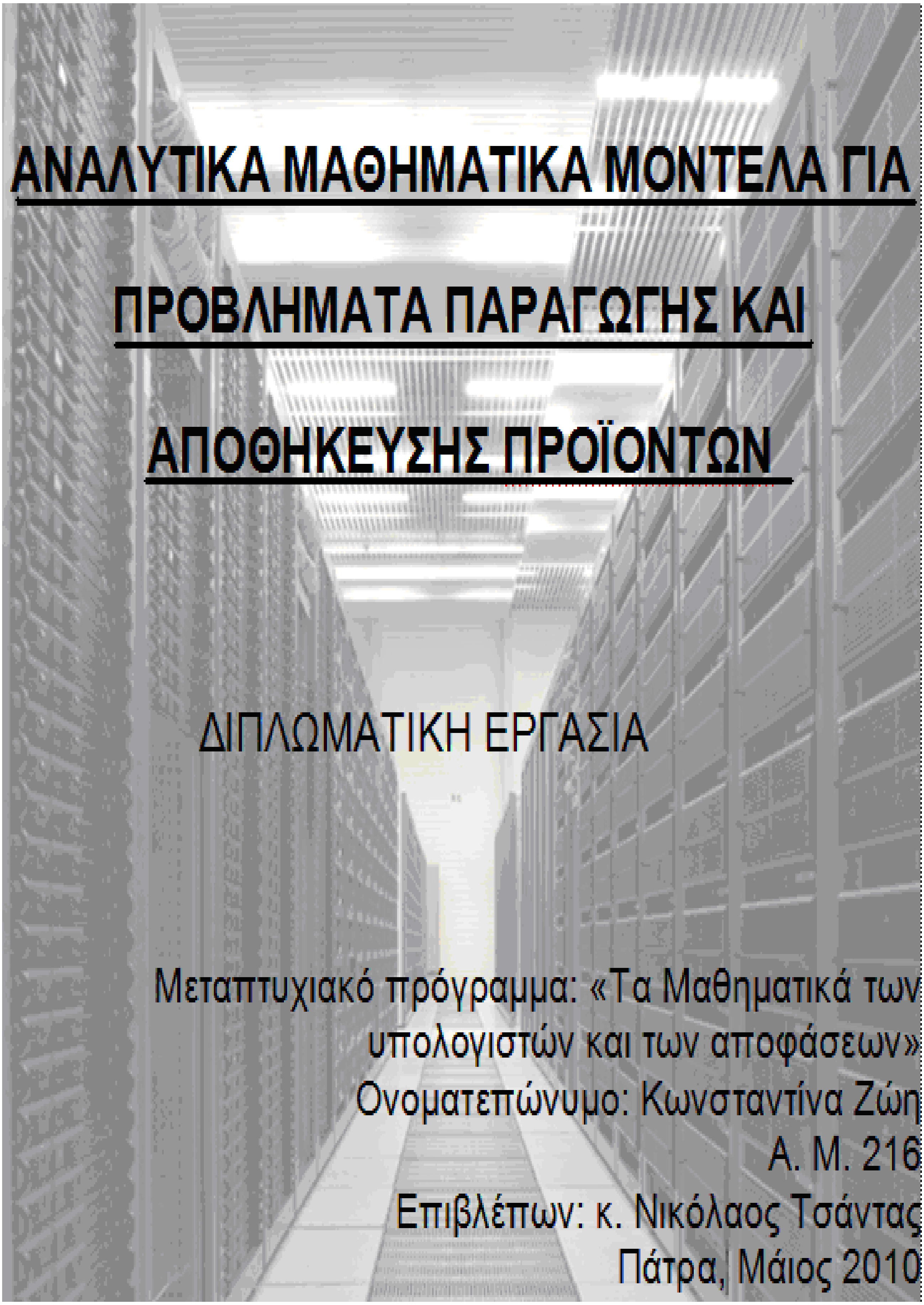


ΑΝΑΛΥΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΓΙΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΑΠΟΘΗΚΕΥΣΗΣ ΠΡΟΪΟΝΤΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Μεταπτυχιακό πρόγραμμα: «Τα Μαθηματικά των υπολογιστών και των αποφάσεων»

Ονοματεπώνυμο: Κωνσταντίνα Ζώη
Α. Μ. 216
Επιβλέπων: κ. Νικόλαος Τσάντας

Πάτρα, Μάιος 2010

Αφιερωμένη στους γονείς μου

Χαράλαμπο, Αφροδίτη

και στις αδερφές μου

Δάφνη, Στέλλα

Ευχαριστώ πολύ τον καθηγητή κ. Νικόλαο Τσάντα για τη συνεργασία που είχαμε προκειμένου να ολοκληρωθεί σωστά η παρούσα διπλωματική εργασία.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Ο προγραμματισμός παραγωγής και ελέγχου αποθεμάτων αποσκοπεί στην εύρεση της "χρυσής τομής" μεταξύ δυο αντιφατικών στόχων, από πλευράς ελαχιστοποίησης του συνολικού κόστους λειτουργίας μιας επιχείρησης: της μείωσης απ' τη μια του διαθέσιμου αποθέματος και της ύπαρξης απ' την άλλη ικανής ποσότητας διαθέσιμων αγαθών έτσι ώστε να καλύπτεται η ζήτησή τους στην αγορά. Ο συμβιβασμός μεταξύ αυτών των δυο στόχων επιτυγχάνεται με την δημιουργία κατάλληλων μαθηματικών κανόνων για τη χρονική (πότε;) και ποσοτική (πόσο;) διακίνηση του αποθέματος.

Για την επίλυσή του έχουν προταθεί διάφορα μαθηματικά μοντέλα, τα οποία ποσοτικοποιούν τις παραμέτρους κόστους και εκφράζουν το συνολικό κόστος λειτουργίας της επιχείρησης με τη χρήση μιας συνάρτησης η οποία βελτιστοποιείται με εφαρμογή μαθηματικών μεθόδων. Η παρούσα εργασία επικεντρώνεται στην παρουσίαση των πιο ευρέως χρησιμοποιούμενων, προσδιοριστικών μοντέλων (όλες οι παράμετροι του συστήματος είναι γνωστές σταθερές) ενώ ο ορίζοντας σχεδιασμού θεωρείται πεπερασμένος.

Στο πρώτο κεφάλαιο της παρούσας εργασίας παρουσιάζονται τα γενικά χαρακτηριστικά ενός προβλήματος παραγωγής και αποθήκευσης καθώς επίσης τα σχετικά με αυτό κόστη. Στο δεύτερο κεφάλαιο ακολουθεί η παρουσίαση των μοντέλων της Οικονομικής Ποσότητας Παραγγελίας, στα οποία θεωρείται ότι η ζήτηση πραγματοποιείται με ένα σταθερό ρυθμό και ότι το απόθεμα επιθεωρείται διαρκώς (ο χρόνος θεωρείται συνεχής). Αντίθετα, στα μοντέλα του τρίτου κεφαλαίου ο ορίζοντας σχεδιασμού χωρίζεται σε τακτά χρονικά διαστήματα, δηλαδή γίνεται η παραδοχή ότι ο χρόνος είναι διακριτός. Τέλος, στο τέταρτο αντιστοιχείται σε κάθε

μοντέλο που αναλύθηκε στα προηγούμενα κεφαλαία, μια ολοκληρωμένη εφαρμογή η οποία επιλύεται λεπτομερώς.

SUMMARY

Programmising the production and stock control aims to find the “golden mean” between two contradictory goals : as far as minimizing the total service expenses of a company is concerned, reduce the available cost, and on the other hand the existence of another one adequate quantity of available goods, so that their demand in the market can be covered. The compromising between these two goals can be achieved with the creation of appropriate mathematic rules about the time (when?) and amount (how much?) stock circulation.

In order to achieve this compromising, many mathematical models have been proposed which quantify the subsiding costs and express the total service expenses of the company, using a function which is constantly being improved with the application of mathematical methods. The present project focuses on the presentation of the most widely used defining models, while the designing horizon is considered to be passed by.

In the first part of the present project appear the general characteristics of a problem concerning the production and saving, as well as the relevant costs. The second part includes the presentation of the model about the Economic Order Quantity, in which it is regarded that demand is accomplished with a steady pace, and that the stock is constantly being checked (time is regarded to be continuous). On the other hand, in the model of the third part, the designing horizon is divided in regular time spaces, reaching the conclusion that time is apparent significant. Finally in the last part, each model analyzed in the previous chapters, is matched with a complete application, being solved in detail.

1. ΓΕΝΙΚΑ ΓΙΑ ΤΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΑΠΟΘΗΚΕΥΣΗΣ

1.1 Ο ρόλος και η σπουδαιότητα του προγραμματισμού και ελέγχου αποθεμάτων.

Χρησιμοποιώντας τον όρο απόθεμα (stock) εννοούμε οποιοδήποτε αγαθό αποθηκεύεται με στόχο είτε την άμεση χρήση, είτε κάποια μελλοντική χρήση. Τα αγαθά αυτά μπορεί να είναι πρώτες ύλες, εξαρτήματα, ημικατεργασμένα, ή τελικά προϊόντα κ.α. τα οποία χρησιμοποιούνται κυρίως σε συστήματα παραγωγής, εμπορίας και διακίνησης προϊόντων, αλλά μπορούμε να τα συναντήσουμε και σε οργανωμένα συστήματα (π.χ. οικογένεια, δημόσια υπηρεσία, βιομηχανία, τράπεζα). Τέτοια συστήματα έχουν ως στόχο να μειώσουν τα διαθέσιμα αποθέματα, πράγμα που έχει θετική επίδραση στο λειτουργικό κόστος, αλλά και να έχουν διαθέσιμα αγαθά ώστε να καλύπτεται άμεσα οποιαδήποτε ζήτησή τους.

Ο «προγραμματισμός παραγωγής και ελέγχου αποθεμάτων (αποθήκευσης)» προσπαθεί να συνδυάσει τους παραπάνω στόχους με την διατύπωση κανόνων διαχείρισης των αποθεμάτων έτσι ώστε να επιτευχθεί το επιθυμητό επίπεδο εξυπηρέτησης στο ελάχιστο συνολικό κόστος. Επειδή όμως, είναι αδύνατον να ελέγξουμε τη ζήτηση, ελέγχουμε την ανανέωση του αποθέματος με σκοπό να επηρεαστεί το κόστος. Αυτούς τους κανόνες, γνωστοί ως « σύστημα αποθεμάτων», μπορούμε να τους προσδιορίσουμε από τη μαθηματική διερεύνηση της χρονικής (πότε;) και της ποσοτικής (πόσο;) διακίνησης του αποθέματος.

Στη συνέχεια της εργασίας παρατίθενται τα συχνότερα χρησιμοποιούμενα συστήματα αποθεμάτων (μοντέλων) για τον υπολογισμό των βασικών μεγεθών που καθορίζουν την πολιτική που πρέπει να χρησιμοποιήσει ένα σύστημα προγραμματισμού και ελέγχου αποθεμάτων με πεπερασμένο ορίζοντα σχεδιασμού ώστε να ελαχιστοποιήσει το συνολικό κόστος λειτουργίας (βέλτιστη πολιτική παραγγελίας). Σε όλη την εργασία, θεωρούμε ότι όλες οι παράμετροι του συστήματος (ζήτηση, κόστη) είναι γνωστές σταθερές και όχι τυχαίες μεταβλητές.

1.2 Γενικά χαρακτηριστικά των μοντέλων που έχουν προταθεί για τον έλεγχο αποθεμάτων. Είδη μοντέλων.

Κάθε σύστημα διαχείρισης αποθεμάτων έχει ως στόχο την ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους. Για τον προσδιορισμό των βασικών μεγεθών «πότε, πόσο» που καθορίζουν τους βασικούς κανόνες λειτουργίας του συστήματος είναι σημαντική η γνώση των στοιχείων κόστους. Όλα τα μοντέλα χρησιμοποιούν ως αντικειμενική συνάρτηση το συνολικό κόστος αποθέματος μέσα σε μία ορισμένη χρονική περίοδο. Η συνάρτηση αυτή περιλαμβάνει όλες τις δαπάνες που μεταβάλλονται μόλις αλλάξει η πολιτική διαχείρισης που εφαρμόζεται.

Επίσης, τα μοντέλα με τα οποία θα ασχοληθούμε προσπαθούν να δώσουν απάντηση στα εξής ερωτήματα:

1) πόση ποσότητα προϊόντος πρέπει να παραγγέλνεται κάθε φορά, ώστε να ανανεώνεται το απόθεμα **(πόσο)**

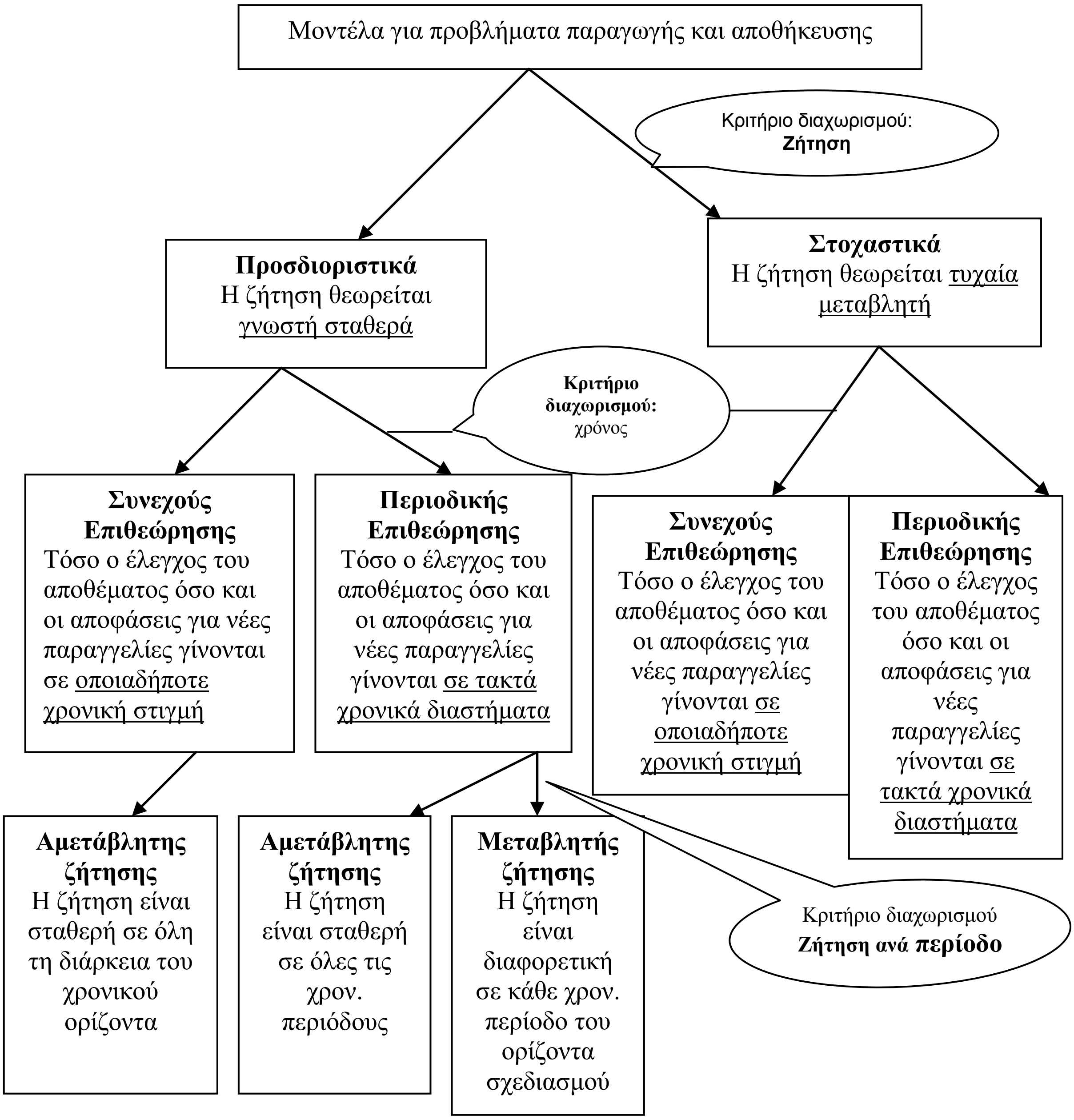
2) Πότε πρέπει να παραγγέλνεται η παραπάνω ποσότητα **(πότε)**. Το πότε πρέπει να γίνει μία παραγγελία εξαρτάται από τη στάθμη του αποθέματος. Ο έλεγχος της στάθμης του αποθέματος γίνεται με 2 τρόπους:

α) Με συνεχή έλεγχο των αποθεμάτων όπου ο χρόνος θεωρείται συνεχής. Η χρονική στιγμή στην οποία γίνεται η παραγγελία (σημείο νέας παραγγελίας, reorder point) είναι η στιγμή όπου η στάθμη του αποθέματος πέφτει σε κάποιο επίπεδο. Τέτοια μοντέλα ονομάζονται **«μοντέλα συνεχούς επιθεώρησης»**.

β) Με έλεγχο των αποθεμάτων ανά τακτά χρονικά διαστήματα. Εδώ, ο χρόνος είναι διακριτός αφού η στάθμη του αποθέματος ελέγχεται σε τακτά χρονικά διαστήματα με αποτέλεσμα οι νέες παραγγελίες να γίνονται μόνο είτε στην αρχή είτε στο τέλος αυτών των χρονικών διαστημάτων. Αυτά τα μοντέλα ονομάζονται **«μοντέλα περιοδικής επιθεώρησης»**.

Μία άλλη σημαντική παράμετρος που πρέπει να αναφερθεί είναι ο παράγοντας της ζήτησης. Βάση της ζήτησης τα μοντέλα διαχείρισης αποθεμάτων διακρίνονται σε: **προσδιοριστικά** (μοντέλα όπου η ζήτηση είναι προβλέψιμη) και σε **στοχαστικά** (μοντέλα όπου υπάρχει αβεβαιότητα στη ζήτηση). Στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε με προσδιοριστικά μοντέλα. Επίσης, τα μοντέλα περιοδικής επιθεώρησης διακρίνονται βάση της ζήτησης σε μοντέλα αμετάβλητης ζήτησης (δηλαδή μοντέλα όπου η ζήτηση είναι η ίδια για όλες τις περιόδους όπου χωρίζεται ο χρονικός ορίζοντας σχεδιασμού) και σε μοντέλα μεταβλητής ζήτησης (δηλαδή μοντέλα όπου η ζήτηση μεταβάλλεται στις διάφορες περιόδους.

Να αναφερθεί επίσης, ότι στα μοντέλα διαχείρισης αποθεμάτων προτείνονται αλγόριθμοι που οδηγούν σε κάποια σχεδόν βέλτιστη λύση και ορισμένες μόνο φορές οδηγούν στη βέλτιστη λύση.



Σχήμα 1.1 Διάκριση των μοντέλων παραγωγής και αποθήκευσης

1.3 Παραδείγματα

Παρακάτω αναπτύσσονται δύο παραδείγματα ενός κατασκευαστή και ενός χονδρέμπορα όπου ένα πρόβλημα παραγωγής και αποθήκευσης προϊόντων πρέπει να αναπτυχθεί.

