ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
«ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ»

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

«ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΩΝ»

ΟΝΟΜΑ : ΓΚΑΝΑ ΑΛΕΞΑΝΔΡΑ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΦΟΙΤΗΤΡΙΑ
Α.Μ. :162

ΕΠΙΒΛΕΠΟΥΣΑ: Θ. Ν. ΓΡΑΨΑ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Εισαγωγή

Η εποχή που ζούμε χαρακτηρίζεται έντονα από τη ραγδαία επιστημονική και τεχνολογική πρόοδο που έχει σαν άμεση συνέπεια τη μαζική χρησιμοποίηση προϊόντων πληροφορικής. Είναι πλέον γεγονός ότι οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές έχουν καταλάβει σημαντική θέση στην καθημερινότητά μας. Έντονη είναι πλέον, η χρησιμοποίησή τους, τόσο στον εργασιακό χώρο όσο και στον τομέα της εκπαίδευσης. Σε όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης ξεκινώντας από την Πρωτοβάθμια και φτάνοντας στην Τριτοβάθμια, γίνονται προσπάθειες για την εξοικείωση των μαθητών και των φοιτητών με τους ηλεκτρονικούς υπολογιστές. Σαν κύριος σκοπός είναι ο εφοδιασμός τους με νέες γνώσεις και δεξιότητες ώστε να μπορούν να αντιμετωπίσουν την επιστημονική και τεχνολογική εξέλιξη.

Ειδικότερα, όσον αφορά την Πρωτοβάθμια και Δευτεροβάθμια εκπαίδευση, γίνονται προσπάθειες που αφορούν κυρίως την τροποποίηση της μαθησιακής διδασκαλίας. Έντονη είναι η στροφή που γίνεται σε νέες μεθόδους διδακτικής και μάθησης, που θέλουν τον μαθητή να συμμετέχει ενεργά και τον καθηγητή να είναι βοηθός και σύμβουλος σε αυτήν την προσπάθεια διεξαγωγής της γνώσης. Για το σκοπό αυτό, πολλοί εκπαιδευτικοί ακόμα και αν δεν είναι καλοί χρήστες των ηλεκτρονικών υπολογιστών έχουν στραφεί τόσο στην κατασκευή εκπαιδευτικών λογισμικών όσο και στη χρησιμοποίηση έτοιμων εκπαιδευτικών πακέτων.

Με τον όρο εκπαιδευτικό λογισμικό, εννοούμε το λογισμικό που περιέχει διδακτικούς στόχους, ολοκληρωμένα σενάρια και αλληγορίες με παιδαγωγική σημασία και προορίζεται για χρήση μέσα στην τάξη, για εκπαίδευση από απόσταση ή ακόμα και για αυτοδιδασκαλία. Ο σκοπός του είναι να επιφέρει συγκεκριμένα διδακτικά και μαθησιακά αποτελέσματα. Συνήθως, ο όρος εκπαιδευτικό λογισμικό συμπεριλαμβάνει και πακέτα εφαρμογών επιμορφωτικού, εγκυκλοπαιδικού και ψυχαγωγικού τύπου.

Τα εκπαιδευτικά λογισμικά χωρίζονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες:

- Στα Λογισμικά γενικής χρήσης και
- Στα Λογισμικά εξειδικευμένου χαρακτήρα

Όσον αφορά την πρώτη κατηγορία, τέτοια λογισμικά είναι αυτά που παρόλο που δεν έχουν εκπαιδευτικό χαρακτήρα, μπορούν να εξυπηρετήσουν εκπαιδευτικούς και παιδαγωγικούς σκοπούς. Αντίθετα, τα λογισμικά εξειδικευμένου χαρακτήρα κατασκευάζονται εξ ολοκλήρου για να ικανοποιήσουν παιδαγωγικούς σκοπούς. Υποστηρίζεται πως η εκπαιδευτική διαδικασία με τη χρήση τέτοιων εκπαιδευτικών λογισμικών, είναι πιο αποτελεσματική καθώς χαρακτηρίζεται από διαθεματικότητα, δίνει τη δυνατότητα εξερεύνησης και προσελκύει το μαθητή στην ανακάλυψη της νέας γνώσης.

Μια άλλη κατηγοριοποίηση των εκπαιδευτικών λογισμικών, μπορεί να γίνει και με βάση το σκοπό που εξυπηρετούν. Συγκεκριμένα, υπάρχουν λογισμικά καθοδηγούμενης διδασκαλίας, οπτικοποίησης, εξάσκησης και πρακτικής, εκπαιδευτικών παιχνιδιών και πολλά άλλα.

Πιο αναλυτικά και σύμφωνα και με τις αρχές του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου[8b], το εκπαιδευτικό λογισμικό συνδυάζει και αξιοποιεί τις δυνατότητες που προσφέρει η τεχνολογία της Πληροφορίας και της Επικοινωνίας για τη δημιουργία ενός περιβάλλοντος που θα προσελκύει το ενδιαφέρον του μαθητή και θα συμβάλλει στην ενεργητική και δημιουργική μάθηση. Με τον όρο αυτό, εννοούμε τη διαδικασία εκείνη, όπου ο μαθητής θα συμμετέχει ενεργά στην τάξη για την διεξαγωγή της νέας γνώσης. Δεν θα είναι πλέον ακροατής και παθητικός δέκτης, αλλά θα συμμετέχει με την κριτική του ικανότητα, τις προηγούμενες γνώσεις του και τις δεξιότητές του, στην παράδοση του μαθήματος. Έτσι λοιπόν, η ολοένα και αυξανόμενη χρήση των εκπαιδευτικών λογισμικών στα σχολεία οφείλεται στο γεγονός, ότι συμβάλλουν στην ενεργοποίηση του μαθητή μέσα από δημιουργικές διαδικασίες και πειράματα, ότι δίνεται η ευκαιρία για πολύπλευρη και πιο ενδιαφέρουσα παρουσίαση της ύλης αλλά και στο γεγονός ότι ο μαθητής προσεγγίζει τη γνώση βιωματικά, άρα μειώνεται και ο χρόνος που χρειάζεται για την κατανόησή της.

Όσον αφορά τώρα, την Τριτοβάθμια Εκπαίδευση, πρέπει να τονιστεί ιδιαίτερα, ότι τα περισσότερα ακαδημαϊκά ιδρύματα, διαθέτουν άρτια οργανωμένα εργαστήρια ηλεκτρονικών υπολογιστών, όπου εκτός των άλλων, παρέχεται και άμεση πρόσβαση των φοιτητών στο διαδίκτυο και στις υπηρεσίες του. Επιπλέον, υπάρχει έμπειρο προσωπικό στη χρήση των νέων τεχνολογιών και των προγραμμάτων Πληροφορικής αλλά και στα προγράμματα σπουδών τους περιλαμβάνονται μαθήματα που αφορούν στην εκμάθηση χρήσης προϊόντων Πληροφορικής.

Η εξέλιξη όμως της Πληροφορικής στην Τριτοβάθμια εκπαίδευση συνεχίζεται… και ένα ακόμα σημαντικό θέμα που καλείται να διαπραγματευθεί είναι και η ηλεκτρονική εκπαίδευση ή αλλιώς e- learning[8d]. Πιο αναλυτικά, με τον όρο αυτό, εννοούμε την εκπαίδευση που επιτυγχάνεται μέσω ηλεκτρονικών υπολογιστών με τη χρήση εκπαιδευτικών προγραμμάτων κατάλληλα διαμορφωμένων στο αντικείμενο του κάθε μαθήματος. Πολλοί, εύλογα θα αναρωτηθούν πώς μπορεί να αξιοποιηθεί μια τέτοιου είδους μάθηση και τι σκοπούς εξυπηρετεί ένα τέτοιο εγχείρημα. Οι απαντήσεις είναι πολλές, με κυριότερες ότι δεν χρειάζεται κάποιο συγκεκριμένο χώρο για να διεξαχθεί, αλλά ούτε και συγκεκριμένο χρόνο.

Η ηλεκτρονική μάθηση, λοιπόν, συνδυάζει την τεχνολογική εξέλιξη με την εκπαιδευτική διαδικασία και χρησιμοποιείται σαν ένα εργαλείο που ενισχύει τις παραδοσιακές μεθόδους μάθησης. Έχει σαν σκοπό τη δημιουργία ενός ηλεκτρονικού περιβάλλοντος που θα στοχεύει στην ενσωμάτωση νέων τεχνολογιών στη διδασκαλία, στη δημιουργία ενός εύχρηστου περιβάλλοντος συνεχούς επικοινωνίας εκπαιδευτικού και εκπαιδευόμενου αλλά και στη δημιουργία εφαρμογών για αξιοποίηση μέσα στην τάξη. Αξίζει να σημειωθεί πώς μορφές ηλεκτρονικής μάθησης, όπως είναι και το εκπαιδευτικό λογισμικό, δεν έχουν σαν στόχο τον παραγκωνισμό του εκπαιδευτικού, αλλά αντίθετα αποτελούν έναν πολύτιμο βοηθό.[8e] Πρέπει να τονιστεί πως μια τέτοιου είδους μάθηση δεν μπορεί να αντικαταστήσει την μαθησιακή διαδικασία στην τάξη μιας και είναι δύσκολο να επιτευχθούν ολοκληρωτικά οι στόχοι που έχει θέσει ο εκπαιδευτικός. Ωστόσο, απαιτείται αρκετή προσπάθεια από τον καθηγητή για την οργάνωση του εκπαιδευτικού υλικού και των ηλεκτρονικών μαθημάτων, που συνήθως περιέχουν ήχο, εικόνα και κίνηση.

Λόγω της εξέλιξης των τεχνολογιών Πληροφορικής και του ολοένα και πιο φιλικού για το χρήστη περιβάλλοντος, πολλοί εκπαιδευτικοί σε Πανεπιστημιακά Ιδρύματα έχουν αρχίσει να χρησιμοποιούν τις τεχνικές αυτές όχι μόνο για την ενσωμάτωση ολόκληρης της ύλης των εκάστοτε μαθημάτων τους, αλλά και αποσπασματικά για κάποια κομμάτια αυτής. Τέτοιες προσπάθειες έχουν γίνει σε Πανεπιστημιακά Ιδρύματα του εξωτερικού, όπως το MIT, το Stanford University καθώς και σε Σχολές της Ινδίας. Τα μαθήματα τα οποία έχουν διαμορφωθεί στις μορφές ηλεκτρονικής μάθησης, δεν είναι μόνο μαθήματα σχετικά με την Πληροφορική, αλλά και μαθήματα που αφορούν στα Μαθηματικά, στη Φυσική, στη Χημεία, στη Βιολογία, στο Γραμμικό Προγραμματισμό, στη διδασκαλία της γλώσσας και σε πολλά άλλα.[8f, 8g, 8h] Για παράδειγμα, ας αναφερθούμε στη μέθοδο Newton-Raphson, όπου μέσω του video[8h, 8i], της κίνησης και του ήχου ο φοιτητής μπορεί να αντιληφθεί όχι μόνο τη γεωμετρική ερμηνεία της μεθόδου, αλλά και πληροφορίες που αφορούν στη σύγκλιση της μεθόδου και στην επιλογή του αρχικού σημείου x_0.

Όσον αφορά τώρα τη χώρα μας, ήδη αρκετά Τμήματα του Πανεπιστημίου έχουν στραφεί τόσο στη χρήση εκπαιδευτικών λογισμικών και μορφών ηλεκτρονικής μάθησης για τη διδασκαλία των μαθημάτων, όσο και στην εκμάθηση των φοιτητών σχετικά με το σχεδιασμό εκπαιδευτικών λογισμικών. Τέτοια είναι Τμήματα του Πανεπιστημίου Πατρών,[8j] το Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας το οποίο διαθέτει πύλη ηλεκτρονικής μάθησης, το Ανοιχτό Πανεπιστήμιο, αλλά και το πανεπιστήμιο Πειραιώς.

Προς αυτήν την κατεύθυνση λοιπόν, προσπαθήσαμε να κινηθούμε και με αυτή την εργασία, που σαν σκοπό της έχει τη δημιουργία ενός εκπαιδευτικού πακέτου για το μάθημα της Ανάλυσης Διαστημάτων, που διδάσκεται σε προπτυχιακό επίπεδο στο Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Πατρών. Επειδή δεν υπάρχει έτοιμο κάποιο εκπαιδευτικό πακέτο για το μάθημα αυτό, έγινε μια προσπάθεια κατασκευής ενός δυναμικού εκπαιδευτικού πακέτου με τη χρήση των προγραμμάτων Powerpoint, Camtasia Studio και του εκπαιδευτικού πακέτου HotPotatoes 6.

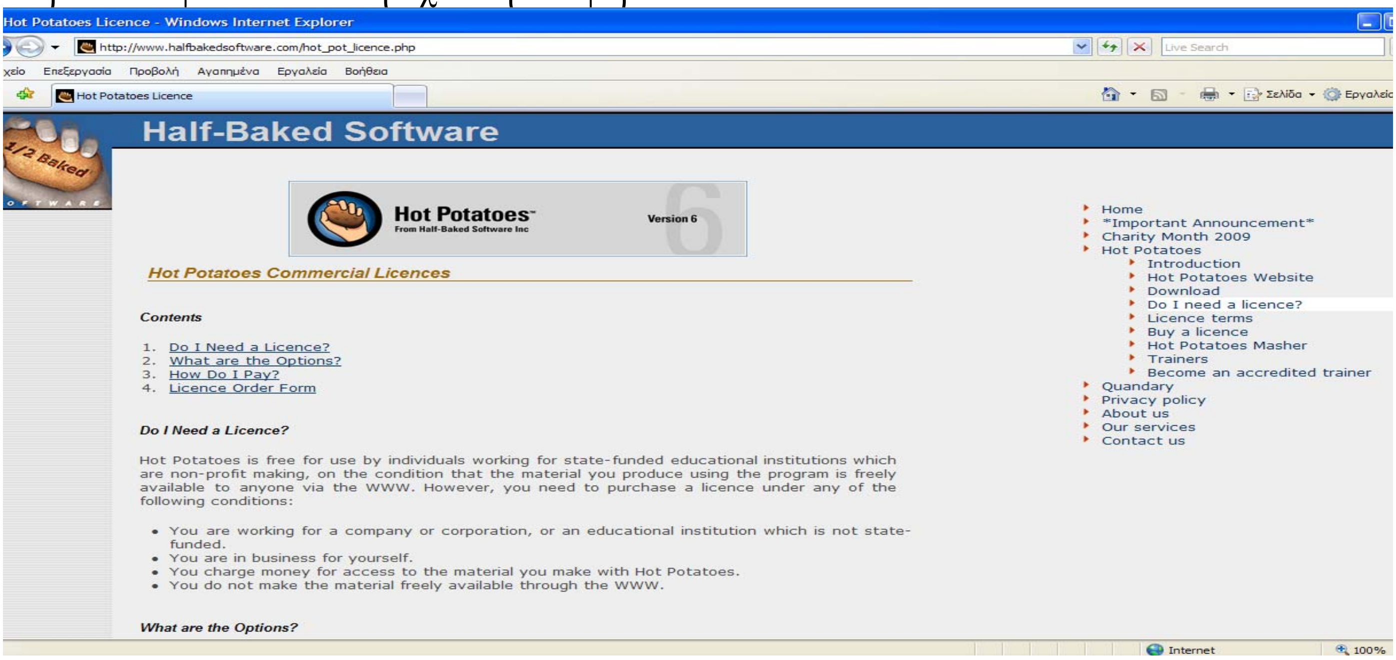
Η κύρια ιδέα για τη δημιουργία αυτού του πακέτου, είναι η αξιοποίησή του από τον φοιτητή, για περισσότερη εμβάθυνση στη θεωρία του μαθήματος. Αποτελεί ένα ενισχυτικό εργαλείο για την εμπέδωση των εννοιών και την υλοποίηση των μεθόδων που διδάσκεται ο φοιτητής στο μάθημα και στα εργαστήρια που προβλέπονται. Πρέπει να τονιστεί, ότι ο φοιτητής-χρήστης του πακέτου αυτού πρέπει να έχει ένα καλό υπόβαθρο τόσο στη θεωρία όσο και στην υλοποίηση των μεθόδων που διδάσκεται στα πλαίσια του μαθήματος.

Πιο αναλυτικά, περιλαμβάνει συνοπτική θεωρία στα πλαίσια του μαθήματος, καθώς και παραδείγματα συνδεδεμένα άμεσα με τη θεωρία που έχει διδαχθεί. Συγκεκριμένα, υπάρχει σύνδεση των βασικότερων θεμάτων της θεωρίας με τα αντίστοιχα παραδείγματα, τα οποία είναι σε μορφή video, όπου παρέχεται σταδιακή λύση αυτών και επεξήγησή τους με ήχο και εικόνα. Επιπλέον, υλοποιούνται οι περισσότερες μέθοδοι από αυτές που αναφέρονται στο βιβλίο και υπάρχει γραφική απεικόνιση κάθε βήματος του αλγορίθμου τους καθώς και ηχητική επεξήγησή τους. Η θεωρία που αναπτύσσεται στην εργασία αυτή αποτελεί περίληψη της θεωρίας που αναπτύσσεται στο βιβλίο με τίτλο «Εισαγωγή στην Ανάλυση Διαστημάτων», Θ. Ν. Γράψα από την Γκιούρδας εκδοτική, ενώ τα παραδείγματα που υλοποιούνται είναι διαφορετικά από αυτά του βιβλίου. Τόσο η θεωρία όσο και τα παραδείγματα υπάρχουν σε ηλεκτρονική μορφή σε cd.

Μέσα στο πακέτο αυτό, υπάρχουν και ασκήσεις πολλαπλής επιλογής, αντιστοίχισης και σταυρόλεξο, όπου είτε θα μπορεί ο αναγνώστης – φοιτητής να ασχοληθεί μόνος του στο σπίτι, είτε να αξιοποιηθούν από τον διδάσκοντα με τη χρήση μηχανής προβολής για εξάσκηση μέσα στην τάξη. Οι ερωτήσεις που περιέχονται δεν αφορούν στη θεωρία του μαθήματος μόνο, αλλά απαιτούν πράξεις και υλοποίηση μεθόδων, ώστε να απαντηθούν σωστά. Στο πλαίσιο αυτών των ασκήσεων υπάρχουν σχόλια που ενημερώνουν το φοιτητή – αναγνώστη για κάθε σωστή ή λανθασμένη απάντησή του, καθώς και πληροφορίες για το πού βρίσκεται το αντίστοιχο κομμάτι θεωρίας στο βιβλίο. Οι ασκήσεις αυτές φτιάχτηκαν με τη βοήθεια του πακέτου HotPotatoes 6 και μπορεί κάποιος να παρέμβει σε αυτές προσθέτοντας επιπλέον ερωτήσεις ή διαμορφώνοντας τις ήδη υπάρχουσες. Υπάρχει αναλυτική περιγραφή στην εργασία τόσο για τη δημιουργία των ερωτήσεων- ασκήσεων, όσο και για την τροποποίησή τους.

Τι είναι το Hotpotatoes;

Το πακέτο HotPotatoes 6 που χρησιμοποιήθηκε για τη δημιουργία των ασκήσεων, είναι ένα πρόγραμμα ανοιχτού λογισμικού και μπορεί να χρησιμοποιηθεί ελεύθερα από Πανεπιστημιακά Ιδρύματα, ή Σχολικές Μονάδες ή από οποιονδήποτε άλλο χρήστη προκειμένου να εξυπηρετήσει διδακτικούς και μη εμπορικούς σκοπούς. Παρακάτω φαίνεται και η σχετική αναφορά.

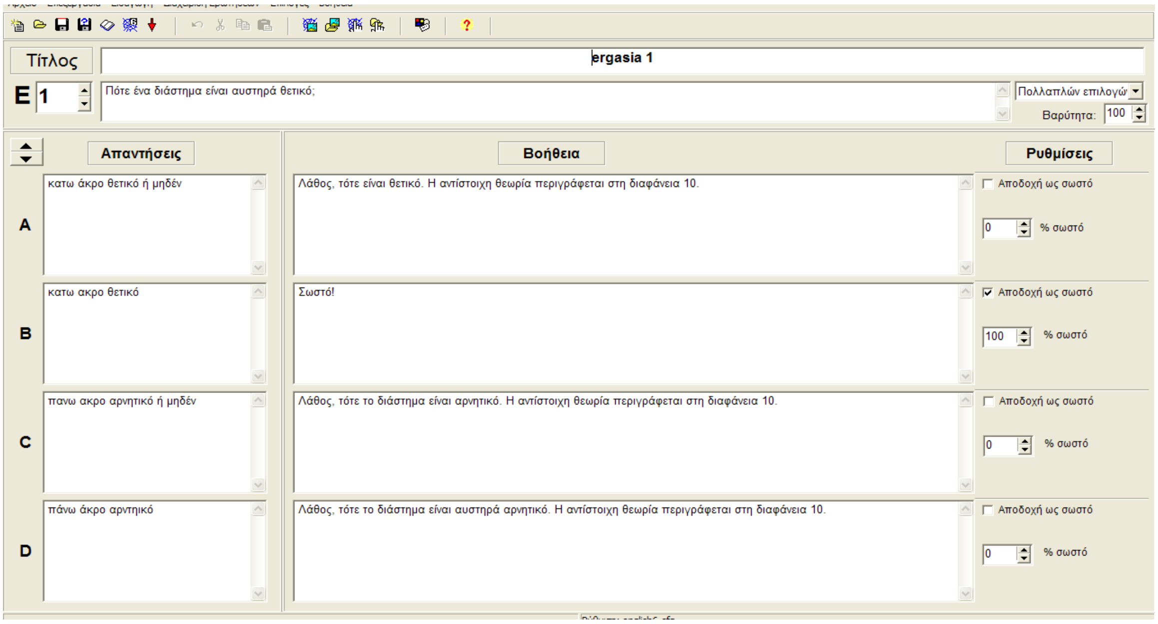


Το πακέτο αυτό υποστηρίζει 5 μορφές ασκήσεων: πολλαπλής επιλογής (JQUIZ), μπερδεμένη πρόταση (JMIX), σταυρόλεξο (JCROSS), άσκηση αντιστοίχησης (JMATCH) και άσκηση συμπλήρωσης κενών (JCLOSE).

Στην εργασία αυτή χρησιμοποιήθηκαν το JQUIZ, το JCROSS και το JMATCH, που αναλυτικά περιγράφονται παρακάτω.

