ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΜΕΛΕΤΗ ΕΙΔΙΚΩΝ ΚΑΤΗΓΟΡΙΩΝ ΠΟΛΛΑΠΛΟΤΗΤΩΝ ΕΠΑΦΗΣ RIEMANN

ΜΙΧΑΗΛ Κ. ΜΑΡΚΕΛΛΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

Διδακτορική Διατριβή

Επιβλέπων: Καθηγ. Β. Ι. Παπαντωνίου

ΠΑΤΡΑ 2009

Στους γονείς μου

Ευχαριστίες

Θεωρώ καθήκον, πρώτα από όλα να εκφράσω τις ειλικρινείς και πιο θερμές μου ευχαριστίες στον Καθηγητή κ. Βασίλειο Παπαντωνίου. Τον ευχαριστώ για την υπόδειξη του θέματος, για το γεγονός ότι καθ'ολη τη διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών στάθηκε δίπλα μου με υπομονή και κατανόηση και για την αποφασιστική συμβολή του στο σχεδιασμό και στην ολοκλήρωση αυτής της διατριβής.

Θερμά ευχαριστώ τους Καθηγητές κ.κ. Θεμιστοκλή Κουφογιώργο και Φίλιππο Ξένο, μέλη της Τριμελούς Συμβουλευτικής Επιτροπής, για τη συμβολή τους στην τελειοποίηση αυτής της διατριβής.

Θεωρώ, επίσης, υποχρέωσή μου να ευχαριστήσω τη μητέρα μου Γεωργία και τον αδερφό μου Ιωάννη για την ηθική και οικονομική υποστήριξη που μου πρόσφεραν κατά τη διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών.

Τέλος, ευχαριστώ το Ίδρυμα Κρατικών Υποτροφιών (Ι.Κ.Υ) και την Επιτροπή Ερευνών του Πανεπιστημίου Πατρών για την οικονομική στήριξη την οποία μου παρείχαν κατά τη διάρκεια της εκπόνησης της Διδακτορικής μου Διατριβής.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Ανασκόπηση της βιβλιογραφίας των εξεταζόμενων προβλημάτων

Μια ενδιαφέρουσα κατηγορία (διαφορισίμων) πολλαπλοτήτων είναι οι πολλαπλότητες επαφής. Ειδικότερα, μια πολλαπλότητα περιττής διάστασης M^{2n+1} καλείται *πολλαπλότητα επαφής* αν ορίζεται ολικά επί της M μια (διαφορική) 1-μορφή η με την ιδιότητα

$$\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$$

παντού στην M, όπου $(d\eta)^n = \underbrace{d\eta \wedge d\eta \wedge \ldots \wedge d\eta}_{n-\text{φορές}}$. Η 1-μορφή η καλείται *μορφή επαφής(contact form)*.

Ο Sasaki ([71]) εμπλούτισε τις πολλαπλότητες επαφής με μια γεωμετρική δομή (η, ξ, ϕ, g), η οποία συνίσταται από ένα ολικά και μονοσήμαντα ορισμένο διανυσματικό πεδίο ξ, το οποίο ονομάζεται *χαρακτηριστικό διανυσματικό πεδίο* (*ή διανυσματικό πεδίο του Reeb*), ένα τανυστικό πεδίο ϕ τύπου (1, 1) και μια μετρική Riemann g(*συσχετισμένη μετρική*), έτσι ώστε

$$\eta(\xi) = 1, \qquad \phi^2 = -Id + \eta \otimes \xi, \qquad \eta \circ \phi = 0$$

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)$$

για όλα τα διανυσματικά πεδία X, Y της M^{2n+1}. Επιπλέον, η τετράδα (η, ξ, ϕ, g) μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε

$$d\eta(X, Y) = g(X, \phi Y)$$

για κάθε $X, Y \in D^1 M^{2n+1}$. Ουσιαστικά, με τον τρόπο αυτό, οι πολλαπλότητες επαφής γίνονται πολλαπλότητες Riemann και το ζεύγος $[M^{2n+1}, (\eta, \xi, \phi, g)]$ καλείται μετρική πολλαπλότητα επαφής ή πολλαπλότητα επαφής Riemann.
Δύο μεγάλες κατηγορίες πολλαπλοτήτων επαφής είναι οι κύριες κυκλικές δέσμες της νηματοποίησης των Boothby-Wang και οι μοναδιαίες εφαπτόμενες δέσμες. Κλασικά παραδείγματα των δύο αυτών μεγάλων κατηγοριών είναι, αντίστοιχα, οι σφαίρες περιττής διάστασης S^{2n+1} και τα καρτεσιανά γινόμενα $\mathbb{R}^{n+1} \times S^n$. Πιο συγκεκριμένα, οι Boothby-Wang ([18]) ασχολήθηκαν με τις κύριες κυκλικές δέσμες ως πολλαπλότητες επαφής. Από την άλλη πλευρά, ο Blair ([6]) ασχολήθηκε με μετρικές πολλαπλότητες επαφής, αφού ο χαρακτηρισμός "locally symmetric" υπονοεί μετρική. Αξίζει να σημειωθεί ότι οι πολλαπλότητες επαφής, εκτός από το γεωμετρικό τους ενδιαφέρον, παρουσιάζουν και εφαρμογές στη Φυσική (π.χ. στην Κλασσική Μηχανική).
Αν θεωρήσουμε μια πολλαπλότητα επαφής Riemann $[M^{2n+1}, (\eta, \xi, \phi, g)]$, τότε μπορούμε να ορίσουμε, κατα φυσικό τρόπο, μια σχεδόν μιγαδική δομή J στην πολλαπλότητα $M \times \mathbb{R}$ ως εξής:

$$J(X, f\frac{d}{dt}) = (\phi X - f\xi, \eta(X)\frac{d}{dt})$$

όπου X διανυσματικό πεδίο της M, t η συντεταγμένη του $\mathbb{R}$ και f μια λεία συνάρτηση ορισμένη στην πολλαπλότητα $M \times \mathbb{R}$. Αν η σχεδόν μιγαδική δομή J είναι ολοκληρώσιμη, τότε η πολλαπλότητα M καλείται *κανονική* (*normal*) ή *πολλαπλότητα Sasaki.* Στην περίπτωση αυτή η πολλαπλότητα $M \times \mathbb{R}$ γίνεται πολλαπλότητα Kæhler.

Οι πολλαπλότητες Sasaki χαρακτηρίζονται γεωμετρικά από μια συνθήκη που εμπλέκει τον τανυστή καμπυλότητας. Συγκεκριμένα, μια πολλαπλότητα επαφής Riemann $[M^{2n+1}, (\eta, \xi, \phi, g)]$ είναι πολλαπλότητα Sasaki αν και μόνο αν

$$R(X, Y)\xi = \eta(Y)X - \eta(X)Y, \tag{1.1}$$

για κάθε $X, Y \in D^1(M^{2n+1})$, όπου $D^1(M^{2n+1})$ συμβολίζουμε το σύνολο των διανυσματικών πεδίων ορισμένων στην πολλαπλότητα M^{2n+1}. Οι πολλαπλότητες Sasaki έχουν εκτενώς μελετηθεί και έχουν προσφάτως επεκταθεί σε νέες και ενδιαφέρουσες κατηγορίες πολλαπλοτήτων επαφής Riemann. Συγκεκριμένα, ο Blair ([7]) ταξινόμησε τις πολλαπλότητες επαφής Riemann M που ικανοποιούν τη συνθήκη:

$$R(X, Y)\xi = 0$$

για κάθε $X, Y \in D^1(M)$. Συγκεκριμένα, απέδειξε ότι είναι τοπικά ισομετρικές με το γινόμενο του Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^{n+1}$ και της σφαίρας σταθερής καμπυλότητας $+4$, $S^n(4)$ με την προϋπόθεση ότι $n > 1$ και ότι είναι Ευκλείδειες όταν $n = 1$. Εκτελώντας τώρα ένα D-ομοθετικό μετασχηματισμό ([74]), σε μια πολλαπλότητα επαφής Riemann που ικανοποιεί τη σχέση $R(X, Y)\xi = 0$, προκύπτει ότι

$$R(X, Y)\xi = \kappa(\eta(Y)X - \eta(X)Y) + \mu(\eta(Y)hX - \eta(X)hY), \tag{1.2}$$

όπου κ, μ είναι σταθερές και $2h$ είναι η παράγωγος Lie ως πρός τη διεύθυνση του χαρακτηριστικού πεδίου ξ. Οι Blair, Koufogiorgos και Papantoniou ([12]) εισήγαγαν και μελέτησαν τις πολλαπλότητες επαφής Riemann που ικανοποιούν τη συνθήκη (1.2), τις οποίες ονόμασαν *(κ, μ)-πολλαπλότητες επαφής*. Στην ίδια εργασία, αποδεικνύεται μεταξύ άλλων ότι η συνθήκη (1.2) προσδιορίζει πλήρως τον τανυστή καμπυλότητας. Επιπλέον, οι ίδιοι ερευνητές ταξινόμησαν τοπικά όλες τις τρισδιάστατες πολλαπλότητες επαφής Riemann που ικανοποιούν τη συνθήκη (1.2). Συγκεκριμένα, απέδειξαν ότι μια πλήρης τρισδιάστατη (κ, μ)-πολλαπλότητα επαφής είναι είτε πολλαπλότητα Sasaki ($\kappa = 1, h = 0$) είτε τοπικά ισομετρική με μια από τις ακόλουθες ομάδες Lie: $SU(2)$(ή $SO(3)$), $SL(2, \mathbb{R})$(ή $O(1, 2)$), $E(2)$(η ομάδα των στερεών κινήσεων του διδιάστατου Ευκλείδειου χώρου), $E(1, 1)$(η ομάδα των στερεών κινήσεων του διδιάστατου χώρου του Minkowski), εφοδιασμένες με μια αριστερά αναλλοίωτη μετρική. Αξίζει να σημειωθεί ότι οι (κ, μ)-πολλαπλότητες επαφής παραμένουν αναλλοίωτες κάτω από τους D-ομοθετικούς μετασχηματισμούς. Χαρακτηριστικό παράδειγμα (κ, μ)-πολλαπλοτήτων επαφής, που δεν είναι πολλαπλότητες Sasaki, είναι οι μοναδιαίες εφαπτόμενες δέσμες πάνω από πολλαπλότητες σταθερής καμπυλότητας τομής $c \neq 1$ ([12]). Η μελέτη των (κ, μ)-πολλαπλοτήτων επαφής συνεχίστηκε και από άλλους ερευνητές με κύρια αποτελέσματα αυτά του Boeckx στα οποία επιτυγχάνεται η τοπική ταξινόμηση αυτών σε όλες τις διαστάσεις ([17]) και η απόδειξη ότι είναι τοπικά ομογενείς και ισχυρώς τοπικά ϕ-συμμετρικές ([16]).

Οι Koufogiorgos και Tsichlias ([49]) μελέτησαν το πρόβλημα της ύπαρξης πολλαπλοτήτων επαφής Riemann που ικανοποιούν τη συνθήκη (1.2) με κ, μ μη σταθερές διαφορίσιμες συναρτήσεις, ανεξάρτητες από την επιλογή των διανυσματικών πεδίων X, Y. Η απάντηση στο πρόβλημα αυτό είναι θετική για την περίπτωση της διάστασης τρία και οι ίδιοι συγγραφείς κατασκεύασαν παραδείγματα τέτοιων πολλαπλοτήτων. Η ύπαρξη τέτοιων πολλαπλοτήτων οδήγησε σε μια νέα κατηγορία πολλαπλοτήτων επαφής Riemann, τις *γενικευμένες* (κ,μ)-*πολλαπλότητες επαφής*, που είναι, ουσιαστικά, οι (κ,μ)-πολλαπλότητες επαφής με κ και μ διαφορίσιμες συναρτήσεις. Στην περίπτωση που οι συναρτήσεις κ και μ είναι σταθερές, οι γενικευμένες (κ,μ)-πολλαπλότητες επαφής εκφυλίζονται στις (κ,μ)-πολλαπλότητες επαφής. Οι ίδιοι ερευνητές απέδειξαν ότι οι γενικευμένες (κ,μ)-πολλαπλότητες επαφής διάστασης μεγαλύτερης του τρία εκφυλίζονται στις (κ,μ)-πολλαπλότητες επαφής. Η κατηγορία των γενικευμένων (κ,μ)-πολλαπλοτήτων επαφής είναι αρκετά μεγάλη και, μεχρι στιγμής, δεν έχει βρεθεί μια πλήρης ταξινόμησή τους στη διάσταση τρία. Οι Koufogiorgos και Tsichlias ([50]), ταξινόμησαν τις τρισδιάστατες γενικευμένες (κ,μ)-πολλαπλότητες επαφής που πληρούν την ιδιότητα ότι το μέτρο της κλίσης $\operatorname{grad}\kappa$ της συνάρτησης κ είναι σταθερό καθώς, και αυτές, με την ιδιότητα ότι η συνάρτηση μ είναι σταθερή κατά μήκος των ολοκληρωτικών καμπυλών του χαρακτηριστικού πεδίου ξ ([51]). Ο Perrone ([67]) έδωσε μια γεωμετρική ερμηνεία των τρισδιάστατων γενικευμένων (κ,μ)-πολλαπλοτήτων επαφής, χρησιμοποιώντας τη θεωρία των αρμονικών απεικονίσεων. Συγκεκριμένα, απέδειξε ότι το χαρακτηριστικό πεδίο $\xi : (M, g) \to (T_1(M), g_S)$, όπου g_S είναι η μετρική του Sasaki στην μοναδιαία εφαπτόμενη δέσμη $T_1(M)$ μιας τρισδιάστατης πολλαπλότητας επαφής Riemann $[M,(\eta,\xi,\phi,g)]$ ορίζει αρμονική απεικόνιση πάνω σε ένα οπουδήποτε πυκνό και ανοικτό υποσύνολο της M αν και μόνο αν η M είναι γενικευμένη (κ,μ)-πολλαπλότητα επαφής.

Γενικότερα, το χαρακτηριστικό πεδίο ξ παίζει σημαντικό ρόλο στη μελέτη της γεωμετρίας μιας πολλαπλότητας επαφής Riemann. Από τη σκοπιά αυτή είναι φυσικό να μελετήσουμε την αρμονικότητα του πεδίου Reeb ξ και πώς αυτή επηρεάζει τη γεωμετρία μιας πολλαπλότητας επαφής Riemann. Μελετώντας την αρμονικότητα του πεδίου ξ, ο Perrone ([68]) εισήγαγε την κλάση των H-μετρικών πολλαπλοτήτων επαφής, η οποία συνίσταται από εκείνες τις μετρικές πολλαπλότητες επαφής, για τις οποίες το χαρακτηριστικό πεδίο ξ είναι ένα αρμονικό διανυσματικό πεδίο. Παράλληλα, απέδειξε ότι μια μετρική πολλαπλότητα επαφής $[M^{2n+1}, (\eta, \xi, \phi, g)]$ είναι H-μετρική πολλαπλότητα επαφής αν και μόνο αν το χαρακτηριστικό πεδίο ξ είναι πεδίο ιδιοδιανυσμάτων του τελεστή Ricci Q. Το αποτέλεσμα αυτό αποτελεί γενίκευση αντίστοιχου αποτελέσματος των González-Dávila και Vanhecke ([35]) που αναφέρεται στην τρισδιάστατη περίπτωση. Σύμφωνα με τα παραπάνω, η κλάση των H-μετρικών πολλαπλοτήτων επαφής αποτελεί γενίκευση των πολλαπλοτήτων Sasaki, των (κ, μ)-πολλαπλοτήτων επαφής, των γενικευμένων (κ, μ)-πολλαπλοτήτων επαφής και των τοπικά ϕ-συμμετρικών πολλαπλοτήτων επαφής. Επιπλέον, η κλάση των H- μετρικών πολλαπλοτήτων επαφής παραμένει αναλλοίωτη κάτω από τους D-ομοθετικούς μετασχηματισμούς ([68]). Αξίζει να αναφέρουμε ότι η ταξινόμηση των τρισδιάστατων H-μετρικών πολλαπλοτήτων επαφής ή, ισοδύναμα, των τρισδιάστατων πολλαπλοτήτων επαφής Riemann για τις οποίες το χαρακτηριστικό πεδίο ξ είναι πεδίο ιδιοδιανυσμάτων του τελεστή Ricci Q αποτελεί ανοικτό πρόβλημα. Ο Koufogiorgos ([46]) έδωσε μια μερική απάντηση στο παραπάνω πρόβλημα, αποδεικνύοντας ότι μια τρισδιάστατη πολλαπλότητα επαφής Riemann που πληρεί την ιδιότητα: «το χαρακτηριστικό πεδίο ξ είναι πεδίο ιδιοδιανυσμάτων του τελεστή Ricci Q που αντιστοιχεί σε σταθερή ιδιοσυνάρτηση», είναι (κ, μ)-πολλαπλότητα επαφής. Παράλληλα, οι Boeckx και Vanhecke ([15])

έθεσαν το ερώτημα πότε η μοναδιαία εφαπτόμενη δέσμη μιας πολλαπλότητας Riemann, είναι H-μετρική πολλαπλότητα επαφής. Συγκεκριμένα, διατύπωσαν το ερώτημα αν υπάρχει πολλαπλότητα Riemann, της οποίας η μοναδιαία εφαπτόμενη δέσμη να είναι H-μετρική πολλαπλότητα επαφής και να είναι η ίδια, ομογενής χώρος δύο σημείων (two - point homogeneous). Το αντίστροφο του παραπάνω προβληματισμού μελετήθηκε και αποδείχθηκε στην εργασία [15].

1.2 Περιληπτική παρουσίαση της Διατριβής

Το κύριο αντικείμενο της διατριβής συνίσταται στη μελέτη της γεωμετρίας των τρισδιάστατων H-μετρικών πολλαπλοτήτων επαφής, ή, ισοδύναμα, των μετρικών πολλαπλοτήτων επαφής για τις οποίες το διανυσματικό πεδίο ξ είναι πεδίο ιδιοδιανυσμάτων του τελεστή Ricci Q. Συγκεκριμένα, αποδεικνύουμε ότι μια τρισδιάστατη H-μετρική πολλαπλότητα επαφής $[M,(\eta,\xi,\phi,g)]$ χαρακτηρίζεται γεωμετρικά από την παρακάτω συνθήκη που εμπλέκει τον τανυστή καμπυλότητας της M:

$$\begin{aligned} R(X,Y)\xi = \kappa(\eta(Y)X-\eta(X)Y)+\mu(\eta(Y)hX-\eta(X)hY) \\ +\nu(\eta(Y)\phi hX-\eta(X)\phi hY) \end{aligned} \tag{1.3}$$

για κάθε $X,Y \in D^1(M)$, όπου κ,μ,ν διαφορίσιμες συναρτήσεις ορισμένες επί της M. Η συνθήκη (1.3) αποτελεί το κίνητρο της εισαγωγής μιας νέας κλάσης πολλαπλοτήτων επαφής Riemann. Μια πολλαπλότητα επαφής Riemann $[M^{2n+1},(\eta,\xi,\phi,g)]$ της οποίας ο τανυστής καμπυλότητας ικανοποιεί τη σχέση (1.3) με κ,μ,ν διαφορίσιμες συναρτήσεις επί της M, καλείται (κ,μ,ν)-*πολλαπλότητα επαφής*. Το ενδιαφέρον με τις (κ,μ,ν)-πολλαπλότητες επαφής είναι ότι για διάσταση μεγαλύτερη του τρία αποδεικνύουμε ότι εκφυλίζονται στις (κ, μ)-πολλαπλότητες επαφής, δηλαδή, οι συναρτήσεις κ, μ είναι σταθερές και η συνάρτηση ν είναι η μηδενική συνάρτηση. Αντιθέτως, στη διάσταση τρία κατασκευάζουμε παραδείγματα πολλαπλοτήτων επαφής Riemann που ικανοποιούν τη συνθήκη (1.3), με κ, μ, ν διαφορίσιμες συναρτήσεις ανεξάρτητες από την επιλογή των διανυσματικών πεδίων X, Y. Ένα άλλο από τα προβλήματα που εξετάζονται σε αυτή τη διατριβή είναι ο χαρακτηρισμός των διαρμονικών καμπυλών του Legendre και των αντι-αναλλοίωτων επιφανειών σε τρισδιάστατες H-μετρικές πολλαπλότητες επαφής. Συγκεκριμένα, η διατριβή οργανώνεται ως εξής στα παρακάτω κεφάλαια:

Στο *Κεφάλαιο 1* γίνεται μια εισαγωγή προβλημάτων που σχετίζονται με τη διατριβή καθώς και μια περιληπτική παρουσίαση της διατριβής. Η επισκόπηση της θεωρίας των μετρικών πολλαπλοτήτων επαφής καθώς και άλλων κατηγοριών αυτών γίνεται στο Κεφάλαιο 3.

Στο *Κεφάλαιο 2* παρουσιάζονται συνοπτικά ορισμοί και έννοιες από τη θεωρία πολλαπλοτήτων που απαιτούνται για τη παρουσίαση της διατριβής, όπως, διαφορίσιμες πολλαπλότητες, διαφορίσιμες συναρτήσεις πάνω σε πολλαπλότητα, ο εφαπτόμενος και ο συνεφαπτόμενος χώρος, τα διανυσματικά πεδία, τα τανυστικά πεδία πάνω σε πολλαπλότητα, οι γραμμικές συνοχές, οι πολλαπλότητες Riemann, η συναλλοίωτη παράγωγος, καθώς και οι υποπολλαπλότητες Riemann δοθείσης πολλαπλότητας Riemann.

Στο *Κεφάλαιο 3* ορίζονται οι έννοιες της πολλαπλότητας επαφής και της μετρικής πολλαπλότητας επαφής. Επιπλέον, γίνεται εκτενής αναφορά στην κατηγορία των (κ, μ)-πολλαπλοτήτων επαφής, οι οποίες, αποτελούν μια φυσική γενίκευση των πολλαπλοτήτων Sasaki. Ακόμη, μελετώνται οι γενικευμένες (κ,μ)-πολλαπλότητες επαφής και οι H-μετρικές πολλαπλότητες επαφής, δίνοντας μια γεωμετρική ερμηνεία αυτών μέσω της θεωρίας των αρμονικών διανυσματικών πεδίων.

Στο *Κεφάλαιο 4* δίνεται ο ορισμός των (κ,μ,ν)-πολλαπλοτήτων επαφής. Στη συνέχεια, αποδεικνύουμε ότι οι έννοιες των H-μετρικών πολλαπλοτήτων επαφής και των (κ,μ,ν)-πολλαπλοτήτων επαφής, όταν οι πολλαπλότητες αυτές είναι τρισδιάστατες είναι ¨σχεδόν' ισοδύναμες. Αξίζει να σημειωθεί ότι η κλάση των (κ,μ,ν)-πολλαπλοτήτων επαφής παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Αποδεικνύεται ότι τέτοιες πολλαπλότητες επαφής Riemann υπάρχουν στη διάσταση τρία, ενώ, για διάσταση μεγαλύτερη του τρία ανάγονται στις (κ,μ)-πολλαπλότητες επαφής, δηλαδή στις πολλαπλότητες για τις οποίες οι συναρτήσεις κ,μ είναι σταθερές και η συνάρτηση ν είναι η μηδενική συνάρτηση. Παράλληλα, η ύπαρξη τρισδιάστατων (κ,μ,ν)-πολλαπλοτήτων επαφής συνοδεύεται και από την κατασκευή αντίστοιχων παραδειγμάτων. Τέλος, γίνεται ταξινόμηση των τρισδιάστατων (κ,μ,ν)-πολλαπλοτήτων επαφής στην περίπτωση που ικανοποιούν και δοσμένες γεωμετρικές συνθήκες. Αυτά τα αποτελέσματα έχουν δημοσιευθεί στην εργασία μου (με συνσυγγραφείς τους Themis Koufogiorgos και Vassilis J. Papantoniou) με τίτλο «The harmonicity of the Reeb vector field on contact metric 3-manifolds» ([47]), στο περιοδικό Pacific Journal of Mathematics, καθώς και στην εργασία μου (με συνσυγγραφείς τους Themis Koufogiorgos και Vassilis J. Papantoniou) με τίτλο «The (κ,μ,ν)-contact metric manifolds and their classification in the 3-dimensional case» ([48]) στα Πρακτικά του 10ου Διεθνούς Συνεδρίου Διαφορικής Γεωμετρίας και Εφαρμογών της, που διεξήχθη στο Olomouc της Τσεχίας (2007).

Στο *Κεφάλαιο 5* χαρακτηρίζουμε τις διαρμονικές καμπύλες του Legendre και τις αντι-αναλλοίωτες επιφάνειες που είναι εμβυθισμένες σε τρισδιάστατες (κ, μ, ν)-πολλαπλότητες επαφής. Συγκεκριμένα, αποδεικνύουμε ότι οι διαρμονικές καμπύλες του Legendre είναι οι γεωδαισιακές αυτών των χώρων. Όμως, το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων, στο οποίο ανάγεται το πρόβλημα του καθορισμού των διαρμονικών αντι-αναλλοίωτων επιφανειών των χώρων αυτών είναι αρκετά πολύπλοκο και είναι δύσκολο να ολοκληρωθεί. Παρόλα αυτά, αποδεικνύουμε, ειδικότερα, ότι οι αντι-αναλλοίωτες επιφάνειες οι εμβυθισμένες σε τρισδιάστατες γενικευμένες (κ, μ)-πολλαπλότητες επαφής των οποίων το διανυσματικό πεδίο της μέσης καμπυλότητας είναι σταθερού μέτρου, είναι τοπικά Ευκλείδειες. Αυτά τα αποτελέσματα έχουν υποβληθεί προς δημοσίευση στην εργασία μου (με συνσυγγραφέα τον Vassilis J. Papantoniou) με τίτλο «Biharmonic submanifolds in non-Sasakian contact metric 3-manifolds», ([54]).

Κεφάλαιο 2

Βασικές έννοιες

2.1 Πολλαπλότητες Riemann

Το κύριο πρόβλημα που διαπραγματεύεται η διατριβή αυτή είναι η μελέτη της αρμονικότητας του χαρακτηριστικού πεδίου σε τρισδιάστατες πολλαπλότητες επαφής Riemann. Από την άλλη πλευρά, οι πολλαπλότητες επαφής Riemann είναι ειδικές κατηγορίες πολλαπλοτήτων Riemann. Αμέσως, καταφαίνεται η ανάγκη εισαγωγής των βασικών έννοιών γύρω από τη θεωρία των διαφορίσιμων πολλαπλοτήτων. Γι΄ αυτό λοιπόν, επικαλούμενοι και την ανάγκη της πληρότητας του έργου, εισάγονται σε συντομία αυτές οι έννοιες.

Ορισμός 2.1. Ένας συνεκτικός τοπολογικός χώρος Hausdorff M, που σε κάθε σημείο του υπάρχει περιοχή ομοιόμορφη πρός ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, λέγεται **τοπολογική πολλαπλότητα** ή απλώς πολλαπλότητα διάστασης n.

Ορισμός 2.2. Τοπικός χάρτης ή χάρτης σε μια n-διάστατη τοπολογική πολλαπλότητα M(ή M^n) λέγεται κάθε ζεύγος (U, φ), όπου φ είναι ο ομοιομορφισμός $\varphi : U \subseteq M^n \to V \subseteq \mathbb{R}^n$, με U ανοικτό υποσύνολο της M και V ένα ανοικτό υποσύνολο του Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^n$. Το ανοικτό υποσύνολο U, που είναι πεδίο ορισμού της φ λέγεται **πεδίο του χάρτη** και η φ **απεικόνιση του χάρτη**. Ο αριθμός n λέγεται **διάσταση** της πολλαπλότητας.

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα χάρτη (U, φ) μιας τοπολογικής πολλαπλότητας M^n. Τότε κάθε σημείο $p \in U$ καθορίζεται από τις συντεταγμένες $\{x_1(p), \ldots, x_n(p)\}$ του σημείου $\varphi(p) \in \mathbb{R}^n$. Δηλαδή, $x_i(p) = x_i(\varphi(p)) = (x_i \circ \varphi)(p)$, $i = 1, \ldots, n$. Αν το σύνολο U είναι συνεκτικό, τότε οι αριθμοί $x_i(p)$ λέγονται συντεταγμένες του p ως προς το χάρτη (U, φ), ενώ η n-άδα των συναρτήσεων $x_1, \ldots x_n$ τέτοιων ώστε

$$x_i : U \subseteq M \to \mathbb{R}^n;\ x_i : p \mapsto x_i(p) = [\varphi(p)]_i,\ i = 1, \ldots, n,$$

όπου δηλαδή η i-συντεταγμένη του p είναι η i-συντεταγμένη του $\varphi(p)$, λέγεται **σύστημα τοπικών συντεταγμένων** ως προς το χάρτη (U, φ). Έτσι, κάθε τοπικός χάρτης της M ορίζει ένα τοπικό σύστημα συντεταγμένων. Είναι αυτονόητο από τα παραπάνω, ότι αυτές οι συντεταγμένες ορίζονται γενικώς σε ένα υποσύνολο U της M και όχι σε ολόκληρη την πολλαπλότητα, για αυτό χρησιμοποιούμε τον όρο τοπικά.

Ορισμός 2.3. **Διαφορίσιμη δομή** διάστασης n(ή άτλαντας) τάξης διαφορισιμότητας r(ή κλάσης C^r), πάνω σε μια n-διάστατη τοπολογική πολλαπλότητα M, είναι μια οικογένεια χαρτών $\mathbb{U} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ (I είναι ένα σύνολο δεικτών), που ικανοποιεί τα ακόλουθα αξιώματα:

1. Τα σύνολα U_α καλύπτουν την τοπολογική πολλαπλότητα δηλαδή $M = \bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha$,
2. Άν $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, τότε οι ομοιομορφισμοί φ_α και φ_β είναι τέτοιοι ώστε ο

ομοιομορφισμός $\varphi_{\beta\alpha} = \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subseteq \mathbb{R}^n \to \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subseteq \mathbb{R}^n$ να είναι διαφορίσιμος τάξης r (ή κλάσης C^r).

3. Η συλλογή $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in I}$ είναι η μέγιστη οικογένεια χαρτών που ικανοποιούν τις 1 και 2.

Δίνουμε τον ορισμό της διαφορίσιμης πολλαπλότητας.

Ορισμός 2.4. **Διαφορίσιμη πολλαπλότητα** (ή απλώς πολλαπλότητα) διάστασης n και κλάσης C^r λέγεται κάθε n-διάστατη τοπολογική πολλαπλότητα M, εφοδιασμένη με μια διαφορίσιμη δομή διάστασης n και τάξης διαφορισιμότητας r.

Αν κάθε $\varphi_{\beta\alpha}$ είναι κλάσης C^∞, ο άτλαντας λέγεται κλάσης C^∞ και η πολλαπλότητα καλείται διαφορίσιμη (ή λεία). Παραδείγματα διαφορισίμων πολλαπλοτήτων είναι η n-διάστατη μοναδιαία σφαίρα $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, με εξίσωση $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1$, ο πραγματικός προβολικός χώρος $P^n(\mathbb{R})$ και η γενική γραμμική ομάδα $GL(n, \mathbb{R})$ διάστασης n^2. Επιπλέον, κάθε ανοικτό υποσύνολο μιας διαφορίσιμης πολλαπλότητας επιδέχεται δομή διαφορίσιμης πολλαπλότητας της ίδιας διάστασης.
Έστω A ένα ανοικτό υποσύνολο μιας n-διάστατης πολλαπλότητας M^n κλάσης C^r και $f : A \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 2.5. Η συνάρτηση f λέγεται διαφορίσιμη τάξης s ή ότι είναι κλάσης C^s επί του A αν και μόνο αν η σύνθεση $f \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap A) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμη για κάθε χάρτη $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ πάνω στη M.

Για ότι ακολουθεί υποθέτουμε ότι $r = s$. Ορίζουμε ως $D^r(M)$ το σύνολο των συναρτήσεων κλάσης C^r που ορίζονται στην n-διάστατη πολλαπλότητα M και ως $D^0(M)$ το σύνολο των συναρτήσεων που ορίζονται στην πολλαπλότητα M και είναι κλάσης C^∞. Το σύνολο $D^0(M)$ είναι μια άλγεβρα επάνω από το σώμα των πραγματικών αριθμών.

Θεωρούμε τις πολλαπλότητες M^n και N^m και έστω $f : A \subseteq M^n \to N^m$ μια συνεχής απεικόνιση ορισμένη σε ένα ανοικτό σύνολο A της M.

Ορισμός 2.6. Η απεικόνιση $f : A \subseteq M^n \to N^m$ λέγεται **διαφορίσιμη** κλάσης C^r στο σημείο $p \in A$, αν για κάθε χάρτη (U, φ) της M και (V, ψ) της N ώστε $p \in U$ και $f(p) \in V$, η απεικόνιση $F = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \phi(U \cap f^{-1}(V)) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ είναι διαφορίσιμη κλάσης C^r στο σημείο $\varphi(p) \in \mathbb{R}^n$. Η F λέγεται **τοπική παράσταση** της f.

Αν η f είναι διαφορίσιμη τάξης r σε κάθε σημείο του A τότε η f λέγεται διαφορίσιμη απεικόνιση τάξης r (ή κλάσης C^r) στο σύνολο A.

Ορισμός 2.7. Η απεικόνιση $f : M \to N$ καλείται **αμφιδιαφόριση** αν είναι αμφιμονότιμη (1-1), επί, διαφορίσιμη και η αντίστροφή της f^{-1} είναι επίσης διαφορίσιμη. Στην περίπτωση αυτή οι πολλαπλότητες M και N λέγονται *αμφιδιαφορίσιμες* ή *αμφιδιαφορικές* και γράφουμε $M \simeq N$.

Ορισμός 2.8. **Διαφορίσιμη καμπύλη** ή απλά **καμπύλη** της πολλαπλότητας M ορισμένη στο ανοικτό διάστημα (α, β) λέγεται κάθε διαφορίσιμη απεικόνιση $\gamma : I = (\alpha, \beta) \subseteq \mathbb{R} \to M, t \to \gamma(t)$.

Στη συνέχεια παραθέτουμε τις έννοιες των εφαπτόμενων διανυσμάτων και των διανυσματικών πεδίων μιας πολλαπλότητας.

Ορισμός 2.9. Έστω p ένα σημείο μιας λείας πολλαπλότητας M. Ένα **εφαπτόμενο διάνυσμα** της πολλαπλότητας M στο σημείο p είναι μια πραγματική συνάρτηση $X_p : D^0(M) \to \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. $X_p(\alpha f + \beta g) = \alpha X_p(f) + \beta X_p(g)$,

2. $X_p(fg) = X_p(f)g(p) + f(p)X_p(g)$, (κανόνας του Leibniz)

όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $f, g \in D^0(M)$.

Το σύνολο των εφαπτόμενων διανυσμάτων στο σημείο p ονομάζεται **εφαπτόμενος χώρος** της M στο σημείο p και συμβολίζεται $T_p(M)$. Ο εφαπτόμενος χώρος εφοδιασμένος με τις πράξεις

$$\begin{aligned}(X_p + Y_p)(f) &= X_p(f) + Y_p(f),\\ (\lambda X_p)(f) &= \lambda X_p(f),\end{aligned}$$

όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ και $X_p, Y_p \in T_p(M)$, γίνεται ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος διάστασης ίσης με τη διάσταση της πολλαπλότητας M. Μια βάση του εφαπτόμενου χώρου $T_p(M)$ κατασκευάζεται ως εξής:
Έστω (U, φ) ένας χάρτης της πολλαπλότητας M^n και $p \in U$. Ορίζουμε τα εφαπτόμενα διανύσματα $\frac{\partial}{\partial x_i}|_p(f) = \frac{\partial}{\partial x_i}(f \circ \varphi^{-1})|_{\varphi(p)}$, όπου $f \in D^0(M)$ και $\frac{\partial}{\partial x_i}$ η μερική παράγωγος του $\mathbb{R}^n$ ως πρός τη μεταβλητή x_i. Τα εφαπτόμενα διανύσματα $\frac{\partial}{\partial x_i}|_p, i = 1, 2, \ldots, n$ ορίζουν βάση του εφαπτόμενου χώρου $T_p(M)$.
Αξίζει να σημειωθεί ότι υπάρχει ένας ισοδύναμος γεωμετρικός ορισμός του εφαπτόμενου διανύσματος X_p της πολλαπλότητας M με όρους διαφορίσιμων καμπυλών της M([3, σελ. 5] και [60, σελ. 398]). Δοθείσης μιας καμπύλης γ της πολλαπλότητας M, το **διάνυσμα ταχύτητας** της γ στο σημείο $\gamma(t_0)$ αυτής το οποίο σημειώνουμε με $\dot{\gamma}(t_0)$ είναι το εφαπτόμενο διάνυσμα που ορίζεται ως εξής:

$$\dot{\gamma}(t_0)(f) = \frac{d(f \circ \gamma)}{dt}|_{t=t_0} \in T_{\gamma(t_0)}(M)$$

για κάθε $f \in D^0(M)$. Ισχύει το ακόλουθο θεώρημα

Θεώρημα 2.1. *[60, σελ. 399] Αν M είναι μια n-διάστατη πολλαπλότητα και p ένα τυχαίο σημείο αυτής, τότε για κάθε $X_p \in T_p(M)$ υπάρχει καμπύλη $\gamma : (\alpha, \beta) \subseteq \mathbb{R} \to M$ τέτοια ώστε*

$$(i)\ 0 \in (\alpha, \beta), \quad (ii)\ \gamma(0) = p \quad \textit{και} \quad (iii)\ \dot{\gamma}(0) = X_p.$$

Το σύνολο $T(M) = \bigcup_{p \in M} T_p(M)$ καλείται **εφαπτόμενη δέσμη** της πολλαπλότητας M. Ουσιαστικά, η εφαπτόμενη δέσμη συνίσταται από τα ζεύγη (p, X_p), όπου p είναι σημείο της πολλαπλότητας M και X_p εφαπτόμενο διάνυσμα της πολλαπλότητας M στο σημείο p. Η απεικόνιση $\pi : TM \to M, (p, X_p) \to \pi(p, X_p) = p$ καλείται **απεικόνιση προβολής**. Η εφαπτόμενη δέσμη $T(M)$ δέχεται δομή διαφορίσιμης πολλαπλότητας διάστασης $2n$, με τέτοιο τρόπο που καθιστά την απεικόνιση προβολής διαφορίσιμη. Πιο συγκεκριμένα, για κάθε $p \in M$, το σύνολο $\pi^{-1}(p)$ ταυτίζεται με τον εφαπτόμενο χώρο $T_p(M)$. Το σύνολο $\pi^{-1}(p)$ ονομάζεται **ίνα (fiber)**, πάνω από το σημείο p.

Η έννοια του εφαπτόμενου διανύσματος είναι άμεσα συσχετισμένη με την έννοια του διαφορικού διαφορίσιμης απεικόνισης μεταξύ πολλαπλοτήτων. Ειδικότερα, δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 2.10. Το διαφορικό df_p μιας διαφορίσιμης απεικόνισης $f : M \to N$ στο σημείο $p \in M$ είναι η γραμμική απεικόνιση $df_p : T_p(M) \to T_{f(p)}(N)$, που ορίζεται από τη σχέση

$$df_p(X_p)(g) = X_p(g \circ f)$$

για κάθε $X_p \in T_p(M)$ και $g \in D^0(N)$.

Έστω M^n και N^m δύο διαφορίσιμες πολλαπλότητες. Μια διαφορίσιμη απεικόνιση $f : M^n \to N^m (n \leq m)$ καλείται **εμβύθιση (immersion)** αν και μόνο αν το διαφορικό της $df_p : T_p(M) \to T_{f(p)}(N)$ για κάθε $p \in M^n$ είναι αμφιμονότιμη απεικόνιση. Ο αριθμός $p = n - m$ καλείται **συνδιάσταση** της f. Μια διαφορίσιμη απεικόνιση $f : M^n \to N^m$ καλείται **εμφύτευση** (**embedding**), αν είναι εμβύθιση και η απεικόνιση $f : M \to f(M)$ είναι ένας ομοιομορφισμός, όπου το $f(M)$ έχει την τοπολογία της N ([31, σελ. 2]).

Ορισμός 2.11. Η n-διάστατη πολλαπλότητα M λέγεται **υποπολλαπλότητα** της m-διάστατης πολλαπλότητας $N (n \leq m)$ όταν

i) $M \subseteq N$

ii) Η ταυτοτική απεικόνιση $i : M \to N$ είναι μια εμβύθιση της πολλαπλότητας M στην πολλαπλότητα N. Ειδικότερα, αν η ταυτοτική απεικόνιση i είναι εμφύτευση, τότε η M καλείται **εμφυτευμένη υποπολλαπλότητα** της N.

Αν $\dim N - \dim M = 1$, τότε η M λέγεται **υπερεπιφάνεια** της N.

Ορισμός 2.12. Έστω M μια διαφορίσιμη πολλαπλότητα και $T(M)$ η αντίστοιχη εφαπτόμενη δέσμη αυτής. Καλούμε **διανυσματικό πεδίο** της M μια απεικόνιση $X : M \to T(M)$ που σε κάθε σημείο $p \in M$ αντιστοιχεί το διάνυσμα $X_p \in T_p(M)$.

Αν λοιπόν X είναι ένα διανυσματικό πεδίο μιας διαφορίσιμης πολλαπλότητας M, τότε για κάθε $f \in D^0(M)$ ορίζεται η πραγματική συνάρτηση $X(f)$ με τιμή:

$$X(f)(p) = X_p(f)$$

για κάθε $p \in M$. Το διανυσματικό πεδίο X καλείται **διαφορίσιμο** αν και μόνο αν η συνάρτηση $X(f)$ είναι διαφορίσιμη για κάθε $f \in D^0(M)$. Από την οπτική γωνία αυτή, κάθε διανυσματικό πεδίο X μπορεί να θεωρηθεί και ως η απεικόνιση $X : D^0(M) \to D^0(M), f \to X(f)$. Η απεικόνιση αυτή πληρεί τις ιδιότητες μιας **διαφόρισης**, δηλαδή

$$\begin{aligned} X(\alpha f + \beta g) &= \alpha X(f) + \beta X(g), \\ X(fg) &= X(f)g + fX(g), \quad \text{(κανόνας του Leibniz)} \end{aligned}$$

όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Θα συμβολίζουμε με $D^1(M)$ ο σύνολο των διαφορίσιμων διανυσματικών πεδίων.

Έστω (U, φ) ένας χάρτης της πολλαπλότητας M^n. Τα διανυσματικά πεδία $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}, i = 1, 2, \ldots, n$, που ορίζονται ως $\frac{\partial}{\partial x_i}(p) = (\frac{\partial}{\partial x_i})_p$, λέγονται **βασικά διανυσματικά πεδία**.

Για κάθε ζεύγος διανυσματικών πεδίων X και Y μιας πολλαπλότητας M ορίζουμε το **γινόμενο Lie** αυτών ως το διανυσματικό πεδίο $[X, Y]$ που σε κάθε σημείο p αντιστοιχίζει το εφαπτόμενο διάνυσμα $[X, Y]_p$ ως εξής:

$$[X, Y]_p(f) = X_p(Y(f)) - Y_p(X(f)),$$

για κάθε $f \in D^0(M)$.

Το γινόμενο Lie έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. $[X, Y] = -[Y, X]$
2. $[\lambda X + \mu Y, Z] = \lambda[X, Z] + \mu[Y, Z]$
3. $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, .X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ (ταυτότητα του Jacobi)
4. $[fX, gY] = fg[X, Y] + f(X(g))Y - g(Y(f))X$
5. $[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}] = 0, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n$

για τυχαία $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, f, g \in D^0(M), X, Y, Z \in D^1(M)$.

Ορισμός 2.13. Μια πολλαπλότητα M θα λέγεται **προσανατολισμένη** αν υπάρχει άτλας $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$, έτσι ώστε για κάθε ζεύγος χαρτών $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ και (U_β, φ_β) με $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ να ισχύει $\det J(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}) > 0$, όπου $J(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})$ ο Ιακωβιανός πίνακας της $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$.

Έστω M μια διαφορίσιμη πολλαπλότητα διάστασης n και p τυχαίο σημείο αυτής. Ο δυϊκός χώρος του εφαπτόμενου χώρου $T_p(M)$ καλείται **συνεφαπτόμενος χώρος** της M στο σημείο p και συμβολίζεται με $T_p^*(M)$.

Ορισμός 2.14. Διαφορική μορφή πρώτης τάξης (ή **διαφορική 1-μορφή**) επί της διαφορίσιμης πολλαπλότητας M, λέγεται η απεικόνιση $\omega : M \to \bigcup_{p \in M} T_p^*(M)$ η οποία σε κάθε σημείο $p \in M$, αντιστοιχεί το συνεφαπτόμενο διάνυσμα $\omega(p)$ (ή ω_p) του συνεφαπτόμενου χώρου $T_p^*(M)$.

Από τον ορισμό (2.14), συμπεραίνουμε πως για κάθε $p \in M$ η διαφορική 1-μορφή ω δίνει μια γραμμική μορφή επάνω στον $T_p(M)$, δηλαδή:

$$\omega_p : T_p(M) \to \mathbb{R}.$$

Συμβολίζουμε με $D_1(M)$ το σύνολο των διαφορικών 1-μορφών επί της M.

Ορισμός 2.15. Τανυστικό πεδίο τύπου $(p, q)(p, q \geqq 0)$ πάνω σε μια πολλαπλότητα ονομάζουμε κάθε απεικόνιση

$$T : \underbrace{D^1(M) \times \ldots \times D^1(M)}_{q-\text{φορές}} \times \underbrace{D_1(M) \times \ldots \times D_1(M)}_{p-\text{φορές}} \to D^0(M)$$

η οποία είναι $D^0(M)$-γραμμική ως πρός κάθε μεταβλητή.

Αν $p = 0$ τότε έχουμε τα τανυστικά πεδία τύπου $(0, q)$ τα οποία ονομάζονται συναλλοίωτα τανυστικά πεδία. Αν $q = 0$ τότε έχουμε τα τανυστικά πεδία τύπου $(p, 0)$ τα οποία λέγονται ανταλλοίωτα τανυστικά πεδία. Αν $p = 1$, $q = 0$ τότε παίρνουμε τα τανυστικά πεδία τύπου $(1, 0)$, δηλαδή τα **διανυσματικά πεδία**. Αν $p = 0$, $q = 1$ τότε παίρνουμε τα τανυστικά πεδία τύπου $(0, 1)$, δηλαδή τις **διαφορικές 1-μορφές**. Αν $p = 0$, $q = 0$ τότε έχουμε τα τανυστικά πεδία τύπου $(0, 0)$, δηλαδή τις διαφορίσιμες συναρτήσεις και τις σταθερές.

Ορισμός 2.16. Συνοχή (ή σύνδεση Riemann) σε μια πολλαπλότητα M λέγεται μια απεικόνιση που θα τη συμβολίζουμε με ∇, όπου:

$$\begin{aligned} \nabla &: D^1(M) \times D^1(M) \to D^1(M) \\ \nabla &: (X, Y) \to \nabla(X, Y) = \nabla_X Y \end{aligned}$$

που ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες

1. $\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$
2. $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$
3. $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$
4. $\nabla_X fY = X(f) Y + f \nabla_X Y$

για κάθε $f \in D^0(M)$ και για τυχαία διανυσματικά πεδία $X, Y, Z \in D^1(M)$. Ο τελεστής ∇_X λέγεται **συναλλοίωτη παραγώγιση** ως πρός X ενώ το διανυσματικό πεδίο $\nabla_X Y$ λέγεται **συναλλοίωτη παράγωγος** του Y ως πρός τη διεύθυνση του X.

Αναφέρουμε ότι ο τελεστής ∇_X μπορεί να επεκταθεί και στα τανυστικά πεδία τύπου (p, q). Συγκεκριμένα, η συναλλοίωτη παράγωγος ενός τανυστικού πεδίου

W τύπου $(p,q)(p=0,1, q \geqq 1)$ ως πρός τη διεύθυνση ενός διανυσματικού πεδίου X είναι το τανυστικό πεδίο τύπου (p,q), που συμβολίζεται με $\nabla_X W$, του οποίου η τιμή είναι

$$\begin{aligned}(\nabla_X W)(Y_1, Y_2, \ldots, Y_q) &= \nabla_X W(Y_1, Y_2, \ldots, Y_q) - W(\nabla_X Y_1, \ldots, Y_s) - \ldots - \\ &\quad - W(Y_1, \ldots, \nabla_X Y_q),\end{aligned}$$

για κάθε $Y_1, Y_2, \ldots, Y_q \in D^1(M)$.
Έστω M μια n-διάστατη πολλαπλότητα εφοδιασμένη με μια γραμμική συνοχή ∇. Δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό

Ορισμός 2.17. Το τανυστικό πεδίο T τύπου (1, 2) που ορίζεται από τη σχέση $T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$, $X, Y \in D^1(M)$ καλείται **στρέψη** της γραμμικής συνοχής ∇.

Μια γραμμική συνοχή ∇ σε μια πολλαπλότητα M καλείται **συμμετρική** αν η στρέψη αυτής είναι μηδέν, δηλαδή, $[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ για κάθε $X, Y \in D^1(M)$.

Ορισμός 2.18. Τανυστικό πεδίο καμπυλότητας R μιας πολλαπλότητας M εφοδιασμένης με μια συνοχή ∇ καλείται το τανυστικό πεδίο τύπου $(1,3)$ με τιμή

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z,$$

για κάθε $X, Y, Z \in D^1(M)$.

Το τανυστικό πεδίο καμπυλότητας ικανοποιεί τις ακόλουθες σχέσεις

(i) $R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z$

(ii) $R(fX, gY)hZ = fghR(X,Y)Z$

(iii) $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$

(iv) $(\nabla_X R)(Y,Z)W + (\nabla_Y R)(Z,X)W + (\nabla_Z R)(X,Y)W = 0,$

για κάθε $X, Y, Z, W \in D^1(M)$ και $f, g, h \in D^0(M)$. Οι ταυτότητες (iii) και (iv) καλούνται πρώτη και δεύτερη ταυτότητα του Bianchi αντίστοιχα.
Στη συνέχεια δίνουμε την έννοια της μετρικής Riemann και της πολλαπλότητας Riemann.

Ορισμός 2.19. **Μετρική Riemann** σε μια πολλαπλότητα M είναι ένα συναλλοίωτο τανυστικό πεδίο τύπου $(0,2)$ τέτοιο ώστε σε κάθε σημείο $p \in M$ αντιστοιχεί την απεικόνιση $g_p : T_p(M) \times T_p(M) \to \mathbb{R}$, με τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. $g_p(X_p + Y_p, Z_p) = g_p(X_p, Z_p) + g_p(Y_p, Z_p)$

2. $g_p(\lambda X_p, Y_p) = \lambda g_p(X_p, Y_p)$

3. $g_p(X_p, Y_p) = g_p(Y_p, X_p)$ και

4. $g_p(X_p, X_p) \geq 0$, με $g_p(X_p, X_p) = 0$ αν και μόνο αν $X_p = 0$

για κάθε $X_p, Y_p, Z_p \in T_p(M)$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.

Κάθε πολλαπλότητα M, εφοδιασμένη με μια μετρική Riemann g καλείται **πολλαπλότητα Riemann**.
Αξίζει να σημειωθεί ότι κάθε πολλαπλότητα δέχεται μετρική Riemann.
Έστω (M, g) μια πολλαπλότητα Riemann διάστασης n. Μια ορθοκανονική βάση του εφαπτόμενου χώρου $T_p(M)$ της πολλαπλότητας M στο σημείο $p \in M$ καλείται **πλαίσιο** (**frame**) της M στο p. Τα μοναδιαία διανυσματικά πεδία

$E_1, E_2, \ldots, E_n$ καλούνται **πεδίο πλαισίων** (**frame field**) της M αν σε κάθε σημείο $p \in M$, το σύνολο $\{E_1(p), E_2(p), \ldots, E_n(p)\}$ είναι ένα πλαίσιο της M στο p. Στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^n$ τα βασικά διανυσματικά πεδία ορίζουν ένα πεδίο πλαισίων. Αξίζει να σημειωθεί ότι ένα πεδίο πλαισίων μπορεί να μην ορίζεται σε όλη την πολλαπλότητα M, αλλά σε κάποιο ανοικτό υποσύνολο αυτής.

Ορισμός 2.20. Συνοχή Riemann μιας πολλαπλότητας Riemann (M, g) λέγεται η συνοχή ∇, που ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$, δηλαδή η ∇ είναι συμμετρική, (ή $T = 0$) και

(ii) $X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$(συμβιβαστότητα της συνοχής με τη μετρική)

όπου X, Y, Z είναι τυχόντα διανυσματικά πεδία πάνω στη M.

Ισχύει το ακόλουθο θεμελιώδες θεώρημα της Γεωμετρίας του Riemann.