<u>Παράδειγμα -1-:</u>

Μία κατασκευαστική επιχείρηση τηλεοράσεων παράγει τα δικά της μεγάφωνα που χρησιμοποιούνται για την παραγωγή τηλεοράσεων. Επισημαίνεται ότι οι τηλεοράσεις συγκεντρώνονται σε μία συνεχή γραμμή παραγωγής και ότι μεγάλες ποσότητες τηλεοράσεων μπορούν να παραχθούν σε σύντομο χρονικό διάστημα. Τα μεγάφωνα παραμένουν στην αποθήκη έως ότου χρειαστούν για τη συναρμολόγηση των τηλεοράσεων. Η επιχείρηση ενδιαφέρεται για το ποια είναι η κατάλληλη ποσότητα μεγαφώνων που πρέπει να παραγγέλνεται κάθε φορά για την ανανέωση του αποθέματος και πότε πρέπει να παραγγέλνεται η ανωτέρα ποσότητα μεγαφώνων.

1. Κάθε φορά που παράγεται ένα τεμάχιο προϊόντος, το κόστος παραγγελίας ανέρχεται στα 12000€. Αυτό το κόστος περιλαμβάνει το κόστος εξοπλισμού, τα διοικητικά έξοδα κ.α.

2. Το μοναδιαίο κόστος παραγωγής ενός μεγαφώνου (δεν περιλαμβάνει το κόστος παραγγελίας) είναι 10€, ανεξαρτήτως του μεγέθους του τεμαχίου που παράγεται. Να σημειωθεί ότι το κόστος παραγωγής μιας μονάδας προϊόντος δεν είναι πάντα σταθερό, αλλά μπορεί να μειωθεί με τη μείωση του μεγέθους του τεμαχίου.

3. Το εκτιμώμενο κόστος αποθήκευσης - διατήρησης ενός μεγαφώνου στην αποθήκη ανέρχεται στα 0.30€ το μήνα. Το κόστος αποθήκευσης περιλαμβάνει το κόστος μίσθωσης του χώρου αποθήκευσης, το κόστος ασφάλειας των μεγαφώνων στην αποθήκη εξαιτίας πυρκαγιάς, κλοπής ή βανδαλισμού, φόροι βασισμένοι στην

αξία του αποθέματος καθώς επίσης περιλαμβάνει και το κόστος του προσωπικού που επιτηρούν και προστατεύουν το απόθεμα.

4. Η πολιτική της επιχείρησης απαγορεύει σκόπιμα των προγραμματισμό των πιθανών ελλείψεων σε μεγάφωνα οπότε είναι λογικό να προκύπτει έλλειψη. Έχει υπολογιστεί ότι κάθε μεγάφωνο που δεν είναι διαθέσιμο όταν ζητείται κοστίζει 1.10€ το μήνα. Αυτό το κόστος έλλειψης περιλαμβάνει το επιπρόσθετο κόστος τοποθέτησης των μεγαφώνων μετά την πλήρη κατασκευή της τηλεόρασης, το ενδιαφέρον που χάνεται λόγω της καθυστέρησης στη λήψη του εισοδήματος από τις πωλήσεις κ.α.

Παράδειγμα -2- :

Ένας διανομέας χονδρικής πώλησης ποδηλάτων έχει το πρόβλημα έλλειψης ενός δημοφιλούς μοντέλου και αναθεωρεί αυτήν την περίοδο την πολιτική παραγωγής και αποθήκευσής του. Ο διανομέας αγοράζει αυτό το μοντέλο ποδηλάτου από τον κατασκευαστή κάθε μήνα και το παρέχει σε διάφορα καταστήματα ποδηλάτων σύμφωνα με τη διαμορφωμένη ζήτηση. Η συνολική ζήτηση από τα καταστήματα ποδηλάτων είναι αβέβαιη. Επομένως, η ερώτηση είναι πόσα ποδήλατα θα έπρεπε να παράγει ο κατασκευαστής για έναν οποιοδήποτε μήνα; Ο διανομέας έχει αναλύσει τις δαπάνες και έχει καθορίσει ότι τα ακόλουθα είναι σημαντικά:

1. Το κόστος παραγγελίας (δηλαδή το κόστος για μία παραγγελία μαζί με το κόστος αγοράς των ποδηλάτων) που περιλαμβάνει: α) τα διοικητικά έξοδα δηλαδή τα έξοδα που πρέπει να γίνουν για να τεθεί σε ισχύ μία παραγγελία που ανέρχονται στα 200€ και β) το κόστος κάθε ποδηλάτου που είναι 35€ για τον χονδρέμπορο.

2. Το κόστος αποθήκευσης μίας μονάδας προϊόντος δηλαδή το κόστος διατήρησης ενός ποδηλάτου στην αποθήκη που είναι 1€ για κάθε ποδήλατο που

παραμένει στο τέλος του μήνα. Αυτό το κόστος περιλαμβάνει επίσης τις δαπάνες του κεφαλαίου που εμπλέκεται, το κόστος ενοικίασης της αποθήκης, την ασφάλεια, τους φόρους και ούτω καθ' εξής.

3. Το κόστος έλλειψης αποθέματος, το κόστος δηλαδή να μην υπάρχει ένα ποδήλατο όταν χρειαστεί. Αυτό το συγκεκριμένο μοντέλο ξανά παραγγέλνεται στον κατασκευαστή και τα καταστήματα δέχονται συνήθως μία καθυστέρηση στην παράδοση. Ακόμα αν και οι ελλείψεις είναι επιτρεπτές, ο διανομέας θεωρεί ότι υφίσταται μία απώλεια, την οποία υπολογίζει να είναι 15€ ανά ποδήλατο το μήνα λόγω της έλλειψης. Αυτό το εκτιμώμενο κόστος λαμβάνει υπόψη την πιθανή απώλεια μελλοντικών ελλείψεων λόγω της απώλειας πελατών. Σε αυτό το κόστος συμπεριλαμβάνεται η καθυστέρηση εσόδων από τις πωλήσεις καθώς και τα συμπληρωματικά διοικητικά έξοδα που συνδέονται με τις ελλείψεις. Εάν μερικά καταστήματα ακυρώνουν τις παραγγελίες λόγω των καθυστερήσεων, τα χαμένα εισοδήματα από αυτές τις απολεσθείσες πωλήσεις περιλαμβάνονται σ' αυτό το κόστος (ωστόσο, τέτοιες ακυρώσεις δεν λαμβάνουν χώρα στο παράδειγμά μας).

Και τα δύο παραδείγματα διευκρινίζουν ότι υπάρχουν δύο δυνατότητες για το πώς μία εταιρεία ανανεώνει το απόθεμά της. Η μία δυνατότητα είναι ότι η εταιρεία παράγει τις μονάδες που χρειάζεται μόνη της (όπως ο κατασκευαστής τηλεοράσεων που παράγει τα μεγάφωνα). Η άλλη δυνατότητα είναι ότι η εταιρεία παραγγέλνει τις μονάδες από έναν προμηθευτή (όπως ο διανομέας ποδηλάτων που παραγγέλνει τα ποδήλατα από τον κατασκευαστή). Και τα δύο παραδείγματα εξετάζουν ένα συγκεκριμένο προϊόν (μεγάφωνα για ένα συγκεκριμένο είδος τηλεόρασης ή ένα συγκεκριμένο μοντέλο ποδηλάτου). Στα περισσότερα μοντέλα διαχείρισης αποθεμάτων μόνο ένα προϊόν εξετάζεται σε έναν χρόνο.

Στην επόμενη παράγραφο, δίνονται αναλυτικά τα κόστη που λαμβάνονται υπόψη στα διάφορα μοντέλα διαχείρισης των αποθεμάτων.

1.4 Κόστη που εμπλέκονται στα μοντέλα προγραμματισμού παραγωγής και ελέγχου αποθεμάτων (αποθήκευσης)

1. Το κόστος παραγγελίας (ordering / setup cost) K

Ως κόστος παραγγελίας θεωρούνται όλα τα έξοδα που γίνονται ώστε να τεθεί μία παραγγελία ή να παραχθεί ένα προϊόν από την ίδια την εταιρεία. Αυτά τα έξοδα είναι ανεξάρτητα του μεγέθους της παραγγελίας και της παραγωγικής διαδικασίας. Το κόστος παραγγελίας μπορεί να αντιπροσωπευθεί από μία συνάρτηση K(z), με:

$$K(z) = \text{κόστος παραγγελίας z μονάδων} = \begin{cases} o, \text{εάν} z = 0 \\ \kappa + cz \text{εάν} z > 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

όπου κ = σταθερός όρος που περιλαμβάνει τα διοικητικά έξοδα μιας παραγγελίας ή τις σχετικές δαπάνες στην οργάνωση για να αρχίσει η παραγωγή και c = το κόστος αγοράς μιας μονάδας προϊόντος.

Στο παράδειγμα 1, τα μεγάφωνα παράγονται και το κόστος μίας τρέχουσας παραγωγής είναι 12000€. Επιπλέον κάθε μεγάφωνο κοστίζει 10€ και το κόστος παραγγελίας όταν γίνεται μία παραγγελία z μεγαφώνων δίνεται κοντά στα K(z) = 12000 + 10z με z > 0.

Στο παράδειγμα 2, η διανομή παραγγελιών ποδηλάτων από τον κατασκευαστή και το κόστος παραγγελίας δίνεται κοντά στα

K(z) = 200 + 35z με z > 0.

2. Το μοναδιαίο κόστος παραγωγής / απόκτησης (unit purchasing cost) c

Στο κόστος αυτό περιλαμβάνονται τα χρήματα που καταβάλει η εταιρεία για την απόκτηση μίας μονάδας προϊόντος. Να σημειωθεί ότι εάν η ίδια η εταιρεία παράγει το προϊόν, τότε το κόστος c υπολογίζεται ως:

(το κόστος εργασίας) + (το κόστος των πρώτων υλών για την απόκτηση ενός τεμαχίου προϊόντος)

3. Το κόστος αποθήκευσης / διατήρησης (holding cost) h:

Αντιπροσωπεύει όλες τις δαπάνες που κάνει μία εταιρεία για τη διατήρηση στην αποθήκη της ενός τεμαχίου προϊόντος για μία συγκεκριμένη χρονική περίοδο. Στο κόστος αποθήκευσης συμπεριλαμβάνονται τα έξοδα της εταιρείας για την ενοικίαση της αποθήκης, το κόστος ασφάλισης των προϊόντων στην αποθήκη (λόγω φωτιάς, υγρασίας) κ.α.

Στο παράδειγμα των ποδηλάτων, το κόστος αποθήκευσης είναι 1€ ανά ποδήλατο που παραμένει στο τέλος του μήνα. Στο παράδειγμα των μεγαφώνων για τις τηλεοράσεις το κόστος αποθήκευσης υπολογίζεται στα 0.30€ ανά μεγάφωνο που βρίσκεται στο απόθεμα κάθε μήνα, με αποτέλεσμα το μέσο κόστος αποθήκευσης το μήνα είναι 0.30 φορές ο μέσος αριθμός μεγαφώνων στο απόθεμα.

4. Το κόστος έλλειψης αποθέματος (shortage cost) s :

Αντιπροσωπεύει το κόστος που προκύπτει όταν το ποσό των προϊόντων που ζητείται (ζήτηση) υπερβαίνει το διαθέσιμο απόθεμα. Διακρίνεται σε 2 κατηγορίες:

α) καθυστερημένη ικανοποίηση της παραγγελίας (backlogging). Σε αυτήν την περίπτωση η ζήτηση δεν χάνεται, αλλά αντ' αυτού κρατιέται έως ότου μπορέσει να ικανοποιηθεί μόλις ξαναγεμίσει η στάθμη του αποθέματος. Για μία εταιρεία που υφίσταται μία προσωρινή έλλειψη παροχής προς τους πελάτες της (όπως στο παράδειγμα των ποδηλάτων), το κόστος μη – ανταπόκρισης έπειτα μπορεί να ερμηνευθεί ως απώλεια της καλής θέλησης των πελατών και της απροθυμίας των επιχειρήσεων να συνεργαστούν με την εταιρεία, και ως το κόστος του καθυστερημένου εισοδήματος, και των πρόσθετων διοικητικών εξόδων. Για έναν κατασκευαστή που υφίσταται μία προσωρινή έλλειψη στα υλικά που απαιτούνται για την παραγωγή (όπως μία έλλειψη των μεγάφωνων για τη συναρμολόγηση των τηλεοράσεων) το κόστος μη - ανταπόκρισης γίνεται το κόστος που συνδέεται με την καθυστέρηση της ολοκλήρωσης της διαδικασίας παραγωγής.

β) χαμένη πώληση (lost cases).

Κάποιοι επιπλέον παράγοντες που εμπλέκονται πολλές φορές στα μοντέλα διαχείρισης αποθεμάτων είναι:

1. Το εισόδημα: Εάν και η τιμή και η ζήτηση του προϊόντος εξαρτώνται από την αγορά του προϊόντος και είναι εκτός του ελέγχου της επιχείρησης, τότε τα εισοδήματα από τις πωλήσεις (υποθέτοντας ότι η ζήτηση ικανοποιείται) είναι ανεξάρτητα από την πολιτική που ακολουθεί η εταιρία για τα αποθέματά της και μπορούν να παραμεληθούν. Ωστόσο, εάν το εισόδημα παραμελείται και η εταιρία δεν μπορεί να ικανοποιήσει τη ζήτηση, τότε η απώλεια στο εισόδημα πρέπει να συμπεριληφθεί στο κόστος έλλειψης αποθέματος και έτσι η πώληση χάνεται. Επιπλέον, ακόμη και στην περίπτωση όπου υπάρχει καθυστερούμενη ικανοποίηση της παραγγελίας, το κόστος της καθυστέρησης στο εισόδημα πρέπει επίσης να συμπεριληφθεί στο κόστος έλλειψης αποθέματος. Με αυτές τις ερμηνείες, το εισόδημα δεν θα εξεταστεί ρητά στο υπόλοιπο αυτού του κεφαλαίου.

2. Η τιμή διάσωσης ενός προϊόντος είναι η τιμή ενός εναπομείναντος προϊόντος στο απόθεμα όταν δεν επιδιώκεται κανένα περαιτέρω γέμισμά του. Η τιμή διάσωσης αντιπροσωπεύει την τιμή διάθεσης του προϊόντος στην εταιρία, ίσως μέσω μιας εκπτωτικής πώλησης. Υποθέτουμε κατωτέρω ότι οποιοδήποτε κόστος διάσωσης ενσωματώνεται στο κόστος αποθήκευσης.

3. **Το ποσοστό έκπτωσης** λαμβάνει υπόψη τη χρονική τιμή των χρημάτων. Όταν μια εταιρία εμπλέκει το κεφάλαιο στο απόθεμα, η εταιρία αποτρέπεται από τη χρησιμοποίηση αυτών των χρημάτων για εναλλακτικούς λόγους. Παραδείγματος χάριν, θα μπορούσε να επενδύσει αυτά τα χρήματα σε ασφαλής επενδύσεις, αποκαλούμενα ως κρατικά ομόλογα και να έχει μια απόδοση στην επένδυση ενός έτους ως εκ τούτου, για παράδειγμα, 7 τοις εκατό. Κατά συνέπεια, το 1€ που επενδύεται σήμερα θα αξίζει 1.07€ στο πρώτο έτος, ή εναλλακτικά, στο 1€ το κέρδος ενός έτους ως εκ τούτου είναι ισοδύναμο με α = 1€/1.07€ σήμερα. Η ποσότητα α είναι γνωστή ως **συντελεστής έκπτωσης**. Κατά συνέπεια, προσθέτοντας επάνω το συνολικό κέρδος από μια πολιτική διαχείρισης αποθεμάτων, το κέρδος ή τα κόστη ενός έτους πρέπει να πολλαπλασιαστούν με το α, δύο ετών με το $α^2$ και ούτω καθεξής. (Άλλες χρονικές μονάδες εκτός από το ένα έτος μπορούν επίσης να χρησιμοποιηθούν.) Το συνολικό κέρδος που υπολογίζεται με αυτόν τον τρόπο αναφέρεται κανονικά ως καθαρή παρούσα τιμή.

Στα προβλήματα που αφορούν μικρούς χρονικούς ορίζοντες, το α μπορεί να υποτεθεί ότι είναι 1 (και ως εκ τούτου παραλείπεται) επειδή η τρέχουσα τιμή του 1€ που δίνεται κατά τη διάρκεια αυτού του κοντινού χρονικού ορίζοντα δεν αλλάζει πάρα πολύ. Εντούτοις, στα προβλήματα που έχουν τους μακροπρόθεσμους ορίζοντες, ο συντελεστής έκπτωσης πρέπει να συμπεριληφθεί.

Σε χρησιμοποίηση των ποσοτικών τεχνικών για να επιδιώξουμε τις βέλτιστες πολιτικές διαχείρισης καταλόγων, χρησιμοποιούμε το κριτήριο της ελαχιστοποίησης του συνολικού (αναμενόμενου) εκπτωτικού κόστους. Στις περιπτώσεις που η τιμή και η ζήτηση του προϊόντος δεν είναι υπό τον έλεγχο της επιχείρησης και το χαμένο ή καθυστερούμενο εισόδημα συμπεριλαμβάνεται στο κόστος έλλειψης, το να ελαχιστοποιείται το κόστος είναι ισοδύναμο με τη μεγιστοποίηση του καθαρού εισοδήματος.

2. ΜΟΝΤΕΛΑ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΕΠΙΘΕΩΡΗΣΗΣ

Στο κεφάλαιο αυτό αναλύονται τα μοντέλα συνεχούς επιθεώρησης τα οποία χρησιμοποιούνται για να δώσουν λύσεις σε προβλήματα παραγωγής και αποθήκευσης με σκοπό τη βέλτιστη πολιτική παραγγελίας ενός είδους (σε ορισμένες περιπτώσεις και περισσότερων ειδών) με πεπερασμένο ορίζοντα σχεδιασμού. Στην κατηγορία αυτή ανήκει το βασικό μοντέλο της Οικονομικής Ποσότητας Παραγγελίας (ΟΠΠ) (Economic Order Quantity) μαζί με τις παραλλαγές του:

1) Το μοντέλο της ΟΠΠ με μη μηδενικό χρόνο παράδοσης

2) Το μοντέλο της ΟΠΠ όπου υπάρχει έκπτωση στο κόστος απόκτησης για κάθε είδος, ανάλογα με την ποσότητα παραγγελίας

3) Το μοντέλο της ΟΠΠ όπου η ικανοποίηση της ζήτησης γίνεται με καθυστέρηση

4) Το μοντέλο της ΟΠΠ για περισσότερα από ένα είδη και με περιορισμό στον διαθέσιμο αποθηκευτικό χώρο

Παρατηρούμε ότι στις παραλλαγές του ΟΠΠ ουσιαστικά αλλάζει κάποια από τις παραδοχές του βασικού μοντέλου της ΟΠΠ, προσπαθώντας να αγγίξει την πραγματικότητα.

2.1 Βασικές Υποθέσεις των μοντέλων ΟΠΠ:

1) Υπάρχει δυνατότητα περισσότερων από μία παραγγελίες στη διάρκεια του χρονικού ορίζοντα.