JQUIZ

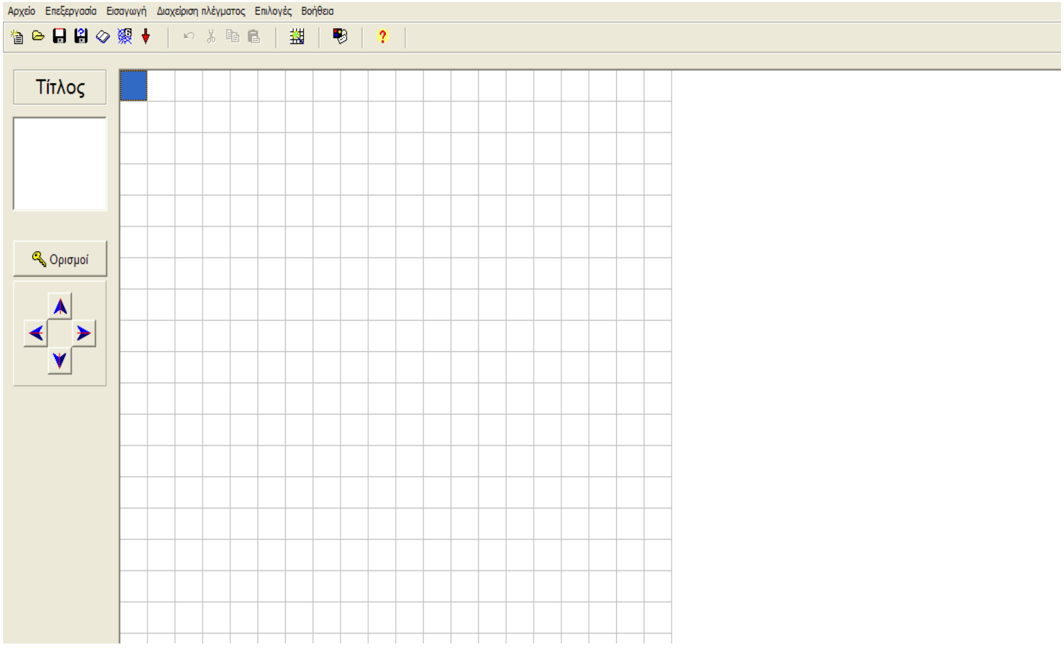
Όπως προαναφέρθηκε, το JQUIZ χρησιμοποιείται για την κατασκευή ασκήσεων πολλαπλής επιλογής και το περιβάλλον του φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



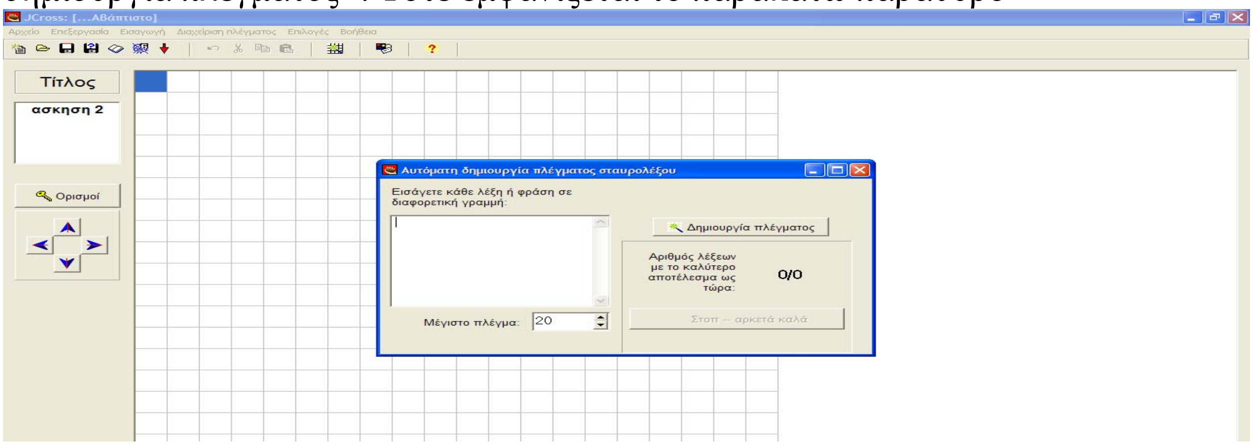
Για να δημιουργήσουμε μια άσκηση πολλαπλής επιλογής, θα πρέπει επιλέγοντας το πρόγραμμα hot Potatoes, να επιλέξουμε το JQUIZ και να εμφανιστεί στην οθόνη μας η παραπάνω εικόνα. Το πρώτο βήμα είναι να δοθεί ο τίτλος της άσκησης στο ανάλογο περιθώριο. Στο παράδειγμά μας, την άσκηση την ονομάσαμε **ergasia 1**. Κάτω από τον τίτλο, υπάρχει η ένδειξη **E 1**, η οποία δείχνει τον αριθμό της κάθε ερώτησης και πατώντας τα βελάκια δίπλα, αλλάζει ο αριθμός της ερώτησης, δηλαδή εισάγουμε μια νέα ερώτηση, ή γυρνάμε σε κάποια προηγούμενη. Συνεχίζοντας την εφαρμογή, δίπλα από την ένδειξη της ερώτησης υπάρχει ένα περιθώριο, όπου δηλώνεται η εκφώνηση της κάθε ερώτησης. Μόλις ολοκληρωθεί η εκφώνηση της ερώτησης μας, θα πρέπει να πάμε στη στήλη **Απαντήσεις** στην οποία γράφονται οι πιθανές απαντήσεις που θέλουμε να δώσουμε. Παρόλο που στην οθόνη μας εμφανίζονται μόνο τέσσερις πιθανές απαντήσεις, μπορούμε με τα βελάκια που υπάρχουν αριστερά στη στήλη αυτή να μειώσουμε ή να αυξήσουμε τις πιθανές απαντήσεις της ερώτησής μας. Μόλις ολοκληρωθεί και το στάδιο των απαντήσεων, μεταβαίνουμε στη στήλη της **Βοήθειας**, όπου εκεί γράφουμε τα μηνύματα που θέλουμε για κάθε μια επιλογή χωριστά. Ανάλογα με την απάντηση που θα επιλέξουμε a, b, c, ή d θα εμφανιστεί και το ανάλογο μήνυμα (αν έχουμε παραπάνω πιθανές απαντήσεις ισχύει το ίδιο). Τελειώνοντας, στη στήλη **Ρυθμίσεις**, σημειώνουμε ποια από τις απαντήσεις είναι η σωστή, καθώς και τη βαθμολογία της κάθε απάντησης. Αφού τελειώσουμε με την ερώτηση και πριν προχωρήσουμε στην επόμενη κάνουμε αποθήκευση πατώντας είτε το χαρακτηριστικό εικονίδιο στη γραμμή εργαλείων, είτε από το μενού Αρχείο – Αποθήκευση. Ύστερα, πάλι από το μενού Αρχείο, επιλέγουμε το ‘Δημιουργία σελίδας Web’ και ‘Σελίδα Web για v6 browsers’, δίνουμε ένα όνομα στην άσκησή μας και η άσκηση είναι έτοιμη για χρήση μέσω του διαδικτύου. Πρέπει να παρατηρηθεί, ότι η άσκηση μας εμφανίζεται με δύο διαφορετικές μορφές. Η μία μορφή έχει την επέκταση από το Hot Potatoes 6, ενώ η άλλη έχει την επέκταση του internet explorer. Η πρώτη μορφή χρησιμοποιείται αν θέλουμε να παρέμβουμε στην άσκηση που έχουμε ετοιμάσει, είτε για κάποια αλλαγή είτε και για προσθήκη ερωτήσεων, ενώ η δεύτερη είναι η εκτελέσιμη.

JCROSS

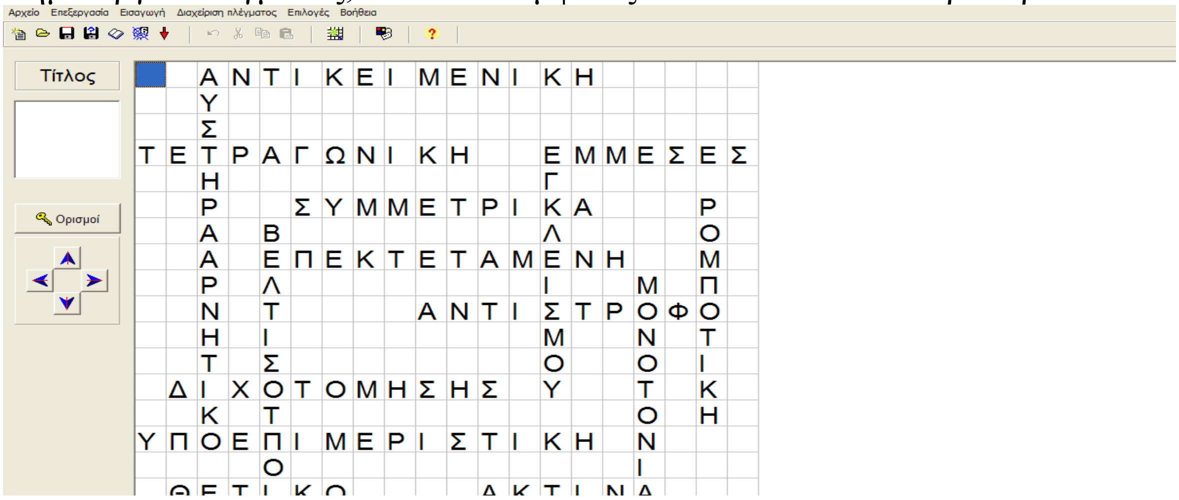
Το JCROSS είναι μια εφαρμογή με την οποία δημιουργούμε σταυρόλεξα και το περιβάλλον του φαίνεται παρακάτω:



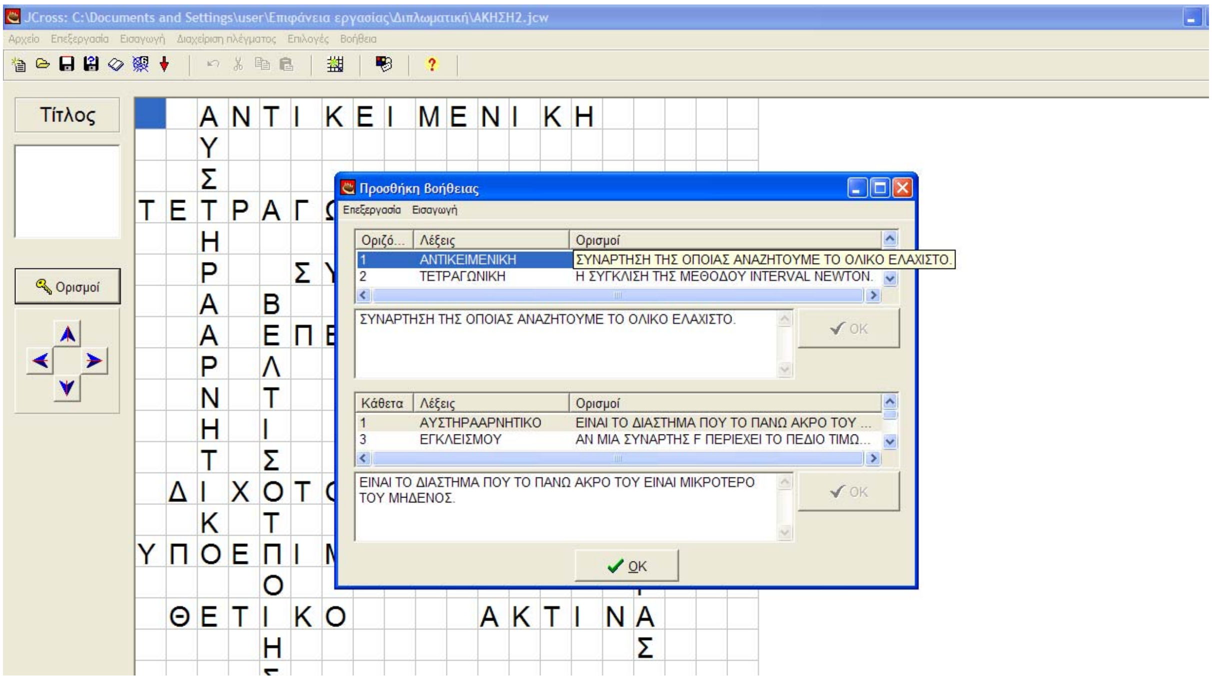
Η διαδικασία δημιουργίας συνεχίζεται, επιλέγοντας από τη γραμμή εργαλείων την επιλογή ‘ Διαχείριση πλέγματος’ και από το μενού που εμφανίζεται την ‘ Αυτόματη δημιουργία πλέγματος’ . Τότε εμφανίζεται το παρακάτω παράθυρο



Στο παράθυρο αυτό, εισάγουμε τις λέξεις εκείνες που θέλουμε να εμφανιστούν στο σταυρόλεξο, δηλαδή τις λέξεις που θεωρούμε σαν απαντήσεις στις ερωτήσεις που θα ορίσουμε οριζόντια και κάθετα. Εισάγουμε κάθε λέξη σε διαφορετική γραμμή, πατώντας το πλήκτρο enter. Μόλις ολοκληρωθεί αυτή η διαδικασία επιλέγουμε την ‘ Δημιουργία πλέγματος, οπότε και εμφανίζεται το ακόλουθο παράθυρο.



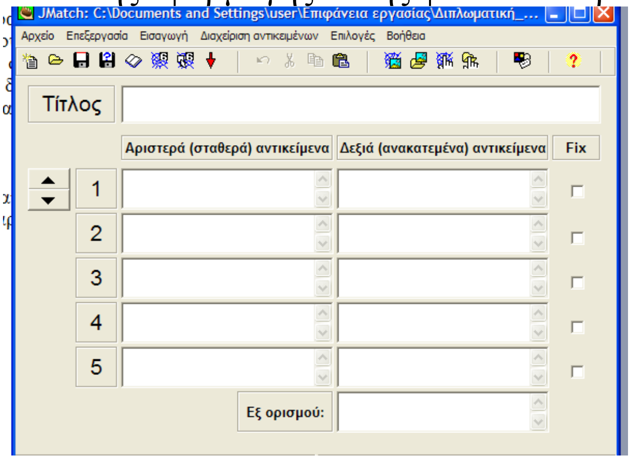
Στο σημείο αυτό, είμαστε έτοιμοι να ορίσουμε τις ερωτήσεις του σταυρόλεξου και για το σκοπό αυτό επιλέγουμε το ‘Ορισμοί’. Εμφανίζεται ένα παράθυρο, όπου έχει διαχωρισμένες τις λέξεις που έχουν τοποθετηθεί οριζόντια και κάθετα, επιλέγουμε στη συνέχεια μια λέξη και δίνουμε τον ορισμό της που θέλουμε και να εμφανίζεται στο χρήστη ή αλλιώς στον λύτη του σταυρόλεξού μας. Πατάμε το ‘ΟΚ’ ύστερα από κάθε εισαγωγή ορισμού και αφού ολοκληρώσουμε τη διαδικασία το παράθυρο θα μοιάζει με το ακόλουθο.



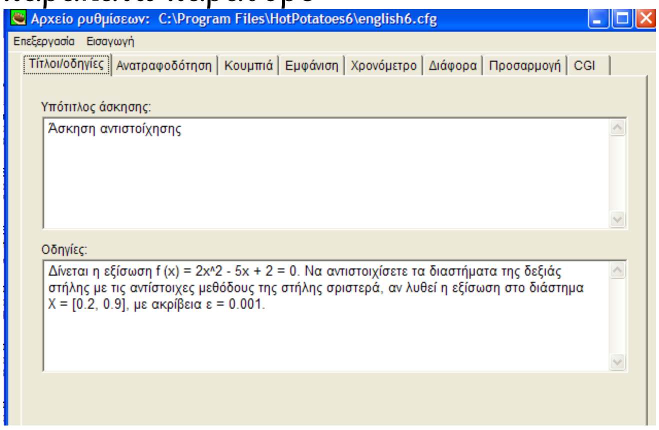
Τέλος, από τη γραμμή εργαλείων, επιλέγουμε ‘Αρχείο’ και από το μενού που εμφανίζεται επιλέγουμε ‘Δημιουργία σελίδας Web’ και ‘Σελίδα Web για v6 browsers’, δίνουμε ένα όνομα στην άσκηση μας και η άσκηση είναι έτοιμη για χρήση μέσω του διαδικτύου. Για τις διορθώσεις της συγκεκριμένης εφαρμογής, ισχύουν τα ίδια με αυτά που προαναφέρθηκαν , στην παράγραφο JQUIZ.

JMATCH

Το JMATCH είναι μια εφαρμογή που δημιουργεί ασκήσεις αντιστοίχισης. Το περιβάλλον της εφαρμογής αυτής φαίνεται παρακάτω.



Όπως και με τις άλλες δύο εφαρμογές, ξεκινάμε από την ένδειξη του τίτλου, όπου γράφουμε τι ακριβώς τον τίτλο της άσκησης, για παράδειγμα **Άσκηση 3**. Στην στήλη αριστερά γράφουμε τα σταθερά αντικείμενα της άσκησής μας, ενώ στη στήλη δεξιά γράφουμε τα αντικείμενα όπου θα τα αντιστοιχίσουμε σε κάθε ένα της αριστερής στήλης. Από το μενού ‘Επιλογές’ επιλέγουμε ‘Διαμόρφωση επιλογών’. Εμφανίζεται το παρακάτω παράθυρο



όπου από τη γραμμή εργαλείων διαμορφώνουμε την άσκησή μας. Συγκεκριμένα, από την πρώτη επιλογή ‘τίτλοι/οδηγίες’ δίνουμε την ακριβή εκφώνηση της άσκησης, ενώ από το μενού ‘ανατροφοδότηση’ διαμορφώνουμε την εικόνα που θα βλέπει ο χρήστης ανάλογα με την κάθε απάντησή του. Μπορούμε συνεχίζοντας, να τροποποιήσουμε την γενικότερα την εμφάνιση της άσκησης, ανάλογα με το σκοπό που θέλουμε να πετύχουμε. Οι αλλαγές και οι διορθώσεις γίνονται με τον ίδιο τρόπο όπως και στις άλλες εφαρμογές του προγράμματος.

ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΩΝ

Η Ανάλυση Διαστημάτων είναι ένας νέος αναπτυσσόμενος κλάδος που έχει σαν σκοπό το σχεδιασμό μεθόδων ώστε να αντιμετωπιστούν όλα τα είδη ανακρίβειας που εμποδίζουν όλες τις κλασικές αριθμητικές μεθόδους από το να παρέχουν αξιόπιστα αποτελέσματα. Η κύρια ιδέα είναι η ανάπτυξη αλγορίθμων και τεχνικών ώστε να παράγονται όσο το δυνατόν πιο ακριβή φράγματα για τις λύσεις τους. Επιπλέον, εισάγει έναν νέο τρόπο υπολογισμών που καλείται αριθμητική διαστημάτων, όπου οι πράξεις πλέον θα γίνονται με χρήση διαστημάτων και όχι με πραγματικούς αριθμούς. Η Ανάλυση διαστημάτων βρίσκει εφαρμογές σε κλάδους όπως: η ρομποτική, η ιατρική, η χημική βιομηχανία και η οικονομία.

Σκοπός μας στην παράγραφο αυτή, είναι να εισάγουμε μια αριθμητική για τα στοιχεία του I, δηλαδή για τα διαστήματα-αριθμούς ή αλλιώς για τους interval αριθμούς ή πιο απλά για τα intervals. Η interval αριθμητική ανακαλύφθηκε από τον R. E. Moore γύρω στο 1960, ο οποίος την οραματίστηκε σαν ένα μέσο ελέγχου σφαλμάτων στις υπολογιστικές διαδικασίες.

Η αριθμητική διαστημάτων ή διαφορετικά η interval αριθμητική είναι μια επέκταση της πραγματικής αριθμητικής και είναι το βασικότερο μαθηματικό εργαλείο για την επαλήθευση αριθμητικών υπολογισμών. Συγκεκριμένα, τα διαστήματα X και Y θα τα διαχειριζόμαστε πλέον σαν αριθμούς όπου θα εκτελούνται πράξεις μεταξύ τους. Στην ουσία δηλαδή, θα γενικεύσουμε την αριθμητική των πραγματικών αριθμών εισάγοντας πράξεις στα στοιχεία του I.

Παρακάτω αναφέρονται κάποιοι ορισμοί που αφορούν τα διαστήματα και τις σχέσεις μεταξύ τους.

Αριθμητική Διαστημάτων

Η αριθμητική στην ανάλυση διαστημάτων ορίζεται όπως και στο R έτσι ώστε το αποτέλεσμα διάστημα που θα προκύψει να περιέχει όλες τις πιθανές λύσεις. Συγκεκριμένα, αν $X = [\underline{x}, \overline{x}]$ και $Y = [\underline{y}, \overline{y}]$ είναι δύο διαστήματα και αν με op συμβολίσουμε τις τέσσερις πράξεις $\{+, -, *, /\}$ τότε θα έχουμε $x\, op\, y = \{x\, op\, y : x \in X,\ y \in Y\}$.

Παρακάτω ορίζονται οι πράξεις της πρόσθεσης, της αφαίρεσης, του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης διαστημάτων. Πιο αναλυτικά:

- **Άθροισμα**

Ορίζουμε σαν άθροισμα δύο διαστημάτων $X = [\underline{x}, \overline{x}]$ και $Y = [\underline{y}, \overline{y}]$ ένα νέο διάστημα που έχει για κάτω άκρο το άθροισμα των κάτω άκρων των X και Y και για πάνω άκρο το άθροισμα των πάνω άκρων των X και Y. Δηλαδή,

$X + Y = [\underline{x} + \underline{y},\ \overline{x} + \overline{y}]$

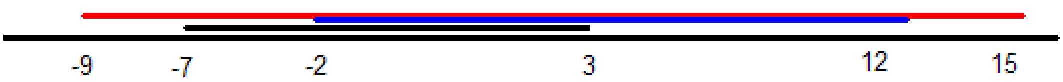
Παράδειγμα 1
Έστω ότι έχουμε τα διαστήματα $X = [\underline{x}, \overline{x}] = [2, 3]$ και $Y = [\underline{y}, \overline{y}] = [4, 7]$, τότε το άθροισμά τους είναι το διάστημα:
$X + Y = Z = [\underline{z}, \overline{z}] = [\underline{x} + \underline{y}, \overline{x} + \overline{y}] = [2 + 4, 3 + 7] = [6, 10]$

Παράδειγμα 2
Έστω ότι έχουμε τα διαστήματα $X = [\underline{x}, \overline{x}] = [0, 1]$ και $Y = [\underline{y}, \overline{y}] = [1, 2]$, τότε το άθροισμά τους είναι το διάστημα:
$X + Y = Z = [\underline{z}, \overline{z}] = [\underline{x} + \underline{y}, \overline{x} + \overline{y}] = [0 + 1, 1 + 2] = [1, 3]$

Παράδειγμα 3
Έστω ότι έχουμε τα διαστήματα $X = [\underline{x}, \overline{x}] = [2, 3]$ και $Y = [\underline{y}, \overline{y}] = [-7, -4]$, τότε το άθροισμά τους είναι το διάστημα:
$X + Y = Z = [\underline{z}, \overline{z}] = [\underline{x} + \underline{y}, \overline{x} + \overline{y}] = [2 - 7, 3 - 4] = [-5, -1]$

Παράδειγμα 4
Έστω ότι έχουμε τα διαστήματα $X = [\underline{x}, \overline{x}] = [-7, 3]$ και $Y = [\underline{y}, \overline{y}] = [-2, 12]$, τότε το άθροισμά τους είναι το διάστημα:
$X + Y = Z = [\underline{z}, \overline{z}] = [\underline{x} + \underline{y}, \overline{x} + \overline{y}] = [-7 - 2, 3 + 12] = [-9, 15]$

Γραφική απεικόνιση (παράδειγμα 4)



- **Αντίθετο διαστήματος**

Ορίζουμε ως το αρνητικό ή το αντίθετο ενός διαστήματος X το διάστημα που έχει κάτω άκρο το αντίθετο του πάνω άκρου του X και για πάνω άκρο το αντίθετο του κάτω άκρου του X. Δηλαδή, είναι το διάστημα
$-X = -[\underline{x}, \overline{x}] = [-\overline{x}, -\underline{x}] = \{-x : x \in X\}$

- **Διαφορά**

Η διαφορά X-Y δύο διαστημάτων $X = [\underline{x}, \overline{x}]$ και $Y = [\underline{y}, \overline{y}]$ είναι ένα νέο διάστημα που έχει για κάτω άκρο τη διαφορά $\underline{x} - \overline{y}$ και για πάνω άκρο τη διαφορά $\overline{x} - \underline{y}$. Δηλαδή, $X - Y = [\underline{x} - \overline{y}, \overline{x} - \underline{y}]$.

Πιο αναλυτικά,

$X - Y = X + (-Y) = [\underline{x},\ \overline{x}] + (-[\underline{y}, \overline{y}]) = [\underline{x},\ \overline{x}] + [-\overline{y},\ -\underline{y}] = [\underline{x} - \overline{y},\ \overline{x} - \underline{y}].$

Παράδειγμα 1

Έστω ότι έχουμε τα διαστήματα $X = [\underline{x},\ \overline{x}] = [2,\ 3]$ και $Y = [\underline{y},\ \overline{y}] = [-7, -4]$, τότε η διαφορά τους είναι το διάστημα:

$Z = X - Y = [\underline{x},\ \overline{x}] - [\underline{y},\ \overline{y}] = [\underline{x},\ \overline{x}] + [-\overline{y},\ -\underline{y}] = [2,\ 3] + [4,\ 7] = [6,\ 10]$

Παράδειγμα 2

Έστω ότι έχουμε τα διαστήματα $X = [\underline{x},\ \overline{x}] = [1,\ 2]$ και $Y = [\underline{y},\ \overline{y}] = [1,\ 2]$, τότε η διαφορά τους είναι το διάστημα:

$Z = X - Y = [\underline{x},\ \overline{x}] - [\underline{y},\ \overline{y}] = [\underline{x},\ \overline{x}] + [-\overline{y},\ -\underline{y}] = [1,\ 2] + [-2,\ -1] = [-1,\ 1]$

Παράδειγμα 3

Έστω ότι έχουμε τα διαστήματα $X = [\underline{x},\ \overline{x}] = [3,\ 7]$ και $Y = [\underline{y},\ \overline{y}] = [-1,\ 5]$, τότε η διαφορά τους είναι το διάστημα:

$Z = X - Y = [\underline{x},\ \overline{x}] - [\underline{y},\ \overline{y}] = [\underline{x},\ \overline{x}] + [-\overline{y},\ -\underline{y}] = [3,\ 7] + [-5,\ 1] = [-2,\ 8]$

Γραφική απεικόνιση (παράδειγμα 3)

- **Γινόμενο**

Το γινόμενο δύο διαστημάτων X και Y είναι ένα νέο διάστημα που προκύπτει ως εξής:

$X * Y = [\min\{\underline{x}\overline{y},\ \underline{x}\underline{y},\ \overline{x}\underline{y},\ \overline{x}\overline{y}\},\ \max\{\underline{x}\overline{y},\ \underline{x}\underline{y},\ \overline{x}\underline{y},\ \overline{x}\overline{y}\}].$

Δηλαδή, υπολογίζουμε τα γινόμενα των άκρων των δύο διαστημάτων και σαν κάτω άκρο του τελικού διαστήματος (αποτέλεσμα) θεωρούμε το μικρότερο από αυτά τα γινόμενα και σαν άνω άκρο το μεγαλύτερο από αυτά τα γινόμενα.

