=3$$

$$C(4,4,2)=\sum_{j=0}^{\left[\frac{4}{3}\right]}(-1)^j\binom{4}{j}\binom{4-3j+4-1}{4-1}=\binom{4}{0}\binom{7}{3}-\binom{4}{1}\binom{4}{3}=19$$

$$C(3,5,2)=\sum_{j=0}^{\left[\frac{3}{3}\right]}(-1)^j\binom{5}{j}\binom{3-3j+5-1}{5-1}=\binom{5}{0}\binom{7}{4}-\binom{5}{1}\binom{4}{4}=30$$

$$C(2,6,2)=\sum_{j=0}^{\left[\frac{2}{3}\right]}(-1)^j\binom{6}{j}\binom{2-3j+6-1}{6-1}=\binom{6}{0}\binom{7}{5}=21$$

$$C(1,7,2)=\sum_{j=0}^{\left[\frac{1}{3}\right]}(-1)^j\binom{7}{j}\binom{1-3j+7-1}{7-1}=\binom{7}{0}\binom{7}{6}=7$$

$$C(0,8,2)=\sum_{j=0}^{\left[\frac{0}{3}\right]}(-1)^j\binom{8}{j}\binom{0-3j+8-1}{8-1}=\binom{8}{0}\binom{7}{7}=1$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (1) έχουμε

$$\begin{aligned}R_C\left(\frac{1}{3};3,8\right)&=\left(\frac{2}{3}\right)^6\left(\frac{1}{3}\right)^2\frac{8}{2}\cdot 0+\left(\frac{2}{3}\right)^5\left(\frac{1}{3}\right)^3\frac{8}{3}\cdot 3+\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^4\frac{8}{4}\cdot 19\\&\quad+\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^5\frac{8}{5}\cdot 30+\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^6\frac{8}{6}\cdot 21+\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^7\frac{8}{7}\cdot 7\\&\quad+\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^8\frac{8}{8}\cdot 1\\&\cong 0{,}209876544.\end{aligned}$$

3.2 Αξιοπιστία κυκλικού συνεχόμενου k-από-τα-n συστήματος αποτυχίας με χρήση πολυωνυμικών συντελεστών.

Σύμφωνα με το Θεώρημα 6 των Makri, Philippou (1994) για $x=0,1,\ldots,\left[\frac{n}{k}\right]$ έχουμε τη σχέση

$$\begin{aligned}P\left(N_{n,k}^C=x\right)&=qp^{n-1}\sum_{i=1}^{k}i\sum\nolimits_1\binom{x_1+\ldots+x_k+x}{x_1,\ldots,x_k,x}\left(\frac{q}{p}\right)^{x_1+\ldots+x_k}\\&\quad+kqp^{n-1}\sum_{i=1}^{k}\ \sum\nolimits_1\frac{x}{x_1+\ldots x_k+1}\binom{x_1+\ldots+x_k+x}{x_1,\ldots,x_k,x}\left(\frac{q}{p}\right)^{x_1+\ldots+x_k}+p^n\delta_{x,\left[\frac{n}{k}\right]}\end{aligned}$$

Εάν στη σχέση αυτή θέσουμε $x=0$ και εναλλάξουμε τα p και q θα έχουμε την αξιοπιστία κυκλικού συνεχόμενου k-από-τα-n συστήματος αποτυχίας. Άρα

$$R_C(p;k,n)=P\left(N_{n,k}^C=0\right)=pq^{n-1}\sum_{i=1}^{k} i\sum\nolimits_1 \binom{x_1+\ldots+x_k}{x_1,\ldots,x_k}\left(\frac{p}{q}\right)^{x_1+\ldots+x_k}$$

$$+kpq^{n-1}\sum_{i=1}^{k}\ \sum\nolimits_1 \frac{0}{x_1+\ldots x_k+1}\binom{x_1+\ldots+x_k}{x_1,\ldots,x_k}\left(\frac{p}{q}\right)^{x_1+\ldots+x_k}+q^n\delta_{0,\left[\frac{n}{k}\right]}$$

$$R_C(p;k,n)=pq^{n-1}\sum_{i=1}^{k} i\sum\nolimits_1 \binom{x_1+\ldots+x_k}{x_1,\ldots,x_k}\left(\frac{p}{q}\right)^{x_1+\ldots+x_k}+q^n\delta_{0,\left[\frac{n}{k}\right]} \qquad (3.2.1)$$

Παράδειγμα: Δίνεται κυκλικό σύστημα από 8 ανεξάρτητες συνιστώσες με πιθανότητα επιτυχίας $p=\frac{1}{3}$ και πιθανότητα αποτυχίας $q=\frac{2}{3}$. Θα υπολογίσουμε την αξιοπιστία ενός κυκλικού συνεχόμενου 3-από-τα-8 συστήματος αποτυχίας.

Θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση (3.2.1) για $k=3$, n =8, $p=\frac{1}{3}$ και $q=\frac{2}{3}$

$$R_C\left(\frac{1}{3};3,8\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{8-1}\sum_{i=1}^{5} i\sum\nolimits_1 \binom{x_1+x_2+x_3}{x_1,x_2,x_3}\left(\frac{1/3}{2/3}\right)^{x_1+x_2+x_3}+\left(\frac{2}{3}\right)^8\delta_{0,\left[\frac{8}{3}\right]} \qquad (1)$$

το άθροισμα $\sum_1=\sum_{x_1,x_2,x_3}$ είναι σε όλους τους μη αρνητικούς ακεραίους x_1,x_2,x_3 οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση $x_1+2x_2+3x_3=8-i$

- για $i=1$

$x_1+2x_2+3x_3=7$

7	0	0
5	1	0
4	0	1
3	2	0
2	1	1
1	3	0
1	0	2
0	2	1

- για $i=2$

$x_1+2x_2+3x_3=6$

6	0	0
4	1	0
3	0	1
2	2	0
1	1	1
0	3	0
0	0	2

- για $i=3$

$x_1+2x_2+3x_3=5$

5	0	0
3	1	0
2	0	1
1	2	0
0	1	1

Με αντικατάσταση στη σχέση (1) έχουμε

$$R_C\left(\frac{1}{3};3,8\right)=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^7\left\{1\cdot\binom{7+0+0}{7,0,0}(0,5)^7+1\cdot\binom{5+1+0}{5,1,0}(0,5)^6+1\cdot\binom{4+0+1}{4,0,1}(0,5)^5\right.$$

$$+1\cdot\binom{3+2+0}{3,2,0}(0,5)^5+1\cdot\binom{2+1+1}{2,1,1}(0,5)^4+1\cdot\binom{1+3+0}{1,3,0}(0,5)^4$$

$$+1\cdot\binom{1+0+2}{1,0,2}(0,5)^3+1\cdot\binom{0+2+1}{0,2,1}(0,5)^3+2\cdot\binom{6+0+0}{6,0,0}(0,5)^6$$

$$+2\cdot\binom{4+1+0}{4,1,0}(0,5)^5+2\cdot\binom{3+0+1}{3,0,1}(0,5)^4+2\cdot\binom{2+2+0}{2,2,0}(0,5)^4$$

$$+2\cdot\binom{1+1+1}{1,1,1}(0,5)^3+2\cdot\binom{0+3+0}{0,3,0}(0,5)^3+2\cdot\binom{0+0+2}{0,0,2}(0,5)^2$$

$$+3\cdot\binom{5+0+0}{5,0,0}(0,5)^5+3\cdot\binom{3+1+0}{3,1,0}(0,5)^4+3\cdot\binom{2+0+1}{2,0,1}(0,5)^3$$

$$\left.+3\cdot\binom{1+2+0}{1,2,0}(0,5)^3+3\cdot\binom{0+1+1}{0,1,1}(0,5)^2\right\}$$

$$\cong 0,209876544\,.$$

3.3 *Αναδρομικές σχέσεις για τον υπολογισμό της αξιοπιστίας ενός κυκλικού συνεχόμενου k-από-τα-n συστήματος αποτυχίας.*

Σε αυτή τη παράγραφο θα συνδυάσουμε την αξιοπιστία ενός κυκλικού k-από-τα-n συστήματος αποτυχίας με την αξιοπιστία γραμμικών συστημάτων αποτυχίας.