Παραγγελίες μπορούν να γίνονται καθ' όλη τη διάρκεια του χρονικού ορίζοντα, δηλαδή επαναλαμβάνονται και πραγματοποιούνται με κάποιο συγκεκριμένο μοτίβο.

Για παράδειγμα, μία εταιρεία που παραγγέλνει ηλεκτρικές κουζίνες έχει τη δυνατότητα κατά τη διάρκεια του χρονικού ορίζοντα (π.χ. 1 έτος) να παραγγέλνει συνέχεια κάθε φορά που τελειώνει το απόθεμά της.

2) Ο ρυθμός ζήτησης του προϊόντος κατά τη διάρκεια του χρονικού ορίζοντα είναι σταθερός.

Αν για παράδειγμα η ζήτηση D είναι 400 τεμάχια το χρόνο, η ζήτηση για ένα μήνα θα είναι 400/12 και η ζήτηση για κάποιο χρονικό διάστημα t θα είναι 400t/12.

3) Ο χρόνος παράδοσης (L) μίας παραγγελίας είναι γνωστή σταθερά.

Ως χρόνος παράδοσης ορίζεται το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί από της στιγμή που θα γίνει μία παραγγελία μέχρι τη στιγμή που θα γίνει η παράδοσή της. Για παράδειγμα, αν L = 5 εβδομάδες κάθε παραγγελία πρέπει να εκτελείται μέσα σε 5 εβδομάδες, δηλαδή πρέπει να παραδίνεται μέσα σε 5 εβδομάδες αφότου έχει τεθεί.

4) Ο χρόνος θεωρείται συνεχής και μία παραγγελία μπορεί να γίνει σε οποιαδήποτε στιγμή του χρονικού ορίζοντα σχεδιασμού.

Να σημειωθεί ότι τα μοντέλα της ΟΠΠ χρησιμοποιούνται ακόμη και όταν οι προϋποθέσεις τους δεν ισχύουν, προκειμένου να δώσουν μία σχεδόν βέλτιστη λύση.

2.2 Ο ρυθμός ζήτησης στα μοντέλα της ΟΠΠ

Λόγω διαφόρων παραγόντων που επηρεάζουν τη ζήτηση, ο ρυθμός της ζήτησης δεν είναι σταθερός. Ωστόσο, για να μπορέσει να χρησιμοποιηθεί κάποιο από τα μοντέλα της ΟΠΠ θα πρέπει να αποφασιστεί αν ο ρυθμός της ζήτησης είναι αρκετά σταθερός ώστε να ισχύσει η υπόθεση (2) που αναφέραμε παραπάνω. Για το λόγο αυτό οι Peterson και Silver (1985) πρότειναν ότι πρέπει να γίνουν οι ακόλουθοι υπολογισμοί:

- Εύρεση μέσης ζήτησης ($\bar{d}$): $\bar{d} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i$

- όπου d_1, d_2, …., d_n η ζήτηση σε κάθε μία από τις n περιόδους που ορίζεται ο ορίζοντας σχεδιασμού.

- Εκτίμηση της διασποράς της ζήτησης

$$Est.VarD = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i^2 - \bar{d}^2$$

- Εκτίμηση του συντελεστή μεταβλητότητας VC για τη ζήτηση D:

$$VC = \frac{EstVarD}{\bar{d}^2}$$

όπου:

α) Εάν VC < 0.20, τότε μπορούν να χρησιμοποιηθούν όλα τα μοντέλα της ΟΠΠ με την ζήτηση $D = n\bar{d}$.

β) Εάν VC > 0.20, η ζήτηση μεταβάλλεται αρκετά από περίοδο σε περίοδο και έτσι τα προβλήματα παραγωγής και αποθήκευσης λύνονται με τη χρήση μοντέλων δυναμικού προγραμματισμού ή με τη χρήση ευρετικών αλγόριθμων.

2.3 Βασικό ΟΠΠ μοντέλο

Υποθέσεις:

1) Το σύστημα διαχειρίζεται ένα προϊόν.

2) Η ζήτηση ικανοποιείται αμέσως, δηλαδή υπάρχει πάντα απόθεμα.

3) Κάθε παραγγελία παραδίδεται αμέσως μόλις γίνει (L = 0).

4) Η ζήτηση είναι γνωστή σταθερά και πραγματοποιείται με σταθερό ρυθμό. Έτσι, αν D είναι η ζήτηση για ένα έτος, τότε η ζήτηση για κάθε χρονικό διάστημα t χρόνων θα είναι Dt μονάδες.

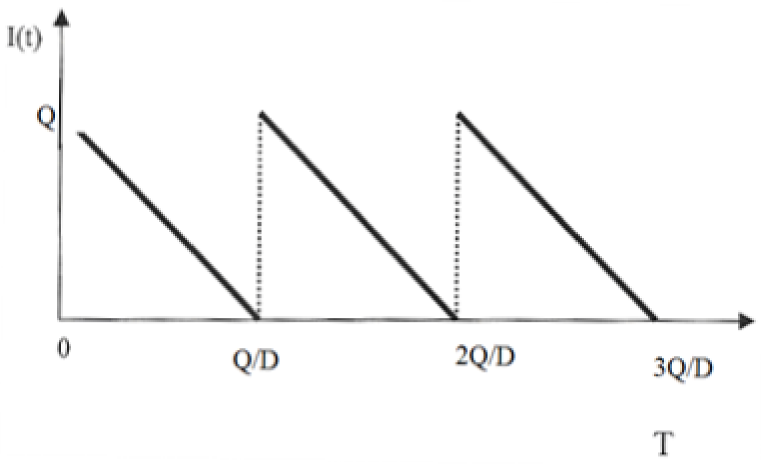
5) Υπάρχει ένα κόστος παραγγελίας K με το οποίο επιβαρύνεται η επιχείρηση για κάθε παραγγελία ανεξαρτήτως μεγέθους. Αυτό το κόστος παραγγελίας προστίθεται στο κόστος απόκτησης c·Q, όπου Q ο αριθμός των προϊόντων.

6) Υπάρχει ένα κόστος αποθήκευσης h για κάθε μονάδα προϊόντος ανά μονάδα χρόνου. Γενικά, το κόστος αποθήκευσης I μονάδων για T χρονικές μονάδες είναι ITh.

Αξίζει να τονίσουμε ότι δεν πρέπει να τεθεί μία παραγγελία όταν το απόθεμα (I) είναι I > 0 γιατί τότε το σύστημα επιβαρύνεται με ένα επιπλέον κόστος αποθήκευσης. Μία παραγγελία πρέπει να τεθεί όταν I = 0 δηλαδή όταν δεν υπάρχει απόθεμα ώστε να αποφευχθεί πιθανή έλλειψη αποθέματος.

Διαπιστώνουμε λοιπόν ότι, επιτυγχάνουμε την ελαχιστοποίηση του ετήσιου κόστους, που είναι και ο στόχος του μοντέλου ΟΠΠ, όταν οι παραγγελίες γίνονται τη στιγμή που το επίπεδο του αποθέματος πέσει στο 0. Έτσι, κάθε φορά που γίνεται μία παραγγελία, πρέπει να παραγγέλνεται πάντα η ίδια ποσότητα και να παραδίδεται στην αποθήκη όλη μαζί.

Έστω λοιπόν Q η ποσότητα που παραγγέλνεται όταν το επίπεδο του αποθέματος πέσει στο 0 (I = 0) και η οποία φτάνει αμέσως ανεβάζοντας το επίπεδο του αποθέματος στη μέγιστη τιμή του. (βλέπε σχήμα 2.1)



Σχήμα 2.1: Η συμπεριφορά του επιπέδου του αποθέματος I καθώς ο χρόνος κυλά

Για τη συνέχεια χρειαζόμαστε την έννοια του κύκλου παραγωγής ή παραγγελίας. Ορίζουμε ως **κύκλο** το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί μεταξύ δύο διαδοχικών παραγωγών ή δύο διαδοχικών παραγγελιών. Κάθε έτος περιλαμβάνει $\frac{1}{\frac{D}{Q}}=\frac{D}{Q}$ κύκλους. Για το παράδειγμα των μεγαφώνων ως κύκλος μπορεί να θεωρηθεί ο χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικών παραγωγών. Κατά συνέπεια, αν 24,000 μεγάφωνα παραγγέλνονται σε κάθε τρέχουσα παραγωγή και ζητούνται 8,000 μεγάφωνα το μήνα, κατόπιν το μήκος του κύκλου είναι: $\frac{Q}{D}=\frac{24,000}{8,000}=3$ μήνες.

Το κόστος παραγωγής ή παραγγελίας ανά κύκλο υπολογίζεται ως:

$$\text{Κόστος παραγωγής ή παραγγελίας ανά κύκλο} = K + cQ \tag{2.1}$$

Αφού λοιπόν το μέσο επίπεδο αποθέματος σε έναν κύκλο είναι Q/2 και κάθε κύκλος έχει μήκος Q/D θα ισχύει:

$$\text{Κόστος διατήρησης / κύκλο} = \frac{Q}{2}\times\frac{Q}{D}\times h=\frac{Q^2h}{2D} \tag{2.2}$$

Και έτσι:

$$\text{Ετήσιο κόστος διατήρησης} = \frac{Q^2h}{2D}\times\frac{D}{Q}=\frac{hQ}{2} \tag{2.3}$$

Και το

$$\text{Ετήσιο κόστος παραγγελίας} = \frac{KD}{Q} \tag{2.4}$$

Επιπλέον, το συνολικό ετήσιο κόστος (TC(Q)) δίνεται από τη σχέση:

$$TC(Q) = \frac{KD}{Q} + cD + \frac{hQ}{2} \tag{2.5}$$

Η τιμή του Q, Q* που ελαχιστοποιεί το Q, βρίσκεται από την πρώτη παράγωγο του TC(Q) ως προς Q εξισωμένη με το 0 και ελέγχουμε επίσης και το πρόσημο της δεύτερης παραγώγου. Έτσι:

$$\begin{aligned} &T' = -\frac{KQ}{Q^2} + \frac{h}{2} \\ &T' = 0 \Rightarrow \\ &-\frac{KQ}{Q^2} + \frac{h}{2} = 0 \Rightarrow \\ &Q = \pm\sqrt{\left(\frac{2KD}{h}\right)} \end{aligned} \tag{2.6}$$

και επειδή το Q αντιπροσωπεύει ποσότητα παραγγελίας δεχόμαστε μόνο τη θετική λύση δηλαδή:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}} \qquad \text{(Τύπος Wilson)} \tag{2.7}$$

Ο αντίστοιχος χρόνος θα είναι:

$$t^* = \frac{Q^*}{D} = \sqrt{\frac{2K}{Dh}} \tag{2.8}$$

Επιπλέον, επειδή $T'' = \frac{2KD}{Q^3}$ > 0 για κάθε Q > 0 η TC(Q) είναι μία κυρτή συνάρτηση ως προς την ποσότητα παραγγελίας Q για Q > 0 πράγμα που σημαίνει ότι η T παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στα σημεία όπου μηδενίζεται η πρώτη παράγωγος. Και επειδή Q* είναι το Q για το οποίο μηδενίζεται η T', η ποσότητα $Q^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}}$ είναι ο συνολικός ελαχιστοποιητής του συνολικού ετήσιου κόστους T.

Εφαρμόζοντας τους τύπους για το Q* και το t* στο παράδειγμα με τα μεγάφωνα θα έχουμε: Για K = 12,000, h = 0.30 και D = 8,000 έχουμε

$$Q^* = \sqrt{\frac{(2)(8,000)(12,000)}{0.30}} = 25,298 \quad \text{και } t^* = \frac{25,298}{8,000} = 3.2 \text{ μήνες.}$$

Ως εκ τούτου, η βέλτιστη λύση είναι να οργανωθούν οι δραστηριότητες ώστε να παράγονται 25,298 μεγάφωνα κάθε 3.2 μήνες (βέβαια η παραγωγή 24,000 μεγάφωνα κάθε 3 μήνες θα ήταν βέλτιστη).

Παρατηρήσεις:

1. Υπάρχει ένα μειονέκτημα στο βασικό μοντέλο της ΟΠΠ που σχετίζεται με το γεγονός ότι δεν υπάρχει περιορισμός για το πλήθος των μονάδων αποθέματος που μπορούν να αγοραστούν καθώς ακόμα δεν υπάρχει περιορισμός για το μέγιστο δυνατό απόθεμα.

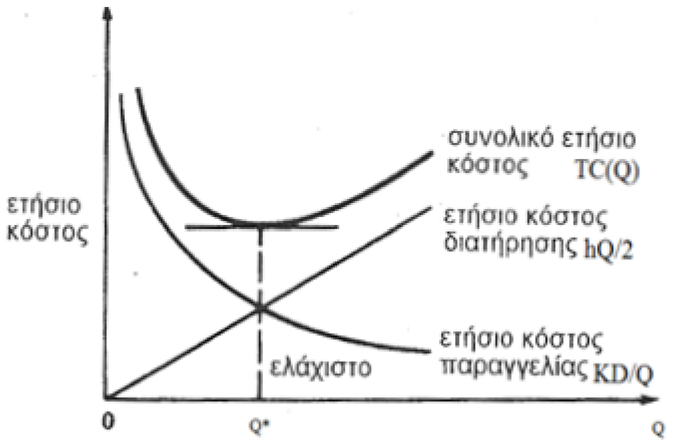
2. Αφού κάθε παραγγελία είναι για Q* προϊόντα θα γίνονται κάθε χρόνο D/Q* παραγγελίες.

3. Όταν παραγγέλνεται η Q* ποσότητα το ετήσιο κόστος διατήρησης είναι ίσο με το ετήσιο κόστος παραγγελίας:

$$\text{κόστος διατήρησης / έτος} = \frac{hQ^*}{2} = \frac{h}{2} \times \sqrt{\frac{2KD}{h}} = \sqrt{\frac{KDh}{2}} \tag{2.9}$$

$$\text{κόστος παραγγελίας / έτος} = \frac{KD}{Q^*} = \frac{KD}{\sqrt{\frac{2KD}{h}}} = \sqrt{\frac{KDh}{2}} \tag{2.10}$$

4. Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζεται η σχέση του ετήσιου κόστους (TC(Q)) και της ποσότητας παραγγελίας (Q). Παρατηρούμε ότι:



Σχήμα 2.2: Μεταβολή του ετήσιου κόστους σε σχέση με την ποσότητα

- Το κόστος διατήρησης του αποθέματος αυξάνει γραμμικά συναρτήσει της ποσότητας παραγγελίας.
- Το κόστος παραγγελίας ελαττώνεται εκθετικά συναρτήσει της ποσότητας παραγγελίας.
- Η καμπύλη του συνολικού κόστους έχει μικρή κυρτότητα για τιμές της Q γύρω από το Q* πράγμα που σημαίνει πως ακόμη και σημαντική μεταβολή της ποσότητας παραγγελίας σε σχέση με την Q* δεν προκαλεί σχεδόν καθόλου μεταβολή στο συνολικό ετήσιο κόστος.
- Για Q = Q* το ετήσιο κόστος διατήρησης είναι ίσο με το ετήσιο κόστος παραγγελίας.

2.4 Το μοντέλο της ΟΠΠ με μη μηδενικό χρόνο παράδοσης

Υποθέσεις:

Ισχύουν οι υποθέσεις του βασικού ΟΠΠ εκτός από την παραδοχή ότι ο χρόνος παράδοσης είναι σταθερός. Ο χρόνος παράδοσης επιτρέπεται να είναι διαφορετικός από το μηδέν. Ωστόσο, δεν επηρεάζεται ούτε το ετήσιο κόστος διατήρησης, ούτε το ετήσιο κόστος παραγγελίας. Έτσι, η ποσότητα παραγγελίας Q* του βασικού μοντέλου ΟΠΠ είναι αυτή που ελαχιστοποιεί και εδώ το συνολικό ετήσιο κόστος.

Εδώ, η κάθε παραγγελία πρέπει να τίθεται μόλις το απόθεμα φτάσει σε εκείνο το επίπεδο ώστε να επαρκεί μέχρι τη στιγμή που θα φτάσει η επόμενη παραγγελία. Εισάγουμε λοιπόν την έννοια του «σημείου νέας παραγγελίας» (δηλαδή το επίπεδο του αποθέματος το οποίο θα τη χρονική στιγμή παραγγελίας) το οποίο πρέπει να είναι τέτοιο ώστε το απόθεμα να γίνει μηδέν τη στιγμή που θα παραληφθεί η νέα παραγγελία με αποτέλεσμα και την ελαχιστοποίηση του κόστους διατήρησης και της διασφάλισης ότι δεν θα υπάρχει έλλειψη στη διαθέσιμη ποσότητα αποθέματος. Η εύρεση του σημείου νέας παραγγελίας εξαρτάται από το εάν ο χρόνος παράδοσης L είναι μικρότερος ή μεγαλύτερος από το μήκος ενός κύκλου Q* / D. Πιο αναλυτικά,

- Ο χρόνος παράδοσης L είναι μικρότερος ή ίσος με το μήκος ενός κύκλου $\frac{Q^*}{D}$. Εδώ, το σημείο στο οποίο γίνεται μία νέα παραγγελία είναι η ποσότητα LD και η πρώτη παραγγελία πρέπει να γίνεται L χρονικές μονάδες πριν τη στιγμή που ξεκινά ο ορίζοντας σχεδιασμού γιατί αν το σύστημα έχει μηδενικό απόθεμα τότε θα χρειαστεί L χρόνος μέχρι να φτάσει η πρώτη παραγγελία.

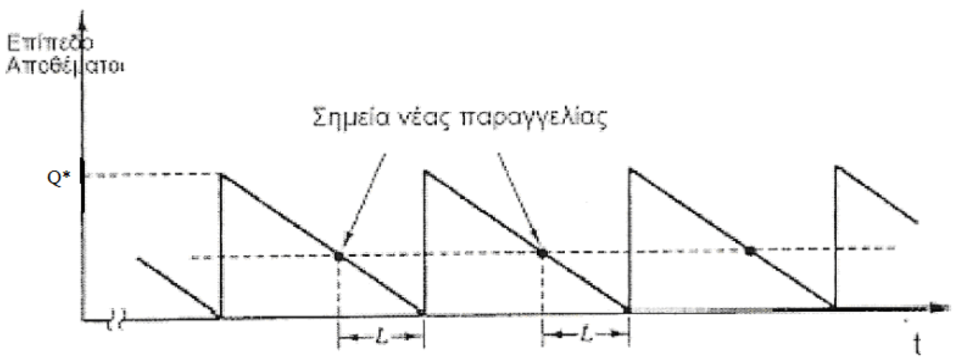
- Ο χρόνος παράδοσης L είναι μεγαλύτερος από το μήκος ενός κύκλου $\frac{Q^*}{D}$.