Θεώρημα 2.2. *([60, σελ. 445]) Αν (M, g) είναι μια πολλαπλότητα Riemann τότε ορίζεται ακριβώς μια συνοχή Riemann πάνω στην M. Η μοναδική αυτή συνοχή Riemann ονομάζεται συνοχή Levi-Civita και ικανοποιεί την ακόλουθη ταυτότητα του Koszul:*

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) + g([Z, X], Y) + \\ &\quad + g([Z, Y], X) + g([X, Y], Z) \end{aligned} \tag{2.1}$$

για κάθε $X, Y, Z \in D^1(M)$.

Έστω M^n μια πολλαπλότητα και p τυχαίο σημείο της. Συμβολίζουμε με $\wedge^r T_p^*(M)$ το σύνολο των αντισυμμετρικών r-μορφών επί του εφαπτόμενου χώρου $T_p(M)$.

Ορισμός 2.21. Ονομάζουμε **διαφορική μορφή** r**-τάξης**, ορισμένη στην M κάθε απεικόνιση

$$\omega : M \to \cup_{p\in M} \wedge^r(T_p^*(M))$$

έτσι ώστε σε κάθε σημείο $p \in M$ ν' αντιστοιχεί το $\omega(p) \in \wedge^r(T_p^*(M))$.

Το σύνολο των διαφορικών μορφών r-τάξης πάνω σε μια πολλαπλότητα M συμβολίζεται με $\wedge^r(M)$.

Έστω (M, g) μια πολλαπλότητα Riemann και p σημείο αυτής. Αν X, Y είναι δύο γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του εφαπτόμενου χώρου $T_p(M)$, τότε η **καμπυλότητα τομής** της M στο p, ως πρός το επίπεδο π που ορίζεται από τα X, Y, δίνεται από την έκφραση

$$\kappa(\pi, p) = \frac{g(R(X, Y)Y, X)}{g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2}.$$

Ειδικότερα, αν η καμπυλότητα τομής δεν εξαρτάται από το σημείο p και από το επίπεδο $\pi \subseteq T_p(M)$, τότε η πολλαπλότητα καλείται πολλαπλότητα **σταθερής καμπυλότητας τομής** ή σταθερής **καμπυλότητας**. Για τις πολλαπλότητες σταθερής καμπυλότητας τομής έχουμε τον ακόλουθο χαρακτηρισμό που εμπλέκει τον τανυστή καμπυλότητας.

Θεώρημα 2.3. *[61, σελ. 187] Έστω (M, g) μια πολλαπλότητα Riemann. Η M έχει σταθερή καμπυλότητα τομής c αν και μόνο αν ο τανυστής καμπυλότητας R δίνεται από τη σχέση*

$$R(X, Y)Z = c(g(Y, Z)X - g(X, Z)Y)$$

για κάθε $X, Y, Z \in D^1(M)$.

Ένα άλλο σπουδαίο τανυστικό πεδίο που ορίζεται από το τανυστικό πεδίο καμπυλότητας, είναι το **τανυστικό πεδίο Ricci** και για κάθε σημείο ο αντίστοιχος τανυστής **Ricci**. Έστω $p \in M$ τυχαίο σημείο της πολλαπλότητας M. Στη συνέχεια, θεωρούμε την απεικόνιση

$$R(-, X)Y : T_p(M) \to T_p(M)$$

με τιμή

$$(R(-, X)Y)(Z) = R(Z, X)Y$$

για κάθε $Z \in T_p(M)$.

Ο τανυστής Ricci ορίζεται ως το ίχνος της απεικόνισης $R(-, X)Y$, δηλαδή,

$$S(X, Y) = \mathrm{Ric}(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} g(R(e_i, X)Y, e_i),$$

όπου $X, Y \in T_p(M)$ και $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ μια ορθοκανονική βάση του $T_p(M)$. Αντίστοιχα, αν X, Y είναι διανυσματικά πεδία της πολλαπλότητας M, τότε το $\mathrm{Ric}(X, Y)$ ορίζει το τανυστικό πεδίο Ricci, και είναι ένα συναλλοίωτο, συμμετρικό τανυστικό πεδίο τύπου $(0, 2)$.

Τελεστής Ricci και συμβολίζεται με Q στο σημείο $p \in M$, καλείται ο ενδομορφισμός του εφαπτόμενου χώρου $T_p(M)$ με τιμή

$$Q(X) = \sum_{i=1}^{n} R(X, e_i)e_i$$

όπου $X \in T_p(M)$ και $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ μια ορθοκανονική βάση του $T_p(M)$. Από τον ενδομορφισμό Q λαμβάνουμε το αντίστοιχο τανυστικό πεδίο Q τύπου (1,1) που πληρεί την κάτωθι σχέση

$$\mathrm{Ric}(X, Y) = g(QX, Y)$$

για κάθε $X, Y \in D^1(M)$.

Ορισμός 2.22. Βαθμωτή (ή αριθμητική) καμπυλότητα (scalar curvature) της πολλαπλότητας (M, g) λέγεται η συνάρτηση $r : M \to \mathbb{R}$ η οποία δίνεται από τη σχέση:

$$r = \operatorname{tr} Q = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Ric}(e_i, e_i) = \sum_{i=1}^{n} g(Qe_i, e_i)$$

όπου Q ο τελεστής καμπυλότητας του Ricci και $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ μια τυχούσα ορθοκανονική βάση του $T_p(M), p \in M$.

Μια ενδιαφέρουσα κλάση πολλαπλοτήτων Riemann είναι εκείνες για τις οποίες ο τανυστής Ricci είναι πολλαπλάσιο του μετρικού τανυστή, δηλαδή

$$\operatorname{Ric}(X, Y) = fg(X, Y)$$

όπου $f \in D^0(M)$ και $X, Y \in D^1(M)$. Οι πολλαπλότητες αυτές καλούνται πολλαπλότητες **Einstein**.

Αξίζει να σημειωθεί ότι για πολλαπλότητες Riemann διάστασης τρία, ο τανυστής καμπυλότητας προσδιορίζεται πλήρως από τον τελεστή Ricci. Συγκεκριμένα, έχουμε

Πρόταση 2.1. *[61, σελ.195] Σε κάθε τρισδιάστατη πολλαπλότητα Riemann (M, g) ισχύει*

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= g(Y,Z)QX - g(X,Z)QY + g(QY,Z)X - g(QX,Z)Y - \\ &\quad -\frac{r}{2}[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y], \end{aligned} \tag{2.2}$$

για κάθε $X, Y, Z \in D^1(M)$.

Έστω X ένα διανυσματικό πεδίο μιας πολλαπλότητας M. Θα ονομάζουμε **παράγωγο Lie (Lie derivative)** ενός τανυστικού πεδίου T τύπου (1,1) ως πρός το διανυσματικό πεδίο X το τανυστικό πεδίο $\mathcal{L}_X T$ τύπου (1,1) με τιμή

$$(\mathcal{L}_X T)Y = [X, T(Y)] - T([X, Y]),$$

για κάθε $Y \in D^1(M)$.

Κλείνουμε την παράγραφο αυτή δίνοντας τη μορφή των γνωστών διαφορικών τελεστών $\mathrm{div}, \mathrm{grad}$ και του Λαπλασιανού τελεστή σε μια πολλαπλότητα Riemann (M, g) εφοδιασμένη με τη Levi-Civita συνοχή.

Για κάθε $f \in D^0(M)$, η **κλίση** (**gradient**) της f δίνεται από τη σχέση:

$$g(\mathrm{grad}\, f, X) = X(f),$$

για κάθε $X \in D^0(M)$.

Απόκλιση(**divergence**) $\mathrm{div}\, X$ ενός διανυσματικού πεδίου X ονομάζεται η συνάρτηση που ορίζεται ως εξής:

$$(\mathrm{div}\, X)(p) = \mathrm{tr}(Y \to \nabla_Y X),$$

για κάθε $p \in M$.

Συνδυάζοντας τους τελεστές grad και div, συνάγουμε τον **Λαπλασιανό τελεστή** Δ που ορίζεται ως η απεικόνιση

$$\Delta : D^0(M) \to D^0(M)$$

με τιμή

$$\Delta f = \mathrm{div}\, \mathrm{grad}\, f = \sum_{i=1}^{n} \{E_i E_i(f) - (\nabla_{E_i} E_i)(f)\},$$

για κάθε $f \in D^0(M)$, όπου $\{E_i\}, i = 1, 2, \ldots, n$, είναι ένα τοπικό πεδίο πλαισίων της M.

2.2 Θεωρία Υποπολλαπλοτήτων

Στην παράγραφο αυτή αναφέρουμε μερικά εισαγωγικά στοιχεία από τη θεωρία των υποπολλαπλοτήτων. Συγκεκριμένα, δίνουμε τους τύπους Gauss και Weingarten και βασιζόμενοι σ' αυτούς συνάγουμε τις εξισώσεις Gauss και Godazzi.

Έστω M^n μια υποπολλαπλότητα της πολλαπλότητας Riemann $(N^m, \bar{g})$ και $i : M \to N$ η απεικόνιση έγκλεισης. Επειδή η i είναι εμβύθιση, μπορούμε να ταυτίσουμε οποιοδήποτε εφαπτόμενο διάνυσμα X της πολλαπλότητας M, στο σημείο p αυτής, με το εφαπτόμενο διάνυσμα $di_p(X)$ της N. Ορίζουμε μια μετρική Riemann g στην M από τη σχέση

$$g_p(X, Y) = \bar{g}_{i(p)}(di_p(X), di_p(Y))$$

για κάθε $p \in M$ και $X, Y \in T_p(M)$. Ουσιαστικά, εφοδιάζοντας την πολλαπλότητα M με τη μετρική Riemann g, η απεικόνιση i γίνεται μια **ισομετρική εμβύθιση** (**isometric immersion**). Ο εφαπτόμενος χώρος $T_p(N)$ της πολλαπλότητας N στο σημείο $p \in M$ αναλύεται ως ευθύ άθροισμα

$$T_p(N) = T_p(M) \oplus (T_p(M))^{\perp}.$$

Ο χώρος $(T_p(M))^{\perp}$ λέγεται **κάθετος χώρος** της M στο p.

Συμβολίζουμε με $\bar{\nabla}$ και $\bar{R}$ τη συνοχή Riemann και τον τανυστή καμπυλότητας της $(N^m, \bar{g})$ και με ∇ και R τη συνοχή Riemann και τον τανυστή καμπυλότητας της (M^n, g). Αν X, Y είναι δύο διανυσματικά πεδία της N εφαπτόμενα της πολλαπλότητας M, τότε θέτουμε

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \sigma(X, Y) \tag{2.3}$$

όπου $\nabla_X Y$(αντ. $\sigma(X,Y)$) είναι η εφαπτομενική (αντ. κάθετη) συνιστώσα του $\bar{\nabla}_X Y$. Ο παραπάνω τύπος καλείται και **τύπος του Gauss** και η κάθετη συνιστώσα σ καλείται **δεύτερη θεμελιώδης μορφή** της υποπολλαπλότητας M.

Θεωρούμε τώρα ένα μοναδιαίο διανυσματικό πεδίο ξ της N με $\xi_p \in (T_p(M))^{\perp}$ για κάθε $p \in M$ και ένα διανυσματικό πεδίο X της N εφαπτόμενο στην πολλαπλότητα M. Συμβολίζουμε με $-A_\xi X$ την εφαπτομενική συνιστώσα και με $\nabla^{\perp}_X \xi$ την κάθετη συνιστώσα του $\bar{\nabla}_X \xi$, δηλαδή

$$\bar{\nabla}_X \xi = -A_\xi X + \nabla^{\perp}_X \xi. \tag{2.4}$$

Η απεικόνιση $A_\xi : T_p(M) \to T_p(M)$ καλείται **απεικόνιση Weingarten** (ή **τελεστής σχήματος**) της υποπολλαπλότητας M στο σημείο $p \in M$ και ως πρός τη διεύθυνση του ξ. Η σχέση (2.4) καλείται **τύπος του Weingarten**. Μεταξύ της δεύτερης θεμελιώδους μορφής και της απεικόνισης Weingarten μιας υποπολλαπλότητας M, υφίσταται η σχέση

$$g(A_\xi X, Y) = \bar{g}(\sigma(X,Y), \xi) \tag{2.5}$$

για τυχαία διανυσματικά πεδία X, Y της πολλαπλότητας N εφαπτόμενα στην υποπολλαπλότητα M και για κάθε μοναδιαίο διανυσματικό πεδίο ξ κάθετο στην υποπολλαπλότητα M. Από τους τύπους του Gauss και του Weingarten συνάγουμε την **εξίσωση του Gauss**

$$\begin{aligned} g(\bar{R}(X,Y)Z,W) &= g(R(X,Y)Z,W) + \bar{g}(\sigma(X,Z),\sigma(X,W)) - \\ &\quad -\bar{g}(\sigma(X,W),\sigma(Y,Z)), \end{aligned} \tag{2.6}$$

για τυχαία διανυσματικά πεδία X, Y, Z εφαπτόμενα στην υποπολλαπλότητα M

καθώς, και την **εξίσωση του Godazzi**

$$(\bar{R}(X,Y)Z)^{\perp} = (\bar{\nabla}_X \sigma)(Y,Z) - (\bar{\nabla}_Y \sigma)(X,Z), \tag{2.7}$$

όπου με $(\bar{R}(X,Y)Z)^{\perp}$ συμβολίζουμε την κάθετη συνιστώσα του πεδίου $\bar{R}(X,Y)Z$ και με $\bar{\nabla}_X \sigma$ την συναλλοίωτη παράγωγο της δεύτερης θεμελιώδους μορφής, που δίνεται από τη σχέση

$$(\bar{\nabla}_X \sigma)(Y,Z) = \nabla^{\perp}_X(\sigma(Y,Z)) - \sigma(\nabla_X Y, Z) - \sigma(Y, \nabla_X Z) \tag{2.8}$$

για τυχαία διανυσματικά πεδία X, Y, Z εφαπτόμενα στην υποπολλαπλότητα M.

Ορισμός 2.23. Ένα διανυσματικό πεδίο ξ κάθετο στην υποπολλαπλότητα M καλείται **παράλληλο** αν $\bar{\nabla}_X \xi = 0$ για κάθε διανυσματικό πεδίο X εφαπτόμενο στην υποπολλαπλότητα M.

Το διανυσματικό πεδίο $\mathbb{H} = \frac{1}{n} \operatorname{tr} \sigma$ καλείται **διανυσματικό πεδίο μέσης καμπυλότητας** της υποπολλαπλότητας M. Η υποπολλαπλότητα M καλείται **ελάχιστης έκτασης** (**minimal submanifold**) αν

$$\mathbb{H}_p = 0$$

για κάθε $p \in M$.

Η υποπολλαπλότητα M καλείται **ολικά ομφαλική** (**totally umbilical**) αν

$$\sigma(X,Y) = g(X,Y)\mathbb{H}$$

για κάθε ζεύγος διανυσματικών πεδίων X, Y εφαπτόμενων της υποπολλαπλότητας M.

Για περισσότερες πληροφορίες γύρω από τα θέματα που αναφέρονται στο κεφάλαιο αυτό παραπέμπουμε τον αναγνώστη στις αναφορές: [3], [25], [31], [45], [57], [60], [61].

Κεφάλαιο 3

Πολλαπλότητες επαφής Riemann

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναφερθούμε σε ειδικές κατηγορίες πολλαπλοτήτων Riemann: τις **πολλαπλότητες επαφής**. Συγκεκριμένα, δίνουμε έμφαση στις πολλαπλότητες Sasaki, στις (κ, μ)-πολλαπλότητες επαφής Riemann, στις γενικευμένες (κ, μ)-πολλαπλότητες επαφής Riemann και στις H-μετρικές πολλαπλότητες επαφής.

3.1 Θεωρία πολλαπλοτήτων επαφής Riemann

Στην παράγραφο αυτή δίνουμε μερικούς βασικούς ορισμούς και Θεωρήματα από τη θεωρία των πολλαπλοτήτων επαφής Riemann. Συγκεκριμένα, έχουμε:

Ορισμός 3.24. Μια πολλαπλότητα περιττής διάστασης M^{2n+1} καλείται **πολλαπλότητα επαφής** αν ορίζεται ολικά επί της M μια 1-μορφή η με την ιδιότητα

$$\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$$

παντού στην M, όπου $(d\eta)^n = \underbrace{d\eta \wedge d\eta \wedge \ldots \wedge d\eta}_{n-\text{φορές}}$. Η 1-μορφή η καλείται **μορ-**

φή επαφής(**contact form**).

Ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^{2n+1}$, για παράδειγμα, εφοδιασμένος με τις καρτεσιανές συντεταγμένες $(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n, z)$ και με τη μορφή του Darboux $\eta = dz - \sum_{i=1}^n y^i dx^i$, είναι μια πολλαπλότητα επαφής. Άλλα χαρακτηριστικά παραδείγματα πολλαπλοτήτων επαφής είναι οι περιττής διάστασης μοναδιαίες σφαίρες S^{2n+1}, η μοναδιαία εφαπτόμενη(αντ. συνεφαπτόμενη) δέσμη $T_1(M)$(αντ. $T_1^*(M)$) μιας πολλαπλότητας Riemann M, καθώς και οι τόροι T^3 και T^5. Περισσότερες πληροφορίες για την κατασκευή της μορφής επαφής η στους χώρους αυτούς παραπέμπουμε στις αναφορές: [7, σελ.20-23], [52], [56].

Έστω M^{2n+1} μια πολλαπλότητα επαφής με μορφή επαφής η. Η κατανομή D που ορίζεται από την εξίσωση $\eta = 0$, έχει διάσταση $2n$ και ονομάζεται **κατανομή επαφής**. Ουσιαστικά, η συνθήκη $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$ δηλώνει ότι η κατανομή D δεν είναι ολοκληρώσιμη. Συγκεκριμένα, η μέγιστη διάσταση μιας ολοκληρωτικής υποπολλαπλότητας της κατανομής D είναι n ([72]). Μια μονοδιάστατη ολοκληρωτική πολλαπλότητα της κατανομής D καλείται **καμπύλη του Legendre**.

Είναι γνωστό ότι μια πολλαπλότητα επαφής M^{2n+1} δέχεται μια σχεδόν μετρική δομή επαφής (η, ξ, ϕ, g), δηλαδή ένα ολικά και μονοσήμαντα ορισμένο διανυσματικό πεδίο ξ, το οποίο ονομάζεται **χαρακτηριστικό διανυσματικό πεδίο** (ή **διανυσματικό πεδίο του Reeb**), ένα τανυστικό πεδίο ϕ τύπου (1, 1) και μια μετρική Riemann g (**συσχετισμένη μετρική**), έτσι ώστε

$$\eta(\xi) = 1, \qquad \phi^2 = -Id + \eta \otimes \xi, \qquad \eta \circ \phi = 0 \tag{3.1}$$

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) \tag{3.2}$$

για όλα τα διανυσματικά πεδία X, Y της M^{2n+1}. Επιπλέον, η τετράδα (η, ξ, ϕ, g) μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε

$$d\eta(X,Y) = g(X, \phi Y) \tag{3.3}$$

για κάθε $X, Y \in D^1 M^{2n+1}$. Η 2-μορφή Φ που ορίζεται από τη σχέση

$$\Phi(X,Y) = g(X, \phi Y)$$

καλείται **θεμελιώδης μορφή** της σχεδόν μετρικής δομής επαφής (η, ξ, ϕ, g).

Ορισμός 3.25. Μια πολλαπλότητα περιττής διάστασης M^{2n+1} εφοδιασμένη με μια σχεδόν μετρική δομή επαφής (η, ξ, ϕ, g) τέτοια ώστε $\Phi = d\eta$ καλείται **μετρική πολλαπλότητα επαφής** ή **πολλαπλότητα επαφής Riemann(contact metric manifold)** και συμβολίζεται με $[M^{2n+1}, (\eta, \xi, \phi, g)]$ ή $[M, (\eta, \xi, \phi, g)]$.

Αξίζει να σημειωθεί ότι τόσο η μετρική g όσο και το τανυστικό πεδίο ϕ δεν ορίζονται μονοσήμαντα επί της M.

Από τις σχέσεις (3.1) και (3.2), εύκολα συμπεραίνουμε ότι

$$\phi\xi = 0, \quad \eta(X) = g(X, \xi) \tag{3.4}$$

για κάθε $X \in D^1(M)$. Επιπρόσθετα, η τάξη (rank) του ενδομορφισμού ϕ ισούται με $2n$.

Σε μια πολλαπλότητα επαφής M ορίζουμε τους τελεστές l, h και τ από τις σχέσεις

$$lX = R(X,\xi)\xi, \quad hX = \tfrac{1}{2}(\mathcal{L}_\xi \phi)(X), \quad \tau(X,Y) = (\mathcal{L}_\xi g)(X,Y) \tag{3.5}$$

για κάθε $X, Y \in D^1(M)$, όπου με $\mathcal{L}$ και R συμβολίζουμε αντίστοιχα την παράγωγο Lie και τον τανυστή καμπυλότητας της M. Ειδικότερα, οι τελεστές h και l είναι αυτοσυζυγείς και ικανοποιούν τις κάτωθι σχέσεις:

$$h\xi = 0, \quad l\xi = 0, \quad \operatorname{tr} h = \operatorname{tr} h\phi = 0, \quad h\phi = -\phi h. \tag{3.6}$$

Από τις σχέσεις (3.6) εύκολα συνάγουμε ότι αν X είναι ένα πεδίο ιδιοδιανυσμάτων του h που αντιστοιχεί στην ιδιοσυνάρτηση λ, τότε το ϕX είναι επίσης ένα πεδίο ιδιοδιανυσμάτων του h που αντιστοιχεί στην ιδιοσυνάρτηση $-\lambda$. Συμβολίζοντας με ∇ τη συνοχή Levi-Civita της M, έχουμε τις σχέσεις:

$$\nabla_X \xi = -\phi X - \phi h X \quad (\text{οπότε} \ \ \nabla_\xi \xi = 0), \tag{3.7}$$

$$\nabla_\xi \phi = 0, \tag{3.8}$$

$$trl = g(Q\xi, \xi) = 2n - trh^2, \tag{3.9}$$

$$\phi l \phi - l = 2(\phi^2 + h^2), \tag{3.10}$$

$$\nabla_\xi h = \phi - \phi l - \phi h^2, \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned} 2(\nabla_{hX}\phi)Y &= -R(\xi, X)Y - \phi R(\xi, X)\phi Y + \phi R(\xi, \phi X)Y - \\ &\quad -R(\xi, \phi X)\phi Y + 2g(X + hX, Y)\xi - \\ &\quad -2\eta(Y)(X + hX), \end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\tau(X, Y) = 2g(\phi X, hY), \tag{3.13}$$

$$(\nabla_\xi \tau)(X, Y) = 2g(\phi X, (\nabla_\xi h)Y), \tag{3.14}$$

$$\|\tau\|^2 = 4 \operatorname{tr} h^2. \tag{3.15}$$

Για τις αποδείξεις των σχέσεων (3.7)-(3.12) παραπέμπουμε στην αναφορά ([7, σελ.65-68, 91-92, 95-97]) ενώ για τις αποδείξεις των σχέσεων (3.13)-(3.15) παραπέμπουμε στην αναφορά [62].

Έστω $[M^{2n+1}, (\eta, \xi, \phi, g)]$ μια πολλαπλότητα επαφής Riemann και $p \in M$. Ένα επίπεδο $\pi \subseteq T_p(M)$ καλείται **ϕ-τομή** (**ϕ-section**) αν υπάρχει ένα εφαπτόμενο διάνυσμα $X \in T_p(M)$ κάθετο στο ξ, ώστε η δυάδα $\{X, \phi X\}$ να παράγει το επίπεδο π. Η καμπυλότητα τομής $K(X, \phi X)$ ονομάζεται **ϕ-καμπυλότητα τομής**(**ϕ-sectional curvature**) και συμβολίζεται με $H(X)$.

Θεωρούμε μια πολλαπλότητα επαφής Riemann $[M^{2n+1}, (\eta, \xi, \phi, g)]$. Ένας **$D$-ομοθετικός μετασχηματισμός** (ή **μετασχηματισμός του Tanno**) είναι μια αλλαγή των τανυστικών πεδίων δομής, έτσι ώστε

$$\bar{\eta} = \alpha\eta, \quad \bar{\xi} = \frac{1}{\alpha}\xi, \quad \bar{\phi} = \phi, \quad \bar{g} = \alpha g + \alpha(\alpha - 1)\eta \otimes \eta, \tag{3.16}$$

όπου α μια θετική σταθερά. Εύκολα παρατηρούμε ότι οι μετρικές g και $\bar{g}$ περιορισμένες στην κατανομή επαφής D είναι ομοθετικές. Είναι γνωστό ότι η πολλαπλότητα M^{2n+1}, εφοδιασμένη με τα νέα τανυστικά πεδία δομής $(\bar{\eta}, \bar{\xi}, \bar{\phi}, \bar{g})$, είναι μια νέα πολλαπλότητα επαφής Riemann ([74]).

Ορισμός 3.26. Η πολλαπλότητα επαφής Riemann $[M^{2n+1}, (\eta, \xi, \phi, g)]$ καλείται πολλαπλότητα **K-επαφής** (**K-contact**) αν το διανυσματικό πεδίο ξ είναι πεδίο Killing ως πρός τη μετρική Riemann g, δηλαδή παράγει μια τοπική μονοπαραμετρική ομάδα ισομετριών της πολλαπλότητας M, ως προς τη μετρική Riemann g.

Οι πολλαπλότητες K-επαφής χαρακτηρίζονται από τη συνθήκη $h = 0$. Το παρακάτω Θεώρημα δίνει έναν πιο γεωμετρικό χαρακτηρισμό των πολλαπλοτήτων K-επαφής.

Θεώρημα 3.1. *[8] Μια πολλαπλότητα επαφής Riemann* $[M^{2n+1}, (\eta, \xi, \phi, g)]$ *είναι πολλαπλότητα* K*-επαφής αν και μόνο αν η καμπυλότητα Ricci στη διεύθυνση του χαρακτηριστικού πεδίου* ξ *είναι ίση με* $2n$*. Επιπλέον, έχουμε ότι* $Q\xi = 2n\xi$ *δηλαδή το χαρακτηριστικό πεδίο* ξ *είναι πεδίο ιδιοδιανυσμάτων του τελεστή Ricci* Q *που αντιστοιχεί στη σταθερή ιδιοσυνάρτηση* $2n$*.*

Δοθείσης μιας πολλαπλότητας επαφής Riemann $[M^{2n+1}, (\eta, \xi, \phi, g)]$, μπορούμε να ορίσουμε, κατα φυσικό τρόπο, μια σχεδόν μιγαδική δομή J στην πολλαπλότητα $M \times \mathbb{R}$ ως εξής:

$$J(X, f\frac{d}{dt}) = (\phi X - f\xi, \eta(X)\frac{d}{dt})$$

όπου X διανυσματικό πεδίο της M, t η συντεταγμένη του $\mathbb{R}$ και f μια διαφορίσιμη συνάρτηση ορισμένη στην πολλαπλότητα $M \times \mathbb{R}$. Αν η σχεδόν μιγαδική δομή J είναι ολοκληρώσιμη, τότε η πολλαπλότητα M καλείται **κανονική (normal)** ή **πολλαπλότητα Sasaki**. Στην περίπτωση αυτή η πολλαπλότητα $M \times \mathbb{R}$ γίνεται πολλαπλότητα Kæhler.

Οι πολλαπλότητες Sasaki χαρακτηρίζονται γεωμετρικά με τη βοήθεια του τανυστή καμπυλότητας και της μορφής επαφής η. Συγκεκριμένα, μια πολλαπλότητα επαφής Riemann $[M^{2n+1}, (\eta, \xi, \phi, g)]$ είναι πολλαπλότητα Sasaki αν και μόνο αν

$$R(X, Y)\xi = \eta(Y)X - \eta(X)Y, \tag{3.17}$$

ή, ισοδύναμα,

$$(\nabla_X \phi)Y = g(X, Y)\xi - \eta(Y)X \tag{3.18}$$

για κάθε $X, Y \in D^1(M)$.

Αξίζει να σημειωθεί ότι κάθε πολλαπλότητα Sasaki είναι και πολλαπλότητα K-επαφής. Το αντίστροφο είναι αληθές μόνο στη διάσταση τρία.

Τέλος, περισσότερες πληροφορίες για τις πολλαπλότητες επαφής περιέχονται στο κλασσικό βιβλίο του Blair [7] και στις Μεταπτυχιακές Διπλωματικές Εργασίες ([53], [78]).

3.2 (κ,μ)-πολλαπλότητες επαφής Riemann

Στην παράγραφο αυτή αναφερόμαστε σε μια ενδιαφέρουσα κλάση πολλαπλοτήτων επαφής Riemann που γενικεύει τις πολλαπλότητες Sasaki: τις (κ,μ)-πολλαπλότητες επαφής Riemann([12]).

Έστω $[M^{2n+1},(\eta,\xi,\phi,g)]$ μια πολλαπλότητα επαφής Riemann. Λέγοντας (κ,μ)-κατανομή για το ζεύγος $(\kappa,\mu)\in\mathbb{R}^2$, εννοούμε την κατανομή

$$\begin{aligned} N(\kappa,\mu): p \to N_p(\kappa,\mu) = \{Z \in T_pM | R(X,Y)Z = \kappa(g(Y,Z)X - g(X,Z)Y) \\ +\mu(g(Y,Z)hX - g(X,Z)hY)\} \end{aligned}$$

για κάθε $X, Y \in T_p(M)$.

Κατά συνέπεια, αν το χαρακτηριστικό πεδίο ξ ανήκει στην (κ,μ)-κατανομή, θα έχουμε

$$R(X,Y)\xi = \kappa(\eta(Y)X - \eta(X)Y) + \mu(\eta(Y)hX - \eta(X)hY), \qquad (3.19)$$

για κάθε $X, Y \in D^1(M)$.

Ορισμός 3.27. Μια πολλαπλότητα επαφής Riemann $[M^{2n+1},(\eta,\xi,\phi,g)]$ της οποίας το χαρακτηριστικό πεδίο ξ ανήκει στην (κ,μ)-κατανομή ονομάζεται (κ,μ)-**πολλαπλότητα επαφής**.

Στο σημείο αυτό δίνουμε μια πιο γεωμετρική ερμηνεία των (κ, μ)-πολλαπλοτήτων επαφής Riemann. Ο Blair ([7]) ταξινόμησε τις πολλαπλότητες επαφής Riemann M, που πληρούν την κάτωθι συνθήκη:

$$R(X, Y)\xi = 0$$

για κάθε $X, Y \in D^1(M)$. Συγκεκριμένα, απέδειξε ότι είναι τοπικά ισομετρικές με το γινόμενο του Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^{n+1}$ και της σφαίρας σταθερής καμπυλότητας $+4$, $S^n(4)$ υπό την προυπόθεση ότι $n > 1$ και Ευκλείδειες όταν $n = 1$. Εκτελώντας τώρα ένα D-ομοθετικό μετασχηματισμό σε μια πολλαπλότητα επαφής Riemann $[M^{2n+1}, (\eta, \xi, \phi, g)]$ που ικανοποιεί τη σχέση $R(X, Y)\xi = 0$, προκύπτει ότι ([12])

$$\bar{R}(X, Y)\bar{\xi} = \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2}(\bar{\eta}(Y)X - \bar{\eta}(X)Y) + \frac{2(\alpha - 1)}{\alpha}(\bar{\eta}(Y)\bar{h}X - \bar{\eta}(X)\bar{h}Y),$$

όπου $\bar{R}$ είναι ο τανυστής καμπυλότητας της $[M^{2n+1}, (\bar{\eta}, \bar{\xi}, \bar{\phi}, \bar{g})]$, $\bar{h} = \frac{1}{\alpha}h$ και α μια θετική σταθερά. Εύκολα συνάγουμε ότι η πολλαπλότητα επαφής Riemann $[M^{2n+1}, (\bar{\eta}, \bar{\xi}, \bar{\phi}, \bar{g})]$ είναι μια (κ, μ)-πολλαπλότητα επαφής με $\kappa = \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2}$ και $\mu = \frac{2(\alpha-1)}{\alpha}$.

Οι Blair, Koufogiorgos και Papantoniou οι οποίοι εισήγαγαν τις (κ, μ)-πολλαπλότητες επαφής, στη συνέχεια τις ταξινόμησαν στη διάσταση τρία. Ειδικότερα, απέδειξαν το ακόλουθο Θεώρημα:

Θεώρημα 3.2. *[12] Έστω $[M^3, (\eta, \xi, \phi, g)]$ μια πλήρης (κ, μ)-πολλαπλότητα επαφής Riemann. Τότε η M^3 είναι ή*

(i) πολλαπλότητα Sasaki ($\kappa = 1, h = 0$), ή

(*ii*) *τοπικά ισομετρική με μια από τις ακόλουθες ομάδες Lie: $SU(2)$(ή $SO(3)$), $SL(2,\mathbb{R})$(ή $O(1,2)$), $E(2)$ (η ομάδα των στερεών κινήσεων του διδιάστατου Ευκλείδειου χώρου), $E(1,1)$ (η ομάδα των στερεών κινήσεων του διδιάστατου χώρου του Minkowski), εφοδιασμένες με μια αριστερά αναλλοίωτη μετρική.*

Ο Boeckx [17] εισήγαγε την παρακάτω αναλλοίωτο

$$I_M = \frac{1 - \frac{\mu}{2}}{\sqrt{1-\kappa}}$$

και έδειξε ότι για δυο (κ, μ)-πολλαπλότητες επαφής που δεν είναι πολλαπλότητες Sasaki ($[M_i, (\eta_i, \xi_i, \phi_i, g_i]$), $i = 1, 2$ έχουμε $I_{M_1} = I_{M_2}$ αν και μόνο αν οι δυο πολλαπλότητες είναι τοπικά ισομετρικές, ως πολλαπλότητες επαφής. Έτσι ξέρουμε όλες τις (κ, μ)-πολλαπλότητες που δεν είναι πολλαπλότητες του Sasaki τοπικά εφόσον έχουμε για κάθε περιττή διάσταση $2n+1$ και για κάθε πιθανή τιμή της αναλλοιώτου I, μια (κ, μ)-πολλαπλότητα $[M, (\eta, \xi, \phi, g)]$ με $I_M = I$.

Αναφέρουμε ότι αρκετοί ερευνητές μελέτησαν τις (κ, μ)-πολλαπλότητες επαφής Riemann διάστασης μεγαλύτερης του τρία που πληρούν κάποιες επιπρόσθετες γεωμετρικές συνθήκες (βλέπε [58], [59], [29], [80]). Επιπλέον, οι (κ, μ)-πολλαπλότητες είναι τοπικά ομογενείς ([16]), έχουν σταθερή βαθμωτή καμπυλότητα, σταθερή ϕ-καμπυλότητα τομής και το χαρακτηριστικό πεδίο ξ είναι πεδίο ιδιοδιανυσμάτων του τελεστή Ricci Q ([12]). Αξίζει να αναφέρουμε ότι οι $(\kappa, 0)$-πολλαπλότητες επαφής έχουν μελετηθεί αρχικά από τον Tanno ([75]).

Οι Koufogiorgos και Tsichlias ([49]) διατύπωσαν το παρακάτω ερώτημα: Υπάρχουν πολλαπλότητες επαφής Riemann που ικανοποιούν τη συνθήκη (3.19) με κ, μ μη σταθερές διαφορίσιμες συναρτήσεις, ανεξάρτητες από την επιλογή των διανυσματικών πεδίων X, Y; Η απάντηση στο πρόβλημα αυτό είναι θετική για την περίπτωση της διάστασης τρία και οι ίδιοι συγγραφείς κατασκεύασαν δυο παραδείγματα και στη συνέχεια με τη βοήθεια του D-ομοθετικού μετασχηματισμού μια αφθονία παραδειγμάτων. Η ύπαρξη τέτοιων πολλαπλοτήτων επαφής Riemann οδηγεί στον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 3.28. Μια πολλαπλότητα επαφής Riemann $[M^{2n+1}, (\eta, \xi, \phi, g)]$ θα ονομάζεται **γενικευμένη(generalized)** (κ, μ)**-πολλαπλότητα επαφής** αν υπάρχουν διαφορίσιμες συναρτήσεις $\kappa, \mu : M \to \mathbb{R}$, έτσι ώστε ο τανυστής καμπυλότητας της M να ικανοποιεί τη σχέση

$$R(X, Y)\xi = \kappa(\eta(Y)X - \eta(X)Y) + \mu(\eta(Y)hX - \eta(X)hY), \tag{3.20}$$

για κάθε $X, Y \in D^1(M)$.

Στην περίπτωση που οι συναρτήσεις κ, μ είναι σταθερές, οι γενικευμένες (κ, μ)-πολλαπλότητες επαφής εκφυλίζονται στις (κ, μ)-πολλαπλότητες επαφής. Στην πραγματικότητα, οι γενικευμένες (κ, μ)-πολλαπλότητες επαφής είναι μια αρκετά μεγάλη κλάση πολλαπλοτήτων επαφής που εμπεριέχει τη κλάση των (κ, μ)-πολλαπλοτήτων επαφής και τις πολλαπλότητες Sasaki.
Για διάσταση μεγαλύτερη του τρία, έχουμε το ακόλουθο Θεώρημα

Θεώρημα 3.3. *[49] Σε κάθε γενικευμένη (κ, μ)-πολλαπλότητα επαφής Riemann $[M^{2n+1}, (\eta, \xi, \phi, g)]$, $n > 1$ που δεν είναι πολλαπλότητα Sasaki, οι συναρτήσεις κ και μ είναι σταθερές συναρτήσεις, δηλαδή, η M^{2n+1} είναι μια (κ, μ)-πολλαπλότητα επαφής.*

Η απόδειξη του Θεωρήματος στηρίζεται σε μια διανυσματική διαφορική εξίσωση και στο παρακάτω λήμμα, που θα χρησιμοποιηθεί σε επόμενο κεφάλαιο.

Λήμμα 3.1. *[49] Έστω $[M^{2n+1}, (\eta, \xi, \phi, g)]$ μια γενικευμένη (κ, μ)-πολλαπλότητα επαφής Riemann. Τότε για κάθε $p \in M$ με $\kappa(p) < 1$, υπάρχει μια ανοικτή γειτονιά U του p και ορθοκανονικά τοπικά διανυσματικά πεδία $\{\xi, X_i, \phi X_i\}, i = 1, 2, \dots n$, ορισμένα στο U, τέτοια ώστε*

$$hX_i = \lambda X_i, \quad h\phi X_i = -\lambda \phi X_i, \quad h\xi = 0, \quad i = 1, 2, \dots n \tag{3.21}$$

όπου $\lambda = \sqrt{1-\kappa}$.

Ανοικτό πρόβλημα παραμένει η ταξινόμηση των γενικευμένων (κ, μ)-πολλαπλοτήτων επαφής Riemann στη διάσταση τρία. Πρός αυτήν την κατεύθυνση, οι Koufogiorgos και Tsichlias ταξινόμησαν (τοπικά) τις τρισδιάστατες γενικευμένες (κ, μ)-πολλαπλότητες επαφής Riemann για τις οποίες η συνάρτηση μ είναι σταθερή κατά μήκος των ολοκληρωτικών καμπυλών του ξ ([51]).
Αξίζει να σημειωθεί ότι η συνθήκη $\xi(\mu) = 0$ πηγάζει από τη γεωμετρική συνθήκη $\|\operatorname{grad}\kappa\| =$ σταθερό. Οι ίδιοι συγγραφείς ταξινόμησαν (τοπικά) τις τρισδιάστατες γενικευμένες (κ, μ)-πολλαπλότητες επαφής Riemann για τις οποίες $\|\operatorname{grad}\kappa\| =$ σταθερό ([50]).
Περισσότερες πληροφορίες για τις γενικευμένες (κ, μ)-πολλαπλότητες επαφής Riemann παραπέμπουμε στη Διδακτορική Διατριβή ([79]).

3.3 H-μετρικές πολλαπλότητες επαφής

Είναι γνωστό ότι, το χαρακτηριστικό πεδίο ξ παίζει σημαντικό ρόλο στη μελέτη της γεωμετρίας μιας πολλαπλότητας επαφής Riemann. Από τη σκοπιά αυτή είναι φυσικό να μελετήσουμε την αρμονικότητα του πεδίου Reeb ξ και πώς αυτή επηρεάζει τη γεωμετρία μιας πολλαπλότητας επαφής Riemann. Αρχικά, όμως, κρίνεται σκόπιμο να αναφέρουμε μερικά εισαγωγικά στοιχεία γύρω από τις αρμονικές απεικονίσεις.

Για μια πολλαπλότητα (M^n, g), η **ψευδο-Λαπλασιανή** $\bar{\Delta}$ (**rough Laplacian**) ενός διανυσματικού πεδίου $X \in D^1(M)$ ορίζεται από τη σχέση

$$\bar{\Delta}X = -\operatorname{tr}\nabla^2 X = \sum_{i=1}^{n}\{\nabla_{\nabla_{E_i}E_i}X - \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}X\}, \tag{3.22}$$

όπου $\{E_i\}, i = 1, 2, \ldots, n$ ένα τοπικό πεδίο πλαισίων της M.

Κάθε μοναδιαίο διανυσματικό πεδίο V της πολλαπλότητας M μπορεί να θεωρηθεί ότι ορίζει μια εμβύθιση της πολλαπλότητας (M, g) στη μοναδιαία εφαπτόμενη δέσμη $T_1(M)$ εφοδιασμένης με τη μετρική του Sasaki, g_S. Συγκεκριμένα, η ανάσυρση της μετρικής g_S μέσω της απεικόνισης V δίνεται από τη σχέση

$$(V^*g_S)(X, Y) = g(X, Y) + g(\nabla_X V, \nabla_Y V),$$

για κάθε $X, Y \in D^1(M)$. Ως συνέπεια, έχουμε ότι η απεικόνιση V είναι ισομετρία αν και μόνο αν το πεδίο V είναι παράλληλο. Ορίζουμε τα τανυστικά πεδία A_V και L_V τύπου (1,1) από τις σχέσεις

$$A_V = -\nabla V, \quad L_V = I + A_V^t A_V,$$

όπου το τανυστικό πεδίο A_V^t τύπου $(1, 1)$ ορίζεται από τη σχέση

$$g(A_V X, Y) = g(X, A_V^t Y)$$

για κάθε $X, Y \in D^1 M$

Όταν η πολλαπλότητα M είναι συμπαγής και προσανατολίσιμη, ορίζουμε την **ενέργεια** του V (συμβολίζεται με $E(V)$) ως εξής:

$$E(V) = \frac{1}{2}\int_M \operatorname{tr} L_V v_g = \frac{n}{2}\operatorname{vol}(M, g) + \frac{1}{2}\int_M \|\nabla V\|^2 v_g,$$

όπου ο όρος $B(V) = \int_M \|\nabla V\|^2 v_g$ ονομάζεται **ολική κύρτωση**(**total bending**) του πεδίου V([84]). Στην παραπάνω έκφραση το v_g δηλώνει το στοιχείο όγκου της (M, g). Το πεδίο V καλείται **αρμονικό διανυσματικό πεδίο**(**harmonic vector field**) αν αποτελεί κρίσιμο σημείο του συναρτησοειδούς E ορισμένου πάνω στο σύνολο $\mathcal{X}^1(M)$ των μοναδιαίων διανυσματικών πεδίων της πολλαπλότητας M. Το πεδίο V είναι αρμονικό αν και μόνο αν η 1-μορφή ν_V που ορίζεται από τη σχέση

$$\nu_V(X) = tr(Z \mapsto (\nabla_Z A_V^t)X),$$

μηδενίζεται στην κατανομή $V^\perp$ που καθορίζεται από τα διανυσματικά πεδία που είναι κάθετα στο V([34]) ή, ισοδύναμα, η ψευδο-Λαπλασιανή του πεδίου V είναι συγγραμική με το πεδίο V([84], [85]).

Από την άλλη πλευρά, η απεικόνιση $V : (M, g) \to (T_1(M), g_S)$ ορίζει **αρμονική απεικόνιση** (**harmonic map**) αν και μόνο αν το πεδίο V είναι αρμονικό διανυσματικό πεδίο και, επιπλέον, ικανοποιείται η ακόλουθη συνθήκη

$$\mathrm{tr}(Z \mapsto R(A_V Z, V)X)) = 0,$$

για κάθε $X \in D^1(M)$([41]). Αξίζει να σημειωθεί ότι η Gil-Medrano ([34]) εισήγαγε ανάλογες έννοιες στην περίπτωση που η πολλαπλότητα M είναι μη συμπαγής ή μη προσανατολισμένη.

Στη συνέχεια, αναφέρουμε τον παρακάτω ορισμό

Ορισμός 3.29. Μια πολλαπλότητα $[M^{2n+1}, (\eta, \xi, \phi, g)]$ καλείται **H-μετρική πολλαπλότητα επαφής** (**H-contact metric manifold**) αν το χαρακτηριστικό πεδίο ξ είναι αρμονικό διανυσματικό πεδίο.

Παράλληλα, ο Perrone ([68]) υπολογίζοντας την ψευδο-Λαπλασιανή του πεδίου ξ απέδειξε το ακόλουθο Θεώρημα, που ουσιαστικά, χαρακτηρίζει την κατηγορία των H-μετρικών πολλαπλοτήτων επαφής. Συγκεκριμένα, έχουμε

Θεώρημα 3.4. *[68] Μια μετρική πολλαπλότητα επαφής $[M^{2n+1},(\eta,\xi,\phi,g)]$ είναι H-μετρική πολλαπλότητα επαφής αν και μόνο αν το χαρακτηριστικό πεδίο ξ είναι πεδίο ιδιοδιανυσμάτων του τελεστή Ricci Q.*

Αναφέρουμε, ότι στην περίπτωση που είναι $n=1$, το παραπάνω Θεώρημα έχει αποδειχθεί από τους González-Dávila και Vanhecke ([35]). Λόγω του παραπάνω γεωμετρικού χαρακτηρισμού, η κλάση των H-μετρικών πολλαπλοτήτων επαφής, γενικεύει τις κλάσεις των πολλαπλοτήτων Sasaki, K-επαφής, (κ,μ)-πολλαπλοτήτων επαφής, γενικευμένων (κ,μ)-πολλαπλοτήτων επαφής και των τοπικά ϕ-συμμετρικών πολλαπλοτήτων επαφής. Επιπλέον, η κλάση των H-μετρικών πολλαπλοτήτων επαφής παραμένει αναλλοίωτη κάτω από έναν D-ομοθετικό μετασχηματισμό ([68]).

Αναφέρουμε ότι αρκετοί ερευνητές έχουν μελετήσει πολλαπλότητες επαφής Riemann με την ιδιότητα το πεδίο του Reeb ξ να είναι πεδίο ιδιοδιανυσμάτων του τελεστή Ricci Q (βλέπε [24], [46]). Ο Perrone ([67]) έδωσε μια ενδιαφέρουσα γεωμετρική ερμηνεία των γενικευμένων (κ,μ)-πολλαπλοτήτων επαφής στη διάσταση τρία, χρησιμοποιώντας τη θεωρία των αρμονικών απεικονίσεων. Ειδικότερα, έχουμε

Θεώρημα 3.5. *[67] Έστω $[M,(\eta,\xi,\phi,g)]$ μια πολλαπλότητα επαφής διάστασης τρία. Τότε το χαρακτηριστικό πεδίο $\xi:(M,g)\rightarrow(T_1(M),g_S)$, όπου g_S είναι η μετρική του Sasaki στην μοναδιαία εφαπτόμενη δέσμη $T_1(M)$, ορίζει μια αρμονική απεικόνιση πάνω σε ένα οπουδήποτε πυκνό και ανοικτό υποσύνολο της M αν και μόνο αν η M είναι μια γενικευμένη (κ,μ)-πολλαπλότητα επαφής.*

Στην ίδια εργασία, ο Perrone ταξινόμησε τις τρισδιάστατες H-μετρικές πολλαπλότητες επαφής $[M,(\eta,\xi,\phi,g)]$ με την επιπρόσθετη ιδιότητα ότι η υποπολλαπλότητα $\xi(M)$ της μοναδιαίας εφαπτόμενης δέσμης $T_1(M)$ είναι ελαχιστική. Σε μια πρόσφατη εργασία του, ο Perrone ([70]) μελέτησε την ευστάθεια του πεδίου Reeb ξ μιας H-μετρικής πολλαπλότητας επαφής χρησιμοποιώντας τη βαθμωτή καμπυλότητα του Webster W, η οποία εισήχθη από τους Chern και Hamilton ([28]).

Συνοψίζοντας, εύκολα συνάγουμε ότι η κλάση των H-μετρικών πολλαπλοτήτων επαφής παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Ειδικότερα, η γεωμετρία των H-μετρικών πολλαπλοτήτων επαφής διάστασης τρία είναι ένα αντικείμενο που θα μας απασχολήσει στο Κεφάλαιο 4.

Τονίζουμε ότι οι πολλαπλότητες που αναφέρονται στα επόμενα κεφάλαια θεωρούνται συνεκτικές.

Κεφάλαιο 4

Η αρμονικότητα του πεδίου Reeb μετρικών πολλαπλοτήτων επαφής

Στο κεφάλαιο αυτό μελετούμε τις πολλαπλότητες επαφής Riemann $[M, (\eta, \xi, \phi, g)]$ των οποίων το χαρακτηριστικό διανυσματικό πεδίο ξ ικανοποιεί τη σχέση:

$$
\begin{aligned}
R(X,Y)\xi = \kappa(\eta(Y)X - \eta(X)Y) + \mu(\eta(Y)hX - \eta(X)hY) \\
+\nu(\eta(Y)\phi hX - \eta(X)\phi hY)
\end{aligned}
$$

για κάθε $X, Y \in D^1(M)$ και κ, μ, ν μη σταθερές διαφορίσιμες συναρτήσεις της M. Οι πολλαπλότητες αυτές ονομάζονται (κ, μ, ν)-**πολλαπλότητες επαφής** και παρουσιάζουν ιδιαίτερο γεωμετρικό ενδιαφέρον.

Για καλύτερη κατανόηση αυτού του Κεφαλαίου αναφέρουμε, σύντομα, τι περιέχει η κάθε παράγραφός του. Ειδικότερα, στην παράγραφο 4.1 δίνεται ο ορισμός των (κ, μ, ν)-πολλαπλοτήτων επαφής. Επιπρόσθετα, αποδεικνύουμε ότι στη διάσταση τρία οι έννοιες των H-μετρικών πολλαπλοτήτων επαφής και των (κ, μ, ν)-πολλαπλοτήτων επαφής είναι ισοδύναμες σε ένα οπουδήποτε πυκνό και ανοικτό υποσύνολο της M.

Στην παράγραφο 4.2 δίνονται παραδείγματα (κ, μ, ν)-πολλαπλοτήτων επαφής διάστασης τρία.

Στην παράγραφο 4.3 αποδεικνύουμε ότι οι (κ, μ, ν)-πολλαπλότητες επαφής διάστασης μεγαλύτερης του τρία, που δεν είναι πολλαπλότητες Sasaki, εκφυλίζονται στις (κ, μ)-πολλαπλότητες επαφής, δηλαδή, οι συναρτήσεις κ, μ είναι οι σταθερές συναρτήσεις και η συνάρτηση ν είναι η μηδενική συνάρτηση.

Στην παράγραφο 4.4 παραθέτονται μερικές γεωμετρικές ιδιότητες των τρισδιάστατων (κ, μ, ν)-πολλαπλοτήτων επαφής. Οι ιδιότητες αυτές είναι ιδιαίτερα χρήσιμες και στο Κεφάλαιο 5.

Στην παράγραφο 4.5 γίνεται μια προσπάθεια ταξινόμησης των τρισδιάστατων (κ, μ, ν)-πολλαπλοτήτων επαφής. Συγκεκριμένα, ταξινομούνται οι τρισδιάστατες (κ, μ, ν)-πολλαπλότητες επαφής, οι οποίες πληρούν επιπρόσθετα μερικές ενδιαφέρουσες γεωμετρικές συνθήκες.

4.1 Τρισδιάστατες H-μετρικές πολλαπλότητες επαφής

Αρχικά, δίνουμε τον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός 4.30. Μια πολλαπλότητα επαφής Riemann $[M^{2n+1}, (\eta, \xi, \phi, g)]$ της οποίας ο τανυστής καμπυλότητας ικανοποιεί τη σχέση

$$\begin{aligned} R(X,Y)\xi = \kappa[\eta(Y)X - \eta(X)Y] + \mu[\eta(Y)hX - \eta(X)hY] \\ +\nu[\eta(Y)\phi hX - \eta(X)\phi hY] \end{aligned} \qquad (4.1)$$

για κάθε $X, Y \in D^1(M)$, όπου κ, μ, ν διαφορίσιμες συναρτήσεις της M, καλείται (κ, μ, ν)-**πολλαπλότητα επαφής**.