Έστω $X_{1,}...,X_n$ μια ακολουθία από n ανεξάρτητες και ισόνομες δοκιμές Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας $p_i = P(X_i = 1) = p$ και πιθανότητα αποτυχίας $q_i = P(X_i = 0) = q$, για κάθε $i = 1,...,n$.

Η αξιοπιστία ενός γραμμικού k-από-τα-n συστήματος αποτυχίας δίνεται από

$$R_L(p;k,n) = \sum_{j=0}^{n} N(j, n-j+1, k)\, p^{n-j} q^{j}$$

(Derman, Lieberman, Ross 1982)

όπου $N(j,n-j+1,k)$ εκφράζει τους τρόπους που μπορούν να τοποθετηθούν j όμοιες σφαίρες σε $n-j+1$ διαφορετικές κάλπες, με τρόπο ώστε κάθε κάλπη να περιέχει το πολύ $k-1$ σφαίρες.

Χρησιμοποιώντας με το Λήμμα 3 της προηγούμενης παραγράφου, ο αροθμός αυτός δίνεται από

$$N(j,n-j+1,k) = \sum_{i=0}^{n-j+1} (-1)^i \binom{n-j+1}{i} \binom{j+n-j+1-ik-1}{n-j+1-1}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-j+1} (-1)^i \binom{n-j+1}{i} \binom{n-ik}{n-j}$$

Θεώρημα 9 (Derman, Lieberman, Ross 1982)**.** Η αξιοπιστία ενός κυκλικού συνεχόμενου k-από-τα-n συστήματος αποτυχίας δίνεται από την

$$R_C(p;k,n) = p^2 \sum_{i=0}^{k-1} (i+1) R_L(p;k,n-i-2) \qquad (3.3.1)$$

Απόδειξη

Επιλέγουμε τυχαία ένα σημείο του κύκλου μεταξύ δύο συνιστωσών του. Έστω N το πλήθος των αποτυχημένων συνιστωσών μέχρι την εμφάνιση της πρώτης επιτυχημένης συνιστώσας μετρώντας δεξιόστροφα και N΄ το πλήθος των αποτυχημένων συνιστωσών μέχρι την εμφάνιση της πρώτης επιτυχημένης συνιστώσας μετρώντας αριστερόστροφα. Άρα

$$P(N=j) = P(N'=j) = \begin{cases} pq^j, & j = 0,1,\ldots,n-1 \\ q^n, & j = n \end{cases}.$$

$$P(N+N'=i) = \sum_{j=0}^{i} P(N=i-j)P(N'=j) = \sum_{j=0}^{i} pq^{i-j} pq^j = \sum_{j=0}^{i} p^2 q^i = p^2 q^i (i+1).$$

Δεδομένου ότι $N+N'=i$ υπάρχει μία ροή από αποτυχημένες συνιστώσες πριν την πρώτη και μετά την τελευταία επιτυχημένη συνιστώσα. Δηλαδή η ροή είναι της μορφής $S\underbrace{FFF\ldots FF}_{i}S$. Το υπόλοιπο σύστημα λειτουργεί ως γραμμικό συνεχόμενο k-από-τα-$n-i+2$. Αθροίζοντας για όλες τις δυνατές τιμές του i με $0 \le i \le k-1$ έχουμε

$$R_C(p;k,n) = p^2 \sum_{i=0}^{k-1} (i+1) q^i R_L(p;k,n-i-2).$$

Η ίδια σχέση προέκυψε και από το Θεώρημα 7 των Makri, Philippou (1994) αν θέσουμε $x=0$ και εναλλάξουμε τα p και q.

Πράγματι,

$$P\left(N_{n,k}^C = 0\right) = \sum_{i=0}^{m} (i+1) p^2 q^i P\left(N_{n-2-i,k} = 0 - \left[\frac{i}{k}\right]\right) + nqp^{n-1}\delta_{0,\left[\frac{n-1}{k}\right]} + p^n \delta_{0,\left[\frac{n}{k}\right]}$$

$$P\left(N_{n,k}^C = 0\right) = p^2 \sum_{i=0}^{\min\{k(0+1)-1,n-2\}} (i+1) q^i P\left(N_{n-2-i,k} = 0\right)$$

$$P\left(N_{n,k}^C = 0\right) = p^2 \sum_{i=0}^{k-1} (i+1) q^i P\left(N_{n-2-i,k} = 0\right)$$

$$R_C(p;k,n) = p^2 \sum_{i=0}^{k-1} (i+1) q^i R_L(p;k,n-i-2)$$

Η $P\left(N_{n-i-2,k} = 0\right) = R_L(p;k,n-i-2)$ μπορεί να δοθεί από τη σχέση

$$P(N_{n,k}=x)=\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{x_1,\dots,x_k}\binom{x_1+\dots+x_k+x}{x_1,\dots,x_k,x}p^n\left(\frac{q}{p}\right)^{x_1+\dots+x_k},\quad x=0,1,\dots,\left[\frac{n}{k}\right]$$

εάν θέσουμε $x=0$ και εναλλάξουμε τα p και q. Δηλαδή

$$R_L(p;k,n)=\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{x_1,\dots,x_k}\binom{x_1+\dots+x_k}{x_1,\dots,x_k}q^n\left(\frac{p}{q}\right)^{x_1+\dots+x_k}$$

με το άθροισμα $\sum\limits_{x_1,\dots,x_k}$ να είναι σε όλους τους μη αρνητικούς ακεραίους $x_1,\dots,x_k$ οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση $\sum\limits_{j=1}^{k} jx_j=n-i$.

Αξίζει να σημειωθεί ότι στην περίπτωση συστήματος ανεξάρτητων συνιστωσών με όχι κατ'ανάγκη ίση αξιοπιστία συνιστωσών, η αξιοπιστία ενός κυκλικού συνεχόμενου k-από-τα-n συστήματος αποτυχίας μπορεί να υπολογισθεί με την μέθοδο της εμβάπτισης σε Μαρκοβιανή αλυσίδα από τη σχέση

$$R_C(p;k,n)=P\left(\tilde{N}_{n,k}^{C}=0\right)=\sum_{i=0}^{k-1}\alpha_i\beta_i$$

όπου $\tilde{N}_{n,k}^{C}$ είναι η τυχαία μεταβλητή του αριθμού των μη επικαλυπτόμενων ροών αποτυχιών μήκους k και τα α_i, β_i είναι όπως στη σχέση (1.3.2) με εναλλαγή των p και q.

Παράδειγμα: Δίνεται κυκλικό σύστημα από 8 ανεξάρτητες συνιστώσες με πιθανότητα επιτυχίας $p=\frac{1}{3}$ και πιθανότητα αποτυχίας $q=\frac{2}{3}$. Θα υπολογίσουμε την αξιοπιστία ενός κυκλικού συνεχόμενου 3-από-τα-8 συστήματος αποτυχίας.

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 9 έχουμε

$$R_C\left(\frac{1}{3};3,8\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^2\sum_{i=0}^{3-1}(i+1)\left(\frac{2}{3}\right)^i R_L\left(\frac{1}{3};3,8-i-2\right)$$

$$=\left(\frac{1}{3}\right)^2 R_L\left(\frac{1}{3};3,6\right)+2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)R_L\left(\frac{1}{3};3,5\right)+3\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2 R_L\left(\frac{1}{3};3,4\right) \qquad (2)$$

Υπολογισμός $R_L\left(\frac{1}{3};3,6\right)=\sum\limits_{i=0}^{2}\sum\limits_{x_1,x_2,x_3}\binom{x_1+x_2+x_3}{x_1,x_2,x_3}\left(\frac{2}{3}\right)^6\left(\frac{1/3}{2/3}\right)^{x_1+x_2+x_{3k}}$

όπου το άθροισμα $\sum\limits_{x_1,x_2,x_3}$ είναι σε όλους τους μη αρνητικούς ακεραίους x_1,x_2,x_3 οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση $x_1+2x_2+3x_3=6-i$.