Στην περίπτωση αυτή ορίζεται ένας αποδοτικός (effective) χρόνος παράδοσης:

$$L_e = L - n \cdot \frac{Q^*}{D} \tag{2.11}$$

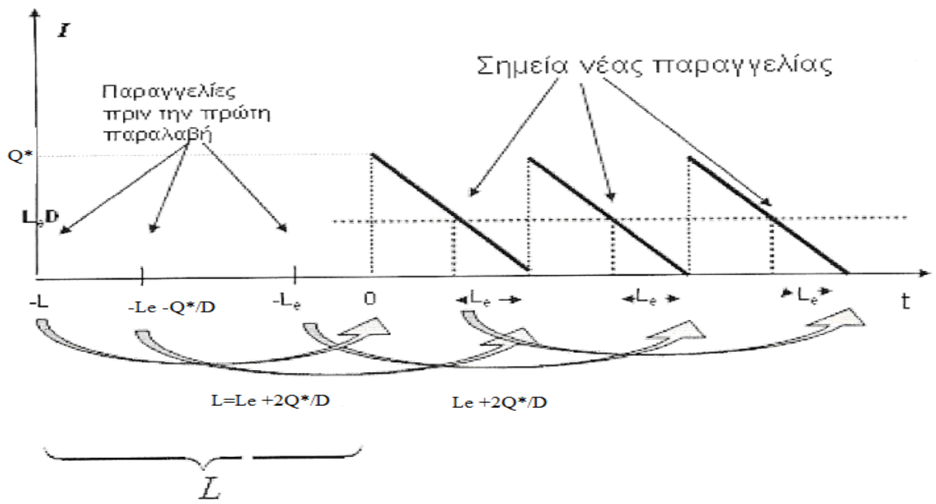
όπου n είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος με τιμή μικρότερη του $\frac{L}{\frac{Q^*}{D}} = \frac{LD}{Q^*}$.

Τότε το σημείο νέας παραγγελίας θα είναι D. Στο σημείο αυτό πρέπει να γίνουν παραγγελίες (η πρώτη παραγγελία δεν θα έχει φτάσει) : $L_e, L_e + \frac{Q^*}{D}, L_e + \frac{2Q^*}{D}, \ldots\ldots, L_e + \frac{(n-1)Q^*}{D}$ χρονικές μονάδες πριν την αρχή του χρονικού ορίζοντα δηλαδή τη χρονική στιγμή που ζητείται για πρώτη φορά διαθέσιμη ποσότητα προϊόντος. Με τον τρόπο αυτό οι παραγγελίες φτάνουν στο τέλος κάθε ενός από τους πρώτους κύκλους, δηλαδή όταν το απόθεμα μηδενίζεται.



Σχήμα 2.3: Συμπεριφορά του επιπέδου του αποθέματος I για (μη μηδενικό) χρόνο παράδοσης L < Q*/D.

Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζονται πότε πρέπει να γίνουν οι παραγγελίες όταν n = 2 δηλαδή $L = L_e + \frac{2Q^*}{D}$. Να σημειωθεί ότι η αρχή κάθε καμπυλόγραμμου βέλους δείχνει το πότε γίνεται μία παραγγελία και το τέλος του το πότε θα παραδοθεί.



Σχήμα 2.4: Σημεία παραγγελίας όταν L = Le + (2q*/D) (δηλαδή όταν n = 2)

Παρατηρήσεις:

Δεδομένου ότι δεν υπάρχει μηδενικό απόθεμα και για κάθε χρόνο παράδοσης L κάθε παραγγελία πρέπει να γίνεται με την πάροδο $\frac{Q^*}{D}$ χρονικών μονάδων από τη στιγμή που τέθηκε η προηγούμενη παραγγελία, ενώ η πρώτη πρέπει να γίνει L χρονικές μονάδες πριν ξεκινήσει ο χρονικός ορίζοντας. Έτσι, κάθε παραγγελία παραλαμβάνεται κάθε στιγμή που το απόθεμα γίνεται μηδέν.

2.5 Το μοντέλο της ΟΠΠ στο οποίο επιτρέπεται η έκπτωση στο κόστος απόκτησης ανά προϊόν, ανάλογα με την ποσότητα παραγγελίας

Στο μοντέλο αυτό ισχύουν όλες οι υποθέσεις του βασικού μοντέλου της ΟΠΠ εκτός της 5ης που αναφέρεται στο κόστος απόκτησης μιας μονάδας προϊόντος. Επιπλέον, εδώ λαμβάνονται υπόψη τυχόν εκπτώσεις που μπορεί να κάνει ο προμηθευτής στην αξία του προϊόντος ανάλογα με το μέγεθος της παραγγελίας. Επίσης, το κόστος διατήρησης εκφράζεται ως ένα ποσοστό του κόστους απόκτησης μίας μονάδας δηλαδή,

$$h_i = pc_i \qquad (2.12)$$

όπου p είναι το ποσοστό και c_i είναι το μοναδιαίο κόστος απόκτησης.

Επιπλέον υποθέσεις σε σχέση με το βασικό ΟΠΠ:

1. Αν Q = η ποσότητα παραγγελίας που ζητείται κάθε φορά και b_1, b_2,…,b_{k-1} η εκπτωτική κλίμακα, δηλαδή οι ποσότητες πριν και μετά τις οποίες αλλάζει το μοναδιαίο κόστος απόκτησης τότε:

- Αν $Q < b_1$: κάθε μονάδα προϊόντος κοστίζει c_1 χρηματικές μονάδες.
- Αν $b_1 \leq Q < b_2$: κάθε μονάδα προϊόντος κοστίζει c_2 χρηματικές μονάδες.

………………………………………………………………

- Αν $b_{k-2} \leq Q < b_{k-1}$: κάθε μονάδα προϊόντος κοστίζει c_{k-1} χρηματικές μονάδες.
- Αν $b_{k-1} \leq Q < b_k$: κάθε μονάδα προϊόντος κοστίζει c_k χρηματικές μονάδες.

με $c_k < c_{k-1} < \ldots. < c_1$ αφού όσο μεγαλύτερη είναι η παραγγελία, το κόστος απόκτησης ανά μονάδα προϊόντος μικραίνει.

2. Έχουμε μεταβλητό κόστος διατήρησης το οποίο εξαρτάται από την ποσότητα παραγγελίας.

- Αν $Q < b_1$ το κόστος διατήρησης μιας μονάδας προϊόντος είναι $h_1 = pc_1$ χρηματικές μονάδες.

- Αν $b_1 \leq Q < b_2$ το κόστος διατήρησης μιας μονάδας προϊόντος είναι $h_2 = pc_2$ χρηματικές μονάδες.

……………………………………………………………………..

- Αν $b_{k-2} \leq Q < b_{k-1}$ το κόστος διατήρησης μιας μονάδας προϊόντος είναι $h_{k-1} = pc_{k-1}$ χρηματικές μονάδες.
- Αν $b_{k-1} \leq Q < b_k$ το κόστος διατήρησης μιας μονάδας προϊόντος είναι $h_k = pc_k$ χρηματικές μονάδες.

3. Το συνολικό ετήσιο κόστος διαχείρισης αποθεμάτων, εάν σε κάθε παραγγελία ζητούνταν Q μονάδες στην τιμή c_i ανά μονάδα:

$$\begin{aligned} TC_i(Q) &= \frac{kD}{Q} + c_i D + \frac{h_i Q}{2} = \\ &= \frac{kD}{Q} + c_i D + \frac{pC_i Q}{2} = \\ &= \frac{kD}{Q} + c_i (D + \frac{pQ}{2}) \end{aligned} \tag{2.13}$$

4. Εάν $ΟΠΠ_i$ = η ποσότητα η οποία ελαχιστοποιεί το συνολικό ετήσιο κόστος $TC_i(Q)$ τότε θα είναι εφικτή εάν $b_{i-1} \leq ΟΠΠ_i < b_i$.

5. TC(Q) = το συνολικό κόστος διαχείρισης όταν το κόστος απόκτησης ανά μονάδα καθορίζεται από την ποσότητα παραγγελίας.

Στόχος του μοντέλου είναι η εύρεση της ποσότητας Q που ελαχιστοποιεί το . TC(Q). Η ποσότητα παραγγελίας που ελαχιστοποιεί το TC(Q) μπορεί να είναι ή ένα σημείο b_i της εκπτωτικής κλίμακας ή κάποιο $ΟΠΠ_i$.

Βασικές παρατηρήσεις:

1. Για κάθε ποσότητα Q: $TC_k(Q) < TC_{k-1}(Q) < ……. < TC_2(Q) < TC_1(Q)$.

2. Για $b_{i-1} \leq Q < b_i$:

- Αν η $ΟΠΠ_i$ είναι εφικτή τότε έχουμε το ελάχιστο κόστος αν $Q = ΟΠΠ_i$.

- Αν ΟΠΠ$_i$ < b_i τότε έχουμε το ελάχιστο κόστος αν Q = b_{i-1}.

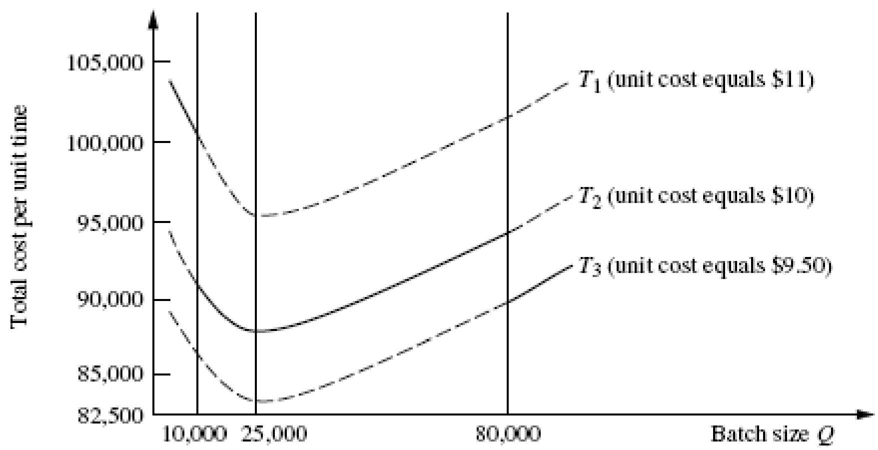
3. Αν η ΟΠΠ$_i$ είναι εφικτή, τότε η βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας πραγματοποιείται για κόστος απόκτησης ανά μονάδα μικρότερο ή ίσο του c_i δηλαδή για κόστος απόκτησης ανά προϊόν ίσο με c_i, c_{i+1},……, c_k.

Θεωρείστε τώρα το παράδειγμα των μεγαφώνων των τηλεοράσεων που εισάγαμε παραπάνω. Υποθέστε τώρα ότι το μοναδιαίο κόστος για κάθε μεγάφωνο είναι c_1 = 11€ εάν παράγονται λιγότερα από 10,000 μεγάφωνα, c_2 = 10€ εάν η παραγωγή είναι μεταξύ 10,000 και 80,000 μεγάφωνα και c_3 = 9.50€ εάν η παραγωγή υπερβαίνει τα 80,000 μεγάφωνα. Ποια είναι όμως η βέλτιστη παραγωγή;

Η σχέση του $TC_j(Q)$ με το Q είναι παρουσιασμένη στο παρακάτω σχήμα για κάθε j = 1, 2, 3.

Η τιμή του Q που ελαχιστοποιεί το $TC_j(Q)$ βρίσκεται ακριβώς όπως στο βασικό μοντέλο ΟΠΠ. Για k = 12,000 , h = 0.30 και D = 8,000 αυτή η τιμή είναι

$$\sqrt{\frac{(2)(8{,}000)(12{,}000)}{0.30}} = 25{,}298$$



Σχήμα 2.5

Εάν το h είναι ανεξάρτητο από το μοναδιαίο κόστος των προϊόντων, κατόπιν η ελαχιστοποιούσα τιμή του Q θα ήταν λίγο διαφορετική για τις διάφορες καμπύλες.

Αυτή η τιμή ελαχιστοποίησης του Q είναι μία εφικτή τιμή του για τη συνάρτηση κόστους $TC_2(Q)$. Για την ίδια τιμή του Q το $TC_2(Q) < TC_1(Q)$, έτσι το $TC_1(Q)$ μπορεί να αφαιρεθεί από την περαιτέρω εκτίμηση. Εντούτοις, το $TC_3(Q)$ δεν μπορεί να απορριφθεί αμέσως. Η ελάχιστη εφικτή τιμή του, (που εμφανίζεται στις Q = 80,000) πρέπει να συγκριθεί με το $TC_2(Q)$ που υπολογίζεται στις 25,298 (και είναι 87,589€). Επειδή το $TC_3(Q)$ υπολογίζεται στις 80,000 μονάδες προϊόντος όπου το ετήσιο συνολικό κόστος είναι 89,200 € την περίοδο αυτή, είναι καλύτερο να παράγει 25,298 και έτσι αυτή η ποσότητα είναι η βέλτιστη τιμή για αυτήν τη συνολική εκπτωτική ποσότητα.

Εάν η εκπτωτική ποσότητα οδηγεί σε ένα μοναδιαίο κόστος 9€ (αντί 9.50€) όταν υπερέβη η παραγωγή τις 80,000, κατόπιν το $TC_3(Q)$ ενώ είναι αξιολογημένο στην παραγωγή 80,000 θα ήταν ίσο με 85,200 μονάδες και η βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας θα γινόταν 80,000 μονάδες.

Αν και αυτή η ανάλυση αφορούσε ένα συγκεκριμένο πρόβλημα, η ίδια προσέγγιση ισχύει σε οποιοδήποτε παρόμοιο πρόβλημα.

Αλγόριθμος:

Ο παρακάτω αλγόριθμος χρησιμοποιείται για την εύρεση της βέλτιστης ποσότητας παραγγελίας.

Βήμα 1 : Υπολογίζουμε την ποσότητα παραγγελίας Q* με το χαμηλότερο κόστος απόκτησης έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται το συνολικό ετήσιο κόστος με $b_{i-1} < Q < b_i$. Το Q* όπως αναφέραμε και παραπάνω είτε θα ισούται με την $ΟΠΠ_i$, είτε με το άκρο b_{i-1}.

Βήμα 2 : Ακολουθούμε την ίδια διαδικασία και υπολογίζουμε τις ποσότητες Q_k*, Q_{k-1}*, … μέχρι να βρεθεί εκείνη η ποσότητα Q_j* με j = k, k-1,….που να είναι εφικτή, δηλαδή να ισχύει Q_j* = ΟΠΠ$_j$.

Βήμα 3 : Σταματάμε τον υπολογισμό των Q_i* και η βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας είναι εκείνη η τιμή του συνόλου $\left\{Q_k *, Q_{k-1} *, ..., Q_j *\right\}$ με τη μικρότερη τιμή του TC(Q).

2.6 Το μοντέλο της ΟΠΠ στο οποίο επιτρέπεται η ικανοποίηση της ζήτησης με καθυστέρηση

Στο μοντέλο αυτό ισχύουν οι υποθέσεις του βασικού ΟΠΠ εκτός από την υπόθεση (2) ότι δηλαδή ο ρυθμός ζήτησης του προϊόντος κατά τη διάρκεια του χρονικού ορίζοντα είναι σταθερός. Άρα στο μοντέλο που θα μελετήσουμε ο ρυθμός ζήτησης δεν είναι σταθερός, επομένως υπάρχει πιθανότητα εμφάνισης έλλειψης αποθέματος. Υποθέτουμε όμως ότι εάν εμφανιστεί έλλειψη ο πελάτης μπορεί να περιμένει κάποιο χρονικό διάστημα μέχρι να ικανοποιηθεί η παραγγελία του με την παραλαβή νέας παρτίδας αποθεμάτων. Έτσι, το σύστημα δεν χάνει πωλήσεις. Έστω λοιπόν:

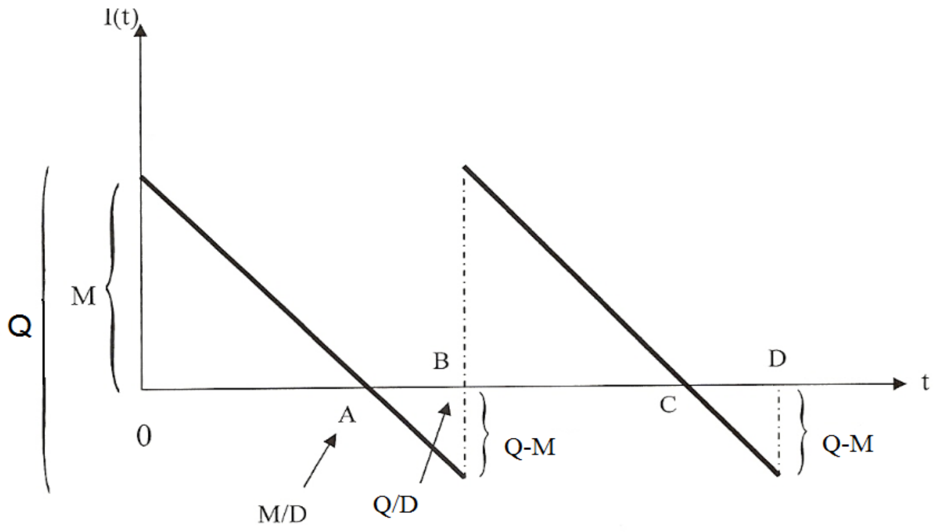
s = το κόστος έλλειψης με το οποίο θα επιβαρύνεται το σύστημα για κάθε χρονικό διάστημα

Q = η ποσότητα παραγγελίας

Q – M = η έλλειψη στον κατάλογο ακριβώς πριν προστεθούν οι Q μονάδες στο απόθεμα

όπου M = το μέγιστο επίπεδο αποθέματος της εταιρείας.

Επειδή όμως έχουμε υποθέσει μηδενικό χρόνο παράδοσης, το σύστημα παρουσιάζει έλλειψη αποθέματος Q – M κάθε φορά που γίνεται μία παραγγελία.



Σχήμα 2.6: Εξέλιξη του επιπέδου στο μοντέλο της ΟΠΠ στο οποίο επιτρέπεται η ικανοποίηση της ζήτησης με καθυστέρηση

Κατά τη διάρκεια κάθε κύκλου, το επίπεδο του αποθέματος είναι θετικό για χρόνο M / D. Το μέσο επίπεδο αποθέματος κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου είναι: $\frac{M+0}{2}=\frac{M}{2}$ μονάδες και το αντίστοιχο κόστος είναι $\frac{hM}{2}$ ανά χρονικό διάστημα. Έτσι:

$$\text{κόστος διατήρησης ανά κύκλο} = \frac{M^2h}{2D} \tag{2.14}$$

και εφόσον έχουμε $\frac{D}{Q}$ κύκλους ανά έτος:

$$\text{ετήσιο κόστος διατήρησης} = \frac{M^2h}{2Q} \tag{2.15}$$

Επίσης, οι ελλείψεις εμφανίζονται για ένα χρονικό διάστημα (Q-M)/D. Το μέσο ποσό ελλείψεων κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου είναι $\frac{(0+Q-M)}{2}=\frac{(Q-M)}{2}$ μονάδες και το αντίστοιχο κόστος είναι S(Q-M)/2 ανά χρονική μονάδα. Άρα,

$$\text{Κόστος έλλειψης αποθέματος ανά κύκλο} = \frac{(Q-M)^2 \cdot S}{2D} \qquad (2.16)$$

και

$$\text{ετήσιο κόστος έλλειψης αποθέματος} = \frac{(Q-M)^2 \cdot S}{2Q} \qquad (2.17)$$

Ομοίως με το βασικό μοντέλο της ΟΠΠ, το ετήσιο κόστος παραγγελίας είναι $\frac{KD}{Q}$.