Οι Koufogiorgos, Markellos και Papantoniou ([47]) χαρακτήρισαν γεωμετρικά τις H-μετρικές πολλαπλότητες επαφής διάστασης τρία χρησιμοποιώντας τον τανυστή καμπυλότητας. Συγκεκριμένα, έχουμε

Θεώρημα 4.1. *Έστω $[M, (\eta, \xi, \phi, g)]$ μια πολλαπλότητα επαφής Riemann διάστασης τρία. Αν η πολλαπλότητα M είναι μια (κ, μ, ν)-πολλαπλότητα επαφής, τότε είναι H-μετρική πολλαπλότητα επαφής. Αντιστρόφως, αν η πολλαπλότητα M είναι H-μετρική πολλαπλότητα επαφής, τότε είναι (κ, μ, ν)-πολλαπλότητα επαφής σε ένα οπουδήποτε πυκνό και ανοικτό υποσύνολο της M.*

Απόδειξη. Έστω ότι η πολλαπλότητα M είναι μια (κ, μ, ν)-πολλαπλότητα επαφής. Χρησιμοποιώντας τη συμμετρικότητα του τελεστή h και τις σχέσεις (3.4), (3.6) και (4.1), εύκολα υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} g(R(\xi, X)Y, Z) &= g(R(Y, Z)\xi, X) \\ &= \kappa g(\eta(Z)Y - \eta(Y)Z, X) + \mu g(\eta(Z)hY - \eta(Y)hZ, X) \\ &\quad +\nu g(\eta(Z)\phi hY - \eta(Y)\phi hZ, X) \\ &= g(\kappa(g(X,Y)\xi - \eta(Y)X) + \mu(g(hX,Y)\xi - \eta(Y)hX) \\ &\quad +\nu(g(\phi hY, X)\xi - \eta(Y)\phi hX), Z) \end{aligned}$$

για κάθε $Z \in D^1(M)$. Συνεπώς, έχουμε

$$\begin{aligned} R(\xi, X)Y &= \kappa[g(X,Y)\xi - \eta(Y)X] + \mu[g(hX,Y)\xi - \eta(Y)hX] \\ &\quad +\nu[g(\phi hY, X)\xi - \eta(Y)\phi hX]. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Για κάθε $p \in M$, θεωρούμε μια ορθοκανονική βάση $\{e, \phi e, \xi\}$ του $T_p(M)$. Χρησιμοποιώντας την έκφραση του τελεστή Ricci Q και τις σχέσεις (3.6) και (4.2), έχουμε

$$\begin{aligned} Q\xi &= R(\xi, e)e + R(\xi, \phi e)\phi e \\ &= \kappa\xi + \mu g(he, e)\xi + \nu g(\phi he, e)\xi \\ &\quad +\kappa\xi + \mu g(h\phi e, \phi e)\xi + \nu g(\phi h\phi e, \phi e)\xi \\ &= 2\kappa\xi + \mu \operatorname{tr} h\ \xi + \nu \operatorname{tr} \phi h\ \xi, \\ &= 2\kappa\xi, \end{aligned} \tag{4.3}$$

δηλαδή, το πεδίο ξ είναι πεδίο ιδιοδιανυσμάτων του τελεστή Ricci Q. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 3.4, εύκολα συνάγουμε ότι η πολλαπλότητα M είναι H-μετρική πολλαπλότητα επαφής.

Αντιστρόφως, υποθέτουμε ότι η πολλαπλότητα M είναι H-μετρική πολλαπλότητα επαφής ή, ισοδύναμα, ότι το χαρακτηριστικό πεδίο ξ είναι πεδίο ιδιοδιανυσμάτων του τελεστή Ricci Q. Συμβολίζουμε με U το ανοικτό υποσύνολο της M για το οποίο $h \neq 0$ και V το εσωτερικό του συνόλου των σημείων $m \in M$ για τα οποία $h = 0$. Είναι προφανές ότι το σύνολο $U \cup V$ είναι ένα ανοικτό και πυκνό υποσύνολο της M. Για κάθε $p \in U$ υπάρχει μια γειτονιά του και μια τοπική ορθοκανονική βάση $\{e, \phi e, \xi\}$ του U αποτελούμενη από πεδία ιδιοδιανυσμάτων του τελεστή h δηλ. $he = \lambda e, h\phi e = -\lambda\phi e$, όπου λ μη μηδενιζόμενη διαφορίσιμη συνάρτηση του U, η οποία υποθέτουμε ότι είναι θετική. Ο τελευταίος ισχυρισμός προκύπτει από τη συμμετρικότητα του h και τις σχέσεις (3.6). Στη συνέχεια, χρειαζόμαστε το παρακάτω Λήμμα:

Λήμμα 4.2. *[24] Στο U, ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:*

$$\begin{aligned}
&\nabla_\xi e = -\alpha\phi e, && \nabla_\xi \phi e = \alpha e,\\
&\nabla_e \xi = -(\lambda+1)\phi e, && \nabla_{\phi e}\xi = -(\lambda-1)e,\\
&\nabla_e e = \tfrac{1}{2\lambda}\{(\phi e)(\lambda)+A\}\phi e, && \nabla_{\phi e}\phi e = \tfrac{1}{2\lambda}\{e(\lambda)+B\}e,\\
&\nabla_e \phi e = -\tfrac{1}{2\lambda}\{(\phi e)(\lambda)+A\}e+(\lambda+1)\xi, &&\\
&\nabla_{\phi e} e = -\tfrac{1}{2\lambda}\{e(\lambda)+B\}\phi e+(\lambda-1)\xi, &&
\end{aligned} \tag{4.4}$$

$$\nabla_\xi h = 2\alpha h\phi + \xi(\lambda)s, \tag{4.5}$$

όπου α είναι μια διαφορίσιμη συνάρτηση ορισμένη στο U, $A = \mathrm{Ric}(\xi, e), B = \mathrm{Ric}(\xi, \phi e)$ και s είναι το τανυστικό πεδίο τύπου (1,1) που ορίζεται από τις σχέσεις: $s\xi = 0, se = e$ και $s\phi e = -\phi e$.

Αρχικά, υποθέτουμε ότι το ανοικτό σύνολο V είναι μη κενό. Τότε, περιορίζοντας τα τανυστικά πεδία η, ξ, ϕ και g στο V, εύκολα παρατηρούμε ότι το σύνολο V γίνεται μια μετρική πολλαπλότητα επαφής. Στην πραγματικότητα, η πολλαπλότητα V είναι πολλαπλότητα Sasaki. Χρησιμοποιώντας την (3.17), εύκολα συνάγουμε ότι η πολλαπλότητα V είναι μια (κ, μ, ν)-πολλαπλότητα επαφής (συγκεκριμένα, έχουμε $\kappa = 1, h = 0$ και οι συναρτήσεις μ, ν είναι αυθαίρετες). Στη συνέχεια, υποθέτουμε ότι το σύνολο U είναι μη κενό και δηλώνουμε με $\{\xi, e, \phi e\}$ την τοπική ορθοκανονική βάση του αποτελούμενη από πεδία ιδιοδιανυσμάτων του h. Ο Perrone ([64]) απέδειξε ότι ο τελεστής Ricci Q στις τρισδιάστατες πολλαπλότητες επαφής Riemann παίρνει την ακόλουθη μορφή

$$Q = aI + \beta\eta\otimes\xi + \phi\nabla_\xi h - \sigma(\phi^2)\otimes\xi + \sigma(e)\eta\otimes e + \sigma(\phi e)\eta\otimes\phi e$$

όπου $\sigma = \mathrm{Ric}(\xi, \cdot)_{|ker\eta}$, $a = \frac{r}{2} - 1 + \lambda^2$ και $\beta = -\frac{r}{2} + 3 - 3\lambda^2$. Χρησιμοποιώντας την (4.5), ο παραπάνω τύπος γίνεται

$$Q = aI + \beta\eta \otimes \xi + 2\alpha h + \xi(\lambda)\phi s - \sigma(\phi^2) \otimes \xi + \sigma(e)\eta \otimes e + \sigma(\phi e)\eta \otimes \phi e. \quad (4.6)$$

Δεδομένου ότι το πεδίο ξ είναι πεδίο ιδιοδιανυσμάτων του τελεστή Ricci, εύκολα συνάγουμε ότι $\sigma = 0$. Επιπλέον, παρατηρώντας ότι $s = \frac{1}{\lambda}h$ και χρησιμοποιώντας την (4.6), έχουμε

$$Q = aI + \beta\eta \otimes \xi + 2\alpha h + \frac{\xi(\lambda)}{\lambda}\phi h. \quad (4.7)$$

Από την άλλη πλευρά, χρησιμοποιώντας την (3.9) και τη συμμετρικότητα του h, έχουμε

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}\, l &= g(Q\xi, \xi) = 2 - \mathrm{tr}\, h^2 = 2 - (g(h^2 e, e) + g(h^2\phi e, \phi e) \\ &= 2 - g(he, he) - g(h\phi e, h\phi e) = 2 - 2\lambda^2 = 2(1 - \lambda^2). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Θέτοντας $Z = \xi$ στη σχέση (2.2), αξιοποιώντας το γεγονός ότι το πεδίο ξ είναι πεδίο ιδιοδιανυσμάτων του τελεστή Ricci και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.4) και (3.9), λαμβάνουμε ότι

$$\begin{aligned} R(X,Y)\xi &= \eta(Y)QX - \eta(X)QY + g(QY, \xi)X \\ &\quad - g(QX, \xi)Y - \frac{r}{2}(\eta(Y)X - \eta(X)Y) \\ &= \eta(Y)QX - \eta(X)QY + g(Q\xi, \xi)g(Y, \xi)X \\ &\quad - g(Q\xi, \xi)g(X, \xi)Y - \frac{r}{2}(\eta(Y)X - \eta(X)Y) \\ &= \eta(Y)QX - \eta(X)QY + (\mathrm{tr}\, l - \frac{r}{2})(\eta(Y)X - \eta(X)Y). \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας την (4.7) στην παραπάνω σχέση και χρησιμοποιώντας την

(4.8), συνάγουμε ότι

$$\begin{aligned} R(X,Y)\xi &= (1-\lambda^2)\{\eta(Y)X - \eta(X)Y\} + 2\alpha\{\eta(Y)hX - \eta(X)hY\} + \\ &\quad + \frac{\xi(\lambda)}{\lambda}\{\eta(Y)\phi hX - \eta(X)\phi hY\}. \end{aligned}$$

Συνεπώς, η πολλαπλότητα U είναι μια (κ,μ,ν)-πολλαπλότητα επαφής με $\kappa = 1-\lambda^2 = \frac{\operatorname{tr} l}{2}$, $\mu = 2\alpha$ και $\nu = \frac{\xi(\lambda)}{\lambda}$ και η απόδειξη του Θεωρήματος έχει ολοκληρωθεί. □

Παρατήρηση 4.1. Το Θεώρημα 4.1 αποτελεί γενίκευση του Θεωρήματος 3.5 που δίνει μια γεωμετρική ερμηνεία των γενικευμένων (κ,μ)-πολλαπλοτήτων επαφής με όρους των αρμονικών απεικονίσεων.

Χρησιμοποιώντας την τοπική ορθοκανονική βάση $\{e,\phi e,\xi\}$ όπως αυτή περιγράφεται στο Θεώρημα 4.1, έχουμε μια τοπική έκφραση του τελεστή Q σε τρισδιάστατες (κ,μ,ν)-πολλαπλότητες επαφής. Πιο γενικά, έχουμε

Πρόταση 4.2. *Έστω $[M,(\eta,\xi,\phi,g)]$ μια πολλαπλότητα επαφής Riemann διάστασης τρία. Τότε οι παρακάτω συνθήκες είναι ισοδύναμες στο $U\cup V$:*

1. $\operatorname{Ric}(\xi,\cdot)_{|ker\eta} = 0$
2. $R(X,Y)\xi = \kappa(\eta(Y)X - \eta(X)Y) + \mu(\eta(Y)hX - \eta(X)hY)$
   $+\nu(\eta(Y)\phi hX - \eta(X)\phi hY)$
   κ,μ,ν διαφορίσιμες συναρτήσεις του $U\cup V$
3. $Q\phi - \phi Q = 2\nu h - 2\mu\phi h$
4. $Q = (\frac{r}{2} - 1 + \lambda^2)I + (-\frac{r}{2} + 3 - 3\lambda^2)\eta\otimes\xi + \mu h + \nu\phi h.$

Απόδειξη. Η ισοδυναμία των (1) και (2) προκύπτει από την απόδειξη του Θεωρήματος 4.1.

(2) → (3). Υποθέτουμε ότι το ανοικτό σύνολο U είναι μη κενό. Από την ισοδυναμία των συνθηκών (1) και (2) έχουμε ότι $\kappa = 1 - \lambda^2, \mu = 2a, \nu = \frac{\xi(\lambda)}{\lambda}$ και χρησιμοποιώντας την (4.7), έχουμε

$$Q = (\frac{r}{2} - \kappa)I + (-\frac{r}{2} + 3\kappa)\eta \otimes \xi + \mu h + \nu\phi h. \tag{4.9}$$

Επιπλέον, χρησιμοποιώντας τις (3.1), (3.4), (3.6) και (4.9), λαμβάνουμε

$$Q\phi X = (\frac{r}{2} - \kappa)\phi X + \mu h\phi X + \nu hX$$

και

$$\phi QX = (\frac{r}{2} - \kappa)\phi X + \mu\phi hX - \nu hX$$

για κάθε $X \in D^1(U)$. Αφαιρώντας κατά μέλη τις δυο παραπάνω σχέσεις και χρησιμοποιώντας την (3.6), έχουμε τη συνθήκη (3) στο U. Στη συνέχεια, υποθέτουμε ότι το ανοικτό σύνολο V είναι μη κενό. Επειδή, η πολλαπλότητα V είναι πολλαπλότητα Sasaki, έχουμε ότι $Q\phi = \phi Q$ ([7, σελ.95]) και η συνθήκη (3) ικανοποιείται ταυτοχρόνως.

(3) → (4). Υποθέτουμε ότι εργαζόμαστε στο ανοικτό υποσύνολο U και ισχύει

$$Q\phi X - \phi QX = 2\nu hX - 2\mu\phi hX \tag{4.10}$$

για κάθε $X \in D^1(U)$. Θέτοντας $X = \xi$ στην παραπάνω σχέση, λαμβάνουμε $\phi Q\xi = 0$, δηλαδή, το πεδίο ξ είναι πεδίο ιδιοδιανυσμάτων του τελεστή Ricci Q. Ως συνέπεια, η (4.7) δίνει

$$Q = (\frac{r}{2} - 1 + \lambda^2)I + (-\frac{r}{2} + 3 - 3\lambda^2)\eta \otimes \xi + 2\alpha h + \frac{\xi(\lambda)}{\lambda}\phi h. \tag{4.11}$$

Χρησιμοποιώντας τις (3.1), (3.4) και (3.6) , εύκολα υπολογίζουμε

$$Q\phi X = (\frac{r}{2} - 1 + \lambda^2)\phi X + 2\alpha h\phi X + \frac{\xi(\lambda)}{\lambda}hX$$

και

$$\phi QX = (\frac{r}{2} - 1 + \lambda^2)\phi X + 2\alpha\phi hX - \frac{\xi(\lambda)}{\lambda}hX$$

για κάθε $X \in D^1(U)$. Αφαιρώντας κατά μέλη τις δυο παραπάνω σχέσεις, έχουμε

$$Q\phi X - \phi QX = 2\frac{\xi(\lambda)}{\lambda}hX - 4\alpha\phi hX \tag{4.12}$$

για κάθε $X \in D^1(U)$. Συγκρίνοντας τις (4.10) και (4.12), εύκολα συνάγουμε ότι

$$(\nu - \frac{\xi(\lambda)}{\lambda})hX + (2\alpha - \mu)\phi hX = 0$$

για κάθε $X \in D^1(U)$. Θέτοντας $X = e$ (αντ. $X = \phi e$) στην παραπάνω σχέση και αξιοποιώντας το γεγονός ότι τα διανυσματικά πεδία $e, \phi e$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, λαμβάνουμε $\nu = \frac{\xi(\lambda)}{\lambda}$ και $\mu = 2\alpha$ και ότι η συνθήκη (4) είναι αληθής στο U. Για την πολλαπλότητα Sasaki V η συνθήκη (4) ικανοποιείται αυτομάτως ([62]).

(4) $\rightarrow$ (1). Αξιοποιώντας το Θεώρημα 3.1, η συνθήκη (1) είναι αληθής για την πολλαπλότητα Sasaki V. Εργαζόμενοι στο U, έχουμε

$$QX = (\frac{r}{2} - 1 + \lambda^2)X + (-\frac{r}{2} + 3 - 3\lambda^2)\eta(X)\xi + \mu hX + \nu\phi hX$$

για κάθε $X \in D^1(U)$. Θέτοντας $X = \xi$ στην παραπάνω σχέση, λαμβάνουμε $Q\xi = 2(1 - \lambda^2)\xi$. Ως συνέπεια, έχουμε ότι $\mathrm{Ric}(\xi, \cdot)_{|ker\eta} = 0$. □

Παρατήρηση 4.2. Η Πρόταση 4.2 μπορεί να θεωρηθεί ως μια γενίκευση του κύριου Θεωρήματος της εργασίας [46] υπό την έννοια ότι οι σταθερές που εμφανίζονται εκεί αντικαθίστανται από διαφορίσιμες συναρτήσεις. Επιπλέον, ο τύπος για τον τελεστή Ricci έχει επιπρόσθετους όρους και γενικεύει την έννοια των η-Einstein μετρικών πολλαπλοτήτων επαφής ([13]).

Η επόμενη Πρόταση δείχνει ότι οι (κ, μ, ν)-πολλαπλότητες παραμένουν αναλλοίωτες κάτω από έναν D-ομοθετικό μετασχηματισμό.

Πρόταση 4.3. *Έστω $[M^3, (\eta, \xi, \phi, g)]$ μια (κ, μ, ν)-πολλαπλότητα επαφής. Τότε, η πολλαπλότητα $[M^3, (\bar{\eta}, \bar{\xi}, \bar{\phi}, \bar{g})]$ που προέρχεται από έναν D-ομοθετικό μετασχηματισμό είναι, επίσης, μια (κ, μ, ν)-πολλαπλότητα επαφής.*

Απόδειξη. Θεωρούμε μια (κ, μ, ν)-πολλαπλότητα επαφής $[M^3, (\eta, \xi, \phi, g)]$. Για κάθε θετικό αριθμό α, εκτελώντας έναν D-ομοθετικό μετασχηματισμό και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.16), παίρνουμε μια νέα πολλαπλότητα επαφής Riemann $[M^3, (\bar{\eta}, \bar{\xi}, \bar{\phi}, \bar{g})]$. Επιπλέον, ο τελεστής h και ο τανυστής καμπυλότητας μετασχηματίζονται ως εξής ([12]):

$$\bar{h} = \frac{1}{\alpha} h \tag{4.13}$$

και

$$\begin{aligned} \alpha \bar{R}(X, Y)\bar{\xi} \;=\;& R(X, Y)\xi + (\alpha - 1)^2[\eta(Y)X - \eta(X)Y] \\ & -(\alpha - 1)[(\nabla_X \phi))Y - (\nabla_Y \phi)X + \eta(X)(Y + hY) - \\ & -\eta(Y)(X + hX)]. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Είναι γνωστό ([7, σελ.74], [76]) ότι κάθε πολλαπλότητα επαφής Riemann είναι ισχυρώς ψευδοκυρτή ολοκληρώσιμη CR-πολλαπλότητα επαφής (contact strongly pseudoconvex integrable CR-manifold) ή, ισοδύναμα, ικανοποιεί την παρακάτω συνθήκη ολοκληρωσιμότητας

$$(\nabla_X \phi)Y = g(X + hX, Y)\xi - \eta(Y)(X + hX).$$

Αντικαθιστώντας την τελευταία σχέση στην (4.14) και χρησιμοποιώντας την (4.13), έχουμε

$$\begin{aligned}\bar{R}(X,Y)\bar{\xi} &= \frac{\kappa+\alpha^2-1}{\alpha^2}(\bar{\eta}(Y)X-\bar{\eta}(X)Y)+\frac{\mu+2(\alpha-1)}{\alpha}(\bar{\eta}(Y)\bar{h}X- \\ &\quad -\bar{\eta}(X)\bar{h}Y)+\frac{\nu}{\alpha}(\bar{\eta}(Y)\bar{\phi}\bar{h}X-\bar{\eta}(X)\bar{\phi}\bar{h}Y)\end{aligned}$$

για κάθε $X,Y\in D^1(M)$. Συνεπώς, η πολλαπλότητα επαφής $[M^3,(\bar{\eta},\bar{\xi},\bar{\phi},\bar{g})]$ είναι μια $(\bar{\kappa},\bar{\mu},\bar{\nu})$-πολλαπλότητα επαφής με

$$\bar{\kappa}=\tfrac{\kappa+\alpha^2-1}{\alpha^2},\quad \bar{\mu}=\tfrac{\mu+2\alpha-2}{\alpha},\quad \bar{\nu}=\tfrac{\nu}{\alpha}. \tag{4.15}$$

και η απόδειξη της Πρότασης έχει ολοκληρωθεί. □

Το Θεώρημα 4.1 υποδηλώνει ότι η αρμονικότητα του πεδίου ξ στη διάσταση τρία είναι αλληλένδετη με μια νέα κατηγορία πολλαπλοτήτων επαφής: τις (κ,μ,ν)-πολλαπλότητες επαφής. Το επόμενο ερώτημα έρχεται κατα φυσικό τρόπο: Υπάρχουν συγκεκριμένα παραδείγματα μετρικών πολλαπλοτήτων επαφής που ικανοποιούν τη συνθήκη (4.1) για κάποιες μη σταθερές διαφορίσιμες συναρτήσεις κ,μ,ν ανεξάρτητες από την επιλογή των διανυσματικών πεδίων X,Y; Απάντηση στο ερώτημα αυτό δίνεται στην επόμενη παράγραφο, με την κατασκευή παραδειγμάτων.

4.2 Ύπαρξη (κ,μ,ν)-πολλαπλοτήτων επαφής

Στην παράγραφο αυτή κατασκευάζουμε μερικά παραδείγματα τρισδιάστατων (κ,μ,ν)-πολλαπλοτήτων επαφής.

Παράδειγμα 4.1. Θεωρούμε την τρισδιάστατη πολλαπλότητα $M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|x>0,y>0,z>0\}$, με καρτεσιανές συντεταγμένες (x,y,z). Ορίζουμε τα παρακάτω διανυσματικά πεδία στην M

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad e_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \qquad e_3 = -\frac{4}{z}e^G G_y \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y} + e^{\frac{G}{2}} \frac{\partial}{\partial z}$$

όπου $G = G(y, z)$ είναι μια συνάρτηση των μεταβλητών y, z η οποία παίρνει αρνητικές τιμές και είναι λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης

$$2G_{yy} + G_y^2 = -ze^{-G}. \tag{4.16}$$

Η $\beta = \beta(x, y, z)$ είναι συνάρτηση των μεταβλητών x, y, z και είναι λύση του παρακάτω συστήματος διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους

$$\beta_x = \frac{4}{zx^2}e^G \tag{4.17}$$

και

$$\beta_y = \frac{1}{2z}e^{\frac{G}{2}} - \frac{G_z e^{\frac{G}{2}}}{2} - \frac{4e^G G_y}{xz}. \tag{4.18}$$

Τα διανυσματικά πεδία e_1, e_2, e_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα διότι

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{z}e^G G_y & \beta & e^{\frac{G}{2}} \end{pmatrix} = e^{\frac{G}{2}} \neq 0$$

σε κάθε σημείο της M. Στη συνέχεια, υπολογίζουμε τις παρενθέσεις του Lie μεταξύ των πεδίων e_1, e_2, e_3. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιώντας τις (4.16), (4.17) και (4.18), έχουμε

$$[e_1, e_2] = [\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}] = 0, \tag{4.19}$$

$$[e_1, e_3] = [\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{4}{z}e^G G_y \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y} + e^{\frac{G}{2}} \frac{\partial}{\partial z}] = \beta_x \frac{\partial}{\partial y} = \frac{4}{zx^2}e^G e_2, \tag{4.20}$$

$$\begin{aligned}
[e_2,e_3] &= [\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{4}{z}e^G G_y\frac{\partial}{\partial x}+\beta\frac{\partial}{\partial y}+e^{\frac{G}{2}}\frac{\partial}{\partial z}] = -\frac{4}{z}[e^G(G_y)^2+e^G G_{yy}]\frac{\partial}{\partial x}+\\
&+\beta_y\frac{\partial}{\partial y}+\frac{1}{2}e^{\frac{G}{2}}G_y\frac{\partial}{\partial z} = 2e_1+(\frac{1}{2z}e^{\frac{G}{2}}-\frac{G_z e^{\frac{G}{2}}}{2}-\frac{4e^G G_y}{xz}-\frac{\beta G_y}{2})e_2\\
&+\frac{G_y}{2}e_3. \qquad (4.21)
\end{aligned}$$

Θεωρούμε τη μετρική Riemann, για την οποία τα διανυσματικά πεδία e_1, e_2, e_3 συνιστούν ένα ορθομοναδιαίο πλαίσιο, καθώς και την 1-μορφή η που ορίζεται από τη σχέση $\eta(W) = g(W, e_1)$, για κάθε $W \in D^1(M)$. Συνεπώς, έχουμε $\eta(e_1) = g(e_1,e_1) = 1, \eta(e_2) = g(e_2,e_1) = 0$ και $\eta(e_3) = g(e_3,e_1) = 0$. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις αυτές και την (4.21), υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
(\eta\wedge d\eta)(e_1,e_2,e_3) &= \eta(e_1)d\eta(e_2,e_3)-\eta(e_2)d\eta(e_1,e_3)+\eta(e_3)d\eta(e_1,e_2)\\
&= d\eta(e_2,e_3) = \frac{1}{2}[e_2\eta(e_3)-e_3\eta(e_2)-\eta([e_2,e_3])] =\\
&= -\frac{1}{2}\eta([e_2,e_3]) = -1 \neq 0 \qquad (4.22)
\end{aligned}$$

σε κάθε σημείο της M. Εύκολα συνάγουμε ότι η 1-μορφή η είναι μορφή επαφής στην M.

Ορίζουμε το τανυστικό πεδίο ϕ τύπου (1,1) από τις σχέσεις

$$\phi e_1 = 0, \quad \phi e_2 = e_3, \quad \phi e_3 = -e_2 \qquad (4.23)$$

.

Σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι η τετράδα (η, e_1, ϕ, g) ορίζει μια μετρική δομή επαφής στην πολλαπλότητα M. Αρχικά, έχουμε ότι $\eta(e_1) = 1$. Επιπλέον, χρησιμοποιώντας τις (4.23), λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}
\phi^2 e_1 &= \phi(\phi e_1) = 0 = -e_1+\eta(e_1)e_1,\\
\phi^2 e_2 &= \phi(\phi e_2) = \phi e_3 = -e_2 = -e_2+\eta(e_2)e_1,\\
\phi^2 e_3 &= \phi(\phi e_3) = -\phi e_2 = -e_3 = -e_3+\eta(e_3)e_1.
\end{aligned}$$

Από τη γραμμικότητα του τανυστικού πεδίου ϕ και τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι $\phi^2 X = -X + \eta(X)e_1$ για κάθε $X \in D^1(M)$.

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό των τανυστικών πεδίων η, g, ϕ, έχουμε

$$\begin{aligned}
g(\phi e_1, \phi e_2) &= 0 = g(e_1, e_2) - \eta(e_1)\eta(e_2),\\
g(\phi e_1, \phi e_3) &= 0 = g(e_1, e_3) - \eta(e_1)\eta(e_3),\\
g(\phi e_1, \phi e_1) &= 0 = g(e_1, e_1) - \eta(e_1)\eta(e_1),\\
g(\phi e_2, \phi e_2) &= g(e_3, e_3) = 1 = g(e_2, e_2) - \eta(e_2)\eta(e_2),\\
g(\phi e_2, \phi e_3) &= -g(e_3, e_2) = 0 = g(e_3, e_2) - \eta(e_2)\eta(e_3),\\
g(\phi e_3, \phi e_3) &= g(e_2, e_2) = 1 = g(e_3, e_3) - \eta(e_3)\eta(e_3).
\end{aligned}$$

Από τη γραμμικότητα των τανυστικών πεδίων η, g, ϕ προκύπτει ότι $g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)$ για κάθε $X, Y \in D^1(M)$.

Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς των η, g, ϕ, τις σχέσεις (3.3), (4.19), (4.20) και (4.21), έχουμε

$$\begin{aligned}
d\eta(e_1, e_2) &= \frac{1}{2}[e_1\eta(e_2) - e_2\eta(e_1) - \eta([e_1, e_2])] = 0 = g(e_1, \phi e_2),\\
d\eta(e_1, e_3) &= \frac{1}{2}[e_1\eta(e_3) - e_3\eta(e_1) - \eta([e_1, e_3]) = 0 = g(e_1, \phi e_3),\\
d\eta(e_2, e_2) &= 0 = g(e_2, \phi e_2),\\
d\eta(e_3, e_3) &= 0 = g(e_3, \phi e_3),\\
d\eta(e_2, e_3) &= \frac{1}{2}[e_2\eta(e_3) - e_3\eta(e_2) - \eta([e_2, e_3])] = -1 = g(e_2, -e_2) = g(e_2, \phi e_3).
\end{aligned}$$

Οι παραπάνω σχέσεις σε συνδυασμό με τη γραμμικότητα των τανυστικών πεδίων $d\eta, g, \phi$ δίνουν $d\eta(X, Y) = g(X, \phi Y)$ για κάθε $X, Y \in D^1(M)$.

Εύκολα παρατηρούμε ότι οι συνθήκες (3.1), (3.2) και (3.3) ικανοποιούνται. Δείξαμε λοιπόν ότι η τετράδα (η, e_1, ϕ, g) ορίζει μια μετρική δομή επαφής στην πολλαπλότητα M και, συνεπώς, η $[M, (\eta, e_1, \phi, g)]$ είναι μια πολλαπλότητα επαφής Riemann. Συμβολίζουμε με ∇ τη συνοχή Levi-Civita ως πρός τη μετρική Riemann g και με R τον τανυστή καμπυλότητας της μετρικής g. Αξιοποιώντας τις σχέσεις (2.1), (4.19), (4.20) και (4.21), υπολογίζουμε διαδοχικά

$$g(\nabla_{e_1} e_1, e_1) = \frac{1}{2} e_1 g(e_1, e_1) = 0,$$

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_{e_1} e_1, e_2) &= -g(e_1, [e_1, e_2]) + g(e_1, [e_2, e_1]) + g(e_2, [e_1, e_1]) = 0, \\ 2g(\nabla_{e_1} e_1, e_3) &= -g(e_1, [e_1, e_3]) + g(e_1, [e_3, e_1]) + g(e_3, [e_1, e_1]) = 0, \end{aligned} \tag{4.24}$$

οπότε $\nabla_{e_1} e_1 = 0$. Ανάλογα, έχουμε

$$g(\nabla_{e_2} e_1, e_1) = \frac{1}{2} e_2 g(e_1, e_1) = 0,$$

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_{e_2} e_1, e_2) &= -g(e_2, [e_1, e_2]) + g(e_1, [e_2, e_2]) + g(e_2, [e_2, e_1]) = 0, \\ 2g(\nabla_{e_2} e_1, e_3) &= -g(e_2, [e_1, e_3]) + g(e_1, [e_3, e_2]) = -\frac{4e^G}{zx^2} - 2, \end{aligned}$$

οπότε $\nabla_{e_2} e_1 = (-\frac{2e^G}{zx^2} - 1)e_3$. Από την άλλη πλευρά, έχουμε

$$\nabla_{e_1} e_2 = \nabla_{e_2} e_1 + [e_1, e_2] = -(1 + \frac{2e^G}{zx^2})e_3.$$

Ομοίως, λαμβάνουμε

$$g(\nabla_{e_3} e_1, e_1) = \frac{1}{2} e_3 g(e_1, e_1) = 0,$$

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_{e_3} e_1, e_2) &= -g(e_3, [e_1, e_2]) + g(e_1, [e_2, e_3]) + g(e_2, [e_3, e_1]) = 2 - \frac{4e^G}{zx^2}, \\ 2g(\nabla_{e_3} e_1, e_3) &= -g(e_3, [e_1, e_3]) + g(e_1, [e_3, e_3]) + g(e_3, [e_3, e_1]) = 0, \end{aligned}$$

οπότε $\nabla_{e_3}e_1 = (1 - \frac{2e^G}{zx^2})e_2$. Από την άλλη πλευρά, έχουμε

$$\nabla_{e_1}e_3 = \nabla_{e_3}e_1 + [e_1, e_3] = (1 + \frac{2e^G}{zx^2})e_2.$$

Ανάλογα

$$g(\nabla_{e_2}e_2, e_2) = 0,$$

$$\begin{aligned} g(\nabla_{e_2}e_2, e_1) &= -g(e_2, \nabla_{e_2}e_1) = 0, \\ 2g(\nabla_{e_2}e_2, e_3) &= -g(e_2, [e_2, e_3]) + g(e_2, [e_3, e_2]) = -2g(e_2, [e_2, e_3]) = \\ &= -\frac{1}{z}e^{\frac{G}{2}} + G_z e^{\frac{G}{2}} + \frac{8}{xz}e^G G_y + \beta G_y, \end{aligned}$$

οπότε $\nabla_{e_2}e_2 = (-\frac{1}{2z}e^{\frac{G}{2}} + \frac{G_z}{2}e^{\frac{G}{2}} + \frac{4}{xz}e^G G_y + \frac{\beta G_y}{2})e_3$. Επίσης,

$$g(\nabla_{e_3}e_3, e_3) = 0,$$

$$\begin{aligned} g(\nabla_{e_3}e_3, e_1) &= -g(e_3, \nabla_{e_3}e_1) = 0, \\ 2g(\nabla_{e_3}e_3, e_2) &= -g(e_3, [e_3, e_2]) + g(e_3, [e_2, e_3]) = G_y, \end{aligned}$$

οπότε $\nabla_{e_3}e_3 = \frac{1}{2}G_y e_2$. Από τις σχέσεις:

$$g(\nabla_{e_3}e_2, e_2) = 0,$$

$$\begin{aligned} g(\nabla_{e_3}e_2, e_1) &= -g(e_2, \nabla_{e_3}e_1) = \frac{2e^G}{zx^2} - 1, \\ g(\nabla_{e_3}e_2, e_3) &= -g(e_2, \nabla_{e_3}e_3) = -\frac{G_y}{2}, \end{aligned} \tag{4.25}$$

βρίσκουμε $\nabla_{e_3}e_2 = -\frac{1}{2}G_y e_3 + (\frac{2e^G}{zx^2} - 1)e_1$. Από την άλλη πλευρά, έχουμε

$$\begin{aligned} \nabla_{e_2}e_3 &= \nabla_{e_3}e_2 + [e_2, e_3] = (\frac{1}{2z}e^{\frac{G}{2}} - \frac{G_z}{2}e^{\frac{G}{2}} - \frac{4}{xz}e^G G_y - \beta\frac{G_y}{2})e_2 + \\ &+(\frac{2e^G}{zx^2} + 1)e_1. \end{aligned}$$

Συνοψίζοντας τις παραπάνω σχέσεις, έχουμε

$$\begin{gathered}\nabla_{e_2}e_1=(-\tfrac{2e^G}{zx^2}-1)e_3,\quad \nabla_{e_3}e_1=(1-\tfrac{2e^G}{zx^2})e_2\\ \nabla_{e_1}e_2=-(1+\tfrac{2e^G}{zx^2})e_3,\quad \nabla_{e_1}e_3=(1+\tfrac{2e^G}{zx^2})e_2,\\ \nabla_{e_2}e_3=(\tfrac{1}{2z}e^{\frac{G}{2}}-\tfrac{G_z}{2}e^{\frac{G}{2}}-\tfrac{4}{xz}e^GG_y-\beta\tfrac{G_y}{2})e_2+(\tfrac{2e^G}{zx^2}+1)e_1 \qquad (4.26)\\ \nabla_{e_3}e_2=-\tfrac{1}{2}G_ye_3+(\tfrac{2e^G}{zx^2}-1)e_1,\quad \nabla_{e_3}e_3=\tfrac{1}{2}G_ye_2\\ \nabla_{e_2}e_2=(-\tfrac{1}{2z}e^{\frac{G}{2}}+\tfrac{G_z}{2}e^{\frac{G}{2}}+\tfrac{4}{xz}e^GG_y+\tfrac{\beta G_y}{2})e_3,\quad \nabla_{e_1}e_1=0.\end{gathered}$$

Συνδυάζοντας τον ορισμό του τελεστή h, τις σχέσεις (4.19), (4.20) και (4.21), έχουμε

$$\begin{aligned} he_2 &= \frac{1}{2}(\mathcal{L}_{e_1}\phi)e_2=\frac{1}{2}\{[e_1,\phi e_2]-\phi[e_1,e_2]\}=\frac{2e^G}{zx^2}e_2,\\ he_3 &= \frac{1}{2}(\mathcal{L}_{e_1}\phi)e_3=\frac{1}{2}\{[e_1,\phi e_3]-\phi[e_1,e_3]\}=-\frac{2e^G}{zx^2}e_3,\\ he_1 &= 0. \qquad (4.27)\end{aligned}$$

Ουσιαστικά, παρατηρούμε, ότι τα διανυσματικά πεδία e_2,e_3 είναι πεδία ιδιοδιανυσμάτων του τελεστή h που αντιστοιχούν στις ιδιοσυναρτήσεις $\frac{2e^G}{zx^2}$ και $-\frac{2e^G}{zx^2}$, αντιστοίχως.

Θεωρούμε τις διαφορίσιμες συναρτήσεις $\kappa=\kappa(x,y,z)=1-\frac{4e^{2G}}{z^2x^4}, \mu=\mu(x,y,z)$ $=2(1+\frac{2e^G}{zx^2})$ και $\nu=\nu(x,y,z)=-\frac{2}{x}$ ορισμένες στην πολλαπλότητα M. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (4.19), (4.20), (4.21), (4.26) και (4.27), έχουμε

$$\begin{aligned} R(e_2,e_1)e_1 &= \nabla_{e_2}\nabla_{e_1}e_1-\nabla_{e_1}\nabla_{e_2}e_1-\nabla_{[e_2,e_1]}e_1=-\nabla_{e_1}\nabla_{e_2}e_1\\ &= \nabla_{e_1}[(\frac{2e^G}{zx^2}+1)e_3]=\frac{-4e^G}{zx^3}e_3+(\frac{2e^G}{zx^2}+1)\nabla_{e_1}e_3\\ &= \frac{-4e^G}{zx^3}e_3+(1+\frac{2e^G}{zx^2})^2e_2=\kappa e_2+\mu he_2+\nu\phi he_2\\ &= \kappa[\eta(e_1)e_2-\eta(e_2)e_1]+\mu[\eta(e_1)he_2-\eta(e_2)he_1]+\\ &\quad +\nu[\eta(e_1)\phi he_2-\eta(e_2)\phi he_1],\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
R(e_3,e_1)e_1 &= \nabla_{e_3}\nabla_{e_1}e_1 - \nabla_{e_1}\nabla_{e_3}e_1 - \nabla_{[e_3,e_1]}e_1 = \\
&= -\nabla_{e_1}\nabla_{e_3}e_1 + \nabla_{[e_1,e_3]}e_1 \\
&= \nabla_{e_1}[(\frac{2e^G}{zx^2}-1)e_2] + \frac{4e^G}{zx^2}\nabla_{e_2}e_1 = \frac{-4e^G}{zx^3}e_2 + (\frac{2e^G}{zx^2}-1)\nabla_{e_1}e_2 - \\
&\quad -\frac{4e^G}{zx^2}(\frac{2e^G}{zx^2}+1)e_3 = \frac{-4e^G}{zx^3}e_2 - (1+\frac{2e^G}{zx^2})(\frac{6e^G}{zx^2}-1)e_3 \\
&= \kappa e_3 + \mu h e_3 + \nu\phi h e_3 = \kappa[\eta(e_1)e_3 - \eta(e_3)e_1] + \mu[\eta(e_1)he_3 - \\
&\quad -\eta(e_3)he_1] + \nu[\eta(e_1)\phi h e_3 - \eta(e_3)\phi h e_1], \\
R(e_2,e_3)e_1 &= \nabla_{e_2}\nabla_{e_3}e_1 - \nabla_{e_3}\nabla_{e_2}e_1 - \nabla_{[e_2,e_3]}e_1 = \nabla_{e_2}[(1-\frac{2e^G}{zx^2})e_2] + \\
&\quad +\nabla_{e_3}[(\frac{2e^G}{zx^2}+1)e_3] - (\frac{1}{2z}e^{\frac{G}{2}} - \frac{G_z e^{\frac{G}{2}}}{2} - \frac{4e^G G_y}{xz} - \frac{\beta G_y}{2})\nabla_{e_2}e_1 \\
&\quad -\frac{G_y}{2}\nabla_{e_3}e_1 = -\frac{2e^G G_y}{zx^2}e_2 + (1-\frac{2e^G}{zx^2})\nabla_{e_2}e_2 + e_3(\frac{2e^G}{zx^2}+1)e_3 + \\
&\quad +(\frac{2e^G}{zx^2}+1)\frac{G_y}{2}e_2 + (\frac{2e^G}{zx^2}+1)(\frac{1}{2z}e^{\frac{G}{2}} - \frac{G_z e^{\frac{G}{2}}}{2} - \frac{4e^G G_y}{xz} - \frac{\beta G_y}{2})e_3 - \\
&\quad -\frac{G_y}{2}(1-\frac{2e^G}{zx^2})e_2 \\
&= 0 = \kappa[\eta(e_3)e_2 - \eta(e_2)e_3] + \mu[\eta(e_3)he_2 - \eta(e_2)he_3] + \\
&\quad +\nu[\eta(e_3)\phi h e_2 - \eta(e_2)\phi h e_3], \\
R(e_1,e_1)e_1 &= 0 = \kappa[\eta(e_1)e_1 - \eta(e_1)e_1] + \mu[\eta(e_1)he_1 - \eta(e_1)he_1] + \\
&\quad +\nu[\eta(e_1)\phi h e_1 - \eta(e_1)\phi h e_1] \\
R(e_2,e_2)e_1 &= 0 = \kappa[\eta(e_2)e_2 - \eta(e_2)e_2] + \mu[\eta(e_2)he_2 - \eta(e_2)he_2] + \\
&\quad +\nu[\eta(e_2)\phi h e_2 - \eta(e_2)\phi h e_2], \\
R(e_3,e_3)e_1 &= 0 = \kappa[\eta(e_3)e_3 - \eta(e_3)e_3] + \mu[\eta(e_3)he_3 - \eta(e_3)he_3] + \\
&\quad +\nu[\eta(e_3)\phi h e_3 - \eta(e_3)\phi h e_3].
\end{aligned}
$$

Από τις παραπάνω σχέσεις, θέτοντας $e_1 = \xi$ και λαμβάνοντας υπόψιν τη γραμμικότητα του τανυστή καμπυλότητας, προκύπτει η

$$\begin{aligned} R(X,Y)\xi &= \kappa[\eta(Y)X-\eta(X)Y]+\mu[\eta(Y)hX-\eta(X)hY]+ \\ &\quad +\nu[\eta(Y)\phi hX-\eta(X)\phi hY], \end{aligned}$$

για κάθε $X,Y\in D^1(M)$, και συνεπώς η πολλαπλότητα M είναι μια (κ,μ,ν)-πολλαπλότητα επαφής με $\kappa=1-\frac{4e^{2G}}{z^2x^4}, \mu=2(1+\frac{2e^G}{zx^2})$ και $\nu=-\frac{2}{x}$.

Παρατήρηση 4.3. Μια λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης (4.16) δίδεται από την παρακάτω πλεγμένη έκφραση

$$y=4\sqrt{\frac{\pi}{z}}\,\mathrm{erf}(\sqrt{-\frac{G}{2}})$$

όπου erf συμβολίζουμε τη συνάρτηση $\mathrm{erf}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt, x\in\mathbb{R}$. Αυτή η λύση δικαιολογεί τη θετικότητα των μεταβλητών y και z.

Παράδειγμα 4.2. Θεωρούμε την τρισδιάστατη πολλαπλότητα $M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|z>0\}$, με καρτεσιανές συντεταγμένες (x,y,z). Ορίζουμε τα παρακάτω διανυσματικά πεδία στην M

$$e_1=\tfrac{\partial}{\partial x},\quad e_2=\tfrac{\partial}{\partial y},\quad e_3=(2y+2z)\tfrac{\partial}{\partial x}+\{-(\tfrac{y}{2}c+zc+\tfrac{1}{2z})y+\tfrac{1}{c}e^{cx}z\}\tfrac{\partial}{\partial y}+\tfrac{\partial}{\partial z}.$$

όπου c είναι μια μη μηδενική πραγματική σταθερά. Τα διανυσματικά πεδία e_1,e_2,e_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα διότι

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2y+2z & -(\frac{y}{2}c+zc+\frac{1}{2z})y+\frac{1}{c}e^{cx}z & 1 \end{pmatrix}=1\neq 0,$$

σε κάθε σημείο της M. Στη συνέχεια, υπολογίζουμε τις παρενθέσεις του Lie μεταξύ των πεδίων e_1,e_2,e_3. Συγκεκριμένα, έχουμε

$$[e_1,e_2]=[\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}]=0, \tag{4.28}$$

$$\begin{aligned}
[e_1, e_3] &= [\frac{\partial}{\partial x}, (2y+2z)\frac{\partial}{\partial x} + \{-(\frac{y}{2}c + zc + \frac{1}{2z})y + \frac{1}{c}e^{cx}z\}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}] \\
&= e^{cx}ze_2, \qquad (4.29)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[e_2, e_3] &= [\frac{\partial}{\partial y}, (2y+2z)\frac{\partial}{\partial x} + \{-(\frac{y}{2}c + zc + \frac{1}{2z})y + \frac{1}{c}e^{cx}z\}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}] \\
&= 2e_1 + (-yc - zc - \frac{1}{2z})e_2. \qquad (4.30)
\end{aligned}$$

Θεωρούμε τη μετρική Riemann, για την οποία τα διανυσματικά πεδία e_1, e_2, e_3 συνιστούν ένα ορθομοναδιαίο πλαίσιο, καθώς και την 1-μορφή η που ορίζεται από τη σχέση $\eta(W) = g(W, e_1)$, για κάθε $W \in D^1(M)$. Συνεπώς, έχουμε $\eta(e_1) = g(e_1, e_1) = 1, \eta(e_2) = g(e_2, e_1) = 0$ και $\eta(e_3) = g(e_3, e_1) = 0$. Χρησιμοποιώντας τη σχέση (4.30), υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
(\eta \wedge d\eta)(e_1, e_2, e_3) &= \eta(e_1)d\eta(e_2, e_3) - \eta(e_2)d\eta(e_1, e_3) + \eta(e_3)d\eta(e_1, e_2) \\
&= d\eta(e_2, e_3) = \frac{1}{2}[e_2\eta(e_3) - e_3\eta(e_2) - \eta([e_2, e_3])] = \\
&= -\frac{1}{2}\eta(2e_1 + (-yc - zc - \frac{1}{2z})e_2) = -1 \neq 0,
\end{aligned}$$

σε κάθε σημείο της M. Εύκολα συνάγουμε ότι η 1-μορφή η είναι μορφή επαφής στην M.

Ορίζουμε το τανυστικό πεδίο ϕ τύπου (1, 1) από τις σχέσεις

$$\phi e_1 = 0, \quad \phi e_2 = e_3, \quad \phi e_3 = -e_2 \qquad (4.31)$$

.

Θα δείξουμε ότι η τετράδα (η, e_1, ϕ, g) ορίζει μια μετρική δομή επαφής στην πολλαπλότητα M. Από τον ορισμό της 1-μορφής η, παίρνουμε $\eta(e_1) = 1$.

Επιπλέον, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (4.31), λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}
\phi^2 e_1 &= \phi(\phi e_1) = 0 = -e_1 + \eta(e_1)e_1,\\
\phi^2 e_2 &= \phi(\phi e_2) = \phi e_3 = -e_2 = -e_2 + \eta(e_2)e_1,\\
\phi^2 e_3 &= \phi(\phi e_3) = -\phi e_2 = -e_3 = -e_3 + \eta(e_3)e_1.
\end{aligned}$$

Από τη γραμμικότητα του τανυστικού πεδίου ϕ και τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι $\phi^2 X = -X + \eta(X)e_1$ για κάθε $X \in D^1(M)$.

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό των τανυστικών πεδίων η, g, ϕ, έχουμε

$$\begin{aligned}
g(\phi e_1, \phi e_2) &= 0 = g(e_1, e_2) - \eta(e_1)\eta(e_2),\\
g(\phi e_1, \phi e_3) &= 0 = g(e_1, e_3) - \eta(e_1)\eta(e_3),\\
g(\phi e_1, \phi e_1) &= 0 = g(e_1, e_1) - \eta(e_1)\eta(e_1),\\
g(\phi e_2, \phi e_2) &= g(e_3, e_3) = 1 = g(e_2, e_2) - \eta(e_2)\eta(e_2),\\
g(\phi e_2, \phi e_3) &= -g(e_3, e_2) = 0 = g(e_3, e_2) - \eta(e_2)\eta(e_3),\\
g(\phi e_3, \phi e_3) &= g(e_2, e_2) = 1 = g(e_3, e_3) - \eta(e_3)\eta(e_3).
\end{aligned}$$

Από τη γραμμικότητα των τανυστικών πεδίων η, g, ϕ προκύπτει ότι $g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)$ για κάθε $X, Y \in D^1(M)$.

Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς των η, g, ϕ, τις σχέσεις (4.28), (4.29) και (4.30), έχουμε

$$\begin{aligned}
d\eta(e_1, e_2) &= \frac{1}{2}[e_1\eta(e_2) - e_2\eta(e_1) - \eta([e_1, e_2])] = 0 = g(e_1, \phi e_2),\\
d\eta(e_1, e_3) &= \frac{1}{2}[e_1\eta(e_3) - e_3\eta(e_1) - \eta([e_1, e_3]) = 0 = g(e_1, \phi e_3),\\
d\eta(e_2, e_2) &= 0 = g(e_2, \phi e_2),\\
d\eta(e_3, e_3) &= 0 = g(e_3, \phi e_3),\\
d\eta(e_2, e_3) &= \frac{1}{2}[e_2\eta(e_3) - e_3\eta(e_2) - \eta([e_2, e_3])] = -1 = g(e_2, -e_2) = g(e_2, \phi e_3).
\end{aligned}$$

Οι παραπάνω σχέσεις σε συνδυασμό με τη γραμμικότητα των τανυστικών πεδίων $d\eta, g, \phi$ δίνουν $d\eta(X,Y) = g(X, \phi Y)$ για κάθε $X, Y \in D^1(M)$.

Εύκολα παρατηρούμε ότι οι συνθήκες (3.1), (3.2) και (3.3) ικανοποιούνται. Δείξαμε λοιπόν ότι η τετράδα (η, e_1, ϕ, g) ορίζει μια μετρική δομή επαφής στην πολλαπλότητα M και, συνεπώς, η $[M, (\eta, e_1, \phi, g)]$ είναι μια πολλαπλότητα επαφής Riemann. Συμβολίζουμε με ∇ τη συνοχή Levi-Civita ως πρός τη μετρική Riemann g και με R τον τανυστή καμπυλότητας της μετρικής g. Εργαζόμενοι όπως στο παράδειγμα 4.1, βρίσκουμε τελικά ότι για τη συνοχή Riemann ∇ ισχύουν οι σχέσεις

$$\begin{aligned}
&\nabla_{e_2}e_1 = (-\tfrac{e^{cx}z}{2} - 1)e_3, && \nabla_{e_3}e_1 = (1 - \tfrac{e^{cx}z}{2})e_2,\\
&\nabla_{e_1}e_2 = (-\tfrac{e^{cx}z}{2} - 1)e_3, && \nabla_{e_1}e_3 = (1 + \tfrac{e^{cx}z}{2})e_2,\\
&\nabla_{e_2}e_3 = (1 + \tfrac{e^{cx}z}{2})e_1 - (yc + zc + \tfrac{1}{2z})e_2, && \\
&\nabla_{e_3}e_2 = (\tfrac{e^{cx}z}{2} - 1)e_1, && \nabla_{e_3}e_3 = 0,\\
&\nabla_{e_2}e_2 = (yc + zc + \tfrac{1}{2z})e_3, && \nabla_{e_1}e_1 = 0.
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Συνδυάζοντας τον ορισμό του τελεστή h, τις σχέσεις (4.28), (4.29) και (4.30), υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
he_2 &= \frac{1}{2}(\mathcal{L}_{e_1}\phi)e_2 = \frac{1}{2}\{[e_1, \phi e_2] - \phi[e_1, e_2]\} = \frac{1}{2}[e_1, e_3] = \frac{e^{cx}z}{2}e_2,\\
he_3 &= \frac{1}{2}(\mathcal{L}_{e_1}\phi)e_3 = \frac{1}{2}\{[e_1, \phi e_3] - \phi[e_1, e_3]\} = -\frac{1}{2}\phi(e^{cx}ze_2) = -\frac{e^{cx}z}{2}e_3,\\
he_1 &= 0.
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Ουσιαστικά, παρατηρούμε, ότι το διανυσματικό πεδίο e_2 (αντ. e_3) είναι πεδίο ιδιοδιανυσμάτων του τελεστή h που αντιστοιχεί στην ιδιοσυνάρτηση $\lambda = \frac{e^{cx}z}{2}$ (αντ. $-\frac{e^{cx}z}{2}$).