Παράδειγμα 1

Έστω ότι έχουμε τα διαστήματα $X = [\underline{x},\ \overline{x}] = [-3,\ 2]$ και $Y = [\underline{y},\ \overline{y}] = [1,\ 2]$, τότε το γινόμενό τους είναι το διάστημα:

$$Z = X * Y = [\min\{\underline{x}\overline{y},\ \underline{x}\underline{y},\ \overline{x}\underline{y},\ \overline{x}\overline{y}\},\ \max\{\underline{x}\overline{y},\ \underline{x}\underline{y},\ \overline{x}\underline{y},\ \overline{x}\overline{y}\}] =$$
$$= [\min\{-3, -6,\ 2,\ 4\},\ \max\{-3,\ -6,\ 2,\ 4\}] = [-6,\ 4]$$

Παράδειγμα 2

Έστω ότι έχουμε τα διαστήματα $X=[\underline{x},\ \overline{x}]=[0,\ 2]$ και $Y=[\underline{y},\ \overline{y}]=[-5,\ 7]$, τότε το γινόμενό τους είναι το διάστημα:

$$Z = X * Y = \left[\min\{\underline{x}\overline{y},\ \underline{x}\underline{y},\ \overline{x}\underline{y},\ \overline{x}\overline{y}\},\ \max\{\underline{x}\overline{y},\ \underline{x}\underline{y},\ \overline{x}\underline{y},\ \overline{x}\overline{y}\}\right] =$$

$$= [\min\{0, -10,\ 14\},\ \max\{0, -10,\ 14\}] = [-10,\ 14]$$

Παράδειγμα 3

Έστω ότι έχουμε τα διαστήματα $X=[\underline{x},\ \overline{x}]=[-2,\ 4]$ και $Y=[\underline{y},\ \overline{y}]=[2,\ 5]$, τότε το γινόμενό τους είναι το διάστημα:

$$Z = X * Y = \left[\min\{\underline{x}\overline{y},\ \underline{x}\underline{y},\ \overline{x}\underline{y},\ \overline{x}\overline{y}\},\ \max\{\underline{x}\overline{y},\ \underline{x}\underline{y},\ \overline{x}\underline{y},\ \overline{x}\overline{y}\}\right] =$$

$$= [\min\{-4, -10,\ 8,\ 20\},\ \max\{-4, -10,\ 8,\ 20\}] = [-10,\ 20]$$

Γραφική απεικόνιση (παράδειγμα 3)

- **Διαίρεση**

Πριν ορίσουμε τη διαίρεση δύο διαστημάτων θα ορίσουμε το αντίστροφο διάστημα. Συγκεκριμένα, αν $X=[\underline{x},\ \overline{x}]$ είναι ένα διάστημα τότε το αντίστροφο αυτού είναι το διάστημα $\frac{1}{X}=\left[\frac{1}{\underline{x}},\ \frac{1}{\overline{x}}\right]$, εάν $\underline{x}>0$ ή $\overline{x}<0$, δηλαδή $0 \notin X$.

Επομένως,

$\frac{X}{Y} = X * \frac{1}{Y}$, στην περίπτωση όπου το 0 δεν ανήκει στο διάστημα Y.

Στην ουσία δηλαδή, η διαίρεση δύο διαστημάτων είναι ο πολλαπλασιασμός του ενός διαστήματος με το αντίστροφο διάστημα του άλλου, με την προϋπόθεση ότι στο διάστημα που βρίσκεται στον παρανομαστή δεν ανήκει το 0. Επομένως, σύμφωνα και με τον κανόνα του πολλαπλασιασμού διαστημάτων, ο κανόνας για τη διαίρεση είναι ο παρακάτω:

$$\frac{X}{Y} = X * \frac{1}{Y} = \left[\min\left\{\frac{\underline{x}}{\underline{y}},\ \frac{\underline{x}}{\overline{y}},\ \frac{\overline{x}}{\underline{y}},\ \frac{\overline{x}}{\overline{y}}\right\},\ \max\left\{\frac{\underline{x}}{\underline{y}},\ \frac{\underline{x}}{\overline{y}},\ \frac{\overline{x}}{\underline{y}},\ \frac{\overline{x}}{\overline{y}}\right\}\right]$$

Παράδειγμα 1

Δίνεται στο διάστημα $X=[3,\ 8]$. Τότε το αντίστροφο του X είναι το διάστημα

$$Z = \frac{1}{X} = \frac{1}{[3,\ 8]} = [\frac{1}{8},\ \frac{1}{3}].$$

Παράδειγμα 2

Έστω ότι έχουμε τα διαστήματα $X = [\underline{x},\ \overline{x}] = [3,\ 6]$ και $Y = [\underline{y},\ \overline{y}] = [1,\ 2]$, τότε το πηλίκο τους είναι το διάστημα:

$$Z = \frac{X}{Y} = \left[\min\left\{ \frac{\underline{x}}{\underline{y}}, \frac{\underline{x}}{\overline{y}}, \frac{\overline{x}}{\underline{y}}, \frac{\overline{x}}{\overline{y}} \right\},\ \max\left\{ \frac{\underline{x}}{\underline{y}}, \frac{\underline{x}}{\overline{y}}, \frac{\overline{x}}{\underline{y}}, \frac{\overline{x}}{\overline{y}} \right\} \right] =$$

$$= \left[\min\left\{ \frac{3}{1}, \frac{3}{2}, \frac{6}{1}, \frac{6}{2} \right\},\ \max\left\{ \frac{3}{1}, \frac{3}{2}, \frac{6}{1}, \frac{6}{2} \right\} \right] = \left[\frac{3}{2},\ 6 \right]$$

Παράδειγμα 3

Έστω ότι έχουμε τα διαστήματα $X = [\underline{x},\ \overline{x}] = [-3,\ 6]$ και $Y = [\underline{y},\ \overline{y}] = [2,\ 3]$, τότε το πηλίκο τους είναι το διάστημα:

$$Z = \frac{X}{Y} = \left[\min\left\{ \frac{\underline{x}}{\underline{y}}, \frac{\underline{x}}{\overline{y}}, \frac{\overline{x}}{\underline{y}}, \frac{\overline{x}}{\overline{y}} \right\},\ \max\left\{ \frac{\underline{x}}{\underline{y}}, \frac{\underline{x}}{\overline{y}}, \frac{\overline{x}}{\underline{y}}, \frac{\overline{x}}{\overline{y}} \right\} \right] =$$

$$= \left[\min\left\{ \frac{-3}{2}, \frac{-3}{3}, \frac{6}{2}, \frac{6}{3} \right\},\ \max\left\{ \frac{-3}{2}, \frac{-3}{3}, \frac{6}{2}, \frac{6}{3} \right\} \right] = \left[-\frac{3}{2},\ 3 \right]$$

Παράδειγμα 4

Έστω ότι έχουμε τα διαστήματα $X = [\underline{x},\ \overline{x}] = [-2,\ 6]$ και $Y = [\underline{y},\ \overline{y}] = [4,\ 12]$, τότε το πηλίκο τους είναι το διάστημα:

$$Z = \frac{X}{Y} = \left[\min\left\{ \frac{\underline{x}}{\underline{y}}, \frac{\underline{x}}{\overline{y}}, \frac{\overline{x}}{\underline{y}}, \frac{\overline{x}}{\overline{y}} \right\},\ \max\left\{ \frac{\underline{x}}{\underline{y}}, \frac{\underline{x}}{\overline{y}}, \frac{\overline{x}}{\underline{y}}, \frac{\overline{x}}{\overline{y}} \right\} \right] =$$

$$= \left[\min\left\{ \frac{-2}{4}, \frac{-2}{12}, \frac{6}{4}, \frac{6}{12} \right\},\ \max\left\{ \frac{-2}{4}, \frac{-2}{12}, \frac{6}{4}, \frac{6}{12} \right\} \right] = \left[-\frac{1}{2},\ \frac{6}{4} \right]$$

Γραφική απεικόνιση (παράδειγμα 4)

- **Δύναμη διαστήματος**

Η δύναμη ενός διαστήματος X ορίζεται όπως παρακάτω:

$$X^n = \begin{cases} [1,\ 1], & n = 0 \\ \left[\underline{x}^n,\ \overline{x}^n\right], & \underline{x} \geq 0\ \acute{\eta}\ \underline{x} \leq 0 \leq \overline{x}\ \ \kappa\alpha\iota\ \ n\ \ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau o\varsigma \\ \left[\underline{x}^n,\ \overline{x}^n\right], & \underline{x} \leq 0\ \kappa\alpha\iota\ \ n\ \ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau o\varsigma \\ \left[\overline{x}^n,\ \underline{x}^n\right], & \overline{x} \leq 0\ \ \kappa\alpha\iota\ \ n\ \ \alpha\rho\tau\iota o\varsigma \\ \left[0,\ \max\left(\underline{x}^n,\ \overline{x}^n\right)\right], & \kappa\alpha\iota\ \ n\ \ \alpha\rho\tau\iota o\varsigma \end{cases}$$

Επεκτεταμένη αριθμητική διαστημάτων (extended interval arithmetic)

Στην προηγούμενη παράγραφο αναφέραμε την πράξη της διαίρεσης δύο διαστημάτων X/Y για την περίπτωση που ισχύει $0 \notin Y$.
Τώρα θα εξετάσουμε την περίπτωση που το 0 ανήκει στο διάστημα Y. Σε μια τέτοια περίπτωση λοιπόν, ο υπολογισμός του πηλίκου $\frac{X}{Y}$ θα υπολογιστεί χρησιμοποιώντας **επεκτεταμένη αριθμητική διαστημάτων**(extended interval arithmetic) και όχι τον γνωστό μας πλέον, κανόνα του πηλίκου που αναφέρθηκε στην προηγούμενη παράγραφο. Πριν αναφέρουμε τα αποτελέσματα του πηλίκου σε τέτοιες περιπτώσεις, θα πρέπει να επεκτείνουμε το σύνολο των πραγματικών αριθμών προσθέτοντας το $(+\infty)$ και το $(-\infty)$, οπότε τελικά θα έχουμε το σύνολο

$$R^* = R \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$$

Επομένως, μπορούμε πλέον να θεωρούμε διαστήματα που θα έχουν ως άκρα τους το $(+\infty)$ ή το$(-\infty)$ ή και τα δύο μαζί. Δηλαδή, το σύνολο των επεκτεταμένων πραγματικών διαστημάτων θα είναι το

$$I\,R^* = I\,R \cup \{[-\infty,\ r] : r \in R\} \cup \{[l,\ +\infty] : l \in R\} \cup \{[-\infty,\ +\infty]\}$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε δύο διαστήματα $X = [\underline{x},\ \overline{x}]$ και $Y = [\underline{y},\ \overline{y}]$ με $\underline{y} < 0 < \overline{y}$.
Τότε για τη διαίρεση X/Y σύμφωνα με την επεκτεταμένη αριθμητική διαστημάτων θα έχουμε τα παρακάτω αποτελέσματα:

$$\frac{X}{Y}=\begin{cases}\left[\dfrac{\overline{x}}{\underline{y}},\ \infty\right], & \varepsilon\alpha\nu\quad \overline{x}\leq 0\ \kappa\alpha\iota\ \overline{y}=0\\[2ex] \left[-\infty,\ \dfrac{\overline{x}}{\overline{y}}\right]\cup\left[\dfrac{\overline{x}}{\underline{y}},\ +\infty\right], & \varepsilon\alpha\nu\quad \underline{x}\leq 0\,\kappa\alpha\iota\ \underline{y}<0<\overline{y}\\[2ex] \left[-\infty,\ \dfrac{\overline{x}}{\overline{y}}\right], & \varepsilon\alpha\nu\quad \overline{x}\leq 0\ \kappa\alpha\iota\ \underline{y}=0\\[2ex] [-\infty,\ +\infty], & \varepsilon\alpha\nu\quad \underline{x}<0<\overline{x}\\[2ex] \left[-\infty,\ \dfrac{\underline{x}}{\underline{y}}\right], & \varepsilon\alpha\nu\quad \underline{x}\geq 0\ \kappa\alpha\iota\ \overline{y}=0\\[2ex] \left[-\infty,\ \dfrac{\underline{x}}{\underline{y}}\right]\cup\left[\dfrac{\underline{x}}{\overline{y}},\ +\infty\right], & \varepsilon\alpha\nu\quad \underline{x}\geq 0\ \kappa\alpha\iota\ \underline{y}<0<\overline{y}\\[2ex] \left[\dfrac{\underline{x}}{\overline{y}},\ +\infty\right], & \varepsilon\alpha\nu\quad \underline{x}\geq 0\ \kappa\alpha\iota\ \underline{y}=0\end{cases}$$

Ανάλογα με τη διαίρεση ορίζεται επεκτεταμένη αριθμητική και για τις πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης. Συγκεκριμένα, οι κανόνες που ισχύουν σε μια τέτοια αριθμητική είναι οι εξής:

$$[\underline{x},\ \overline{x}]+[-\infty,\ \overline{y}]=[-\infty,\ \overline{x}+\overline{y}]$$

$$[\underline{x},\ \overline{x}]+[\underline{y},\ +\infty]=[\underline{x}+\underline{y},\ +\infty]$$

$$[\underline{x},\ \overline{x}]\pm[-\infty,\ +\infty]=[-\infty,\ +\infty]$$

$$[\underline{x},\ \overline{x}]-[-\infty,\ \overline{y}]=[\underline{x}-\overline{y},\ +\infty]$$

$$[\underline{x},\ \overline{x}]-[\underline{y},\ +\infty]=[-\infty,\ \overline{x}-\underline{y}]$$

Στις παραπάνω σχέσεις το $\underline{x}$ και το $\underline{y}$ μπορεί να είναι $(-\infty)$ το κάθε ένα ξεχωριστά, ή και τα δύο μαζί. Ανάλογα, μπορούν και το $\overline{x}$ και το $\overline{y}$ να είναι $(+\infty)$.

Παράδειγμα 1

Έστω ότι έχουμε τα διαστήματα $X=[\underline{x},\ \overline{x}]=[3,\ 6]$ και $Y=[\underline{y},\ \overline{y}]=[-2,\ 3]$, τότε το πηλίκο τους είναι το διάστημα:

$$Z=\frac{X}{Y}=\left[-\infty,\ \frac{\underline{x}}{\underline{y}}\right]\cup\left[\frac{\underline{x}}{\overline{y}},\ +\infty\right]=\left[-\infty,\ \frac{3}{-2}\right]\cup\left[\frac{3}{3},\ +\infty\right]$$

Αναλυτικά τώρα η διαδικασία μιας τέτοιας διαίρεσης έχει ως εξής:
Χωρίζουμε το διάστημα Υ σε δύο διαστήματα Y_1 και Y_2, όπου το ένα να έχει πάνω άκρο το μηδέν και το άλλο να έχει το μηδέν σαν κάτω άκρο. Δηλαδή, $Y_1 = [-2,\ 0]$, $Y_2 = [0,\ 3]$ και $Y = Y_1 \cup Y_2$. Επομένως, το αποτέλεσμα της διαίρεσης θα είναι της μορφής

$$\left\{ \frac{x}{y} : x \in X,\ y \in Y_1 \right\} \cup \left\{ \frac{x}{y} : x \in X,\ y \in Y_2 \right\}$$

Το $x \in [3,\ 6]$, άρα το πηλίκο $\frac{x}{y} \to -\infty$ όταν $y \to 0^-$, ενώ $\frac{x}{y} \to +\infty$ όταν $y \to 0^+$

Επομένως, το αποτέλεσμα της διαίρεσης είναι το $\left[-\infty,\ \frac{3}{-2}\right] \cup \left[\frac{3}{3},\ +\infty\right]$.

Παράδειγμα 2

Έστω ότι έχουμε τα διαστήματα $X = [\underline{x},\ \overline{x}] = [4,\ 8]$ και $Y = [\underline{y},\ \overline{y}] = [-1,\ 1]$, τότε το πηλίκο τους είναι το διάστημα:

$$Z = \frac{X}{Y} = \left[-\infty,\ \frac{\underline{x}}{\underline{y}}\right] \cup \left[\frac{\underline{\underline{x}}}{y},\ +\infty\right] = [-\infty,\ -4] \cup [4,\ +\infty]$$

Αναλυτικά τώρα η διαδικασία μιας τέτοιας διαίρεσης έχει ως εξής:
Χωρίζουμε το διάστημα Υ σε δύο διαστήματα Y_1 και Y_2, όπου το ένα να έχει πάνω άκρο το μηδέν και το άλλο να έχει το μηδέν σαν κάτω άκρο. Δηλαδή, $Y_1 = [-1,\ 0]$, $Y_2 = [0,\ 1]$ και $Y = Y_1 \cup Y_2$. Επομένως, το αποτέλεσμα της διαίρεσης θα είναι της μορφής

$$\left\{ \frac{x}{y} : x \in X,\ y \in Y_1 \right\} \cup \left\{ \frac{x}{y} : x \in X,\ y \in Y_2 \right\}$$

Το $x \in [-4,\ 8]$, άρα το πηλίκο $\frac{x}{y} \to -\infty$ όταν $y \to 0^-$, ενώ $\frac{x}{y} \to +\infty$ όταν $y \to 0^+$

Επομένως, το αποτέλεσμα της διαίρεσης είναι το $[-\infty,\ -4] \cup [4,\ +\infty]$.

Παράδειγμα 3

Θεωρούμε $X = [4,\ 5]$ και $Y = [-1,\ 2]$ και θέλουμε να βρούμε το (X / Y).
Η διαίρεση X / Y θα γίνει χρησιμοποιώντας επεκτεταμένη αριθμητική αφού το $0 \in Y$.
Το αποτέλεσμα λοιπόν είναι $\frac{X}{Y} = [-\infty,\ -4] \cup [2,\ +\infty]$.

Παρατήρηση

Στην περίπτωση της διαίρεσης $\frac{X}{Y}$, με $x \in X$ και $y \in Y$, όταν $\underline{X} < 0 < \overline{X}$ ή όταν $X = 0$ ή για $Y = 0$, δεν μπορούμε να ξέρουμε πού τείνει το πηλίκο $\frac{x}{y}$. Τότε το αποτέλεσμα είναι όλος ο πραγματικός άξονας $[-\infty,+\infty]$.

Αλγεβρικές ιδιότητες της αριθμητικής διαστημάτων

Από τους ορισμούς των πράξεων, συμπεραίνουμε ότι για την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό ισχύουν η προσεταιριστικότητα και η αντιμεταθετικότητα. Επομένως, για οποιαδήποτε διαστήματα X, Y, Z θα έχουμε:

$X + Y = Y + X$	αντιμεταθετική για την πρόσθεση
$X \cdot Y = Y \cdot X$	αντιμεταθετική για τον πολλαπλασιασμό
$X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$	προσεταιριστική για την πρόσθεση
$X \cdot (Y \cdot Z) = (X \cdot Y) \cdot Z$	προσεταιριστική για τον πολλαπλασιασμό

Πρέπει να τονιστεί εδώ, ότι η επιμεριστική ιδιότητα δεν ισχύει πάντοτε. Δηλαδή, η ισότητα $X \cdot (Y + Z) = X \cdot Y + X \cdot Z$ δεν είναι πάντοτε αληθής.

Παράδειγμα 1

Έστω $X = [1,2]$, $Y = [-3,-3]$ και $Z = [3,3]$.

Τότε $X \cdot (Y + Z) = [1,2] \cdot ([-3,-3] + [3,3]) = [1,2] \cdot [0,0] = [0,0] = 0$,

ενώ

$X \cdot Y + X \cdot Z = [1,2] \cdot [-3,-3] + [1,2] \cdot [3,3] = [-6,-3] + [3,6] = [-3,3] \neq 0$

Βλέπουμε λοιπόν ότι η σχέση $X \cdot (Y + Z) = X \cdot Y + X \cdot Z$ δεν είναι πάντοτε αληθής.

Παρατήρηση

Στο παραπάνω παράδειγμα παρατηρούμε ότι ισχύει η σχέση $[0,0] \subseteq [-3,3]$

Από αυτό εύκολα συμπεραίνουμε ότι για κάθε διάστημα X, Y, Z ισχύει πάντα η σχέση $X \cdot (Y + Z) \subseteq X \cdot Y + X \cdot Z$. Η ιδιότητα αυτή του “περιέχεσθαι” καλείται υποεπιμεριστική (subdistributivity).

Παράδειγμα 2
Πράγματι, αν θεωρήσουμε τα διαστήματα $X=[5,\ 7]$, $Y=[7,\ 9]$ και $Z=[-5,\ -3]$, τότε θα έχουμε
$X\cdot(Y+Z)=[5,\ 7]\cdot([7,\ 9]+[-5,\ -3])=[5,\ 7]\cdot[2,\ 6]=[10,\ 42]$ και
$X\cdot Y+X\cdot Z=[5,\ 7]\cdot[7,\ 9]+[5,\ 7][-5,\ -3]=[35,\ 63]+[-35,\ -15]=[0,\ 48]$Δηλαδή,
$X\cdot(Y+Z)=[10,\ 42]\subseteq[0,\ 48]=X\cdot Y+X\cdot Z$

Η ισότητα ισχύει στις περιπτώσεις που:

- κάποιο από τα διαστήματα X,Y,Z είναι εκφυλισμένο
- τα διαστήματα Y και Z έχουν το ίδιο πρόσημο, δηλαδή όταν $Y\cdot Z>0$
- τα διαστήματα Y και Z είναι συμμετρικά

Το πρόβλημα της εξάρτησης

Αναλυτικά το πρόβλημα της εξάρτησης φαίνεται στα παρακάτω παραδείγματα.

Παράδειγμα 1
Έστω το διάστημα $X=[-3,\ 7]$. Τότε η πράξη $X-X$ δίνει σαν αποτέλεσμα
$X-X=[-3,\ 7]-[-3,\ 7]=[-3,\ 7]+[-7,\ +3]=[-10,\ 10]\neq 0$.

Παράδειγμα 2
Έστω το διάστημα $X=[-1,\ -1]$. Τότε η πράξη $X-X$ δίνει σαν αποτέλεσμα το διάστημα $X-X=[-1,\ -1]-[-1,\ -1]=[-1,\ -1]+[1,\ 1]=[0,\ 0]=0$.

Παρατηρούμε δηλαδή, ότι μόνο όταν το διάστημα Χ είναι εκφυλισμένο η πράξη $X-X$ δίνει σαν αποτέλεσμα το μηδενικό διάστημα.
Κάτι ανάλογο ισχύει και με την πράξη του πολλαπλασιασμού. Πράγματι αυτό φαίνεται στα παρακάτω παραδείγματα.

Παράδειγμα 3
Θεωρούμε το διάστημα $X=[-3,\ 2]$. Υπολογίζουμε το X^2. Σύμφωνα με τον ορισμό της δύναμης που αναφέρθηκε σε προηγούμενη παράγραφο, θα έχουμε
$X^2=\left[0,\ \max\left((-3)^2,\ 2^2\right)\right]=[0,\ \max(9,\ 4)]=[0,\ 9]$.
Αν υπολογίσουμε το γινόμενο $X\cdot X$, τότε θα πάρουμε σαν αποτέλεσμα το διάστημα
$X\cdot X=[-3,\ 2]\cdot[-3,\ 2]=[-6,\ 9]\neq[0,\ 9]$.
Συγκεκριμένα, έχουμε $[0,\ 9]\subseteq[-6,\ 9]$.

Βλέπουμε λοιπόν ότι ο ορισμός της δύναμης ενός διαστήματος 'ξεπερνά' το πρόβλημα της εξάρτησης το οποίο εμφανίζεται κατά τον πολλαπλασιασμό.

Γενικότερα, έχουμε ότι: $X^n \neq \underbrace{X \cdot X \cdot ... X}_{n\ \varphi o\rho\acute{\varepsilon}\varsigma}$. Ο ορισμός της n-στής δύναμης είναι πολύ σημαντικός, διότι μας βοηθά να κατανοήσουμε το πρόβλημα της εξάρτησης στον πολλαπλασιασμό.

Παρατήρηση

Εάν μια συγκεκριμένη interval-μεταβλητή εμφανίζεται μόνο μια φορά κατά τον υπολογισμό μιας συνάρτησης, τότε δεν μπορεί να αυξήσει την εξάρτηση.
Όταν όμως μια δοθείσα μεταβλητή εμφανίζεται περισσότερες από μια φορές σε έναν υπολογισμό με διαστήματα, τότε σε κάθε εμφάνισή της συμπεριφέρεται σαν να είναι διαφορετική μεταβλητή.
Έτσι εξηγείται το γεγονός ότι ενώ περιμένουμε από την πράξη $X - X$, να δώσει σαν αποτέλεσμα το διάστημα $[0,0]$, τελικά έχουμε το $X - X = [\underline{X} - \overline{X}, \overline{X} - \underline{X}]$, όταν το X είναι μη εκφυλισμένο. Δηλαδή στην έκφραση $X - X$ που το διάστημα X εμφανίζεται δύο φορές, είναι σαν να έχουμε $X - Y$, όπου το Y ίσο αλλά ανεξάρτητο του X.