Το συνολικό ετήσιο κόστος (στο οποίο δεν συμπεριλαμβάνεται το ετήσιο κόστος απόκτησης) δίνεται από τη σχέση:

$$TC(Q,M) = \frac{M^2 h}{2Q} + \frac{(Q-M)^2 S}{2Q} + \frac{KD}{Q} \qquad (2.18)$$

Σε αυτό το μοντέλο υπάρχουν δύο μεταβλητές απόφασης (M και Q). Έτσι οι βέλτιστες τιμές βρίσκονται με την εξίσωση των μερικών παραγώγων ίσων με 0. Έτσι,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial TC}{\partial M} = 0 \\ \dfrac{\partial TC}{\partial Q} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{hM}{Q} - \dfrac{S(Q-M)}{Q} = 0 \\ -\dfrac{DK}{Q^2} - \dfrac{h\,M^2}{2Q^2} + \dfrac{S(Q-M)}{Q} - \dfrac{S(Q-M)^2}{2Q^2} = 0 \end{cases}$$

Η επίλυση αυτών των τύπων δίνει:

$$M^* = \sqrt{\frac{2DK}{h}}\sqrt{\frac{S}{S+h}} \qquad (2.19)$$

και

$$Q^* = \sqrt{\frac{2DK}{h}}\sqrt{\frac{S+h}{S}} \qquad (2.20)$$

Το βέλτιστο μήκος t* των κύκλων δίνεται:

$$t^* = \frac{Q^*}{D} = \sqrt{\frac{2K}{Dh}}\sqrt{\frac{S+h}{S}} \tag{2.21}$$

και η μέγιστη έλλειψη είναι:

$$Q^* - M^* = \sqrt{\frac{2DK}{S}}\sqrt{\frac{h}{S+h}} \tag{2.22}$$

Παρατηρήσεις:

1) Όταν $S \to \infty$ και h = σταθερό δηλαδή το κόστος έλλειψης αποθέματος είναι πολύ μεγαλύτερο από το κόστος διατήρησης τότε τόσο η Q* όσο και η M* συγκλίνουν στις τιμές του βασικού ΟΠΠ ενώ η μέγιστη έλλειψη αποθέματος γίνεται Q* - M* $\xrightarrow[S\to\infty]{} 0$.

2) Όταν το $h \to \infty$ και το S παραμένει σταθερό, δηλαδή το κόστος διατήρησης είναι πολύ μεγαλύτερο από το κόστος έλλειψης της διαθέσιμης ποσότητας προϊόντων, τότε $M^* \xrightarrow[S\to\infty]{} 0$ που σημαίνει ότι επειδή η εταιρεία έχει μεγάλο κόστος διατήρησης δεν τη συμφέρει να κρατάει το επίπεδο αποθεμάτων θετικό με αποτέλεσμα κάθε παραλαβή Q* να μετακινεί το έλλειμμα στην ποσότητα προϊόντος που θα χρησιμοποιηθεί αργότερα.

2.7 Μία ευρύτερη προοπτική του παραδείγματος με τα μεγάφωνα

Το 2^o παράδειγμα που αφορά τη χονδρική διανομή ποδηλάτων και εισάγεται στην παράγραφο 1.3 ασχολείται με τη διαχείριση του αποθέματος ενός συγκεκριμένου μοντέλου ποδήλατου. Η ζήτηση αυτού του προϊόντος εξαρτάται από τους πελάτες του χονδρέμπορα δηλαδή τους λιανοπωλητές που αγοράζουν αυτά τα ποδήλατα ώστε να ξανά γεμίσουν τη στάθμη του αποθέματός τους. Ο χονδρέμπορας δεν ελέγχει αυτή τη ζήτηση. Επειδή αυτό το μοντέλο ποδηλάτου πωλείται χωριστά από τα άλλα μοντέλα, η ζήτησή του δεν εξαρτάται από τη ζήτηση των άλλων προϊόντων της επιχείρησης. Αυτή η ζήτηση αναφέρεται ως **ανεξάρτητη ζήτηση**.

Αντίθετα, η κατάσταση είναι διαφορετική για το παράδειγμα των μεγαφώνων που εισάγεται στην παράγραφο 1.3. εδώ το υπό εκτίμηση προϊόν – μεγάφωνα τηλεόρασης – είναι ένα μόνο από τα συστατικά που συγκεντρώνονται στο τελικό προϊόν της εταιρείας δηλαδή στις τηλεοράσεις. Η ζήτηση των μεγαφώνων καθορίζεται εσωτερικά, από το πρόγραμμα παραγωγής που η ίδια η επιχείρηση καθιερώνει για τις τηλεοράσεις, με τη ρύθμιση του ποσοστού παραγωγής για τη γραμμή παραγωγής των τηλεοράσεων. Τέτοια ζήτηση αναφέρεται ως **εξαρτώμενη ζήτηση**.

Η κατασκευαστική επιχείρηση τηλεοράσεων παράγει ένα σημαντικό αριθμό διαφόρων προϊόντων που θα γίνουν συστατικά των τηλεοράσεων, π.χ. τα μεγάφωνα. Αυτά τα διάφορα προϊόντα καλούνται **προϊόντα εξαρτώμενης ζήτησης**.

Να σημειωθεί ότι λόγω της εξάρτησης των προϊόντων από τη ζήτησή τους, το να διαχειρίζεσαι το απόθεμα προϊόντων εξαρτημένης ζήτησης είναι πιο περίπλοκο από τη διαχείριση του αποθέματος προϊόντων ανεξάρτητης ζήτησης. Μία δημοφιλής τεχνική για την επίτευξη αυτού του στόχου είναι οι υλικές απαιτήσεις που προγραμματίζουν, γνωστές ως **MRP**. Η MRP είναι ένα σύστημα βασισμένο στον υπολογιστή για σχεδιασμό και έλεγχο της παραγωγής όλων των συστατικών ενός τελικού προϊόντος. Το σύστημα αρχίζει με την «ανατίναξη» του προϊόντος σπάζοντάς το σε όλες τις υποσυγκεντρώσεις του και έπειτα σε όλα τα μεμονωμένα συστατικά μέρη του. Έπειτα αναπτύσσεται ένα πρόγραμμα παραγωγής, χρησιμοποιώντας τη ζήτηση και τη χρονική ανοχή για κάθε συστατικό ώστε να καθοριστεί η ζήτηση και η χρονική ανοχή για το επόμενο συστατικό στη διαδικασία. Εκτός του κύριου προγράμματος παραγωγής του τελικού προϊόντος, ένας λογαριασμός υλικών παρέχει αναλυτικές πληροφορίες για όλα τα συστατικά του. Τα αρχεία θέσης των αποθεμάτων δίνουν τα τρέχοντα επίπεδα αποθέματος, τον αριθμό μονάδων του προϊόντος στην παραγγελία, κ.λπ., για όλα τα συστατικά. Όταν περισσότερες μονάδες ενός συστατικού χρειάζονται για να γίνει η παραγγελία του, το σύστημα MRP παράγει αυτόματα είτε μια εντολή αγοράς στον προμηθευτή είτε μια διαταγή εργασίας στο εσωτερικό τμήμα που παράγει το συστατικό.

Όταν το βασικό μοντέλο ΟΠΠ χρησιμοποιήθηκε για να υπολογίσει η βέλτιστη παραγωγή στο παράδειγμα των μεγάφωνων, μια πολύ μεγάλη ποσότητα (25,298 μεγάφωνα) λαμβάνεται. Αυτό επιτρέπει οργάνωση ώστε να αρχίσουν οι τρέχουσες παραγωγές (μόνο μία γίνεται κάθε 3.2 μήνες). Εντούτοις, δημιουργούνται μεγάλα μέσα επίπεδα αποθέματος (12,649 μεγάφωνα), που οδηγούν σε ένα μεγάλο συνολικό κόστος διατήρησης πάνω από 45,000€ το χρόνο.

Ο βασικός λόγος για αυτό το μεγάλο κόστος είναι το υψηλό κόστος παραγγελίας του K= 12,000€ για κάθε τρέχουσα παραγωγή. Το κόστος παραγγελίας είναι τόσο μεγάλο επειδή οι μονάδες παραγωγής πρέπει να οργανώνονται πάλι από την αρχή κάθε φορά. Συνεπώς, ακόμη και με λιγότερο από τέσσερις τρέχουσες παραγωγές το χρόνο, το ετήσιο κόστος παραγγελίας είναι πάνω από 45,000€, ακριβώς όσο το ετήσιο κόστος διατήρησης.

Παρά τη συνεχόμενη ανοχή ενός κόστους παραγγελίας 12.000€ κάθε φορά, μια άλλη επιλογή για την επιχείρηση είναι να επιδιώξει τους τρόπους ώστε να μειώσει αυτό το κόστος παραγγελίας. Μια δυνατότητα είναι να αναπτυχθούν οι μέθοδοι για γρήγορη μεταφορά των μηχανών από τη μία χρήση στην άλλη. Άλλη δυνατότητα είναι να δημιουργήσει μια ομάδα δραστηριοτήτων παραγωγής στον τομέα της παραγωγής των μεγάφωνων έτσι ώστε να διατηρείται η προετοιμασία της παραγγελίας μεταξύ των τρεχουσών παραγωγών ώστε να μπορέσει να αρχίσει μια άλλη παραγωγή όποτε ζητηθεί.

Υποθέστε ότι το κόστος παραγγελίας θα μπορούσε να μειωθεί δραστικά από 12,000€ σε K = 120€. Αυτό θα μείωνε το βέλτιστο μέγεθος της παραγωγής από 25,298 μεγάφωνα σε Q* =2,530 μεγάφωνα, με αποτέλεσμα μια νέα τρέχουσα παραγωγή που διαρκεί σύντομο χρόνο μπορεί να αρχίζει μόνο 3 φορές το μήνα. Αυτό επίσης θα μείωνε και το ετήσιο κόστος παραγγελίας και το ετήσιο κόστος διατήρησης από 45.000€ σε περίπου 4.500€. Από την ύπαρξη συχνής τρέχουσας παραγωγής και ανέξοδης, τα μεγάφωνα θα παράγονταν ουσιαστικά εγκαίρως ακριβώς για τη συναρμολόγηση των τηλεοράσεων.

Το Just In Time είναι πραγματικά μια καλά ανεπτυγμένη φιλοσοφία για τη διαχείριση του αποθέματος. Ένα **just in time** σύστημα (JIT) δίνει μεγάλη έμφαση στη μείωση του επιπέδου του αποθέματος στο ελάχιστο, και έτσι στην παροχή των προϊόντων ακριβώς στην ώρα τους όπως απαιτούνται. Αυτή η φιλοσοφία αναπτύχθηκε αρχικά στην Ιαπωνία, αρχίζοντας με την επιχείρηση της Toyota προς το τέλος του 1950, όπου και της δίνεται μέρος της πίστωσης για τα αξιοπρόσεκτα κέρδη στην ιαπωνική παραγωγικότητα μέσω ενός μεγάλου μέρους του πρόσφατου 20ού αιώνα. Η φιλοσοφία επίσης έχει γίνει δημοφιλής σε άλλα μέρη του κόσμου, συμπεριλαμβανομένων των Ηνωμένων Πολιτειών, στα πιο πρόσφατα έτη.

Η just in time φιλοσοφία αν και μερικές φορές παρερμηνεύεται ως ασυμβίβαστη και η χρησιμοποίηση ενός μοντέλου ΟΠΠ (δεδομένου ότι το τελευταίο δίνει μια μεγάλη ποσότητα παραγγελίας και το κόστος παραγγελίας είναι μεγάλο), είναι πραγματικά συμπληρωματικά. Ένα σύστημα καταλόγων JIT εστιάζει στην εύρεση τρόπων ώστε να μειωθεί πολύ το κόστος παραγγελίας έτσι ώστε η βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας να είναι μικρή. Ένα τέτοιο σύστημα επιδιώκει επίσης τους τρόπους ώστε να μειωθεί η χρονική ανοχή για την παράδοση μιας παραγγελίας, δεδομένου ότι αυτό μειώνει την αβεβαιότητα για τον αριθμό μονάδων του προϊόντος που θα ζητηθεί όταν γίνει η παράδοση. Επίσης δίνεται έμφαση στη βελτίωση της προληπτικής διατήρησης έτσι ώστε οι απαραίτητες μονάδες παραγωγής να είναι διαθέσιμες να παράγουν τις μονάδες του προϊόντος όταν ζητηθούν. Ακόμα μια άλλη έμφαση που δίνεται είναι στη βελτίωση της διαδικασίας παραγωγής ώστε να εξασφαλίσει μία καλύτερη ποιότητα. Η παροχή του σωστού αριθμού μονάδων στην ώρα τους δεν παρέχει καμία παρέκκλιση για τη συμπερίληψη των ελαττωματικών μονάδων.

Στους περισσότερους γενικούς όρους, η εστίαση της just in time φιλοσοφίας είναι στην αποφυγή σπατάλης οπουδήποτε εμφανιστεί στη διαδικασία παραγωγής. Μια μορφή σπατάλης είναι ένα περιττό απόθεμα. Άλλες δαπάνες είναι τα όχι απαραίτητα μεγάλα κόστη παραγγελίας, οι όχι απαραίτητοι μεγάλοι χρόνοι, οι ευκολίες παραγωγής που δεν είναι λειτουργικές όταν απαιτούνται, και τα ελαττωματικά προϊόντα. Η ελαχιστοποίηση αυτών των μορφών δαπανών είναι ένα συστατικό κλειδί των μοντέλων διαχείρισης αποθεμάτων .

2.8 Το μοντέλο της ΟΠΠ για περισσότερα από ένα είδη και με περιορισμό στον διαθέσιμο αποθηκευτικό χώρο

Στην παράγραφο αυτή αναλύεται το μοντέλο της ΟΠΠ όπου περισσότερα από ένα διαφορετικά είδη ($n > 1$) αποθηκεύονται στον ίδιο χώρο. Για κάθε ένα από τα διαφορετικά είδη ισχύουν όλες οι παραδοχές του βασικού μοντέλου της ΟΠΠ. Ωστόσο, τα διαφορετικά είδη είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους καθώς επίσης δεν λαμβάνεται υπόψη το κέρδος που προκύπτει από την από κοινού ανανέωση των αποθεμάτων τους ή από την από κοινού επιθεώρηση των αποθεμάτων.

Στόχος και σε αυτό το μοντέλο είναι η εύρεση της βέλτιστης πολιτικής παραγγελίας για κάθε είδος i, i = 1, 2,…., n, σε χρονικό ορίζοντα το ένα έτος.

Ορίζω ως,

- D_i = η ζήτηση για το i είδος
- K_i = το κόστος παραγγελίας για το i είδος
- h_i = το κόστος διατήρησης για το i είδος
- c_i = το μοναδιαίο κόστος απόκτησης για το i είδος
- Q_i = η ποσότητα παραγγελίας για το i είδος όταν το απόθεμα φτάνει στο μηδέν
- α_i = ο αποθεματικός χώρος που απαιτεί μία μονάδα ενός είδους i
- A = ο μέγιστος διαθέσιμος αποθηκευτικός χώρος και για τα n είδη

Οι δύο τύποι που ακολουθούν δίνουν ο πρώτος το συνολικό ετήσιο κόστος για κάθε είδος χωριστά και ο δεύτερος το συνολικό ετήσιο κόστος και για τα n είδη:

$$TC(Q_i) = \frac{K_i D_i}{Q_i} + c_i D_i + \frac{h_i Q_i}{2}, \; i = 1,2,\dots,n \tag{2.23}$$

$$TC(Q_1, Q_2, \dots, Q_n) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{K_i D_i}{Q_i} + c_i D_i + \frac{h_i Q_i}{2} \right) \tag{2.24}$$

Ψάχνουμε λοιπόν, εκείνες τις ποσότητες παραγγελίας Q_1, Q_2,…,Q_n που ελαχιστοποιούν το συνολικό ετήσιο κόστος και για τα n είδη, δηλαδή:

$$\text{minimize} \left\{ TC(Q_1, Q_2, \dots, Q_n) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{K_i D_i}{Q_i} + c_i D_i + \frac{h_i Q_i}{2} \right) \right\}$$

Υπό τους περιορισμούς:

1) περιορισμός για την χωρητικότητα:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i Q_i \leq A \qquad (2.25)$$

2) περιορισμός για την ποσότητα παραγγελίας:

$Q_i > 0$, για $i = 1, 2, \ldots n$

Για την εύρεση των ποσοτήτων παραγγελίας που ελαχιστοποιούν το συνολικό ετήσιο κόστος και για τα n είδη χρησιμοποιείται ο παρακάτω αλγόριθμος.

<u>Αλγόριθμος:</u>

Βήμα 1: Υπολογίζουμε τις ποσότητες παραγγελίας $Q_1, Q_2, \ldots Q_n$ οι οποίες ελαχιστοποιούν το συνολικό ετήσιο κόστος και για τα n είδη χωρίς να ληφθεί υπόψη ο περιορισμός (2.25) για την χωρητικότητα. Έτσι,

$$Q_i^* = \sqrt{\frac{2K_iD_i}{h_i}} \quad i = 1,2, \ldots n \qquad (2.26)$$

Βήμα 2: Ελέγχουμε εάν οι τιμές που έχουμε για τις βέλτιστες ποσότητες παραγγελίας στο βήμα 1 ικανοποιούν τον περιορισμό (2.25), και:

- Αν τον ικανοποιούν σταματάμε. Τότε η βέλτιστη πολιτική παραγγελίας για το είδος i είναι να παραγγέλνεται ποσότητα $Q_i^* = \sqrt{\frac{2K_iD_i}{h_i}}$ κάθε φορά που το απόθεμα του i είδους γίνεται ίσο με μηδέν.
- Αν δεν ικανοποιούν τον περιορισμό προχωράμε στο βήμα 3.

Βήμα 3: Οι βέλτιστες ποσότητες παραγγελίας $Q_i^* > 0$ προσδιορίζονται από την ικανή συνθήκη:

$$\frac{\partial L}{\partial Q_i} = -\frac{K_iD_i}{Q_i^2} + \frac{h_i}{2} - \lambda\alpha_i = 0 \qquad (2.27)$$

όπου η Λαγκραντζιανή συνάρτηση L δίνεται από τη σχέση:

$$
\begin{aligned}
&L(\lambda, Q_1, Q_2, ..., Q_n) = TC(Q_1, Q_2, ..., Q_n) - \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i Q_i - A\right) = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{K_i D_i}{Q_i} + c_i D_i + \frac{h_i Q_i}{2} \right) - \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i Q_i - A\right)
\end{aligned}
\quad (2.28)
$$

Και ο πολλαπλασιαστής Lagrange λ, με $\lambda < 0$ προσδιορίζεται από την ικανή συνθήκη:

$$
\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -\sum_{i=1}^{n} \alpha_i Q_i + A = 0 \quad (2.29)
$$

2.9 Συμπεράσματα

Συνοψίζοντας, στο κεφάλαιο αυτό έγινε αναφορά στα προσδιοριστικά μοντέλα συνεχούς επιθεώρησης για προβλήματα παραγωγής και ελέγχου αποθεμάτων ενός ή περισσοτέρων ειδών με πεπερασμένο ορίζοντα σχεδιασμού. Παρότι οι παραδοχές των μοντέλων αυτών είναι απαιτητικές και σπάνια ικανοποιούνται καθώς επίσης σπάνια εξασφαλίζεται ένας σταθερός χρόνος παράδοσης των προϊόντων, ωστόσο τα μοντέλα της ΟΠΠ έχουν αποδείξει ότι είναι «ανθεκτικά», δηλαδή δίνουν σχεδόν βέλτιστες λύσεις. Αυτός είναι άλλωστε και ο λόγος που χρησιμοποιούνται τόσο πολύ στην πράξη.