Θεωρούμε τις διαφορίσιμες συναρτήσεις $\kappa = \kappa(x,y,z) = 1 - \frac{e^{2cx}z^2}{4}$ και $\mu = \mu(x,y,z) = 2 + e^{cx}z$ ορισμένες στην πολλαπλότητα M. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (4.28), (4.29), (4.30), (4.32) και (4.33), έχουμε

$$
\begin{aligned}
R(e_2,e_1)e_1 &= \nabla_{e_2}\nabla_{e_1}e_1-\nabla_{e_1}\nabla_{e_2}e_1-\nabla_{[e_2,e_1]}e_1=-\nabla_{e_1}\nabla_{e_2}e_1\\
&= \nabla_{e_1}[(\frac{e^{cx}z}{2}+1)e_3]=c\frac{e^{cx}z}{2}e_3+(\frac{e^{cx}z}{2}+1)\nabla_{e_1}e_3\\
&= c\frac{e^{cx}z}{2}e_3+(1+\frac{e^{cx}z}{2})^2e_2=\kappa e_2+\mu he_2+c\phi he_2\\
&= \kappa[\eta(e_1)e_2-\eta(e_2)e_1]+\mu[\eta(e_1)he_2-\eta(e_2)he_1]+\\
&\quad +c[\eta(e_1)\phi he_2-\eta(e_2)\phi he_1],\\
R(e_3,e_1)e_1 &= \nabla_{e_3}\nabla_{e_1}e_1-\nabla_{e_1}\nabla_{e_3}e_1-\nabla_{[e_3,e_1]}e_1=-\nabla_{e_1}\nabla_{e_3}e_1+\nabla_{[e_1,e_3]}e_1\\
&= \nabla_{e_1}[(\frac{e^{cx}z}{2}-1)e_2]+e^{cx}z\nabla_{e_2}e_1=c\frac{e^{cx}z}{2}e_2+(\frac{e^{cx}z}{2}-1)\nabla_{e_1}e_2+\\
&\quad -e^{cx}z(\frac{e^{cx}z}{2}+1)e_3=c\frac{e^{cx}z}{2}e_2-(\frac{3e^{2cx}z^2}{4}+e^{cx}z-1)e_3\\
&= \kappa e_3+\mu he_3+c\phi he_3=\kappa[\eta(e_1)e_3-\eta(e_3)e_1]+\mu[\eta(e_1)he_3-\\
&\quad -\eta(e_3)he_1]+c[\eta(e_1)\phi he_3-\eta(e_3)\phi he_1],\\
R(e_2,e_3)e_1 &= \nabla_{e_2}\nabla_{e_3}e_1-\nabla_{e_3}\nabla_{e_2}e_1-\nabla_{[e_2,e_3]}e_1=\nabla_{e_2}[(1-\frac{e^{cx}z}{2})e_2]+\\
&\quad +\nabla_{e_3}[(1+\frac{e^{cx}z}{2})e_3]+(yc+zc+\frac{1}{2z})\nabla_{e_2}e_1\\
&= (1-\frac{e^{cx}z}{2})\nabla_{e_2}e_2+e_3(\frac{e^{cx}z}{2})e_3-(yc+zc+\frac{1}{2z})(\frac{e^{cx}z}{2}+1)e_3\\
&= (1-\frac{e^{cx}z}{2})(yc+zc+\frac{1}{2z})e_3+[(y+z)ce^{cx}z+\frac{e^{cx}}{2}]e_3-\\
&\quad -(yc+zc+\frac{1}{2z})(\frac{e^{cx}z}{2}+1)e_3=0=\kappa[\eta(e_3)e_2-\eta(e_2)e_3]+\\
&\quad +\mu[\eta(e_3)he_2-\eta(e_2)he_3]+c[\eta(e_3)\phi he_2-\eta(e_2)\phi he_3],\\
R(e_1,e_1)e_1 &= 0=\kappa[\eta(e_1)e_1-\eta(e_1)e_1]+\mu[\eta(e_1)he_1-\eta(e_1)he_1]+\\
&\quad +c[\eta(e_1)\phi he_1-\eta(e_1)\phi he_1]\\
R(e_2,e_2)e_1 &= 0=\kappa[\eta(e_2)e_2-\eta(e_2)e_2]+\mu[\eta(e_2)he_2-\eta(e_2)he_2]+\\
&\quad +c[\eta(e_2)\phi he_2-\eta(e_2)\phi he_2],
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} R(e_3, e_3)e_1 &= 0 = \kappa[\eta(e_3)e_3 - \eta(e_3)e_3] + \mu[\eta(e_3)he_3 - \eta(e_3)he_3] + \\ &+ c[\eta(e_3)\phi he_3 - \eta(e_3)\phi he_3]. \end{aligned}$$

Θέτοντας $e_1 = \xi$ και λαμβάνοντας υπόψιν τη γραμμικότητα του τανυστή καμπυλότητας, συνάγουμε

$$\begin{aligned} R(X, Y)\xi &= \kappa[\eta(Y)X - \eta(X)Y] + \mu[\eta(Y)hX - \eta(X)hY] + \\ &+ c[\eta(Y)\phi hX - \eta(X)\phi hY], \end{aligned}$$

για κάθε $X, Y \in D^1(M)$, και συνεπώς η πολλαπλότητα M είναι μια (κ, μ, ν)-πολλαπλότητα επαφής με $\kappa = 1 - \frac{e^{2cx}z^2}{4}, \mu = 2 + e^{cx}z$ και $\nu = c$.

Παράδειγμα 4.3. Θεωρούμε την τρισδιάστατη πολλαπλότητα $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 2x + e^{y+z} > 0, y > z\}$ με καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y, z). Ορίζουμε τα παρακάτω διανυσματικά πεδία στην M

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial x},$$

$$\begin{aligned} e_2 &= [-(\frac{y^2 + z^2}{2})(2x + e^{y+z})^{\frac{1}{2}}]\frac{\partial}{\partial x} + [\frac{z}{y - z}(2x + e^{y+z})^{\frac{1}{2}} + \\ &+ \frac{1}{y - z}(2x + e^{y+z})^{-\frac{1}{2}}]\frac{\partial}{\partial y} + [\frac{y}{z - y}(2x + e^{y+z})^{\frac{1}{2}} + \\ &+ \frac{1}{z - y}(2x + e^{y+z})^{-\frac{1}{2}}]\frac{\partial}{\partial z}, \\ e_3 &= [(\frac{y^2 + z^2}{2})(2x + e^{y+z})^{\frac{1}{2}}]\frac{\partial}{\partial x} + [\frac{z}{z - y}(2x + e^{y+z})^{\frac{1}{2}} + \\ &+ \frac{1}{y - z}(2x + e^{y+z})^{-\frac{1}{2}}]\frac{\partial}{\partial y} + [\frac{y}{y - z}(2x + e^{y+z})^{\frac{1}{2}} + \\ &+ \frac{1}{z - y}(2x + e^{y+z})^{-\frac{1}{2}}]\frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned}$$

Για λόγους οικονομίας γραφής, θέτουμε

$$\begin{aligned}
f_1 &= \frac{z}{y-z}(2x+e^{y+z})^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{y-z}(2x+e^{y+z})^{-\frac{1}{2}},\\
f_2 &= \frac{y}{z-y}(2x+e^{y+z})^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{z-y}(2x+e^{y+z})^{-\frac{1}{2}},\\
f_3 &= \frac{z}{z-y}(2x+e^{y+z})^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{y-z}(2x+e^{y+z})^{-\frac{1}{2}},\\
f_4 &= \frac{y}{y-z}(2x+e^{y+z})^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{z-y}(2x+e^{y+z})^{-\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Τα διανυσματικά πεδία e_1, e_2, e_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα διότι

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ -(\frac{y^2+z^2}{2})(2x+e^{y+z})^{\frac{1}{2}} & f_1 & f_2\\ (\frac{y^2+z^2}{2})(2x+e^{y+z})^{\frac{1}{2}} & f_3 & f_4 \end{pmatrix} = \frac{2}{y-z} \neq 0,$$

σε κάθε σημείο της M. Στη συνέχεια, υπολογίζουμε τις παρενθέσεις του Lie μεταξύ των πεδίων e_1, e_2, e_3. Συγκεκριμένα, έχουμε

$$[e_1,e_2]=[\frac{\partial}{\partial x},-(\frac{y^2+z^2}{2})(2x+e^{y+z})^{\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial x}+f_1\frac{\partial}{\partial y}+f_2\frac{\partial}{\partial z}]=-\frac{1}{2x+e^{y+z}}e_3, \tag{4.34}$$

$$[e_1,e_3]=[\frac{\partial}{\partial x},(\frac{y^2+z^2}{2})(2x+e^{y+z})^{\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial x}+f_3\frac{\partial}{\partial y}+f_4\frac{\partial}{\partial z}]=-\frac{1}{2x+e^{y+z}}e_2, \tag{4.35}$$

$$\begin{aligned}
[e_2,e_3] \;=\; & [-(\frac{y^2+z^2}{2})(2x+e^{y+z})^{\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial x}+f_1\frac{\partial}{\partial y}+f_2\frac{\partial}{\partial z},(\frac{y^2+z^2}{2})(2x+e^{y+z})^{\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial x}\\
&+f_3\frac{\partial}{\partial y}+f_4\frac{\partial}{\partial z}]=2e_1+\frac{1}{2}(2x+e^{y+z})^{-\frac{1}{2}}(e^{y+z}+y^2+z^2)e_2+\frac{1}{2}(2x+\\
&+e^{y+z})^{-\frac{1}{2}}(e^{y+z}+y^2+z^2)e_3.
\end{aligned} \tag{4.36}$$

Θεωρούμε τη μετρική Riemann, για την οποία τα διανυσματικά πεδία e_1, e_2, e_3 συνιστούν ένα ορθομοναδιαίο πλαίσιο, καθώς και την 1-μορφή η που ορίζεται από τη σχέση $\eta(W) = g(W, e_1)$, για κάθε $W \in D^1(M)$. Συνεπώς, έχουμε

$\eta(e_1) = g(e_1, e_1) = 1, \eta(e_2) = g(e_2, e_1) = 0$ και $\eta(e_3) = g(e_3, e_1) = 0$. Χρησιμοποιώντας τη σχέση (4.36), υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
(\eta \wedge d\eta)(e_1, e_2, e_3) &= \eta(e_1)d\eta(e_2, e_3) - \eta(e_2)d\eta(e_1, e_3) + \eta(e_3)d\eta(e_1, e_2) \\
&= d\eta(e_2, e_3) = \frac{1}{2}[e_2\eta(e_3) - e_3\eta(e_2) - \eta([e_2, e_3])] = \\
&= -\frac{1}{2}\eta([e_2, e_3]) = -\frac{1}{2}2 = -1 \neq 0,
\end{aligned}$$

σε κάθε σημείο της M. Εύκολα συνάγουμε ότι η 1-μορφή η είναι μορφή επαφής στην M. Ορίζουμε το τανυστικό πεδίο ϕ τύπου (1, 1) από τις σχέσεις

$$\phi e_1 = 0, \quad \phi e_2 = e_3, \quad \phi e_3 = -e_2 \tag{4.37}$$

.

Θα δείξουμε ότι η τετράδα (η, e_1, ϕ, g) ορίζει μια μετρική δομή επαφής στην πολλαπλότητα M. Από τον ορισμό της 1-μορφής η, παίρνουμε $\eta(e_1) = 1$. Επιπλέον, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (4.37), λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}
\phi^2 e_1 &= \phi(\phi e_1) = 0 = -e_1 + \eta(e_1)e_1, \\
\phi^2 e_2 &= \phi(\phi e_2) = \phi e_3 = -e_2 = -e_2 + \eta(e_2)e_1, \\
\phi^2 e_3 &= \phi(\phi e_3) = -\phi e_2 = -e_3 = -e_3 + \eta(e_3)e_1.
\end{aligned}$$

Από τη γραμμικότητα του τανυστικού πεδίου ϕ και τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι $\phi^2 X = -X + \eta(X)e_1$ για κάθε $X \in D^1(M)$.

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό των τανυστικών πεδίων η, g, ϕ, έχουμε

$$\begin{aligned}
g(\phi e_1, \phi e_2) &= 0 = g(e_1, e_2) - \eta(e_1)\eta(e_2),\\
g(\phi e_1, \phi e_3) &= 0 = g(e_1, e_3) - \eta(e_1)\eta(e_3),\\
g(\phi e_1, \phi e_1) &= 0 = g(e_1, e_1) - \eta(e_1)\eta(e_1),\\
g(\phi e_2, \phi e_2) &= g(e_3, e_3) = 1 = g(e_2, e_2) - \eta(e_2)\eta(e_2),\\
g(\phi e_2, \phi e_3) &= -g(e_3, e_2) = 0 = g(e_3, e_2) - \eta(e_2)\eta(e_3),\\
g(\phi e_3, \phi e_3) &= g(e_2, e_2) = 1 = g(e_3, e_3) - \eta(e_3)\eta(e_3).
\end{aligned}$$

Από τη γραμμικότητα των τανυστικών πεδίων η, g και ϕ προκύπτει ότι $g(\phi X, \phi Y) = g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)$ για κάθε $X, Y \in D^1(M)$.

Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς των η, g, ϕ, τις σχέσεις (4.34), (4.35) και (4.36), έχουμε

$$\begin{aligned}
d\eta(e_1, e_2) &= \frac{1}{2}[e_1\eta(e_2) - e_2\eta(e_1) - \eta([e_1, e_2])] = 0 = g(e_1, \phi e_2),\\
d\eta(e_1, e_3) &= \frac{1}{2}[e_1\eta(e_3) - e_3\eta(e_1) - \eta([e_1, e_3]) = 0 = g(e_1, \phi e_3),\\
d\eta(e_2, e_2) &= 0 = g(e_2, \phi e_2),\\
d\eta(e_3, e_3) &= 0 = g(e_3, \phi e_3),\\
d\eta(e_2, e_3) &= \frac{1}{2}[e_2\eta(e_3) - e_3\eta(e_2) - \eta([e_2, e_3])] = -1 = g(e_2, -e_2) = g(e_2, \phi e_3).
\end{aligned}$$

Οι παραπάνω σχέσεις σε συνδυασμό με τη γραμμικότητα των τανυστικών πεδίων $d\eta, g, \phi$ δίνουν $d\eta(X,Y) = g(X, \phi Y)$ για κάθε $X, Y \in D^1(M)$.

Εύκολα παρατηρούμε ότι οι συνθήκες (3.1), (3.2) και (3.3) ικανοποιούνται. Δείξαμε λοιπόν ότι η τετράδα (η, e_1, ϕ, g) ορίζει μια μετρική δομή επαφής στην πολλαπλότητα M και, συνεπώς, η $[M, (\eta, e_1, \phi, g)]$ είναι μια πολλαπλότητα επαφής Riemann. Συμβολίζουμε με ∇ τη συνοχή Levi-Civita ως πρός τη μετρική

Riemann g και με R τον τανυστή καμπυλότητας της μετρικής g. Εργαζόμενοι όπως στο παράδειγμα 4.1, βρίσκουμε τελικά ότι για τη συνοχή Riemann ∇ ισχύουν οι σχέσεις

$$\begin{array}{ll} \nabla_{e_2}e_1 = (\frac{1}{2x+e^{y+z}} - 1)e_3, & \nabla_{e_3}e_1 = (1 + \frac{1}{2x+e^{y+z}})e_2, \\ \nabla_{e_1}e_2 = -e_3, & \nabla_{e_1}e_3 = e_2, \end{array}$$

$$\begin{aligned} \nabla_{e_2}e_3 &= \frac{1}{2}(2x+e^{y+z})^{-\frac{1}{2}}[e^{y+z}+y^2+z^2]e_2 + \\ &\quad +(1-\frac{1}{2x+e^{y+z}})e_1, \end{aligned} \tag{4.38}$$

$$\begin{aligned} \nabla_{e_3}e_2 &= -\frac{1}{2}(2x+e^{y+z})^{-\frac{1}{2}}[e^{y+z}+y^2+z^2]e_3 - \\ &\quad -(1+\frac{1}{2x+e^{y+z}})e_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla_{e_2}e_2 &= -\frac{1}{2}(2x+e^{y+z})^{-\frac{1}{2}}(e^{y+z}+y^2+z^2)e_3, \\ \nabla_{e_3}e_3 &= \frac{1}{2}(2x+e^{y+z})^{-\frac{1}{2}}(e^{y+z}+y^2+z^2)e_2, \\ \nabla_{e_1}e_1 &= 0. \end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τον ορισμό του τελεστή h, τις σχέσεις (4.34), (4.35) και (4.36), υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} he_2 &= \frac{1}{2}(\mathcal{L}_{e_1}\phi)e_2 = \frac{1}{2}\{[e_1,\phi e_2] - \phi[e_1,e_2]\} = \frac{1}{2}[e_1,e_3] = (-\frac{1}{2x+e^{y+z}})e_2, \\ he_3 &= \frac{1}{2}(\mathcal{L}_{e_1}\phi)e_3 = \frac{1}{2}\{[e_1,\phi e_3] - \phi[e_1,e_3]\} = -\frac{1}{2}\phi(-[\frac{1}{2x+e^{y+z}}]e_2) \\ &= \frac{1}{2x+e^{y+z}}e_3, \\ he_1 &= 0. \end{aligned} \tag{4.39}$$

Ουσιαστικά, παρατηρούμε, ότι το διανυσματικό πεδίο e_2 (αντ. e_3) είναι πεδίο ιδιοδιανυσμάτων του τελεστή h αντίστοιχο της ιδιοσυνάρτησης $\lambda = -\frac{1}{2x+e^{y+z}}$ (αντ. $\frac{1}{2x+e^{y+z}}$).

Θεωρούμε τις διαφορίσιμες συναρτήσεις $\kappa = \kappa(x,y,z) = 1 - \frac{1}{(2x+e^{y+z})^2}$ και $\nu = \nu(x,y,z) = -\frac{2}{2x+e^{y+z}}$ ορισμένες στην πολλαπλότητα M. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (4.34), (4.35), (4.36), (4.38) και (4.39), έχουμε

$$\begin{aligned}
R(e_2,e_1)e_1 &= \nabla_{e_2}\nabla_{e_1}e_1 - \nabla_{e_1}\nabla_{e_2}e_1 - \nabla_{[e_2,e_1]}e_1 = -\nabla_{e_1}\nabla_{e_2}e_1 + \nabla_{[e_1,e_2]}e_1 \\
&= \nabla_{e_1}[(1 - \frac{1}{2x+e^{y+z}})e_3] - \frac{1}{2x+e^{y+z}}\nabla_{e_3}e_1 = \frac{2}{(2x+e^{y+z})^2}e_3 + \\
&\quad +(1 - \frac{1}{2x+e^{y+z}})\nabla_{e_1}e_3 - \frac{1}{2x+e^{y+z}}(1 + \frac{1}{2x+e^{y+z}})e_2 \\
&= \frac{2}{(2x+e^{y+z})^2}e_3 + (1 - \frac{1+4x+2e^{y+z}}{(2x+e^{y+z})^2})e_2 = \kappa e_2 + 2he_2 + \nu\phi he_2 \\
&= \kappa[\eta(e_1)e_2 - \eta(e_2)e_1] + 2[\eta(e_1)he_2 - \eta(e_2)he_1] + \\
&\quad +\nu[\eta(e_1)\phi he_2 - \eta(e_2)\phi he_1],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R(e_3,e_1)e_1 &= \nabla_{e_3}\nabla_{e_1}e_1 - \nabla_{e_1}\nabla_{e_3}e_1 - \nabla_{[e_3,e_1]}e_1 = -\nabla_{e_1}\nabla_{e_3}e_1 + \nabla_{[e_1,e_3]}e_1 \\
&= -\nabla_{e_1}[(\frac{1}{2x+e^{y+z}} + 1)e_2] - \frac{1}{2x+e^{y+z}}\nabla_{e_2}e_1 = \frac{2}{(2x+e^{y+z})^2}e_2 - \\
&\quad -(\frac{1}{2x+e^{y+z}} + 1)\nabla_{e_1}e_2 - \frac{1}{2x+e^{y+z}}(\frac{1}{2x+e^{y+z}} - 1)e_3 \\
&= \frac{2}{(2x+e^{y+z})^2}e_2 + (\frac{1}{2x+e^{y+z}} + 1)e_3 - \frac{1}{2x+e^{y+z}}(\frac{1}{2x+e^{y+z}} - 1)e_3 \\
&= \frac{2}{(2x+e^{y+z})^2}e_2 + (1 - \frac{1-4x-2e^{y+z}}{(2x+e^{y+z})^2})e_3 = \kappa e_3 + 2he_3 + \nu\phi he_3 \\
&= \kappa[\eta(e_1)e_2 - \eta(e_2)e_1] + 2[\eta(e_1)he_2 - \eta(e_2)he_1] + \\
&\quad +\nu[\eta(e_1)\phi he_2 - \eta(e_2)\phi he_1],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R(e_2,e_3)e_1 &= \nabla_{e_2}\nabla_{e_3}e_1-\nabla_{e_3}\nabla_{e_2}e_1-\nabla_{[e_2,e_3]}e_1\\
&= \nabla_{e_2}[(\frac{1}{2x+e^{y+z}}+1)e_2]-\nabla_{e_3}[(\frac{1}{2x+e^{y+z}}-1)e_3]-\\
&\quad -\frac{1}{2}(2x+e^{y+z})^{-\frac{1}{2}}(e^{y+z}+y^2+z^2)\nabla_{e_2+e_3}e_1\\
&= e_2(\frac{1}{2x+e^{y+z}})e_2+(\frac{1}{2x+e^{y+z}}+1)\nabla_{e_2}e_2-e_3(\frac{1}{2x+e^{y+z}})e_3-\\
&\quad -(\frac{1}{2x+e^{y+z}}-1)\nabla_{e_3}e_3-\frac{1}{2}(2x+e^{y+z})^{-\frac{1}{2}}(e^{y+z}+y^2+z^2)\\
&\quad [(\frac{1}{2x+e^{y+z}}-1)e_3+(\frac{1}{2x+e^{y+z}}+1)e_2]\\
&= e_2(\frac{1}{2x+e^{y+z}})e_2-e_3(\frac{1}{2x+e^{y+z}})e_3-\\
&\quad -\frac{1}{2}(\frac{1}{2x+e^{y+z}}+1)((2x+e^{y+z})^{-\frac{1}{2}}(e^{y+z}+y^2+z^2))e_3\\
&\quad -\frac{1}{2}(\frac{1}{2x+e^{y+z}}-1)(2x+e^{y+z})^{-\frac{1}{2}}(e^{y+z}+y^2+z^2)e_2\\
&\quad -\frac{1}{2}(2x+e^{y+z})^{-\frac{1}{2}}(e^{y+z}+y^2+z^2)[(\frac{1}{2x+e^{y+z}}-1)e_3+\\
&\quad +(\frac{1}{2x+e^{y+z}}+1)e_2]\\
&= 0=\kappa[\eta(e_3)e_2-\eta(e_2)e_3]+2[\eta(e_3)he_2-\eta(e_2)he_3]\\
&\quad +\nu[\eta(e_3)\phi he_2-\eta(e_2)\phi he_3],\\
R(e_1,e_1)e_1 &= 0=\kappa[\eta(e_1)e_1-\eta(e_1)e_1]+2[\eta(e_1)he_1-\eta(e_1)he_1]+\\
&\quad +\nu[\eta(e_1)\phi he_1-\eta(e_1)\phi he_1]\\
R(e_2,e_2)e_1 &= 0=\kappa[\eta(e_2)e_2-\eta(e_2)e_2]+2[\eta(e_2)he_2-\eta(e_2)he_2]+\\
&\quad +\nu[\eta(e_2)\phi he_2-\eta(e_2)\phi he_2],\\
R(e_3,e_3)e_1 &= 0=\kappa[\eta(e_3)e_3-\eta(e_3)e_3]+2[\eta(e_3)he_3-\eta(e_3)he_3]+\\
&\quad +\nu[\eta(e_3)\phi he_3-\eta(e_3)\phi he_3].
\end{aligned}$$

Θέτοντας $e_1=\xi$ και λαμβάνοντας υπόψιν τη γραμμικότητα του τανυστή καμπυλότητας, συναγουμε ότι

$$\begin{aligned} R(X,Y)\xi &= \kappa[\eta(Y)X - \eta(X)Y] + 2[\eta(Y)hX - \eta(X)hY] + \\ &+\nu[\eta(Y)\phi hX - \eta(X)\phi hY], \end{aligned}$$

για κάθε $X, Y \in D^1(M)$, και συνεπώς η πολλαπλότητα M είναι μια (κ, μ, ν)-πολλαπλότητα επαφής με $\kappa = 1 - \frac{1}{(2x+e^{y+z})^2}$, $\mu = 2$ και $\nu = -\frac{2}{2x+e^{y+z}}$.

Παρατήρηση 4.4. Επιλέγοντας μια θετική σταθερά α και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (4.15) μπορούμε να κατασκευάσουμε μια οικογένεια (κ, μ, ν)-πολλαπλοτήτων επαφής που εξαρτάται από την παράμετρο α.

Παρατήρηση 4.5. Στα παραπάνω παραδείγματα τα πεδία του Reeb είναι αρμονικά διανυσματικά πεδία αλλά δεν ορίζουν αρμονικές απεικονίσεις.

Τα παραδείγματα 4.1, 4.2 και 4.3 δίνουν θετική απάντηση στο πρόβλημα ύπαρξης (κ, μ, ν)-πολλαπλοτήτων επαφής οι οποίες δεν είναι (κ, μ)-πολλαπλότητες επαφής, πράγμα που σημαίνει ότι η κλάση των (κ, μ, ν)-πολλαπλοτήτων επαφής δε συμπίπτει με την κλάση των (κ, μ)-πολλαπλοτήτων επαφής στη διάσταση τρία. Τα παραδείγματα αυτά αναφέρονται στη διάσταση τρία. Ενδιαφέρον αποτελεί η μελέτη των (κ, μ, ν)-πολλαπλοτήτων επαφής διάστασης μεγαλύτερης του τρία. Προς αυτήν την κατεύθυνση, είναι χρήσιμα τα παρακάτω Λήμματα.

Λήμμα 4.3. *Έστω $[M^{2n+1}, (\eta, \xi, \phi, g)]$ μια (κ, μ, ν)-πολλαπλότητα επαφής. Τότε, ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:*

$$l = -\kappa\phi^2 + \mu h + \nu\phi h \tag{4.40}$$

$$l\phi - \phi l = 2\mu h\phi + 2\nu h \tag{4.41}$$

$$h^2 = (\kappa - 1)\phi^2, \quad \kappa \leq 1 \tag{4.42}$$

$$\nabla_\xi h = \mu h\phi + \nu h \tag{4.43}$$

$$\xi(\kappa) = 2\nu(\kappa - 1) \tag{4.44}$$

$$\begin{aligned} R(\xi, X)Y &= \kappa[g(X,Y)\xi - \eta(Y)X] + \mu[g(hX,Y)\xi - \eta(Y)hX] \\ &\quad +\nu[g(\phi hY, X)\xi - \eta(Y)\phi hX] \end{aligned} \tag{4.45}$$

$$Q\xi = (2n\kappa)\xi \tag{4.46}$$

$$(\nabla_X\phi)Y = g(X + hX, Y)\xi - \eta(Y)(X + hX) \tag{4.47}$$

$$\begin{aligned} (\nabla_X h)Y - (\nabla_Y h)X &= (1-\kappa)[\eta(X)\phi Y - \eta(Y)\phi X + 2g(X, \phi Y)\xi] \\ &\quad +(1-\mu)[\eta(X)\phi hY - \eta(Y)\phi hX] \\ &\quad +\nu[\eta(X)hY - \eta(Y)hX] \end{aligned} \tag{4.48}$$

$$\begin{aligned} (\nabla_X \phi h)Y - (\nabla_Y \phi h)X &= (1-\kappa)[\eta(Y)X - \eta(X)Y] \\ &\quad +(1-\mu)[\eta(Y)hX - \eta(X)hY] \\ &\quad +\nu[\eta(X)\phi hY - \eta(Y)\phi hX] \end{aligned} \tag{4.49}$$

για κάθε $X, Y \in D^1(M)$.

Απόδειξη. Θέτοντας $Y = \xi$ στη σχέση (4.1) και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.1), (3.4), (3.5) και (3.6), υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} lX = R(X,\xi)\xi &= \kappa(\eta(\xi)X - \eta(X)\xi) + \mu(\eta(\xi)hX - \eta(X)h\xi) + \\ &\quad +\nu(\eta(\xi)\phi hX - \eta(X)\phi h\xi) \\ &= \kappa(X - \eta(X)\xi) + \mu hX + \nu\phi hX = -\kappa\phi^2 X + \mu hX + \nu\phi hX, \end{aligned}$$

για κάθε $X \in D^1(M)$. Συνεπώς, εύκολα συνάγουμε την (4.40). Συνδυάζοντας την έκφραση του τελεστή l (4.40), τις σχέσεις (3.1) και (3.6), έχουμε

$$\begin{aligned} l\phi X - \phi l X &= -\kappa\phi^2\phi X + \mu h\phi X + \nu\phi h\phi X - \phi(-\kappa\phi^2 X + \mu h X + \nu\phi h X) \\ &= \kappa\phi X + \mu h\phi X + \nu h X - \kappa\phi X + \mu h\phi X + \nu h X = 2\mu h\phi X + \\ &\quad +2\nu h X, \end{aligned}$$

για κάθε $X \in D^1(M)$ και, άμεσα, προκύπτει η (4.41). Αντικαθιστώντας την έκφραση του τελεστή l στη σχέση (3.10) και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.1) και (3.6), υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} 2\phi^2 X + 2h^2 X &= \phi l\phi X - lX = \phi(-\kappa\phi^2\phi X + \mu h\phi X + \nu\phi h\phi X) + \kappa\phi^2 X - \\ &\quad -\mu h X - \nu\phi h X = \kappa\phi^2 X - \mu\phi^2 h X + \nu\phi h X + \kappa\phi^2 X - \\ &\quad -\mu h X - \nu\phi h X = 2\kappa\phi^2 X + \mu h X - \mu h X = 2\kappa\phi^2 X, \end{aligned}$$

ή, ισοδύναμα,

$$h^2 X = (\kappa - 1)\phi^2 X,$$

για κάθε $X \in D^1(M)$. Τώρα, αφού ο τελεστής h είναι συμμετρικός και λόγω της (3.1), έχουμε $\kappa \leq 1$. Αντικαθιστώντας τις (4.40) και (4.42) στη σχέση (3.11) σε συνδυασμό με τις (3.1) και (3.6), έχουμε

$$\begin{aligned} (\nabla_\xi h)X &= \phi X - \phi l X - \phi h^2 X = \phi X + \kappa\phi^2\phi X - \mu\phi h X + \nu h X - \\ &\quad -(\kappa - 1)\phi^2\phi X = \phi X - \kappa\phi X - \mu\phi h X + \nu h X + (\kappa - 1)\phi X \\ &= \mu h\phi X + \nu h X, \end{aligned} \tag{4.50}$$

για κάθε $X \in D^1(M)$, δηλαδή, προκύπτει η (4.43). Επιπλέον, χρησιμοποιώντας τις συμμετρίες του τελεστή h και την (4.42), έχουμε

$$\begin{aligned} \nabla_\xi h^2 &= (\nabla_\xi h)h + h(\nabla_\xi h) = (\mu h\phi + \nu h)h + h(\mu h\phi + \nu h) \\ &= -\mu\phi h^2 + \nu h^2 + \mu h^2\phi + \nu h^2 = 2\nu h^2 = 2\nu(\kappa - 1)\phi^2. \end{aligned} \tag{4.51}$$

Από την άλλη πλευρά, παραγωγίζοντας την (4.42) κατα τη διεύθυνση του ξ και δεδομένου ότι $\nabla_\xi \phi^2 = 0$, έχουμε

$$\nabla_\xi h^2 = \xi(\kappa)\phi^2 + (\kappa - 1)\nabla_\xi \phi^2 = \xi(\kappa)\phi^2.$$

Συγκρίνοντας την τελευταία σχέση με την (4.51), λαμβάνουμε ότι $\xi(\kappa) = 2\nu(\kappa - 1)$.

Η απόδειξη της (4.45) είναι ακριβώς ίδια με την απόδειξη της (4.2) και για το λόγο αυτό παραλείπεται.

Θεωρώντας μια ορθοκανονική βάση της μορφής $\{e_i, \phi e_i, \xi\}, i = 1, 2, \ldots, n$ στο σημείο $p \in M$ και εργαζόμενοι ανάλογα όπως και στην απόδειξη της (4.3), εύκολα συνάγουμε τη σχέση (4.46).

Αντικαθιστώντας τη (4.45) στη (3.12) και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.1), (3.4) και (3.6), υπολογίζουμε διαδοχικά

$$
\begin{aligned}
2(\nabla_{hX}\phi)Y &= -\kappa[g(X,Y)\xi - \eta(Y)X] - \mu[g(hX,Y)\xi - \eta(Y)hX] - \\
&\quad -\nu[g(\phi hY,X)\xi - \eta(Y)\phi hX] - \phi\{\kappa[g(X,\phi Y)\xi - \eta(\phi Y)X] + \\
&\quad +\mu[g(hX,\phi Y)\xi - \eta(\phi Y)hX] + \nu[g(\phi h\phi Y,X)\xi - \eta(\phi Y)\phi hX]\} + \\
&\quad +\phi\{\kappa[g(\phi X,Y)\xi - \eta(Y)\phi X] + \mu[g(h\phi X,Y)\xi - \eta(Y)h\phi X] + \\
&\quad +\nu[g(\phi hY,\phi X)\xi - \eta(Y)\phi h\phi X]\} - \kappa[g(\phi X,\phi Y)\xi - \eta(\phi Y)\phi X] - \\
&\quad -\mu[g(h\phi X,\phi Y)\xi - \eta(\phi Y)h\phi X] - \nu[g(\phi h\phi Y,\phi X)\xi - \eta(\phi Y)\phi h\phi X] \\
&\quad +2g(X+hX,Y)\xi - 2\eta(Y)(X+hX) \\
&= -\kappa[g(X,Y)\xi - \eta(Y)X] - \mu[g(hX,Y)\xi - \eta(Y)hX] - \nu[g(\phi hY,X)\xi \\
&\quad -\eta(Y)\phi hX] - \kappa\eta(Y)\phi^2X + \mu\eta(Y)h\phi^2X + \nu\eta(Y)h\phi X - \kappa[g(X,Y)\xi \\
&\quad -\eta(X)\eta(Y)] + \mu g(hX,Y)\xi - \nu g(X,h\phi Y)\xi + 2g(X+hX,Y)\xi - \\
&\quad -2\eta(Y)(X+hX) \\
&= \kappa[\eta(Y)X - g(X,Y)\xi] + \mu[\eta(Y)hX - g(hX,Y)\xi] + \nu[\eta(Y)\phi hX - \\
&\quad -g(\phi hY,X)\xi] - \kappa\eta(Y)(-X+\eta(X)\xi) - \mu\eta(Y)hX + \nu\eta(Y)h\phi X - \\
&\quad -\kappa[g(X,Y)\xi - \eta(X)\eta(Y)] + \mu g(hX,Y)\xi - \nu g(X,h\phi Y)\xi + \\
&\quad +2g(X+hX,Y)\xi - 2\eta(Y)(X+hX) \\
&= 2\kappa[\eta(Y)X - g(X,Y)\xi] + 2g(X+hX,Y)\xi - 2\eta(Y)(X+hX),
\end{aligned}
$$

ή, ισοδύναμα,

$$(\nabla_{hX}\phi)Y = \kappa[\eta(Y)X - g(X,Y)\xi] + g(X+hX,Y) - \eta(Y)(X+hX),$$

για κάθε $X, Y \in D^1(M)$. Αντικαθιστώντας στην τελευταία σχέση το διανυσματικό πεδίο X με το διανυσματικό πεδίο hX και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις

(3.1), (3.4), (3.8) και (4.42), έχουμε

$$\begin{aligned}
(\nabla_{h^2X}\phi)Y &= \kappa[\eta(Y)hX - g(hX,Y)\xi] + g(hX + h^2X, Y)\xi - \eta(Y)(hX + h^2X) \\
&= \kappa[\eta(Y)hX - g(hX,Y)\xi] + g(hX,Y)\xi + (\kappa-1)g(\phi^2X,Y)\xi - \\
&\quad -\eta(Y)hX - (\kappa-1)\eta(Y)\phi^2X \\
&= \kappa[\eta(Y)hX - g(hX,Y)\xi] + g(hX,Y)\xi - (\kappa-1)g(X,Y)\xi + \\
&\quad +(\kappa-1)\eta(X)\eta(Y)\xi - \eta(Y)hX + (\kappa-1)\eta(Y)X \\
&\quad -(\kappa-1)\eta(X)\eta(Y)\xi \\
&= (\kappa-1)[\eta(Y)(X+hX) - g(X+hX,Y)\xi], \qquad (4.52)
\end{aligned}$$

αφετέρου λόγω των (3.1), (3.4), (3.8) και (4.42), έχουμε

$$\begin{aligned}
(\nabla_{h^2X}\phi)Y &= (\kappa-1)(\nabla_{\phi^2X}\phi)Y = (\kappa-1)(\nabla_{-X+\eta(X)\xi}\phi)Y \\
&= (1-\kappa)(\nabla_X\phi)Y.
\end{aligned}$$

Από τις δυο τελευταίες σχέσεις προκύπτει:

$$(\kappa-1)[(\nabla_X\phi)Y + \eta(Y)(X+hX) - g(X+hX,Y)\xi] = 0, \qquad (4.53)$$

για κάθε $X \in D^1(M)$. Θεωρούμε το κλειστό σύνολο $B = \{p \in M | \kappa(p) = 1\}$. Τότε, το σύνολο $N = M \setminus B$ (το συμπλήρωμα του B) είναι ένα ανοικτό υποσύνολο της πολλαπλότητας M και για το λόγο αυτό κληρονομεί τη μετρική δομή επαφής της M, δηλαδή, η πολλαπλότητα $[N, (\eta, \xi, \phi, g)]$ είναι μια (κ, μ, ν)-πολλαπλότητα επαφής με $\kappa < 1$ παντού στη N. Αξιοποιώντας τη (4.53), εύκολα συνάγουμε ότι η (4.47) ισχύει στην πολλαπλότητα N. Επιπλέον, αξιοποιώντας το γεγονός ότι το εσωτερικό B° του B είναι πολλαπλότητα Sasaki και χρησιμοποιώντας την (3.18), λαμβάνουμε ότι η (4.47) ισχύει στο B°. Για κάθε

$X, Y \in D^1(M)$ θεωρούμε τη συνάρτηση $F(X,Y) : M \to \mathbb{R}$ με τιμή

$$F(X,Y)(p) = (\nabla_X \phi)Y + \eta(Y)(X + hX) - g(X + hX, Y)\xi)(p)$$

για κάθε $p \in M$. Επειδή η συνεχής συνάρτηση $F(X,Y)$ μηδενίζεται στα σύνολα N και B°, θα μηδενίζεται σε κάθε σημείο της M. Συνεπώς, η απόδειξη της (4.47) έχει ολοκληρωθεί. Χρησιμοποιώντας τη (4.53) και εργαζόμενοι ανάλογα με τη απόδειξη της σχέσης (2.8) του [79, σελ.16], έχουμε

$$\begin{aligned} R(X,Y)\xi &= \kappa[\eta(Y)X - \eta(X)Y] + \mu[\eta(Y)hX - \eta(X)hY] + \\ &\quad +\nu[\eta(Y)\phi hX - \eta(X)\phi hY] \\ &= \eta(Y)(X + hX) - \eta(X)(Y + hY) - \phi[(\nabla_X h)Y - (\nabla_Y h)X], \end{aligned}$$

ή, ισοδύναμα,

$$\begin{aligned} \phi[(\nabla_X h)Y - (\nabla_Y h)X] &= (1-\kappa)(\eta(Y)X - \eta(X)Y) + (1-\mu)(\eta(Y)hX - \\ &\quad -\eta(X)hY) - \nu(\eta(Y)\phi hX - \eta(X)\phi hY). \end{aligned}$$

Αν τώρα δράσουμε και στα δυο μέλη της σχέσης αυτής με το ϕ και χρησιμοποιήσουμε τις (3.1), (3.4) και (3.6), παίρνουμε

$$\begin{aligned} &-[(\nabla_X h)Y - (\nabla_Y h)X] + g((\nabla_X h)Y - (\nabla_Y h)X, \xi) = (1-\kappa)(\eta(Y)\phi X - \\ &-\eta(X)\phi Y) + (1-\mu)(\eta(Y)\phi hX - \eta(X)\phi hY) + \nu(\eta(Y)hX - \\ &-\eta(X)hY), \end{aligned} \tag{4.54}$$

για κάθε $X, Y \in D^1(M)$. Ακολουθώντας τη διαδικασία που έχει αναπτυχθεί στη [79, σελ.19] και χρησιμοποιώντας τις (3.1), (3.4), (3.6) και (4.42), έχουμε

$$g((\nabla_X h)Y - (\nabla_Y h)X, \xi) = 2(\kappa - 1)g(\phi X, Y),$$

για κάθε $X, Y \in D^1(M)$. Αντικαθιστώντας την τελευταία σχέση στην (4.54), εύκολα συνάγουμε την (4.48). Χρησιμοποιώντας τις (3.1), (3.4), (3.6), (4.47) και (4.48), υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
(\nabla_X \phi h)Y - (\nabla_Y \phi h)X &= (\nabla_X \phi)hY + \phi(\nabla_X h)Y - [(\nabla_Y \phi)hX + \phi(\nabla_Y h)X] \\
&= (\nabla_X \phi)hY - (\nabla_Y \phi)hX + \phi[(\nabla_X h)Y - (\nabla_Y h)X] \\
&= g(X + hX, hY)\xi - \eta(hY)(X + hX) - \\
&\quad -g(Y + hY, hX)\xi + \eta(hX)(Y + hY) + \\
&\quad +\phi\{(1-\kappa)[\eta(X)\phi Y - \eta(Y)\phi X + +2g(X, \phi Y)\xi] + \\
&\quad +(1-\mu)[\eta(X)\phi hY - \eta(Y)\phi hX] + \nu[\eta(X)hY - \\
&\quad -\eta(Y)hX]\} \\
&= (1-\kappa)[\eta(X)\phi^2 Y - \eta(Y)\phi^2 X] + (1-\mu)[\eta(X)\phi^2 hY - \\
&\quad -\eta(Y)\phi^2 hX] + \nu[\eta(X)\phi hY - \eta(Y)\phi hX] \\
&= (1-\kappa)[\eta(Y)X - \eta(X)Y] + (1-\mu)[\eta(Y)hX - \\
&\quad -\eta(X)hY] + \nu[\eta(X)\phi hY - \eta(Y)\phi hX],
\end{aligned}$$

για κάθε $X, Y \in D^1(M)$. Συνεπώς, η απόδειξη της (4.49) έχει ολοκληρωθεί.

□

Λήμμα 4.4. *Σε κάθε (κ, μ, ν)-πολλαπλότητα επαφής $[M^{2n+1}, (\eta, \xi, \phi, g)]$ ισχύει η παρακάτω διαφορική εξίσωση:*

$$\begin{aligned}
\xi(\kappa)[\eta(Y)X - \eta(X)Y] + \xi(\mu)[\eta(Y)hX - \eta(X)hY] & \\
+\xi(\nu)[\eta(Y)\phi hX - \eta(X)\phi hY] - X(\kappa)\phi^2 Y + Y(\kappa)\phi^2 X & \\
+X(\mu)hY - Y(\mu)hX + X(\nu)\phi hY - Y(\nu)\phi hX &= 0, \quad (4.55)
\end{aligned}$$

για κάθε $X, Y \in D^1(M)$.

Απόδειξη. Παραγωγίζοντας τη (4.1) ως προς το πεδίο Z και χρησιμοποιώντας τις (3.4) και (3.7), έχουμε

$$\begin{aligned}\nabla_Z R(X,Y)\xi &= Z(\kappa)[\eta(Y)X-\eta(X)Y]+Z(\mu)[\eta(Y)hX-\eta(X)hY]\\ &\quad +Z(\nu)[\eta(Y)\phi hX-\eta(X)\phi hY]+\kappa[\{\eta(\nabla_Z Y)-g(Y,\phi Z)-\\ &\quad -g(Y,\phi hZ)\}X+\eta(Y)\nabla_Z X-\{\eta(\nabla_Z X)-g(X,\phi Z)-\\ &\quad -g(X,\phi hZ)\}Y-\eta(X)\nabla_Z Y]+\mu[\{\eta(\nabla_Z Y)-g(Y,\phi Z)-\\ &\quad -g(Y,\phi hZ)\}hX+\eta(Y)\nabla_Z hX-\{\eta(\nabla_Z X)-g(X,\phi Z)-\\ &\quad -g(X,\phi hZ)\}hY-\eta(X)\nabla_Z hY]+\nu[\{\eta(\nabla_Z Y)-g(Y,\phi Z)-\\ &\quad -g(Y,\phi hZ)\}\phi hX+\eta(Y)\nabla_Z\phi hX-\{\eta(\nabla_Z X)-g(X,\phi Z)-\\ &\quad -g(X,\phi hZ)\}\phi hY-\eta(X)\nabla_Z\phi hY].\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την τελευταία σχέση και τις (3.4), (3.7) και (4.1), έχουμε

$$\begin{aligned}(\nabla_Z R)(X,Y,\xi) &= \nabla_Z R(X,Y)\xi-R(\nabla_Z X,Y)\xi-R(X,\nabla_Z Y)\xi-R(X,Y)\nabla_Z\xi\\ &= Z(\kappa)[\eta(Y)X-\eta(X)Y]+Z(\mu)[\eta(Y)hX-\eta(X)hY]\\ &\quad +Z(\nu)[\eta(Y)\phi hX-\eta(X)\phi hY]+\kappa[-g(Y,\phi Z+\phi hZ)X+\\ &\quad +g(X,\phi Z+\phi hZ))Y]+\mu[-g(Y,\phi Z+\phi hZ)hX+\\ &\quad +g(X,\phi Z+\phi hZ))hY+\eta(Y)(\nabla_Z h)X-\eta(X)(\nabla_Z h)Y]\\ &\quad +\nu[-g(Y,\phi Z+\phi hZ)\phi hX+g(X,\phi Z+\phi hZ)\phi hY+\\ &\quad +\eta(Y)(\nabla_Z\phi h)X-\eta(X)(\nabla_Z\phi h)Y]+R(X,Y)\phi Z+\\ &\quad +R(X,Y)\phi hZ.\end{aligned}$$

για κάθε $X,Y,Z\in D^1(M)$. Συνδυάζοντας την τελευταία σχέση και τη δεύτερη ταυτότητα του Bianchi:

$$(\nabla_Z R)(X,Y,\xi)+(\nabla_X R)(Y,Z,\xi)+(\nabla_Y R)(Z,X,\xi)=0,$$

έχουμε

$$
\begin{aligned}
&Z(\kappa)[\eta(Y)X-\eta(X)Y]+Z(\mu)[\eta(Y)hX-\eta(X)hY]+Z(\nu)[\eta(Y)\phi hX-\eta(X)\phi hY]\\
&+X(\kappa)[\eta(Z)Y-\eta(Y)Z]+X(\mu)[\eta(Z)hY-\eta(Y)hZ]+X(\nu)[\eta(Z)\phi hY-\eta(Y)\phi hZ]\\
&+Y(\kappa)[\eta(X)Z-\eta(Z)X]+Y(\mu)[\eta(X)hZ-\eta(Z)hX]+Y(\nu)[\eta(X)\phi hZ-\eta(Z)\phi hX]\\
&+2\kappa[g(\phi Y,Z)X+g(\phi Z,X)Y+g(\phi X,Y)Z]+\mu\{2g(\phi Y,Z)hX+2g(\phi Z,X)hY\\
&+2g(\phi X,Y)hZ+\eta(Z)[(\nabla_X h)Y-(\nabla_Y h)X]+\eta(X)[(\nabla_Y h)Z-(\nabla_Z h)Y]\\
&+\eta(Y)[(\nabla_Z h)X-(\nabla_X h)Z]\}+\nu\{2g(\phi Y,Z)\phi hX+2g(\phi Z,X)\phi hY+2g(\phi X,Y)\phi hZ\\
&+\eta(Z)[(\nabla_X\phi h)Y-(\nabla_Y\phi h)X]+\eta(X)[(\nabla_Y\phi h)Z-(\nabla_Z\phi h)Y]+\eta(Y)[\nabla_Z\phi h)X\\
&-(\nabla_X\phi h)Z]\}+R(X,Y)\phi Z+R(X,Y)\phi hZ+R(Y,Z)\phi X+R(Y,Z)\phi hX\\
&+R(Z,X)\phi Y+R(Z,X)\phi hY=0.
\end{aligned}
$$

για κάθε $X,Y,Z\in D^1(M)$. Θέτοντας $Z=\xi$ στη τελευταία σχέση, παίρνουμε

$$
\begin{aligned}
&\xi(\kappa)[\eta(Y)X-\eta(X)Y]+\xi(\mu)[\eta(Y)hX-\eta(X)hY]+\xi(\nu)[\eta(Y)\phi hX\\
&-\eta(X)\phi hY]+\mu\eta(Y)[(\nabla_\xi h)X-(\nabla_X h)\xi]+\mu\eta(X)[(\nabla_Y h)\xi-(\nabla_\xi h)Y]\\
&+\mu[(\nabla_X h)Y-(\nabla_Y h)Y]+\nu\eta(Y)[(\nabla_\xi\phi h)X-(\nabla_X\phi h)\xi]+\nu\eta(X)[(\nabla_Y\phi h)\xi\\
&-(\nabla_\xi\phi h)X]+\nu[(\nabla_X\phi h)Y-(\nabla_Y\phi h)X]-X(\kappa)\phi^2Y+X(\mu)hY+X(\nu)\phi hY\\
&-Y(\mu)hX-Y(\nu)\phi hX+Y(\kappa)\phi^2X-2\kappa g(X,\phi Y)\xi+R(Y,\xi)\phi X+R(Y,\xi)\phi hX\\
&+R(\xi,X)\phi Y+R(\xi,X)\phi hY=0
\end{aligned}
\tag{4.56}
$$

για κάθε $X,Y\in D^1(M)$. Επιπλέον, αντικαθιστώντας τις (4.48) και (4.49) στην (4.71) και χρησιμοποιώντας τις (3.1), (3.2) και (3.6), έχουμε

$$\begin{aligned}
0 &= \xi(\kappa)[\eta(Y)X-\eta(X)Y]+\xi(\mu)[\eta(Y)hX-\eta(X)hY]+\xi(\nu)[\eta(Y)\phi hX-\\
&\quad -\eta(X)\phi hY]+\mu\eta(Y)[(1-\kappa)\phi X+(1-\mu)\phi hX+\nu hX]+\\
&\quad +\nu\eta(Y)[(1-\kappa)(\eta(X)\xi-X)-(1-\mu)hX+\nu\phi hX]-\\
&\quad -\mu\eta(X)[(1-\kappa)\phi Y+(1-\mu)\phi hY+\nu hY]-\nu\eta(X)[(1-\kappa)(\eta(Y)\xi-Y)-\\
&\quad -(1-\mu)hY+\nu\phi hY]+\mu\{(1-\kappa)[\eta(X)\phi Y-\eta(Y)\phi X+2g(X,\phi Y)\xi]+\\
&\quad +(1-\mu)[\eta(X)\phi hY-\eta(Y)\phi hX]+\nu[\eta(X)hY-\eta(Y)hX]\}+\\
&\quad +\nu\{(1-\kappa)[\eta(Y)X-\eta(X)Y]+(1-\mu)[\eta(Y)hX-\eta(X)hY]+\\
&\quad +\nu[\eta(X)\phi hY-\eta(Y)\phi hX]\}-X(\kappa)\phi^2Y+X(\mu)hY+X(\nu)\phi hY-\\
&\quad -Y(\mu)hX-Y(\nu)\phi hX+Y(\kappa)\phi^2X-2\kappa g(X,\phi Y)\xi-\kappa g(Y,\phi X)\xi-\\
&\quad -\mu g(hY,\phi X)\xi-\kappa g(Y,\phi hX)\xi-\mu g(hY,\phi hX)\xi+\kappa g(X,\phi Y)\xi+\\
&\quad +\mu g(hX,\phi Y)\xi+\kappa g(X,\phi Y)\xi+\mu g(hX,\phi hY)\xi,
\end{aligned}$$

ή, ισοδύναμα,

$$\begin{aligned}
0 &= \xi(\kappa)[\eta(Y)X-\eta(X)Y]+\xi(\mu)[\eta(Y)hX-\eta(X)hY]+\xi(\nu)[\eta(Y)\phi hX-\\
&\quad -\eta(X)\phi hY]+2\mu(1-\kappa)g(X,\phi Y)\xi-X(\kappa)\phi^2Y+X(\mu)hY+X(\nu)\phi hY-\\
&\quad -Y(\mu)hX-Y(\nu)\phi hX+Y(\kappa)\phi^2X-2\kappa g(X,\phi Y)\xi+2\kappa g(X,\phi Y)\xi,\\
&\quad +2\mu g(hX,\phi hY)\xi, \qquad (4.57)
\end{aligned}$$

για κάθε $X,Y\in D^1(M)$. Από την άλλη πλευρά, χρησιμοποιώντας τις (3.1), (3.2), (3.3), (3.4), (3.6) και (4.42), υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
g(hX,\phi hY) &= -g(hX,h\phi Y)=-g(h^2X,\phi Y)=(1-\kappa)g(\phi^2X,\phi Y)\\
&= (1-\kappa)g(\phi X,Y)=-(1-\kappa)g(X,\phi Y), \qquad (4.58)
\end{aligned}$$

για κάθε $X, Y \in D^1(M)$. Αντικαθιστώντας τη σχέση (4.58) στην (4.57), εύκολα συνάγουμε τη διαφορική εξίσωση (4.55). Έτσι, η απόδειξη του Λήμματος 4.4 έχει ολοκληρωθεί. □

Ακολουθώντας την απόδειξη του Λήμματος 3.4 της εργασίας ([49]), έχουμε

Λήμμα 4.5. *Για κάθε $p \in M$ με $\kappa(p) < 1$, υπάρχει μια ανοικτή γειτονιά W του p και ένα πεδίο πλαισίων $\{X_i, \phi X_i, \xi\}, i = 1, 2, \ldots, n$ που ορίζεται στην W έτσι ώστε*

$$hX_i = \lambda X_i, \quad h\phi X_i = -\lambda\phi X_i, \quad h\xi = 0, \quad i = 1, 2, \ldots n \tag{4.59}$$

όπου $\lambda = \sqrt{1-\kappa}$.