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΠΙΝΑΚΕΣ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΩΝ

Διάνυσμα διαστήματος, λέγεται το διάνυσμα που έχει συντεταγμένες διαστήματα. Η αγγλική ορολογία που χρησιμοποιείται είναι interval vector. Συγκεκριμένα, ένα διαστηματικό διάνυσμα είναι της μορφής $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$, όπου οι συντεταγμένες του είναι τα διαστήματα $X_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$.
Πίνακας διαστημάτων, λέγεται ο πίνακας εκείνος όπου τα στοιχεία του είναι διαστήματα. Ένας τέτοιος πίνακας έχει τη μορφή $A = \begin{pmatrix} A_{11}{}^I & \cdots & A_{1m}{}^I \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{n1}{}^I & \cdots & A_{nm}{}^I \end{pmatrix}$.
Θα συμβολίζουμε με R^n, το σύνολο όλων των n-διάστατων πραγματικών διανυσμάτων με συνιστώσες διαστήματα και με $R^{n\times m}$ το σύνολο όλων των πραγματικών interval πινάκων.
Από γεωμετρική πλευρά, το σύνολο όλων των πραγματικών σημείων x σε ένα interval διάνυσμα, σχηματίζουν ένα n-διάστατο παραλληλεπίπεδο με πλευρές παράλληλες προς τους άξονες συντεταγμένων, αυτό το παραλληλεπίπεδο είναι το λεγόμενο box.

Ορισμοί

- Η **τομή** δύο interval διανυσμάτων είναι το κενό, αν η τομή κάθε μιας από τις αντίστοιχές τους συνιστώσες είναι το κενό, διαφορετικά για $X=(X_1, X_2,\ldots,X_n)$ και $Y=(Y_1, Y_2,\ldots,Y_n)$ έχουμε το διάνυσμα:

$X \cap Y = \left(X_1 \cap Y_1, ..., X_n \cap Y_n\right)$

- Η **ένωσή** τους είναι το διάνυσμα:

$X \cup Y = [\min(\underline{X}, \underline{Y}), \max(\overline{X}, \overline{Y})]$

- Επιπλέον, επεκτείνετε η έννοια του $<$ της γραμμής των πραγματικών αριθμών στα διαστήματα ως εξής:

$X < Y$ αν και μόνο αν $\overline{X} < \underline{Y}$

Η έννοια του υποσυνόλου περιγράφεται από τη σχέση:

$X \subseteq Y$ αν και μόνο αν $\overline{X} \le \overline{Y}$ και $\underline{Y} \le \underline{X}$

- Ορίζεται σαν **μέσο interval διαστήματος** το διάστημα με συντεταγμένες τα μέσα των αντίστοιχων συντεταγμένων:

$m(X) = (m(X_1), ..., m(X_n))^T$

Αν $X = [X_1, X_2]$ τότε $m(X) = (m(X_1), m(X_2))^T = \begin{pmatrix} m(X_1) \\ m(X_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\underline{X}_1 + \overline{X}_1}{2} \\ \dfrac{\underline{X}_2 + \overline{X}_2}{2} \end{pmatrix}$

Παράδειγμα 1

Θεωρούμε το interval διάνυσμα $X = [[-1, 2],\ [3,\ 4]]$, τότε

$$m(X) = \begin{pmatrix} \dfrac{-1+2}{2} \\ \dfrac{3+4}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{7}{2} \end{pmatrix}$$

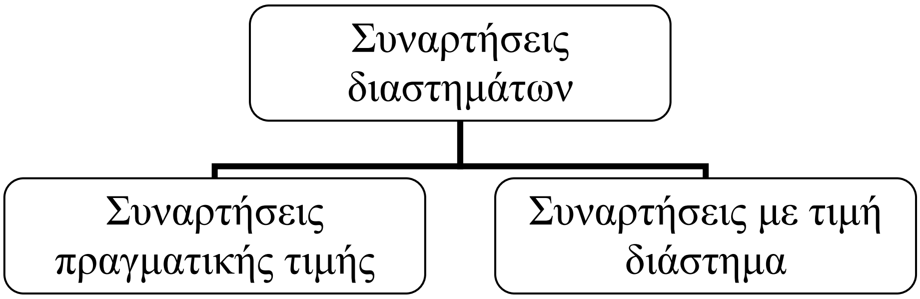
- **Μήκος** ενός interval διανύσματος $X=(X_1,\ldots,X_n)$ ή ενός πίνακα είναι το μήκος της μεγαλύτερης συντεταγμένης ή το μήκος του μεγαλύτερου στοιχείου στην περίπτωση του πίνακα.

Δηλαδή, θα έχουμε: $w\left(X\right) = \max\left(w(X_1), \ldots, w(X_n)\right)$

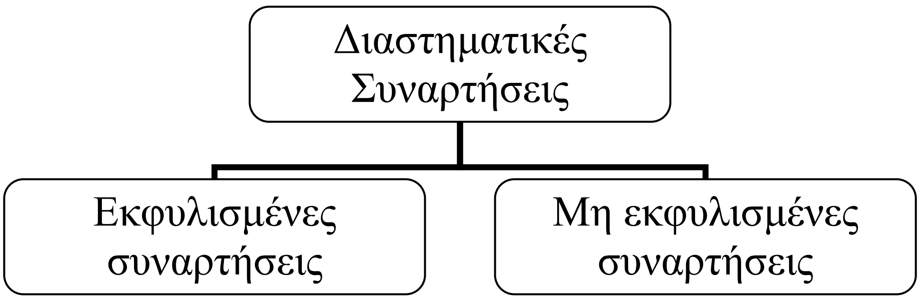
ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Οι συναρτήσεις διαστημάτων προκύπτουν όταν σε μια συνεχή πραγματική συνάρτηση f, η μεταβλητή x αντικατασταθεί από έναν αριθμό διάστημα.

Υπάρχουν δύο ειδών συναρτήσεων:



Οι συναρτήσεις πραγματικής τιμής λέγονται αλλιώς και real valued functions, ενώ οι συναρτήσεις με τιμή διάστημα λέγονται interval valued functions.
Πιο αναλυτικά, **συναρτήσεις πραγματικής τιμής** (real valued functions), λέγονται οι συναρτήσεις που όταν η μεταβλητή x αντικατασταθεί από ένα πραγματικό διάστημα το αποτέλεσμα που προκύπτει είναι και πάλι πραγματικός αριθμός.
Για παράδειγμα: το μέσο ενός διαστήματος, το πλάτος, η απόλυτη τιμή, και το mignitude.
Ενώ, **συναρτήσεις με τιμή διάστημα** (interval valued functions), λέγονται οι συναρτήσεις που όταν η μεταβλητή x αντικατασταθεί από ένα πραγματικό διάστημα το αποτέλεσμα που προκύπτει είναι διάστημα.
Οι συναρτήσεις αυτές είναι σημαντικές γιατί παρέχουν φράγματα του πεδίου τιμών της συνάρτησης. Υπάρχουν δύο είδη διαστηματικών συναρτήσεων:



Συγκεκριμένα, **εκφυλισμένη συνάρτηση** (thin function), καλούμε μια συνάρτηση της οποίας ο τύπος περιέχει ως παραμέτρους μόνο διαστήματα με μηδενικό πλάτος, οι παράμετροι δηλαδή είναι πραγματικοί αριθμοί.

Παράδειγμα 1
Δίνεται η συνάρτηση $F = 2X - [6, 6]$, η οποία περιέχει παραμέτρους μηδενικού πλάτους, όπως το [6, 6] που ισούται με τον πραγματικό αριθμό 6. Η τιμή της λοιπόν, θα είναι μηδενικού πλάτους.
Πράγματι για X=[4, 4] είναι
$F = 2X - [6, 6] = 2[4, 4] - [6, 6] = [8, 8] + [-6, -6] = [2, 2] = 2$.

Μη εκφυλισμένη συνάρτηση, καλούμε τη συνάρτηση που περιέχει παραμέτρους διαστήματα μη μηδενικού πλάτους.

Παράδειγμα 2
Η συνάρτηση $F = X + [3,\, 5]$ περιέχει μια παράμετρο μη μηδενικού πλάτους.
Για X=[-1, 2] , θα είναι $F = [-1,\, 2] + [3,\, 5] = [2,\, 7]$.
Δηλαδή, η τιμή της θα είναι ένα διάστημα μη μηδενικού πλάτους.

Παράδειγμα 3
Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x + 4$ με $x \in [-1,\, 6]$.
Τότε η interval επέκταση της συνάρτησης θα είναι $F(X) = 2X + 4$, με $X = [-1,\, 6]$. Άρα,

$$F([-1,\, 6]) = 2[-1,\, 6] + 4 = [2,\, 2]\cdot[-1,\, 6] + [4, 4] =$$
$$= [-2,\, 12] + [4,\, 4] = [2,\, 16]$$

Παράδειγμα 4
Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x - 5$ με $x \in [0,\, 3]$.
Τότε η interval επέκταση της συνάρτησης θα είναι $F(X) = 3X - 5$, με $X = [0,\, 3]$.
Άρα,

$$F([0,\, 3]) = 3[0,\, 3] - 5 = [3,\, 3]\cdot[0,\, 3] - [5, 5] =$$
$$= [0,\, 9] + [-5,\, -5] = [-5,\, 4]$$

Παράδειγμα 5

Να υπολογιστεί η συνάρτηση με τύπο $f(X, Y) = 1 - 2/(1 + X/Y)$.
Ύστερα να γραφεί με την ισοδύναμη μορφή $f(X, Y) = (X - Y)/(X + Y)$ και να υπολογιστεί ξανά η τιμή της.

Πράγματι, αν πάρουμε σαν διάστημα $X = [-1,\, 2]$ και $Y = [1,\, 2]$, τότε από τον τύπο $f(X, Y) = 1 - 2/(1 + X/Y)$ θα έχουμε:

$$f(X,\, Y) = 1 - 2\left(1 + \frac{[-1,\, 2]}{[1,\, 2]}\right) = 1 - 2([1,\, 1] + [-1,\, 2]) = 1 - 2[0,\, 3] =$$
$$= [1,\, 1] + [-6,\, 0] = [-5,\, 1]$$

Ενώ, από την ισοδύναμη μορφή $f(X, Y) = (X - Y)/(X + Y)$ παίρνουμε

$$f(X, Y) = ([-1,\, 2] - [1,\, 2])/([-1,\, 2] + [1,\, 2]) = \frac{[-3,\, 1]}{[0,\, 3]} = [-\infty,\, +\infty]$$

Δηλαδή, από την πρώτη έκφραση παίρνουμε το ακριβές πεδίο τιμών, ενώ από τη δεύτερη έκφραση παίρνουμε ένα υπερεκτιμημένο (overestimate) πεδίο τιμών.
Επομένως και το αν θα βρούμε διάστημα με μικρό ή όχι πλάτος το οποίο να περιλαμβάνει την πραγματική τιμή μιας συνάρτησης, εξαρτάται από τον τρόπο με τον οποίο εμφανίζεται μια μεταβλητή η οποία είναι διάστημα.

Έτσι, αν μια μεταβλητή-διάστημα εμφανίζεται μόνο μια φορά στο δοθέντα προς υπολογισμό τύπο της συνάρτησης τότε το φαινόμενο της εξάρτησης δεν εμφανίζεται. Αναλυτικά θα αναφερθούμε και στην επόμενη παράγραφο υπολογισμού του range(πεδίο τιμών) συνάρτησης.

Range πραγματικής συνάρτησης

Στη διαστηματική ανάλυση, σε διαφορετικές εκφράσεις μιας συνάρτησης αντιστοιχούν διαφορετικές τιμές. Επομένως, αν θεωρήσουμε $f : R^n \to R$ και $x \in I^n$,
τότε το πεδίο τιμών ή αλλιώς range της συνάρτησης δίνεται από το διάστημα:

$$\overline{f}\,(X) = \{f(x)\ /\ x \in X\} = \left[\min_{x\in X} f(x)\,,\ \ \max_{x\in X} f(x)\right].$$

Παράδειγμα 1
Έστω μια συνάρτηση f με έκφραση

$$f_1(x,\,a) = \frac{x}{\alpha x + 1}, \quad \mu\varepsilon \quad x \neq \frac{1}{\alpha},\ \alpha \neq 0,\ x \neq 0$$

Για A = [1, 3] και για X = [-2, -1] το range θα είναι

$$\overline{f}\left([-2,-1],\,[1,\,3]\right) = \overline{f_1}\left([-2,-1],\,[1,\,3]\right) = \left\{\frac{x}{ax+1} / -2 \le x \le -1,\ 1 \le a \le 3\right\} = \left[\frac{1}{2},\,2\right]$$

Και αν χρησιμοποιήσουμε την ισοδύναμη έκφρασή της,

$$f_2(x) = \frac{1}{\alpha + \frac{1}{x}}, \quad \mu\varepsilon \quad x \neq -\frac{1}{\alpha},\ \alpha \neq 0,\ x \neq 0$$

βρίσκουμε πάλι $\left[\frac{1}{2},\,2\right]$.

Παράδειγμα 2
Θεωρούμε ένα πολυώνυμο της μορφής $P(x) = x^2 - 2x + 3$.
Ψάχνουμε το range των τιμών του P(x), όταν το x είναι ένας αριθμός στο διάστημα [1, 2].
Σύμφωνα με όσα έχουμε αναφέρει παραπάνω, μια interval επέκταση του πολυωνύμου P(x) είναι της μορφής $P(X) = X^2 - 2X + 3$.
Επομένως, $P([1,\,2]) = [1,\,2]^2 - 2\cdot[1,\,2] + 3 = [1,\,4] + [-4,\,-2] + [3,\,3] = [0,\,5]$.

Δηλαδή, το range των τιμών του P(x), όταν το x κινείται στο [1, 2] περιέχεται στο διάστημα [0, 5].
Μια ακόμα interval επέκταση του P(x) είναι της μορφής $P(X) = X(X-2) + 3$. Τότε θα έχουμε

$$P([1,\ 2]) = [1,\ 2]([1,\ 2] + [-2,\ -2]) + [3,\ 3] =$$
$$= [1,\ 2] \cdot [-1,\ 0] + [3,\ 3] = [-2,\ 0] + [3,\ 3] = [1,\ 3]$$

Βρήκαμε δηλαδή ένα πιο περιορισμένο διάστημα που περιέχει το range των τιμών του P(x), παρόλο που αν το x ήταν πραγματικός αριθμός, οι δύο μορφές είναι ισοδύναμες. Αυτό είναι από τα σπουδαιότερα προβλήματα της αριθμητικής διαστημάτων που καλείται **πρόβλημα της εξάρτησης** (the dependency problem).
Σκοπός λοιπόν, είναι η εύρεση εκφράσεων μιας συνάρτησης που θα οδηγούν στις καλύτερες interval επεκτάσεις που θα προσεγγίζουν το εύρος του πεδίου τιμών όσο το δυνατόν καλύτερα. Τέτοιες είναι οι centered forms, που έχουν προταθεί από τον Moore το 1966, ή οποιαδήποτε interval επέκταση μιας ρητής συνάρτησης, όπου κάθε μεταβλητή εμφανίζεται μια φορά και στην πρώτη δύναμη.
Όσον αφορά τις μονότονες εγκλεισμένες συναρτήσεις, έχουμε ότι:
$\overline{f}(X) = \left[f(\underline{X}),\ f\left(\overline{X}\right) \right]$, αν είναι γνησίως αύξουσα και
$\overline{f}(X) = \left[f\left(\overline{X}\right),\ f(\underline{X}) \right]$, αν είναι γνησίως φθίνουσα.

Ορισμοί

- Αν F είναι μια διαστηματική επέκταση της συνάρτησης f, τότε η f καλείται **πραγματικός περιορισμός** της F.

- Μια διαστηματική συνάρτηση $F : I^n \to I$, λέγεται **συνάρτηση εγκλεισμού** της πραγματικής συνάρτησης $F : R^n \to R$, αν ισχύουν τα παρακάτω:
    1. $f(x) = F(x)$ για κάθε $x \in R^n$ και
    2. $\overline{f}(X) \subseteq F(X)$ για κάθε $X \in I^n$

Θεμελιώδες Θεώρημα της Ανάλυσης Διαστημάτων
Μια διαστηματική συνάρτηση F λέγεται συνάρτηση εγκλεισμού της f αν έχει τις ιδιότητες:
1. $f(x) = F(x)$ για κάθε $x \in R^n$ και
2. $\forall \mathrm{X} \subseteq \mathrm{Y} \in \mathrm{I}^n \Rightarrow F(\mathrm{X}) \subseteq F(\mathrm{Y})$

Από το παραπάνω θεώρημα απορρέει το συμπέρασμα πώς αν F είναι μια ρητή διαστηματική επέκταση της πραγματικής συνάρτησης f, τότε έχει την ιδιότητα του εγκλεισμού και ισχύει: $\overline{f}(X) \subseteq F(X)$.
Με άλλα λόγια η τιμής της F περιέχει το πεδίο τιμών της f.
Δηλαδή υπάρχει μια σχέση που συνδέει το πεδίο τιμών μιας πραγματικής συνάρτησης f και του διαστηματικού υπολογισμού της F.

Παράδειγμα 1

Να βρεθεί το range της συνάρτησης $f(X)=\dfrac{X}{3X-1}$, για $X=[2,\ 5]$.

Λύση

Αντικαθιστώντας στον τύπο της f, το διάστημα X θα έχουμε:

$$f([2,\ 5])=\frac{[2,\ 5]}{3[2,\ 5]-1}=\frac{[2,\ 5]}{[6,\ 15]+[-1,\ -1]}=$$

$$=\frac{[2,\ 5]}{[5,\ 14]}=[0.14,\ 1]$$

Αντικαθιστούμε τώρα τον τύπο της συνάρτησης με έναν ισοδύναμό του:

$f(X)=\dfrac{1}{3-\dfrac{1}{X}}$ και υπολογίζουμε ξανά το range για $X=[2,\ 5]$.

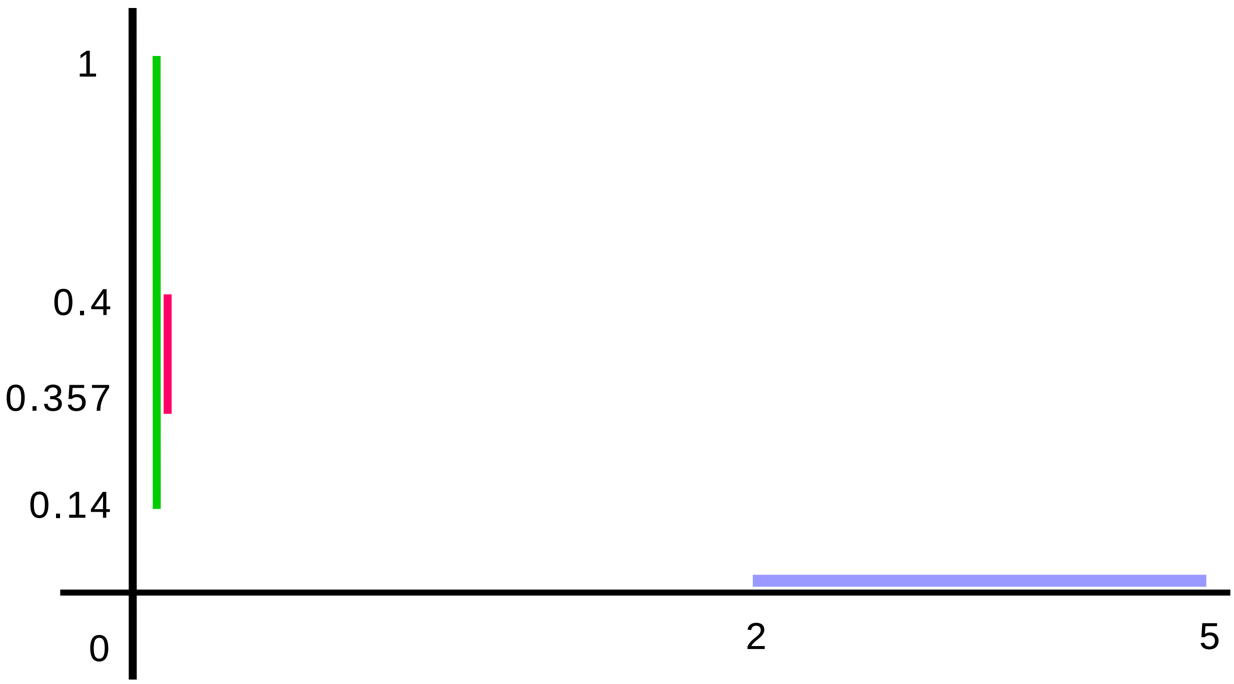
Τότε θα προκύψει:

$$f([2,\ 5])=\frac{1}{3-\dfrac{1}{[2,\ 5]}}=\frac{1}{3-[0.2,\ 0.5]}=$$

$$=\frac{1}{[2.5,\ 2.8]}=[0.357,\ 0.4]$$

Παρατηρούμε ότι $[0.357,\ 0.4]\subseteq[0.14,\ 1]$.

Η γραφική απεικόνιση του παραδείγματος φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα : Overestimation

ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΙΚΑ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Μέθοδοι επίλυσης:

- Η μέθοδος interval Gaussian elimination
- Η interval Gauss-Seidel μέθοδος και
- Η μέθοδος Krawczyk

Πρόβλημα

Θεωρούμε πεπερασμένα συστήματα γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων της μορφής $Ax=b$, όπου A είναι ένας $n\times n$ πίνακας και b είναι n- διάστατο διάνυσμα.
Εναλλακτικά αν δεν είναι γνωστά ο πίνακας A και το διάνυσμα b, και γνωρίζουμε έναν πίνακα A που φράσει τον A και ένα διάνυσμα B που φράσει το b, τότε μπορούμε να αντικαταστήσουμε το αρχικό μας σύστημα με το interval σύστημα AX = B, η διαστηματική λύση του οποίου θα περιέχει τη λύση του Ax = b

Ορισμός

Ένας interval πίνακας A λέγεται κανονικός (ομαλός ή regular), όταν κάθε $A\in$ A είναι non-singular, δηλαδή έχει μη μηδενική ορίζουσα.

Παράδειγμα 1

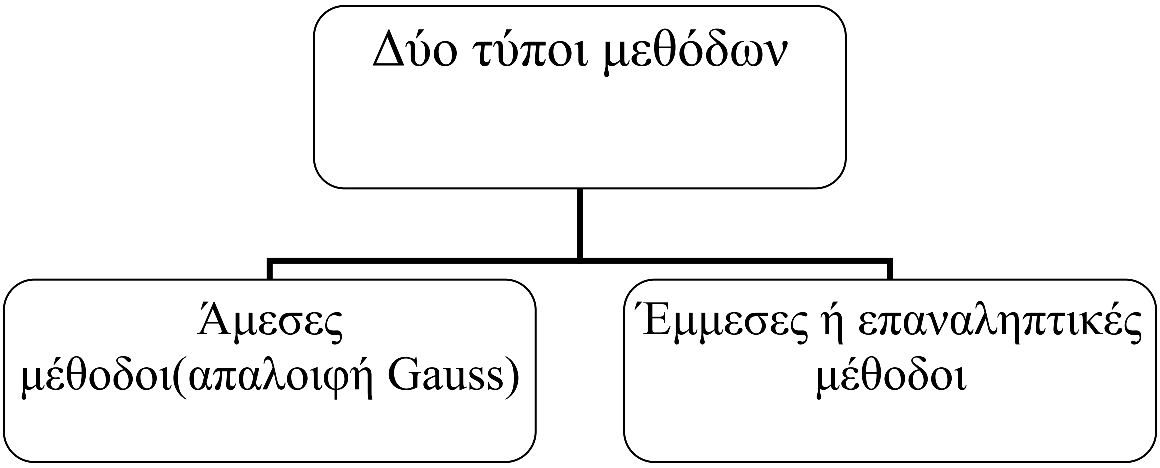
Θεωρούμε τη γραμμική εξίσωση $AX = B$, με $A=\left[-3,\ -1\right]$ και $B=\left[2,\ 6\right]$. Τότε το σύνολο λύσεων είναι το διάστημα

$$X=\frac{\left[2,\ 6\right]}{[-3,\ -1]}=[-6,\ -\frac{2}{3}]$$

Αλλά η πράξη $AX=[-3,\ -1][-6,\ -\frac{2}{3}]=[\frac{2}{3},\ 6]$ δεν δίνει το B.

Συγκεκριμένα, παρατηρούμε ότι $AX\supset B$. Στην πραγματικότητα δηλαδή, βρίσκουμε ένα μεγαλύτερο box το οποίο περιέχει το X.

Αλγόριθμοι επίλυσης



Άμεσες μέθοδοι: Παράγουν ακριβή αποτελέσματα στην περίπτωση που οι συντελεστές των A και B είναι πραγματικοί αριθμοί. Η λύση προκύπτει μετά από έναν πεπερασμένο αριθμό αριθμητικών πράξεων αν ο πίνακας A είναι nonsingular και αν χρησιμοποιείται αριθμητική πεπερασμένης ακρίβειας.

Έμμεσες ή επαναληπτικές μέθοδοι: Παράγουν μία ακολουθία προσεγγιστικών λύσεων στην περίπτωση που οι συντελεστές των A και B είναι πραγματικοί αριθμοί.