Πολλές φορές κάποια από τις παραδοχές των μοντέλων της ΟΠΠ δεν ισχύει ούτε κατά προσέγγιση. Για τον λόγο αυτό καταφεύγουμε στη χρήση άλλων μοντέλων για την επίλυση του προβλήματος. Τέτοια μοντέλα είναι τα προσδιοριστικά μοντέλα περιοδικής επιθεώρησης τα οποία και αναλύουμε στο επόμενο κεφάλαιο της εργασίας.

3. ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΠΕΡΙΟΔΙΚΗΣ ΕΠΙΘΕΩΡΗΣΗΣ

3.1 Εισαγωγή

Στο παρόν κεφάλαιο θα αναλύσουμε τα μοντέλα περιοδικής επιθεώρησης για τα προβλήματα παραγωγής και ελέγχου αποθεμάτων. Στα μοντέλα αυτά η βέλτιστη πολιτική παραγγελίας για ένα είδος με πεπερασμένο ορίζοντα σχεδιασμού βρίσκονται με τη χρήση ενός αλγορίθμου. Ωστόσο, πολλές φορές ορισμένα μοντέλα οδηγούν και στη βέλτιστη πολιτική παραγγελίας για περισσότερα από ένα είδη. Στην περίπτωση όπου τα είδη είναι περισσότερα από ένα, κάθε είδος είναι ανεξάρτητο από τα υπόλοιπα και ο χρόνος θεωρείται διακριτός, με αποτέλεσμα το απόθεμα να επιθεωρείται σε τακτά χρονικά διαστήματα και έτσι όλες οι αποφάσεις που σχετίζονται είτε με κάθε νέα παραγγελία, είτε με την εύρεση της βέλτιστης πολιτικής παραγγελίας να λαμβάνονται ή στην αρχή ή στο τέλος αυτών των χρονικών διαστημάτων.

Τα προσδιοριστικά μοντέλα περιοδικής επιθεώρησης διακρίνονται σε δύο κατηγορίες: α) στα μοντέλα αμετάβλητης ζήτησης, όπου η ζήτηση είναι η ίδια σε όλες τις χρονικές περιόδους του ορίζοντα σχεδιασμού και β) στα μοντέλα μεταβλητής ζήτησης, όπου η ζήτηση μπορεί να μεταβάλλεται σε κάθε μία από τις περιόδους του ορίζοντα σχεδιασμού.

Στο κεφάλαιο αυτό αναλύονται δύο μοντέλα περιοδικής επιθεώρησης:

1) Το μοντέλο του δυναμικού προγραμματισμού προσαρμοσμένο στο πρόβλημα παραγωγής και ελέγχου αποθεμάτων με μηδενικό χρόνο παράδοσης,

2) Το μοντέλο των Wagner – Whitin.

3.2 Το μοντέλο του δυναμικού προγραμματισμού προσαρμοσμένο στο πρόβλημα παραγωγής και αποθήκευσης, με μηδενικό χρόνο παράδοσης

Ο δυναμικός προγραμματισμός είναι μία τεχνική που χρησιμοποιείται για την επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης που σχετίζονται με μία σειρά από διαδοχικές αποφάσεις που πρέπει να ληφθούν με βάση κάποιο κριτήριο (π.χ. η ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους). Επίσης, κάθε απόφαση που λαμβάνεται την τρέχουσα χρονική στιγμή επηρεάζει τις αποφάσεις οι οποίες θα ληφθούν στο μέλλον. Κάθε πρόβλημα του δυναμικού προγραμματισμού λύνεται ορίζοντας μία επαναληπτική σχέση με τη βοήθεια της οποίας οδηγούμαστε στην εύρεση της βέλτιστης λύσης. Διακρίνουμε δύο μεθόδους του δυναμικού προγραμματισμού:

α) Την προς τα εμπρός μέθοδο: όπου ορίζεται η επαναληπτική σχέση ξεκινώντας από την αρχική απόφαση και μεταβαίνει στη συνέχεια στις υπόλοιπες αποφάσεις.

β) Προς τα πίσω μέθοδος: όπου ορίζεται η επαναληπτική σχέση ξεκινώντας από την τελική απόφαση και μεταβαίνει στη συνέχεια στις υπόλοιπες αποφάσεις με αντίστροφη σειρά.

Στο μοντέλο του δυναμικού προγραμματισμού προσαρμοσμένο στο πρόβλημα παραγωγής και αποθήκευσης, κάθε απόφαση η οποία λαμβάνεται για την ανανέωση του αποθέματος βασίζεται μόνο στο απόθεμα το οποίο είναι διαθέσιμο στην αρχή κάθε περιόδου. Επίσης, η βέλτιστη συνάρτηση έχει να κάνει με την ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους. Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε μόνο την προς τα πίσω μέθοδο του δυναμικού προγραμματισμού.

Υποθέσεις:

1) Ο χρόνος t είναι διακριτός και ο ορίζοντας σχεδιασμού χωρίζεται σε Τ χρονικές περιόδους. Έτσι, t = 1,2,….,n.

2) Η ζήτηση σε κάθε περίοδο t είναι γνωστή, σταθερή και ικανοποιείται σε κάθε περίοδο.

3) Η απόφαση για την ποσότητα του προϊόντος που είτα θα παραχθεί από το ίδιο το σύστημα είτε θα παραγγελθεί από κάποιον άλλον εξωτερικό παράγοντα, λαμβάνεται στην αρχή κάθε περιόδου. Να σημειωθεί πως υπάρχει ένα άνω όριο στην ποσότητα που μπορεί να παράγει το σύστημα (ή να παραγγείλει) για κάθε χρονική περίοδο.

4) Ο χρόνος παράδοσης των προϊόντων είναι ίσος με μηδέν.

5) Η ζήτηση πρέπει να ικανοποιείται άμεσα.

6) Σε κάθε χρονική περίοδο δεν γίνεται να αποθηκευτεί περισσότερη από μία συγκεκριμένη ποσότητα προϊόντος.

7) Σε κάθε χρονική περίοδο υπάρχει ένα κόστος παραγγελίας, κάποιο κόστος απόκτησης και ένα κόστος αποθήκευσης τα οποία διαφέρουν από περίοδο σε περίοδο.

8) Στόχος του συστήματος είναι η ικανοποίηση της ζήτησης στο ελάχιστο δυνατό συνολικό κόστος.

Συμβολισμοί:

- t : δείκτης χρόνου. Χωρίζεται σε Τ περιόδους. Άρα, t = 1, 2, …., T
- x_t : μονάδες προϊόντων που αποκτώνται στην αρχή της t περιόδου
- i_t : διαθέσιμο απόθεμα στο τέλος της t περιόδου
- D_t : η πρόβλεψη της ζήτησης για την t περίοδο
- c_t : κόστος απόκτησης μιας μονάδας προϊόντος για την περίοδο t

- h_t : κόστος αποθήκευσης μιας μονάδας προϊόντος για την περίοδο t
- K_t : κόστος παραγγελίας της περιόδου t
- Mx_t : μέγιστη ποσότητα προϊόντων που μπορεί να αποκτηθεί στην αρχή της t περιόδου
- Mi_t : μέγιστη ποσότητα αποθέματος στο τέλος της t περιόδου.

Να σημειωθεί ότι οι αποφάσεις λαμβάνονται στην αρχή της κάθε περιόδου και σχετίζονται με την ποσότητα χ_t, t = 1,2,…T που ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος λειτουργίας. Ορίζουμε ως βέλτιστη συνάρτηση:

$F_t\ (i_{t-1})$ = { το ελάχιστο κόστος λειτουργίας του συστήματος που προκύπτει για την ικανοποίηση της ζήτησης για τις περιόδους t, t+1,…T όταν η ποσότητα που είναι αποθηκευμένη στην αρχή της περιόδου t είναι i_{t-1} }

Επίσης, οι αποφάσεις που παίρνονται από το σύστημα στην αρχή της κάθε περιόδου t, δηλαδή τη χρονική στιγμή t-1 πρέπει να είναι βέλτιστες.

Στη συνέχεια, πρέπει να ορίσουμε μία επαναληπτική σχέση η οποία θα οδηγεί στη βέλτιστη πολιτική παραγγελίας. Θεωρούμε λοιπόν ότι το σύστημα στην αρχή της t περιόδου έχει αρχικό απόθεμα i_{t-1} και θέλει να αποκτήσει x_t προϊόντα. Αν το x_t >0, τότε το σύστημα επιβαρύνεται με ένα κόστος παραγγελίας K_t στην αρχή της περιόδου t καθώς και με ένα κόστος απόκτησης των x_t προϊόντων το οποίο είναι $c_t \cdot x_t$. Επιπλέον, μόλις το σύστημα αποκτήσει τα x_t προϊόντα και ικανοποιήσει και τη ζήτηση D_t στην αρχή της περιόδου t, τότε στο τέλος της περιόδου t θα υπάρχει απόθεμα i_t που θα δίνεται από τη σχέση

$$i_t = i_{t-1} + x_t - D_t \qquad t = 1, 2,\ldots, T \tag{3.1}$$

Επιπλέον, δεδομένου ότι το διαθέσιμο απόθεμα i_t στο τέλος της περιόδου t παραμένει αποθηκευμένο καθ' όλη τη διάρκεια της χρονικής περιόδου t, το σύστημα επιβαρύνεται και με ένα κόστος αποθήκευσης $h_t \cdot i_t$. Άρα, το συνολικό κόστος λειτουργίας τους συστήματος $TC(x_t)$ δεδομένων όλων των παραπάνω θα είναι:

$$TC(x_t) = \begin{cases} K_t + c_t \cdot x_t + h_t \cdot i_t, x_t > 0 \\ h_t \cdot i_t, x_t = 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

για t = 1,2,…T.

Αφού λοιπόν στο τέλος της t περιόδου το σύστημα είχε ένα απόθεμα $i_t = i_{t-1} + x_t - D_t$ τότε το ίδιο απόθεμα θα έχει το σύστημα στην αρχή της περιόδου (t+1). Και επομένως, το ελάχιστο κόστος λειτουργίας του συστήματος που προκύπτει για την ικανοποίηση της ζήτησης για τις περιόδους t+1, t+2,….., T είναι $f_{t+1}(i_t)$ με $i_t = i_{t-1} + x_t - D_t$. Έτσι λοιπόν, η ζητούμενη επαναληπτική σχέση θα είναι:

$$f_t(i_{t-1}) = \min_{x_t}\{TC(x_t) + f_{t+1}(i_t)\} \tag{3.3}$$

Επιπρόσθετα, θα πρέπει να ισχύουν οι εξής περιορισμοί:

1) $i_t \le Mi_t$

2) $x_t \le Mx_t$

για t = 0, 1, 2, …..,T.

Συνοψίζοντας,

στην αρχή της κάθε χρονικής περιόδου

$f_t(i_{t-1}) = \min_{x_t}\{TC(x_t) + f_{t+1}(i_t)\}$

Το $TC(x_t)$ υπολογίζεται από τη σχέση (3.2) και θα πρέπει να ισχύουν οι περιορισμοί:

$$1)\ x_t = i_{t-1} + x_t - D_t \qquad \text{για } t = 1, 2, \ldots, T$$

$$2)\ i_t \le Mi_t \qquad t = 0, 1, 2, \ldots, T\text{-}1$$

$$3)\ x_t \le Mx_t \qquad t = 0, 1, 2, \ldots, T\text{-}1$$

Και στο τέλος του χρονικού ορίζοντα δεδομένου ότι υπάρχει ένα απόθεμα i_T θα έχουμε:

$$x_T = i_T + D_T - i_{T-1}, \qquad x_T \ge 0$$

υπό τους περιορισμούς:

$$1)\ i_T \le Mi_T$$

$$2)\ x_T \le Mx_T$$

και ελάχιστο κόστος

$$f_T(i_{T-1}) = \begin{cases} K_T + c_T \cdot x_T + h_T \cdot i_T, x_T > 0 \\ h_T \cdot i_T, x_T = 0 \end{cases}$$

Παρατηρήσεις:

1) Βασικό πλεονέκτημα του μοντέλου του δυναμικού προγραμματισμού είναι ότι η συνάρτηση κόστους $TC(x_t)$ μπορεί να πάρει οποιαδήποτε μορφή δηλαδή μπορεί να είναι πολυωνυμική, εκθετική κ.ο.κ. Έτσι, στο μοντέλο αυτό μπορούν να ληφθούν τυχόν εκπτώσεις που γίνονται στην τιμή απόκτησης των προϊόντων ανάλογα με την ποσότητα προϊόντων που θα αποκτηθούν. Τότε, η συνάρτηση κόστους ορίζεται ως:

$$TC(x_t) = \begin{cases} K_t + c_{t1} \cdot x_t + h_t \cdot i_t, \ \text{αν } 0 < x_t < b_1 \\ K_t + c_{t2} \cdot x_t + h_t \cdot i_t, \ \text{αν } b_1 \le x_t < b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ K_t + c_{tk} \cdot x_t + h_t \cdot i_t, \ \text{αν } b_{k-1} \le x_t < b_k = \infty \\ h_t \cdot i_t, \ \text{αν } x_t = 0 \end{cases} \qquad (3.4)$$

όπου τα b_1, b_2, ….., b_{k-1} είναι η εκπτωτική κλίμακα, δηλαδή είναι οι ποσότητες πριν και μετά τις οποίες αλλάζει το μοναδιαίο κόστος απόκτησης. Επιπλέον, είναι λογικό ότι $c_k < c_{k-1} < \ldots\ldots < c_1$.

2) Βασικό μειονέκτημα του μοντέλου του δυναμικού προγραμματισμού είναι η διαδικασία για τον υπολογισμό των βέλτιστων ποσοτήτων x_t για κάθε περίοδο t. Πιο συγκεκριμένα παρότι η εύρεση της ποσότητας x_t για την T περίοδο είναι αυτόματη, ωστόσο η εύρεση των ποσοτήτων απόκτησης x_t για τις υπόλοιπες T-1 περιόδους είναι χρονοβόρα και επίπονη. Για τον λόγο αυτό, διατυπώθηκε το 1958 από τους ερευνητές Wagner και Whitin μία νέα μέθοδος που απλοποιεί τον υπολογισμό εύρεσης της βέλτιστης πολιτικής παραγγελίας για ένα είδος μέσω του δυναμικού προγραμματισμού.

3.3 Το μοντέλο των Wagner- Whitin

Το μοντέλο των Wagner- Whitin αναπτύχθηκε το 1958 και έχει ως στόχο την εύρεση της βέλτιστης πολιτικής απόκτησης για ένα είδος προϊόντος σε πεπερασμένο ορίζοντα σχεδιασμού. Στο μοντέλο αυτό, ισχύουν όλες οι υποθέσεις που ισχύουν για το μοντέλο του δυναμικού προγραμματισμού και μία επιπλέον υπόθεση. Έτσι, θα έχουμε:

Υποθέσεις:

1) Ο χρόνος t είναι διακριτός και ο ορίζοντας σχεδιασμού χωρίζεται σε T χρονικές περιόδους. Έτσι, t = 1,2,…T.

2) Η ζήτηση σε κάθε περίοδο t είναι γνωστή, σταθερή και ικανοποιείται σε κάθε περίοδο.

3) Η απόφαση για την ποσότητα των προϊόντων που είτε θα παραχθούν από το ίδιο το σύστημα, είτε θα παραγγελθούν από κάποιον άλλο εξωτερικό παράγοντα, λαμβάνεται στην αρχή κάθε περιόδου. Να σημειωθεί πως υπάρχει ένα άνω όριο στην ποσότητα που μπορεί να παράγει το σύστημα (ή να παραγγέλει) σε κάθε χρονική περίοδο.

4) Ο χρόνος παράδοσης των προϊόντων είναι ίσος με μηδέν.

5) Η ζήτηση πρέπει να ικανοποιείται άμεσα.

6) Σε κάθε χρονική περίοδο δεν γίνεται να αποθηκευτεί περισσότερη από μία συγκεκριμένη ποσότητα προϊόντος.

7) Σε κάθε χρονική περίοδο υπάρχει ένα κόστος παραγγελίας, κάποιο κόστος απόκτησης και ένα κόστος αποθήκευσης τα οποία διαφέρουν από περίοδο σε περίοδο.

8) Ή η ζήτηση του προϊόντος θα σταματά στο τέλος του χρονικού ορίζοντα, ή το τελικό απόθεμα θα είναι προκαθορισμένο.

9) Στόχος του συστήματος είναι η ικανοποίηση της ζήτησης στο ελάχιστο δυνατό συνολικό κόστος.

Συμβολισμοί:

- t : δείκτης χρόνου. Χωρίζεται σε Τα περιόδους, δηλαδή t = 1,2,….T.
- χ_t : μονάδες προϊόντων που αποκτώνται στην αρχή της t περιόδου.
- i_t : διαθέσιμο απόθεμα στο τέλος της t περιόδου.
- D_t : η πρόβλεψη της ζήτησης για την t περίοδο
- c_t : κόστος απόκτησης μιας μονάδας προϊόντος για την περίοδο t.
- h_t : κόστος αποθήκευσης μιας μονάδας προϊόντος για την περίοδο t
- K_t : κόστος παραγγελίας της περιόδου t.

Για την επίλυση ενός προβλήματος σύμφωνα με τη μέθοδο Wagner-Whitin, θεωρούμε ότι το αρχικό απόθεμα του συστήματος είναι ίσο με το μηδέν ($i_0 = 0$). Για την εύρεση λοιπόν της βέλτιστης πολιτικής χρησιμοποιείται ο παρακάτω αλγόριθμος.