Για διάσταση μεγαλύτερη του τρία, είναι αξιοσημείωτο το παρακάτω Θεώρημα:

Θεώρημα 4.2. *Κάθε (κ, μ, ν)-πολλαπλότητα επαφής $[M, (\eta, \xi, \phi, g)]$ διάστασης μεγαλύτερης του τρία είναι είτε πολλαπλότητα Sasaki είτε μια (κ, μ)-πολλαπλότητα επαφής, δηλαδή, οι συναρτήσεις κ και μ είναι σταθερές και η συνάρτηση ν είναι η μηδενική συνάρτηση.*

Απόδειξη. Έστω $p \in M$ με $\kappa(p) < 1$. Θεωρούμε το σύνολο $N = \{p \in M | \kappa(p) < 1\}$. Τότε το Λήμμα 4.5 υποδηλώνει την ύπαρξη ανοικτής γειτονιάς W του p και πεδίου πλαισίων $\{X_i, \phi X_i, \xi\}, i = 1, 2, \ldots, n$ ορισμένου επί της W έτσι ώστε να ισχύουν οι σχέσεις (4.59). Θέτοντας $X = X_i$ και $Y = \phi X_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ στη διαφορική εξίσωση (4.55) και χρησιμοποιώντας τις (3.1), (3.2) και (3.4), έχουμε

$$\begin{aligned} 0 &= X_i(\kappa)\phi X_i - \phi X_i(\kappa) X_i - \lambda X_i(\mu)\phi X_i - \lambda\phi X_i(\mu) X_i + \\ &\quad + \lambda X_i(\nu) X_i - \lambda\phi X_i(\nu)\phi X_i, \end{aligned}$$

για $i = 1, 2, \dots, n$. Ισοδύναμα, παίρνουμε

$$\begin{aligned} X_i(\kappa) - \lambda X_i(\mu) - \lambda\phi X_i(\nu) &= 0 \\ -\phi X_i(\kappa) - \lambda\phi X_i(\mu) + \lambda X_i(\nu) &= 0. \end{aligned} \tag{4.60}$$

Θέτοντας $X = X_i$ και $Y = X_j$, αντιστοίχως, $(i \neq j)$ στη διαφορική εξίσωση (4.55), παίρνουμε

$$\begin{aligned} &X_i(\kappa) + \lambda X_i(\mu) = 0, \quad i = 1, 2, \dots n \\ &X_i(\nu) = 0. \end{aligned} \tag{4.61}$$

Θέτοντας $X = \phi X_i$ και $Y = \phi X_j$, αντιστοίχως, $(i \neq j)$ στη διαφορική εξίσωση (4.55), παίρνουμε

$$\begin{aligned} &\phi X_i(\kappa) - \lambda\phi X_i(\mu) = 0, \quad i = 1, 2, \dots n \\ &\phi X_i(\nu) = 0. \end{aligned} \tag{4.62}$$

Συνδυάζοντας τις (4.60), (4.61) και (4.62), εύκολα συνάγουμε ότι

$$\begin{aligned} &X_i(\kappa) = \phi X_i(\kappa) = X_i(\mu) = \phi X_i(\mu) = X_i(\nu) = \phi X_i(\nu) = 0, \\ &(i = 1, 2, \dots n). \end{aligned} \tag{4.63}$$

Αν η πολλαπλότητα M περιέχει σημεία με $\kappa = 1$, τότε λόγω συνέχειας της συνάρτησης κ έπεται ότι έχουμε $\kappa = 1$ οπουδήποτε στην πολλαπλότητα M. Χρησιμοποιώντας τη σχέση (4.42), συμπεραίνουμε ότι $h^2 = 0$. Επειδή, ο τελεστής h είναι συμμετρικός, έπεται ότι $h = 0$, οπότε από την (4.1) λαμβάνουμε ότι

$$R(X, Y)\xi = \eta(Y)X - \eta(X)Y,$$

για κάθε $X, Y \in D^1(M)$. Από τη (3.17), έπεται ότι η M είναι πολλαπλότητα Sasaki. Αν η πολλαπλότητα M δεν περιέχει σημεία με $\kappa = 1$, τότε έχουμε

$\kappa < 1$ οπουδήποτε στην πολλαπλότητα M. Στην περίπτωση αυτή, έχουμε ότι $N = M$. Από τις σχέσεις $X_i(\mu) = \phi X_i(\mu) = 0, i = 1, 2, \ldots, n$, συνάγουμε ότι $\operatorname{grad} \mu = \xi(\mu)\xi$ ή ισοδύναμα

$$d\mu = \xi(\mu)\eta.$$

Διαφορίζοντας τη τελευταία σχέση, παίρνουμε

$$0 = d(d\mu) = d\xi(\mu) \wedge \eta + \xi(\mu) d\eta. \tag{4.64}$$

Βρίσκουμε την τιμή και των δύο μελών της σχέσης (4.64) στο ζεύγος (X_i, ξ) και χρησιμοποιώντας τις (3.1), (3.3) και (3.4), έχουμε

$$\begin{aligned} 0 &= (d\xi(\mu) \wedge \eta)(X_i, \xi) + \xi(\mu) d\eta(X_i, \xi) \\ &= (d\xi(\mu))(X_i)\eta(\xi) - (d\xi(\mu))(\xi)\eta(X_i) + \xi(\mu) g(X_i, \phi\xi), \end{aligned}$$

ή, ισοδύναμα,

$$(d\xi(\mu))(X_i) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{4.65}$$

Ανάλογα, βρίσκουμε την τιμή στο ζεύγος $(\phi X_i, \xi)$ και έχουμε

$$(d\xi(\mu))(\phi X_i) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{4.66}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (4.65) και (4.66) έχουμε $\operatorname{grad} \xi(\mu) = \xi\xi(\mu)\xi$ και συνεπώς

$$d\xi(\mu) = \xi\xi(\mu)\eta. \tag{4.67}$$

Αντικαθιστώντας την (4.66) στη (4.64) και χρησιμοποιώντας ότι $d\eta \neq 0$ οπουδήποτε στη M, συνάγουμε ότι $\xi(\mu) = 0$. Από την άλλη πλευρά, συνδυάζοντας τη σχέση $\xi(\mu) = 0$, τις σχέσεις (4.63) και τη συνεκτικότητα της πολλαπλότητας M, έπεται ότι η συνάρτηση μ είναι σταθερή στην πολλαπλότητα M. Εφαρμόζοντας την ίδια διαδικασία, έχουμε ότι και οι συναρτήσεις κ και ν είναι σταθερές στην πολλαπλότητα M. Επιπλέον, αξιοποιώντας την (4.44) και το γεγονός ότι $\kappa < 1$ στην πολλαπλότητα M, προκύπτει ότι $\nu = 0$ στην πολλαπλότητα M. Επειδή, οι συναρτήσεις κ και μ είναι σταθερές, εύκολα συμπεραίνουμε ότι η πολλαπλότητα M είναι μια (κ,μ)-πολλαπλότητα επαφής με $\kappa < 1$ παντού στην M. □

4.3 Τρισδιάστατες (κ,μ,ν)-πολλαπλότητες επαφής

Στην παράγραφο αυτή δίνουμε τις ακριβείς εκφράσεις του τανυστή καμπυλότητας, της βαθμωτής καμπυλότητας και της ϕ-καμπυλότητας τομής τρισδιάστατων (κ,μ,ν)-πολλαπλοτήτων επαφής ([54]). Οι εκφράσεις αυτές θα χρησιμοποιηθούν κατά κόρον στο κεφάλαιο 5. Αρχικά, ξεκινάμε με τα παρακάτω Λήμματα:

Λήμμα 4.6. *Έστω $[M,(\eta,\xi,\phi,g)]$ μια τρισδιάστατη (κ,μ,ν)-πολλαπλότητα επαφής. Τότε, ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:*

$$h\,\mathrm{grad}\,\mu = \mathrm{grad}\,\kappa + h\phi\,\mathrm{grad}\,\nu - 2\nu(\kappa-1)\xi, \tag{4.68}$$

$$r = 4\kappa + 2H, \tag{4.69}$$

όπου H είναι η ϕ-καμπυλότητα τομής.

Απόδειξη. Έστω $p \in N = \{p \in M | \kappa(p) < 1\}$. Τότε το Λήμμα 4.5 διασφαλίζει την ύπαρξη μιας ανοικτής γειτονιάς W του p και ενός τοπικού πεδίου πλαισίων $\{e, \phi e, \xi\}$ ορισμένου επί του W που ικανοποιεί τις σχέσεις (4.59). Θέτοντας $X = e$ και $Y = \phi e$ στη διαφορική εξίσωση (4.55) και χρησιμοποιώντας τις (3.1) και (3.4), παίρνουμε

$$\begin{aligned} e(\kappa) - \lambda e(\mu) - \lambda\phi e(\nu) = 0, \\ -\phi e(\kappa) - \lambda\phi e(\mu) + \lambda e(\nu) = 0. \end{aligned} \tag{4.70}$$

Από την άλλη πλευρά, παραγωγίζοντας τη σχέση $\lambda^2 = 1 - \kappa$ ως προς e και ϕe, αντιστοίχως, έχουμε

$$\begin{aligned} e(\kappa) &= -2\lambda e(\lambda), \\ \phi e(\kappa) &= -2\lambda\phi e(\lambda). \end{aligned} \tag{4.71}$$

Αντικαθιστώντας τις (4.71) στις (4.70), παίρνουμε

$$\begin{aligned} -2e(\lambda) &= e(\mu) + \phi e(\nu) \\ -2\phi e(\lambda) &= -\phi e(\mu) + e(\nu). \end{aligned} \tag{4.72}$$

Χρησιμοποιώντας τις (3.4), (3.6), (4.44), (4.59), (4.70), (4.71) και (4.72), υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} h \operatorname{grad} \mu &= h(e(\mu)e + \phi e(\mu)\phi e + \xi(\mu)\xi) \\ &= \lambda e(\mu)e - \lambda\phi e(\mu)\phi e \\ &= [-2e(\lambda) - \phi e(\nu)]\lambda e - [2\phi e(\lambda) + e(\nu)]\lambda\phi e \\ &= e(\kappa)e + \phi e(\kappa)\phi e - \phi e(\nu)\lambda e - e(\nu)\lambda\phi e \\ &= \operatorname{grad} \kappa - \xi(\kappa)\xi - \phi e(\nu)he + e(\nu)h\phi e \\ &= \operatorname{grad} \kappa + h\phi \operatorname{grad} \nu - 2\nu(\kappa - 1)\xi. \end{aligned}$$

Ο ορισμός του τελεστή Ricci Q σε συνδυασμό με τις σχέσεις (3.1), (3.2), (3.4), (3.5), (3.6), (4.40) και (4.59), δίνει

$$\begin{aligned} g(Qe,e) &= g(R(e,e)e,e)+g(R(e,\phi e)\phi e,e)+R(e,\xi)\xi,e) \\ &= g(R(e,\phi e)\phi e,e)+g(le,e) \\ &= g(R(e,\phi e)\phi e,e)+g(-\kappa\phi^2 e+\mu he+\nu\phi he,e) \\ &= g(R(e,\phi e)\phi e,e)+\kappa+\mu g(he,e)+\lambda\nu g(\phi e,e) \\ &= g(R(e,\phi e)\phi e,e)+\kappa+\lambda\mu. \end{aligned} \tag{4.73}$$

και

$$\begin{aligned} g(Q\phi e,\phi e) &= g(R(\phi e,e)e,\phi e)+g(R(\phi e,\phi e)\phi e,\phi e)+g(R(\phi e,\xi)\xi,\phi e) \\ &= g(R(\phi e,e)e,\phi e)+g(l\phi e,\phi e) \\ &= g(R(e,\phi e)\phi e,e)+g(-\kappa\phi^2\phi e+\mu h\phi e+\nu\phi h\phi e,\phi e) \\ &= g(R(e,\phi e)\phi e,e)+\kappa+\mu g(h\phi e,\phi e)+\nu g(h\phi e,e) \\ &= g(R(e,\phi e)\phi e,e)+\kappa-\lambda\mu. \end{aligned} \tag{4.74}$$

Συνδυάζοντας τον ορισμό της ϕ-καμπυλότητας τομής, τις δυο τελευταίες σχέσεις και την (4.46), υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} r &= \operatorname{tr} Q = g(Qe,e)+g(Q\phi e,\phi e)+g(Q\xi,\xi) \\ &= 2g(R(e,\phi e)\phi e,e)+2\kappa+2\kappa \\ &= 4\kappa+2H. \end{aligned}$$

Συνοψίζοντας, εύκολα συμπεραίνουμε ότι οι σχέσεις (4.68) και (4.69) ισχύουν στο ανοικτό σύνολο N. Στη συνέχεια, θεωρούμε το σύνολο $B=M\setminus N$. Αν $B=\varnothing$, τότε το Λήμμα 4.6 έχει αποδειχθεί. Σε αντίθετη περίπτωση, θεωρούμε το εσωτερικό B^o του συνόλου B. Το εσωτερικό B^o είναι ένα ανοικτό υποσύνολο της M και για το λόγο αυτό κληρονομεί τη δομή επαφής (η,ξ,ϕ,g) της M.

Ειδικότερα, το εσωτερικό B^o είναι πολλαπλότητα Sasaki και για το λόγο αυτό ικανοποιείται αυτόματα η σχέση (4.68) (αφού $h = 0$). Δεδομένου, ότι σε κάθε πολλαπλότητα Sasaki ισχύει η σχέση $r = 4 + 2H$([66]), εύκολα προκύπτει η (4.69). Επιπλέον, αξιοποιώντας το γεγονός ότι η ένωση $B^o \cup N$ είναι ένα ανοικτό και πυκνό υποσύνολο της M και ότι τα πεδία που εμφανίζονται στις σχέσεις (4.68) και (4.69) είναι διαφορίσιμα, εύκολα συνάγουμε ότι οι σχέσεις (4.68) και (4.69) ικανοποιούνται σε κάθε σημείο της πολλαπλότητας M. $\square$

Από εδώ και πέρα, θα αναφερόμαστε συχνά στο τοπικό πεδίο πλαισίων $\{e, \phi e, \xi\}$, αποτελούμενο ουσιαστικά από πεδία ιδιοδιανυσμάτων του τελεστή h.

Λήμμα 4.7. *Έστω $[M, (\eta, \xi, \phi, g)]$ μια τρισδιάστατη (κ, μ, ν)-πολλαπλότητα επαφής με $\kappa < 1$ οπουδήποτε στην M. Τότε, ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:*

$$\nabla_e \xi = -(\lambda + 1)\phi e, \quad \nabla_{\phi e} \xi = (1 - \lambda)e, \tag{4.75}$$

$$\nabla_\xi e = -\tfrac{\mu}{2}\phi e, \quad \nabla_\xi \phi e = \tfrac{\mu}{2}e, \quad \nabla_e e = \tfrac{B}{2\lambda}\phi e, \quad \nabla_{\phi e}\phi e = \tfrac{A}{2\lambda}e, \tag{4.76}$$

$$\nabla_{\phi e} e = -\tfrac{A}{2\lambda}\phi e + (\lambda - 1)\xi, \quad \nabla_e \phi e = -\tfrac{B}{2\lambda}e + (\lambda + 1)\xi, \tag{4.77}$$

όπου $A = e(\lambda)$ και $B = \phi e(\lambda)$. Επιπλέον, έχουμε

$$[\xi, e] = (1 + \lambda - \frac{\mu}{2})\phi e, \tag{4.78}$$

$$[\xi, \phi e] = (\lambda - 1 + \frac{\mu}{2})e, \tag{4.79}$$

$$[e, \phi e] = -\frac{B}{2\lambda}e + \frac{A}{2\lambda}\phi e + 2\xi. \tag{4.80}$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας τις (3.1), (3.4), (3.6), (3.7) και (4.59), έχουμε

$$\begin{aligned}
\nabla_e \xi &= -\phi e - \phi h e = -(1+\lambda)\phi e, \\
\nabla_{\phi e} \xi &= -\phi^2 e - \phi h \phi e \\
&= e - \eta(e)\xi + \phi^2 h e = e - he + \eta(he)\xi \\
&= e - \lambda e = (1-\lambda)e. \qquad (4.81)
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την (3.7), έχουμε

$$\frac{1}{2}\xi g(e,e) = g(\nabla_\xi e, e) = 0,$$

και

$$\xi g(e,\xi) = g(\nabla_\xi e, \xi) + g(e, \nabla_\xi \xi) = 0,$$

ή, ισοδύναμα,

$$g(\nabla_\xi e, \xi) = -g(e, \nabla_\xi \xi) = 0.$$

Συνοψίζοντας, έχουμε

$$\nabla_\xi e = a\phi e \qquad (4.82)$$

όπου $a = g(\nabla_\xi e, \phi e)$. Από την άλλη πλευρά, παραγωγίζοντας τη σχέση $\lambda^2 = 1-\kappa$ ως προς ξ και χρησιμοποιώντας την (4.44), παίρνουμε

$$\xi(\lambda) = \lambda\nu. \qquad (4.83)$$

Με άμεσους υπολογισμούς και χρησιμοποιώντας τις (4.59), (4.82) και (4.83), έχουμε

$$\begin{aligned}
(\nabla_\xi h)e &= \nabla_\xi h e - h(\nabla_\xi e) \\
&= \xi(\lambda)e + \lambda\nabla_\xi e - h(\nabla_\xi e), \\
&= \lambda\nu e + 2a\lambda\phi e.
\end{aligned}$$

Συγκρίνοντας αυτήν με την (4.43), παίρνουμε

$$\begin{aligned} \lambda\nu e + 2a\lambda\phi e &= \mu h\phi e + \nu he \\ &= -\lambda\mu\phi e + \lambda\nu e \end{aligned}$$

απ' όπου συνάγουμε ότι $a = -\frac{\mu}{2}$ και έτσι λαμβάνουμε τη πρώτη σχέση των (4.76). Ανάλογα, έχουμε

$$\frac{1}{2}\xi g(\phi e, \phi e) = g(\nabla_\xi \phi e, \phi e) = 0,$$

και

$$\xi g(\phi e, \xi) = g(\nabla_\xi \phi e, \xi) + g(\phi e, \nabla_\xi \xi) = 0,$$

ή, ισοδύναμα,

$$g(\nabla_\xi \phi e, \xi) = -g(\phi e, \nabla_\xi \xi) = 0.$$

Από τις σχέσεις αυτές και την πρώτη των (4.76), υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} \nabla_\xi \phi e &= g(\nabla_\xi \phi e, e)e = -g(\phi e, \nabla_\xi e)e \\ &= \frac{\mu}{2} g(\phi e, \phi e)e = \frac{\mu}{2} e. \end{aligned} \tag{4.84}$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία, λαμβάνουμε

$$\nabla_e e = b\phi e \tag{4.85}$$

και

$$\nabla_{\phi e} \phi e = ce \tag{4.86}$$

όπου $b = g(\nabla_e e, \phi e)$ και $c = g(\nabla_{\phi e} \phi e, e)$. Χρησιμοποιώντας τις (4.75) και (4.85), υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} \nabla_e \phi e &= g(\nabla_e \phi e, e)e + g(\nabla_e \phi e, \phi e)\phi e + g(\nabla_e \phi e, \xi)\xi \\ &= -g(\phi e, \nabla_e e)e - g(\phi e, \nabla_e \xi)\xi \\ &= -bg(\phi e, \phi e)e + (1+\lambda)g(\phi e, \phi e)\xi = -be + (1+\lambda)\xi. \end{aligned} \tag{4.87}$$

Χρησιμοποιώντας τις (4.75) και (4.86), ανάλογα έχουμε

$$\nabla_{\phi e} e = -c\phi e + (\lambda - 1)\xi. \tag{4.88}$$

Συνδυάζοντας τις (4.87) και (4.88), έχουμε

$$[e, \phi e] = \nabla_e \phi e - \nabla_{\phi e} e = -be + c\phi e + 2\xi. \tag{4.89}$$

Από τη σχέση (4.89), τον ορισμό του τανυστή καμπυλότητας και τις σχέσεις (3.7), (4.75), (4.85), (4.86), (4.87) και (4.88), παίρνουμε

$$\begin{aligned}
R(e,\phi e)\xi &= \nabla_e \nabla_{\phi e}\xi - \nabla_{\phi e}\nabla_e \xi - \nabla_{[e,\phi e]}\xi \\
&= \nabla_e[(1-\lambda)e] + \nabla_{\phi e}[(1+\lambda)\phi e] + b\nabla_e \xi - c\nabla_{\phi e}\xi \\
&\quad -2\nabla_\xi \xi \\
&= -e(\lambda)e + (1-\lambda)b\phi e + \phi e(\lambda)\phi e + (\lambda+1)ce \\
&\quad -b(\lambda+1)\phi e - c(1-\lambda)e \\
&= [-A + c(\lambda+1) - c(1-\lambda)]e + [b(1-\lambda) - b(\lambda+1) + B]\phi e \\
&= [-A + 2\lambda c]e + [B - 2\lambda b]\phi e.
\end{aligned}$$

Από την άλλη πλευρά, αξιοποιώντας το γεγονός ότι η πολλαπλότητα M είναι μια (κ,μ,ν)-πολλαπλότητα επαφής, έχουμε ότι

$$R(e,\phi e)\xi = 0.$$

Συγκρίνοντας τις δυο τελευταίες σχέσεις εύκολα προκύπτει ότι $-A + 2\lambda c = 0$ και $B - 2\lambda b = 0$ ή, ισοδύναμα, ότι $c = \frac{A}{2\lambda}$ και $b = \frac{B}{2\lambda}$. Αντικαθιστώντας τις τιμές των b και c στις (4.87), (4.88) και (4.89) συνάγουμε εύκολα τις (4.76), (4.77) και (4.80). Η απόδειξη των (4.78) και (4.79) είναι άμεση συνέπεια των σχέσεων (4.75) και (4.76). $\square$

Παρατήρηση 4.6. Είναι αξιοσημείωτο ότι οι σχέσεις που περιγράφονται στο Λήμμα 4.6 δεν περιέχουν τη συνάρτηση ν. Οι ίδιες σχέσεις εμφανίζονται και στη μελέτη των γενικευμένων (κ,μ)-πολλαπλοτήτων επαφής ([50]).

Λήμμα 4.8. *Σε κάθε τρισδιάστατη (κ,μ,ν)-πολλαπλότητα επαφής $[M,(\eta,\xi,\phi,g)]$ με $\kappa<1$ οπουδήποτε στην M, ισχύουν οι σχέσεις:*

$$\xi(A) = (1+\lambda-\frac{\mu}{2})B + A\nu + \lambda e(\nu), \tag{4.90}$$
$$\xi(B) = (\lambda-1+\frac{\mu}{2})A + B\nu + \lambda\phi e(\nu), \tag{4.91}$$

όπου $A=e(\lambda)$ και $B=\phi e(\lambda)$.

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας τις (4.83), (4.78) και (4.79), έχουμε

$$\begin{aligned}\xi(A) &= \xi(e(\lambda)) = e\xi(\lambda) + [\xi,e](\lambda)\\ &= e(\lambda\nu) + (1+\lambda-\frac{\mu}{2})\phi e(\lambda)\\ &= A\nu + \lambda e(\nu) + (1+\lambda-\frac{\mu}{2})B\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\xi(B) &= \xi(\phi e(\lambda)) = \phi e\xi(\lambda) + [\xi,\phi e](\lambda)\\ &= \phi e(\lambda\nu) + (\lambda-1+\frac{\mu}{2})e(\lambda)\\ &= B\nu + \lambda\phi e(\nu) + (\lambda-1+\frac{\mu}{2})A.\end{aligned}$$

□

Στην επόμενη Πρόταση παραθέτουμε μια πλήρη έκφραση της ϕ-καμπυλότητας τομής και της βαθμωτής καμπυλότητας τρισδιάστατων (κ,μ,ν)-πολλαπλοτήτων επαφής Riemann συναρτήσει των κ,μ,ν και της ιδιοσυνάρτησης λ. Συγκεκριμένα, έχουμε

Πρόταση 4.4. *Σε κάθε τρισδιάστατη (κ,μ,ν)-πολλαπλότητα επαφής $[M,(\eta,\xi,\phi,g)]$ με $\kappa<1$ οπουδήποτε στην M, η ϕ-καμπυλότητα τομής H και η βαθμωτή καμπυλότητα r δίνονται από τις σχέσεις:*

$$
\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2\lambda}\Delta\lambda-\frac{1}{2}\xi(\nu)-\frac{\|\operatorname{grad}\lambda\|^2}{2\lambda^2}-(\kappa+\mu), && (4.92)\\
r &= \frac{1}{\lambda}\Delta\lambda-\xi(\nu)-\frac{\|\operatorname{grad}\lambda\|^2}{\lambda^2}+2(\kappa-\mu), && (4.93)
\end{aligned}
$$

όπου Δ είναι ο τελεστής Laplace ο οποίος δρα σε διαφορίσιμες συναρτήσεις.

Απόδειξη. Ο ορισμός του τελεστή Laplace σε συνδυασμό με τις σχέσεις (4.59), (4.76) και (4.83) δίνει

$$
\begin{aligned}
\Delta\lambda &= ee(\lambda)+\phi e\phi e(\lambda)+\xi\xi(\lambda)-(\nabla_e e)\lambda-(\nabla_{\phi e}\phi e)\lambda-(\nabla_\xi\xi)\lambda\\
&= e(A)+\phi e(B)+\xi(\lambda\nu)-\frac{A^2+B^2}{2\lambda}\\
&= e(A)+\phi e(B)+\lambda\nu^2+\lambda\xi(\nu)-\frac{A^2+B^2}{2\lambda}. && (4.94)
\end{aligned}
$$

Επιπλέον, χρησιμοποιώντας τις (4.75), (4.76), (4.77), (4.80) και (4.94), υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
R(e,\phi e)\phi e &= \nabla_e\nabla_{\phi e}\phi e - \nabla_{\phi e}\nabla_e\phi e - \nabla_{[e,\phi e]}\phi e \\
&= \nabla_e\{\frac{A}{2\lambda}e\} - \nabla_{\phi e}\{-\frac{B}{2\lambda}e + (1+\lambda)\xi\} - \nabla_{-\frac{B}{2\lambda}e+\frac{A}{2\lambda}\phi e+2\xi}\phi e \\
&= e(\frac{A}{2\lambda})e + \frac{A}{2\lambda}\nabla_e e + \phi e(\frac{B}{2\lambda})e + \frac{B}{2\lambda}\nabla_{\phi e}e \\
&\quad -B\xi - (1+\lambda)\nabla_{\phi e}\xi + \frac{B}{2\lambda}\nabla_e\phi e - \frac{A}{2\lambda}\nabla_{\phi e}\phi e - 2\nabla_\xi\phi e \\
&= e(\frac{A}{2\lambda})e + \frac{AB}{4\lambda^2}\phi e + \phi e(\frac{B}{2\lambda})e + \frac{B}{2\lambda}[-\frac{A}{2\lambda}\phi e + (\lambda-1)\xi] \\
&\quad -B\xi - (1-\lambda^2)e + \frac{B}{2\lambda}[-\frac{B}{2\lambda}e + (1+\lambda)\xi] - \frac{A^2}{4\lambda^2}e - \mu e \\
&= \{\frac{e(A)\lambda - A^2}{2\lambda^2} + \frac{\phi e(B)\lambda - B^2}{2\lambda^2} - \frac{A^2+B^2}{4\lambda^2} - (\kappa+\mu)\}e \\
&= \{\frac{1}{2\lambda}[e(A) + \phi e(B) - \frac{A^2+B^2}{2\lambda}] - \frac{A^2+B^2}{2\lambda^2} - (\kappa+\mu)\}e \\
&= \{\frac{1}{2\lambda}[\Delta\lambda - \lambda\nu^2 - \lambda\xi(\nu)] - \frac{[\|\operatorname{grad}\lambda\|^2 - \lambda^2\nu^2]}{2\lambda^2} - (\kappa+\mu)\}e \\
&= \{\frac{1}{2\lambda}\Delta\lambda - \frac{1}{2}\xi(\nu) - \frac{\|\operatorname{grad}\lambda\|^2}{2\lambda^2} - (\kappa+\mu)\}e.
\end{aligned}$$

Συνοψίζοντας, η ϕ-καμπυλότητα τομής H δίνεται από τη σχέση

$$H = g(R(e,\phi e)\phi e, e) = \frac{1}{2\lambda}\Delta\lambda - \frac{1}{2}\xi(\nu) - \frac{\|\operatorname{grad}\lambda\|^2}{2\lambda^2} - (\kappa+\mu).$$

Αντικαθιστώντας την έκφραση της H στη σχέση (4.69), παίρνουμε

$$\begin{aligned}
r &= 4\kappa + 2H = 4\kappa + 2\{\frac{1}{2\lambda}\Delta\lambda - \frac{1}{2}\xi(\nu) - \frac{\|\operatorname{grad}\lambda\|^2}{2\lambda^2} - (\kappa+\mu)\} \\
&= \frac{1}{\lambda}\Delta\lambda - \xi(\nu) - \frac{\|\operatorname{grad}\lambda\|^2}{\lambda^2} + 2(\kappa-\mu).
\end{aligned}$$

□

Παρατήρηση 4.7. Στην περίπτωση που οι συναρτήσεις κ και μ είναι σταθερές και η συνάρτηση ν είναι η μηδενική συνάρτηση, οι τύποι (4.92) και (4.93) ανάγονται στις εκφράσεις $H = -\kappa - \mu$ και $r = 2(\kappa - \mu)$ ([12]), αντιστοίχως. Επιπλέον, στην περίπτωση των γενικευμένων (κ, μ)-πολλαπλοτήτων επαφής, αντίστοιχες εκφράσεις για τη ϕ-καμπυλότητα τομής H και τη βαθμωτή καμπυλότητα r έχουν βρεθεί στην εργασία [51] και στη Διδακτορική Διατριβή [79, Πρόταση 3.4, σελ. 51].

Πρόταση 4.5. *Έστω $[M, (\eta, \xi, \phi, g)]$ μια τρισδιάστατη (κ, μ, ν)-πολλαπλότητα επαφής με $\kappa < 1$ οπουδήποτε στην M. Τότε, έχουμε*

$$\begin{aligned} \xi(H) &= 2\nu(1-\kappa) && (4.95) \\ \xi(r) &= 4(\kappa - 1)\nu. && (4.96) \end{aligned}$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας τις (4.72), (4.78) και (4.90), υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} \xi e(A) &= [\xi, e](A) + e\xi(A) \\ &= (1 + \lambda - \frac{\mu}{2})\phi e(A) + [A - \frac{1}{2}e(\mu)]B + (1 + \lambda - \frac{\mu}{2})e(B) + e(A)\nu + \\ &\quad +2Ae(\nu) + \lambda ee(\nu) \\ &= (1 + \lambda - \frac{\mu}{2})\phi e(A) + \{A - \frac{1}{2}[-2A - \phi e(\nu)]\}B + (1 + \lambda - \frac{\mu}{2})e(B) + \\ &\quad +e(A)\nu + 2Ae(\nu) + \lambda ee(\nu), \\ &= (1 + \lambda - \frac{\mu}{2})\phi e(A) + 2AB + \frac{1}{2}B\phi e(\nu) + (1 + \lambda - \frac{\mu}{2})e(B) + e(A)\nu + \\ &\quad +2Ae(\nu) + \lambda ee(\nu). \qquad (4.97) \end{aligned}$$

Με ανάλογο τρόπο, χρησιμοποιώντας τις (4.72), (4.79) και (4.91), παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\xi\phi e(B) &= [\xi,\phi e](B)+\phi e\xi(B)\\
&= [B+\frac{1}{2}\phi e(\mu)]A+(\lambda-1+\frac{\mu}{2})\phi e(A)+\phi e(B)\nu+\\
&\quad +2B\phi e(\nu)+\lambda\phi e\phi e(\nu)+(\lambda-1+\frac{\mu}{2})e(B)\\
&= [B+\frac{1}{2}(e(\nu)+2B)]A+(\lambda-1+\frac{\mu}{2})\phi e(A)+\phi e(B)\nu+\\
&\quad +2B\phi e(\nu)+\lambda\phi e\phi e(\nu)+(\lambda-1+\frac{\mu}{2})e(B)\\
&= [2B+\frac{1}{2}e(\nu)]A+(\lambda-1+\frac{\mu}{2})\phi e(A)+\phi e(B)\nu+\\
&\quad +2B\phi e(\nu)+\lambda\phi e\phi e(\nu)+(\lambda-1+\frac{\mu}{2})e(B)\\
&= 2AB+\frac{1}{2}Ae(\nu)+(\lambda-1+\frac{\mu}{2})\phi e(A)+\phi e(B)\nu+\\
&\quad +2B\phi e(\nu)+\lambda\phi e\phi e(\nu)+(\lambda-1+\frac{\mu}{2})e(B). \qquad (4.98)
\end{aligned}$$

Επιπλέον, χρησιμοποιώντας τις (4.90) και (4.91), εύκολα συνάγουμε

$$\begin{aligned}
\xi(A^2+B^2) &= 2A\xi(A)+2B\xi(B)=4\lambda AB+2(A^2+B^2)\nu+\\
&\quad +2\lambda Ae(\nu)+2\lambda B\phi e(\nu). \qquad (4.99)
\end{aligned}$$

Από την άλλη πλευρά, δρώντας την παρένθεση του Lie $[e,\phi e]$ στη συνάρτηση μ και χρησιμοποιώντας την (4.72), έχουμε

$$\begin{aligned}
-\frac{B}{2\lambda}e(\mu)+\frac{A}{2\lambda}\phi e(\mu)+2\xi(\mu) &= -\frac{B}{2\lambda}[-2A-\phi e(\nu)]+\frac{A}{2\lambda}[e(\nu)+\\
&\quad +2B]+2\xi(\mu)\\
&= \frac{2AB}{\lambda}+\frac{B\phi e(\nu)}{2\lambda}+\frac{Ae(\nu)}{2\lambda}+2\xi(\mu)\\
&= [e,\phi e](\mu)=e\phi e(\mu)-\phi ee(\mu)\\
&= e[e(\nu)+2B]-\phi e[-2A-\phi e(\nu)]\\
&= ee(\nu)+\phi e\phi e(\nu)+2[e(B)+\phi e(A)],
\end{aligned}$$

ή, ισοδύναμα,

$$\xi(\mu)=\frac{ee(\nu)+\phi e\phi e(\nu)}{2}+e(B)+\phi e(A)-\frac{AB}{\lambda}-\frac{B\phi e(\nu)}{4\lambda}-\frac{Ae(\nu)}{4\lambda}. \quad (4.100)$$

Η έκφραση της ϕ-καμπυλότητας τομής (4.92) χρησιμοποιώντας την (4.94) μετασχηματίζεται στη παρακάτω σχέση:

$$H=\frac{e(A)}{2\lambda}+\frac{\phi e(B)}{2\lambda}-\frac{3(A^2+B^2)}{4\lambda^2}-\kappa-\mu.$$

Παραγωγίζοντας την τελευταία σχέση ως πρός ξ και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (4.44), (4.83), (4.97), (4.98) και (4.100), έχουμε

$$\begin{aligned}
\xi(H) &= \frac{\xi e(A)-e(A)\nu}{2\lambda}+\frac{\xi\phi e(B)-\phi e(B)\nu}{2\lambda}-\frac{3\xi(A^2+B^2)}{4\lambda^2}+\\
&\quad+\frac{3(A^2+B^2)\nu}{2\lambda^2}-2(\kappa-1)\nu-\xi(\mu)\\
&= \frac{1}{2\lambda}(\lambda+1-\frac{\mu}{2})\phi e(A)+\frac{AB}{\lambda}+\frac{B\phi e(\nu)}{4\lambda}+\frac{1}{2\lambda}(1+\lambda-\frac{\mu}{2})e(B)+\\
&\quad+\frac{Ae(\nu)}{\lambda}+\frac{ee(\nu)}{2}+\frac{1}{2\lambda}(\lambda-1+\frac{\mu}{2})e(B)+\frac{AB}{\lambda}+\frac{Ae(\nu)}{4\lambda}+\\
&\quad+\frac{1}{2\lambda}(\lambda-1+\frac{\mu}{2})\phi e(A)+\frac{B\phi e(\nu)}{\lambda}+\frac{\phi\phi e(\nu)}{2}-\frac{3}{2\lambda^2}[2\lambda AB+\\
&\quad+(A^2+B^2)\nu+\lambda Ae(\nu)+\lambda B\phi e(\nu)]+\frac{3(A^2+B^2)\nu}{2\lambda^2}-2(\kappa-1)\nu-\xi(\mu)\\
&= -\frac{AB}{\lambda}+e(B)+\phi e(A)+\frac{ee(\nu)+\phi\phi e(\nu)}{2}-\frac{B\phi e(\nu)}{4\lambda}-\frac{Ae(\nu)}{4\lambda}-\\
&\quad-\xi(\mu)-2(\kappa-1)\nu\\
&= 2(1-\kappa)\nu.
\end{aligned}$$

Τέλος, παραγωγίζοντας την (4.69) ως πρός το χαρακτηριστικό πεδίο ξ και χρησιμοποιώντας τις (4.44) και (4.95), παίρνουμε

$$\xi(r)=4\xi(\kappa)+2\xi(H)=8(\kappa-1)\nu+4(1-\kappa)\nu=4(\kappa-1)\nu,$$

και έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη της Πρότασης. □

Άμεση συνέπεια της Πρότασης 4.5 είναι τα επόμενα πορίσματα.

Πόρισμα 4.1. [79, Πρόταση 3.6 σελ.57] Σε κάθε τρισδιάστατη γενικευμένη (κ,μ)-πολλαπλότητα επαφής $[M,(\eta,\xi,\phi,g)]$ με $\kappa<1$ οπουδήποτε στην M, η ϕ-καμπυλότητα τομής H και η βαθμωτή καμπυλότητα r είναι σταθερές κατά μήκος των ολοκληρωτικών καμπυλών του ξ.

Πόρισμα 4.2. Έστω $[M,(\eta,\xi,\phi,g)]$ μια τρισδιάστατη (κ,μ,ν)-πολλαπλότητα επαφής με $\kappa<1$ οπουδήποτε στην M. Αν η ϕ-καμπυλότητα τομής H(αντ. βαθμωτή καμπυλότητα r) είναι σταθερή, τότε η πολλαπλότητα επαφής M είναι μια γενικευμένη (κ,μ)-πολλαπλότητα επαφής.

Αξίζει να σημειωθεί ότι οι Koufogiorgos και Tsichlias([51]) έδωσαν παραδείγματα τρισδιάστατων γενικευμένων (κ,μ)-πολλαπλοτήτων επαφής με σταθερή βαθμωτή καμπυλότητα r. Επιπλέον, ο Tsichlias ([79, Θεώρημα 3.17 σελ.101]) κατασκεύασε παραδείγματα τρισδιάστατων γενικευμένων (κ,μ)-πολλαπλοτήτων επαφής με σταθερή ϕ-καμπυλότητα τομής H.

O Boeckx([16]) έδωσε μια πλήρη έκφραση του τανυστή καμπυλότητας μιας (κ,μ)-πολλαπλότητα επαφής με $\kappa<1$. Γενικεύοντας την ιδέα αυτή, δίνουμε μια έκφραση του τανυστή καμπυλότητας τρισδιάστατων (κ,μ,ν)-πολλαπλοτήτων επαφής.

Πρόταση 4.6. *Έστω $[M,(\eta,\xi,\phi,g)]$ μια τρισδιάστατη (κ,μ,ν)-πολλαπλότητα επαφής με $\kappa<1$ οπουδήποτε στη M. Ο τανυστής καμπυλότητας*

R της πολλαπλότητας M δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= \mu[g(hY,Z)X - g(hX,Z)Y + g(Y,Z)hX - g(X,Z)hY] \\ &+\nu[g(\phi hY,Z)X - g(\phi hX,Z)Y + g(Y,Z)\phi hX - g(X,Z)\phi hY] \\ &+(3\kappa - \frac{r}{2})[g(Y,Z)\eta(X) - g(X,Z)\eta(Y)]\xi \\ &+(3\kappa - \frac{r}{2})[\eta(Y)\eta(Z)X - \eta(X)\eta(Z)Y] \\ &+(\frac{r}{2} - 2\kappa)[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y], \end{aligned} \tag{4.101}$$

για κάθε $X, Y, Z \in D^1(M)$, όπου r είναι η βαθμωτή καμπυλότητα.

Απόδειξη. Σύμφωνα με την Πρόταση 4.2, ο τελεστής Ricci Q της πολλαπλότητας M δίνεται από τη σχέση

$$Q = (\frac{r}{2} - \kappa)I + (-\frac{r}{2} + 3\kappa)\eta \otimes \xi + \mu h + \nu\phi h. \tag{4.102}$$

Αντικαθιστώντας την (4.102) στην (2.2), έχουμε

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= g(Y,Z)[(\frac{r}{2} - \kappa)X + (-\frac{r}{2} + 3\kappa)\eta(X)\xi + \mu hX + \\ &+\nu\phi hX] - g(X,Z)[(\frac{r}{2} - \kappa)Y + (-\frac{r}{2} + 3\kappa)\eta(Y)\xi + \\ &+\mu hY + \nu\phi hY] + g((\frac{r}{2} - \kappa)Y + (-\frac{r}{2} + 3\kappa)\eta(Y)\xi + \\ &+\mu hY + \nu\phi hY, Z)X - g((\frac{r}{2} - \kappa)X + (-\frac{r}{2} + 3\kappa)\eta(X)\xi + \\ &+\mu hX + \nu\phi hX, Z)Y - \frac{r}{2}[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y] \\ &= \mu[g(Y,Z)hX - g(X,Z)hY + g(hY,Z)X - g(hX,Z)Y] + \\ &+\nu[g(Y,Z\phi hX - g(X,Z)\phi hY + g(\phi hY,Z)X - g(\phi hX,Z)Y + \\ &+(3\kappa - \frac{r}{2})[g(Y,Z)\eta(X) - g(X,Z)\eta(Y)]\xi + \\ &+(3\kappa - \frac{r}{2})[\eta(Y)\eta(Z)X - \eta(X)\eta(Z)Y] + \\ &+(\frac{r}{2} - 2\kappa)[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y] \end{aligned}$$

για κάθε $X, Y, Z \in D^1(M)$ και η απόδειξη της Πρότασης έχει ολοκληρωθεί. □

Παρατήρηση 4.8. Στην περίπτωση που είναι $\nu = 0$, αντίστοιχη έκφραση για τον τανυστή καμπυλότητας έχει βρεθεί στη Διδακτορική Διατριβή ([79, Πρόταση 3.7 σελ. 59]). Συνδυάζοντας τις (4.93) και (4.101), εύκολα συμπεραίνουμε ότι ο τανυστής καμπυλότητας μιας τρισδιάστατης (κ, μ, ν)-πολλαπλότητα επαφής $[M, (\eta, \xi, \phi, g)]$ με $\kappa < 1$ οπουδήποτε στην M προσδιορίζεται πλήρως από τις συναρτήσεις κ, μ και ν.

Πρόταση 4.7. *Σε κάθε τρισδιάστατη (κ, μ, ν)-πολλαπλότητα επαφής $[M, (\eta, \xi, \phi, g)]$ ισχύει η σχέση:*

$$
\begin{aligned}
(1-\kappa)(\nabla_X h)Y &= -\frac{1}{2}g(hX, Y)\,\mathrm{grad}\,\kappa - \frac{1}{2}g(hX, \phi Y)\phi(\mathrm{grad}\,\kappa) \\
&\quad +(1-\kappa)[(1-\kappa)g(X, \phi Y) + g(hX, \phi Y) - \nu g(hX, Y)]\xi \\
&\quad +(1-\kappa)\{\eta(Y)[(\kappa-1)\phi X + h\phi X] + \\
&\quad +\eta(X)[\mu h\phi Y + \nu hY]\}, \qquad (4.103)
\end{aligned}
$$

για κάθε $X, Y \in D^1(M)$.

Απόδειξη. Έστω $p \in N$. Τότε το Λήμμα 4.5 εξασφαλίζει την ύπαρξη μιας ανοικτής γειτονιάς W του p και ενός τοπικού πεδίου πλαισίων $\{e, \phi e, \xi\}$ ορισμένου επί του W που ικανοποιεί τις σχέσεις (4.59). Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.1), (3.4), (3.6), (4.43), (4.59), (4.75), (4.76), (4.77) και (4.83), έχουμε

$$
\begin{aligned}
(\nabla_e h)e &= \nabla_e he - h(\nabla_e e) = \nabla_e \lambda e - h(\nabla_e e) \\
&= e(\lambda)e + \lambda\nabla_e e - h(\frac{B}{2\lambda}\phi e) \\
&= Ae + \lambda\frac{B}{2\lambda}\phi e - \frac{B}{2\lambda}(-\lambda\phi e) \\
&= Ae + B\phi e = \mathrm{grad}\,\lambda - \lambda\nu\xi, \qquad (4.104)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\nabla_{\phi e} h)\phi e &= \nabla_{\phi e} h\phi e - h(\nabla_{\phi e}\phi e) = \nabla_{\phi e}[-\lambda\phi e] - h(\nabla_{\phi e}\phi e) \\
&= -\phi e(\lambda)\phi e - \lambda\nabla_{\phi e}\phi e - h(\frac{A}{2\lambda}e) \\
&= -B\phi e - \lambda\frac{A}{2\lambda}e - \frac{A}{2\lambda}he \\
&= -B\phi e - \frac{A}{2}e - \frac{A}{2\lambda}\lambda e \\
&= -B\phi e - Ae = -\operatorname{grad}\lambda + \lambda\nu\xi, \qquad (4.105) \\
(\nabla_{e} h)\phi e &= \nabla_{e} h\phi e - h(\nabla_{e}\phi e) = \nabla_{e}[-\lambda\phi e] - h(\nabla_{e}\phi e) \\
&= -e(\lambda)\phi e - \lambda\nabla_{e}\phi e - h(-\frac{B}{2\lambda}e + (\lambda+1)\xi) \\
&= -A\phi e - \lambda(-\frac{B}{2\lambda}e + (\lambda+1)\xi) - h(-\frac{B}{2\lambda}e + (\lambda+1)\xi) \\
&= -A\phi e + \frac{B}{2}e - \lambda(\lambda+1)\xi + \frac{B}{2\lambda}he \\
&= -A\phi e + \frac{B}{2}e - \lambda(\lambda+1)\xi + \frac{B}{2\lambda}\lambda e \\
&= -A\phi e + Be - \lambda(\lambda+1)\xi = -\phi(\operatorname{grad}\lambda) - \\
&\quad -\lambda(\lambda+1)\xi, \qquad (4.106) \\
(\nabla_{\phi e} h)e &= \nabla_{\phi e} he - h(\nabla_{\phi e}e) = \nabla_{\phi e}\lambda e - h(\nabla_{\phi e}e) \\
&= \phi e(\lambda)e + \lambda\nabla_{\phi e}e - h(-\frac{A}{2\lambda}\phi e + (\lambda-1)\xi) \\
&= Be + \lambda(-\frac{A}{2\lambda}\phi e + (\lambda-1)\xi) + \frac{A}{2\lambda}h\phi e \\
&= Be - \frac{A}{2}\phi e + \lambda(\lambda-1)\xi + \frac{A}{2\lambda}(-\lambda\phi e) \\
&= Be - A\phi e + \lambda(\lambda-1)\xi = -\phi(\operatorname{grad}\lambda) + \\
&\quad +\lambda(\lambda-1)\xi, \qquad (4.107) \\
(\nabla_{\xi} h)e &= \mu h\phi e + \nu he = -\lambda\mu\phi e + \lambda\nu e, \qquad (4.108)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
(\nabla_\xi h)\phi e &= \mu h\phi^2 e + \nu h\phi e = -\mu he - \lambda\nu\phi e \\
&= -\lambda\mu e - \lambda\nu\phi e, \qquad (4.109) \\
(\nabla_e h)(\xi) &= \nabla_e h\xi - h(\nabla_e\xi) = -h(\nabla_e\xi) = -h(-(\lambda+1)\phi e) \\
&= (\lambda+1)h\phi e = -\lambda(\lambda+1)\phi e, \qquad (4.110) \\
(\nabla_{\phi e} h)(\xi) &= \nabla_{\phi e} h\xi - h(\nabla_{\phi e}\xi) = -h(\nabla_{\phi e}\xi) = -h((1-\lambda)e) \\
&= -(1-\lambda)he = (\lambda-1)\lambda e. \qquad (4.111)
\end{aligned}$$

Έστω X, Y διανυσματικά πεδία της M. Στην ανοικτή περιοχή W, αναλύουμε τα πεδία X, Y ως γραμμικούς συνδυασμούς του τοπικού πεδίου πλαισίων $\{e, \phi e, \xi\}$, δηλαδή,

$$X = \alpha e + \beta\phi e + \eta(X)\xi, \quad Y = \gamma e + \delta\phi e + \eta(Y)\xi,$$

όπου $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ διαφορίσιμες συναρτήσεις στην ανοικτή περιοχή W. Αξιοποιώντας τις σχέσεις (4.104)-(4.111), υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
(\nabla_e h)Y &= \gamma(\nabla_e h)e + \delta(\nabla_e h)\phi e + \eta(Y)(\nabla_e h)\xi \\
&= \gamma(Ae + B\phi e) + \delta(-A\phi e + Be - \lambda(\lambda+1)\xi) \\
&\quad +\eta(Y)(-\lambda(\lambda+1)\phi e) \\
&= (A\gamma + B\delta)e + (B\gamma - A\delta - \eta(Y)\lambda(\lambda+1))\phi e \\
&\quad -\delta\lambda(\lambda+1)\xi, \qquad (4.112)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\nabla_{\phi e}h)Y &= \gamma(\nabla_{\phi e}h)e + \delta(\nabla_{\phi e}h)\phi e + \eta(Y)(\nabla_{\phi e}h)\xi \\
&= \gamma(Be - A\phi e + \lambda(\lambda - 1)\xi) + \delta(-B\phi e - Ae) \\
&\quad +\eta(Y)(\lambda - 1)\lambda e \\
&= (B\gamma - A\delta + \eta(Y)\lambda(\lambda - 1))e + (-A\gamma - B\delta)\phi e \\
&\quad +\gamma\lambda(\lambda - 1)\xi, \qquad (4.113) \\
(\nabla_{\xi}h)Y &= \gamma(\nabla_{\xi}h)e + \delta(\nabla_{\xi}h)\phi e + \eta(Y)(\nabla_{\xi}h)\xi \\
&= \gamma(-\lambda\mu\phi e + \lambda\nu e) + \delta(-\lambda\mu e - \lambda\nu\phi e) \\
&= (\lambda\nu\gamma - \lambda\delta\mu)e + (-\lambda\gamma\mu - \lambda\delta\nu)\phi e. \qquad (4.114)
\end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (4.112), (4.113) και (4.114), συνάγουμε

$$\begin{aligned}
(\nabla_X h)Y &= \alpha(\nabla_e h)Y + \beta(\nabla_{\phi e}h)Y + \eta(X)(\nabla_{\xi}h)Y \\
&= \alpha[(A\gamma + B\delta)e + (B\gamma - A\delta - \eta(Y)\lambda(\lambda + 1))\phi e - \delta\lambda(\lambda + 1)\xi] + \\
&\quad +\beta[(B\gamma - A\delta + \eta(Y)\lambda(\lambda - 1))e + (-A\gamma - B\delta)\phi e + \gamma\lambda(\lambda - 1)\xi] \\
&\quad +\eta(X)[(\lambda\nu\gamma - \lambda\delta\mu)e + (-\lambda\gamma\mu - \lambda\delta\nu)\phi e] \\
&= (\alpha\gamma - \beta\delta)[Ae + B\phi e] + (\alpha\delta + \beta\gamma)[Be - A\phi e] \\
&\quad +\eta(Y)[\beta\lambda(\lambda - 1)e - \alpha\lambda(\lambda + 1)\phi e] \\
&\quad +\eta(X)[(\lambda\nu\gamma - \lambda\delta\mu)e + (-\lambda\gamma\mu - \lambda\delta\nu)\phi e] \\
&\quad +[\lambda(\lambda - 1)\beta\gamma - \lambda(\lambda + 1)\alpha\delta]\xi \\
&= (\alpha\gamma - \beta\delta)[grad\lambda - \lambda\nu\xi] - (\alpha\delta + \beta\gamma)\phi(grad\lambda) \\
&\quad +\eta(Y)[\beta\lambda(\lambda - 1)e - \alpha\lambda(\lambda + 1)\phi e] \\
&\quad +\eta(X)[\mu h\phi Y + \nu hY] + [\lambda(\lambda - 1)\beta\gamma - \lambda(\lambda + 1)\alpha\delta]\xi. \qquad (4.115)
\end{aligned}$$

Από την άλλη πλευρά, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.4) και (3.6) καθώς και το γεγονός ότι $\lambda^2 = 1 - \kappa$, εύκολα παίρνουμε

$$\alpha\gamma - \beta\delta = \tfrac{1}{\lambda} g(hX, Y), \quad \alpha\delta + \beta\gamma = -\tfrac{1}{\lambda} g(h\phi X, Y),$$

$$\begin{aligned} \lambda(\lambda-1)\beta\gamma - \lambda(\lambda+1)\alpha\delta &= \lambda^2(\beta\gamma - \alpha\delta) - \lambda(\alpha\delta + \beta\gamma) \\ &= (1-\kappa) g(X, \phi Y) + g(h\phi X, Y), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta\lambda(\lambda-1)e - \alpha\lambda(\lambda+1)\phi e &= \lambda^2(\beta e - \alpha\phi e) - \lambda(\beta e + \alpha\phi e) \\ &= (\kappa-1)\phi X + h\phi X. \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τις τελευταίες σχέσεις στη (4.115), έχουμε

$$\begin{aligned} (\nabla_X h)Y &= \frac{1}{\lambda} g(hX, Y) \operatorname{grad}\lambda + \frac{1}{\lambda} g(hX, \phi Y)\phi(\operatorname{grad}\lambda) \\ &\quad + \eta(Y)[(\kappa-1)\phi X + h\phi X] + \eta(X)[\mu h\phi Y + \nu hY] \\ &\quad + [(1-\kappa)g(X, \phi Y) + g(hX, \phi Y) - \\ &\quad - \nu g(hX, Y)]\xi. \end{aligned} \tag{4.116}$$

Από τη σχέση $\lambda^2 = 1-\kappa$, έχουμε $2\lambda \operatorname{grad}\lambda = -\operatorname{grad}\kappa$ ή, ισοδύναμα, $\frac{1}{\lambda}\operatorname{grad}\lambda = -\frac{1}{2(1-\kappa)}\operatorname{grad}\kappa$. Αντικαθιστώντας την έκφραση $\frac{1}{\lambda}\operatorname{grad}\lambda$ στην (4.116), παίρνουμε την (4.103). Εύκολα συμπεραίνουμε ότι η σχέση (4.103) ισχύει στο ανοικτό σύνολο N. Στη συνέχεια, θεωρούμε το σύνολο $B = M \setminus N$. Αν $B = \varnothing$, τότε η Πρόταση 4.7 έχει αποδειχθεί. Σε αντίθετη περίπτωση, θεωρούμε το εσωτερικό B^o του συνόλου B. Το εσωτερικό B^o είναι ένα ανοικτό υποσύνολο της M και για το λόγο αυτό κληρονομεί τη δομή επαφής (η, ξ, ϕ, g) της M. Ειδικότερα, το εσωτερικό B^o είναι πολλαπλότητα Sasaki και για το λόγο αυτό ικανοποιείται αυτόματα η (4.103)(αφού $h = 0$). Επιπλέον, αξιοποιώντας το γεγονός ότι η ένωση $B^o \cup N$ είναι ένα ανοικτό και πυκνό υποσύνολο της M και ότι τα πεδία που εμφανίζονται στη (4.103) είναι διαφορίσιμα, εύκολα συνάγουμε ότι η σχέση (4.103) ικανοποιείται σε κάθε σημείο της πολλαπλότητας M. □

Παρατήρηση 4.9. Σε περίπτωση που η συνάρτηση ν είναι η μηδενική συνάρτηση, ανάλογη έκφραση για τη συναλλοίωτη παράγωγο του τελεστή h έχει βρεθεί στη Διδακτορική Διατριβή ([79, Πρόταση 3.8 σελ.61]).