- για $i=0$

$x_1+2x_2+3x_3=6$

6	0	0
4	1	0
3	0	1
2	2	0
1	1	1
0	3	0
0	0	2

- για $i=1$

$x_1+2x_2+3x_3=5$

5	0	0
3	1	0
2	0	1
1	2	0
0	1	1

- για $i=2$

$x_1+2x_2+3x_3=4$

4	0	0
2	1	0
1	0	1
0	2	0

Άρα $$R_L\left(\frac{1}{3};3,6\right)=\left(\frac{2}{3}\right)^6\left\{\binom{6+0+0}{6,0,0}(0{,}5)^6+\binom{4+1+0}{4,1,0}(0{,}5)^5+\binom{3+0+1}{3,0,1}(0{,}5)^4\right.$$

$$+\binom{2+2+0}{2,2,0}(0{,}5)^4+\binom{1+1+1}{1,1,1}(0{,}5)^3+\binom{0+3+0}{0,3,0}(0{,}5)^3$$

$$+\binom{0+0+2}{0,0,2}(0{,}5)^2+\binom{5+0+0}{5,0,0}(0{,}5)^5+\binom{3+1+0}{3,1,0}(0{,}5)^4$$

$$+\binom{2+0+1}{2,0,1}(0{,}5)^3+\binom{1+2+0}{1,2,0}(0{,}5)^3+\binom{1+1+0}{1,1,0}(0{,}5)^2$$

$$+\binom{4+0+0}{4,0,0}(0{,}5)^4+\binom{2+1+0}{2,1,0}(0{,}5)^3+\binom{1+0+1}{1,0,1}(0{,}5)^2$$

$$\left.+\binom{0+2+0}{0,2,0}(0{,}5)^2\right\}$$

$$\cong 0{,}4074\,.$$

Υπολογισμός $R_L\left(\frac{1}{3};3{,}5\right)=\sum_{i=0}^{2}\sum_{x_1,x_2,x_3}\binom{x_1+x_2+x_3}{x_1,x_2,x_3}\left(\frac{2}{3}\right)^5\left(\frac{1/3}{2/3}\right)^{x_1+x_2+x_3}$

όπου το άθροισμα $\sum_{x_1,x_2,x_3}$ είναι σε όλους τους μη αρνητικούς ακεραίους x_1, x_2, x_3 οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση $x_1+2x_2+3x_3=5-i$.

- για $i=0$

$x_1+2x_2+3x_3=5$

5	0	0
3	1	0
2	0	1
1	2	0
0	1	1

- για $i=1$

$x_1+2x_2+3x_3=4$

4	0	0
2	1	0
1	0	1
0	2	0

- για $i=2$

$x_1+2x_2+3x_3=3$

3	0	0
1	1	0
0	0	1

Άρα $R_L\left(\frac{1}{3};3,5\right)=\left(\frac{2}{3}\right)^5\left\{\binom{5+0+0}{5,0,0}(0,5)^5+\binom{3+1+0}{3,1,0}(0,5)^4+\binom{2+0+1}{2,0,1}(0,5)^3\right.$

$$+\binom{1+2+0}{1,2,0}(0,5)^3+\binom{1+1+0}{1,1,0}(0,5)^2+\binom{4+0+0}{4,0,0}(0,5)^4$$

$$+\binom{2+1+0}{2,1,0}(0,5)^3+\binom{1+0+1}{1,0,1}(0,5)^2+\binom{0+2+0}{0,2,0}(0,5)^2$$

$$\left.+\binom{3+0+0}{3,0,0}(0,5)^3+\binom{1+1+0}{1,1,0}(0,5)^2+\binom{0+0+1}{0,0,1}(0,5)^1\right\}$$

$\cong 0,5062$.

Υπολογισμός $R_L\left(\frac{1}{3};3,4\right)=\sum_{i=0}^{2}\sum_{x_1,x_2,x_3}\binom{x_1+x_2+x_3}{x_1,x_2,x_3}\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1/3}{2/3}\right)^{x_1+x_2+x_3}$

όπου το άθροισμα $\sum_{x_1,x_2,x_3}$ είναι σε όλους τους μη αρνητικούς ακεραίους x_1,x_2,x_3 οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση $x_1+2x_2+3x_3=4-i$.

- για $i=0$

$x_1+2x_2+3x_3=4$

4	0	0
2	1	0
1	0	1
0	2	0

- για $i=1$

$x_1+2x_2+3x_3=3$

3	0	0
1	1	0
0	0	1

- για $i=2$

$x_1+2x_2+3x_3=2$

2	0	0
0	1	0

Άρα $R_L\left(\frac{1}{3};3,4\right)=\left(\frac{2}{3}\right)^4\left\{\binom{4+0+0}{4,0,0}(0,5)^4+\binom{2+1+0}{2,1,0}(0,5)^3+\binom{1+0+1}{1,0,1}(0,5)^2\right.$

$$+\binom{0+2+0}{0,2,0}(0,5)^2+\binom{3+0+0}{3,0,0}(0,5)^3+\binom{1+1+0}{1,1,0}(0,5)^2$$

$$\left.+\binom{0+0+1}{0,0,1}(0,5)^1+\binom{2+0+0}{2,0,0}(0,5)^2+\binom{0+1+0}{0,1,0}(0,5)^1\right\}$$

$\cong 0,6049$.

Τελικά με αντικατάσταση στη σχέση (2) έχουμε

$$R_C\left(\frac{1}{3};3,8\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^2 0,4074+2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)0,5061+3\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2 0,6049\cong 0,209876544.$$

Μια άλλη έκφραση η οποία συνδέει την αξιοπιστία κυκλικού συνεχόμενου k-από-τα-n με την αξιοπιστία άλλων κυκλικών και γραμμικών υποσυστημάτων δόθηκε από τους Antonopoulou, Papastavridis (1987).

Θεώρημα 10 (Antonopoulou, Papastavridis 1987)**.** Η αξιοπιστία κυκλικού συνεχόμενου k-από-τα-n συστήματος αποτυχίας που αποτελείται από n ανεξάρτητες συνιστώσες, δίνεται από

$$R_C(k,n)=p_nR_L(k,n-1)+q_nR_C(k,n-1)-\sum_{i=0}^{k-1}\left(p_{i+1}\prod_{j=1}^{i}q_j\right)\left(p_{n-k+i}\prod_{j=n-k+i-1}^{n}q_j\right)R_L(k,(i+2,n-k+i-1)).$$

Απόδειξη

Για την κατανόηση της παραπάνω σχέσης, σημειώνουμε ότι το γεγονός ότι ένα κυκλικό συνεχόμενο σύστημα αποτελούμενο από n συνιστώσες να λειτουργεί μπορεί να διασπαστεί στα γεγονότα

1. Η n-οστή συνιστώσα του λειτουργεί και το γραμμικό υποσύστημα των $n-1$ συνιστωσών να λειτουργεί
2. Η n-οστή συνιστώσα του αποτυγχάνει και το κυκλικό υποσύστημα των $n-1$ συνιστωσών να λειτουργεί, εκτός των περιπτώσεων όπου ακριβώς k συνεχόμενες συνιστώσες περιέχουν τη

συνιστώσα n αποτυγχάνουν και οι υπόλοιπες συνιστώσες να περιέχονται σε γραμμικό υποσύστημα που να λειτουργεί.

Εάν οι συνιστώσες είναι ανεξάρτητες και ισόνομες με πιθανότητα επιτυχίας $p_i = p$ και πιθανότητα αποτυχίας $q_i = q$, τότε

$$R_C(p;k,n) = pR_L(p;k,n-1) + qR_C(p;k,n-1) - kp^2q^kR_L(p;k,n-k-2).$$

Παράδειγμα: Δίνεται κυκλικό σύστημα από 8 ανεξάρτητες συνιστώσες με πιθανότητα επιτυχίας $p = \dfrac{1}{3}$ και πιθανότητα αποτυχίας $q = \dfrac{2}{3}$. Θα υπολογίσουμε την αξιοπιστία ενός κυκλικού συνεχόμενου 3-από-τα-8 συστήματος αποτυχίας.