Αλγόριθμος:

Βήμα 1: Ορίζουμε τη βέλτιστη συνάρτηση. Ο χρόνος είναι διακριτός και έτσι οι αποφάσεις λαμβάνονται στην αρχή κάθε περιόδου και σχετίζονται με την ποσότητα χ_t προϊόντων που πρέπει να αποκτήσει το σύστημα ώστε να ανανεωθεί το απόθεμα. Στόχος λοιπόν του μοντέλου είναι να βρεθούν εκείνα τα χ_t, $t = 1,2,..T$ που ελαχιστοποιούν το συνολικό κόστος λειτουργίας του συστήματος. Άρα, η βέλτιστη συνάρτηση είναι:

F_t = { το ελάχιστο κόστος λειτουργίας του συστήματος που προκύπτει για την ικανοποίηση της ζήτησης για τις περιόδους t, t+1,…T όταν το απόθεμα στην αρχή της περιόδου t είναι μηδέν ($i_{t-1} = 0$) }

Βήμα 2: Δημιουργούμε μία επαναληπτική σχέση η οποία θα οδηγεί στη βέλτιστη πολιτική απόκτησης προϊόντων. Επειδή το απόθεμα στην αρχή κάθε περιόδου t είναι μηδέν, το σύστημα πρέπει να αποκτήσει μία ποσότητα προϊόντων $x_t \geq D_t$ έτσι ώστε να καλύψει και τη ζήτηση της τρέχουσας περιόδου αλλά πιθανόν και μετέπειτα περιόδων. Αν αυτή η ποσότητα προϊόντων καλύψει ακριβώς τη ζήτηση για μία ή περισσότερες περιόδους, τότε μιλάμε για βέλτιστη ποσότητα. Άρα, για να είναι η ποσότητα x_t βέλτιστη θα πρέπει να πάρει μία από τις παρακάτω τιμές:

$$x_t = \begin{cases} D_t \\ D_t + D_{t+1} \\ D_t + D_{t+1} + D_{t+2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ D_t + D_{t+1} + D_{t+2} + \dots\dots + D_T \end{cases}$$

Για την απόκτηση οποιασδήποτε από τις παραπάνω ποσότητες προϊόντων χ_t το σύστημα επιβαρύνεται με ένα κόστος παραγγελίας K_t στην αρχή της t περιόδου καθώς και με ένα κόστος απόκτησης χ_t προϊόντων $c_t \cdot x_t$. Δηλαδή:

$$C(x_t) \quad = \quad K_t \quad + \quad c_t x_t$$

(3.5)

όπου $C(x_t)$ είναι το κόστος με το οποίο επιβαρύνεται το σύστημα.

Αφού λοιπόν αποκτηθεί η ποσότητα χ_t, στο τέλος της περιόδου t θα υπάρχει στο σύστημα κάποιο απόθεμα που μπορεί να πάρει μία από τις παρακάτω τιμές:

$$i_t = x_t - D_t = \begin{cases} 0 \\ D_{t+1} \\ D_{t+1} + D_{T+2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ D_{t+1} + D_{t+2} + D_{t+3} + \dots + D_T \end{cases}$$

Να σημειωθεί ότι αυτό το απόθεμα παραμένει στην αποθήκη του συστήματος σε όλη την περίοδο t, αφού η ζήτηση D_t ικανοποιείται στην αρχή της περιόδου. Επίσης, το σύστημα επιβαρύνεται με ένα κόστος αποθήκευσης . Αναλόγως, στο τέλος της περιόδου t+1 εφόσον $x_{t+1} > D_t + D_{t+1}$ θα υπάρχει στο σύστημα κάποιο απόθεμα που μπορεί να πάρει μία από τις παρακάτω τιμές:

$$i_{t+1} = x_{t+1} - D_t - D_{t+1} = \begin{cases} 0 \\ D_{t+2} \\ D_{t+2} + D_{t+3} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ D_{t+2} + D_{t+3} + D_{t+4} + \dots + D_T \end{cases}$$

και επιπλέον το σύστημα επιβαρύνεται με ένα κόστος αποθήκευσης $h_{t+1} \cdot i_{t+1}$ κ.ο.κ. Και επειδή, οι αποφάσεις που λαμβάνονται κάθε φορά πρέπει να είναι βέλτιστες, η επαναληπτική σχέση είναι η εξής:

$$F_t = \min \begin{cases} C(D_t) + F_{t+1} \\ C(D_t + D_{t+1}) + h_t \cdot D_{t+1} + F_{t+2} \\ C(D_t + D_{t+1} + D_{t+2}) + h_t \cdot (D_{t+1} + D_{t+2}) + h_{t+1} \cdot D_{t+2} + F_{t+3} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C(D_t + \ldots.. + D_{T-1}) + h_t \cdot (D_{t+1} + \ldots.. + D_{T-1}) + \ldots. + h_{T-2} \cdot D_{T-1} + F_T \\ C(D_t + \ldots.. + D_T) + h_t \cdot (D_{t+1} + \ldots.. + D_T) + \ldots. + h_{T-1} \cdot D_T \end{cases} \tag{3.6}$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν, πως για να βρεθεί η βέλτιστη πολιτική απόκτησης προϊόντων αρκεί να εφαρμοστεί η προς τα πίσω μέθοδος του δυναμικού προγραμματισμού με βάση τη σχέση (3.6).

Τι γίνεται όμως στην περίπτωση όπου $c_1 = c_2 = \ldots = c_T = c$; Γνωρίζουμε ότι όταν το απόθεμα είναι μηδέν, τότε οι ποσότητες που αποκτά το σύστημα καλύπτουν ακριβώς τη ζήτηση μίας ή περισσότερων διαδοχικών περιόδων και τότε η συνολική ποσότητα προϊόντων που θα αποκτηθεί σε όλη τη διάρκεια του χρονικού ορίζοντα θα είναι $D_1 + D_2 + \ldots + D_{T-1} + D_T$. Άρα, το συνολικό κόστος απόκτησης των προϊόντων θα είναι σταθερό και ίσο με

$(D_1 + D_2 + \ldots + D_{T-1} + D_T) \cdot c$ ανεξάρτητα από τις περιόδους που είναι βέλτιστο για το σύστημα να αποκτήσει προϊόντα. Συνεπώς, το συγκεκριμένο κόστος μπορεί να παραληφθεί από τον υπολογισμό του συνολικού κόστους που επιδιώκουμε να ελαχιστοποιηθεί μέσω της επαναληπτικής σχέσης (3.6). Επομένως, η σχέση (3.6) Θα γίνει:

$$F_t = \min \begin{cases} K_t + F_{t+1} \\ K_t + h_t \cdot D_{t+1} + F_{t+2} \\ K_t + h_t \cdot (D_{t+1} + D_{t+2}) + h_{t+1} \cdot D_{t+2} + F_{t+3} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ K_t + h_t \cdot (D_{t+1} + \ldots.. + D_{T-1}) + \ldots. + h_{T-2} \cdot D_{T-1} + F_T \\ K_t + h_t \cdot (D_{t+1} + \ldots.. + D_T) + \ldots. + h_{T-1} \cdot D_T \end{cases} \quad (3.7)$$

Παρατήρηση:

Αξίζει να σημειωθεί ότι βασικό μειονέκτημα του αλγορίθμου των Wagner – Whitin είναι οι υπολογιστικές απαιτήσεις του, ιδιαίτερα στην περίπτωση εφαρμογών μεγάλης κλίμακας. Επιπλέον, οποιαδήποτε αλλαγή των τιμών των παραμέτρων του προβλήματος, προκαλεί αλλαγές στη βέλτιστη πολιτική και επομένως απαιτείται νέα επίλυση του προβλήματος.

4. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Στο κεφάλαιο αυτό παραθέτουμε ένα παράδειγμα όπου με κάποιες παραλλαγές εφαρμόζεται σε όλα τα μοντέλα που αναφέρθηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια.

Εφαρμογή 4.1. Βασικό μοντέλο της ΟΠΠ

Μία κατασκευαστική επιχείρηση ηχοσυστημάτων εισάγει ένα συγκεκριμένο τύπο ραδιοφώνων που χρησιμοποιούνται για την κατασκευή των ηχοσυστημάτων. Τα ραδιόφωνα συγκεντρώνονται σε μία συνεχή γραμμή παραγωγής και επιπλέον μεγάλες ποσότητες του προϊόντος μπορούν να παραχθούν σε σύντομο χρονικό διάστημα. Ο υπεύθυνος της επιχείρησης αναζητεί μία πολιτική ανανέωσης του αποθέματος έτσι ώστε να ικανοποιείται η ζήτηση των ραδιοφώνων στην ώρα της, καθώς δεν θέλει να ρισκάρει να χάσει κάποιους μελλοντικούς πελάτες επιτρέποντας την ικανοποίηση της ζήτησης με καθυστέρηση. Η επιχείρηση ενδιαφέρεται για το πότε θα παραχθεί μία ποσότητα ραδιοφώνων και πόσα ραδιόφωνα θα παραχθούν κάθε φορά.

Α. Κάθε φορά που παράγεται μία ποσότητα ραδιοφώνων, το κόστος παραγγελίας ανέρχεται στα 60€. Αυτό το κόστος έχει εκτιμηθεί για τους επόμενους 3 μήνες και περιλαμβάνει το κόστος εξοπλισμού, τα διοικητικά έξοδα κ.α.

Β. Το κόστος αγοράς ανά ραδιόφωνο ανέρχεται στα 80€.

Γ. Το εκτιμώμενο κόστος αποθήκευσης – διατήρησης ενός μεγαφώνου στην αποθήκη ανέρχεται στα 0.80€ το μήνα. Αυτό το κόστος περιλαμβάνει το κόστος μίσθωσης του χώρου αποθήκευσης, το κόστος ασφάλειας των ραδιοφώνων στην αποθήκη εξαιτίας πυρκαγιάς, κλοπής ή βανδαλισμού, φόροι βασισμένοι στην αξία του αποθέματος καθώς επίσης περιλαμβάνει και το κόστος του προσωπικού που επιτηρούν και προστατεύουν το απόθεμα.

Δ. Η πολιτική της επιχείρησης απαγορεύει σκόπιμα των προγραμματισμό των πιθανών ελλείψεων σε μεγάφωνα οπότε είναι λογικό να προκύπτει έλλειψη. Έχει υπολογιστεί ότι κάθε μεγάφωνο που δεν είναι διαθέσιμο όταν ζητείται κοστίζει 1.40€ το μήνα. Αυτό το κόστος έλλειψης περιλαμβάνει το επιπρόσθετο κόστος τοποθέτησης των μεγαφώνων μετά την πλήρη κατασκευή της τηλεόρασης, το ενδιαφέρον που χάνεται λόγω της καθυστέρησης στη λήψη του εισοδήματος από τις πωλήσεις κ.α.

Έστω λοιπόν,

- K = το κόστος παραγγελίας,
- c = το μοναδιαίο κόστος παραγωγής/ απόκτησης μιας μονάδας προϊόντος και
- h = το κόστος αποθήκευσης / διατήρησης.

Στο βασικό μοντέλο της ΟΠΠ πέρα όλων των παραπάνω υποθέσεων ισχύουν επιπλέον:

Α. Υπάρχει ένα γνωστό και σταθερό ποσό ζήτησης D μονάδων του προϊόντος.

Β. Υπάρχει και η ποσότητα Q που ο υπεύθυνος της επιχείρησης πρέπει να παραγγέλνει κάθε φορά που το επίπεδο του αποθέματος I του καταστήματος φτάνει στο 0.

Εύρεση της βέλτιστης λύσης:

Έστω K = 60, h = 0.80 και D = 600.

Η οικονομική ποσότητα παραγγελίας, δηλαδή η ποσότητα ραδιοφώνων την οποία πρέπει να παραγγέλνει ο υπεύθυνος κάθε φορά που το επίπεδο του αποθέματος I φτάνει στο 0 θα είναι $Q^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 60 \cdot 600}{0.80}} = \sqrt{90000} = 300$.

Ο αριθμός των παραγγελιών που θα γίνουν στη διάρκεια του τριμήνου (δηλαδή πόσοι κύκλοι) θα είναι $\frac{D}{Q*} = \frac{600}{300} = 2$ παραγγελίες ανά τρίμηνο.

Το χρονικό διάστημα το οποίο μεσολαβεί μεταξύ 2 ανανεώσεων του αποθέματος, δηλαδή το μήκος ενός κύκλου θα είναι: $\frac{Q*}{D} = \frac{300}{600} = \frac{1}{2}$ του τριμήνου, και επειδή ο ένας μήνας έχει 30 ημέρες , δηλαδή οι 3 μήνες είναι 90 ημέρες και επομένως το μήκος του κύκλου θα είναι 90/2= 45 ημέρες ή ενάμισης μήνας.

Το ελάχιστο δυνατό συνολικό κόστος διαχείρισης του αποθέματος θα είναι

$$
\begin{aligned}
&TC(Q^*) = \frac{KD}{Q*} + cD + \frac{hQ*}{2} = \\
&= \frac{60 \cdot 600}{300} + 80 \cdot 600 + \frac{0.80 \cdot 300}{2} = \\
&= 120 + 48000 + 120 = 48240€
\end{aligned}
$$

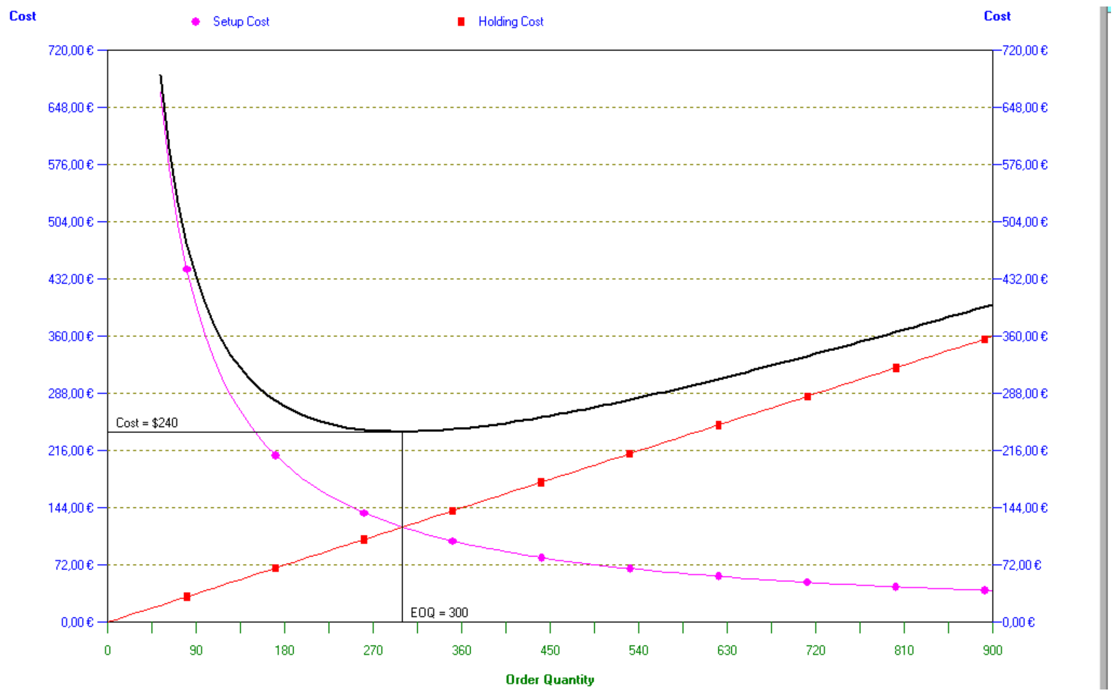
Η επίλυση του παραπάνω προβλήματος μπορεί να γίνει με τη βοήθεια του λογισμικού WinQSB.

DATA ITEM	ENTRY
Demand per 3 months	600
Order or setup cost per order	60
Unit holding cost per 3 months	0.80
Unit shortage cost per 3 months	M
Unit shortage cost independent of time	
Replenishment or production rate per 3 months	M
Lead time for a new order in 3 months	0
Unit acquisition cost without discount	80
Number of discount breaks (quantities)	
Order quantity if you known	

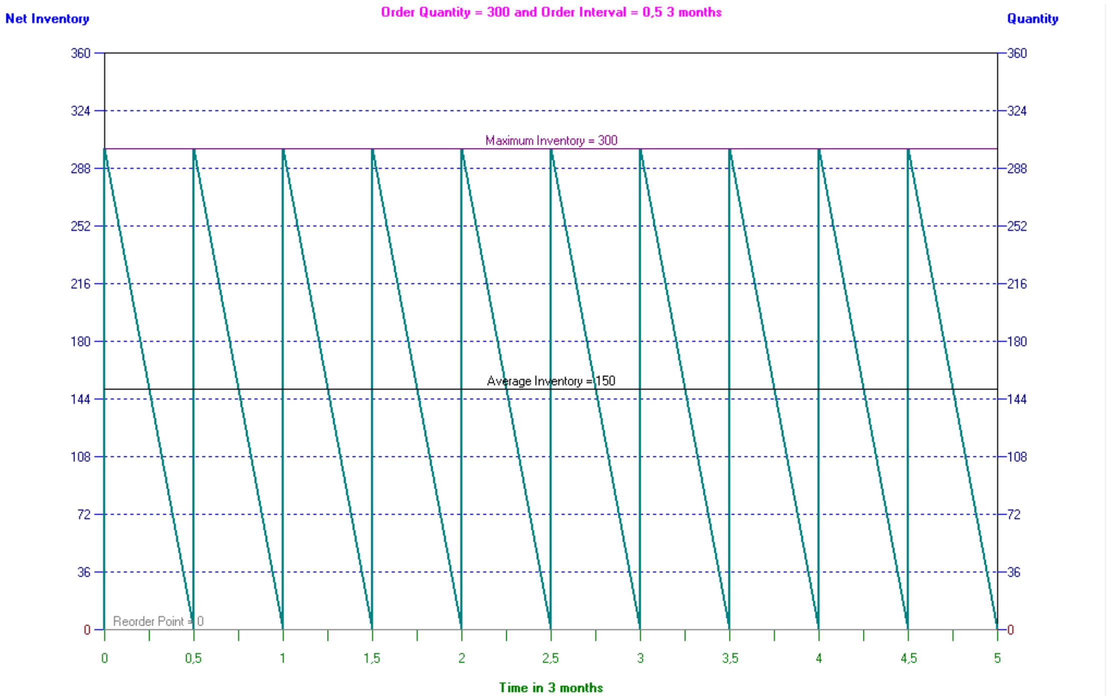
Εικόνα 1: Εισαγωγή των δεδομένων στο παράθυρο του WinQSB

03-03-2010	Input Data	Value	Economic Order Analysis	Value
1	Demand per 3 months	600	Order quantity	300
2	Order (setup) cost	$60,0000	Maximum inventory	300
3	Unit holding cost per 3	$0,8000	Maximum backorder	0
4	Unit shortage cost		Order interval in 3 months	0,5
5	per 3 months	M	Reorder point	0
6	Unit shortage cost			
7	independent of time	0	Total setup or ordering cost	$120,0000
8	Replenishment/production		Total holding cost	$120,0000
9	rate per 3 months	M	Total shortage cost	0
10	Lead time in 3 months	0	Subtotal of above	$240,0000
11	Unit acquisition cost	$80,0000		
12			Total material cost	$48000,0000
13				
14			Grand total cost	$48240,0000

Εικόνα 2: Η βέλτιστη πολιτική παραγγελίας μέσω του WinQSB



Σχήμα 1: Το ελάχιστο συνολικό κόστος του τριμήνου συμβαίνει για εκείνη την ποσότητα Q* για την οποία το τριμηνιαίο κόστος παραγγελίας είναι ίσο με το τριμηνιαίο κόστος διατήρησης



Σχήμα 2: Κατά προσέγγιση μεταβολή του επιπέδου του αποθέματος κατά τη διάρκεια του χρόνου σε τρίμηνο

Στην εικόνα 1 φαίνεται ο τρόπος εισαγωγής των δεδομένων και στην εικόνα 2 φαίνεται η βέλτιστη πολιτική παραγγελίας. Επιπλέον, στο σχήμα 1 φαίνεται με τη μαύρη γραμμή η καμπύλη του συνολικού τριμηνιαίου κόστους, με τη ροζ γραμμή το τριμηνιαίο κόστος παραγγελίας και με την κόκκινη γραμμή η καμπύλη του τριμηνιαίου κόστους διατήρησης του αποθέματος. Στο σχήμα 2 φαίνεται η κατά προσέγγιση μεταβολή του επιπέδου του αποθέματος στον χρονικό ορίζοντα.