Οι τρεις πιο κοινές μέθοδοι για τον υπολογισμό μιας εξωτερικής εκτίμησης του $\Sigma(A,B)$ είναι:

- Η interval Gaussian απαλοιφή

Απαιτεί ο διαστηματικός πίνακας A να είναι κανονικός, αλλά δεν απαιτεί μια αρχική εκτίμηση του συνόλου λύσης.

- Η interval Gauss-Seidel μέθοδος

Δεν απαιτεί ο πίνακας A να είναι κανονικός και τετραγωνικός, αλλά απαιτεί μια αρχική εκτίμηση του συνόλου λύσης $\Sigma(A,B)$.

- Η μέθοδος Krawczyk

Δεν απαιτεί ο πίνακας A να είναι κανονικός και τετραγωνικός, αλλά απαιτεί μια αρχική εκτίμηση του συνόλου λύσης $\Sigma(A,B)$.

Preconditioning

Οι παραπάνω αλγόριθμοι δεν εφαρμόζονται στο αρχικό σύστημα αλλά στο λεγόμενο preconditioned. Το σύστημα αυτό οποίο προκύπτει πολλαπλασιάζοντας το αρχικό σύστημα με έναν πραγματικό πίνακα $Y \in R^{nxn}$.

Μετασχηματισμοί:

$AX = B \longrightarrow YAX = YB$, *δηλ.* $MX = C$, *όπου* $M = YA$ *και* $C = YB$

Ο Y επιλέγεται έτσι ώστε να κάνει το σύνολο λύσεων του νέου συστήματος $MX = C$ ευκολότερο να φραχθεί. Ο Y συνήθως επιλέγεται να είναι ο αντίστροφος A^{-1}.

Η διαδικασία αυτή, επιτρέπει στις παραπάνω μεθόδους να υπολογίζουν στενότερα διαστηματικά φράγματα για τις συντεταγμένες του συνόλου λύσεων.

Παράδειγμα 1

Έστω $Ax=b$ με $A=\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ και $b=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Έστω $Y=\begin{pmatrix} -0.7 & -0.2 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$, τότε θα έχουμε

$$E = I - Y\,A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0.7 & -0.2 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0.1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -0.1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Άρα $\| E \| = 0.1 < 1$ και $Y\,b = \begin{pmatrix} -0.7 & -0.2 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.1 \\ 1.5 \end{pmatrix}$ με $\| Y\,b \| = 1.5$.

Οι συντεταγμένες της αρχικής τιμής θα είναι

$$X_i^{(0)} = [-1,1]\frac{\| Y\,b \|}{1 - \| E \|} = [-1,1]\frac{1.5}{1-0.1} =$$

$$= [-1,1]\frac{1.5}{0.9} = [-1,\,1]\cdot 1.66 = [-1.66,\,1.66]$$

Δηλαδή, $X^{(0)} = \begin{pmatrix} [-1.66\,,1.66] \\ [-1.66\,,1.66] \end{pmatrix}$

Με αρχική τιμή το $X^{(0)}$ και χρησιμοποιώντας την επαναληπτική μέθοδο

$X^{(k+1)} = \{Yb + E\,X^{(k)}\} \cap X^{(k)} = \{Yb + (I - Y\,A)\,X^{(k)}\} \cap X^{(k)}$ με $k = 0,1,2,\ldots$ θα έχουμε:

- Για $k = 0$ θα είναι

$$X^{(1)} = \left\{ \begin{pmatrix} -1.1 \\ 1.5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -0.1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [-1.66,\ 1.66] \\ [-1.66,\ 1.66] \end{pmatrix} \right\} \cap \begin{pmatrix} [-1.66,\ 1.66] \\ [-1.66,\ 1.66] \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} [-1.26,\ -0.934] \\ 1.5 \end{pmatrix}$$

- Για $k = 1$ θα είναι

$$X^{(2)} = \left\{ \begin{pmatrix} -1.1 \\ 1.5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -0.1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [-1.26,\ -0.934] \\ [-1.26,\ -0.934] \end{pmatrix} \right\} \cap \begin{pmatrix} [-1.26,\ -0.934] \\ [-1.26,\ -0.934] \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} [-1.0066,\ -0.974] \\ 1.5 \end{pmatrix}$$

Και συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο.

ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΜΕ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΥΣ

Οι βασικές διαστηματικές μέθοδοι χρησιμεύουν:

- Στην εύρεση-απομόνωση με σιγουριά όλων των ριζών που υπάρχουν μέσα σε ένα διάστημα αναζήτησης.
- Στην απόκτηση ενός διαστήματος, το οποίο θα περιέχει το σύνολο όλων των ριζών μιας εξίσωσης.
- Στην επίλυση παραμετρικών εξισώσεων.
- Στην εύρεση της ελάχιστης ρίζας (minimal root) μιας μη γραμμικής εξίσωσης.

Κλασικές μέθοδοι εύρεσης ριζών:

- Αρχίζουν με μια προσέγγιση
- Εφαρμογή μιας επαναληπτικής μεθόδου
- Πιθανή βελτίωση της προσέγγισης

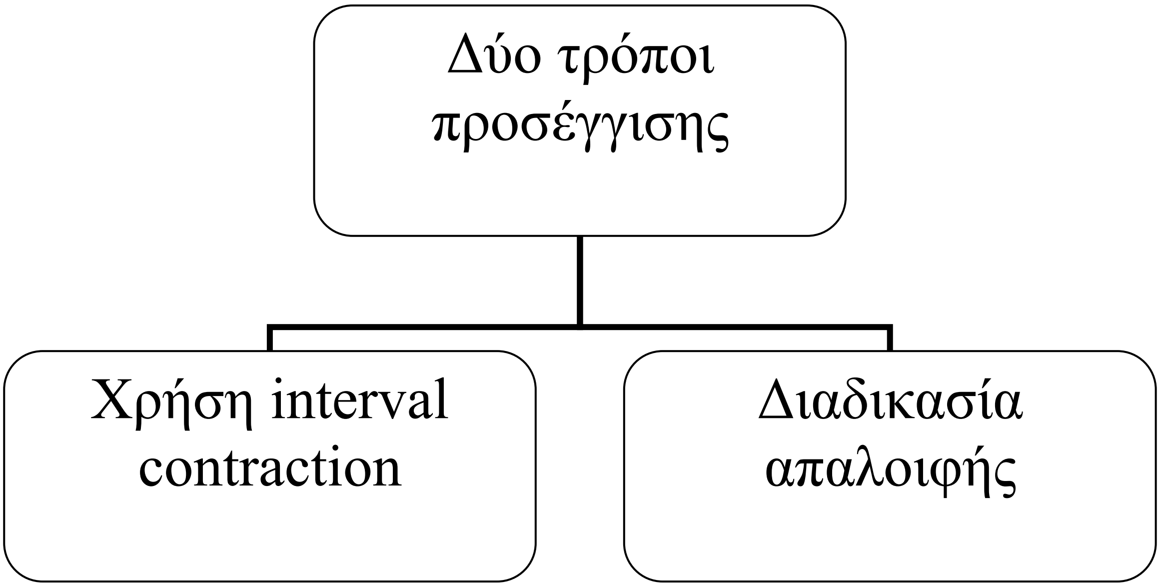
Διαστηματικές μέθοδοι:

- Απόρριψη υποδιαστημάτων στα οποία δεν υπάρχει ρίζα.
- Η επαναληπτική διαδικασία οδηγεί με σιγουριά στα υποδιαστήματα που περιέχουν με σιγουριά τις ρίζες.
- Ο στόχος είναι η απομόνωση των ριζών στο διάστημα αναζήτησης.

Παρατήρηση:
Με τη διστηματική αριθμητική βρίσκουμε με σιγουριά όλες τις ρίζες της εξίσωσης.

Εντοπισμός όλων των ριζών μιας μη γραμμικής εξίσωσης.

Πρόβλημα: Εύρεση όλων των ριζών της εξίσωσης $f(x)=0$ σε ένα διάστημα X_0 και $f:D\subset R\rightarrow R$, συνεχής και διαφορίσιμη συνάρτηση.



Χρήση interval contractions

Ορισμός

Με τον όρο interval contraction, εννοούμε τη διαστηματική συνάρτηση που έχει την ιδιότητα $F(X) \subset X$.

Αν F interval contraction, τότε δημιουργείται μια φωλιασμένη ακολουθία διαστημάτων, η οποία συγκλίνει σε ένα διάστημα που περιέχει ένα σταθερό σημείο (fixed point) του πραγματικού περιορισμού (real restriction) της, δηλαδή της f.

Αν για μια συνάρτηση f, υπάρχει $x_0 \in X_0$ έτσι ώστε να ισχύει $f\left(x_0\right) = x_0$ τότε, η συνάρτηση $g(x) = f(x) - x$ έχει το x_0 σαν ρίζα και αντίστροφα.

Επομένως, για να βρούμε τις ρίζες της $g(x) = 0$ βρίσκουμε τα σταθερά σημεία της $f(x)$.

Διαδικασία απαλοιφής

Στον τρόπο αυτό χρησιμοποιούμε τη διαδικασία απαλοιφής υποδιαστημάτων του αρχικού διαστήματος X_0 που δεν περιέχουν με σιγουριά καμιά ρίζα.

Επομένως, παραμένουν μόνο τα υποψήφια διαστήματα που έχουν πιθανότητα να περιέχουν ρίζα. Το κριτήριο για να απαλείψουμε τα υποδιαστήματα $X_i, i = 1, 2, \ldots$ που δεν περιέχουν ρίζα είναι αυτά για τα οποία ισχύει ότι $0 \notin F(X_i)$.

Συγκεκριμένα ισχύει, $\overline{f}(X) \subseteq F(X)$, άρα αν $0 \notin F(X)$, τότε και $\overline{f}\left(x\right) \neq 0$

Επομένως, θα υπάρχουν δύο περιπτώσεις:

- Ή $F(X) < 0$ άρα και $\overline{f}(x) < 0 \quad \forall x \in X$.
- Ή $F(X) > 0$ άρα και $\overline{f}(x) > 0 \quad \forall x \in X$.

Άρα το διάστημα X δεν περιέχει ρίζα.

Περίπτωση όπου $0 \in F(X)$

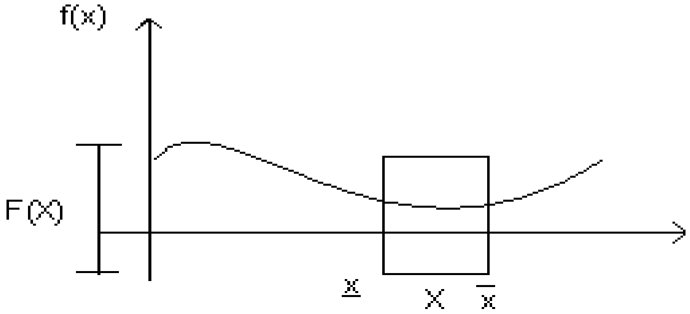
Αν $0 \in F(X)$

Μπορεί να υπάρχει ρίζα στο X

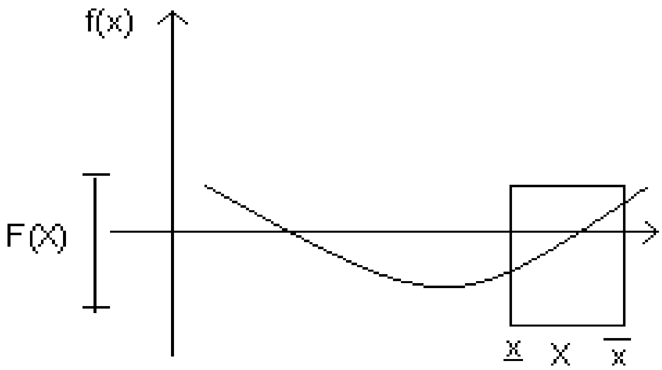
Μπορεί και να μην υπάρχει ρίζα στο X (διαστημα υπερεκτιμημένο)

Γεωμετρική ερμηνεία

Το $0 \in F(X)$ αλλά δεν υπάρχει ρίζα στο X.



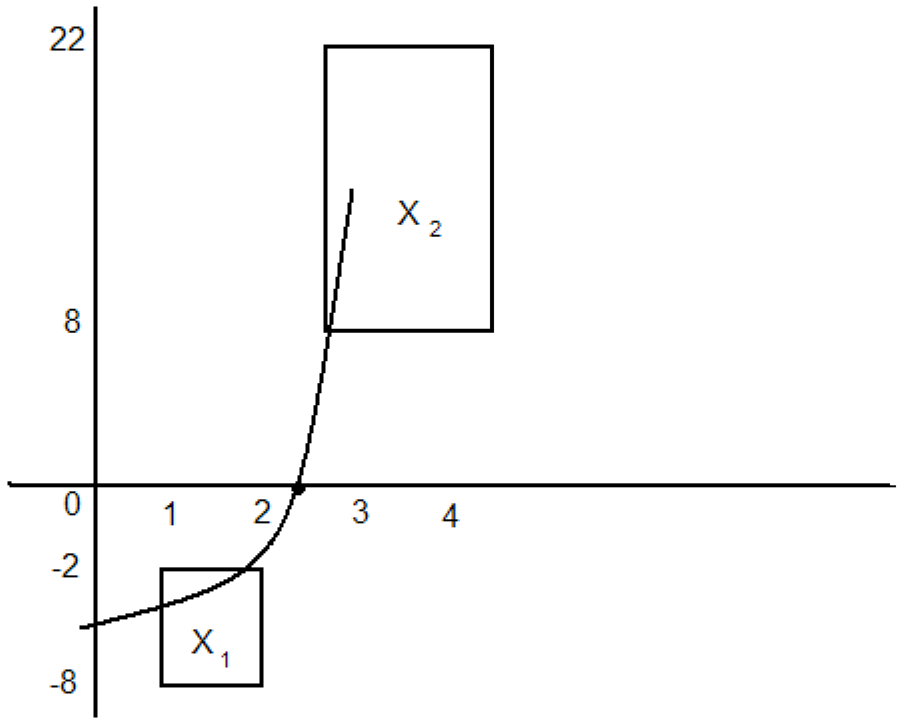
Το $0 \in F(X)$ και υπάρχει ρίζα στο X.



Θεώρημα ύπαρξης ριζών μιας μη γραμμικής εξίσωσης

Έστω μια συνάρτηση $f: R \to R$, αν οι τιμές της σε δύο γειτονικά διαστήματα X_1 και X_2 του X είναι ετερόσημες, τότε το διάστημα X περιέχει τουλάχιστον μια ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$.

Παράδειγμα 1
Έστω η εξίσωση $f(x) = 2x^2 - 10 = 0$ και τα διαστήματα $X_1 = [1, 2]$ και $X_2 = [3, 4]$.
Θα αποδείξουμε ότι στο διάστημα $X = [2, 3]$ υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα.
Πράγματι,
$F(X_1) = F([1, 2]) = 2 \cdot [1, 2]^2 - 10 = 2[1, 4] + [-10, -10] = [-8, -2]$,
δηλαδή, οι τιμές της συνάρτησης είναι αρνητικές στο διάστημα αυτό και
$F(X_2) = F([3, 4]) = 2 \cdot [3, 4]^2 - 10 = [18, 32] + [-10, -10] = [8, 22]$,
όπου σε αυτό το διάστημα οι τιμές είναι θετικές. Άρα στο $X = [2, 3]$ θα υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα.
Αυτό φαίνεται και στο ακόλουθο σχήμα:



Ο γενικός αλγόριθμος για την εύρεση λύσης μιας εξίσωσης σε ένα box X_0 είναι:

- Θέσε το X_0 σε μια λίστα
- Όσο η λίστα δεν είναι κενή πάρε ένα X και
    - Αν $width(X) < \varepsilon$ τότε
    - Αποθήκευσε το X σαν μια δυνατή λύση
    - Αλλιώς
    - Αν $0 \in F(X)$ τότε
    - Υποδιαίρεσε το X σε δύο υποδιαστήματα X_1 και X_2
    - Θέσε τα X_1 και X_2 στη λίστα
    - Τέλος αν
- Τέλος όσο

Μέθοδος interval Bisection (διχοτόμησης)

Παράδειγμα 1

Να βρεθεί η ρίζα της εξίσωσης $f(x)=1-x^2=0$ στο διάστημα $X=[0.9,\ 1.5]$ με ακρίβεια $\varepsilon=0.01$.

Λύση

Για τη λύση του παραδείγματος θα υλοποιήσουμε τον αλγόριθμο που βρίσκεται στις σελίδες 168 και 169 του βιβλίου. Ξεκινώντας λοιπόν, έχουμε:

1^{η} επανάληψη

1. Αρχικοποιούμε τη λίστα $Q:=\{\varnothing\}$.

   Η λίστα Q είναι η λίστα στην οποία αποθηκεύουμε τα διαστήματα που ικανοποιούν το κριτήριο τερματισμού και περιέχουν ρίζα της εξίσωσης.

Συνεχίζουμε στο 2^{o} βήμα του αλγορίθμου

2. $L:=\{X\}$. Στο βήμα αυτό τοποθετούμε το αρχικό μας διάστημα στη λίστα αναζήτησης L, για επεξεργασία.
3. $L:\neq\{\varnothing\}$. Εφόσον η λίστα L δεν είναι κενή, συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα.
4. $L:=L-\{X\}$. Αφαιρούμε από τη λίστα L το διάστημα X και αφού βρούμε τη διαστηματική επέκταση της f, που είναι $F(X)=1-X^2$ προχωράμε στο 5^{o} βήμα όπου:
5. $F(X)=[1,1]-[0.9,\ 1.5]^2=[-1.25,\ 0.19]\in 0$, υπολογίζουμε την τιμή της F στο διάστημα X.
6. Αφού παρατηρήσουμε ότι το 0 ανήκει στο διάστημα που βρέθηκε στο βήμα 4, υπολογίζουμε το πλάτος του X το οποίο είναι
   $w(X)=1.5-0.9=0.6>0.01$.

Παρατηρούμε ότι το κριτήριο τερματισμού δεν ικανοποιείται , άρα προχωράμε στα επόμενα βήματα.

7. Διχοτομούμε το διάστημα X στα διαστήματα X_1 και X_2, $(X,\ X_1,\ X_2)$ τα οποία είναι $X_1=[0.9,\ 1.2]$ και $X_2=[1.2,\ 1.5]$.
8. $L:=\{X_1,\ X_2\}$. Στο βήμα αυτό τοποθετούμε τα διαστήματα αυτά στη λίστα L.

2^{η} επανάληψη

1. $Q:=\{\varnothing\}$. Η λίστα Q παραμένει κενή.
2. $L:=\{X_1,\ X_2\}$. Η λίστα L πλέον περιέχει τα διαστήματα X_1 και X_2.
3. $L:\neq\{\varnothing\}$. Εφόσον η λίστα L δεν είναι κενή, συνεχίζουμε στο επόμενο βήμα.

4. $L:=L-\{X_1\}$. Αφαιρούμε από τη λίστα L το διάστημα X_1 για να το επεξεργαστούμε.
5. $F(X_1)=[1,1]-[0.9,\ 1.2]^2=[-0.44,\ 0.19]\in 0$. Στο βήμα αυτό, υπολογίζουμε το πεδίο τιμών της F στο διάστημα X_1, όπου το 0 ανήκει σε αυτό το πεδίο τιμών.
6. $w(X_1)=1.2-0.9=0.3>0.01$. Στο βήμα αυτό υπολογίζουμε το πλάτος του X_1 για να ελέγξουμε αν ισχύει το κριτήριο τερματισμού, το οποίο από ό, τι παρατηρούμε δεν ικανοποιείται. Οπότε συνεχίζουμε στο 7^o βήμα
7. $(X_1,\ X_{11},\ X_{12})$, όπου διχοτομούμε το X_1 στα διαστήματα X_{11} και X_{12}, τα οποία είναι $X_{11}=[0.9,\ 1.05]$ και $X_{12}=[1.05,1.2]$.
8. $L:=\{X_{11},\ X_{12},\ X_2\}$ Τα διαστήματα αυτά τα τοποθετούμε στη λίστα L, η οποία περιέχει και το διάστημα X_2.

3η επανάληψη

1. $Q:=\{\varnothing\}$. Η λίστα Q παραμένει κενή, αφού δεν έχει βρεθεί κανένα διάστημα που να περιέχει ρίζα.
2. $L:=\{X_{11},\ X_{12},\ X_2\}$. Η λίστα L περιέχει 3 διαστήματα για επεξεργασία και
3. Αφού $L:\neq\{\varnothing\}$ συνεχίζουμε
4. $L:=L-\{X_{11}\}$ αφαιρώντας το διάστημα X_{11} που βρίσκεται πρώτο στη λίστα.
5. $F(X_{11})=[1,1]-[0.9,\ 1.05]^2=[-0.102,\ 0.19]\in 0$, υπολογίζουμε το πεδίο τιμών της F στο διάστημα X_{11} και αφού το 0 ανήκει σε αυτό το πεδίο τιμών
6. Ελέγχουμε το κριτήριο τερματισμού υπολογίζοντας το $w(X_{11})=1.05-0.9=0.15>0.01$, που είναι μεγαλύτερο από την επιθυμητή ακρίβεια.
7. Διχοτομούμε το διάστημα X_{11}, $(X_{11},\ X_{111},\ X_{112})$ στα $X_{111}=[0.9,\ 0.975]$ και $X_{112}=[0.975,\ 1.05]$.
8. Τοποθετούμε τα διαστήματα αυτά στη λίστα επεξεργασίας L, οπότε θα έχουμε $L:=\{X_{111},\ X_{112},\ X_{12},\ X_2\}$

4η επανάληψη

1. $Q:=\{\varnothing\}$. Η λίστα Q παραμένει κενή, αφού δεν έχει βρεθεί ακόμα κανένα διάστημα που να περιέχει ρίζα.
2. $L:=\{X_{111},\ X_{112},\ X_{12},\ X_2\}$. Η λίστα L περιέχει τώρα 4 διαστήματα για επεξεργασία και
3. Αφού $L:\neq\{\varnothing\}$ συνεχίζουμε
4. $L:=L-\{X_{111}\}$ αφαιρώντας το διάστημα X_{111} που βρίσκεται πρώτο στη λίστα.
5. $F(X_{111})=[1,\ 1]-[0.9,\ 0.975]^2=[0.049,\ 0.19]\notin 0$, υπολογίζουμε το πεδίο τιμών της F στο διάστημα X_{111} και αφού το 0 δεν ανήκει σε αυτό το πεδίο τιμών, μπορούμε να διαγράψουμε το διάστημα αυτό από τη λίστα, αφού με σιγουριά δεν περιέχει

ρίζα της εξίσωσης. Συνεχίζουμε λοιπόν, με το επόμενο στη σειρά διάστημα που είναι το X_{112}, οπότε θα έχουμε
$F(X_{112}) = [1,1] - [0.975,\ 1.05]^2 = [-0.102,\ 0.049] \in 0$

6. Ελέγχουμε το κριτήριο τερματισμού υπολογίζοντας το $w(X_{112}) = 1.05 - 0.975 = 0.075 > 0.01$, που είναι μεγαλύτερο από την επιθυμητή ακρίβεια.
7. Διχοτομούμε το διάστημα X_{112} , $(X_{112},\ X_{1121},\ X_{1122})$ στα $X_{1121} = [0.975,\ 1.012]$ και $X_{1122} = [1.012,\ 1.05]$.
8. Τοποθετούμε τα διαστήματα αυτά στη λίστα επεξεργασίας L, οπότε θα έχουμε $L := \{X_{1121},\ X_{1122},\ X_{12},\ X_2\}$

5η επανάληψη

1. $Q := \{\varnothing\}$. Η λίστα Q παραμένει κενή, αφού δεν έχει βρεθεί ακόμα κανένα διάστημα που να περιέχει ρίζα.
2. $L := \{X_{1121},\ X_{1122},\ X_{12},\ X_2\}$. Η λίστα L περιέχει τα 4 διαστήματα για επεξεργασία και
3. Αφού $L :\neq \{\varnothing\}$ συνεχίζουμε
4. $L := L - \{X_{1121}\}$ αφαιρώντας το διάστημα X_{1121} που βρίσκεται πρώτο στη λίστα.
5. $F(X_{1121}) = [1,\ 1] - [0.975,\ 1.012]^2 = [-0.025,\ 0.049] \in 0$, υπολογίζουμε το πεδίο τιμών της F στο διάστημα X_{1121} και αφού το 0 ανήκει σε αυτό το πεδίο τιμών
6. Ελέγχουμε το κριτήριο τερματισμού υπολογίζοντας το $w(X_{1121}) = 1.012 - 0.975 = 0.037 > 0.01$, που είναι μεγαλύτερο από την επιθυμητή ακρίβεια.
7. Διχοτομούμε το διάστημα X_{1121} , $(X_{1121},\ X_{11211},\ X_{11212})$ στα $X_{11211} = [0.97,\ 0.99]$ και $X_{11212} = [0.99,\ 1.01]$.
8. Τοποθετούμε τα διαστήματα αυτά στη λίστα επεξεργασίας L, οπότε θα έχουμε $L := \{X_{11211},\ X_{11212},\ X_{1122},\ X_{12},\ X_2\}$.