4.4 Μερική ταξινόμηση των (κ,μ,ν)-πολλαπλοτήτων επαφής

Στην παράγραφο 4.2 αποδείξαμε ότι οι (κ,μ,ν)-πολλαπλότητες επαφής διάστασης μεγαλύτερης του τρία εκφυλίζονται στις (κ,μ)-πολλαπλότητες επαφής, δηλαδή, οι συναρτήσεις κ,μ είναι σταθερές και η συνάρτηση ν είναι η μηδενική συνάρτηση. Η ταξινόμηση των πολλαπλοτήτων αυτών έχει γίνει από τον E. Boeckx ([17]). Επιπλέον, στη διάσταση τρία κατασκευάσαμε αρκετά παραδείγματα πολλαπλοτήτων επαφής που πληρούν τη συνθήκη καμπυλότητας (4.1). Τίθεται λοιπόν εύλογα το ερώτημα της ταξινόμησης των τρισδιάστατων (κ,μ,ν)-πολλαπλοτήτων επαφής. Στην παράγραφο αυτή δίνουμε μερικές απαντήσεις στο ερώτημα αυτό υποθέτοντας συγχρόνως ότι οι τρισδιάστατες (κ,μ,ν)-πολλαπλότητες επαφής πληρούν κάποια επιπρόσθετες γεωμετρικές συνθήκες.

Είναι γνωστό ότι μια μετρική Riemann g μιας συμπαγούς και προσανατολισμένης πολλαπλότητας M είναι κρίσιμο σημείο του συναρτησοειδούς της βαθμωτής καμπυλότητας $\int_M r v_g$, ορισμένου επί του συνόλου των μετρικών Riemann της πολλαπλότητας M με ίδιο ολικό όγκο, αν και μόνο αν η g είναι μια μετρική Einstein ([5, σελ.120]). Στη συνέχεια, θεωρούμε μια πολλαπλότητα επαφής M^{2n+1} εφοδιασμένη με τη μορφή επαφής η. Έστω ξ το χαρακτηριστικό πεδίο και $\mathcal{A}(\eta)$ το σύνολο των μετρικών Riemann που είναι συσχετισμένες με τη μορφή επαφής η. Κάθε μετρική $g \in \mathcal{A}(\eta)$ έχει το ίδιο στοιχείο όγκου $v_g = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\eta \wedge (d\eta)^n$. Ο Perrone ([62]) απέδειξε ότι μια μετρική $g \in \mathcal{A}(\eta)$ είναι κρίσιμο σημείο του συναρτησοειδούς

$$I(g) = \int_M r v_g, \quad g \in \mathcal{A}(\eta)$$

αν και μόνο αν ικανοποιείται η ακόλουθη συνθήκη:

$$\nabla_\xi \tau = 0. \tag{4.117}$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι το συναρτησοειδές I έχει μελετηθεί από τους Blair και Ledger ([14]) σε πολλαπλότητες επαφής διάστασης μεγαλύτερης του τρία.
Ο Perrone ([63]) απέδειξε ότι σε κάθε πολλαπλότητα επαφής Riemann $[M^{2n+1}, (\eta, \xi, \phi, g)]$ οι παρακάτω συνθήκες είναι ισοδύναμες: $\nabla_\xi h = 0, \nabla_\xi l = 0$, $\nabla_\xi \tau = 0$ και $l\phi = \phi l$. Οι F. Gouli-Andreou και Ph. Xenos μελέτησαν τη συνθήκη (4.117) σε συνδυασμό με άλλες γεωμετρικές συνθήκες ([36], [37], [38], [39]).

Θεώρημα 4.3. *Έστω $[M, (\eta, \xi, \phi, g)]$ μια πλήρης τρισδιάστατη (κ, μ, ν)-πολλαπλότητα επαφής με $\kappa < 1$ οπουδήποτε στην M. Αν η πολλαπλότητα M ικανοποιεί τη συνθήκη (4.117), τότε η συνάρτηση κ είναι σταθερή και η πολλαπλότητα M είναι $(\kappa, 0)$-πολλαπλότητα επαφής. Ειδικότερα, η M είναι τοπικά ισομετρική με μια από τις παρακάτω ομάδες Lie: $SU(2)$ αν $0 < \kappa < 1$, $SL(2, \mathbb{R})$ αν $\kappa < 0$ και $E(2)$ αν $\kappa = 0$, εφοδιασμένες με μια αριστερά αναλλοίωτη μετρική.*

Απόδειξη. Σύμφωνα με την υπόθεση, η πολλαπλότητα M δεν περιέχει σημεία με $\kappa = 1$. Αξιοποιώντας το Θεώρημα 4.1, λαμβάνουμε ότι η M είναι μια H-μετρική πολλαπλότητα επαφής. Συνδυάζοντας το γεγονός ότι η M ικανοποιεί τη συνθήκη (4.117), έχουμε ότι η πολλαπλότητα επαφής M είναι η-Einstein ([62]). Από την άλλη πλευρά, οι Blair, Koufogiorgos και Sharma ([13]) απέδειξαν ότι μια τρισδιάστατη πολλαπλότητα επαφής είναι η-Einstein αν και μόνο αν είναι $(\kappa, 0)$-πολλαπλότητα επαφής. Εύκολα, συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση κ είναι σταθερή και η M είναι μια $(\kappa, 0)$-πολλαπλότητα επαφής. Το υπόλοιπο μέρος του θεωρήματος προκύπτει από την ταξινόμηση των τρισδιάστατων η-Einstein πολλαπλοτήτων επαφής από τους Blair και Chen ([11]). $\square$

Παρατήρηση 4.10. Ο Perrone([69, Θεώρημα 2.3]) ταξινόμησε τις τρισδιάστατες ομογενείς πολλαπλότητες επαφής M που είναι H-μετρικές πολλαπλότητες επαφής και συγχρόνως ικανοποιούν τη συνθήκη (4.117). Από την άλλη πλευρά, οι έννοιες των H-μετρικών πολλαπλοτήτων επαφής και των τρισδιάστατων (κ,μ,ν)-πολλαπλοτήτων επαφής είναι ισοδύναμες σε ένα οπουδήποτε πυκνό και ανοικτό υποσύνολο της M. Το Θεώρημα 4.3 αποτελεί γενίκευση της ταξινόμησης αυτής αν παραλείψουμε την υπόθεση της ομογένειας της πολλαπλότητας επαφής M.

Παρατήρηση 4.11. Οι Blair, Koufogiorgos και Sharma απέδειξαν ότι οι τρισδιάστατες η-Einstein μετρικές πολλαπλότητες επαφής είναι ισοδύναμες με τη συνθήκη ότι ο τελεστής Q και ο ενδομορφισμός ϕ αντιμετατίθενται ($Q\phi = \phi Q$). Ο Blair ([9]) απέδειξε ότι οι πολλαπλότητες επαφής που ικανοποιούν τη συνθήκη $Q\phi = \phi Q$, ικανοποιούν τη συνθήκη (4.117). Επιπλέον, απέδειξε ότι το αντίστροφο δεν ισχύει, κατασκευάζοντας ένα ενδιαφέρον αντιπαράδειγμα.

Στη συνέχεια δίνουμε ένα παράδειγμα μιας συμπαγούς $(\kappa, 0)$-πολλαπλότητας επαφής M της οποίας η συσχετισμένη μετρική g είναι κρίσιμο σημείο του συναρτησιοειδούς I ορισμένου επί του συνόλου $\mathcal{A}(\eta)$. Έστω (M, g) μια διδιάστατη πολλαπλότητα Riemann σταθερής καμπυλότητας Gauss $K = c > -1$. Είναι γνωστό ([12]) ότι η μοναδιαία εφαπτόμενη δέσμη $T_1(M)$ είναι μια (κ, μ)-πολλαπλότητα επαφής με $\kappa = c(2-c)$ και $\mu = -2c$. Εφαρμόζουμε στην $T_1(M)$ ένα D-ομοθετικό μετασχηματισμό με $\alpha = 1 + c$. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (4.15), κατασκευάζουμε μια $(\bar{\kappa}, 0)$-πολλαπλότητα επαφής με $\bar{\kappa} = \frac{4c}{(1+c)^2} < 1$.

Έστω M^{2n+1} μια συμπαγής πολλαπλότητα επαφής M εφοδιασμένη με μια μορφή επαφής η. Ο Tanno ([76]) μελέτησε το συναρτησοειδές

$$F(g) = \frac{1}{2} \int_M \|\tau\|^2 v_g$$

ορισμένου επί του συνόλου $\mathcal{A}(\eta)$. Συγκεκριμένα, απέδειξε ότι η μετρική $g \in \mathcal{A}(\eta)$ είναι κρίσιμο σημείο του συναρτησοειδούς F αν και μόνο αν ικανοποιείται η συνθήκη:

$$\nabla_\xi \tau = 2\tau\phi \tag{4.118}$$

όπου η σύνθεση $\tau\phi(X, Y)$ πρέπει να ερμηνευθεί ως $\tau(\phi X, Y)$ για κάθε $X, Y \in D^1(M)$. Δεδομένου ότι η συνθήκη (4.118) είναι τανυστική, γενικεύεται και σε μη-συμπαγείς πολλαπλότητες επαφής. Στη συνέχεια, ταξινομούμε τις τρισδιάστατες (κ, μ, ν)-πολλαπλότητες επαφής που ικανοποιούν τη συνθήκη (4.118).

Θεώρημα 4.4. *Έστω $[M, (\eta, \xi, \phi, g)]$ μια πλήρης τρισδιάστατη (κ, μ, ν)-πολλαπλότητα επαφής που ικανοποιεί τη συνθήκη $\nabla_\xi \tau = 2\tau\phi$ με $\kappa < 1$ οπουδήποτε στην M. Τότε, η συνάρτηση κ είναι σταθερή και η πολλαπλότητα M είναι μια $(\kappa, 2)$-πολλαπλότητα επαφής. Ειδικότερα, η M είναι τοπικά ισομετρική με τη $SL(2, \mathbb{R})(\kappa \neq 1)$, εφοδιασμένη με μια αριστερά αναλλοίωτη μετρική.*

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας τις (3.1), (3.6), (3.13), (3.14) και (4.118), έχουμε

$$\begin{aligned}(\nabla_\xi \tau)(X,Y) &= 2g(\phi X, (\nabla_\xi h)Y) = 2g((\nabla_\xi h)\phi X, Y) = 2\tau(\phi X, Y)\\ &= 4g(\phi^2 X, hY) = 4g(h\phi^2 X, Y) = -4g(hX,Y)\end{aligned}$$

για κάθε $X, Y \in D^1(M)$. Συνεπώς, έχουμε

$$(\nabla_\xi h)\phi X = -2hX \tag{4.119}$$

για κάθε $X \in D^1(M)$. Από την άλλη πλευρά, αξιοποιώντας τις σχέσεις (3.1), (3.6) και (4.43), παίρνουμε

$$(\nabla_\xi h)\phi X = \mu h\phi^2 X + 2\nu h\phi X = -2\mu hX + 2\nu h\phi X, \tag{4.120}$$

για κάθε $X \in D^1(M)$. Συγκρίνοντας τις (4.119) και (4.120), συνάγουμε ότι

$$(2-\mu)hX + 2\nu h\phi X = 0, \tag{4.121}$$

για κάθε $X \in D^1(M)$. Σύμφωνα με την υπόθεση, η πολλαπλότητα M δεν περιέχει σημεία με $\kappa = 1$. Έστω $p \in M$. Υπάρχει μια ανοικτή γειτονιά W του p και ένα τοπικό πεδίο πλαισίων $\{e, \phi e, \xi\}$ ορισμένο επι του W που ικανοποιεί τις σχέσεις (4.59). Θέτοντας $X = e$ στην (4.121), έχουμε

$$0 = (2-\mu)he + 2\nu h\phi e = \lambda(2-\mu)e - 2\lambda\nu\phi e$$

ή, ισοδύναμα, $\mu = 2$ και $\nu = 0$ στην ανοικτή γειτονιά W. Επειδή η πολλαπλότητα M είναι συνεκτική, έχουμε ότι $\mu = 2$ και $\nu = 0$ σε ολόκληρη την πολλαπλότητα M. Συνεπώς, η πολλαπλότητα M είναι μια γενικευμένη (κ, μ)-πολλαπλότητα επαφής. Επειδή η συνάρτηση μ είναι σταθερή, έπεται ότι και η συνάρτηση κ είναι σταθερή ([49]). Συνοψίζοντας, λαμβάνουμε ότι η πολλαπλότητα M είναι μια $(\kappa, 2)$-πολλαπλότητα επαφής. Το υπόλοιπο μέρος του Θεωρήματος προκύπτει εύκολα από το Θεώρημα 3.2. □

Παρατήρηση 4.12. Έστω (M, g) μια διδιάστατη πολλαπλότητα Riemann σταθερής καμπυλότητας Gauss $K = c = -1$. Τότε η μοναδιαία εφαπτόμενη δέσμη $[T_1(M), (\eta, \xi, \phi, g_S)]$ εφοδιασμένη με τη συνήθη δομή επαφής (η, ξ, ϕ) και με τη μετρική του Sasaki g_S, είναι μια $(\kappa, 2)$-πολλαπλότητα επαφής με $\kappa = -3$ ([12]). Η μετρική g_S είναι κρίσιμο σημείο του συναρτησοειδούς $F(g)$ ορισμένου επί του συνόλου $\mathcal{A}(\eta)$ της πολλαπλότητας επαφής $(T_1(M), \eta)$.

Μια πολλαπλότητα επαφής Riemann $[M, (\eta, \xi, \phi, g)]$ καλείται **ομογενής** (**contact homogeneous**) αν η ομάδα των ισομετριών της M δρα μεταβατικά στην πολλαπλότητα M και αφήνει την μορφή επαφής η αναλλοίωτη. Ειδικότερα, λέγεται **τοπικά ομογενής** (**locally homogeneous**) αν η ψευδο-ομάδα των τοπικών ισομετριών της M δρα μεταβατικά στην πολλαπλότητα M και αφήνει την μορφή επαφής η αναλλοίωτη. Μια πολλαπλότητα Riemann καλείται **σφαιρο-ομογενής**(**ball-homogeneous**) αν ο όγκος επαρκώς μικρών γεωδαισιακών σφαιρών εξαρτάται μόνο από την ακτίνα τους και όχι από το κέντρο τους. Προφανώς, μια ομογενής πολλαπλότητα Riemann είναι και σφαιρο-ομογενής. Το αντίστροφο δεν είναι αληθές. Ενδιαφέρον παρουσιάζει το ερώτημα της εύρεσης αναγκαίων συνθηκών κάτω από τις οποίες η σφαιρο-ομογένεια συνεπάγεται την τοπική ομογένεια. Περισσότερες πληροφορίες για τις ομογενείς πολλαπλότητες Riemann βρίσκονται π.χ. στο βιβλίο [77].

Ο Perrone ([65]) μελέτησε και ταξινόμησε τις τρισδιάστατες ομογενείς πολλαπλότητες επαφής Riemann. Ουσιαστικά, απέδειξε ότι αυτές είναι τοπικά ισομετρικές με ομάδες Lie εφοδιασμένες με μια αριστερά αναλλοίωτη μετρική δομή επαφής (η, ξ, ϕ, g). Οι Calvaruso και Perrone ([23]) απέδειξαν ότι μια τρισδιάστατη πολλαπλότητα επαφής Riemann $[M, (\eta, \xi, \phi, g)]$ είναι τοπικά ομογενής αν και μόνο αν είναι σφαιρο-ομογενής και ικανοποιεί τη συνθήκη

$$\nabla_\xi \tau = 2a\tau\phi, \tag{4.122}$$

με a σταθερά. Οι Koufogiorgos, Markellos και Papantoniou ([48]) ταξινόμησαν τις τρισδιάστατες (κ, μ, ν)-πολλαπλότητες επαφής που ικανοποιούν τη συνθήκη (4.122) με a σταθερά. Εύκολα κανείς μπορεί να αποδείξει το ακόλουθο Θεώρημα:

Θεώρημα 4.5. *Έστω $[M, (\eta, \xi, \phi, g)]$ μια πλήρης τρισδιάστατη (κ, μ, ν)-πολλαπλότητα επαφής που ικανοποιεί τη συνθήκη (4.122) με a σταθερά και $\kappa < 1$ οπουδήποτε στην M. Τότε, η M είναι μια (κ, μ)-πολλαπλότητα επαφής. Συγκεκριμένα, η M είναι τοπικά ισομετρική με μια από τις ακόλουθες ομάδες Lie: $SU(2)$(ή $SO(3)$), $SL(2,\mathbb{R})$(ή $O(1,2)$), $E(2)$(η ομάδα των στερεών κινήσεων του διδιάστατου Ευκλείδιου χώρου), $E(1,1)$(η ομάδα των στερεών κινήσεων του διδιάστατου χώρου του Minkowski), εφοδιασμένες με μια αριστερά αναλλοίωτη μετρική.*

Παρατήρηση 4.13. Ο Boeckx ([16]) απέδειξε ότι οι (κ, μ)-πολλαπλότητες επαφής είναι τοπικά ομογενείς. Ως συνέπεια, έχουμε ότι οι τρισδιάστατες (κ, μ, ν)-πολλαπλότητες επαφής $[M, (\eta, \xi, \phi, g)]$ με $\kappa < 1$ οπουδήποτε στην M που ικανοποιούν τη συνθήκη (4.122) με a σταθερά, είναι τοπικά ομογενείς.

Παρατήρηση 4.14. Στο παράδειγμα 4.1, οι ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή h είναι οι μή σταθερές διαφορίσιμες συναρτήσεις $\frac{2e^G}{zx^2}, -\frac{2e^G}{zx^2}$ και 0. Το γεγονός αυτό υποδηλώνει ότι οι (κ, μ, ν)-πολλαπλότητες επαφής δεν είναι αναγκαστικά τοπικά ομογενείς πολλαπλότητες επαφής Riemann ([65]).

Ένα ενδιαφέρον πρόβλημα που έχει απασχολήσει αρκετούς ερευνητές είναι η ταξινόμηση των ισογώνια επίπεδων πολλαπλοτήτων επαφής. Σε πολλές περιπτώσεις, οι ισογώνια επίπεδες πολλαπλότητες επαφής καταλήγουν να είναι σταθερής καμπυλότητας τομής ([24], [29], [38], [73]). Είναι φυσικό να αναρωτηθεί κανείς αν υπάρχουν ισογώνια επίπεδες πολλαπλότητες επαφής που δεν είναι σταθερής καμπυλότητας τομής. Σε αυτήν την κατεύθυνση, ο Blair ([7, σελ. 108]) κατασκεύασε παραδείγματα τρισδιάστατων ισογώνια επίπεδων πολλαπλοτήτων επαφής που δεν είναι σταθερής καμπυλότητας τομής. Ο Calvaruso ([22]) απέδειξε ότι οι πολλαπλότητες επαφής των παραδειγμάτων του Blair ικανοποιούν τη συνθήκη (4.122), όπου a διαφορίσιμη συνάρτηση σταθερή κατα μήκος των ολοκληρωτικών καμπυλών του χαρακτηριστικού πεδίου ξ. Οι F. Gouli-Andreou, J. Karatsobanis και Ph. Xenos ([40]) μελέτησαν τις ισογώνια επίπεδες πολλαπλότητες επαφής Riemann που, συγχρόνως, ικανοποιούν τη συνθήκη (4.122) με a διαφορίσιμη συνάρτηση. Γενικεύοντας το Θεώρημα 4.5, έχουμε

Θεώρημα 4.6. *Έστω $[M, (\eta, \xi, \phi, g)]$ μια τρισδιάστατη (κ, μ, ν)-πολλαπλότητα επαφής που ικανοποιεί τη συνθήκη (4.122) με a διαφορίσιμη συνάρτηση της M και $\kappa < 1$ οπουδήποτε στην M. Τότε, η M είναι γενικευμένη (κ, μ)-πολλαπλότητα επαφής.*

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας τις (3.1), (3.6), (3.13), (3.14) και (4.122), έχουμε

$$\begin{aligned}(\nabla_\xi \tau)(X, Y) &= 2g(\phi X, (\nabla_\xi h)Y) = 2g((\nabla_\xi h)\phi X, Y) = 2a\tau(\phi X, Y) \\ &= 4ag(\phi^2 X, hY) = 4ag(h\phi^2 X, Y) = -4ag(hX, Y)\end{aligned}$$

για κάθε $X, Y \in D^1(M)$. Συνεπώς, έχουμε

$$(\nabla_\xi h)\phi X = -2ahX \tag{4.123}$$

για κάθε $X \in D^1(M)$. Συγκρίνοντας την (4.123) με την (4.120), εύκολα συνάγουμε ότι

$$(2a - \mu)hX + \nu h\phi X = 0 \tag{4.124}$$

για κάθε $X \in D^1(M)$. Σύμφωνα με την υπόθεση, η πολλαπλότητα M δεν περιέχει σημεία με $\kappa = 1$. Έστω $p \in M$. Τότε το Λήμμα 4.5 εξασφαλίζει την ύπαρξη ανοικτής γειτονιάς W του p και τοπικού πεδίου πλαισίων $\{e, \phi e, \xi\}$ ορισμένου επί της γειτονιάς W που ικανοποιεί τις σχέσεις (4.59). Θέτοντας $X = e$ στην (4.124), έχουμε

$$0 = (2a - \mu)he + 2\nu h\phi e = \lambda(2 - \mu)e - 2\lambda\nu\phi e$$

ή, ισοδύναμα, $\mu = 2a$ και $\nu = 0$ στην ανοικτή γειτονιά W. Επειδή η πολλαπλότητα M είναι συνεκτική, έχουμε ότι $\nu = 0$ σε ολόκληρη την πολλαπλότητα M. Συνεπώς, η πολλαπλότητα M είναι μια γενικευμένη (κ, μ)-πολλαπλότητα επαφής με $\kappa < 1$. □

Στη συνέχεια, κατασκευάζουμε ένα παράδειγμα γενικευμένης (κ, μ)-πολλαπλότητας επαφής που ικανοποιεί τη συνθήκη (4.122) με a διαφορίσιμη συνάρτηση.

Παράδειγμα 4.4. Θεωρούμε την τρισδιάστατη πολλαπλότητα $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z \neq 0\}$ με καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y, z). Τα διανυσματικά πεδία

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad e_2 = -2yz\frac{\partial}{\partial x} + \frac{2x}{z^3}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{z^2}\frac{\partial}{\partial z}, \quad e_3 = \frac{1}{z}\frac{\partial}{\partial y}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητα σε κάθε σημείο της M. Θεωρούμε τη μετρική Riemann, για την οποία τα διανυσματικά πεδία e_1, e_2, e_3 συνιστούν ένα ορθομοναδιαίο πλαίσιο, καθώς και την 1-μορφή η που ορίζεται από τη σχέση $\eta(W) = g(W, e_1)$, για κάθε $W \in D^1(M)$. Ορίζουμε το τανυστικό πεδίο ϕ

τύπου (1,1) από τις σχέσεις

$$\phi e_1 = 0, \quad \phi e_2 = e_3, \quad \phi e_3 = -e_2$$

.

Η πολλαπλότητα M εφοδιασμένη με τη τετράδα (η, e_1, ϕ, g) γίνεται μια γενικευμένη (κ, μ)-πολλαπλότητα επαφής με $\kappa = \frac{z^4-1}{z^4}$ και $\mu = 2(1-\frac{1}{z^2})$([49]). Συγκεκριμένα, για τον τελεστή h έχουμε ότι $he_1 = 0, he_2 = \frac{1}{z^2}e_2$ και $he_3 = -\frac{1}{z^2}e_3$. Συμβολίζουμε με ∇ τη συνοχή Levi-Civita ως πρός τη μετρική Riemann g. Τότε, έχουμε ([49])

$$\begin{array}{lll} \nabla_{e_1}e_1 = 0, & \nabla_{e_2}e_1 = -(1+\frac{1}{z^2})e_3, & \nabla_{e_3}e_1 = (1-\frac{1}{z^2})e_2, \\ \nabla_{e_1}e_2 = (-1+\frac{1}{z^2})e_3, & \nabla_{e_1}e_3 = (1-\frac{1}{z^2})e_2, & \nabla_{e_2}e_2 = 0, \\ \nabla_{e_3}e_3 = \frac{1}{z^3}e_2, & \nabla_{e_2}e_3 = (1+\frac{1}{z^2})e_1, & \nabla_{e_3}e_2 = (-1+\frac{1}{z^2})e_1 - \frac{1}{z^3}e_3. \end{array} \tag{4.125}$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (4.125), εύκολα υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} (\nabla_{e_1}h)e_1 &= \nabla_{e_1}he_1 - h\nabla_{e_1}e_1 = 0, \\ (\nabla_{e_1}h)e_2 &= \nabla_{e_1}he_2 - h\nabla_{e_1}e_2 = \nabla_{e_1}[\frac{1}{z^2}e_2] - (-1+\frac{1}{z^2})he_3 \\ &= \frac{1}{z^2}\nabla_{e_1}e_2 + (-1+\frac{1}{z^2})\frac{1}{z^2}e_3 = (-1+\frac{1}{z^2})\frac{1}{z^2}e_3 + (-1+\frac{1}{z^2})\frac{1}{z^2}e_3 \\ &= \frac{2}{z^2}(-1+\frac{1}{z^2})e_3, \\ (\nabla_{e_1}h)e_3 &= \nabla_{e_1}he_3 - h\nabla_{e_1}e_3 = \nabla_{e_1}[-\frac{1}{z^2}e_3] - (1-\frac{1}{z^2})he_2 \\ &= -\frac{1}{z^2}\nabla_{e_1}e_3 - (1-\frac{1}{z^2})\frac{1}{z^2}e_2 = -(1-\frac{1}{z^2})\frac{1}{z^2}e_2 - (1-\frac{1}{z^2})\frac{1}{z^2}e_2 \\ &= \frac{2}{z^2}(-1+\frac{1}{z^2})e_2. \end{aligned} \tag{4.126}$$

Ανάλογα από τις σχέσεις (3.1) και (3.13), έχουμε

$$\begin{aligned}
\tau\phi(e_1,e_1) &= \tau(\phi e_1,e_1)=0,\\
\tau\phi(e_2,e_2) &= \tau(\phi e_2,e_2)=2g(\phi^2e_2,he_2)=2g(-e_2,he_2)\\
&= 2g(-e_2,\frac{1}{z^2}e_2)=-\frac{2}{z^2},\\
\tau\phi(e_3,e_3) &= \tau(\phi e_3,e_3)=2g(\phi^2e_3,he_3)=2g(-e_3,he_3)\\
&= 2g(-e_3,-\frac{1}{z^2}e_3)=\frac{2}{z^2},\\
\tau\phi(e_2,e_3) &= \tau(\phi e_2,e_3)=2g(\phi^2e_2,he_3)=2g(-e_2,he_3)\\
&= 2g(-e_2,-\frac{1}{z^2}e_3)=0,\\
\tau\phi(e_1,e_2) &= \tau(\phi e_1,e_2)=0,\\
\tau\phi(e_1,e_3) &= \tau(\phi e_1,e_3)=0.
\end{aligned}\tag{4.127}$$

Χρησιμοποιώντας τις (4.126) και (4.127), παίρνουμε

$$\begin{aligned}
(\nabla_{e_1}\tau)(e_1,e_1) &= 2g(\phi e_1,(\nabla_{e_1}h)e_1)=0,\\
(\nabla_{e_1}\tau)(e_2,e_2) &= 2g(\phi e_2,(\nabla_{e_1}h)e_2)=2g(e_3,\frac{2}{z^2}(-1+\frac{1}{z^2})e_3)\\
&= \frac{4}{z^2}(-1+\frac{1}{z^2})=2(1-\frac{1}{z^2})\tau\phi(e_2,e_2),\\
(\nabla_{e_1}\tau)(e_3,e_3) &= 2g(\phi e_3,(\nabla_{e_1}h)e_3)=2g(-e_2,\frac{2}{z^2}(-1+\frac{1}{z^2})e_2)\\
&= \frac{4}{z^2}(1-\frac{1}{z^2})=2(1-\frac{1}{z^2})\tau\phi(e_3,e_3),\\
(\nabla_{e_1}\tau)(e_2,e_3) &= 2g(\phi e_2,(\nabla_{e_1}h)e_3)=2g(e_3,\frac{2}{z^2}(-1+\frac{1}{z^2})e_2)\\
&= 0=2(1-\frac{1}{z^2})\tau\phi(e_2,e_3),\\
(\nabla_{e_1}\tau)(e_1,e_2) &= 2g(\phi e_1,(\nabla_{e_1}h)e_2)=0=2(1-\frac{1}{z^2})\tau\phi(e_1,e_2),\\
(\nabla_{e_1}\tau)(e_1,e_3) &= 2g(\phi e_1,(\nabla_{e_1}h)e_3)=0=2(1-\frac{1}{z^2})\tau\phi(e_1,e_3).
\end{aligned}$$

Θέτοντας $e_1=\xi$ και λαμβάνοντας υπόψιν τη $D^0(M)$- γραμμικότητα των τανυστικών πεδίων ϕ και $\nabla_\xi h$, συναγουμε

$$\nabla_\xi \tau = 2(1 - \frac{1}{z^2})\tau\phi.$$

Πόρισμα 4.3. Έστω $[M, (\eta, \xi, \phi, g)]$ μια τρισδιάστατη (κ, μ, ν)-πολλαπλότητα επαφής με $\kappa < 1$ οπουδήποτε στην M που ικανοποιεί τη συνθήκη (4.122) με a διαφορίσιμη συνάρτηση της M σταθερή κατα μήκος των ολοκληρωτικών καμπυλών του χαρακτηριστικού πεδίου ξ. Τότε, η πολλαπλότητα M είναι γενικευμένη (κ, μ)-πολλαπλότητα επαφής με $\xi(\mu) = 0$.

Παρατήρηση 4.15. Οι Koufogiorgos και Tsichlias ([51]) ταξινόμησαν τοπικά τις γενικευμένες (κ, μ)-πολλαπλότητες επαφής με $\xi(\mu) = 0$. Ειδικότερα, δίνουν τις εκφράσεις της μετρικής δομής επαφής (η, ξ, ϕ, g) και των συναρτήσεων κ και μ σε τοπικά συστήματα συντεταγμένων γύρω από κάθε σημείο της πολλαπλότητας.

Παρατήρηση 4.16. Υποθέτουμε ότι η συνθήκη (4.122) ικανοποιείται σε μια τρισδιάστατη (κ, μ, ν)-πολλαπλότητα επαφής $[M, (\eta, \xi, \phi, g)]$ με $\kappa < 1$ οπουδήποτε στην M. Αξιοποιώντας το Θεώρημα 4.1 και το Θεώρημα 1.1 του [67], εύκολα συνάγουμε ότι το πεδίο $\xi : (M, g) \to (T_1(M), g_S)$ ορίζει αρμονική απεικόνιση, όπου $T_1(M)$ είναι η μοναδιαία εφαπτόμενη δέσμη εφοδιασμένη με τη μετρική του Sasaki g_S.

Παρατήρηση 4.17. Οι J. Kararsobanis και Ph. Xenos ([44]) εισήγαγαν την έννοια των ημί-πολλαπλοτήτων K-επαφής (semi-K-contact-manifold). Η γενικευμένη (κ, μ)-πολλαπλότητα επαφής του Παραδείγματος 4.4 είναι μια ημί-πολλαπλότητα K-επαφής.

Στην παράγραφο 4.2 κατασκευάσαμε παραδείγματα τρισδιάστατων (κ, μ, ν)-πολλαπλοτήτων επαφής με σταθερές τις συναρτήσεις μ και ν. Από τα παραδείγματα αυτά, εύκολα συμπεραίνουμε ότι η σταθερότητα της συνάρτησης μ (αντ. ν) δε συνεπάγεται τη σταθερότητα των συναρτήσεων κ και ν (αντ. κ και μ). Αξίζει να αναφερθεί ότι στην περίπτωση των γενικευμένων (κ, μ)-πολλαπλοτήτων επαφής η σταθερότητα μιας εκ των συναρτήσεων κ, μ συνεπάγεται τη σταθερότητα της άλλης ([49]). Ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση όπου η συνάρτηση κ είναι σταθερή. Συγκεκριμένα, έχουμε

Θεώρημα 4.7. *Κάθε τρισδιάστατη (κ, μ, ν)-πολλαπλότητα επαφής $[M, (\eta, \xi, \phi, g)]$ με τη συνάρτηση κ σταθερή είναι είτε πολλαπλότητα Sasaki($\kappa = 1$) είτε (κ, μ)-πολλαπλότητα επαφής ($\kappa < 1$). Στη δεύτερη περίπτωση, η πολλαπλότητα M είναι τοπικά ισομετρική με μια από τις ακόλουθες ομάδες Lie: $SU(2)$(ή $SO(3)$), $SL(2, \mathbb{R})$(ή $O(1, 2)$), $E(2)$(η ομάδα των στερεών κινήσεων του διδιάστατου Ευκλείδιου χώρου), $E(1, 1)$(η ομάδα των στερεών κινήσεων του διδιάστατου χώρου του Minkowski), εφοδιασμένες με μια αριστερά αναλλοίωτη μετρική.*

Απόδειξη. Αν $\kappa = 1$, χρησιμοποιώντας τη σχέση (4.42), συμπεραίνουμε ότι $h^2 = 0$. Επειδή, ο τελεστής h είναι συμμετρικός, έπεται ότι $h = 0$, οπότε από την (4.1) λαμβάνουμε ότι

$$R(X, Y)\xi = \eta(Y)X - \eta(X)Y,$$

για κάθε $X, Y \in D^1(M)$. Από τη (3.17), έπεται ότι η M είναι πολλαπλότητα Sasaki. Στη συνέχεια, υποθέτουμε ότι $\kappa < 1$. Από τη σχέση (4.44), έπεται ότι $\nu = 0$ οπουδήποτε στην πολλαπλότητα M. Επιπλέον, χρησιμοποιώντας την (4.46), εύκολα συνάγουμε ότι το χαρακτηριστικό πεδίο ξ είναι πεδίο ιδιοδιανυσμάτων του τελεστή Ricci Q που αντιστοιχεί σε σταθερή ιδιοσυνάρτηση. Συνδυάζοντας το κύριο Θεώρημα του [46] και το Θεώρημα 3 του [12], εύκολα προκύπτει το υπόλοιπο μέρος της απόδειξης του Θεωρήματος. □

Αξιοποιώντας το Θεώρημα 4.1 μπορούμε να αναδιατυπώσουμε μερικά γνωστά αποτελέσματα με όρους των (κ, μ, ν)-πολλαπλοτήτων επαφής. Αναφέρουμε, για παράδειγμα, το Θεώρημα 4.1 του [24] σε συνδυασμό με την εργασία [73] και το Πόρισμα 3.2 του [66] (βλέπε, επίσης, [83], [79, Πρόταση 3.24, σελ.111]).

Πρόταση 4.8. *Μια τρισδιάστατη ισογώνια επίπεδη (κ, μ, ν)-πολλαπλότητα επαφής είναι σταθερής καμπυλότητας τομής ίσης με 0 ή 1.*

Πρόταση 4.9. *Έστω $[M, (\eta, \xi, \phi, g)]$ μια τρισδιάστατη (κ, μ, ν)-πολλαπλότητα επαφής. Τότε, η M είναι ασθενώς τοπικά ϕ-συμμετρική αν και μόνο αν είναι σταθερής ϕ-καμπυλότητας τομής.*

Κεφάλαιο 5

Διαρμονικές υποπολλαπλότητες (κ, μ, ν) - πολλαπλοτήτων επαφής

Βασικός στόχος του κεφαλαίου αυτού είναι η μελέτη διαρμονικών υποπολλαπλοτήτων (κ, μ, ν)-πολλαπλοτήτων επαφής. Συγκεκριμένα, αποδείξαμε στο Κεφάλαιο 4 ότι οι (κ, μ, ν)-πολλαπλότητες επαφής διάστασης μεγαλύτερης του τρία εκφυλίζονται στις (κ, μ)-πολλαπλότητες επαφής. Αντιθέτως, στη διάσταση τρία τέτοιες πολλαπλότητες υπάρχουν και έχουν δοθεί σχετικά παραδείγματα. Ειδικότερα, στο Κεφάλαιο αυτό, ταξινομούμε τις διαρμονικές καμπύλες του Legendre και τις αντι-αναλλοίωτες επιφάνειες εμβυθισμένες σε τρισδιάστατες (κ, μ, ν)-πολλαπλότητες επαφής. Για καλύτερη κατανόηση αυτού του κεφαλαίου αναφέρουμε, σύντομα, τι περιέχει η κάθε παράγραφός του.

Στην παράγραφο 5.1 δίνουμε τους ορισμούς των αρμονικών και διαρμονικών απεικονίσεων μεταξύ πολλαπλοτήτων Riemann. Αναφέρουμε τις αντίστοιχες συνθήκες αρμονικότητας και διαρμονικότητας τις οποίες χρησιμοποιούμε ευρύτατα στις υπόλοιπες παραγράφους.

Στην παράγραφο 5.2 ταξινομούμε τις διαρμονικές καμπύλες του Legendre των τρισδιάστατων (κ, μ, ν)-πολλαπλοτήτων επαφής με $\kappa < 1$. Το ενδιαφέρον είναι ότι αυτές οι καμπύλες είναι οι γεωδαισιακές καμπύλες των χώρων αυτών. Παράλληλα, κατασκευάζουμε και παραδείγματα καμπυλών του Legendre που είναι γεωδαισιακές και ταυτόχρονα εμβυθισμένες σε τρισδιάστατες (κ, μ, ν)-πολλαπλότητες επαφής.

Στην παράγραφο 5.3 μελετούμε διαρμονικές αντι-αναλλοίωτες επιφάνειες τρισδιάστατων (κ, μ, ν)-πολλαπλοτήτων επαφής με $\kappa < 1$. Συγκεκριμένα, δημιουργούμε τις αντίστοιχες συνθήκες διαρμονικότητας οι οποίες εμπλέκουν έξι μεταβλητές, μεταξύ αυτών και τη βαθμωτή καμπυλότητα του ολικού χώρου. Ειδικότερα, αποδεικνύουμε ότι διαρμονικές αντι-αναλλοίωτες επιφάνειες σταθερής μέσης καμπυλότητας εμβυθισμένες σε τρισδιάστατες γενικευμένες (κ, μ)-πολλαπλότητες επαφής είναι τοπικά επίπεδες. Επιπλέον, κατασκευάζουμε παραδείγματα αντι-αναλλοίωτων επιφανειών σταθερής μέσης καμπυλότητας εμβυθισμένων σε τέτοιους χώρους.

5.1 Διαρμονικές απεικονίσεις

Έστω (M^m, g), (N^n, h) πολλαπλότητες Riemann και $\varphi : (M^m, g) \to (N^n, h)$ μια διαφορίσιμη απεικόνιση μεταξύ αυτών. Η **πυκνότητα ενέργειας** (**energy density**) της φ είναι η απεικόνιση $e(\phi) : M \mapsto [0, \infty)$ που ορίζεται ως εξής:

$$e(\phi)(x) = \frac{1}{2}\|d\phi_x\|^2 = \sum_{i=1}^{m} h(d\phi_x(e_i), d\phi_x(e_i)),$$

όπου $x \in M$, $\{e_i\}$ μια ορθοκανονική βάση του εφαπτόμενου χώρου $T_x(M)$ και $d\phi_x$ το διαφορικό της συνάρτησης ϕ στο σημείο x. Επιπλέον, δηλώνουμε με

$C^\infty(M,N)$ το σύνολο των διαφορίσιμων απεικονίσεων από την πολλαπλότητα M στην πολλαπλότητα N που δέχονται διαφορικά οιασδήποτε τάξης, με ∇^φ τη συνοχή της διανυσματικής δέσμης $\varphi^{-1}TN$ που εισάγεται από τη σύνδεση Levi-Civita $\bar{\nabla}$ της (N,h) και τη σύνδεση Levi-Civita ∇ της (M,g).

Έστω D μια συμπαγής περιοχή της πολλαπλότητας M. Το **ολοκλήρωμα της ενέργειας** (**energy integral**) $E_1(\varphi;D)$ της φ επί της περιοχής D ορίζεται ως το ολοκλήρωμα της πυκνότητας ενέργειας της φ, δηλαδή

$$E_1(\varphi;D)=\frac{1}{2}\int_D \|d\varphi\|^2 v_g=\int_D e(\varphi)v_g.$$

όπου με v_g συμβολίζουμε το στοιχείο όγκου. Αν η πολλαπλότητα M είναι συμπαγής, γράφουμε $E(\varphi)$ αντί για $E_1(\varphi;D)$.

Μια διαφορίσιμη απεικόνιση $\varphi: M\mapsto N$ καλείται **αρμονική** (**harmonic**) αν είναι κρίσιμο σημείο του συναρτησοειδούς της ενέργειας $E(\cdot;D): C^\infty(M,N)\to\mathbb{R}$ για κάθε συμπαγή περιοχή D. Είναι γνωστό ([4], [81]) ότι η διαφορίσιμη απεικόνιση $\varphi: M\to N$ είναι αρμονική αν και μόνο αν

$$\tau_1(\varphi)=\mathrm{tr}(\nabla d\varphi)=\sum_{i=1}^{m}\{\nabla^\varphi_{e_i}d\phi(e_i)-d\varphi(\nabla_{e_i}e_i)\}=0, \tag{5.1}$$

όπου $\{e_i\}$ μια τοπική ορθοκανονική βάση της πολλαπλότητας M. Η τομή $\tau_1(\varphi)$ της διανυσματικής δέσμης $\varphi^{-1}TN$ καλείται **πεδίο έντασης** (**tension field**) της φ. Η εξίσωση $\tau_1(\phi)=0$ καλείται **αρμονική εξίσωση** και σε τοπικές συντεταγμένες $\{x^i\}_{i=1}^m$ της M και $\{u^a\}_{a=1}^n$ της N παίρνει την ακόλουθη τοπική έκφραση

$$\tau_1(\varphi)=(-\Delta\varphi^a+g^{ij}\ {}^N\Gamma^a_{\beta\gamma}\frac{\partial\varphi^\beta}{\partial x^i}\frac{\partial\varphi^\gamma}{\partial x^j})\frac{\partial}{\partial u^a}=0,$$

όπου ${}^N\Gamma^a_{\beta\gamma}$ είναι τα σύμβολα Christoffel της (N,h), $\varphi^a=u^a\circ\varphi$, (g^{ij}) ο αντίστροφος του μετρικού τανυστή g και Δ ο τελεστής Laplace-Beltrami της (M,g).

Οι Eells και Sampson ([33]) εισήγαγαν την έννοια των πολυαρμονικών απεικονίσεων. Στο κεφάλαιο αυτό, ασχολούμαστε ιδιαίτερα με πολυαρμονικές απεικονίσεις τάξης δύο. Οι απεικονίσεις αυτές καλούνται διαρμονικές απεικονίσεις.

Μια διαφορίσιμη απεικόνιση $\varphi : (M^m, g) \to (N^n, h)$ καλείται **διαρμονική** (**biharmonic**) αν είναι κρίσιμο σημείο του συναρτησοειδούς της ενέργειας δεύτερης τάξης

$$E_2(\varphi) = \frac{1}{2}\int_D \|\tau_1(\varphi)\|^2 v_g,$$

ορισμένου επι οποιασδήποτε συμπαγούς περιοχής D της M. Η διαρμονική εξίσωση που είναι η αντίστοιχη εξίσωση Euler-Lagrange για το συναρτησοειδές E_2 έχει βρεθεί από τον Jiang ([43]) και είναι η ακόλουθη:

$$\tau_2(\varphi) = -\mathcal{J}_\varphi(\tau_1(\varphi)) = 0. \tag{5.2}$$

Η τομή $\tau_2(\varphi)$ της διανυσματικής δέσμης $\varphi^{-1}TN$ καλείται **πεδίο έντασης δεύτερης τάξης**(**bitension field**) της φ. Ο τελεστής $\mathcal{J}_\varphi$ καλείται τελεστής του Jacobi και ορίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_\varphi(V) &= \bar{\Delta}_\varphi V - \mathcal{R}_\varphi(V), \qquad V \in \Gamma(\varphi^{-1}TN),\\
\bar{\Delta}_\varphi V &= -\sum_{i=1}^{m}\{\nabla^\phi_{e_i}\nabla^\varphi_{e_i}V - \nabla^\varphi_{\nabla_{e_i}e_i}V\},\\
\mathcal{R}_\varphi(V) &= \sum_{i=1}^{m} R^N(V, d\varphi(e_i))d\varphi(e_i),
\end{aligned} \tag{5.3}$$

όπου με $\Gamma(\varphi^{-1}TN)$ δηλώνουμε το σύνολο των τομών της διανυσματικής δέσμης $\varphi^{-1}TN$ και με R^N τον τανυστή καμπυλότητας της N. Οι μη αρμονικές διαρμονικές απεικονίσεις καλούνται **γνήσια** (**proper**) διαρμονικές απεικονίσεις. Από μια άλλη οπτική γωνία, ο B.Y.Chen ([26]) όρισε τις διαρμονικές υποπολλαπλότητες του Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^n$ ως εκείνες που έχουν αρμονικό διανυσματικό πεδίο μέσης καμπυλότητας $\mathbb{H}$, δηλαδή, $\Delta\mathbb{H} = 0$, όπου Δ είναι η ψευδο-Λαπλασιανή που δρα σε διανυσματικά πεδία. Σύμφωνα με τη σχέση (5.2), ο ορισμός κατά Chen συμβαδίζει με τον ορισμό της διαρμονικής εμβύθισης μιας πολλαπλότητας Riemann σε Ευκλείδειο χώρο. Για το λόγο αυτό, οι διαρμονικές εμβυθίσεις σε Ευκλείδειους χώρους μπορούν να θεωρηθούν ως γενικεύσεις των διαρμονικών υποπολλαπλοτήτων κατά Chen. Περισσότερες πληροφορίες γύρω από τη θεωρία των διαρμονικών απεικονίσεων παραπέμπουμε στην εργασία ([55]).

Οι Caddeo, Montaldo και Oniciuc ([20]) ταξινόμησαν τις διαρμονικές καμπύλες και επιφάνειες της τρισδιάστατης σφαίρας S^3. Συγκεκριμένα, απέδειξαν ότι είναι κύκλοι ακτίνας $\frac{1}{\sqrt{2}}$, γεωδαισιακές της σπείρας του Clifford και τμήματα της σφαίρας $S^2(\frac{1}{\sqrt{2}})$. Οι ίδιοι συγγραφείς ([21]) κατασκεύασαν παραδείγματα γνησίων διαρμονικών υποπολλαπλοτήτων της n-διάστατης σφαίρας $S^n, n > 1$. Στην περίπτωση αυτή, η κλάση των γνήσια διαρμονικών υποπολλαπλοτήτων της S^n είναι αρκετά πλούσια και οι ίδιοι συγγραφείς δεν έδωσαν ολική ταξινόμηση.

Από την άλλη πλευρά, οι περιττής διάστασης σφαίρες είναι κλασσικά παραδείγματα μετρικών πολλαπλοτήτων επαφής. Στην πραγματικότητα, είναι πολλαπλότητες Sasaki σταθερής ϕ-καμπυλότητας τομής ίσης με 1. Ο Inoguchi ([42]) ταξινόμησε τις διαρμονικές καμπύλες και τους κυλίνδρους του Hopf των τρισδιάστατων πολλαπλοτήτων Sasaki, σταθερής ϕ-καμπυλότητας τομής (Sasakian space forms). Συγκεκριμένα, απέδειξε ότι δεν υπάρχουν ούτε γνήσιες διαρμονικές καμπύλες του Legendre ούτε γνήσιοι διαρμονικοί κύλινδροι του Hopf εμβυθισμένοι σε τρισδιάστατες πολλαπλότητες Sasaki, σταθερής ϕ-καμπυλότητας τομής $c \leq 1$. Αντιθέτως, υπάρχουν τέτοιες υποπολλαπλότητες στην περίπτωση που $c > 1$. Οι Caddeo, Oniciuc και Piu([19]) απέδειξαν ότι μια γνήσια διαρμονική καμπύλη εμβυθισμένη στην ομάδα Lie του Heisenberg H_3 είναι έλικα και έδωσαν παραμετρικές σχέσεις που τις ορίζουν. Οι Cho, Inoguchi και Lee ([30]) μελέτησαν διαρμονικές καμπύλες σε τρισδιάστατες ομογενείς πολλαπλότητες επαφής Riemann. Οι Arslan, Ezentas, Murathan και Sasahara ([2]) ταξινόμησαν τρισδιάστατες γνήσια διαρμονικές αντι-αναλλοίωτες υποπολλαπλότητες εμβυθισμένες σε πολλαπλότητες Sasaki σταθερής ϕ-καμπυλότητας τομής διάστασης πέντε.