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 10 έχουμε

$$R_C\left(\frac{1}{3};3,8\right) = \frac{1}{3}R_L\left(\frac{1}{3};3,7\right) + \frac{2}{3}R_C\left(\frac{1}{3};3,7\right) - 3\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3 R_L\left(\frac{1}{3};3,3\right) \qquad (3)$$

Υπολογισμός $R_L\left(\dfrac{1}{3};3,7\right) = \sum_{i=0}^{2} \sum_{x_1,x_2,x_3} \binom{x_1+x_2+x_3}{x_1,x_2,x_3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^7\left(\dfrac{1/3}{2/3}\right)^{x_1+x_2+x_3}$

όπου το άθροισμα $\sum_{x_1,x_2,x_3}$ είναι σε όλους τους μη αρνητικούς ακεραίους x_1, x_2, x_3 οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 - i$.

- για $i = 0$

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7$

7	0	0
5	1	0
4	0	1
3	2	0
1	3	0
2	1	1
1	0	2
0	2	1

- για $i = 1$

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$

6	0	0
4	1	0
3	0	1
2	2	0

1	1	1
0	3	0
0	0	2

- για $i = 2$

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5$

5	0	0
3	1	0
2	0	1
1	2	0
0	1	1

Άρα $R_L\left(\frac{1}{3};3,7\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^7 \left\{ \binom{7+0+0}{7,0,0}(0{,}5)^7 + \binom{5+1+0}{5,1,0}(0{,}5)^6 + \binom{4+0+1}{4,0,1}(0{,}5)^5 \right.$

$$+\binom{3+2+0}{3,2,0}(0{,}5)^5 + \binom{2+1+1}{2,1,1}(0{,}5)^4 + \binom{1+3+0}{1,3,0}(0{,}5)^4$$

$$+\binom{1+0+2}{1,0,2}(0{,}5)^3 + \binom{0+2+1}{0,2,1}(0{,}5)^3 + \binom{6+0+0}{6,0,0}(0{,}5)^6$$

$$+\binom{4+1+0}{4,1,0}(0{,}5)^5 + \binom{3+0+1}{3,0,1}(0{,}5)^4 + \binom{2+2+0}{2,2,0}(0{,}5)^4$$

$$+\binom{1+1+1}{1,1,1}(0{,}5)^3 + \binom{0+3+0}{0,3,0}(0{,}5)^3 + \binom{0+0+2}{0,0,2}(0{,}5)^2$$

$$+\binom{5+0+0}{5,0,0}(0{,}5)^5 + \binom{3+1+0}{3,1,0}(0{,}5)^4 + \binom{2+0+1}{2,0,1}(0{,}5)^3$$

$$\left. +\binom{1+2+0}{1,2,0}(0{,}5)^3 + \binom{0+1+1}{0,1,1}(0{,}5)^2 \right\}$$

$\cong 0{,}3379$

Υπολογισμός $R_C\left(\frac{1}{3};3,7\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{7-1}\sum_{i=1}^{3} i\sum_{1}\binom{x_1+x_2+x_3}{x_1,x_2,x_3}\left(\frac{1/3}{2/3}\right)^{x_1+x_2+x_3}$

όπου το άθροισμα $\sum_{x_1,x_2,x_3}$ είναι σε όλους τους μη αρνητικούς ακεραίους x_1,x_2,x_3 οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση $x_1+2x_2+3x_3=7-i$.

- για $i=1$

$x_1+2x_2+3x_3=6$

6	0	0
4	1	0
3	0	1
2	2	0
1	1	1
0	3	0
0	0	2

- για $i=2$

$x_1+2x_2+3x_3=5$

5	0	0
3	1	0
2	0	1
1	2	0
0	1	1

- για $i=3$

$x_1+2x_2+3x_3=4$

4	0	0
2	1	0
1	0	1
0	2	0

Άρα $R_C\left(\frac{1}{3};3,7\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{6}\left\{\binom{6+0+0}{6,0,0}(0,5)^6+\binom{4+1+0}{4,1,0}(0,5)^5+\binom{3+0+1}{3,0,1}(0,5)^4\right.$

$$+\binom{2+2+0}{2,2,0}(0,5)^4+\binom{1+1+1}{1,1,1}(0,5)^3+\binom{0+3+0}{0,3,0}(0,5)^3$$

$$+\binom{0+0+2}{0,0,2}(0,5)^2+2\cdot\binom{5+0+0}{5,0,0}(0,5)^5+2\cdot\binom{3+1+0}{3,1,0}(0,5)^4$$

$$+2\cdot\binom{2+0+1}{2,0,1}(0,5)^3+2\cdot\binom{1+2+0}{1,2,0}(0,5)^3+2\cdot\binom{0+1+1}{0,1,1}(0,5)^2$$

$$+3\cdot\binom{4+0+0}{4,0,0}(0,5)^4+3\cdot\binom{2+1+0}{2,1,0}(0,5)^3+3\cdot\binom{1+0+1}{1,0,1}(0,5)^2$$

$$\left.+3\cdot\binom{0+2+0}{0,2,0}(0,5)^2\quad\right\}$$

$$\cong 0,2501\,.$$

Υπολογισμός $R_L\left(\frac{1}{3};3,3\right)=\sum_{i=0}^{2}\sum_{x_1,x_2,x_3}\binom{x_1+x_2+x_3}{x_1,x_2,x_3}\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1/3}{2/3}\right)^{x_1+x_2+x_3}$

όπου το άθροισμα $\sum_{x_1,x_2,x_3}$ είναι σε όλους τους μη αρνητικούς ακεραίους x_1,x_2,x_3 οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση $x_1+2x_2+3x_3=3-i$.

- για $i=0$

$x_1+2x_2+3x_3=3$

3	0	0
1	1	0
0	0	1

- για $i=1$

$x_1+2x_2+3x_3=2$

2	0	0
0	1	0

- για $i=2$

$x_1+2x_2+3x_3=1$

1	0	0

Άρα $R_L\left(\frac{1}{3};3,3\right)=\left(\frac{2}{3}\right)^3\left\{\binom{3+0+0}{3,0,0}(0,5)^3+\binom{1+1+0}{1,1,0}(0,5)^2+\binom{0+0+1}{0,0,1}(0,5)^1\right.$

$$\left.+\binom{2+0+0}{2,0,0}(0,5)^2+\binom{0+1+0}{0,1,0}(0,5)^1+\binom{1+0+0}{1,0,0}(0,5)^1\right\}$$

$$\cong 0,7037\,.$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (3) έχουμε

$$R_C\left(\frac{1}{3};3,8\right)=\frac{1}{3}\cdot 0,3379+\frac{2}{3}\cdot 0,2501-3\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot 0,7037\cong 0,209876544\,.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^{Ο}

ΑΞΙΟΠΙΣΤΙΑ ΚΥΚΛΙΚΟΥ m-ΣΥΝΕΧΟΜΕΝΟΥ k-ΑΠΟ-ΤΑ-n ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΑΠΟΤΥΧΙΑΣ

Κυκλικό m-συνεχόμενο-k-από-τα-n σύστημα αποτυχίας ονομάζεται το κυκλικό σύστημα που αποτελείται από n συνιστώσες και το οποίο παύει να λειτουργεί αν και μόνο αν εμφανιστούν m μη επικαλυπτόμενες ροές από k συνεχόμενες αποτυχημένες συνιστώσες του.

4.1 Αξιοπιστία κυκλικού m-συνεχόμενου k-από-τα-n συστήματος αποτυχίας με χρήση διωνυμικών συντελεστών.