6η επανάληψη

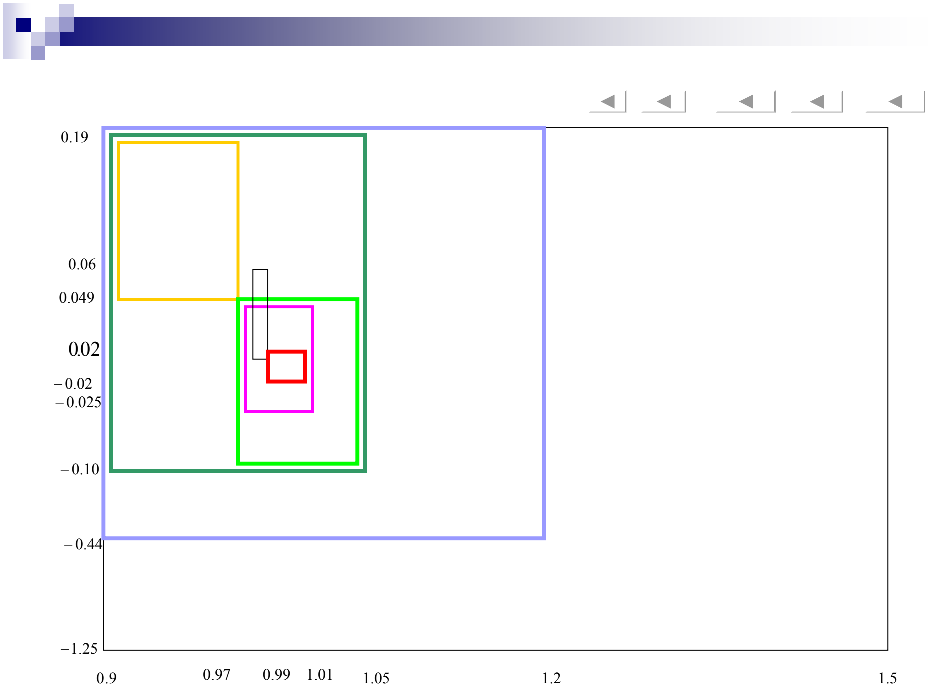
1. $Q := \{\varnothing\}$. Η λίστα Q παραμένει κενή, αφού δεν έχει βρεθεί ακόμα κανένα διάστημα που να περιέχει ρίζα.
2. $L := \{X_{11211},\ X_{11212},\ X_{1122},\ X_{12},\ X_2\}$. Η λίστα L περιέχει 5 πλέον διαστήματα για επεξεργασία και
3. Αφού $L :\neq \{\varnothing\}$ συνεχίζουμε
4. $L := L - \{X_{11211}\}$ αφαιρώντας το διάστημα X_{11211} που βρίσκεται πρώτο στη λίστα.
5. $F(X_{11211}) = [0.02,\ 0.06] \notin 0$, υπολογίζουμε το πεδίο τιμών της F στο διάστημα X_{11211} και αφού το 0 δεν ανήκει σε αυτό το πεδίο τιμών, μπορούμε να διαγράψουμε το

διάστημα αυτό από τη λίστα, αφού με σιγουριά δεν περιέχει ρίζα της εξίσωσης. Συνεχίζουμε λοιπόν, με το επόμενο στη σειρά διάστημα που είναι το X_{11212}, οπότε θα έχουμε

$F\left(X_{11212}\right)=[-0.02,\ 0.02]\in 0$

6. **6.** Ελέγχουμε το κριτήριο τερματισμού υπολογίζοντας το $w(X_{11212})=1.01-0.99=0.02>0.01$, που είναι μεγαλύτερο από την επιθυμητή ακρίβεια.
7. **7.** Διχοτομούμε το διάστημα X_{11212} , $\left(X_{11212},\ X_{112121},\ X_{112122}\right)$στα $X_{112121}=[0.99,\ 1]$ και $X_{112122}=[1,\ 1.01]$.
8. **8.** Τοποθετούμε τα διαστήματα αυτά στη λίστα επεξεργασίας L, οπότε θα έχουμε $L:=\left\{X_{112121},\ X_{112122},\ X_{1122},\ X_{12}\ \ X_{2}\right\}$.

Γεωμετρικά η μέθοδος ερμηνεύεται όπως στο παρακάτω σχήμα:



Μέθοδος Krawczyk

Παράδειγμα 1

Να βρεθεί η ρίζα της εξίσωσης $f\left(x\right)=4x^2-4x+1=0$ στο διάστημα $X=[0,\ 1]$ με ακρίβεια 10^{-3} χρησιμοποιώντας, τη μέθοδο Krawczyk.

Λύση

Υπολογίζουμε τις τιμές της συνάρτησης στα άκρα του διαστήματος $X=[0,\ 1]$.

1η επανάληψη

- Ξεκινάμε υπολογίζοντας πρώτα την τιμή της f στο κάτω άκρο $f\left(\underline{x}\right)=f\left(0\right)=1>0$.

- Βρίσκουμε ύστερα τη διαστηματική επέκταση της παραγώγου της f που είναι $F'(X) = 8X - 4$ και βρίσκουμε το πεδίο τιμών της στο διάστημα X, που είναι $F'([0,\ 1]) = [-4,\ 4] \in 0$.
- Συνεχίζουμε βρίσκοντας μια νέα προσέγγιση για το κάτω άκρο του αρχικού μας διαστήματος. Θα έχουμε: $\underline{x}_1 = \underline{x}_0 - \dfrac{f(\underline{x}_0)}{F'(X)} = 0 - \dfrac{1}{-4} = 0.25$.
- Το επόμενο βήμα είναι να ελέγξουμε αν ισχύει το κριτήριο τερματισμού: $|\underline{x}_1 - \underline{x}_0| = |0.25 - 0| = 0.25 > 0.001$.

Εργαζόμαστε ύστερα, κατά τον ίδιο τρόπο και για το κάτω άκρο του διαστήματος X, οπότε:

- Υπολογίζουμε το $f(\overline{x})$ που είναι $f(\overline{x}) = f(1) = 1 > 0$.
- Άρα η νέα προσέγγιση του άνω άκρου θα είναι $\overline{x}_1 = \overline{x}_0 - \dfrac{f(\overline{x}_0)}{F'(X)} = 1 - \dfrac{1}{4} = 0.75$
- Ελέγχουμε το κριτήριο τερματισμού $|\overline{x_1} - \overline{x_0}| = |0.75 - 1| = 0.25 > 0.001$

Άρα η νέα προσέγγιση του διαστήματος θα είναι το διάστημα

$$X_1 = [\underline{x}_1,\ \overline{x_1}] = [0.25,\ 0.75]$$

Από γεωμετρική σκοπιά τα βήματα αυτά ερμηνεύονται ως εξής:
Βρίσκουμε πρώτα το $(\underline{x}_0,\ f(\underline{x}_0)) = (0,\ 1)$ και υπολογίζουμε την εξίσωση της ευθεία που διέρχεται από αυτό το σημείο και έχει κλίση -4, η οποία είναι $f(x) = -4x + 1$. Η ευθεία αυτή τέμνει τον xx΄ στο σημείο $\underline{x}_1 = 0.25$. Βρίσκουμε ύστερα το $(\overline{x}_0,\ f(\overline{x}_0)) = (1,\ 1)$ και την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από αυτό το σημείο και έχει κλίση 4, η οποία είναι $f(x) = 4x - 3$. Η ευθεία αυτή τέμνει τον xx΄ στο σημείο $\overline{x_1} = 0.75$.

2η επανάληψη

- Υπολογίζουμε το $f(\underline{x}_1) = f(0.25) = 0.25 > 0$.
- Βρίσκουμε το $F'([0.25,\ 0.75]) = [-2,\ 2] \in 0$.
- Η νέα προσέγγιση του κάτω άκρου θα είναι $\underline{x}_2 = \underline{x}_1 - \dfrac{f(\underline{x}_1)}{F'(X_1)} = 0.25 - \dfrac{0.25}{-2} = 0.375$.
- Ελέγχουμε το κριτήριο τερματισμού $|\underline{x}_2 - \underline{x}_1| = |0.375 - 0.25| = 0.125 > 0.001$.

Εργαζόμαστε ανάλογα και για το άνω άκρο $\overline{x}_1$. Οπότε θα έχουμε

- $f(\overline{x}_1) = f(0.75) = 0.25$
- Άρα η νέα προσέγγιση του άνω άκρου θα είναι $\overline{x}_2 = \overline{x}_1 - \dfrac{f(\overline{x}_1)}{F'(X_1)} = 0.75 - \dfrac{0.25}{2} = 0.625$.

- Ελέγχουμε το κριτήριο τερματισμού $\left|\overline{x_2} - \overline{x_1}\right| = |0.625 - 0.75| = 0.125 > 0.001$

Άρα η νέα προσέγγιση του διαστήματος θα είναι το διάστημα

$$X_2 = [0.375,\ 0.625]$$

Από γεωμετρική σκοπιά τα βήματα αυτά ερμηνεύονται ως εξής:
Βρίσκουμε πρώτα το $(\underline{x}_1, f(\underline{x}_1)) = (0.25, 0.25)$ και υπολογίζουμε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από αυτό το σημείο και έχει κλίση -2, η οποία είναι $f(x) = -2x + 0.75$. Η ευθεία τέμνει τον xx΄ στο σημείο $\underline{x}_2 = 0.375$. Βρίσκουμε ύστερα το $(\overline{x}_1,\ f(\overline{x}_1)) = (0.75,\ 0.25)$ και την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από αυτό το σημείο και έχει κλίση 2, η οποία είναι $f(x) = 2x - 1.25$. Η ευθεία αυτή τέμνει τον xx΄ στο σημείο $\overline{x_2} = 0.625$.

3η επανάληψη

- Υπολογίζουμε το $f(\underline{x}_2) = f(0.375) = 0.0625 > 0$ και
- Την τιμή της διαστηματικής επέκτασης της παραγώγου στο διάστημα X_2, που είναι $F'([0.375,\ 0.625]) = [-1,\ 1] \in 0$.
- Άρα η νέα προσέγγιση του κάτω άκρου θα είναι $\underline{x}_3 = \underline{x_2} - \dfrac{f(\underline{x}_2)}{\underline{F'(X_2)}} = 0.375 - \dfrac{0.0625}{-1} = 0.4375$.
- Ελέγχουμε το κριτήριο τερματισμού $|\underline{x}_3 - \underline{x}_2| = |0.4375 - 0.375| = 0.0625 > 0.001$

Ανάλογα,

- Υπολογίζουμε το $f(\overline{x}_2) = f(0.625) = 0.0625$

Άρα,

- Η νέα προσέγγιση του άνω άκρου θα είναι $\overline{x}_3 = \overline{x}_2 - \dfrac{f(\overline{x}_2)}{F'(X_2)} = 0.625 - \dfrac{0.0625}{1} = 0.5625$
- Ελέγχουμε το κριτήριο τερματισμού $\left|\overline{x_3} - \overline{x_2}\right| = |0.5625 - 0.625| = 0.0625 > 0.001$

Άρα η νέα προσέγγιση θα είναι το διάστημα

$$X_3 = [0.4375,\ 0.5625]$$

Από γεωμετρική σκοπιά τα βήματα αυτά ερμηνεύονται ως εξής:
Βρίσκουμε πρώτα το $(\underline{x}_2, f(\underline{x}_2)) = (0.375, 0.0625)$ και υπολογίζουμε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από αυτό το σημείο και έχει κλίση -1, η οποία είναι $f(x) = -x + 0.4375$. Η ευθεία τέμνει τον xx΄ στο σημείο $\underline{x}_3 = 0.4375$. Βρίσκουμε ύστερα το $(\overline{x}_2,\ f(\overline{x}_2)) = (0.625,\ 0.0625)$ και την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από αυτό το

σημείο και έχει κλίση 1, η οποία είναι $f(x)=x-0.5625$. Η ευθεία αυτή τέμνει τον xx΄ στο σημείο $\overline{x_3}=0.5625$.

4η επανάληψη

- Υπολογίζουμε το $f(\underline{x}_3)=f(0.4375)=0.015625>0$ και
- Την τιμή της διαστηματικής επέκτασης της παραγώγου στο διάστημα X_3, που είναι $F'([0.4375,\ 0.5625])=[-0.5,\ 0.5]\in 0$.

Άρα

- Η νέα προσέγγιση του κάτω άκρου θα είναι
$$\underline{x}_4=\underline{x}_3-\frac{f(\underline{x}_3)}{F'(X_3)}=0.4375-\frac{0.015625}{-0.5}=0.46875.$$
- Ελέγχουμε το κριτήριο τερματισμού $|\underline{x}_4-\underline{x}_3|=|0.46875-0.4375|=0.03125>0.001$

Ανάλογα,

- Υπολογίζουμε το $f(\overline{x}_3)=f(0.5625)=0.015625>0$,

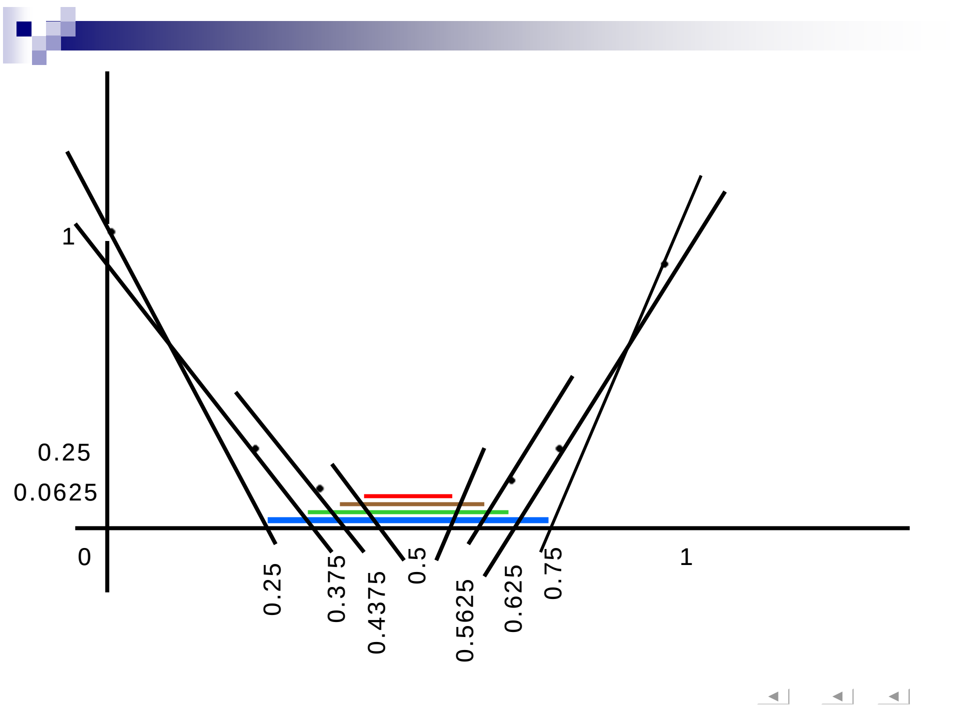
Άρα,

- Η νέα προσέγγιση του άνω άκρου θα είναι
$$\overline{x}_4=\overline{x}_3-\frac{f(\overline{x}_3)}{F'(X_3)}=0.5625-\frac{0.015625}{0.5}=0.53125$$
- Ελέγχουμε το κριτήριο τερματισμού $|\overline{x_4}-\overline{x_3}|=|0.53125-0.5625|=0.03125>0.001$

Άρα η νέα προσέγγιση θα είναι το διάστημα

$$X_4=[0.46875,\ 0.53125]$$

Από γεωμετρική σκοπιά τα βήματα αυτά ερμηνεύονται ως εξής:
Βρίσκουμε πρώτα το $(\underline{x}_3,\ f(\underline{x}_3))=(0.4375,\ 0.015625)$ και υπολογίζουμε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από αυτό το σημείο και έχει κλίση -0.5, η οποία είναι $f(x)=-0.5x+0.234375$. Η ευθεία τέμνει τον xx΄ στο σημείο $\underline{x}_4=0.46875$. Βρίσκουμε ύστερα το $(\overline{x}_3,\ f(\overline{x}_3))=(0.5625,\ 0.015625)$ και την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από αυτό το σημείο και έχει κλίση 0.5, η οποία είναι $f(x)=0.5x-0.265625$. Η ευθεία αυτή τέμνει τον xx΄ στο σημείο $\overline{x_4}=0.53125$
Συνεχίζουμε ανάλογα μέχρι να ικανοποιηθεί το κριτήριο τερματισμού παρατηρώντας ότι οι προσεγγίσεις των διαστημάτων κινούνται γύρω από τον αριθμό 0.5 που είναι και η λύση της εξίσωσης.
Γεωμετρικά θα προκύψει το παρακάτω σχήμα που περιλαμβάνει όλες τις επαναλήψεις της μεθόδου.



Μέθοδος interval Newton

Η μέθοδος interval Newton συνδυάζει τη μέθοδο Newton, το θεώρημα μέσης τιμής και την ανάλυση διαστημάτων.

Αλγόριθμος της interval Newton

Έστω F interval επέκταση της f και $X \subseteq [a,b]$

Βήμα 1: Υπολόγισε τα $F([a,b])$ και $F'([a,b])$.

Αν $0 \notin F\left([a,\ b]\right)$ τότε ο αλγόριθμος σταματάει,

αλλιώς

αν $0 \in F([a,b])$ έλεγξε το $F'([a,b])$ αν περιέχει το 0 τότε προχώρα στο βήμα 2.

Βήμα 2: Βρες το μέσο του διαστήματος και θέσε $[a,b] = [a, \frac{a+b}{2}] \cup [\frac{a+b}{2}, b]$

εκτέλεσε το βήμα 1 για κάθε διάστημα $\left[a,\ \frac{a+b}{2}\right]$ και $\left[\frac{a+b}{2},\ b\right]$.

Αν $0 \notin F'([a,b])$ προχώρα στο επόμενο βήμα.

Βήμα 3: Υπολόγισε το $N([a,b])$.

Αν $N([a,b]) \cap [a,b] = \varnothing$, τότε το $[a,b]$ δεν περιέχει ρίζα και ο αλγόριθμος ολοκληρώνεται.

Αν $N([a,b]) \cap [a,b] \neq \varnothing$ τότε το διάστημα $[a,b]$, ίσως περιέχει μια ρίζα της f.

Μέθοδος interval Newton για μη γραμμικά συστήματα

Ο επαναληπτικός τύπος της μεθόδου εκφράζεται από τη σχέση
$X_{k+1} = X_k \cap \{m(X_k) - J^{-1}(X_k)F(m(X_k))\}$

Συγκεκριμένα, η αναζήτηση αρχίζει με μια αρχική προσέγγιση $X_0 = \begin{pmatrix} X_1^{\,0} \\ X_2^{\,0} \end{pmatrix}$

και $J^{-1} = \left(\begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \partial_2 f_2 \\ \partial_1 f_2 & \partial_2 f_2 \end{pmatrix}_{(X_1^{\,0},\, X_2^{\,0})} \right)^{-1}$ ο Ιακωβιανός πίνακας που αντικαθιστά την παράγωγο.

Η μέθοδος αυτή επαναλαμβάνεται μέχρι να ικανοποιηθεί το κριτήριο τερματισμού.

Παράδειγμα 1

Να βρεθεί η λύση του συστήματος $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} = \begin{cases} x_1^2 + 2x_2^{\,2} - 3 \\ x_1 - x_2 \end{cases}$

με εφαρμογή της διαστηματικής μεθόδου Newton, στο box $X^0 = \begin{pmatrix} X_1^0 \\ X_2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [0.8,\ 1.3] \\ [0.8\ ,1.3] \end{pmatrix}$.

Λύση

Βρίσκουμε τη διαστηματική επέκταση $F(X) = \begin{pmatrix} F_1(X) \\ F_2(X) \end{pmatrix}$ της $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$ η οποία είναι

$$F(X) = \begin{cases} F_1(X_1, X_2) = X_1^2 + 2X_2^{\,2} - 3 \\ F_2(X_1, X_2) = X_1 - X_2 \end{cases}.$$

Βρίσκουμε τον interval Ιακωβιανό πίνακα που είναι:

$$J(X) = \begin{pmatrix} 2\mathrm{X}_1 & 4X_2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

και υπολογίζουμε τον αντίστροφο αυτού που είναι

$$V(X) = J^{-1}(X) = \begin{pmatrix} 2\mathrm{X}_1 & 4X_2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-2X_1 - 4X_2} \begin{pmatrix} -1 & -4X_2 \\ -1 & 2X_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2X_1 + 4X_2} & \dfrac{2X_2}{X_1 + 2X_2} \\ \dfrac{1}{2X_1 + 4X_2} & -\dfrac{X_1}{X_1 + 2X_2} \end{pmatrix}$$

Το διάνυσμα των μέσων είναι το διάνυσμα $m(X) = \begin{pmatrix} m(X) \\ m(X) \end{pmatrix}$

1η επανάληψη

Είναι $m(X_0) = \begin{pmatrix} m(X_1^0) \\ m(X_2^0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.05 \\ 1.05 \end{pmatrix}$ και $F(m(X_0)) = \begin{pmatrix} F_1(m(X_0)) \\ F_2(m(X_0)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3075 \\ 0 \end{pmatrix}$

Επιπλέον, $V_0 = V(X_0) = J^{-1}(X_0) = \begin{pmatrix} [0.1282,\ 0.2083] & [0.4102,\ 1.0833] \\ [0.1282,\ 0.2083] & [-0.5416,\ -0.2051] \end{pmatrix}$

Άρα $V_0 * F\left(m\left(X_0\right)\right) = \begin{pmatrix} \mathbf{[0.0394,\quad 0.0640]} \\ \mathbf{[0.0394,\quad 0.0640]} \end{pmatrix}$ και $m\left(X_0\right) - V_0 * F\left(m\left(X_0\right)\right) = \begin{pmatrix} [0.986,\ 1.0106] \\ [0.986,\ 1.0106] \end{pmatrix}$

Επομένως, η **πρώτη** επανάληψη θα είναι

$$X_1 = X_0 \cap \{m(X_0) - V_0 * F(m(X_0))\} = \begin{pmatrix} [0.986,\ 1.0106] \\ [0.986,\ 1.0106] \end{pmatrix}$$

2η επανάληψη

Είναι $m(X_1) = \begin{pmatrix} m(X_1^1) \\ m(X_2^1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.998 \\ 0.998 \end{pmatrix}$ και $F(m(X_1)) = \left(F(m\left(X_1\right)) = \begin{pmatrix} F_1(m\left(X_1\right)) \\ F_2(m\left(X_1\right)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.011 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

Επιπλέον, $V_1 = V(X_1) = J^{-1}(X_1) = \begin{pmatrix} [0.164,\ 0.169] & [0.650,\ 1.683] \\ [0.164,\ 0.169] & [-0.341,\ -0.325] \end{pmatrix}$

Άρα $V_1 * F\left(m\left(X_1\right)\right) = \begin{pmatrix} \mathbf{[-0.00185,\quad -0.0018]} \\ \mathbf{[-0.00185,\quad -0.0018]} \end{pmatrix}$ και

$m\left(X_1\right) - V_1 * F\left(m\left(X_1\right)\right) = \begin{pmatrix} [0.9998,\ 0.99985] \\ [0.9998,\ 0.99985] \end{pmatrix}$

Επομένως, η **δεύτερη** επανάληψη θα είναι

$$X_2 = X_1 \cap \{m(X_1) - V_1 * F(m(X_1))\} = \begin{pmatrix} [0.9998,\ 0.99985] \\ [0.9998,\ 0.99985] \end{pmatrix}$$

3η επανάληψη

Είναι $m(X_2) = \begin{pmatrix} m(X_1^2) \\ m(X_2^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.999825 \\ 0.999825 \end{pmatrix}$ και

$F(m(X_2)) = \left(F(m\left(X_2\right)) = \begin{pmatrix} F_1(m\left(X_2\right)) \\ F_2(m\left(X_2\right)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.00069 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

Επιπλέον, $V_2 = V(X_2) = J^{-1}(X_2) = \begin{pmatrix} [0.16669,\ 0.1667] & [0.6666,\ 1.6667] \\ [0.16669,\ 0.1667] & [-0.33335,\ -0.33331] \end{pmatrix}$

Άρα $V_2 * F\left(m\left(X_2\right)\right) = \begin{pmatrix} \mathbf{[-0.00011502,\quad -0.00011501]} \\ \mathbf{[-0.00011502,\quad -0.00011501]} \end{pmatrix}$ και

$m\left(X_2\right) - V_2 * F\left(m\left(X_2\right)\right) = \begin{pmatrix} [0.99994,\ 0.99994] \\ [0.99994,\ 0.99994] \end{pmatrix}$

Επομένως, η **τρίτη** επανάληψη θα είναι

$$X_3 = X_2 \cap \{m(X_2) - V_2 * F(m(X_2))\} = \begin{pmatrix} [0.99994,\ 0.99994] \\ [0.99994,\ 0.99994] \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα 2
Να βρεθεί η ρίζα της εξίσωσης $f(x) = x^2 - 5$ χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Newton, για $X_0 = [2, 3]$.