Μια ενδιαφέρουσα γενίκευση των πολλαπλοτήτων Sasaki είναι οι (κ, μ)-πολλαπλότητες επαφής. Οι Arslan, Ezentas, Murathan και Sasahara ([1]) απέδειξαν ότι οι γνήσια διαρμονικές καμπύλες σε αυτούς τους χώρους είναι καμπύλες σταθερής γεωδαισιακής καμπυλότητας και σταθερής γεωδαισιακής στρέψης. Επιπλέον, οι αντι-αναλλοίωτες επιφάνειες σε αυτούς τους χώρους είναι διαρμονικές αν και μόνο αν είναι σταθερής μέσης καμπυλότητας. Ειδικότερα, στην περίπτωση αυτή έχουμε ότι $\kappa = 1$ και ο περιβάλλων χώρος είναι πολλαπλότητα Sasaki. Γενικεύοντας την εργασία αυτή, μελετούμε διαρμονικές καμπύλες του Legendre και αντί-αναλλοίωτες επιφάνειες εμβυθισμένες σε τρισδιάστατες (κ, μ, ν)-πολλαπλότητες επαφής.

5.2 Διαρμονικές καμπύλες του Legendre

Έστω $[M, (\eta, \xi, \phi, g)]$ μια τρισδιάστατη (κ, μ, ν)-πολλαπλότητα επαφής με $\kappa < 1$ οπουδήποτε στην M και $\gamma : I \subset \mathbb{R} \mapsto M$ μια καμπύλη του Legendre της M παραμετρικοποιημένη με το μήκος τόξου της. Τότε, το διανυσματικό πεδίο $\gamma' = d\gamma(\frac{d}{ds})$ που είναι εφαπτόμενο στην καμπύλη γ είναι κάθετο στο ξ, δηλαδή $\eta(\gamma') = 0$. Συνεπώς, μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα πεδίο πλαισίων Frenet, $F = (T, N, B)$, έτσι ώστε $T = \gamma'$ και $B = \xi$ ([10]). Στην περίπτωση αυτή, οι τύποι Frenet-Sherret για την καμπύλη γ δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_g & 0 \\ -k_g & 0 & \tau_g \\ 0 & -\tau_g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}, \tag{5.4}$$

όπου με k_g (αντ. τ_g) δηλώνουμε τη **γεωδαισιακή καμπυλότητα** (αντ. **γεωδαισιακή στρέψη**) της γ. Αξίζει να αναφέρουμε ότι κάθε καμπύλη του Legendre σε μια τρισδιάστατη πολλαπλότητα Sasaki είναι σταθερής γεωδαισιακής στρέψης ίσης με 1 ([10]).

Μια καμπύλη σταθερής γεωδαισιακής καμπυλότητας και σταθερής γεωδαισιακής στρέψης καλείται **έλικα** (**helix**). Ειδικότερα, καμπύλες με σταθερή μη μηδενική γεωδαισιακή καμπυλότητα και μηδενική γεωδαισιακή στρέψη καλούνται **κύκλοι του Riemann** (**Riemannian circles**). Στην ακόλουθη Πρόταση χαρακτηρίζουμε τις διαρμονικές καμπύλες του Legendre που είναι εμβυθισμένες σε τρισδιάστατες (κ, μ, ν)-πολλαπλότητες επαφής.

Πρόταση 5.10. *Έστω $\gamma : I \mapsto M$ μια μη-γεωδαισιακή καμπύλη του Legendre σε μια τρισδιάστατη (κ, μ, ν)-πολλαπλότητα επαφής $[M, (\eta, \xi, \phi, g)]$ με $\kappa < 1$ οπουδήποτε στην M. Τότε, η γ είναι διαρμονική καμπύλη αν και μόνο αν είναι μια έλικα που ικανοποιεί τη συνθήκη $k_g^2 + \tau_g^2 = H$, όπου H είναι η ϕ-καμπυλότητα τομής περιορισμένη στην καμπύλη γ. Επιπλέον, η ϕ-καμπυλότητα τομής H είναι σταθερή κατά μήκος της καμπύλης του Legendre γ.*

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (5.4), έχουμε

$$\begin{aligned} \tau_1(\gamma) &= \nabla^{\gamma}_{\frac{d}{ds}} d\gamma(\frac{d}{ds}) \\ &= \nabla_T T = k_g N. \end{aligned}$$

Επιπλέον, με απευθείας υπολογισμούς, παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\nabla_T(k_gN) &= k_g^{'}N + k_g\nabla_TN = k_g^{'}N + k_g(-k_gT + \tau_gB) \\
&= -k_g^2T + k_g^{'}N + k_g\tau_gB, \\
\nabla_T\nabla_T(k_gN) &= \nabla_T[-k_g^2T + k_g^{'}N + k_g\tau_gB] = -2k_gk_g^{'}T - k_g^2\nabla_TT \\
&\quad +k_g^{''}N + k_g^{'}\nabla_TN + k_g^{'}\tau_gB + k_g\tau_g^{'}B + k_g\tau_g\nabla_TB \\
&= -2k_gk_g^{'}T - k_g^3N + k_g^{''}N + k_g^{'}(-k_gT + \tau_gB) + k_g^{'}\tau_gB \\
&\quad +k_g\tau_g^{'}B - k_g\tau_g^2N \\
&= -3k_gk_g^{'}T + (k_g^{''} - k_g^3 - k_g\tau_g^2)N + (2k_g^{'}\tau_g + k_g\tau_g^{'})B.
\end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τις τελευταίες σχέσεις και τον ορισμό της ψευδο-Λαπλασιανής $\bar{\Delta}$, συνάγουμε ότι

$$\begin{aligned}
-\bar{\Delta}_\gamma(\tau_1(\gamma)) &= \nabla^\gamma_{\frac{d}{ds}}\nabla^\gamma_{\frac{d}{ds}}(k_gN) \\
&= \nabla_T\nabla_T(k_gN) = -3k_gk_g^{'}T + (k_g^{''} - k_g^3 - k_g\tau_g^2)N + \\
&\quad +(2k_g^{'}\tau_g + k_g\tau_g^{'})B. \qquad (5.5)
\end{aligned}$$

Από την άλλη πλευρά, αναλύοντας το διανυσματικό πεδίο N ως προς το πεδίο πλαισίων $\{T, \phi T, \xi\}$ κατά μήκος της γ, παίρνουμε

$$N = g(N, \phi T)\phi T.$$

Από τη στιγμή που τα διανυσματικά πεδία N και ϕT είναι μοναδιαία, μπορούμε να επιλέξουμε $N = \phi T$. Αξιοποιώντας τις σχέσεις (3.4) και (3.6), αναλύουμε τα διανυσματικά πεδία $h\phi T$ και $\phi h\phi T$ ως πρός το πεδίο πλαισίων $\{T, \phi T, \xi\}$ κατά μήκος της γ ως εξής:

$$h\phi T = g(h\phi T, T)T + g(h\phi T, \phi T)\phi T, \qquad (5.6)$$

$$\phi h\phi T = g(\phi h\phi T, T)T + g(\phi h\phi T, \phi T)\phi T. \qquad (5.7)$$

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τις (3.1), (3.2), (3.4), (3.6), (4.69), (4.101), (5.6) και (5.7), έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_\gamma(\tau_1(\gamma)) &= R(k_gN,T)T = k_gR(\phi T,T)T \\
&= k_g\{\mu[g(hT,T)\phi T - g(h\phi T,T)T + g(T,T)h\phi T - g(\phi T,T)hT] \\
&\quad +\nu[g(\phi hT,T)\phi T - g(\phi h\phi T,T)T + g(T,T)\phi h\phi T - g(\phi T,T)\phi hT] \\
&\quad +(3\kappa - \frac{r}{2})[g(T,T)\eta(\phi T) - g(\phi T,T)\eta(T)]\xi + (3\kappa - \frac{r}{2})[\eta(T)\eta(T)\phi T \\
&\quad -\eta(\phi T)\eta(T)T] + (\frac{r}{2} - 2\kappa)[g(T,T)\phi T - g(\phi T,T)T]\} \\
&= k_g\{\mu[g(hT,T)\phi T + g(h\phi T,\phi T)\phi T] + \nu[g(\phi hT,T)\phi T + \\
&\quad +g(\phi h\phi T,\phi T)\phi T] + (\frac{r}{2} - 2\kappa)\phi T\} \\
&= k_g\{\mu[g(hT,T)\phi T - g(hT,T)\phi T] + \nu[g(\phi hT,T)\phi T + \\
&\quad +g(h\phi T,T)\phi T] + (\frac{r}{2} - 2\kappa)\phi T\} \\
&= k_g(\frac{r}{2} - 2\kappa)\phi T = k_gH\phi T = k_gHN,
\end{aligned}$$

όπου η βαθμωτή καμπυλότητα r και η ϕ-καμπυλότητα τομής H είναι περιορισμένες στην καμπύλη γ. Συνδυάζοντας τη σχέση (5.5) και την τελευταία σχέση, ο τελεστής Jacobi της γ δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_\gamma(\tau_1(\gamma)) &= \bar{\Delta}_\gamma(\tau_1(\gamma)) - \mathcal{R}_\gamma(\tau_1(\gamma)) \\
&= 3k_gk_g^{'}T - (k_g^{''} - k_g^3 - k_g\tau_g^2 + k_gH)N - \\
&\quad -(2k_g^{'}\tau_g + k_g\tau_g^{'})B. \qquad (5.8)
\end{aligned}$$

Αφού η καμπύλη γ είναι διαρμονική, θα είναι $\mathcal{J}_\gamma(\tau_1(\gamma)) = 0$, επομένως, η σχέση

(5.8) δίνει

$$\begin{aligned} k_g k_g' &= 0, \\ 2k_g'\tau_g + k_g\tau_g' &= 0, \\ k_g'' - k_g^3 - k_g\tau_g^2 + k_g H &= 0. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Υποθέτοντας ότι η καμπύλη γ δεν είναι γεωδαισιακή, οι δυο πρώτες σχέσεις της (5.9) δίνουν ότι η γεωδαισιακή καμπυλότητα k_g και η γεωδαισιακή στρέψη τ_g είναι σταθερές κατά μήκος της καμπύλης γ, δηλαδή, η καμπύλη γ είναι έλικα. Επιπλέον, η τρίτη σχέση της (5.9) δίνει $k_g^2+\tau_g^2 = H$ το οποίο συνεπάγεται ότι η ϕ-καμπυλότητας τομής H είναι σταθερή κατά μήκος της καμπύλης γ. Αντιστρόφως, υποθέτουμε ότι η γεωδαισιακή καμπυλότητα k_g και η γεωδαισιακή στρέψη τ_g μιας καμπύλης γ του Legendre είναι σταθερές, και ότι μεταξύ αυτών υφίσταται η σχέση $k_g^2 + \tau_g^2 = H$, όπου H είναι η ϕ-καμπυλότητα τομής της πολλαπλότητας M, περιορισμένη στην καμπύλη γ. Τότε, είναι φανερό ότι ικανοποιούνται οι σχέσεις (5.9) και κατά συνέπεια η καμπύλη γ είναι διαρμονική. □

Παρατήρηση 5.18. Στην περίπτωση που η $[M,(\eta,\xi,\phi,g)]$ είναι πολλαπλότητα Sasaki σταθερής ϕ-καμπυλότητας τομής, οι εξισώσεις (5.9) έχουν αποδειχθεί από τον Inoguchi([42]).

Ακολούθως, αποδεικνύουμε το ακόλουθο Θεώρημα:

Θεώρημα 5.1. *Έστω γ μια καμπύλη του Legendre σε μια τρισδιάστατη (κ,μ,ν)-πολλαπλότητα επαφής $[M,(\eta,\xi,\phi,g)]$ με $\kappa < 1$ οπουδήποτε στην M. Τότε, η γ είναι διαρμονική αν και μόνο αν είναι γεωδαισιακή της M.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η καμπύλη του Legendre γ είναι μια γνήσια διαρμονική καμπύλη, δηλαδή, μη γεωδαισιακή καμπύλη της πολλαπλότητας M. Τότε, σύμφωνα με την Πρόταση 5.10, η καμπύλη γ είναι μια έλικα. Συνδυάζοντας τη σχέση (3.7), τις εξισώσεις Frenet-Serret και αξιοποιώντας το γεγονός ότι η γ είναι έλικα, έχουμε

$$\begin{aligned} B^{'} = \nabla_T \xi &= -\phi T - \phi h T \\ &= -\phi T - \phi[g(hT,T)T + g(hT,\phi T)\phi T] \\ &= -(1+g(hT,T))\phi T + g(hT,\phi T)T = -\tau_g \phi T, \end{aligned}$$

απ' όπου εύκολα συνάγουμε ότι $g(hT,\phi T) = 0$ και η έκφραση $1 + g(hT,T)$ είναι σταθερή κατά μήκος της γ. Στη συνέχεια, θεωρούμε ένα τυχόν σημείο p της καμπύλης γ. Επειδή $\kappa(p) < 1$, σύμφωνα με το Λήμμα 4.5 υπάρχει μια ανοικτή γειτονιά W του p και ένα τοπικό πεδίο πλαισίων $\{e, \phi e, \xi\}$ ορισμένο επί της W, το οποίο ικανοποιεί τις σχέσεις (4.59). Ακολούθως, θεωρούμε το τόξο Q της καμπύλης γ που κείται στο ανοικτό σύνολο W. Αφού η καμπύλη γ είναι καμπύλη του Legendre, το πεδίο T είναι κάθετο στο διανυσματικό πεδίο του Reeb ξ. Στη συνέχεια, αναλύουμε το πεδίο T ως πρός το πεδίο πλαισίων $\{e, \phi e, \xi\}$, δηλαδή,

$$T = \alpha e + \beta \phi e, \tag{5.10}$$

όπου α και β είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις στο Q. Συνδυάζοντας την παραπάνω ανάλυση και τις σχέσεις (4.59), έχουμε

$$hT = \alpha\lambda e - \beta\lambda\phi e, \quad \phi T = \alpha\phi e - \beta e.$$

Χρησιμοποιώντας την (3.1) και τις δύο τελευταίες σχέσεις, παίρνουμε

$$0 = g(hT, \phi T) = -2\lambda\alpha\beta$$

απ′ όπου εύκολα συνάγουμε ότι $\alpha = 0$ ή $\beta = 0$ στο Q. Υποθέτουμε ότι $\alpha = 0$ και δεδομένου ότι η καμπύλη γ είναι μοναδιαίας ταχύτητας, εύκολα, καταλήγουμε ότι $\beta = \pm 1$ στο Q. Χάριν ευκολίας, υποθέτουμε ότι $\beta = 1$ στο Q και, συνεπώς, $T = \phi e$. Χρησιμοποιώντας τις (3.1), (4.77) και (5.4), έχουμε

$$\begin{aligned}\nabla_T \phi T &= -\nabla_{\phi e} e \\ &= \frac{A}{2\lambda}\phi e - (\lambda - 1)\xi = -k_g T + \tau_g \xi,\end{aligned}$$

ή, ισοδύναμα, $\lambda = 1 - \tau_g$ και $\frac{A}{2\lambda} = -k_g$. Αφού η γεωδαισιακή καμπυλότητα k_g και η στρέψη τ_g είναι σταθερές κατά μήκος της καμπύλης γ, έπεται ότι και η συνάρτηση λ είναι σταθερή στο Q και επομένως $A = e(\lambda) = 0$. Στην περίπτωση αυτή, οι σχέσεις (4.76), δίνουν

$$\nabla_T T = \nabla_{\phi e} \phi e = \frac{A}{2\lambda} e = 0,$$

και, συνεπώς, η καμπύλη γ είναι γεωδαισιακή το οποίο είναι άτοπο. Με ανάλογο τρόπο, εργαζόμαστε και στην περίπτωση που είναι $\beta = 0$. Το αντίστροφο του Θεωρήματος είναι προφανές, αφού κάθε γεωδαισιακή καμπύλη είναι και διαρμονική καμπύλη. □

Παρατήρηση 5.19. Ο Dimitric ([32]) απέδειξε ότι οι μόνες διαρμονικές καμπύλες του τρισδιάστατου Ευκλείδειου χώρου E^3 (εφοδιασμένου με την ευκλείδεια μετρική) είναι οι ευθείες γραμμές, οι οποίες είναι γεωδαισιακές του E^3. Οι Caddeo, Montaldo και Oniciuc ([20]) απέδειξαν τη μη ύπαρξη γνήσια διαρμονικών καμπυλών του τρισδιάστατου υπερβολικού χώρου H^3. Το Θεώρημα 5.1 υποδηλώνει ότι τα παραπάνω αποτελέσματα ισχύουν, ακόμη και στην περίπτωση που οι παραπάνω χώροι αντικατασταθούν με τις (κ, μ, ν)-πολλαπλότητες επαφής, που δεν είναι χώροι σταθερής καμπυλότητας (εργαζόμενοι στη κλάση των καμπυλών του Legendre). Αξίζει να αναφέρουμε ότι οι Chen και Ishikawa ([27]) κατασκεύασαν γνήσια διαρμονικές καμπύλες εμβυθισμένες στους ψευδο-Ευκλεί-δειους χώρους $E^3_s(s = 0, 1, 2)$.

Στο επόμενο Θεώρημα συνδέουμε την αρμονικότητα του πεδίου ξ με γεωμετρικές ιδιότητες των καμπυλών του Legendre. Συγκεκριμένα, έχουμε

Θεώρημα 5.2. *Έστω $[M, (\eta, \xi, \phi, g)]$ μια τρισδιάστατη (κ, μ, ν)-πολλαπλότητα επαφής με $\kappa < 1$ οπουδήποτε στην M. Αν η ϕ-καμπυλότητα τομής H είναι σταθερή κατά μήκος οποιασδήποτε καμπύλης του Legendre, τότε το χαρακτηριστικό πεδίο ξ ορίζει αρμονική απεικόνιση $(\xi : (M, g) \mapsto (T_1M, g_S))$, όπου $T_1(M)$ είναι η μοναδιαία εφαπτόμενη δέσμη, εφοδιασμένη με τη μετρική του Sasaki g_S. Αν επιπλέον υποθέσουμε ότι η πολλαπλότητα M είναι πλήρης και η συνάρτηση μ είναι σταθερή στην M, τότε η M είναι τοπικά ισομετρική με μια από τις παρακάτω ομάδες Lie, εφοδιασμένες με μια αριστερά αναλλοίωτη μετρική: $SU(2)$ (ή $SO(3)$), $SL(2,\mathbb{R})$ (ή $O(1,2)$), $E(2)$, $E(1,1)$.*

Απόδειξη. Έστω $p \in M$. Τότε, δοθέντος ενός εφαπτόμενου διανύσματος X_p στο p κάθετου στο ξ, υπάρχει μια καμπύλη του Legendre γ που διέρχεται από το p και εφάπτεται του X_p στο σημείο p ([72]). Από την υπόθεση, η ϕ-καμπυλότητα τομής H είναι σταθερή κατά μήκος της γ. Χρησιμοποιώντας την (4.95) και δεδομένου ότι $\kappa(p) < 1$, $\forall p \in M$ έπεται ότι η συνάρτηση ν μηδενίζεται κατά μήκος της καμπύλης γ και κατ΄ επέκταση έχουμε $\nu(p) = 0$. Επειδή το σημείο p είναι αυθαίρετο, έχουμε ότι η συνάρτηση ν μηδενίζεται σ'ολην την πολλαπλότητα, δηλαδή, η πολλαπλότητα M είναι μια γενικευμένη (κ, μ)-πολλαπλότητα επαφής. Επειδή η M είναι μια γενικευμένη (κ, μ)-πολλαπλότητα επαφής, το Θεώρημα 1.1 του [67] υποδηλώνει ότι το πεδίο ξ ορίζει αρμονική απεικόνιση. Αν επιπλέον υποθέσουμε ότι η συνάρτηση μ είναι σταθερή, τότε το Θεώρημα 3.6 του [49] υποδηλώνει ότι και η συνάρτηση κ είναι σταθερή, δηλαδή, η M είναι μια (κ, μ)-πολλαπλότητα επαφής. Στη συνέχεια, εφαρμόζοντας το Θεώρημα 3.2 έπεται εύκολα το υπόλοιπο μέρος του Θεωρήματος. □

Παρατήρηση 5.20. Χρησιμοποιώντας τη σχέση (4.96) εύκολα συνάγουμε ότι το Θεώρημα 5.2 ισχύει και στην περίπτωση που η βαθμωτή καμπυλότητα είναι σταθερή κατά μήκος οποιασδήποτε καμπύλης του Legendre.

Στη συνέχεια, κατασκευάζουμε μερικά παραδείγματα τρισδιάστατων (κ, μ, ν)-πολλαπλοτήτων επαφής. Στα παραδείγματα αυτά, σχηματίζουμε τις διαφορικές εξισώσεις που ικανοποιούν οι γεωδαισιακές τους καμπύλες οι οποίες είναι συγχρόνως και καμπύλες του Legendre.

Παράδειγμα 5.5. Θεωρούμε τον Ευκλείδειο χώρο $M = \mathbb{R}^3$ εφοδιασμένο με τις καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y, z). Ορίζουμε τα παρακάτω διανυσματικά πεδία στην M:

$$e_1 = \tfrac{\partial}{\partial x}, \quad e_2 = \tfrac{\partial}{\partial y}, \quad e_3 = 2y\tfrac{\partial}{\partial x} + (\tfrac{1}{4}e^{2x} - y^2)\tfrac{\partial}{\partial y} + \tfrac{\partial}{\partial z}.$$

Τα διανυσματικά πεδία e_1, e_2, e_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα διότι

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2y & \frac{1}{4}e^{2x} - y^2 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0,$$

σε κάθε σημείο της M. Στη συνέχεια, υπολογίζουμε τις παρενθέσεις του Lie μεταξύ των πεδίων e_1, e_2, e_3. Συγκεκριμένα, έχουμε

$$[e_1, e_2] = [\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}] = 0, \tag{5.11}$$

$$[e_1, e_3] = [\frac{\partial}{\partial x}, 2y\frac{\partial}{\partial x} + (\frac{1}{4}e^{2x} - y^2)\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}] = \frac{e^{2x}}{2}\frac{\partial}{\partial y} = \frac{e^{2x}}{2}e_2 \tag{5.12}$$

$$[e_2,e_3]=[\frac{\partial}{\partial y},2y\frac{\partial}{\partial x}+(\frac{1}{4}e^{2x}-y^2)\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}]=2\frac{\partial}{\partial x}-2y\frac{\partial}{\partial y}=2e_1-2ye_2. \quad (5.13)$$

Θεωρούμε τη μετρική Riemann, για την οποία τα διανυσματικά πεδία e_1, e_2, e_3 συνιστούν ένα ορθομοναδιαίο πλαίσιο, καθώς και την 1-μορφή η που ορίζεται από τη σχέση $\eta(W) = g(W, e_1)$, για κάθε $W \in D^1(M)$. Συνεπώς, έχουμε $\eta(e_1) = g(e_1, e_1) = 1, \eta(e_2) = g(e_2, e_1) = 0$ και $\eta(e_3) = g(e_3, e_1) = 0$. Χρησιμοποιώντας την (5.13), υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}(\eta\wedge d\eta)(e_1,e_2,e_3) &= \eta(e_1)d\eta(e_2,e_3)-\eta(e_2)d\eta(e_1,e_3)+\eta(e_3)d\eta(e_1,e_2)\\ &= d\eta(e_2,e_3)=\frac{1}{2}[e_2\eta(e_3)-e_3\eta(e_2)-\eta([e_2,e_3])]=\\ &= -\frac{1}{2}\eta([e_2,e_3])=-1\neq 0 \qquad (5.14)\end{aligned}$$

σε κάθε σημείο της M. Εύκολα συνάγουμε ότι η 1-μορφή η είναι μορφή επαφής στην M.

Ορίζουμε το τανυστικό πεδίο ϕ τύπου (1,1) από τις σχέσεις

$$\phi e_1 = 0, \quad \phi e_2 = e_3, \quad \phi e_3 = -e_2 \qquad (5.15)$$

.

Θα δείξουμε ότι η τετράδα (η, e_1, ϕ, g) ορίζει μια μετρική δομή επαφής στην πολλαπλότητα M. Από τον ορισμό της 1-μορφής η, παίρνουμε $\eta(e_1) = 1$. Επιπλέον, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (5.15), λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}\phi^2 e_1 &= \phi(\phi e_1)=0=-e_1+\eta(e_1)e_1,\\ \phi^2 e_2 &= \phi(\phi e_2)=\phi e_3=-e_2=-e_2+\eta(e_2)e_1,\\ \phi^2 e_3 &= \phi(\phi e_3)=-\phi e_2=-e_3=-e_3+\eta(e_3)e_1.\end{aligned}$$

Από τη γραμμικότητα του τανυστικού πεδίου ϕ και τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι $\phi^2 X = -X + \eta(X)e_1$ για κάθε $X \in D^1(M)$.

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό των τανυστικών πεδίων η, g, ϕ, έχουμε

$$\begin{aligned}
g(\phi e_1, \phi e_2) &= 0 = g(e_1, e_2) - \eta(e_1)\eta(e_2),\\
g(\phi e_1, \phi e_3) &= 0 = g(e_1, e_3) - \eta(e_1)\eta(e_3),\\
g(\phi e_1, \phi e_1) &= 0 = g(e_1, e_1) - \eta(e_1)\eta(e_1),\\
g(\phi e_2, \phi e_2) &= g(e_3, e_3) = 1 = g(e_2, e_2) - \eta(e_2)\eta(e_2),\\
g(\phi e_2, \phi e_3) &= -g(e_3, e_2) = 0 = g(e_3, e_2) - \eta(e_2)\eta(e_3),\\
g(\phi e_3, \phi e_3) &= g(e_2, e_2) = 1 = g(e_3, e_3) - \eta(e_3)\eta(e_3).
\end{aligned}$$

Από τη γραμμικότητα των τανυστικών πεδίων η, g, ϕ προκύπτει ότι $g(\phi X, \phi Y) = g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)$ για κάθε $X, Y \in D^1(M)$.

Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς των η, g, ϕ, τις σχέσεις (5.11), (5.12) και (5.13), έχουμε

$$\begin{aligned}
d\eta(e_1, e_2) &= \frac{1}{2}[e_1\eta(e_2) - e_2\eta(e_1) - \eta([e_1, e_2])] = 0 = g(e_1, \phi e_2),\\
d\eta(e_1, e_3) &= \frac{1}{2}[e_1\eta(e_3) - e_3\eta(e_1) - \eta([e_1, e_3]) = 0 = g(e_1, \phi e_3),\\
d\eta(e_2, e_2) &= 0 = g(e_2, \phi e_2),\\
d\eta(e_3, e_3) &= 0 = g(e_3, \phi e_3),\\
d\eta(e_2, e_3) &= \frac{1}{2}[e_2\eta(e_3) - e_3\eta(e_2) - \eta([e_2, e_3])] = -1 = g(e_2, -e_2) = g(e_2, \phi e_3).
\end{aligned}$$

Οι παραπάνω σχέσεις σε συνδυασμό με τη γραμμικότητα των τανυστικών πεδίων $d\eta, g, \phi$ δίνουν $d\eta(X,Y) = g(X, \phi Y)$ για κάθε $X, Y \in D^1(M)$.

Εύκολα παρατηρούμε ότι οι συνθήκες (3.1), (3.2) και (3.3) ικανοποιούνται. Δείξαμε λοιπόν ότι η τετράδα (η, e_1, ϕ, g) ορίζει μια μετρική δομή επαφής στην πολλαπλότητα M και, συνεπώς, η $[M, (\eta, e_1, \phi, g)]$ είναι μια πολλαπλότητα επαφής Riemann. Συμβολίζουμε με ∇ τη συνοχή Levi-Civita ως πρός τη μετρική

Riemann g και με R τον τανυστή καμπυλότητας της μετρικής g. Εργαζόμενοι όπως στο παράδειγμα 4.1, βρίσκουμε τελικά ότι για τη συνοχή Riemann ∇ ισχύουν οι σχέσεις

$$\begin{array}{lll} \nabla_{e_2}e_1 = (-\frac{e^{2x}}{4}-1)e_3, & \nabla_{e_3}e_1 = (1-\frac{e^{2x}}{4})e_2, & \nabla_{e_1}e_1 = 0, \\ \nabla_{e_1}e_2 = (-\frac{e^{2x}}{4}-1)e_3, & \nabla_{e_1}e_3 = (1+\frac{e^{2x}}{4})e_2, & \nabla_{e_2}e_2 = 2ye_3, \\ \nabla_{e_2}e_3 = -2ye_2+(\frac{e^{2x}}{4}+1)e_1, & \nabla_{e_3}e_2 = (\frac{e^{2x}}{4}-1)e_1, & \nabla_{e_3}e_3 = 0. \end{array} \tag{5.16}$$

Συνδυάζοντας τον ορισμό του τελεστή h, τις σχέσεις (5.11), (5.12) και (5.13), υπολογίζουμε ότι

$$\begin{aligned} he_2 &= \frac{1}{2}(\mathcal{L}_{e_1}\phi)e_2 = \frac{1}{2}\{[e_1,\phi e_2]-\phi[e_1,e_2]\} = \frac{1}{2}[e_1,e_3] = \frac{e^{2x}}{4}e_2, \\ he_3 &= \frac{1}{2}(\mathcal{L}_{e_1}\phi)e_3 = \frac{1}{2}\{[e_1,\phi e_3]-\phi[e_1,e_3]\} = -\frac{1}{2}\phi[e_1,e_3] \\ &= -\frac{1}{2}\frac{e^{2x}}{2}\phi e_2 = -\frac{e^{2x}}{4}e_3, \\ he_1 &= 0. \end{aligned} \tag{5.17}$$

Ουσιαστικά, παρατηρούμε, ότι το πεδίο e_2 (αντ. e_3) είναι πεδίο ιδιοδιανυσμάτων του τελεστή h που αντιστοιχεί στην ιδιοσυνάρτηση $\lambda = \frac{e^{2x}}{4}$ (αντ. $-\frac{e^{2x}}{4}$). Θεωρούμε τις διαφορίσιμες συναρτήσεις $\kappa = \kappa(x,y,z) = 1-\frac{e^{4x}}{16}$ και $\mu = \mu(x,y,z) = 2(1+\frac{e^{2x}}{4})$ ορισμένες στην πολλαπλότητα M. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (5.11), (5.12), (5.13), (5.16) και (5.17), έχουμε

$$\begin{aligned} R(e_2,e_1)e_1 &= \nabla_{e_2}\nabla_{e_1}e_1-\nabla_{e_1}\nabla_{e_2}e_1-\nabla_{[e_2,e_1]}e_1 = -\nabla_{e_1}\nabla_{e_2}e_1+\nabla_{[e_1,e_2]}e_1 \\ &= \nabla_{e_1}[(1+\frac{e^{2x}}{4})e_3] = \frac{e^{2x}}{2}e_3+(1+\frac{e^{2x}}{4})\nabla_{e_1}e_3 = \frac{e^{2x}}{2}e_3+ \\ &\quad +(1+\frac{e^{2x}}{4})(1+\frac{e^{2x}}{4})e_2 = \frac{e^{2x}}{2}e_3+(\frac{e^{2x}}{4}+1)^2e_2 \\ &= \kappa[\eta(e_1)e_2-\eta(e_2)e_1]+\mu[\eta(e_1)he_2-\eta(e_2)he_1]+ \\ &\quad +2[\eta(e_1)\phi he_2-\eta(e_2)\phi he_1], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R(e_3,e_1)e_1 &= \nabla_{e_3}\nabla_{e_1}e_1-\nabla_{e_1}\nabla_{e_3}e_1-\nabla_{[e_3,e_1]}e_1=-\nabla_{e_1}\nabla_{e_3}e_1+\nabla_{[e_1,e_3]}e_1\\
&= -\nabla_{e_1}[(1-\frac{e^{2x}}{4})e_2]+\frac{e^{2x}}{2}\nabla_{e_2}e_1\\
&= \frac{e^{2x}}{2}e_2+(\frac{e^{2x}}{4}-1)\nabla_{e_1}e_2-\frac{e^{2x}}{2}(1+\frac{e^{2x}}{4})e_3\\
&= \frac{e^{2x}}{2}e_2-(\frac{e^{2x}}{4}-1)(\frac{e^{2x}}{4}+1)e_3-\frac{e^{2x}}{2}(1+\frac{e^{2x}}{4})e_3\\
&= \frac{e^{2x}}{2}e_2+(1+\frac{e^{2x}}{4})(1-\frac{3e^{2x}}{4})e_3\\
&= \kappa[\eta(e_1)e_2-\eta(e_2)e_1]+\mu[\eta(e_1)he_2-\eta(e_2)he_1]+\\
&\quad +2[\eta(e_1)\phi he_2-\eta(e_2)\phi he_1],\\
R(e_2,e_3)e_1 &= \nabla_{e_2}\nabla_{e_3}e_1-\nabla_{e_3}\nabla_{e_2}e_1-\nabla_{[e_2,e_3]}e_1=\nabla_{e_2}[(1-\frac{e^{2x}}{4})e_2]+\\
&\quad +\nabla_{e_3}[(1+\frac{e^{2x}}{4})e_3]+2y\nabla_{e_2}e_1\\
&= (1-\frac{e^{2x}}{4})\nabla_{e_2}e_2+2y\frac{e^{2x}}{2}e_3+(1+\frac{e^{2x}}{4})\nabla_{e_3}e_3-\\
&\quad -2y(1+\frac{e^{2x}}{4})e_3\\
&= (1-\frac{e^{2x}}{4})2ye_3+ye^{2x}e_3-2y(1+\frac{e^{2x}}{4})e_3=0\\
&= \kappa[\eta(e_3)e_2-\eta(e_2)e_3]+\mu[\eta(e_3)he_2-\eta(e_2)he_3]+\\
&\quad +2[\eta(e_3)\phi he_2-\eta(e_2)\phi he_3],\\
R(e_1,e_1)e_1 &= 0=\kappa[\eta(e_1)e_1-\eta(e_1)e_1]+\mu[\eta(e_1)he_1-\eta(e_1)he_1]+\\
&\quad +2[\eta(e_1)\phi he_1-\eta(e_1)\phi he_1]\\
R(e_2,e_2)e_1 &= 0=\kappa[\eta(e_2)e_2-\eta(e_2)e_2]+\mu[\eta(e_2)he_2-\eta(e_2)he_2]+\\
&\quad +2[\eta(e_2)\phi he_2-\eta(e_2)\phi he_2],\\
R(e_3,e_3)e_1 &= 0=\kappa[\eta(e_3)e_3-\eta(e_3)e_3]+\mu[\eta(e_3)he_3-\eta(e_3)he_3]+\\
&\quad +2[\eta(e_3)\phi he_3-\eta(e_3)\phi he_3].
\end{aligned}$$

Θέτοντας $e_1=\xi$ και λαμβάνοντας υπόψη τη γραμμικότητα του τανυστή καμπυλότητας, συνάγουμε

$$
\begin{aligned}
R(X,Y)\xi &= \kappa[\eta(Y)X-\eta(X)Y]+\mu[\eta(Y)hX-\eta(X)hY]+\\
&\quad +2[\eta(Y)\phi hX-\eta(X)\phi hY],
\end{aligned}
$$

για κάθε $X,Y\in D^1(M)$, και συνεπώς η πολλαπλότητα $\mathbb{R}^3$ είναι μια $(\kappa,\mu,2)$-πολλαπλότητα επαφής με $\kappa=1-\frac{e^{4x}}{16},\mu=2(1+\frac{e^{2x}}{4})$ και $\nu=2$.

Έστω $\gamma(s)=(x(s),y(s),z(s))\in\mathbb{R}^3$ μια γεωδαισιακή της M με παράμετρο το μήκος τόξου της, η οποία είναι συγχρόνως και καμπύλη του Legendre. Ως προς το πεδίο πλαισίων $\{e_1=\xi,e_2,e_3\}$, έχουμε

$$
\begin{aligned}
T=\gamma' &= x'\frac{\partial}{\partial x}+y'\frac{\partial}{\partial y}+z'\frac{\partial}{\partial z}\\
&= [x'-2yz']\xi+[y'-(\frac{e^{2x}}{4}-y^2)z']e_2+z'e_3
\end{aligned}
$$

όπου με ”′” συμβολίζουμε την παράγωγο ως προς s. Αφού η γ είναι καμπύλη του Legendre, έχουμε $\eta(\gamma')=0$, ή, ισοδύναμα,

$$x'-2yz'=0, \tag{5.18}$$

οπότε

$$\gamma'=\alpha e_2+\beta e_3$$

όπου $\alpha=y'-(\frac{e^{2x}}{4}-y^2)z'$ και $\beta=z'$ με $\alpha^2+\beta^2=1$. Θέτουμε $\alpha=\cos\theta,\beta=\sin\theta$ για κάποια συνάρτηση γωνίας $\theta=\theta(s)$. Από την άλλη πλευρά, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (5.16), υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
\nabla_{\gamma'}\gamma' &= \nabla_{\gamma'}(\alpha e_2+\beta e_3) = \alpha' e_2 + \alpha\nabla_{\gamma'}e_2 + \beta' e_3 + \beta\nabla_{\gamma'}e_3 \\
&= \alpha' e_2 + \beta' e_3 + \alpha\nabla_{\alpha e_2+\beta e_3}e_2 + \beta\nabla_{\alpha e_2+\beta e_3}e_3 \\
&= \alpha' e_2 + \beta' e_3 + \alpha^2\nabla_{e_2}e_2 + \alpha\beta\nabla_{e_3}e_2 + \alpha\beta\nabla_{e_2}e_3 + \beta^2\nabla_{e_3}e_3 \\
&= \alpha' e_2 + \beta' e_3 + 2\alpha^2 y e_3 + \alpha\beta(\frac{e^{2x}}{4}-1)e_1 + \alpha\beta[-2ye_2 + (\frac{e^{2x}}{4}+1)e_1] \\
&= (\alpha' - 2y\alpha\beta)e_2 + (\beta' + 2\alpha^2 y)e_3 + \alpha\beta\frac{e^{2x}}{2}e_1.
\end{aligned}$$

Αφού η καμπύλη γ είναι γεωδαισιακή, $\nabla_{\gamma'}\gamma' = 0$ και για το λόγο αυτό παίρνουμε το ακόλουθο σύστημα διαφορικών εξισώσεων:

$$\alpha' = 2y\alpha\beta, \quad \beta' + 2\alpha^2 y = 0, \quad \alpha\beta = 0. \tag{5.19}$$

Η εξίσωση $\alpha\beta = 0$ είναι ισοδύναμη με τη $\sin(2\theta) = 0$. Διαφορίζοντας τη τελευταία σχέση, εύκολα συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση θ είναι σταθερή και ίση με $\frac{\kappa\pi}{2}$, όπου $\kappa \in \mathbb{Z}$. Λαμβάνοντας το κ άρτιο ή περιττό, έχουμε ότι οι σταθερές α και β παίρνουν τις τιμές 0, 1 ή -1. Αρχικά, θεωρούμε την περίπτωση που $\alpha = \pm 1$ και $\beta = 0$. Τότε, χρησιμοποιώντας τις (5.19), έχουμε $y = 0$. Από την άλλη πλευρά, έχουμε $z' = \beta = 0$. Συνεπώς, από τον ορισμό της σταθεράς α λαμβάνουμε $\alpha = 0$, το οποίο είναι άτοπο. Τελικά, έχουμε $\alpha = 0$ και $\beta = \pm 1$. Για χάριν ευκολίας, θέτουμε $\alpha = 0$ και $\beta = 1$. Συνδυάζοντας τους ορισμούς των σταθερών α και β και τη σχέση (5.18), καταλήγουμε στο παρακάτω σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων :

$$z' = 1, \quad y' - (\tfrac{e^{2x}}{4} - y^2)z' = 0, \quad x' = 2yz'$$

ή, ισοδύναμα,

$$z = s + c_1, \quad y' + y^2 - \tfrac{e^{2x}}{4} = 0, \quad x' = 2y, \tag{5.20}$$

όπου c_1 σταθερά. Αντικαθιστώντας την έκφραση του y από τη τρίτη εξίσωση στη δεύτερη εξίσωση του συστήματος (5.20), καταλήγουμε στην παρακάτω δεύτερης τάξης συνήθη διαφορική εξίσωση:

$$2x'' + (x')^2 = e^{2x}. \tag{5.21}$$

Ειδικές λύσεις της (5.21) είναι οι συναρτήσεις $x(s) = \ln \frac{\sqrt{3}}{s+c}$, όπου c μια πραγματική σταθερά. Συνεπώς, οι αντίστοιχες καμπύλες του Legendre είναι $\gamma(s) = (\ln \frac{\sqrt{3}}{s+c}, -\frac{1}{2(s+c)}, s + c_1), s > -c$.

Παράδειγμα 5.6. Θεωρούμε την τρισδιάστατη πολλαπλότητα $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z \neq 0\}$ εφοδιασμένη με τις καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y, z). Τα διανυσματικά πεδία

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad e_2 = -2yz\frac{\partial}{\partial x} + \frac{2x}{z^3}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{z^2}\frac{\partial}{\partial z}, \quad e_3 = \frac{1}{z}\frac{\partial}{\partial y}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητα σε κάθε σημείο της M. Θεωρούμε τη μετρική Riemann, για την οποία τα διανυσματικά πεδία e_1, e_2, e_3 αποτελούν ένα ορθομοναδιαίο πλαίσιο, καθώς και την 1-μορφή η που ορίζεται από τη σχέση $\eta(W) = g(W, e_1)$, για κάθε $W \in D^1(M)$. Επιπλέον, ορίζουμε το τανυστικό πεδίο ϕ τύπου $(1,1)$ από τις σχέσεις $\phi e_1 = 0, \phi e_2 = e_3, \phi e_3 = -e_2$. Οι Koufogiorgos και Tsichlias ([49]) απέδειξαν ότι η $[M, (\eta, e_1, \phi, g)]$ είναι μια γενικευμένη (κ, μ)-πολλαπλότητα επαφής με $\kappa = \frac{z^4-1}{z^4}$ και $\mu = 2(1 - \frac{1}{z^2})$. Επιπλέον, έχουμε

$$\begin{aligned} he_2 &= \frac{1}{z^2}e_2, \\ he_3 &= -\frac{1}{z^2}e_3, \end{aligned}$$

δηλαδή, τα διανυσματικά πεδία e_2, e_3 είναι πεδία ιδιοδιανυσμάτων του τελεστή h.

Έστω $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s)) \in M$ μια γεωδαισιακή της M με παράμετρο το μήκος τόξου της, η οποία είναι συγχρόνως και καμπύλη του Legendre. Ως προς το πεδίο πλαισίων $\{e_1 = \xi, e_2, e_3\}$, έχουμε

$$\begin{aligned} T = \gamma' &= x'\frac{\partial}{\partial x} + y'\frac{\partial}{\partial y} + z'\frac{\partial}{\partial z} \\ &= x'e_1 + y'ze_3 + z'[-2yz^3e_1 - z^2e_2 + 2xe_3] \\ &= [x' - 2yz'z^3]e_1 - z'z^2e_2 + (y'z + 2xz')e_3. \end{aligned}$$

Αφού η καμπύλη γ είναι καμπύλη του Legendre, έχουμε $\eta(\gamma') = 0$, ή, ισοδύναμα

$$x' - 2yz'z^3 = 0 \tag{5.22}$$

οπότε

$$\gamma' = \alpha e_2 + \beta e_3$$

όπου $\alpha = -z'z^2$ και $\beta = y'z + 2xz'$ με $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Από την άλλη πλευρά, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (4.125), έχουμε

$$\begin{aligned} \nabla_{\gamma'}\gamma' &= \nabla_{\gamma'}[\alpha e_2 + \beta e_3] = \alpha' e_2 + \alpha\nabla_{\gamma'}e_2 + \beta' e_3 + \beta\nabla_{\gamma'}e_3 \\ &= \alpha' e_2 + \beta' e_3 + \alpha\nabla_{\alpha e_2 + \beta e_3}e_2 + \beta\nabla_{\alpha e_2 + \beta e_3}e_3 \\ &= \alpha' e_2 + \beta' e_3 + \alpha^2\nabla_{e_2}e_2 + \alpha\beta\nabla_{e_3}e_2 + \alpha\beta\nabla_{e_2}e_3 + \beta^2\nabla_{e_3}e_3 \\ &= \alpha' e_2 + \beta' e_3 + \alpha\beta[(-1 + \frac{1}{z^2})e_1 - \frac{1}{z^3}e_3] + \alpha\beta(1 + \frac{1}{z^2})e_1 + \beta^2\frac{1}{z^3}e_2 \\ &= (\alpha' + \frac{\beta^2}{z^3})e_2 + (\beta' - \frac{\alpha\beta}{z^3})e_3 + \frac{2\alpha\beta}{z^2}e_1. \end{aligned}$$

Αφού η καμπύλη γ είναι γεωδαισιακή, $\nabla_{\gamma'}\gamma' = 0$ και για το λόγο αυτό παίρνουμε το ακόλουθο σύστημα διαφορικών εξισώσεων:

$$\alpha\beta = 0, \quad \alpha' + \tfrac{\beta^2}{z^3} = 0, \quad \beta' - \tfrac{\alpha\beta}{z^3} = 0. \tag{5.23}$$

Η περίπτωση $\alpha = 0$ και $\beta = \pm 1$ καταλήγει στην εξίσωση $\frac{1}{z} = 0$ και έτσι οδηγεί σε άτοπο. Για το λόγο αυτό, θεωρούμε την περίπτωση $\beta = 0$ και $\alpha = \pm 1$. Χάριν ευκολίας, θέτουμε $\alpha = 1$ και $\beta = 0$. Συνδυάζοντας τους ορισμούς των σταθερών α και β και τη σχέση (5.22), καταλήγουμε στο παρακάτω σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων :

$$z^{'}z^2 = -1, \quad y^{'}z + 2xz^{'} = 0, \quad x^{'} = 2yz^{'}z^3,$$

ή, ισοδύναμα,

$$z^{'}z^2 = -1, \quad y^{'}z + 2xz^{'} = 0, \quad x^{'} = -2yz. \tag{5.24}$$

Η πρώτη εξίσωση του συστήματος (5.24) δίνει $z^3 = -3s + c_1$, όπου c_1 σταθερά. Υποθέτουμε ότι $z = \sqrt[3]{-3s + c_1}$. Αντικαθιστώντας την έκφραση του y από την τρίτη εξίσωση και την παράγωγο του z από την πρώτη εξίσωση στη δεύτερη εξίσωση του συστήματος (5.24), παίρνουμε

$$\begin{aligned} y^{'}z + 2xz^{'} &= \frac{x^{'}z^{'} - x^{''}z}{2z} - \frac{2x}{z^2} = -\frac{x^{''}}{2} + \frac{x^{'}z^{'}}{2z} - \frac{2x}{z^2} \\ &= -\frac{x^{''}}{2} - \frac{x^{'}}{2z^3} - \frac{2x}{z^2} = 0, \end{aligned}$$

ή, ισοδύναμα,

$$x^{''} + \frac{x^{'}}{-3s + c_1} + \frac{4x}{(-3s + c_1)^{\frac{2}{3}}} = 0.$$

Θεωρώντας την αντικατάσταση $t = -3s + c_1$, η παραπάνω εξίσωση μετατρέπεται στην εξίσωση

$$\ddot{x} - \frac{1}{3t}\dot{x} + \frac{4}{9t^{\frac{2}{3}}}x = 0 \tag{5.25}$$

όπου με $\dot{x}$ δηλώνουμε την παράγωγο $\frac{dx}{dt}$. Αναφέρουμε ότι η γενική λύση της (5.25) δίνεται από την έκφραση

$$x(t) = t^{\frac{2}{3}}[J_1(t^{\frac{2}{3}})c_2 + Y_1(t^{\frac{2}{3}})c_3]$$

όπου J_1 είναι η πρώτου είδους συνάρτηση Bessel, Y_1 είναι η πρώτου είδους σφαιρική συνάρτηση Bessel και c_2, c_3 είναι πραγματικές σταθερές.

5.3 Διαρμονικές αντι-αναλλοίωτες επιφάνειες

Έστω $[M, (\eta, \xi, \phi, g)]$ μια μετρική πολλαπλότητα επαφής διάστασης $2n+1$ και $M^m (m \leq n+1)$ μια ισομετρικά εμβυθισμένη υποπολλαπλότητα της M με το πεδίο ξ να εφάπτεται της M^m. Αν $\phi(TM^m) \subset T^{\perp}M^m$, τότε η M^m καλείται **αντι-αναλλοίωτη**(**anti-invariant**) υποπολλαπλότητα ([82]). Αν $\phi(TM^m) \subset TM^m$, τότε η M^m καλείται **αναλλοίωτη**(**invariant**) υποπολλαπλότητα της M. Οι αναλλοίωτες υποπολλαπλότητες είναι ελαχιστικές ([7, Θεώρημα 8.1, σελ.122]) και για το λόγο αυτό είναι κρίσιμα σημεία του συναρτησοειδούς της ενέργειας δεύτερης τάξης. Αντιθέτως, οι αντι-αναλλοίωτες υποπολλαπλότητες δεν είναι εν γένει κρίσιμα σημεία του συναρτησοειδούς της ενέργειας δεύτερης τάξης. Από την άποψη αυτή είναι εύλογο να μελετήσουμε την κλάση των μη ελαχιστικών διαρμονικών αντι-αναλλοίωτων υποπολλαπλοτήτων μιας πολλαπλότητας επαφής.

Έστω $[M, (\eta, \xi, \phi, g)]$ μια τρισδιάστατη (κ, μ, ν) - πολλαπλότητα επαφής με $\kappa < 1$ οπουδήποτε στην πολλαπλότητα M και M^2 μια μη ελαχιστική αντι-αναλλοίωτη επιφάνεια ισομετρικά εμβυθισμένη στην M μέσω της εμβύθισης $x : M^2 \mapsto M$. Συμβολίζουμε τη σύνδεση Levi-Civita της M (αντ. M^2) με $\tilde{\nabla}$ (αντ. ∇). Θεωρούμε ένα μοναδιαίο διανυσματικό πεδίο e_1 της M εφαπτόμενο της M^2 και κάθετο στο ξ. Τότε, το ζεύγος $\{e_1, \xi\}$ συνιστά ένα τοπικό πεδίο πλαισίων της M^2. Η τριάδα $\{e_1, \xi, \phi e_1\}$ συνιστά ένα τοπικό πεδίο πλαισίων της M. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι $\mathbb{H} = \alpha \phi e_1$, όπου $\mathbb{H}$ το διανυσματικό πεδίο της μέσης καμπυλότητας της M^2 και α μια αυστηρά θετική συνάρτηση της

M^2. Ουσιαστικά, η συνάρτηση α είναι το μέτρο του διανυσματικού πεδίο της μέσης καμπυλότητας. Αναλύουμε το διανυσματικό πεδίο he_1 ως προς το πεδίο πλαισίων $\{e_1, \xi, \phi e_1\}$ ως εξής:

$$he_1 = g(he_1, e_1)e_1 + g(he_1, \phi e_1)\phi e_1. \tag{5.26}$$

και θέτουμε $\beta = 1 + g(he_1, e_1)$ και $\gamma = g(he_1, \phi e_1)$. Ακολουθώντας τους παραπάνω συμβολισμούς, αποδεικνύουμε το παρακάτω Λήμμα:

Λήμμα 5.9. *Έστω $[M, (\eta, \xi, \phi, g)]$ μια τρισδιάστατη (κ, μ, ν)-πολλαπλότητα επαφής και M^2 αντι-αναλλοίωτη επιφάνεια της M χωρίς ελαχιστικά σημεία. Τότε, ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:*

$$\begin{aligned}
\sigma(e_1, e_1) &= 2\alpha\phi e_1, && (5.27)\\
\sigma(\xi, \xi) &= 0, && (5.28)\\
\sigma(e_1, \xi) &= -\beta\phi e_1, && (5.29)\\
\nabla_{e_1} e_1 &= -\gamma\xi, && (5.30)\\
\nabla_{e_1} \xi &= \gamma e_1, && (5.31)\\
\nabla_{\xi} e_1 &= \nabla_{\xi}\xi = 0. && (5.32)\\
A_{\phi e_1} e_1 &= 2\alpha e_1 - \beta\xi, && (5.33)\\
A_{\phi e_1} \xi &= -\beta e_1, && (5.34)
\end{aligned}$$

όπου σ είναι η δεύτερη θεμελιώδης μορφή της M^2 και $A_{\phi e_1}$ ο τελεστής σχήματος της επιφάνειας ως προς το πεδίο ϕe_1.