Έχοντας την κατανομή του αριθμού των μη επικαλυπτόμενων ροών επιτυχιών μήκους k σε n ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli $p_n(x) = P(N_{n,k}^C = x)$ και εναλλάσοντας τα p με τα q, παίρνουμε την κατανομή του αριθμού των μη επικαλυπτόμενων ροών αποτυχιών μήκους k σε n ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli και την συμβολίζουμε με $\tilde{N}_{n,k}^C$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 3 η συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής $\tilde{N}_{n,k}^C$ δίνεται από τη σχέση

$$P(\tilde{N}_{n,k}^C = x) = q^n \left\{ \sum_{r=1}^{n-kx} \binom{r+x-1}{x} N_C(n-r-kx, r, k) \left(\frac{p}{q}\right)^r + \delta_{x,\left[\frac{n}{k}\right]} \right\}.$$

Η αξιοπιστία ενός κυκλικού m-συνεχόμενου k-από-τα-n συστήματος αποτυχίας συμβολίζεται με $R_C(p;k,m,n)$ και αρκεί να αθροίσουμε την παραπάνω πιθανότητα για τιμές του x από 0 εως $m-1$. Άρα

$$\begin{aligned} R_C(p;k,m,n) &= \sum_{x=0}^{m-1} P(\tilde{N}_{n,k}^C = x) \\ &= \sum_{x=0}^{m-1} \left\{ q^n \left\{ \sum_{r=1}^{n-kx} \binom{r+x-1}{x} N_C(n-r-kx, r, k) \left(\frac{p}{q}\right)^r + \delta_{x,\left[\frac{n}{k}\right]} \right\} \right\} \\ &= q^n \sum_{x=0}^{m-1} \left\{ \sum_{r=1}^{n-kx} \binom{r+x-1}{x} N_C(n-r-kx, r, k) \left(\frac{p}{q}\right)^r + \delta_{x,\left[\frac{n}{k}\right]} \right\} \qquad (4.1.1) \end{aligned}$$

(Charalambides 1994)

Μια παρόμοια έκφραση της ίδιας αξιοπιστίας έχει δοθεί από τους Hwang, Papastavridis 1991.

Επίσης μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι
$R_C(p;k,m,n) = P\left(\tilde{N}_{n,k}^C \le m-1\right) = 1 - P\left(\tilde{N}_{n,k}^C \ge m\right)$, άρα

$$R_C(p;k,m,n)=\begin{cases}\sum_{x=0}^{m-1} P(\tilde{N}_{n,k}^{C}=x), \alpha\nu & m<\frac{\left[n/k\right]+1}{2}\\ 1-\sum_{x=m}^{\left[\frac{n}{k}\right]} P\left(\tilde{N}_{n,k}^{C}=x\right), \alpha\nu & m\geq\frac{\left[n/k\right]+1}{2}\end{cases}$$

Στην περίπτωση συστήματος ανεξάρτητων συνιστωσών με όχι κατ'ανάγκη ίση αξιοπιστία συνιστωσών, η αξιοπιστία ενός κυκλικού m-συνεχόμενου k-από-τα-n συστήματος αποτυχίας μπορεί να υπολογισθεί με την μέθοδο της εμβάπτισης σε Μαρκοβιανή αλυσίδα από τη σχέση

$$\begin{aligned}R_C(p;k,m,n)&=\sum_{x=0}^{m-1} P\left(\tilde{N}_{n,k}^{C}=x\right)\\ &=\sum_{x=0}^{m-1}\left\{\sum_{i=0}^{\min\{kx+k-1,n-1\}}\alpha_i\beta_i+\delta_{x,\left[\frac{n}{k}\right]}\prod_{j=0}^{n} q_j\right\}\end{aligned}$$

όπου τα α_i, β_i είναι όπως στο Θεώρημα 2 με εναλλαγή των p και q.

Παράδειγμα: Δίνεται κυκλικό σύστημα από 8 ανεξάρτητες συνιστώσες. Η πιθανότητα επιτυχίας κάθε συνιστώσας είναι $p=0{,}8$, ενώ η πιθανότητα αποτυχίας είναι $q=1-p=1-0{,}8=0{,}2$. Θα υπολογίσουμε την αξιοπιστία του κυκλικού 3-συνεχόμενου 2-από-τα-8 συστήματος αποτυχίας.

Σύμφωνα με τη σχέση (4.1.1) για $n=8$, $k=2$, $m=3$, $p=0{,}8$ και $q=0{,}2$ έχουμε

$$R_C(0{,}8;2{,}3{,}8)=0{,}2^8\sum_{x=0}^{2}\left\{\sum_{r=1}^{8-2\cdot x}\binom{r+x-1}{x}N_C(8-r-2\cdot x,r,2)\left(\frac{0{,}8}{0{,}2}\right)^r+\delta_{x,\left[\frac{8}{2}\right]}\right\}$$

$$=0{,}2^8\left\{\sum_{r=1}^{8}\binom{r-1}{0}N_C(8-r,r,2)\cdot 4^r+\sum_{r=1}^{6}\binom{r}{1}N_C(6-r,r,2)\cdot 4^r\right.$$

$$\left.+\sum_{r=1}^{4}\binom{r+1}{2}N_C(4-r,r,2)\cdot 4^r\right\}$$

$$=0{,}2^8\left\{N_C(7{,}1{,}2)\cdot 4+N_C(6{,}2{,}2)\cdot 4^2+N_C(5{,}3{,}2)\cdot 4^3+N_C(4{,}4{,}2)\cdot 4^4\right.$$

$$+N_C(3{,}5{,}2)\cdot 4^5+N_C(2{,}6{,}2)\cdot 4^6+N_C(1{,}7{,}2)\cdot 4^7+N_C(0{,}8{,}2)\cdot 4^8$$

$$+N_C(5{,}1{,}2)\cdot 4+2\cdot N_C(4{,}2{,}2)\cdot 4^2+3\cdot N_C(3{,}3{,}2)\cdot 4^3$$

$$+4\cdot N_C(2,4,2)\cdot 4^4+5\cdot N_C(1,5,2)\cdot 4^5+6\cdot N_C(0,6,2)\cdot 4^6$$

$$+N_C(3,1,2)\cdot 4+\binom{3}{2}N_C(2,2,2)\cdot 4^2+\binom{4}{2}N_C(1,3,2)\cdot 4^3$$

$$\left.+\binom{5}{2}N_C(0,4,2)\cdot 4^4\right\} \qquad (1)$$

Θα υπολογίσουμε τις κυκλικές διατάξεις

$$N_C(7,1,2)=\frac{8}{1}\sum_{j=0}^{1}(-1)^j\binom{1}{j}\binom{8-2\cdot 0-2j-1}{1-1}=8\left[\binom{1}{0}\binom{7}{0}-\binom{1}{1}\binom{5}{0}\right]=0$$

$$N_C(6,2,2)=\frac{8}{2}\sum_{j=0}^{2}(-1)^j\binom{2}{j}\binom{8-2\cdot 0-2j-1}{2-1}=4\left[\binom{2}{0}\binom{7}{1}-\binom{2}{1}\binom{5}{1}+\binom{2}{2}\binom{3}{1}\right]=0$$

$$N_C(5,3,2)=\frac{8}{3}\sum_{j=0}^{3}(-1)^j\binom{3}{j}\binom{8-2\cdot 0-2j-1}{3-1}=\frac{8}{3}\left[\binom{3}{0}\binom{7}{2}-\binom{3}{1}\binom{5}{2}+\binom{3}{2}\binom{3}{2}-\binom{3}{3}\binom{1}{2}\right]=0$$

$$N_C(4,4,2)=\frac{8}{4}\sum_{j=0}^{4}(-1)^j\binom{4}{j}\binom{8-2\cdot 0-2j-1}{4-1}=2\left[\binom{4}{0}\binom{7}{3}-\binom{4}{1}\binom{5}{3}+\binom{4}{2}\binom{3}{3}\right]=2$$

$$N_C(3,5,2)=\frac{8}{5}\sum_{j=0}^{5}(-1)^j\binom{5}{j}\binom{8-2\cdot 0-2j-1}{5-1}=\frac{8}{5}\left[\binom{5}{0}\binom{7}{4}-\binom{5}{1}\binom{5}{4}+\binom{5}{2}\binom{3}{4}\right]=16$$

$$N_C(2,6,2)=\frac{8}{6}\sum_{j=0}^{6}(-1)^j\binom{6}{j}\binom{8-2\cdot 0-2j-1}{6-1}=\frac{4}{3}\left[\binom{6}{0}\binom{7}{5}-\binom{6}{1}\binom{5}{5}\right]=20$$

$$N_C(1,7,2)=\frac{8}{7}\sum_{j=0}^{7}(-1)^j\binom{7}{j}\binom{8-2\cdot 0-2j-1}{7-1}=\frac{8}{7}\left[\binom{7}{0}\binom{7}{6}-\binom{7}{1}\binom{5}{6}\right]=8$$