Λύση

Βρίσκουμε τη διαστηματική επέκταση της συνάρτησης f, που είναι $F(X) = X^2 - 5$ και τη διαστηματική επέκταση της παραγώγου που είναι $F'(X) = 2X$.
Βρίσκουμε έπειτα το μέσο του διαστήματος X, που στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι το $m(X) = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2}$.
Ξεκινάμε τη μέθοδο με την πρώτη επανάληψη.

1η επανάληψη

Βρίσκουμε τον τελεστή της Newton που είναι

$$N(m(X_0),\ X_0) = m(X_0) - \frac{F(m(X_0))}{F'(X_0)} = \frac{5}{2} - \frac{\frac{25}{4} - \frac{20}{4}}{[4,\ 6]} =$$

$$= \frac{5}{2} - \frac{\frac{5}{4}}{[4,\ 6]} = \frac{5}{2} - \left[\frac{5}{16} - \frac{5}{24}\right] = \left[\frac{35}{16}, \frac{55}{24}\right]$$

Επομένως, η νέα προσέγγιση θα είναι το διάστημα

$$X_1 = X_0 \cap N(m(X_0),\ X_0) = \left[\frac{35}{16}, \frac{55}{24}\right] = [2.187,\ 2.291]$$

2η επανάληψη

Συνεχίζοντας στη δεύτερη επανάληψη θα έχουμε τα παρακάτω:

$$N(m(X_1),\ X_1) = m(X_1) - \frac{F(m(X_1))}{F'(X_1)} = 2.23 - \frac{4.9729 - 5}{[4.374,\ 4.582]} =$$

$$= 2.23 - \frac{-0.0271}{[4.374,\ 4.582]} = 2.23 - [-0.00619, -0.00591] = [2.23591,\ 2.23619]$$

Και άρα η νέα προσέγγιση θα είναι το διάστημα

$$X_2 = X_1 \cap N\left(m\left(X_1\right),\, X_1\right) = \left[\frac{35}{16},\, \frac{55}{24}\right] = \left[2.23591,\ 2.23619\right]$$

3η επανάληψη

Συνεχίζοντας κατά τον ίδιο τρόπο και στην τρίτη επανάληψη θα έχουμε

$$N\left(m\left(X_2\right),\, X_2\right) = m\left(X_2\right) - \frac{F\left(m\left(X_2\right)\right)}{F'\left(X_2\right)} = 2.23605 - \frac{4.9999-5}{\left[4.471,\, 4.472\right]} =$$

$$= 2.23605 - \frac{-0.0001}{\left[4.471,\, 4.472\right]} = 2.23605 - \left[-0.0000223664, -0.0000223614\right] =$$

$$= \left[2.23607,\ 2.23607\right]$$

Και επομένως η νέα προσέγγιση θα είναι το διάστημα X_3

$$X_3 = X_2 \cap N\left(m\left(X_2\right),\, X_2\right) = \left[2.23607,\ 2.23607\right]$$

Παράδειγμα 3

Να βρεθούν όλες οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 3x^2 - 10x + 3 = 0$ στο διάστημα $X_0 = [0,\ 4]$ χρησιμοποιώντας την μέθοδο interval Newton, με ακρίβεια $\varepsilon = 10^{-3}$.

Λύση

Ο αλγόριθμος που θα υλοποιήσουμε βρίσκεται στις σελίδες 186 και 187 του βιβλίου. Πριν ξεκινήσουμε την εφαρμογή του στο παράδειγμά μας, θα βρούμε τη διαστηματική επέκταση της συνάρτησης που είναι $F(X) = 3X^2 - 10X + 3$.

1η επανάληψη

1. $Q := \{\varnothing\}$. Αρχικοποιούμε τη λίστα L με το κενό διάστημα.

Θέτουμε στη λίστα L το αρχικό διάστημα $X_0 = [0,\ 4]$. Άρα θα έχουμε

2. $L := \{X_0\} = \{[0,\ 4]\}$
3. $L :\neq \{\varnothing\}$. Εφόσον είναι διάφορη της κενής

Αφαιρούμε το X_0 από τη λίστα L, άρα

4. $L := L - \{X_0\}$ υπολογίζουμε το $F(X_0)$, που είναι $F(X_0) = [-37,\ 51]$

Παρατηρούμε ότι

5. $0 \in F(X_0)$ άρα
6. Υπολογίζουμε το πλάτος του X_0 που είναι $w(X_0) = 4 - 0 = 4 > 0.001$.

Δεν ικανοποιείται το κριτήριο τερματισμού, αλλά ούτε και τα βήματα 7 και 8 άρα συνεχίζουμε με το βήμα 9, όπου υπολογίζουμε το

9. $F'([0,\ 4]) = 6 * [0,\ 4] - 10 = [-10,\ 14] \in 0$

Συνεχίζουμε στο βήμα 10, όπου βρίσκουμε το μέσο του που είναι

10. $m(X_0)=2$ και την τιμή της F σε αυτό $F(m(X_0))=F([2,\ 2])=[-5,\ -5]$

Δεν ικανοποιούνται τα ενδιάμεσα βήματα του αλγορίθμου, άρα πάμε στο βήμα 14.

14. $N(m(X_0),X_0) = m(X_0)-\dfrac{F(m(X_0))}{F'(X_0)}=[2,\ 2]-\dfrac{[-5,\ -5]}{[-10,\ 14]}=[-\infty,1.5]\cup[2.35,+\infty]$

Άρα η νέα προσέγγιση θα είναι

15. $X_1 = N(m(X_0),X_0)\cap X_0 = [0,\ 1.5]\cup[2.35,\ 4] = X_{1,1}\cup X_{1,2}$

Με $X_{1,1}=[0,\ 1.5]$ και $X_{1,2}=[2.35,\ 4]$, τα οποία και τα θέτουμε στη λίστα L.

16. $L:=\{X_{1,1},\ X_{1,2}\}$

2η επανάληψη

1. $Q:=\{\varnothing\}$. Η λίστα Q παραμένει η κενή.
2. $L:=\{X_{1,1},\ X_{1,2}\}$. Η λίστα L περιέχει δύο διαστήματα προς επεξεργασία, από τα οποία επιλέγουμε το πρώτο. Άρα εφόσον
3. $L:\neq\varnothing$
4. $L:=L-\{X_{1,1}\}$, το $X_{1,2}$ παραμένει στην λίστα για να το επεξεργαστούμε αργότερα. Υπολογίζουμε το $F(X_{1,1})=[-12,\ 9.75]$.
5. $0\in F(X_{1,1})$, οπότε βρίσκουμε στο βήμα 6 το πλάτος του
6. $w(X_{1,1})=1.5-0=1.5>0.001$

Συνεχίζουμε με το βήμα 9, όπου βρίσκουμε την τιμή της διαστηματικής επέκτασης της παραγώγου που είναι

9. $F'([0,\ 1.5])=6*[0,\ 1.5]-10=[-10,\ -1]\not\ni 0$

Επομένως βρίσκουμε το μέσο του

10. $m(X_{1,1})=0.75$ και $F(m(X_{1,1}))=F([0.75,\ 0.75])=[-2.81,\ -2.81]$.

Άρα πηγαίνουμε στο βήμα 20, αφού $0\notin F(m(X_{1,1}))$. Θα έχουμε

20. $N(m(X_{1,1}),X_{1,1}) = [0.75\ \ -0.75]-\dfrac{[-2.81,\ -2.81]}{[-10,\ -1]}=[-2.06,\ 0.46]$. Επομένως η νέα προσέγγιση θα είναι $X_2 = N(m(X_{1,1}),X_{1,1})\cap X_{1.1} = [0,\ 0.46]$ και η λίστα L

21. $L:=\{X_2,\ X_{1,2}\}$.

3η επανάληψη

1. $Q:=\{\varnothing\}$. Η λίστα Q παραμένει η κενή.
2. $L:=\{X_2,\ X_{1,2}\}$ και
3. $L:\neq\varnothing$
4. $L:=L-\{X_2\}$, αφαιρούμε από τη λίστα το πρώτο διάστημα, που είναι το X_2 και υπολογίζουμε την τιμή της συνάρτησης σε αυτό που είναι $F(X_2)=[-1.6,\ 3.6]$
5. Παρατηρούμε ότι $0\in F(X_2)$, άρα

6. Υπολογίζουμε το πλάτος του X_2 που είναι $w(X_2) = 0.46 - 0 = 0.46 > 0.001$.
Προχωράμε στο βήμα 9, όπου υπολογίζουμε την τιμή της διαστηματικής επέκτασης της παραγώγου,

9. $F'([0,\ 0.46]) = 6*[0,\ 0.46] - 10 = [-10,\ -7.24] \not\ni 0$

10. Βρίσκουμε το μέσο του, που είναι $m(X_2) = 0.23$
και το $F(m(X_2)) = F([0.23,\ 0.23]) = [0.85,\ 0.85]$

Αφού το μηδέν δεν ανήκει σε αυτό το πεδίο τιμών που προέκυψε, συνεχίζουμε με το βήμα 20 που βρίσκουμε τον τελεστή της Newton και τη νέα προσέγγιση

20. $N(m(X_2), X_2) = [0.23,\ 0.23] - \dfrac{[0.85,\ 0.85]}{[-10.,\ -7.24]} = [0.31,\ 0.34]$ και

$X_3 = N(m(X_2), X_2) \cap X_2 = [0.31,\ 0.34]$

21. $L := \{X_3,\ X_{1,2}\}$

4η επανάληψη

1. $Q := \{\varnothing\}$. Η λίστα Q παραμένει η κενή.

2. $L := \{X_3,\ X_{1,2}\}$ και εφόσον

3. $L :\neq \varnothing$

4. $L := L - \{X_3\}$, αφαιρούμε από τη λίστα το X_3 και υπολογίζουμε το $F(X_3) = [-0.24,\ 0.11]$

5. Παρατηρούμε ότι $0 \in F(X_3)$, άρα

6. Βρίσκουμε το πλάτος του που είναι $w(X_3) = 0.34 - 0.31 = 0.03 > 0.001$

Και συνεχίζοντας στο βήμα 9,

9. $F'([0.31,\ 0.34]) = 6*[0.31,\ 0.34] - 10 = [-8.14,\ -7.96] \not\ni 0$, άρα

10. Βρίσκουμε το μέσο του X_3, $m(X_3) = 0.325$ και το $F(m(X_3)) = F([0.325,\ 0.325]) = [0.066,\ 0.066]$

20. $N(m(X_3), X_3) = [0.325,\ 0.325] - \dfrac{[0.066,\ 0.066]}{[-8.14,\ -7.96]} = [0.3331,\ 0.3332]$ και η νέα προσέγγιση

$X_4 = N(m(X_3), X_3) \cap X_3 = [0.3331,\ 0.3332]$

21. $L := \{X_4,\ X_{1,2}\}$

5η επανάληψη

1. $Q := \{\varnothing\}$. Η λίστα Q παραμένει η κενή.

2. $L := \{X_4,\ X_{1,2}\}$ και εφόσον

3. $L :\neq \varnothing$

4. $L := L - \{X_4\}$, αφαιρούμε από τη λίστα το X_4 και υπολογίζουμε το $F(X_4) = [0.00086,\ 0.00206] \not\ni 0$

5. Παρατηρούμε ότι $0 \notin F(X_4)$, άρα

6. Βρίσκουμε το πλάτος του που είναι $w(X_4) = 0.3332 - 0.3331 = 0.0001 < 0.001$
Παρατηρούμε λοιπόν, ότι ικανοποιείται το κριτήριο τερματισμού, άρα το X_4 =[0.3331, 0.3332] περιέχει μια ρίζα της εξίσωσης, οπότε και το αποθηκεύουμε στη λίστα Q.

7. $Q := \{X_4\}$

6η επανάληψη

1. $Q := \{X_4\}$. Η λίστα Q πλέον περιλαμβάνει το διάστημα X_4.

2. $L := \{X_{1,2}\}$. Στη λίστα L βρίσκεται μόνο το $X_{1,2}$ και

3. $L :\neq \varnothing$ εφόσον είναι διάφορη της κενής,

4. $L := L - \{X_{1,2}\}$ αφαιρούμε το διάστημα αυτό από τη λίστα και υπολογίζουμε το πεδίο τιμών της συνάρτησης σε αυτό $F(X_{1,2}) = [-20.43,\ 27.5]$

5. $0 \in F(X_{1,2})$ και επομένως,

6. Υπολογίζουμε το πλάτος του, που είναι $w(X_{1,2}) = 4 - 2.35 = 1.65 > 0.001$

9. Υπολογίζουμε την τιμή της διαστηματικής επέκτασης της παραγώγου στο διάστημα αυτό, που είναι $F'([2.35,\ 4]) = 6*[2.35,\ 4] - 10 = [4.04,\ 14] \not\ni 0$ και

10. Βρίσκουμε το μέσο του διαστήματος και την τιμής της συνάρτησης σε αυτό που είναι αντίστοιχα $m(X_{1,2}) = 3.17$ και $F(m(X_{1,2})) = F([3.17,\ 3.17]) = [1.44,\ 1.44]$

20. Βρίσκουμε τώρα τον τελεστή της Newton και τη νέα προσέγγιση

$$N(m(X_{1,2}), X_{1,2}) = [3.17\ \ 3.17] - \frac{[1.44\ \ 1.44]}{[4.04,\ 14]} = [2.81,\ 3.67]$$ και

$X_5 = N(m(X_{1,2}), X_{1,2}) \cap X_{1.2}$ =[2.81, 3.67]

21. Άρα η λίστα L θα είναι $L := \{X_5\}$

7η επανάληψη

1. $Q := \{X_4\}$. Η λίστα Q πλέον περιλαμβάνει το διάστημα X_4.

2. $L := \{X_5\}$

3. $L :\neq \varnothing$ εφόσον είναι διάφορη της κενής,

4. $L := L - \{X_5\}$ και $F(X_5) = [-10.01,\ 15.30]$

5. $0 \in F(X_5)$ και άρα,

6. $w(X_5) = 3.67 - 2.81 = 0.86 > 0.001$

9. $F'([2.81,\ 3.67]) = 6*[2.81,\ 3.67] - 10 = [6.86,\ 12.02] \not\ni 0$ και

10. Βρίσκουμε το μέσο του και την τιμή της συνάρτησης σε αυτό $m(X_5) = 3.24$ και $F(m(X_5)) = F([3.24,\ 3.24]) = [2.09,\ 2.09]$. Άρα συνεχίζουμε στο βήμα 20, όπου

20. $N(m(X_5),X_5) = [3.24,\ 3.24] - \dfrac{[2.09,\ 2.09]}{[6.86.,\ 12.02]} = [2.93,\ 3.06]$ και η νέα προσέγγιση θα είναι $X_6 = N(m(X_5),X_5) \cap X_5 = [2.93,\ 3.06]$

21. $L := \{X_6\}$, αποθηκεύουμε το X_6 στη λίστα L για περαιτέρω επεξεργασία.

8η επανάληψη

1. $Q := \{X_4\}$. Η λίστα Q πλέον περιλαμβάνει το διάστημα X_4.

2. $L := \{X_6\}$. Στη λίστα L βρίσκεται το X_6

3. $L :\neq \varnothing$ εφόσον είναι διάφορη της κενής,

4. $L := L - \{X_6\}$ και $F(X_6) = [-1.84,\ 1.79]$

5. Παρατηρούμε ότι $0 \in F(X_6)$ και άρα

6. Υπολογίζουμε το πλάτος του $w(X_6) = 3.06 - 2.93 = 0.13 > 0.001$

9. Στο βήμα αυτό υπολογίζουμε το $F'([2.93,\ 3.06]) = 6*[2.93,\ 3.06] - 10 = [7.58,\ 8.36] \not\ni 0$

10. Βρίσκουμε το μέσο του και την τιμή της συνάρτησης σε αυτό που είναι $m(X_6) = 2.99$ και $F(m(X_6)) = F([2.99,\ 2.99]) = [-0.079,\ -0.079]$

20. Βρίσκουμε τον τελεστή της Newton και τη νέα προσέγγιση που είναι $N(m(X_6),X_6) = [2.99\ \ 2.99] - \dfrac{[-0.079,\ -0.079]}{[7.58,\ 8.36]} = [2.9994,\ 3.0004]$ και $X_7 = N(m(X_6),X_6) \cap X_6 = [2.9994,\ 3.0004]$ αντίστοιχα.

21. $L := \{X_7\}$

9η επανάληψη

1. $Q := \{X_4\}$. Η λίστα Q πλέον περιλαμβάνει το διάστημα X_4.

2. $L := \{X_7\}$

3. $L :\neq \varnothing$ εφόσον είναι διάφορη της κενής,

4. $L := L - \{X_7\}$, αφαιρούμε από τη λίστα το X_7 και $F(X_7) = [-0.014,\ 0.013]$

5. $0 \in F(X_7)$, άρα

6. $w(X_7) = 3.0004 - 2.9994 = 0.001$

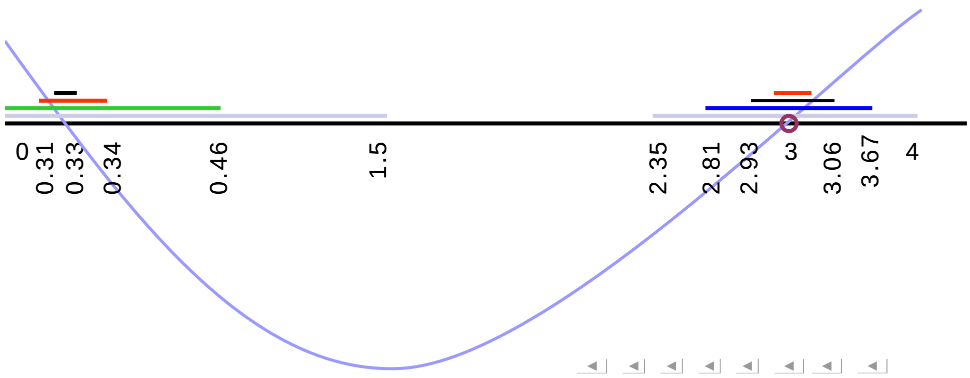
9. Βρίσκουμε το $F'([2.9994,\ 3.0004]) = 6*[2.9994,\ 3.0004] - 10 = [7.996,\ 8.002] \not\ni 0$ και

10. Υπολογίζουμε το μέσο του και την τιμή της συνάρτησης σε αυτό, που είναι $m(X_7) = 2.9999$ και $F(m(X_7)) = F([2.9999,\ 2.9999]) = [-0.00079,\ -0.00079]$. Συνεχίζουμε στο βήμα 20, όπου βρίσκουμε

20. $N(m(X_7),X_7) = [2.9999\ \ 2.9999] - \dfrac{[-0.00079,\ -0.00079]}{[7.996,\ 8.002]} = [3.,\ 3.]$ και $X_8 = N(m(X_7),X_7) \cap X_7 = [3.,\ 3.]$ που είναι η άλλη ρίζα της εξίσωσης.

Άρα γυρνάμε στο βήμα 7, και αποθηκεύουμε το διάστημα αυτό στη λίστα Q, οπότε $Q := \{X_4,\ X_8\}$.

Παρακάτω φαίνεται και η γραφική απεικόνιση του παραδείγματος.



ΟΛΙΚΗ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ

Ο σκοπός είναι να βρεθεί το ολικό ελάχιστο, πετώντας διαστήματα στα οποία δε βρίσκεται το ολικό ελάχιστο. Θα αναφερθούμε σε διαστηματικές μεθόδους οι οποίες εντοπίζουν με σιγουριά το ολικό ελάχιστο.

Πλεονεκτήματα

- Η διαστηματική μέθοδος υπολογίζει τη συνάρτηση f σε ένα διάστημα και όχι μεμονωμένα σε σημεία.
- Εντοπίζεται πάντα χωρίς να χάνεται το ολικό ελάχιστο.
- Διαγράφονται περιοχές οι οποίες εγγυημένα δεν περιέχουν το ολικό ελάχιστο. Συνήθως οι περιοχές αυτές είναι μεγάλες και οι μέθοδοι αυτές είναι ταχύτερες από άλλες αριθμητικές μεθόδους.
- Μελετώνται όλες οι περιοχές, ακόμα και αυτές που γραφικά απεικονίζονται με στενές κοιλάδες.

Πρόβλημα
Θεωρούμε μια συνάρτηση $f: R \to R$ δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη και $X \in I$ ένα διάστημα αναζήτησης. Αναζητούμε το ολικό ελάχιστο f^* και το σύνολο όλων των σημείων ολικού ελαχίστου.
Η συνάρτηση της οποίας αναζητούμε το ολικό ελάχιστο λέγεται **αντικειμενική συνάρτηση.**
Αν στο πρόβλημα υπάρχουν περιορισμοί, τότε το πρόβλημα λέγεται πρόβλημα ολικής βελτιστοποίησης με περιορισμούς, διαφορετικά αν δεν υπάρχουν λέγεται πρόβλημα βελτιστοποίησης χωρίς περιορισμούς.
Οι αγγλικές ορολογίες είναι constrained optimization problem και unconstrained optimization problem αντίστοιχα.

Παράδειγμα 1
Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 3x^4 - 6x^2$ και το διάστημα αναζήτησης $X = [-2, 4]$.
Μελετώντας την βρίσκουμε ότι έχει ολικό ελάχιστο στα $x = -1$ και $x = 1$.
Υπολογίζοντας την τιμή της συνάρτησης σε αυτό το διάστημα, θα είναι:

$$\begin{aligned} F([3, 4]) &= 3 \cdot [3, 4]^4 - 6 \cdot [3, 4]^2 = \\ &= 3 \cdot [81, 256] - 6 \cdot [9, 16] = \\ &= [243, 768] + [-114, -54] = \\ &= [129, 714] \end{aligned}$$

Παρατηρούμε, ότι για $x = 0$ η τιμή της συνάρτησης είναι:
$F(0) = 3 \cdot 0 - 6 \cdot 0 = 0$.
Όμως, $0 < 129$, επομένως το ολικό ελάχιστο της συνάρτησης αποκλείεται να βρίσκεται στο διάστημα $X = [3, 4]$.
Άρα μπορούμε να το διαγράψουμε από τη λίστα αναζήτησης.

Αλγόριθμος

- Υποδιαίρεση του αρχικού διαστήματος X σε άλλα υποδιαστήματα $Y \subseteq X$ και τοποθέτηση αυτών σε μια λίστα L.
- Διαγραφή από τη λίστα των υποδιαστημάτων που δεν περιέχουν λύση.
- Υποδιαίρεση ξανά των υποδιαστημάτων που έχουν παραμείνει στη λίστα και διαγραφή αυτών που με βεβαιότητα δεν περιέχουν την ελάχιστη τιμή.

Η υποδιαίρεση των διαστημάτων γίνεται με μεθόδους που βασίζονται στην αρχή διακλάδωσης και φραξίματος.

Τέτοιες μέθοδοι αναφέρονται παρακάτω:

- Μέθοδος της διχοτόμησης.
- Μέθοδοι που βασίζονται στις πληροφορίες της πρώτης παραγώγου.

Μέθοδοι που χρησιμοποιούνται για την επιλογή διαστημάτων από τη λίστα:

- Στρατηγική oldest-first

- Στρατηγική best-first
- Στρατηγική depth-first

Συνήθως χρησιμοποιείται η best-first στρατηγική. Στη στρατηγική αυτή τα boxes τοποθετούνται στη λίστα κατά αύξουσα σειρά ως προς το κάτω φράγμα της συνάρτησης, και επιλέγεται το box εκείνο που αντιστοιχεί στο μικρότερο κάτω φράγμα της συνάρτησης.

Κριτήρια για τη διαγραφή διαστημάτων που δεν περιέχουν ολικό ελάχιστο

- Κριτήριο **μέσου σημείου** (midpoint test)

  Σκοπός είναι να οριστεί ένα άνω φράγμα $\tilde{f}$ για την ολική ελάχιστη τιμή f^* ώστε με βεβαιότητα να διαγράφονται από τη λίστα τα διαστήματα για τα οποία ισχύει $\underline{F_y} > \tilde{f} \geq f^*$. Συγκεκριμένα:

  - Θέτουμε την αρχική τιμή $\tilde{f} = +\infty$
  - Με τη μέθοδο best-first επιλέγουμε το πρώτο διάστημα Y
  - Υπολογίζουμε το μέσο $c = m(Y)$
  - Βρίσκουμε την τιμή $f(c)$, θέτουμε $\tilde{f} = \min\{f(c), \tilde{f}\}$

- Κριτήριο **μονοτονίας** (monotonicity test)

Διαγράφουμε από τη λίστα τα boxes εκείνα στα οποία η συνάρτηση είναι αυστηρά μονότονη. Δηλαδή, διαγράφουμε τα διαστήματα εκείνα για τα οποία ισχύει $0 \notin F'(Y)$ μιας και δεν μπορεί να περιέχει ένα ολικό ελάχιστο.