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.3), (3.1), (3.7) και (5.26), έχουμε

$$\begin{aligned}\nabla_{e_1}\xi + \sigma(e_1,\xi) &= \bar{\nabla}_{e_1}\xi = -\phi e_1 - \phi h e_1\\ &= -\phi e_1 - g(he_1,e_1)\phi e_1 + g(he_1,\phi e_1)e_1\\ &= -\beta\phi e_1 + \gamma e_1.\end{aligned}$$

Συγκρίνοντας το εφαπτόμενο και κάθετο μέρος της τελευταίας σχέσης, συνάγουμε τις (5.29) και (5.31). Με ανάλογο τρόπο, παίρνουμε

$$\nabla_\xi\xi + \sigma(\xi,\xi) = \bar{\nabla}_\xi\xi = 0$$

και καταλήγουμε στην (5.28) και στη δεύτερη ισότητα της (5.32). Από τον ορισμό του διανυσματικού πεδίου της μέσης καμπυλότητας, έχουμε

$$\alpha\phi e_1 = \mathbb{H} = \frac{1}{2}(\sigma(e_1,e_1)+\sigma(\xi,\xi)) = \frac{1}{2}\sigma(e_1,e_1),$$

ή, ισοδύναμα,

$$\sigma(e_1,e_1) = 2\alpha\phi e_1$$

και ουσιαστικά αποδείξαμε την (5.27). Στη συνέχεια, αναλύουμε τα διανυσματικά πεδία $\nabla_{e_1}e_1$ και $\nabla_\xi e_1$ ως προς το πεδίο πλαισίων $\{e_1,\xi\}$. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιώντας τις (5.31) και (5.32), έχουμε

$$\begin{aligned}\nabla_{e_1}e_1 &= g(\nabla_{e_1}e_1,e_1)e_1 + g(\nabla_{e_1}e_1,\xi)\xi\\ &= -g(e_1,\nabla_{e_1}\xi)\xi = -g(e_1,\gamma e_1)\xi\\ &= -\gamma\xi,\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\nabla_\xi e_1 &= g(\nabla_\xi e_1,e_1)e_1 + g(\nabla_\xi e_1,\xi)\xi\\ &= g(\nabla_\xi e_1,\xi)\xi = -g(e_1,\nabla_\xi\xi) = 0.\end{aligned}$$

Αξιοποιώντας τώρα τις (2.3), (2.4), (3.1), (3.4), (3.8), (4.47), (5.27), (5.29), (5.30) και (5.32), έχουμε

$$\begin{aligned} -A_{\phi e_1}e_1 + \nabla^{\perp}_{e_1}\phi e_1 &= \bar{\nabla}_{e_1}\phi e_1 = (\bar{\nabla}_{e_1}\phi)e_1 + \phi(\bar{\nabla}_{e_1}e_1) = g(e_1 + he_1, e_1)\xi - \\ &\quad -\eta(e_1)(e_1 + he_1) + \phi(\nabla_{e_1}e_1 + \sigma(e_1, e_1)) \\ &= (1 + g(he_1, e_1))\xi + \phi(-\gamma\xi + 2\alpha\phi e_1) \\ &= \beta\xi + 2\alpha\phi^2 e_1 = \beta\xi - 2\alpha e_1 \end{aligned} \tag{5.35}$$

και

$$\begin{aligned} -A_{\phi e_1}\xi + \nabla^{\perp}_{\xi}\phi e_1 &= \bar{\nabla}_{\xi}\phi e_1 = (\bar{\nabla}_{\xi}\phi)e_1 + \phi(\bar{\nabla}_{\xi}e_1) \\ &= \phi(\bar{\nabla}_{\xi}e_1) = \phi(\nabla_{\xi}e_1 + \sigma(e_1, \xi)) \\ &= \phi(\sigma(e_1, \xi)) = -\beta\phi^2 e_1 = \beta e_1. \end{aligned} \tag{5.36}$$

Επειδή, όμως, η M^2 είναι υπερεπιφάνεια της M, έχουμε ότι $\nabla^{\perp}_{e_1}\phi e_1 = 0$ και $\nabla^{\perp}_{\xi}\phi e_1 = 0$. Συνεπώς, οι σχέσεις (5.35) και (5.36) ανάγονται στις (5.33) και (5.34), αντίστοιχα και η απόδειξη του Λήμματος έχει ολοκληρωθεί. □

Λήμμα 5.10. *Σε κάθε αντι-αναλλοίωτη επιφάνεια χωρίς ελαχιστικά σημεία μιας τρισδιάστατης (κ, μ, ν)-πολλαπλότητας επαφής $[M, (\eta, \xi, \phi, g)]$ με $\kappa < 1$ οπουδήποτε στην M, ισχύουν οι επόμενες σχέσεις:*

$$2\xi(\alpha) = -e_1(\beta) - 2\alpha\gamma, \tag{5.37}$$

$$\xi(\beta) = \gamma(\mu - 2\beta) + \nu(\beta - 1), \tag{5.38}$$

$$-\xi(\gamma) - \gamma^2 = \kappa + \mu(\beta - 1) - \nu\gamma - \beta^2. \tag{5.39}$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας τις (3.1), (3.4), (4.40) και (5.26), υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
\tilde{R}(e_1,\xi)\xi &= \kappa e_1 + \mu h e_1 + \nu\phi h e_1 \\
&= \kappa e_1 + \mu g(he_1,e_1)e_1 + \mu g(he_1,\phi e_1)\phi e_1 + \nu g(he_1,e_1)\phi e_1 \\
&\quad + \nu g(he_1,\phi e_1)\phi^2 e_1 \\
&= [\kappa + \mu g(he_1,e_1) - \nu g(he_1,\phi e_1)]e_1 + [\mu\gamma + \nu g(he_1,e_1)]\phi e_1 \\
&= [\kappa + \mu(\beta-1) - \nu\gamma]e_1 + [\mu\gamma + \nu(\beta-1)]\phi e_1.
\end{aligned}$$

Συνεπώς, το καθετικό μέρος $(\tilde{R}(e_1,\xi)\xi)^{\perp}$ της τελευταίας σχέσης ισούται με

$$(\tilde{R}(e_1,\xi)\xi)^{\perp} = [\mu\gamma + \nu(\beta-1)]\phi e_1. \tag{5.40}$$

Από την άλλη πλευρά, χρησιμοποιώντας τις (2.8) και (5.27)-(5.32), υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
(\tilde{\nabla}_{e_1}\sigma)(\xi,\xi) &= \nabla^{\perp}_{e_1}\sigma(\xi,\xi) - 2\sigma(\nabla_{e_1}\xi,\xi) \\
&= -2\sigma(\gamma e_1,\xi) = -2\gamma\sigma(e_1,\xi) = 2\beta\gamma\phi e_1, \qquad (5.41) \\
(\tilde{\nabla}_{\xi}\sigma)(e_1,\xi) &= \nabla^{\perp}_{\xi}\sigma(e_1,\xi) - \sigma(\nabla_{\xi}e_1,\xi) - \sigma(e_1,\nabla_{\xi}\xi) \\
&= \nabla^{\perp}_{\xi}[-\beta\phi e_1] = -\xi(\beta)\phi e_1, \qquad (5.42) \\
(\tilde{\nabla}_{\xi}\sigma)(e_1,e_1) &= \nabla^{\perp}_{\xi}\sigma(e_1,e_1) - 2\sigma(e_1,\nabla_{\xi}e_1) = \\
&= \nabla^{\perp}_{\xi}[2\alpha\phi e_1] = 2\xi(\alpha)\phi e_1, \qquad (5.43) \\
(\tilde{\nabla}_{e_1}\sigma)(\xi,e_1) &= \nabla^{\perp}_{e_1}\sigma(\xi,e_1) - \sigma(\nabla_{e_1}\xi,e_1) - \sigma(\xi,\nabla_{e_1}e_1) \\
&= \nabla^{\perp}_{e_1}[-\beta\phi e_1] - \sigma(\gamma e_1,e_1) \\
&= -e_1(\beta)\phi e_1 - 2\alpha\gamma\phi e_1 = (-e_1(\beta) - 2\alpha\gamma)\phi e_1. \qquad (5.44)
\end{aligned}$$

Με τη βοήθεια των (3.6), (4.45), (5.26) και τη συμμετρικότητα του τελεστή h, έχουμε

$$\begin{aligned}\tilde{R}(\xi, e_1)e_1 &= \kappa\xi + \mu g(he_1, e_1)\xi + \nu g(\phi h e_1, e_1)\xi \\ &= \kappa\xi + \mu(\beta - 1)\xi - \nu g(he_1, \phi e_1)\xi \\ &= (\kappa + \mu(\beta - 1) - \nu\gamma)\xi. \end{aligned} \tag{5.45}$$

Συνεπώς, το καθετικό μέρος $(\tilde{R}(\xi, e_1)e_1)^{\perp}$ της τελευταίας σχέσης ισούται με

$$(\tilde{R}(\xi, e_1)e_1)^{\perp} = 0. \tag{5.46}$$

Στη συνέχεια, θέτοντας $X = e_1, Y = Z = \xi$ στη σχέση (2.7) και αξιοποιώντας τις (5.40), (5.41) και (5.42), παίρνουμε

$$\begin{aligned}(\mu\gamma + \nu(\beta - 1))\phi e_1 &= (\tilde{R}(e_1, \xi)\xi)^{\perp} = (\tilde{\nabla}_{e_1}\sigma)(\xi, \xi) - (\tilde{\nabla}_{\xi}\sigma)(e_1, \xi) \\ &= (2\beta\gamma + \xi(\beta))\phi e_1\end{aligned}$$

και συνεπώς συνάγουμε τη (5.38). Ομοίως, θέτοντας $X = \xi, Y = Z = e_1$ στη σχέση (2.7) και αξιοιποιώντας τις (5.43), (5.44) και (5.46), παίρνουμε

$$\begin{aligned}0 &= (\tilde{R}(\xi, e_1)e_1)^{\perp} = (\tilde{\nabla}_{\xi}\sigma)(e_1, e_1) - (\tilde{\nabla}_{e_1}\sigma)(\xi, e_1) \\ &= (2\xi(\alpha) + e_1(\beta) + 2\alpha\gamma)\phi e_1\end{aligned}$$

και συνεπώς συνάγουμε τη (5.37). Για την απόδειξη της (5.39) θα στηριχθούμε στην εξίσωση του Gauss. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιώντας τις (2.6), (5.33), (5.34) και (5.45), υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}\kappa + \mu(\beta - 1) - \nu\gamma &= g(\tilde{R}(\xi, e_1)e_1, \xi) = g(R(\xi, e_1)e_1, \xi) - g(\sigma(e_1, e_1), \sigma(\xi, \xi)) \\ &\quad + g(\sigma(\xi, e_1), \sigma(\xi, e_1)) = g(R(\xi, e_1)e_1, \xi) + g(\beta\phi e_1, \beta\phi e_1) \\ &= g(R(\xi, e_1)e_1, \xi) + \beta^2,\end{aligned}$$

ή, ισοδύναμα,

$$g(R(\xi, e_1)e_1, \xi) = \kappa + \mu(\beta - 1) - \nu\gamma - \beta^2. \tag{5.47}$$

Υπολογίζουμε την έκφραση $R(\xi, e_1)e_1$ με τη χρήση του ορισμού του τανυστή καμπυλότητας. Ειδικότερα, χρησιμοποιώντας τις (5.30)-(5.32), παίρνουμε

$$\begin{aligned} R(\xi, e_1)e_1 &= \nabla_\xi \nabla_{e_1} e_1 - \nabla_{e_1} \nabla_\xi e_1 - \nabla_{[\xi, e_1]} e_1 \\ &= \nabla_\xi [-\gamma\xi] - \nabla_{\nabla_\xi e_1 - \nabla_{e_1}\xi} e_1 \\ &= -\xi(\gamma)\xi + \gamma \nabla_{e_1} e_1 = -\xi(\gamma)\xi - \gamma^2 \xi \\ &= (-\xi(\gamma) - \gamma^2)\xi \end{aligned}$$

και συνεπώς συνάγουμε τη σχέση

$$g(R(\xi, e_1)e_1, \xi) = -\xi(\gamma) - \gamma^2. \tag{5.48}$$

Συγκρίνοντας τη (5.47) και τη (5.48), εύκολα, καταλήγουμε στην (5.39) και η απόδειξη του Λήμματος έχει ολοκληρωθεί. □

Λήμμα 5.11. *Σε κάθε αντι-αναλλοίωτη επιφάνεια χωρίς ελαχιστικά σημεία μιας τρισδιάστατης (κ, μ, ν)-πολλαπλότητα επαφής $[M, (\eta, \xi, \phi, g)]$ με $\kappa < 1$ οπουδήποτε στην M, ισχύουν οι κάτωθι σχέσεις:*

$$\begin{aligned} \xi(\gamma) &= (2\beta - \mu)(\beta - 1) + \nu\gamma, &(5.49)\\ e_1(\beta) &= 4\alpha\gamma + \frac{1}{2(\kappa - 1)}(\beta - 1)e_1(\kappa) - \\ &\quad -\frac{1}{2(\kappa - 1)}\gamma\phi e_1(\kappa), &(5.50)\\ e_1(\gamma) &= -4\alpha(\beta - 1) + \frac{1}{2(\kappa - 1)}(\beta - 1)\phi e_1(\kappa) + \\ &\quad +\frac{1}{2(\kappa - 1)}\gamma e_1(\kappa), &(5.51)\\ (\beta - 1)^2 + \gamma^2 &= 1 - \kappa. &(5.52) \end{aligned}$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας τις (2.3), (3.1), (3.2), (3.6), (3.8), (4.43), (5.29) και (5.32), έχουμε

$$\begin{aligned}
\xi(\gamma) &= \xi g(he_1, \phi e_1) = g(\tilde{\nabla}_\xi he_1, \phi e_1) + g(he_1, \tilde{\nabla}_\xi \phi e_1) \\
&= g((\tilde{\nabla}_\xi h)e_1, \phi e_1) + g(\tilde{\nabla}_\xi e_1, h\phi e_1) + g(he_1, \phi\tilde{\nabla}_\xi e_1) \\
&= \mu g(h\phi e_1, \phi e_1) + \nu g(he_1, \phi e_1) - \beta g(h\phi e_1, \phi e_1) \\
&\quad -\beta g(he_1, \phi^2 e_1) \\
&= -\mu g(\phi h e_1, \phi e_1) + \nu\gamma + \beta g(\phi h e_1, \phi e_1) + \beta(\beta - 1) \\
&= -\mu(\beta - 1) + \nu\gamma + \beta(\beta - 1) + \beta(\beta - 1) \\
&= (2\beta - \mu)(\beta - 1) + \nu\gamma.
\end{aligned}$$

Στη συνέχεια, αξιοποιώντας τις (2.4), (2.3), (3.4), (4.103), (5.27), (5.30) και (5.33) παίρνουμε

$$\begin{aligned}
e_1(\beta) &= e_1 g(he_1, e_1) \\
&= g(\tilde{\nabla}_{e_1} he_1, e_1) + g(he_1, \tilde{\nabla}_{e_1} e_1) \\
&= g((\tilde{\nabla}_{e_1} h)e_1, e_1) + 2g(he_1, \tilde{\nabla}_{e_1} e_1) \\
&= g(-\frac{1}{2(1-\kappa)} g(he_1, e_1)\,\mathrm{grad}\,\kappa - \frac{1}{2(1-\kappa)} g(he_1, \phi e_1)\phi(\mathrm{grad}\,\kappa) \\
&\quad +[(1-\kappa)g(e_1, \phi e_1) + g(he_1, \phi e_1) - \nu g(he_1, e_1)]\xi, e_1) \\
&\quad +2g(he_1, -\gamma\xi + 2\alpha\phi e_1) \\
&= \frac{1}{2(\kappa - 1)}(\beta - 1)e_1(\kappa) - \frac{1}{2(\kappa - 1)}\gamma\phi e_1(\kappa) + 4\alpha g(he_1, \phi e_1) \\
&= 4\alpha\gamma + \frac{1}{2(\kappa - 1)}(\beta - 1)e_1(\kappa) - \frac{1}{2(\kappa - 1)}\gamma\phi e_1(\kappa).
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
e_1(\gamma) &= e_1 g(he_1, \phi e_1) = g(\tilde{\nabla}_{e_1} he_1, \phi e_1) + g(he_1, \tilde{\nabla}_{e_1}\phi e_1) \\
&= g((\tilde{\nabla}_{e_1} h)e_1, \phi e_1) + g(h\phi e_1, \tilde{\nabla}_{e_1} e_1) + g(he_1, \tilde{\nabla}_{e_1}\phi e_1) \\
&= g((\tilde{\nabla}_{e_1} h)e_1, \phi e_1) + 2\alpha g(h\phi e_1, \phi e_1) - g(he_1, A_{\phi e_1} e_1) \\
&= g(-\frac{1}{2(1-\kappa)} g(he_1, e_1)\,\mathrm{grad}\,\kappa - \frac{1}{2(1-\kappa)} g(he_1, \phi e_1)\phi(\mathrm{grad}\,\kappa) \\
&\quad +[(1-\kappa)g(e_1, \phi e_1) + g(he_1, \phi e_1) - \nu g(he_1, e_1)]\xi, \phi e_1) \\
&\quad -2\alpha g(\phi he_1, \phi e_1) - 2\alpha g(he_1, e_1) \\
&= \frac{1}{2(\kappa-1)}(\beta-1)\phi e_1(\kappa) + \frac{1}{2(\kappa-1)}\gamma e_1(\kappa) - 4\alpha(\beta-1).
\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (5.49) στη (5.39), εύκολα συνάγουμε τη (5.52) και η απόδειξη του Λήμματος έχει ολοκληρωθεί. □

Λήμμα 5.12. *Έστω $[M, (\eta, \xi, \phi, g)]$ μια τρισδιάστατη (κ, μ, ν)-πολλαπλότητα επαφής με $\kappa < 1$ οπουδήποτε στην M και M^2 μια χωρίς ελαχιστικά σημεία αντι-αναλλοίωτη επιφάνεια της M. Τότε,*

$$\begin{aligned}
-\bar{\Delta}_x \mathbb{H} &= [e_1 e_1(\alpha) + \xi\xi(\alpha) + \gamma\xi(\alpha) - \alpha(4\alpha^2 + 2\beta^2)]\phi e_1 \\
&\quad +[-6\alpha e_1(\alpha) + 2\alpha\beta\gamma + 2\xi(\alpha)\beta + \alpha\xi(\beta)]e_1 \\
&\quad +[2\beta e_1(\alpha) + \alpha e_1(\beta) + 2\alpha^2\gamma]\xi, \qquad (5.53)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_x(\mathbb{H}) &= [-\alpha\mu(\beta-1) + \alpha\nu\gamma + \alpha(\frac{r}{2} - \kappa)]\phi e_1 \\
&\quad +[\alpha\mu\gamma + \alpha\nu(\beta-1)]e_1. \qquad (5.54)
\end{aligned}$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της ψευδο-Λαπλασιανής και τις σχέσεις

(2.3), (2.4), (5.27)-(5.32) και (5.33), υπολογίζουμε

$$
\begin{aligned}
-\bar{\Delta}_x \mathbb{H} &= \tilde{\nabla}_{e_1}\tilde{\nabla}_{e_1}\mathbb{H} + \tilde{\nabla}_{\xi}\tilde{\nabla}_{\xi}\mathbb{H} - \tilde{\nabla}_{\nabla_{e_1}e_1}\mathbb{H} - \tilde{\nabla}_{\nabla_{\xi}\xi}\mathbb{H} \\
&= \tilde{\nabla}_{e_1}\tilde{\nabla}_{e_1}[\alpha\phi e_1] + \tilde{\nabla}_{\xi}\tilde{\nabla}_{\xi}[\alpha\phi e_1] + \gamma\tilde{\nabla}_{\xi}[\alpha\phi e_1] \\
&= e_1e_1(\alpha)\phi e_1 + 2e_1(\alpha)\tilde{\nabla}_{e_1}\phi e_1 + \alpha\tilde{\nabla}_{e_1}\tilde{\nabla}_{e_1}\phi e_1 \\
&\quad +\xi\xi(\alpha)\phi e_1 + 2\xi(\alpha)\tilde{\nabla}_{\xi}\phi e_1 + \alpha\tilde{\nabla}_{\xi}\tilde{\nabla}_{\xi}\phi e_1 \\
&\quad +\gamma\xi(\alpha)\phi e_1 + \alpha\gamma\tilde{\nabla}_{\xi}\phi e_1 \\
&= e_1e_1(\alpha)\phi e_1 - 2e_1(\alpha)[2\alpha e_1 - \beta\xi] - \alpha\tilde{\nabla}_{e_1}[2\alpha e_1 - \beta\xi] \\
&\quad +\xi\xi(\alpha)\phi e_1 + 2\xi(\alpha)\beta e_1 + \alpha\tilde{\nabla}_{\xi}[\beta e_1] + \gamma\xi(\alpha)\phi e_1 + \\
&\quad +\alpha\beta\gamma e_1 \\
&= e_1e_1(\alpha)\phi e_1 - 4\alpha e_1(\alpha)e_1 + 2\beta e_1(\alpha)\xi - 2\alpha e_1(\alpha)e_1 - \\
&\quad -2\alpha^2[-\gamma\xi + 2\alpha\phi e_1] + \alpha e_1(\beta)\xi + \alpha\beta[\gamma e_1 - \beta\phi e_1] + \\
&\quad +\xi\xi(\alpha)\phi e_1 + 2\beta\xi(\alpha)e_1 + \alpha\xi(\beta)e_1 - \alpha\beta^2\phi e_1 + \gamma\xi(\alpha)\phi e_1 \\
&\quad +\alpha\beta\gamma e_1 \\
&= [e_1e_1(\alpha) + \xi\xi(\alpha) - 2\alpha\beta^2 - 4\alpha^3 + \gamma\xi(\alpha)]\phi e_1 + [-6\alpha e_1(\alpha) + \\
&\quad +2\alpha\beta\gamma + 2\beta\xi(\alpha) + \alpha\xi(\beta)]e_1 + [2\beta e_1(\alpha) + \alpha e_1(\beta) + 2\alpha^2\gamma]\xi.
\end{aligned}
$$

Συνδυάζοντας τις (3.1), (3.2), (3.3), (3.4), (3.6), (4.40), (4.101) και (5.26), έχουμε

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R}_x(\mathbb{H}) &= \tilde{R}(\mathbb{H},e_1)e_1+\tilde{R}(\mathbb{H},\xi)\xi=\alpha\tilde{R}(\phi e_1,e_1)e_1+\alpha\tilde{R}(\phi e_1,\xi)\xi \\
&= \alpha\{(\frac{r}{2}-2\kappa)\phi e_1+\mu[g(he_1,e_1)\phi e_1-g(h\phi e_1,e_1)e_1+h\phi e_1] \\
&\quad +\nu[g(\phi he_1,e_1)\phi e_1-g(\phi h\phi e_1,e_1)e_1+\phi h\phi e_1]+l\phi e_1\} \\
&= \alpha\{(\frac{r}{2}-2\kappa)\phi e_1+\mu[g(he_1,e_1)\phi e_1+g(h\phi e_1,\phi e_1)\phi e_1] \\
&\quad +\nu[g(\phi he_1,e_1)\phi e_1+g(\phi h\phi e_1,\phi e_1)\phi e_1]+\kappa\phi e_1+\mu h\phi e_1 \\
&\quad +\nu\phi h\phi e_1\} \\
&= \alpha\{(\frac{r}{2}-2\kappa)\phi e_1+\mu[g(he_1,e_1)\phi e_1-g(he_1,e_1)\phi e_1]+ \\
&\quad +\nu[g(\phi he_1,e_1)\phi e_1+g(h\phi e_1,e_1)\phi e_1]+\kappa\phi e_1-\mu\phi he_1 \\
&\quad -\nu\phi^2 he_1\} \\
&= \alpha\{(\frac{r}{2}-2\kappa)\phi e_1+\kappa\phi e_1-\mu(\beta-1)\phi e_1-\mu\gamma\phi^2 e_1+ \\
&\quad +\nu[(\beta-1)e_1+\gamma\phi e_1]\} \\
&= [\alpha(\frac{r}{2}-\kappa)-\alpha\mu(\beta-1)+\alpha\nu\gamma]\phi e_1+[\alpha\mu\gamma+\alpha\nu(\beta-1)]e_1
\end{aligned}
$$

και η απόδειξη της (5.54) έχει ολοκληρωθεί. □

Υπενθυμίζουμε ότι μια αντι-αναλλοίωτη επιφάνεια M^2 είναι διαρμονική αν και μόνο αν $\tau_2(\mathbb{H})=0$. Αξιοποιώντας το Λήμμα 5.12, έχουμε

Πρόταση 5.11. *Έστω $[M,(\eta,\xi,\phi,g)]$ μια τρισδιάστατη (κ,μ,ν)-πολλαπλότητα επαφής με $\kappa<1$ οπουδήποτε στην M και M^2 μια χωρίς ελαχιστικά σημεία αντι-αναλλοίωτη επιφάνεια της M. Η M^2 είναι διαρμονική επιφάνεια της M αν και μόνο αν ικανοποιείται το παρακάτω σύστημα διαφορικών εξισώσεων:*

$$e_1e_1(\alpha)+\xi\xi(\alpha)+\gamma\xi(\alpha)-\alpha(4\alpha^2+2\beta^2)+\alpha(\frac{r}{2}-\kappa)-\alpha\mu(\beta-1)+\alpha\nu\gamma=0, \quad (5.55)$$

$$6\alpha e_1(\alpha) - 2\alpha\beta\gamma - 2\xi(\alpha)\beta - \alpha\xi(\beta) - \alpha\mu\gamma - \alpha\nu(\beta - 1) = 0, \tag{5.56}$$

$$2\beta e_1(\alpha) + \alpha e_1(\beta) + 2\alpha^2\gamma = 0. \tag{5.57}$$

όπου $\alpha = \|\mathbb{H}\|, \beta = 1 + g(he_1, e_1)$ *και* $\gamma = g(he_1, \phi e_1)$.

Σε αντίθεση με τις καμπύλες του Legendre, το πρόβλημα της ταξινόμησης των γνήσια διαρμονικών αντι-αναλλοίωτων επιφανειών εμβυθισμένων σε τρισδιάστατες (κ, μ, ν)-πολλαπλότητες επαφής είναι αρκετά δύσκολο. Η δυσκολία κυρίως έγκειται στο γεγονός ότι το παραπάνω σύστημα εμπλέκει έξι συναρτήσεις $(\alpha, \beta, \gamma, \kappa, \mu, \nu)$ και τη βαθμωτή καμπυλότητα r. Στο επόμενο Θεώρημα, θέτοντας κάποιους περιορισμούς στις συναρτήσεις α και ν, παίρνουμε ένα μερικό αποτέλεσμα.

Θεώρημα 5.3. *Έστω* $[M, (\eta, \xi, \phi, g)]$ *μια τρισδιάστατη γενικευμένη* (κ, μ)-*πολλαπλότητα επαφής με* $\kappa < 1$ *οπουδήποτε στην* M *και* M^2 *μια αντι-αναλλοίωτη επιφάνεια της* M *με σταθερό μέτρο του διανυσματικού πεδίου της μέσης καμπυλότητας* c. *Αν η* M^2 *είναι διαρμονική, τότε είτε είναι ελαχιστική είτε είναι τοπικά επίπεδη και οι συναρτήσεις* κ *και* μ *είναι σταθερές στην* M^2. *Στη δεύτερη περίπτωση, για κάθε* $p \in M^2$ *υπάρχει ανοικτή γειτονιά* U_1 *του* p *και σύστημα συντεταγμένων* (u, v) *έτσι ώστε η μετρική* g *και η δεύτερη θεμελιώδης μορφή να παίρνουν τις παρακάτω μορφές στο* U_1*:*

$$g = (du)^2 + (dv)^2, \tag{5.58}$$

$$\begin{aligned} \sigma(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u}) &= 0, \\ \sigma(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}) &= -\frac{\mu}{2}\phi(\frac{\partial}{\partial v}), \\ \sigma(\frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v}) &= 2c\phi(\frac{\partial}{\partial v}). \end{aligned} \tag{5.59}$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η επιφάνεια M^2 είναι μη-ελαχιστική και διαρμονική με σταθερό μέτρο του διανυσματικού πεδίου μέσης καμπυλότητας $\alpha = c =$ σταθ. $\neq 0$. Τότε, η (5.57) δίνει

$$e_1(\beta) = -2c\gamma. \tag{5.60}$$

Από την άλλη πλευρά, συνδυάζοντας τις (5.38) και (5.56), έχουμε

$$\begin{aligned} 0 &= -2c\beta\gamma - c\xi(\beta) - c\mu\gamma \\ &= -2c\beta\gamma - c[\gamma(\mu - 2\beta)] - c\mu\gamma \\ &= -2c\mu\gamma, \end{aligned}$$

ή, ισοδύναμα,

$$\mu\gamma = 0. \tag{5.61}$$

Έστω $p \in M^2$. Στη συνέχεια, θεωρούμε το τοπικό πεδίο πλαισίων $\{\xi, e_1, \phi e_1\}$ ορισμένο επί μιας ανοικτής γειτονιάς $\bar{U}$ του p. Θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση γ μηδενίζεται στην ανοικτή γειτονιά $\bar{U}$. Σε αντίθετη περίπτωση, θεωρούμε το ανοικτό σύνολο $U_2 = \{q \in \bar{U} | \gamma(q) \neq 0\}$ της $\bar{U}$. Προφανώς, στο U_2 έχουμε $\mu = 0$. Στην περίπτωση αυτή, η (5.55) δίνει

$$\frac{r}{2} - \kappa - 4c^2 - 2\beta^2 = 0.$$

Παραγωγίζοντας την τελευταία σχέση ως προς ξ και χρησιμοποιώντας τις (4.44) και (4.96) με $\nu = 0$, έχουμε

$$\beta\xi(\beta) = 0. \tag{5.62}$$

Αρχικά, υποθέτουμε ότι $\beta = 0$ στο U_2. Τότε, η (5.60) δίνει $c\gamma = 0$, που είναι άτοπο. Στη συνέχεια, θεωρούμε το ανοικτό σύνολο $U_3 = \{q \in U_2 | \beta(q) \neq 0\}$

του U_2. Από την (5.62), εύκολα συμπεραίνουμε ότι $\xi(\beta) = 0$ στο U_3. Στην περίπτωση αυτή, η (5.38) δίνει

$$\xi(\beta) = 0 = \gamma(\mu - 2\beta) = -2\beta\gamma$$

στο U_3 και καταλήγουμε πάλι σε άτοπο. Εύκολα συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση γ μηδενίζεται στην ανοικτή γειτονιά $\bar{U}$. Επειδή η επιφάνεια M^2 είναι συνεκτική, έχουμε ότι η συνάρτηση γ μηδενίζεται στην επιφάνεια M^2. Στην περίπτωση αυτή, αξιοποιώντας τις (5.38) και (5.60), συνάγουμε ότι $\xi(\beta) = e_1(\beta) = 0$, δηλαδή, η συνάρτηση β είναι σταθερή στη M^2. Συνδυάζοντας το γεγονός ότι η συνάρτηση β είναι σταθερή στην M^2 και τις σχέσεις (4.44) και (5.50), λαμβάνουμε $e_1(\kappa) = \xi(\kappa) = 0$, δηλαδή, η συνάρτηση κ είναι σταθερή στην M^2. Επιπλέον, η σχέση (5.49) δίνει $\mu - 2\beta = 0$, δηλαδή, η συνάρτηση μ είναι σταθερή στην M^2. Από την άλλη πλευρά, αξιοποιώντας τις σχέσεις (5.31) και (5.32), έχουμε

$$[\xi, e_1] = \nabla_\xi e_1 - \nabla_{e_1}\xi = -\gamma e_1 = 0.$$

Συνεπώς, για κάθε $p \in M^2$ υπάρχει ανοικτή γειτονιά του U_1 και σύστημα συνταταγμένων (u, v) έτσι ώστε

$$\xi = \tfrac{\partial}{\partial u}, \quad e_1 = \tfrac{\partial}{\partial v}.$$

Χρησιμοποιώντας τις (5.27)-(5.29), εύκολα συνάγουμε ότι η μετρική g και η δεύτερη θεμελιώδης μορφή σ της M^2 στο U_1 παίρνουν τις μορφές (5.58) και (5.59), αντίστοιχα. Επιπλέον, χρησιμοποιώντας την (5.48) εύκολα συνάγουμε ότι η καμπυλότητα Gauss της M^2 ισούται με μηδέν και, συνεπώς, η M^2 είναι τοπικά επίπεδη. Έτσι, η απόδειξη του Θεωρήματος έχει ολοκληρωθεί. □

Κλείνουμε την παράγραφο αυτή αναφέροντας ένα παράδειγμα μιας αντι-αναλλοίωτης επιφάνειας εμβυθισμένης σε μια γενικευμένη (κ, μ)-πολλαπλότητα επαφής. Επιπλέον, η επιφάνεια αυτή χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα ότι το μέτρο του διανυσματικού πεδίου της μέσης καμπυλότητας είναι σταθερό.

Παράδειγμα 5.7. Θεωρούμε την τρισδιάστατη πολλαπλότητα $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z < 1\}$, εφοδιασμένη με τις καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y, z). Τα διανυσματικά πεδία στην M:

$$e_1 = \tfrac{\partial}{\partial x}, \quad e_2 = \tfrac{\partial}{\partial y}, \quad e_3 = 2y\tfrac{\partial}{\partial x} + (2x\sqrt{1-z} - \tfrac{y}{4(z-1)})\tfrac{\partial}{\partial y} + \tfrac{\partial}{\partial z}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητα σε κάθε σημείο της M. Θεωρούμε τη μετρική Riemann, για την οποία τα διανυσματικά πεδία e_1, e_2, e_3 συνιστούν ένα ορθομοναδιαίο πλαίσιο, καθώς και την 1-μορφή η που ορίζεται από τη σχέση $\eta(W) = g(W, e_1)$, για κάθε $W \in D^1(M)$. Συνεπώς, έχουμε $\eta(e_1) = g(e_1, e_1) = 1, \eta(e_2) = g(e_2, e_1) = 0$ και $\eta(e_3) = g(e_3, e_1) = 0$. Ορίζουμε το τανυστικό πεδίο ϕ τύπου (1,1) από τις σχέσεις

$$\phi e_1 = 0, \quad \phi e_2 = e_3, \quad \phi e_3 = -e_2$$

.

Η πολλαπλότητα M εφοδιασμένη με την τετράδα (η, e_1, ϕ, g) γίνεται μια γενικευμένη (κ, μ)-πολλαπλότητα επαφής με $\kappa = z$ και $\mu = 2(1 + \sqrt{1-z})$([50]). Συγκεκριμένα, για τον τελεστή h έχουμε ότι $he_1 = 0, he_2 = \sqrt{1-z}e_2$ και $he_3 = -\sqrt{1-z}e_3$. Συμβολίζουμε με $\tilde{\nabla}$ τη συνοχή Levi-Civita ως πρός τη μετρική Riemann g. Επιπλέον, έχουμε

$$\operatorname{grad}\kappa = e_1(\kappa)e_1 + e_2(\kappa)e_2 + e_3(\kappa)e_3 = e_3,$$

και, συνεπώς, $\|\operatorname{grad}\kappa\| = 1$. Για κάθε πραγματική σταθερά $c < 1$, θεωρούμε το επίπεδο

$$M_c = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = c < 1\}$$

που είναι κάθετο στον άξονα των z στο σημείο $(0,0,c)$. Το διανυσματικό πεδίο $\operatorname{grad}\kappa$ είναι το μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο στα επίπεδα M_c. Αφού $g(\operatorname{grad}\kappa,\xi)=\xi(\kappa)=0$, το ζευγάρι $\{e_1,e_2\}$ συνιστά ένα ορθομοναδιαίο πεδίο πλαισίων της M_c. Επιπλέον, έχουμε ότι $\phi(e_2)=e_3=\operatorname{grad}\kappa$ και, συνεπώς, οι επιφάνειες M_c είναι αντι-αναλλοίωτες. Συμβολίζουμε με ∇ τη Levi-Civita συνοχή της επιφάνειας M_c ως προς τη μετρική Riemann g. Αξιοποιώντας την (4.76), παίρνουμε

$$\tilde{\nabla}_{e_2}e_2=\frac{\phi e_2(\lambda)}{2\lambda}\phi e_2=\frac{\lambda'(z)}{2\lambda(z)}\phi e_2=\frac{1}{4(z-1)}e_3,$$

όπου $\lambda(z)=\sqrt{1-z}, z<1$. Από την άλλη πλευρά, χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.3) και περιορίζοντας την τελευταία σχέση στην επιφάνεια M_c, έχουμε

$$\frac{1}{4(c-1)}\operatorname{grad}\kappa=\tilde{\nabla}_{e_2}e_2=\nabla_{e_2}e_2+\sigma(e_2,e_2)$$

απ΄ όπου εύκολα συνάγουμε ότι

$$\nabla_{e_2}e_2=0,\quad \sigma(e_2,e_2)=\tfrac{1}{4(c-1)}\operatorname{grad}\kappa. \tag{5.63}$$

Εργαζόμενοι ανάλογα, έχουμε

$$0=\tilde{\nabla}_{e_1}e_1=\nabla_{e_1}e_1+\sigma(e_1,e_1)$$

απ΄ όπου εύκολα συνάγουμε ότι

$$\nabla_{e_1}e_1=0,\quad \sigma(e_1,e_1)=0. \tag{5.64}$$

Χρησιμοποιώντας τις (5.63) και (5.64) και τον ορισμό του διανυσματικού πεδίου μέσης καμπυλότητας, έχουμε

$$\mathbb{H}=\frac{1}{2}(\sigma(e_1,e_1)+\sigma(e_2,e_2))=\frac{1}{2}\sigma(e_2,e_2)=\frac{1}{8(c-1)}\operatorname{grad}\kappa$$

απ′ όπου εύκολα συνάγουμε ότι $\|\mathbb{H}\| = \frac{1}{8(1-c)}$ = σταθ. Συνοψίζοντας, οι επιφάνειες M_c είναι αντι-αναλλοίωτες με σταθερό μέτρο του διανυσματικού πεδίου της μέσης καμπυλότητας. Επιπλέον, έχουμε

$$\gamma = g(he_2, \phi e_2) = g(he_2, e_3) = \sqrt{1-z}g(e_2, e_3) = 0.$$

Συνδυάζοντας το Θεώρημα 4.7 και το Θεώρημα 5.6 της [1], έχουμε την ακόλουθη Πρόταση:

Πρόταση 5.12. *Έστω M^2 μια αντι-αναλλοίωτη επιφάνεια μιας τρισδιάστατης (κ, μ, ν)-πολλαπλότητα επαφής $[M, (\eta, \xi, \phi, g)]$ με $\kappa < 1$ οπουδήποτε στην M. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι η συνάρτηση κ είναι σταθερή. Τότε, η M^2 είναι διαρμονική αν και μόνο αν είναι ελαχιστική.*

Βιβλιογραφία

[1] Arslan K. - Ezentas R. - Murathan C. - Sasahara T., *Biharmonic submanifolds in 3-dimensional (κ, μ)-manifolds*, Int. J. Math. Math. Sci. **22**, (2005) 3575–3586.

[2] Arslan K. - Ezentas R. - Murathan C. - Sasahara T., *Biharmonic anti-invariant submanifolds in Sasakian space forms*, Beiträge Algebra Geom. **48(1)**, (2007) 191–207.

[3] Arvanitoyeorgos Andreas, *An Introduction to Lie Groups and the Geometry of Homogeneous Spaces*, Student Mathematical Library, Vol. 22, American Mathematical Society, Providence, 2003.

[4] Baird P. - Wood J. C., *Harmonic Morphisms between Riemannian Manifolds*, Vol. 29, London Math. Soc. Monogr. (N.S.), Oxford University Press, 2003.

[5] Besse A. L., *Einstein Manifolds*, Ergebnisse der Mathematik, Vol. 10, Springer, Berlin, 1987.

[6] Blair David E., *When is the tangent sphere bundle locally symmetric?*, Geometry and topology, World Scientific, Singapore, 1989.

[7] Blair David E., *Geometry of Contact and Symplectic Manifolds*, Progress in Mathematics, Birkhäuser, Boston, 2002.

[8] Blair David E., *Two remarks on contact metric structures*, Tôhoku Math. J. **29**, (1977) 319–324.

[9] Blair David E., *On the class of contact metric manifolds with a 3-τ-structure*, Note Mat. **16(1)**, (1996) 99–104.

[10] Blair D. E. - Baikoussis C., *On Legendre curves in contact 3-manifolds*, Geom. Dedicata **49(2)**, (1994) 135–142.

[11] Blair D. E. - Chen H., *A classification of 3-dimensional contact metric manifolds with $Q\phi = \phi Q$ II*, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica **20(4)**, (1992) 379–383.

[12] Blair D. E. - Koufogiorgos T. - Papantoniou V. J., *Contact metric mani-folds satisfying a nullity condition*, Israel J. Math. **91(1-3)**, (1995) 301–321.

[13] Blair D. E. - Koufogiorgos T. - Sharma R., *A classification of 3-dimensional contact metric manifolds with $Q\phi = \phi Q$*, Kodai Math. J. **13(3)**, (1990) 391–401.

[14] Blair D. E. - Ledger A. J., *Critical associated metrics on contact manifolds II*, J. Austral. Math. Soc. Ser. A **41(3)**, (1986) 404–410.

[15] Boeckx E. - Vanhecke L., *Harmonic and minimal vector fields on tangent and unit tangent sphere bundles*, Differential Geom. Appl. **13(1)**, (2000) 77–93.

[16] Boeckx E., *A class of locally ϕ-symmetric contact metric spaces*, Arch. Math. **72**, (1999) 466–472.

[17] Boeckx E., *A full classification of contact metric (κ, μ)-spaces*, Illinois J. Math. **44**, (2000) 212–219.

[18] Boothby, W. M. - Wang, H. C., *On contact manifolds*, Ann. of Math. **68**, (1958) 721–734.

[19] Caddeo R. - Oniciuc C. - Piu P., *Explicit formulas for non-geodesic biharmonic curves of the Heisenberg group*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino **62(3)**, (2004) 265–278.

[20] Caddeo R. - Montaldo S. - Oniciuc C., *Biharmonic submanifolds of S^3*, Intern. J. Math. **12(8)**, (2001) 867–876.

[21] Caddeo R. - Montaldo S. - Oniciuc C., *Biharmonic submanifolds in spheres*, Israel J. Math. **130**, (2002) 109–123.

[22] Calvaruso, G., *Einstein-like and conformally flat contact metric three-manifolds*, Balkan J. Geom. Appl. **5(2)**, (2000) 17–36.

[23] Calvaruso, G. - Perrone, D., *Torsion and homogeneity on contact metric three-manifolds*, Ann. Mat. Pura Appl.(4) **178**, (2000) 271–285.

[24] Calvaruso, G. - Perrone, D. - Vanhecke, L., *Homogeneity on three-dimensional contact metric manifolds*, Israel J. Math. **114**, (1999) 301–321.

[25] Chen B. Y., *Total Mean Curvature and Submanifolds of Finite Type*, Volu-me I, II, World Scientific Publishing, Singapore, 1984.

[26] Chen B. Y., *Some open problems and conjectures on submanifolds of finite type*, Soochow J. Math. **17(2)**, (1991) 169–188.

[27] Chen B. Y. - Ishikawa S., *Biharmonic surfaces in pseudo-Euclidean spaces*, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. A **45**, (1991) 323–347.

[28] Chern, S. S. - Hamilton, R., *On Riemannian metrics adapted to three-dimensional contact manifolds*,Vol. 1111, Lect. Notes in Math., Springer-Verlag, Berlin/New York, (1985) 279–308.

[29] Cho, J. T., *A conformally flat contact Riemannian (κ, μ)-space*, Indian J. Pure Appl. Math. **32(4)**, (2001) 501–508.

[30] Cho J. T. - Inoguchi J. I. - Lee J. E., *Biharmonic curves in 3-dimensional Sasakian space forms*, Ann. Mat. Pura Appl.(4) **186(4)**, (2007) 685–701.

[31] Dajczer Marcos, *Submanifolds and Isometric Immersions*, Publish or Perish, Inc., 1990.

[32] Dimitric I., *Submanifolds of E^m with harmonic mean curvature vector*, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica **20**, (1992) 53–65.

[33] Eells J. - Sampson, J. H., *Harmonic mappings of Riemannian manifolds*, Amer. Math. J. **86(1)**, (1964) 109–160.

[34] Gil - Medrano, O., *Relationship between volume and energy of vector fields*, Differential Geom. Appl. **15(2)**, (2001) 137–152.

[35] González-Dávila J. C. - Vanhecke, L., *Minimal and harmonic characteristic vector fields on three-dimensional contact metric manifolds*, J. Geom. **72(1-2)**, (2001) 65–76.

[36] Gouli - Andreou F. - Xenos Ph. J., *On 3-dimensional contact metric manifolds with* $\nabla_\xi \tau = 0$, J. Geom. **62**, (1998) 154–165.

[37] Gouli - Andreou F. - Xenos Ph. J., *On a class of 3-dimensional contact metric manifolds*, J. Geom. **63**, (1998) 64–75.

[38] Gouli - Andreou F. - Xenos Ph. J., *Two classes of conformally flat contact metric 3-manifolds*, J. Geom. **64(1-2)**, (1999) 80–88.

[39] Gouli - Andreou F. - Xenos Ph. J., *On a type of contact metric 3-manifolds*, Yokohama Math. J. **46(2)**, (1999) 109–118.

[40] Gouli-Andreou F. - Karatsobanis J. - Xenos Ph.J., *Conformally flat* 3-τ-α *manifolds*, Differ. Geom. Dyn. Syst. **10**, (2008) 107–131.

[41] Han D. S. - Yim J. W., *Unit vector fields on spheres, which are harmonic maps*, Math. Z. **227(1)**, (1998) 83–92.

[42] Inoguchi J. I., *Submanifolds with harmonic mean curvature vector field in contact 3-manifolds*, Colloq. Math. **100(2)**, (2004) 163–179.

[43] Jiang G. Y., *2-harmonic maps and their first and second variational formulas*, Chinese Ann. Math. Ser. A **7(4)**, (1986) 389–402.

[44] Karatsobanis J. - Xenos Ph. J., *On a new class of contact metric 3-manifolds*, J. Geom. **80**, (2004) 136–153.

[45] Kobayashi S. - Nomizu K., *Foundations of Differential Geometry*, I, II, Interscience Publishers, N.Y., 1963.

[46] Koufogiorgos, T., *On a class of contact Riemannian 3-manifolds*, Results Math. **27(1-2)**, (1995) 51–62.

[47] Koufogiorgos Themis - Markellos Michael - Papantoniou J. Vassilis, *The harmonicity of the Reeb vector field on contact metric 3-manifolds*, Pacific J. Math. **234(2)**, (2008) 325–344.

[48] Koufogiorgos Th. - Markellos M. - Papantoniou V. J., *The* (κ, μ, ν)*-contact metric manifolds and their classification in the 3-dimensional case*, Proceedings of the 10th Intrnational Conference on Differential Geometry and its Applications Olomouc, Czech Republic, 2007, World Scientific Publishing Co., (2008) 293–303.

[49] Koufogiorgos T. - Tsichlias C., *On the existence of a new class of contact metric manifolds*, Canad. Math. Bull. **43(4)**, (2000) 440–447.

[50] Koufogiorgos T. - Tsichlias C., *Generalized* (κ, μ)*-contact metric manifolds with* $\|\operatorname{grad}\kappa\| =$ *constant*, J. Geom. **78**, (2003) 83–91.

[51] Koufogiorgos T. - Tsichlias C., *Generalized* (κ, μ)*-manifolds with* $\xi(\mu) = 0$, Tokyo J. Math **31(1)**, (2008) 39–57.

[52] Lutz, R., *Sur la géométrie des structures de contact invariantes*, Ann. Inst. Fourier **29**, (1979) 283–306.

[53] Μάρκελλος Μ., *Ειδικές Κατηγορίες Πολλαπλοτήτων Επαφής Riemann*, Μεταπτυχιακή Διατριβή, Πάτρα 2006.

[54] Michael Markellos - Vassilis J. Papantoniou, *Biharmonic submanifolds in non-Sasakian contact metric 3-manifolds*, έχει υποβληθεί για δημοσίευση.

[55] Montaldo S. - Oniciuc C., *A short survey on biharmonic maps between Riemannian manifolds*, Rev. Un. Mat. Argentina **47(2)**, (2006) 1–22.

[56] Martinet J., *Formes de contact sur les variétiés de dimension 3*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 209, Springer, Berlin, (1971) 142–163.

[57] O' Neil B., *Semi-Riemannian geometry with Applications to Relativity*, Academic Press, San Diego, CA, 1983.

[58] Papantoniou B. J., *Contact Riemannian manifolds satisfying $R(\xi, X)R = 0$ and $\xi \in (\kappa, \mu)$-nullity distribution*, Yokohama Math.J. **40**, (1993) 149–161.

[59] Papantoniou B. J., *Contact manifolds, harmonic curvature tensor and (κ, μ)-nullity distribution*, Comment. Math. Univ. Carolin. **34**, (1993) 323–334.

[60] Παπαντωνίου Β. Ι., *Διαφορίσιμες Πολλαπλότητες*, Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών, Πάτρα, 1993.

[61] Παπαντωνίου Β. Ι., *Τανυστική Ανάλυση και Γεωμετρία Riemann*, Τόμος ΙΙ, Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών, Πάτρα, 1996.

[62] Perrone, D., *Torsion and critical metrics on contact three-manifolds*, Kodai Math. J. **13**, (1990) 88–100.

[63] Perrone, D., *Contact Riemannian manifolds satisfying* $R(X,\xi)R = 0$, Yokohama Math. J. **39**, (1992) 141–149.

[64] Perrone, D., *Ricci tensor and spectral rigidity of contact Riemannian 3-manifolds*, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica **24(2)**, (1996) 127–138.

[65] Perrone, D., *Homogeneous contact Riemannian three-manifolds*, Illinois J. Math. **42**, (1998) 243–256.

[66] Perrone, D., *Weakly* ϕ*-symmetric contact metric spaces*, Balkan J. Geom. Appl. **7(2)**, (2002) 67–77.

[67] Perrone, D., *Harmonic characteristic vector fields on contact metric three-manifolds*, Bull. Austral. Math. Soc. **67(2)**, (2003) 305–315.

[68] Perrone, D., *Contact metric manifolds whose characteristic vector field is a harmonic vector field*, Differential Geom. Appl. **20(3)**, (2004) 367–378.

[69] Perrone, D., *Taut contact circles on* H*-contact 3-manifolds*, Int. Math. Forum **1(25-28)**, (2006) 1285–1296.

[70] Perrone, D., *Stability of the Reeb vector field of* H*-contact manifolds*, to appear in Math. Z.

[71] Sasaki, S., *On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure I*, Tôhoku Math. J. **12**, (1960) 459–476.

[72] Sasaki, S., *A characterization of contact transformations*, Tôhoku Math. J. **16**, (1964) 285–290.

[73] Tanno, S., *Locally symmetric K-contact Riemannian manifolds*, Proc. Japan Acad. **43**, (1967) 581–583.

[74] Tanno, S., *The topology of contact Riemannian manifolds*, Illinois J. Math. **12**, (1968) 700–717.

[75] Tanno, S., *Ricci curvatures of contact Riemannian manifolds*, Tôhoku Math. J. **40**, (1988) 441–448.

[76] Tanno, S., *Variational problems on contact Riemannian manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **314**, (1989) 349–379.

[77] Tricerri, F. - Vanhecke, L., *Homogeneous structures on Riemannian manifolds*, Vol. 83, London Mathematical Society, Lecture Note Series, 1989.

[78] Τσιχλιάς Χ., *Πολλαπλότητες Επαφής Riemann*, Μεταπτυχιακή Διατριβή, Ιωάννινα 1997.

[79] Τσιχλιάς Χ., *Γενικευμένες* (κ, μ)*-πολλαπλότητες*, Διδακτορική Διατριβή, Ιωάννινα 2005.

[80] Tripathi M.M. - Kim J.S., *On the concircular curvature tensor of a* (κ, μ)*-manifold*, Balkan J. Geom. Appl. **9(1)**, (2004) 114–124.

[81] Urakawa, H., *Calculus of Variations and Harmonic maps*, Vol. 132, Transl. Math. Monograph., Amer.Math.Soc., Providence, 1993.

[82] Yano K. - Kon M., *Anti-invariant Submanifolds*, Vol. 21, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Marcel Dekker, New York, 1976.

[83] Watanabe Y., *Geodesic symmetries in Sasakian locally ϕ-symmetric spaces*, Kodai Math. J. **3(1)**, (1980) 48–55.

[84] Wiegmink, G., *Total bending of vector fields on Riemannian manifolds*, Math. Ann. **303(2)**, (1995) 325–344.

[85] Wood, C.M., *On the energy of a unit vector field*, Geom. Dedicata **64(3)**, (1997) 319–330.