$$N_C(0,8,2)=\frac{8}{8}\sum_{j=0}^{8}(-1)^j\binom{8}{j}\binom{8-2\cdot 0-2j-1}{8-1}=\left[\binom{8}{0}\binom{7}{7}-\binom{8}{1}\binom{5}{7}\right]=1$$

$$N_C(5,1,2)=\frac{8}{1}\sum_{j=0}^{1}(-1)^j\binom{1}{j}\binom{8-2\cdot 1-2j-1}{1-1}=8\left[\binom{1}{0}\binom{5}{0}-\binom{1}{1}\binom{3}{0}\right]=0$$

$$N_C(4,2,2)=\frac{8}{2}\sum_{j=0}^{2}(-1)^j\binom{2}{j}\binom{8-2\cdot 1-2j-1}{2-1}=4\left[\binom{2}{0}\binom{5}{1}-\binom{2}{1}\binom{3}{1}+\binom{2}{2}\binom{1}{1}\right]=0$$

$$N_C(3,3,2)=\frac{8}{3}\sum_{j=0}^{3}(-1)^j\binom{3}{j}\binom{8-2\cdot 1-2j-1}{3-1}=\frac{8}{3}\left[\binom{3}{0}\binom{5}{2}-\binom{3}{1}\binom{3}{2}+\binom{3}{2}\binom{1}{2}\right]=\frac{8}{3}$$

$$N_C(2,4,2)=\frac{8}{4}\sum_{j=0}^{4}(-1)^j\binom{4}{j}\binom{8-2\cdot 1-2j-1}{4-1}=2\left[\binom{4}{0}\binom{5}{3}-\binom{4}{1}\binom{3}{3}\right]=12$$

$$N_C(1,5,2)=\frac{8}{5}\sum_{j=0}^{5}(-1)^j\binom{5}{j}\binom{8-2\cdot 1-2j-1}{5-1}=\frac{8}{5}\left[\binom{5}{0}\binom{5}{4}-\binom{5}{1}\binom{3}{4}\right]=8$$

$$N_C(0,6,2)=\frac{8}{6}\sum_{j=0}^{6}(-1)^j\binom{6}{j}\binom{8-2\cdot 1-2j-1}{6-1}=\frac{4}{3}\left[\binom{6}{0}\binom{5}{5}-\binom{6}{1}\binom{3}{5}\right]=\frac{4}{3}$$

$$N_C(3,1,2)=\frac{8}{1}\sum_{j=0}^{1}(-1)^j\binom{1}{j}\binom{8-2\cdot 2-2j-1}{1-1}=8\left[\binom{1}{0}\binom{3}{0}-\binom{1}{1}\binom{1}{0}\right]=0$$

$$N_C(2,2,2)=\frac{8}{2}\sum_{j=0}^{2}(-1)^j\binom{2}{j}\binom{8-2\cdot 2-2j-1}{2-1}=4\left[\binom{2}{0}\binom{3}{1}-\binom{2}{1}\binom{1}{1}\right]=4$$

$$N_C(1,3,2)=\frac{8}{3}\sum_{j=0}^{3}(-1)^j\binom{3}{j}\binom{8-2\cdot 2-2j-1}{3-1}=\frac{8}{3}\left[\binom{3}{0}\binom{3}{2}-\binom{3}{1}\binom{1}{2}\right]=8$$

$$N_C(0,4,2)=\frac{8}{4}\sum_{j=0}^{4}(-1)^j\binom{4}{j}\binom{8-2\cdot 2-2j-1}{4-1}=2\left[\binom{4}{0}\binom{3}{3}-\binom{4}{1}\binom{1}{3}\right]=2$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (1) έχουμε

$$\begin{aligned}R_C(0,8;2,3,8)=0{,}2^8\Big\{\ & 0\cdot 4+0\cdot 4^2+0\cdot 4^3+2\cdot 4^4+16\cdot 4^5+20\cdot 4^6+8\cdot 4^7+1\cdot 4^8+0\cdot 4\\ & +2\cdot 0\cdot 4^2+3\cdot\frac{8}{3}\cdot 4^3+4\cdot 12\cdot 4^4+5\cdot 8\cdot 4^5+6\cdot\frac{4}{3}\cdot 4^6+0\cdot 4\\ & +3\cdot 4\cdot 4^2+6\cdot 8\cdot 4^3+10\cdot 2\cdot 4^4\ \Big\}\\ \cong\ & 0{,}99926016\,.\end{aligned}$$

4.2 Αξιοπιστία κυκλικού m-συνεχόμενου k-από-τα-n συστήματος αποτυχίας με χρήση πολυωνυμικών συντελεστών.

Θεώρημα 11 (Makri, Philippou 1995)**.** Η αξιοπιστία κυκλικού m-συνεχόμενου k-από-τα-n συστήματος αποτυχίας δίνεται από τον τύπο

$$R_C(p;k,m,n)=\sum_{x=0}^{m-1}\Bigg[pq^{n-1}\sum_{i=1}^{k} i\sum\nolimits_1 \binom{x_1+\ldots+x_k+x}{x_1,\ldots,x_k,x}\left(\frac{p}{q}\right)^{x_1+\ldots x_k} + kpq^{n-1}\sum_{i=1}^{k}\sum\nolimits_1 \frac{x}{x_1+\ldots+x_k+1}\binom{x_1+\ldots+x_k+x}{x_1,\ldots x_k,x}\left(\frac{p}{q}\right)^{x_1+\ldots+x_k} + q^n\delta_{x,\left[\frac{n}{k}\right]}\Bigg].$$

Απόδειξη

Σύμφωνα με το Θεώρημα 6 των Makri, Philippou (1994) , έχουμε δείξει ότι

$$P\left(N_{n,k}^{C}=x\right)=qp^{n-1}\sum_{i=1}^{k} i\sum\nolimits_1 \binom{x_1+\ldots+x_k+x}{x_1,\ldots,x_k,x}\left(\frac{q}{p}\right)^{x_1+\ldots+x_k} + kqp^{n-1}\sum_{i=1}^{k}\sum\nolimits_1 \frac{x}{x_1+\ldots x_k+1}\binom{x_1+\ldots+x_k+x}{x_1,\ldots,x_k,x}\left(\frac{q}{p}\right)^{x_1+\ldots+x_k} + p^n\delta_{x,\left[\frac{n}{k}\right]}$$

Εάν εναλλάξουμε τα p και q και αθροίσουμε για όλες τις τιμές του x από 0 εως $m-1$, τότε προκύπτει η αξιοπιστία του κυκλικού m-συνεχόμενου k-από-τα-n συστήματος αποτυχίας. Άρα

$$R_C(p;k,m,n)=\sum_{x=0}^{m-1}\Bigg[pq^{n-1}\sum_{i=1}^{k} i\sum\nolimits_1 \binom{x_1+\ldots+x_k+x}{x_1,\ldots,x_k,x}\left(\frac{p}{q}\right)^{x_1+\ldots x_k} + kpq^{n-1}\sum_{i=1}^{k}\sum\nolimits_1 \frac{x}{x_1+\ldots+x_k+1}\binom{x_1+\ldots+x_k+x}{x_1,\ldots x_k,x}\left(\frac{p}{q}\right)^{x_1+\ldots+x_k} + q^n\delta_{x,\left[\frac{n}{k}\right]}\Bigg].$$

όπου δ είναι η συνάρτηση δέλτα του Kronecker και το άθροισμα $\sum_1 = \sum_{x_1,\ldots,x_k}$ είναι σε όλους τους μη αρνητικούς ακεραίους $x_1,\ldots,x_k$ οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση $\sum_{j=1}^{k} jx_j = n-i-kx$.

Παράδειγμα: Δίνεται κυκλικό σύστημα από 8 ανεξάρτητες συνιστώσες. Η πιθανότητα επιτυχίας κάθε συνιστώσας είναι $p = 0{,}8$, ενώ η πιθανότητα αποτυχίας είναι $q = 1 - p = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$. Θα υπολογίσουμε την αξιοπιστία του κυκλικού 3-συνεχόμενου 2-από-τα-8 συστήματος αποτυχίας.