- Κριτήριο **κυρτότητας** (concavity test)

Σύμφωνα με το κριτήριο αυτό, εάν μια συνάρτηση δεν είναι κυρτή σε ένα υποδιάστημα $Y \subset X$, δεν μπορεί να περιέχει ολικό ελάχιστο.

- Βήμα της **interval Newton**

Αλγόριθμοι επίλυσης προβλημάτων βελτιστοποίησης χωρίς περιορισμούς

Αλγόριθμος των Moore-Skelboe

Τα δεδομένα που απαιτούνται στον αλγόριθμο αυτό, είναι η αντικειμενική συνάρτηση f, ο αριθμός των μεταβλητών της συνάρτησης, το box αναζήτησης X και μια συνάρτηση εγκλεισμού F, της f. Σκοπός του αλγορίθμου, είναι να εντοπίσει το ολικό ελάχιστο υποδιαιρώντας το αρχικό box X σε άλλα sub-boxes τα οποία δεν είναι απαραίτητο να είναι του ίδιου μεγέθους, προκειμένου να βρούμε ένα φράγμα f^*.

Αλγόριθμος του Ichida-Fujii
Τροποποίηση του προηγούμενου αλγορίθμου που κάνει χρήση του midpoint test για να διαγραφούν κουτιά τα οποία δεν περιέχουν ολικό ελάχιστο.

Αλγόριθμος Hansen
Ο αλγόριθμος αυτός, είναι τροποποίηση του αλγορίθμου του Ichida-Fujii και δίνει αποτελέσματα τα οποία οι προηγούμενοι αλγόριθμοι δεν έχουν.
Συγκεκριμένα:
Χρησιμοποιεί μια λίστα όπου τα κουτιά διατάσσονται σύμφωνα με τα πλάτη τους.
Τα δεδομένα που απαιτεί είναι το κουτί αναζήτησης X, η επέκταση F της αντικειμενικής συνάρτησης f καθώς και κάποιες παράμετροι απαραίτητες για τα κριτήρια τερματισμού.

Παράδειγμα 1
Να βρεθεί το ολικό ελάχιστο της συνάρτησης $f(x) = x^4 - 4x^2$ εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο του Hansen στο box $X = [3,\ 4]$.

Λύση

Θα εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο που βρίσκεται στη σελίδα 248 του βιβλίου.
Θα έχουμε λοιπόν:

1η επανάληψη

Βήμα 1: Θέτω $Y = [3,\ 4]$

Βήμα 2:
$$\begin{aligned} F(Y) &= Y^4 - 4Y^2 = [3,\ 4]^4 - 4[3,\ 4]^2 = [81,\ 256] - 4\cdot[9,\ 16] \\ &= [81,\ 256] + [-64,\ -36] = [17,\ 220] \end{aligned}$$
και $c = mid(Y) = \frac{3+4}{2} = 3.5$ οπότε

$F(c) = 3.5^4 - 4\cdot 3.5^2 = 101.0625$ και άρα $\tilde{f} = \overline{F(c)} = 101.0625$.

Βήμα 3: Θέτω $y = 17$

Βήμα 4: Άρα η λίστα L θα γίνει $L = \{(Y,\ y)\} = \{([3,\ 4],\ 17)\}$

Βήμα 5: Διαλέγω μια συντεταγμένη διεύθυνσης και παράλληλη στην F(Y) και σπάω το κουτί σε δύο κουτιά.

Βήμα 6: Οπότε $Y = V_1 \cup V_2$ με $V_1 = [3,\ 3.25]$ και $V_2 = [3.25,\ 4]$.

Βήμα 7: Υπολογίζουμε τις τιμές της συνάρτησης στα V_1 και V_2 αντίστοιχα, $F(V_1) = [3,\ 3.25]^4 - 4\cdot[3,\ 3.25]^2 = [38.75,\ 75.566]$ και

$F(V_2) = [3.25,\ 4]^4 - 4\cdot[3.25,\ 4]^2 = [47.566,\ 213.75]$

Βήμα 8: Θέτουμε $v_1 = \underline{F}(V_1) = 38.75$ και $v_2 = \underline{F}(V_2) = 47.566$.

Βήμα 9: Τοποθετούμε τα ζεύγη (V_1, v_1) και (V_2, v_2) στο τέλος της λίστας, οπότε θα έχουμε $L=\{([3, 3.25],\ 38.75),\ ([3.25, 4],\ 47.566)\}$.

Βήμα 10: Επιλέγουμε το ζευγάρι της λίστας το οποίο ικανοποιεί τη σχέση $\tilde{y}\le z$ για όλα τα ζευγάρια (Z, z) της λίστας. Επομένως, επιλέγουμε $\left(\tilde{Y},\ \tilde{y}\right)=([3,\ 3.25],\ 38.75)$

Βήμα 11: Διαγράφω από τη λίστα τα ζευγάρια για τα οποία $\tilde{f}<z$.
Δε διαγράφεται τίποτα.
Βήμα 12: Κριτήριο τερματισμού $w(f)<\varepsilon$
Βήμα 13: Θέτω $\left(\tilde{Y},\ \tilde{y}\right)=([3,\ 3.25],\ 38.75)$

$c=mid(Y)=3.125$ και

$\tilde{f}=\min(\tilde{f},\overline{F(c)})$

Όμως, $F(c)=3.125^4-4\cdot 3.125^2=56.304931$, άρα $\tilde{f}=56.304931$

2η επανάληψη

Στην επανάληψη αυτή αρχίζουμε από το βήμα 6, οπότε
Βήμα 6: Οπότε $V_1=V_{11}\cup V_{12}$ και $V_2=V_{21}\cup V_{22}$ με $V_{11}=[3,\ 3.125]$, $V_{21}=[3.25,\ 3.5]$, $V_{12}=[3.125,\ 3.25]$ και $V_{22}=[3.5,\ 4]$.
Βήμα7:Υπολογίζουμε τις τιμές της συνάρτησης

$F(V_{11})=[3,3.125]^4-4[3,3.125]^2=[41.93,\ 59.36]$

$F(V_{12})=[3.125,\ 3.25]^4-4[3.125,\ 3.25]^2=[53.117,\ 72.503]$

$F(V_{21})=[3.25,\ 3.5]^4-4[3.25,\ 3.5]^2=[62.566,\ 107.812]$ και

$F(V_{22})=[3.5,\ 4]^4-4[3.5,\ 4]^2=[86.0625,\ 207]$

Βήμα 8: Θέτουμε $v_{11}=\underline{F}(V_{11})=41.937$, $v_{12}=\underline{F}(V_{12})=53.117$, $v_{21}=\underline{F}(V_{21})=62.566$ και $v_{22}=\underline{F}(V_{22})=86.0625$.
Βήμα 9: Τοποθετούμε τα ζεύγη στη λίστα και θα έχουμε
$L=\{([3,\ 3.125],\ 41.9375),([3.125,\ 3.25],\ 53.117),\ ([3.25,\ 3.5],\ 62.566),([3.5,\ 4],\ 86.0625\ \}$.

Βήμα 10: Επιλέγουμε το ζευγάρι της λίστας το οποίο ικανοποιεί τη σχέση $\tilde{y}\le z$ για όλα τα ζευγάρια (Z, z) της λίστας. Επομένως, επιλέγουμε $\left(\tilde{Y},\ \tilde{y}\right)=([3,\ 3.125],\ 41.9375)$

Βήμα 11: Διαγράφω από τη λίστα τα ζευγάρια για τα οποία $\tilde{f}<z$. Άρα,

$L=\{([3,\ 3.125],\ 41.9375),\ ([3.125,\ 3.25],\ 53.117)\}$

Βήμα 12: Το κριτήριο τερματισμού δεν ικανοποιείται
Βήμα 13: Θέτω $(Y,\ y)=([3,\ 3.125],\ 41.9375)$

$$c = mid(Y) = \frac{3+3.125}{2} = 3.0625 \text{ και}$$

$$\tilde{f} = \min(\tilde{f}, \overline{F(c)}) = 50.4482$$

3^{η} επανάληψη

Στην επανάληψη αυτή αρχίζουμε από το βήμα 5, οπότε
Βήμα 5: Σπάμε τα κουτιά και διαλέγουμε συντεταγμένη
Βήμα 6: Οπότε $V_{11} = V_{11,1} \cup V_{11,2}$ και $V_{12} = V_{12,1} \cup V_{12,2}$ με $V_{11,1} = [3,\ 3.1]$, $V_{12,1} = [3.125,\ 3.2]$, $V_{11,2} = [3.1,\ 3.125]$ και $V_{12,2} = [3.2,\ 3.25]$.
Βήμα7:Υπολογίζουμε τις τιμές της συνάρτησης

$$F(V_{11,1}) = [3,\ 3.1]^4 - 4[3,\ 3.1]^2 = [25.56,\ 56.3521]$$

$$F(V_{11,2}) = [3.1,\ 3.125]^4 - 4[3.1,\ 3.125]^2 = [53.2896,\ 56.9274]$$

$$F(V_{12,2}) = [3.2,\ 3.25]^4 - 4[3.2,\ 3.25]^2 = [62.607,\ 70.606] \text{ και}$$

$$F(V_{12,1}) = [3.125,\ 3.2]^4 - 4[3.125,\ 3.2]^2 = [54.407,\ 63.8976]$$

Βήμα 8: Θέτουμε $v_{11,1} = 25.56$, $v_{11,2} = 53.2896$, $v_{12,1} = 54.407$ και $v_{12,2} = 62.607$.
Βήμα 9: Τοποθετούμε τα ζεύγη στη λίστα και θα έχουμε
$L = \{([3,\ 3.1],\ 25.56),\ ([3.1,\ 3.125],\ 53.289),\ ([3.125, 3.2], 54.407), ([3.2, 3.25], 62.6076)\}$.

Βήμα 10: Επιλέγουμε το ζευγάρι της λίστας το οποίο ικανοποιεί τη σχέση $\tilde{y} \le z$ για όλα τα ζευγάρια (Z, z) της λίστας. Επομένως, επιλέγουμε $(\tilde{Y},\ \tilde{y}) = ([3, 3.],\ 25.56)$

Βήμα 11: Διαγράφω από τη λίστα τα ζευγάρια για τα οποία $\tilde{f} < z$. Άρα,

$$L = \{([3,\ 3.1],\ 25.56)\}$$

Βήμα 12: Ελέγχω το κριτήριο τερματισμού $\tilde{f} < \min(\tilde{f}, \overline{F(c)}) = 49.3265$
Βήμα 13: Θέτω $(Y,\ y) = ([3, 3.1], 25.56)$

$$c = mid(Y) = \frac{3+3.1}{2} = 3.05 \text{ και}$$

$$F(c) = 3.05^4 - 4 \cdot 3.05^2 = 49.3265$$

Παρακάτω ακολουθούν οι ασκήσεις πολλαπλής επιλογής, το σταυρόλεξο και η άσκηση αντιστοίχησης.

ΕΡΓΑΣΙΑ 1

Στις ερωτήσεις 1-26, να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

1. Πότε ένα διάστημα είναι αυστηρά θετικό;
a) κάτω άκρο θετικό ή μηδέν
b) κάτω άκρο θετικό
c) πάνω άκρο αρνητικό ή μηδέν
d) πάνω άκρο αρνητικό

2. Το διάστημα X = [3, 5] είναι εσωτερικό του διαστήματος
a) Y = [1, 4]
b) Y = [0, 6]
c) Y = [-1, 3]
d) Y = [2, 10]

3. Η τομή των διαστημάτων X = [-3, 4] και Y = [0, 7] είναι το διάστημα
a) A = [-3, 0]
b) A = [0, 4]
c) A = [4, 7]
d) A = [-3, 7]

4. Η ένωση των διαστημάτων X = [-5, 6] και Y = [-3, 9] είναι το διάστημα
a) A = [-3, 6]
b) A = [-5, -3]
c) A = [-5, 9]
d) A = [0, 9]

5. Η απόλυτη τιμή του διαστήματος X = [-5, 8] είναι:
a) 0
b) 5
c) 8
d) 1.5

6. Η mignitude του διαστήματος X = [-1, 7] είναι:
a) -1
b) 0
c) 1
d) 7

7. Το κέντρο του διαστήματος X = [3, 8] είναι:
a) 5.5
b) 2.5
c) 3
d) 8

8. Η ακτίνα του διαστήματος X = [-2, 6] είναι:

a) 1.5
b) 4
c) 0
d) 8

9. Το άθροισμα των διαστημάτων X = [-2, 6] και Y = [1, 4] είναι το διάστημα
a) X+Y = [2, 7]
b) X+Y = [--3, 2]
c) X+Y = [-1, 10]
d) X+Y = [-6, 5]

10. Η διαφορά των διαστημάτων X = [1, 3] και Y = [4, 5] είναι το διάστημα
a) X - Y =[-3, -2]
b) X - Y = [-4, 0]
c) X - Y = [2, 2]
d) X - Y = [-4, -1]

11. Το γινόμενο των διαστημάτων X = [-2, 8] και Y = [2, 4] είναι το διάστημα
a) X * Y = [-4, 32]
b) X * Y = [- 8 , 32]
c) X * Y = [-8, 16]
d) X * Y = [-4, 4]

12. Το πηλίκο των διαστημάτων X = [1, 4] και Y = [8, 12] είναι το διάστημα
a) X / Y = [1/12, 1/2]
b) X / Y = [1/12, 1/8]
c) X / Y = [1/3, 1/2]
d) X / Y = [1/8, 1/12]

13. Το πηλίκο των διαστημάτων X = [4, 8] και Y = [-4, 16] είναι το διάστημα
a) X / Y = [-∞, -2] υ [1/2, +∞]
b) X / Y = [-∞, -1] υ [1/2, +∞]
c) X / Y = [-∞, -1] υ [1/4, +∞]
d) X / Y = [-∞, -2] υ [1/4, +∞]

14. Το πηλίκο των διαστημάτων X = [-4, -2] και Y = [-1, 0] είναι το διάστημα
a) X / Y = [-∞, 0] υ [2, +∞]
b) X / Y = [-∞, 2] υ [4, +∞]
c) X / Y = [4, +∞]
d) X / Y = [2, +∞]

15. Το πηλίκο των διαστημάτων X = [3, 6] και Y = [0, 1] είναι το διάστημα
a) X / Y = [-∞, +∞]
b) X / Y = [-∞, 3] υ [6, +∞]
c) X / Y = [6, +∞]
d) X / Y = [3, +∞]

16. Η διαφορά X - Y των διαστημάτων X = [4, 12] και Y = [-∞,3] είναι το διάστημα
a) [1, +∞]
b) [-∞, 9]
c) [4, 9]
d) [9, +∞]

17. Στην αριθμητική διαστημάτων , η επιμεριστική ιδιότητα ισχύει πάντα;
a) Ναι
b) Όχι

18. Στην αριθμητική διαστημάτων ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού;
a) Ναι
b) Όχι

19. Σε ένα διάστημα συμμετρικό το μέσο του είναι το 0.
a) Αλήθεια!
b) Ψέματα!

20. Το διάστημα που προκύπτει από την πράξη X - X είναι το μηδενικό;
a) Ναι
b) Όχι

21. Το μήκος του διαστήματος X = [[2, 4], [-1, 8]] είναι
a) 2
b) 9
c) 5
d) 11

22. Πάντα η τιμή της διαστηματικής επέκτασης F μιας συνάρτησης f περιέχει το πεδίο τιμών της f;
a) Ναι
b) Όχι

23. Πότε ένας interval πίνακας λέγεται κανονικός;
a) Όταν έχει ορίζουσα μηδέν.
b) Όταν έχει μη μηδενική ορίζουσα.

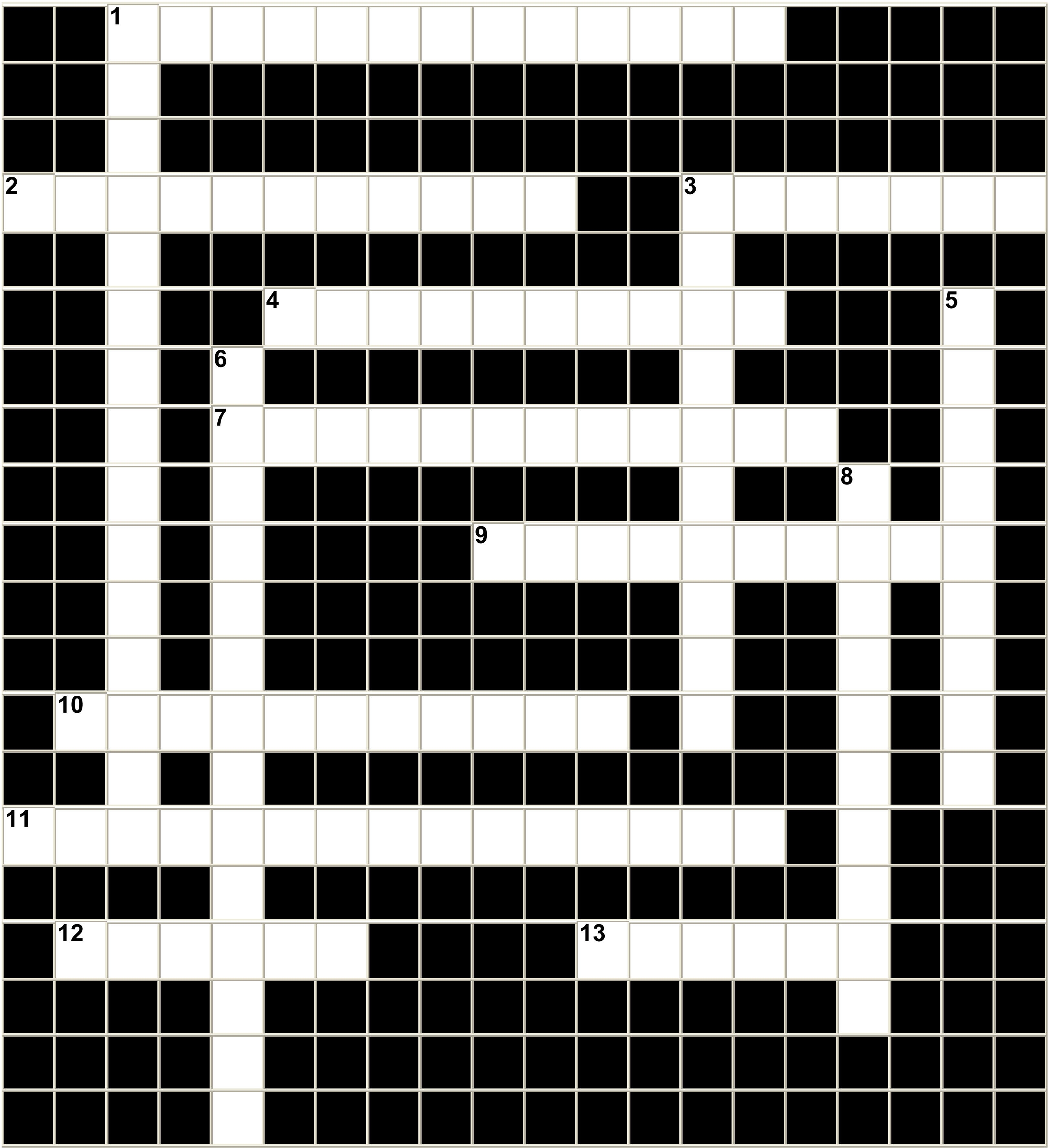
24. Η μέθοδος Krawczyk για την σωστή εφαρμογή της απαιτεί:

a) Ο πίνακας Α να είναι τετραγωνικός και κανονικός.
b) Μια αρχική εκτίμηση του συνόλου λύσης.
c) Και τα 2 παραπάνω.
d) Τίποτα από τα παραπάνω.

25. Χρησιμοποιώντας διαστηματική αριθμητική για τη λύση εξισώσεων:
a) Βρίσκουμε κάποιες από τις λύσεις της εξίσωσης.
b) Μπορεί να μη βρούμε και καμία λύση της εξίσωσης.
c) Οι λύσεις που θα βρούμε εξαρτώνται από την αρχική προσέγγιση του διαστήματος.
d) Βρίσκουμε με σιγουριά όλες τις ρίζες της εξίσωσης.

26. Οι διαστηματικές μέθοδοι σε προβλήματα βελτιστοποίησης:
a) Βρίσκουν πάντα το ολικό ελάχιστο.
b) Υπάρχουν προβλήματα όπου δε βρίσκουν το ολικό ελάχιστο.

ΣΤΑΥΡΟΛΕΞΟ (ΕΡΓΑΣΙΑ 2)



ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ

1 ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΤΗΣ ΟΠΟΙΑΣ ΑΝΑΖΗΤΟΥΜΕ ΤΟ ΟΛΙΚΟ ΕΛΑΧΙΣΤΟ.

2 Η ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ INTERVAL NEWTON.

3 ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ.

4 ΛΕΓΟΝΤΑΙ ΤΑ ΔΙΑΣΤΗΜΑ ΓΙΑ ΤΑ ΟΠΟΙΑ ΙΣΧΥΕΙ m(X) = 0.

7 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΩΝ ΠΟΥ ΕΧΟΥΝ ΩΣ ΑΚΡΑ ΤΟ ΑΠΕΙΡΟ.

9 ΤΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ 1/X ΛΕΓΕΤΑΙ....ΤΟΥ X.

10 ΜΙΑ ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΠΑΛΟΙΦΗΣ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΩΝ ΓΙΑ ΤΗ ΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ.

11 ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΩΝ.

12 ΛΕΓΕΤΑΙ ΤΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ ΠΟΥ ΤΟ ΚΑΤΩ ΑΚΡΟ ΕΙΝΑΙ ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΟ Ή ΙΣΟ ΤΟΥ ΜΗΔΕΝΟΣ.

13 ΛΕΓΕΤΑΙ Η ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΤΗΣ ΗΜΙΔΙΑΦΟΡΑΣ ΤΩΝ ΑΚΡΩΝ ΕΝΟΣ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΟΣ.

ΚΑΘΕΤΑ

1 ΕΙΝΑΙ ΤΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ ΠΟΥ ΤΟ ΠΑΝΩ ΑΚΡΟ ΤΟΥ ΕΙΝΑΙ ΜΙΚΡΟΤΕΡΟ ΤΟΥ ΜΗΔΕΝΟΣ.

3 ΑΝ ΜΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ F ΠΕΡΙΕΧΕΙ ΤΟ ΠΕΔΙΟ ΤΙΜΩΝ ΜΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ f, ΤΟΤΕ Η F ΛΕΓΕΤΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ...

5 ΜΙΑ ΑΠΟ ΤΙΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΩΝ.

6 Η ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΕΥΡΕΣΗΣ ΟΛΙΚΟΥ ΕΛΑΧΙΣΤΟΥ Ή ΜΕΓΙΣΤΟΥ ΜΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ.

8 ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΑΓΡΑΦΗ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΩΝ ΠΟΥ ΔΕΝ ΠΕΡΙΕΧΟΥΝ ΤΟ ΟΛΙΚΟ ΕΛΑΧΙΣΤΟ.

ΕΡΓΑΣΙΑ 3

Δίνεται η εξίσωση f(x)=x^2-2*x+1=0 και το διάστημα X=[0.7, 1.1]. Να αντιστοιχίσετε κάθε μια από τις παρακάτω μεθόδους με το αντίστοιχο διάστημα που θα δώσει σαν λύση, αν η ακρίβεια είναι 0.001.

Interval Newton	X = [0.999668, 1.001]
Interval Bisection	X = [0.921875, 1.08125]
	X = [0.97189, 1. 0082]

Βιβλιογραφία

1. «Εισαγωγή στην Ανάλυση Διαστημάτων (Interval Analysis)», Θεοδούλα Ν. Γράψα.

2. Ole Caprani, Kaj Madsen and Hans Bruun Nielsen «Introduction to Interval Analysis».

3. Eldon R. Hansen «Global Optimization Using Interval Analysis». Marcel Dekker, New York, 1992.

4. Ramon E. Moore «Interval Analysis», Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, N. J. 1966.

5. Ramon E. Moore «Methods and Applications of Interval Analysis», SIAM Philadelphia, 1979.

6. A. Neumaier «Interval Methods for Systems of Equations», Cambridge University Press, Cambridge 1990.

7. «Tutorial: Build Scorm-Compatible Lesson templates for your LMS», B.J.Schone.

8. Πληροφορίες από το internet στις διευθύνσεις:

    a. www.cs.utep.edu/interval-comp
    b. www.pi-schools.gr/hdtc/material/software.htm
    c. http://salnk.eduportal.gr/?cat=12
    d. http://elektra.teilar.gr/meeting/ppt/02.ppt
    e. http://ideopolis.gr/modules/news/article.php?storyid=104
    f. www.youtube.com/match?v=osHgLsObORA
    g. http://www.youtube.com/user/MIT
    h. http://www.youtube.com/watch?v=M4K6HYLHREQ&feature=channel
    i. http://video.google.com/videoplay?docid=9598066217602666494
    j. http://www.elemedu.upatras.gr/?section=589&itemid691=747&secondary=966
    k.