Σύμφωνα με το Θεώρημα 11 έχουμε

$$
\begin{aligned}
R_C(0{,}8;2{,}3{,}8) = \sum_{x=0}^{2} \Bigg[& 0{,}8 \cdot 0{,}2^7 \sum_{i=1}^{2} i \sum\nolimits_1 \binom{x_1+\ldots+x_k+x}{x_1,\ldots,x_k,x} \left(\frac{0{,}8}{0{,}2}\right)^{x_1+\ldots x_k} \\
& + 2\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2^7 \sum_{i=1}^{2} \sum\nolimits_1 \frac{x}{x_1+\ldots+x_k+1} \binom{x_1+\ldots+x_k+x}{x_1,\ldots x_k,x} \left(\frac{0{,}8}{0{,}2}\right)^{x_1+\ldots+x_k} \\
& + 0{,}2^8 \delta_{x,\left[\frac{8}{2}\right]} \Bigg] \\
= 0{,}8\cdot 0{,}2^7 \sum_{i=1}^{2} i \sum\nolimits_1 & \binom{x_1+x_2}{x_1,x_2} \cdot 4^{x_1+x_2} + 0{,}8\cdot 0{,}2^7 \sum_{i=1}^{2} i \sum\nolimits_1 \binom{x_1+x_2+1}{x_1,x_2,1} \cdot 4^{x_1+x_2} \\
& + 2\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2^7 \sum_{i=1}^{2} \sum\nolimits_1 \frac{1}{x_1+x_2+1} \binom{x_1+x_2+1}{x_1,x_2,1} 4^{x_1+x_2} \\
& + 0{,}8\cdot 0{,}2^7 \sum_{i=1}^{2} i \sum\nolimits_1 \binom{x_1+x_2+2}{x_1,x_2,2} \cdot 4^{x_1+x_2} \\
& + 2\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2^7 \sum_{i=1}^{2} \sum\nolimits_1 \frac{1}{x_1+x_2+1} \binom{x_1+x_2+2}{x_1,x_2,2} 4^{x_1+x_2} + 0{,}2^8 \qquad (2)
\end{aligned}
$$

όπου το άθροισμα $\sum_1$ είναι σε όλους τους μη αρνητικούς ακεραίους x_1, x_2 οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση $x_1 + 2x_2 = 8 - i - 2x$.

Για ευκολία στους υπολογισμούς, θέτουμε $A = 0{,}8\cdot 0{,}2^7 \sum_{i=1}^{2} i \sum_1 \binom{x_1+x_2}{x_1,x_2} \cdot 4^{x_1+x_2}$,

$$B = 0{,}8\cdot 0{,}2^7 \sum_{i=1}^{2} i \sum\nolimits_1 \binom{x_1+x_2+1}{x_1,x_2,1} \cdot 4^{x_1+x_2},$$

$$C = 2\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2^7 \sum_{i=1}^{2} \sum\nolimits_1 \frac{1}{x_1+x_2+1} \binom{x_1+x_2+1}{x_1,x_2,1} 4^{x_1+x_2},$$

$$D = 0{,}8 \cdot 0{,}2^7 \sum_{i=1}^{2} i \sum\nolimits_1 \binom{x_1 + x_2 + 2}{x_1, x_2, 2} \cdot 4^{x_1+x_2} \text{ και}$$

$$E = 2 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2^7 \sum_{i=1}^{2} \sum\nolimits_1 \frac{1}{x_1 + x_2 + 1} \binom{x_1 + x_2 + 2}{x_1, x_2, 2} 4^{x_1+x_2} \,.$$

Υπολογισμός του A

Για $x = 0$ έχουμε $x_1 + 2x_2 = 8 - i$

- για $i = 1$

$x_1 + 2x_2 = 7$

7	0
5	1
3	2
1	3

- για $i = 2$

$x_1 + 2x_2 = 6$

6	0
4	1
2	2
0	3

Άρα $$A = 0{,}8 \cdot 0{,}2^7 \left\{ \binom{7+0}{7,0} \cdot 4^7 + \binom{5+1}{5,1} \cdot 4^6 + \binom{3+2}{3,2} \cdot 4^5 + \binom{1+3}{1,3} \cdot 4^4 \right.$$

$$\left. + 2 \cdot \binom{6+0}{6,0} \cdot 4^6 + 2 \cdot \binom{4+1}{4,1} \cdot 4^5 + 2 \cdot \binom{2+2}{2,2} \cdot 4^4 + 2 \cdot \binom{0+3}{0,3} \cdot 4^3 \right\}$$

$$\cong 0{,}75628544 \,.$$

Υπολογισμός των B και C

Για $x = 1$ έχουμε $x_1 + 2x_2 = 8 - i - 2 \cdot 1 \Rightarrow x_1 + 2x_2 = 6 - i$

- για $i = 1$

$x_1 + 2x_2 = 5$

5	0
3	1
1	2

- για $i=2$

$x_1+2x_2=4$

4	0
2	1
0	2

$$\text{Άρα } B=0{,}8\cdot 0{,}2^7\left\{\binom{5+0+1}{5,0,1}\cdot 4^5+\binom{3+1+1}{3,1,1}\cdot 4^4+\binom{1+2+1}{1,2,1}\cdot 4^3\right.$$
$$\left.+2\cdot\binom{4+0+1}{4,0,1}\cdot 4^4+2\cdot\binom{2+1+1}{2,1,1}\cdot 4^3+2\cdot\binom{0+2+1}{0,2,1}\cdot 4^2\right\}$$
$$\cong 0{,}16613376\ ,$$

$$C=2\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2^7\left\{\frac{1}{5+0+1}\binom{5+0+1}{5,0,1}\cdot 4^5+\frac{1}{3+1+1}\binom{3+1+1}{3,1,1}\cdot 4^4\right.$$
$$+\frac{1}{1+2+1}\binom{1+2+1}{1,2,1}\cdot 4^3+\frac{1}{4+0+1}\binom{4+0+1}{4,0,1}\cdot 4^4$$
$$\left.+\frac{1}{2+1+1}\binom{2+1+1}{2,1,1}\cdot 4^3+\frac{1}{0+2+1}\binom{0+2+1}{0,2,1}\cdot 4^2\right\}$$
$$\cong 0{,}05537792.$$

Υπολογισμός των D και E

Για $x=2$ έχουμε $x_1+2x_2=8-i-2\cdot 2\Rightarrow x_1+2x_2=4-i$

- για $i=1$

$x_1+2x_2=3$

3	0
1	1

- για $i=2$

$x_1+2x_2=2$

2	0
0	1

$$\text{Άρα } D=0{,}8\cdot 0{,}2^7\left\{\binom{3+0+2}{3,0,2}\cdot 4^3+\binom{1+1+2}{1,1,2}\cdot 4^2+2\cdot\binom{2+0+2}{2,0,2}\cdot 4^2\right.$$

$$+2\cdot\binom{0+1+2}{0,1,2}\cdot 4^1 \Bigg\}$$

$$\cong 0{,}01073152\ ,$$

$$E = 2\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2^7\Bigg\{\ \frac{2}{3+0+1}\binom{3+0+2}{3,0,2}\cdot 4^3+\frac{2}{1+1+1}\binom{1+1+2}{1,1,2}\cdot 4^2$$

$$+\frac{2}{2+0+1}\binom{2+0+2}{2,0,2}\cdot 4^2+\frac{2}{0+1+1}\binom{0+1+2}{0,1,2}\cdot 4^1\ \Bigg\}$$

$$\cong 0{,}01073152\,.$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (2) των A, B, C, D, και E έχουμε

$$R_C(0{,}8;2{,}3{,}8) = A+B+C+D+E+0{,}2^8 \cong 0{,}99926016\,.$$

4.3 Αναδρομικές σχέσεις για τον υπολογισμό της αξιοπιστίας ενός κυκλικού m-συνεχόμενου k-από-τα-n συστήματος αποτυχίας.

Συμβολισμοί

n: το πλήθος των συνιστωσών του συστήματος,

s: το πλήθος των μη επικαλυπτόμενων ροών από k αποτυχημένες συνιστώσες,

$q_i(t)$, q_i, $1-p_i(t)$, p_i: πιθανότητα ότι η i συνιστώσα θα αποτύχει πριν τη χρονική στιγμή t,

T_n: ο χρόνος της 1ης αποτυχίας του συστήματος,

γεγονός L_{ij}: το γραμμικό σύστημα που αποτελείται από τις συνιστώσες $i, i+1, \ldots, j$ περιέχει τουλάχιστον s συνεχόμενες ροές από k αποτυχημένες συνιστώσες με $j > i$,

$F_L(n,s) = P(L_{ij}(s))$: πιθανότητα αποτυχίας του γραμμικού συστήματος για $1 < i < j < n$,

$F_C(n,s) = P(T_n \le t)$: πιθανότητα αποτυχίας του κυκλικού συστήματος.

Θεώρημα 12 (Alevizos, Papastavridis, Sypsas 1993)**.**

1) Αν $n \geq km+2$ τότε

$$F_C(n,m)= p_n F_L(n-1,m)+q_n F_C(n-1,m)+\sum_{s=1}^{m}\sum_{i=0}^{sk-1}(q_1 q_2 ... q_i p_{i+1})$$
$$\cdot(q_n q_{n-1} ... q_{n-sk+i+1} p_{n-sk+i})\ P\big(L_{i+2,n-sk+i+1}(m-s)-L_{i+2,n-sk+i+1}(m-s+1)\big)$$

και

$$F_C(n,m)= p_n F_L(n-1,m)+q_n F_C(n-1,m)+\sum_{s=1}^{m}\sum_{i=0}^{sk-1}(q_1 q_2 ... q_i p_{i+1})$$
$$\cdot(q_n q_{n-1} ... q_{n-sk+i+1} p_{n-sk+i})\ \big[F_L(n-sk-2,m-s)-F_L(n-sk-2,m-s+1)\big]$$

2) Αν $n < km$ τότε $F_C(n,m)=0$

3) Αν $n = km$ τότε $F_C(n,m)=q_1 q_2 ... q_n$

4) Αν $n = km+1$ τότε $F_C(n,m)=q_1 q_2 ... q_n+\sum_{i=1}^{n} q_1 q_2 ... q_{i-1} p_i q_{i+1} ... q_n$

5) Αν $n \geq km+2$ και οι συνιστώσες είναι ανεξάρτητες και ισόνομες με $p_1 = p_2 = ... = p_n = p$ τότε

$$F_C(n,m)= p_n F_L(n-1,m)+q_n F_C(n-1,m)$$
$$+\sum_{s=1}^{m}\sum_{i=0}^{sk-1} p^2 q^{sk}\ P\big(L_{i+2,n-sk+i+1}(m-s)-L_{i+2,n-sk+i+1}(m-s+1)\big)$$

Απόδειξη

$F_C(n,m)=P$ (το σύστημα αποτυγχάνει και η n-οστή συνιστώσα λειτουργεί)
$+P$ (το σύστημα αποτυγχάνει και η n-οστή συνιστώσα αποτυγχάνει)
$=P$ (το σύστημα αποτυγχάνει και η n-οστή συνιστώσα λειτουργεί) (1)
$+P$ (το σύστημα αποτυγχάνει και η n-οστή συνιστώσα αποτυγχάνει και το κυκλικό $(1,2,...,n-1)$ αποτυγχάνει) (2)
$+P$ (το σύστημα αποτυγχάνει και η n-οστή συνιστώσα αποτυγχάνει και το κυκλικό $(1,2,...,n-1)$ λειτουργεί) (3)

Οι πιθανότητες (1) και (2) βάσει των ορισμών είναι $p_n F_L(n-1,m)$ και $q_n F_C(n-1,m)$ αντίστοιχα. Όσον αφορά την πιθανότητα (3) θα συμβαίνει αν ισχύουν τα παρακάτω:

α) Έστω s, $1 \leq s \leq m$, ροές από k συνεχόμενες αποτυχημένες συνιστώσες μεταξύ των συνιστωσών i και j με $1 < i < j < n$. Δηλαδή οι συνιστώσες i, $i-1$, $i-2$, …, 1 και n, $n-1$, …, $j=n-sk+i+1$ είναι αποτυχημένες.

β) Οι συνιστώσες $i+1$ και $j-1=n-sk+i$ λειτουργούν.

γ) Μεταξύ των συνιστωσών $i+2$, $i+3$, …, $j-2=n-sk+i-1$ υπάρχουν ακριβώς $m-s$ ροές από k συνεχόμενες αποτυχημένες συνιστώσες.

THE NUMBER OF SUCCESS RUNS AND THE RELIABILITY OF CIRCULAR CONSECUTIVE FAILURE SYSTEMS.

Consider a sequence of n independent Bernoulli trials, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ arranged on a circle with success probability $P(X_i = 1) = p_i = 1 - q_i = 1 - P(X_i = 0)$, $i = 1, \ldots, n$.

The random variable $N_{n,k}^{C}$ denoting the number of non overlapping success runs of length k in n independent Bernoulli trials arranged on a circle is studied. The exact distribution of $N_{n,k}^{C}$ is given, via combinatorial analysis (Charalambides 1994, Makri, Philippou 1994 and Makri, Philippou, Psillakis 2007) and using the Markov chain imbedding technique (Fu, Koutras 1994 and Koutras, Papadopoulos, Papastavridis 1995).

Derman, Lieberman and Ross (1982) introduced and studied a circular consecutive k-out-of-n: F system. Such a system consists of n components ordered on a circle and fails if and only if at least k consecutive components fail. A circular $m-$consecutive k-out-of-n: F system consists of n components ordered on a circle and fails if and only if there are at least m non overlapping runs, each of k consecutive failed components.

We study the reliability of the above systems via to the distribution of the random variable $N_{n,k}^{C}$. Exact formulae for the reliability are given by means of binomial and multinomial coefficients, and using the Markov chain imbedding technique. The study is accomplished for systems with independent components not necessarily with equal probabilities. Numerical examples are given for comparison and to illustrate the theoretical results.

Αναφορές

P. D. Alevizos, S. Papastavridis, P. Sypsas, Reliability of cyclic m-consecutive-k-out-of-n: F systems, Proc. 2nd IASTED int. Conf. Reliability, Quality Control and Risk Assesment, Cambridge, MA, USA, pp. 140-143 (1993).

I. Antonopoulou and S. Papastavridis, Fast recursive algorithm to evaluate the reliability of a circular consecutive k- out- of-n: F system, IEEE Transactions on Reliability R-36 (1): 83-84, 1987.

Ch. A. Charalambides, Success Runs in a Circular Sequence of Independent Bernoulli trials, 1994 Kluwer Academic Publishers , 15-29.

C. Derman, G. Lieberman and S. Ross, On the Consecutive-k-of-n: F system, IEEE Transactions on Reliability, Vol. R-31, No. 1, April 1982.

Feller W. (1968). An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Vol. 1, 3rd ed. John Wiley, New York.

J. C. Fu and M. V. Koutras, Distribution Theory of Runs: A Markov Chain Approach, Journal of the American Statistical Association September 1994, Vol. 89, No. 427, Theory and Methods.

F. K. Hwang and S. Papastavridis, Binary vectors with exactly k nonoverlapping m-tuples of consecutive ones, Discrete Applied Mathematics 30 (1991) 83-86.

M. V. Koutras, G. K. Papadopoulos and S. G. Papastavridis, Runs on a cicle, J. Appl. Prob. 32 (1995) 396-404.

F. S. Makri and A. N. Philippou, Binomial Distributions of Order k on the Cicle, 1994 Kluwer Academic Publishers , 65-81.

F. S. Makri and A. N. Philippou, Exact Reliability Formulas Linear and Circular m- Consecutive- k- out- of-n: F Systems, Microelectron. Reliab., Vol. 36, No. 5, pp.657-660, 1996.

F. S. Makri , A. N. Philippou, Z. Psillakis, Polya, Inverse Polya and Circular Polya distributions of order k for l- overlapping success runs, Communications in Statistics- Theory and Methods, 36, 657-668, 2007.

J. Riordan, An introduction to Combinatorial Analysis (1958), Wiley, New York.