Εφαρμογή 4.2. Μοντέλο της ΟΠΠ με μη μηδενικό χρόνο παράδοσης

Εξαιτίας του γεγονότος ότι έσπασαν οι σωλήνες νερού της αποθήκης έπρεπε να μεταφερθεί επειγόντως το απόθεμα σε μία νέα αποθήκη μακριά από την υπάρχουσα. Έτσι, ενώ προηγουμένως ο χρόνος παράδοσης μιας παραγγελίας ήταν αμελητέος, τώρα θα αυξηθεί στους 2 μήνες για το χειμερινό εξάμηνο και στους 4 μήνες για το εαρινό εξάμηνο.

Εύρεση βέλτιστης πολιτικής

Η οικονομική ποσότητα παραγγελίας θα είναι και εδώ: $Q^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 60 \cdot 600}{0.80}} = \sqrt{90000} = 300$.

Ο αριθμός των παραδόσεων που θα γίνουν για να καλυφθούν οι ανάγκες για το τρέχον τρίμηνο είναι $\frac{D}{Q^*} = \frac{600}{300} = 2$ παραγγελίες ανά τρίμηνο, δηλαδή κάθε τρίμηνο θα γίνονται 2 κύκλοι.

Το μήκος του κύκλου θα είναι $\frac{Q^*}{D} = \frac{300}{600} = \frac{1}{2}$ του τριμήνου, δηλαδή ενάμισης μήνας.

Το ελάχιστο συνολικό κόστος διατήρησης του αποθέματος για ένα τρίμηνο είναι: $TC(Q^*) = 48240€$.

Πότε όμως ο υπεύθυνος της εταιρείας θα δίνει μία νέα παραγγελία;

1. Στο χειμερινό εξάμηνο: Ο χρόνος παράδοσης είναι 2 μήνες δηλαδή τα $\frac{2}{6}$ του εξαμήνου και $\frac{2}{6} = \frac{1}{3} \leq \frac{Q^*}{D} = \frac{1}{2}$. Το $LD = \frac{2}{6} \cdot 600 = \frac{1200}{6} = 200$ ραδιόφωνα. Άρα, η βέλτιστη πολιτική είναι να παραγγελθούν Q* = 300 ραδιόφωνα πριν την αρχή του 1^{ου} μήνα του χειμερινού εξαμήνου και οι υπόλοιπες 3 παραγγελίες με Q* = 300 ραδιόφωνα να γίνονται όταν το επίπεδο του αποθέματος πέσει στα 200 ραδιόφωνα.

2. Στο εαρινό εξάμηνο: Ο χρόνος παράδοσης είναι 4 μήνες, δηλαδή τα $\frac{4}{6}$ του εξαμήνου και $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}>\frac{Q^*}{D}=\frac{1}{2}$. Εδώ, θα πρέπει να υπολογιστεί ο αποδοτικός χρόνος L_e.

$\frac{LD}{Q^*}=\frac{\frac{2}{3}\cdot 600}{300}=\frac{4}{3}$. Ο μεγαλύτερος ακέραιος n που δεν ξεπερνά τα $\frac{4}{3}$ είναι το 1.Άρα:

$L_e = L - n\cdot\frac{Q^*}{D}=\frac{2}{3}-1\cdot\frac{1}{2}=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$ του εξαμήνου δηλαδή 1 μήνας. Επομένως το σημείο νέας παραγγελίας θα είναι $L_e\cdot D=\frac{1}{6}\cdot 600=100$ ραδιόφωνα.

Έτσι, η βέλτιστη πολιτική παραγγελίας εδώ θα είναι η εξής: Θα τεθεί η πρώτη παραγγελία Q* =300 ραδιόφωνα στα $\frac{2}{3}$ του εξαμήνου (δηλαδή 4 μήνες = L) πριν από την αρχή του 1^{ου} μήνα του εξαμήνου, η δεύτερη παραγγελία θα τεθεί για Q* = 300 ραδιόφωνα $\frac{1}{6}$ του εξαμήνου (δηλαδή L_e = 1 μήνας) πριν από την αρχή του 1^{ου} μήνα του εξαμήνου και οι άλλες 2 παραγγελίες με Q* = 300 ραδιόφωνα θα γίνονται κάθε φορά που το επίπεδο του αποθέματος πέφτει στα 100 ραδιόφωνα.

Παρακάτω, δίνονται τα σημεία νέας παραγγελίας της βέλτιστης πολιτικής παραγγελίας τόσο για το χειμερινό όσο και για το εαρινό εξάμηνο μέσω του λογισμικού WinQSB.

03-03-2010	Input Data	Value	Economic Order Analysis	Value
1	Demand per 3 months	600	Order quantity	300
2	Order (setup) cost	$60,0000	Maximum inventory	300
3	Unit holding cost per 3	$0,8000	Maximum backorder	0
4	Unit shortage cost		Order interval in 3 months	0,5
5	per 3 months	M	Reorder point	199,98
6	Unit shortage cost			
7	independent of time	0	Total setup or ordering cost	$120,0000
8	Replenishment/production		Total holding cost	$120,0000
9	rate per 3 months	M	Total shortage cost	0
10	Lead time in 3 months	0,3333	Subtotal of above	$240,0000
11	Unit acquisition cost	$80,0000		
12			Total material cost	$48000,0000
13				
14			Grand total cost	$48240,0000

Εικόνα 3: Η βέλτιστη πολιτική παραγγελίας που δίνει το WinQSB για το χειμερινό εξάμηνο της εφαρμογής

03-03-2010	Input Data	Value	Economic Order Analysis	Value
1	Demand per 3 months	600	Order quantity	300
2	Order (setup) cost	$60,0000	Maximum inventory	300
3	Unit holding cost per 3	$0,8000	Maximum backorder	0
4	Unit shortage cost		Order interval in 3 months	0,5
5	per 3 months	M	Reorder point	100,0200
6	Unit shortage cost			
7	independent of time	0	Total setup or ordering cost	$120,0000
8	Replenishment/production		Total holding cost	$120,0000
9	rate per 3 months	M	Total shortage cost	0
10	Lead time in 3 months	0,6667	Subtotal of above	$240,0000
11	Unit acquisition cost	$80,0000		
12			Total material cost	$48000,0000
13				
14			Grand total cost	$48240,0000

Εικόνα 4: Η βέλτιστη πολιτική παραγγελίας που δίνει το WinQSB για το εαρινό εξάμηνο

Εφαρμογή 4.3. Μοντέλο της ΟΠΠ στο οποίο επιτρέπεται η έκπτωση στο κόστος απόκτησης ανά μονάδα, ανάλογα με την ποσότητα παραγγελίας

Ο γενικός διευθυντής πωλήσεων της επιχείρησης αποφάσισε ότι λόγο οικονομικής κρίσης θα ήταν καλό να γίνεται κάποια έκπτωση στην τιμή πώλησης ενός ραδιοφώνου ανάλογα με την ποσότητα που παραγγέλνεται. Έτσι, αν παραγγέλνονται μέχρι 300 ραδιόφωνα, το κόστος αγοράς ανά ραδιόφωνο θα είναι 80€, από 300 ραδιόφωνα έως 400 θα υπάρχει μία έκπτωση της τάξης του 15% στην τιμή του κάθε ραδιοφώνου και από 400 ραδιόφωνα και πάνω η έκπτωση θα είναι της τάξης του 30%. Έτσι, με βάση τις παραπάνω αλλαγές το κόστος διατήρησης ενός ραδιοφώνου στην επιχείρηση για το χρονικό διάστημα ενός τριμήνου θα ισούται με το 10% του κόστους αγοράς του. Και εδώ ψάχνουμε τη βέλτιστη πολιτική παραγγελίας ραδιοφώνων για το τρίμηνο που ακολουθεί δεδομένου ότι όλες οι υπόλοιπες αρχικές υποθέσεις παραμένουν όπως είναι.

Συνοψίζοντας,

- Αν $0 \leq Q < 300 \rightarrow$ 0% έκπτωση $\rightarrow$ μοναδιαίο κόστος αγοράς $c_1 = 80 \rightarrow$ μοναδιαίο κόστος διατήρησης $h_1 = 0.10 \cdot 80 = 8$.
- Αν $300 \leq Q < 400 \rightarrow$ 15% έκπτωση $\rightarrow$ μοναδιαίο κόστος αγοράς $c_2 = 68 \rightarrow$ μοναδιαίο κόστος διατήρησης $h_2 = 0.10 \cdot 68 = 6.8$.
- Αν $400 \leq Q \rightarrow$ 30% έκπτωση $\rightarrow$ μοναδιαίο κόστος αγοράς $c_3 = 56 \rightarrow$ μοναδιαίο κόστος διατήρησης $h_3 = 0.10 \cdot 56 = 5.6$.

Άρα, $b_1 = 300$, $b_2 = 400$ και $b_3 = \infty$. Επίσης, K = 60€ και D = 600 ραδιόφωνα ανά τρίμηνο.

Εύρεση βέλτιστης παραγγελίας

Βήμα 1: Για το χαμηλότερο κόστος αγοράς c_3 = 56€ έχουμε: $\text{ΟΠΠ}_3 = \sqrt{\frac{2KD}{h_3}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 60 \cdot 600}{5.6}} \cong 113$ ραδιόφωνα. Επειδή $113 < b_2$ (=400) η ΟΠΠ_3 δεν είναι εφικτή και επομένως το κόστος $TC_3(Q)$ θα ελαχιστοποιηθεί για $Q^*_3 = b_2 = 400$. Το ελάχιστο συνολικό τριμηνιαίο κόστος δίνεται από τη σχέση:

$$
\begin{aligned}
TC_3(Q_3^*) &= \frac{KD}{Q_3^*} + c_3D + \frac{h_3Q_3^*}{2} = \\
&= \frac{60\cdot 600}{400} + 56\cdot 600 + \frac{5.6\cdot 400}{2} = \\
&= 90 + 33600 + 1120 = 34810€
\end{aligned}
$$

Βήμα 2: Αφού η Q_3^* δεν είναι εφικτή συνεχίζουμε για τον υπολογισμό του Q^*_2 και θα έχουμε: $ΟΠΠ_2 = \sqrt{\frac{2KD}{h_2}} = \sqrt{\frac{2\cdot 60\cdot 600}{6.8}} = 103$ ραδιόφωνα. Επειδή 103 < b_1 (=300) η $ΟΠΠ_2$ δεν είναι εφικτή και επομένως το κόστος $TC_2(Q)$ θα ελαχιστοποιείται για Q^*_2 = b_1 = 300. Το ελάχιστο συνολικό τριμηνιαίο κόστος δίνεται από τη σχέση:

$$
\begin{aligned}
TC_2(Q_2^*) &= \frac{KD}{Q_2^*} + c_2D + \frac{h_2Q_2^*}{2} = \\
&= \frac{60\cdot 600}{300} + 68\cdot 600 + \frac{6.8\cdot 300}{2} = \\
&= 120 + 40800 + 1020 = 41940€
\end{aligned}
$$

Βήμα 3: Αφού η Q^*_2 δεν είναι εφικτή συνεχίζουμε για τον υπολογισμό της Q^*_1 και θα έχουμε: $ΟΠΠ_1 = \sqrt{\frac{2KD}{h_1}} = \sqrt{\frac{2\cdot 60\cdot 600}{8}} \approx 95$ ραδιόφωνα. Είναι 0 < 95 < b_1 = 300 και κατά συνέπεια η $ΟΠΠ_1$ είναι εφικτή. Συνεπώς, το κόστος $TC_1(Q)$ ελαχιστοποιείται για Q^*_1 = $ΟΠΠ_1$ = 95. Το ελάχιστο συνολικό τριμηνιαίο κόστος θα είναι:

$$
\begin{aligned}
TC_1(Q_1^*) &= \frac{KD}{Q_1^*} + c_1D + \frac{h_1Q_1^*}{2} = \\
&= \frac{60\cdot 600}{95} + 80\cdot 600 + \frac{8\cdot 95}{2} = \\
&= 378.95 + 48000 + 380 = 48758.95€
\end{aligned}
$$

Έτσι, η βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας θα είναι αυτή που ανήκει στο σύνολο $\{Q^*_3,\ Q^*_2,\ Q^*_1\}$ = {400, 300, 95} και ελαχιστοποιεί το συνολικό τριμηνιαίο κόστος

$TC(Q)$ και επειδή $TC_3(Q^*_3) < TC_2(Q^*_2) < TC_1(Q^*_1)$ το συνολικό τριμηνιαίο κόστος $TC(Q)$ θα ελαχιστοποιείται για $Q = Q^*_3 = 400$ ραδιόφωνα. Άρα,

Κάθε φορά που το επίπεδο του αποθέματος φτάνει στο 0 πρέπει να παραγγέλνονται 400 ραδιόφωνα.

Ο αριθμός των παραγγελιών (δηλαδή πόσοι κύκλοι) θα γίνουν στη διάρκεια του εξαμήνου είναι $\frac{D}{Q^*_3} = \frac{600}{400} = 1.5$ παραγγελία ανά τρίμηνο.

Το μήκος κάθε κύκλου (δηλαδή το χρονικό διάστημα μεταξύ δύο ανανεώσεων του αποθέματος) θα είναι: $\frac{Q^*_3}{D} = \frac{400}{600} = \frac{2}{3}$ του τριμήνου δηλαδή 2 μήνες.

Το ελάχιστο τριμηνιαίο κόστος θα είναι: $TC(Q^*_3) = TC_3(Q^*_3) = 34810€$ μειωμένο κατά 6300€ (13.05%) σε σχέση με το ελάχιστο τριμηνιαίο συνολικό κόστος του βασικού ΟΠΠ μοντέλου.

Εφαρμογή 4.4. Το μοντέλο της ΟΠΠ στο οποίο επιτρέπεται η ικανοποίηση της ζήτησης με καθυστέρηση

Έστω τώρα, ότι αναζητάμε τη βέλτιστη πολιτική ανανέωσης του αποθέματος των ραδιοφώνων επιτρέποντας να παρουσιαστεί έλλειψη στη διαθέσιμη ποσότητα. Στην περίπτωση αυτή υπάρχει περίπτωση κάποιος πελάτης να δυσαρεστηθεί και να καταφύγει σε κάποια άλλη επιχείρηση ραδιοφώνων. Εκτιμήθηκε λοιπόν ότι το κόστος έλλειψης ενός ραδιοφώνου για ένα τρίμηνο θα είναι 80€. Ψάχνουμε και εδώ τη νέα βέλτιστη πολιτική παραγγελίας δεδομένου ότι οι υπόλοιπες υποθέσεις είναι οι ίδιες με τις υποθέσεις του βασικού μοντέλου της ΟΠΠ.

Εύρεση της βέλτιστης πολιτικής

Έχουμε, K = 60€, c = 80€, D = 600 ραδιόφωνα ανά τρίμηνο, h = 0.80€ / ραδιόφωνο / τρίμηνο και s = 80€ / ραδιόφωνο / τρίμηνο.

Να σημειωθεί ότι ο χρονικός ορίζοντας είναι το τρίμηνο. Οι ποσότητες Q*, M* που ελαχιστοποιούν το συνολικό τριμηνιαίο κόστος TC(Q, M) θα είναι:

$$Q^* = \left[\frac{2KD(h+s)}{hs}\right]^{1/2} = 300 \left[\frac{h+s}{s}\right]^{1/2} \quad 301 \sqrt{\frac{0.80+80}{80}}$$ ραδιόφωνα και

$$M^* = \left[\frac{2KDs}{h(h+s)}\right]^{1/2} = = 300 \left[\frac{s}{h+s}\right]^{1/2} \quad 299 \sqrt{\frac{80}{0.80+80}}$$ ραδιόφωνα και η μέγιστη

έλλειψη στη διαθέσιμη ποσότητα προϊόντων θα είναι: Q* - M* = 301 – 299 = 2 ραδιόφωνα.

Συνοψίζοντας,

- Πρέπει να παραγγέλνονται Q* = 301 ραδιόφωνα κάθε φορά που το απόθεμα παρουσιάζει έλλειψη Q* - M* = 2 ραδιοφώνων.
- Ο αριθμός των παραγγελιών (πλήθος κύκλων) στο τρίμηνο είναι $\frac{D}{Q^*} = \frac{600}{301} = 1.99$ παραγγελίες ανά τρίμηνο.
- Το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί μεταξύ 2 παραγγελιών (δηλαδή το μήκος του κύκλου) είναι: $\frac{Q^*}{D} = \frac{301}{600} = 0.5017$ του τριμήνου ή περίπου 45 ημέρες.
- Το ελάχιστο δυνατό τριμηνιαίο συνολικό κόστος, συμπεριλαμβανομένου και του κόστους απόκτησης είναι:

$$\begin{aligned} & TC(Q^*, M^*) + cD = \\ & = \frac{(M^*)^2 h}{2Q^*} + \frac{(Q^* - M^*)^2 s}{2Q^*} + \frac{KD}{Q^*} + cD = \\ & = 118.81 + 0.53 + 119.60 + 48000 = \\ & = 48238.94€ \end{aligned}$$

μειωμένο κατά 1.06 (0.02‰) σε σχέση με το ελάχιστο τριμηνιαίο κόστος του βασικού ΟΠΠ μοντέλου.

Παρακάτω, παρατίθεται η επίλυση του ανωτέρου προβλήματος με τη χρήση του λογισμικού WinQSB. Παρατηρούμε ότι η βέλτιστη λύση είναι ο ίδιος αριθμός.

03-04-2010	Input Data	Value	Economic Order Analysis	Value
1	Demand per 3 months	600	Order quantity	301,4963
2	Order (setup) cost	\$60,0000	Maximum inventory	298,5112
3	Unit holding cost per 3	\$0,8000	Maximum backorder	2,9851
4	Unit shortage cost		Order interval in 3 months	0,5025
5	per 3 months	\$80,0000	Reorder point	-2,9851
6	Unit shortage cost			
7	independent of time	0	Total setup or ordering cost	\$119,4045
8	Replenishment/production		Total holding cost	\$118,2223
9	rate per 3 months	M	Total shortage cost	\$1,1822
10	Lead time in 3 months	0	Subtotal of above	\$238,8089
11	Unit acquisition cost	\$80,0000		
12			Total material cost	\$48000,0000
13				
14			Grand total cost	\$48238,8100

Εικόνα 5: Η βέλτιστη πολιτική παραγγελίας μέσω του WinQSB

Εφαρμογή 4.5. Το μοντέλο του δυναμικού προγραμματισμού προσαρμοσμένο στο πρόβλημα παραγωγής και αποθήκευσης , με μηδενικό χρόνο παράδοσης

Έστω τώρα ότι το επίπεδο του αποθέματος μπορεί να επιθεωρείται μόνο στην αρχή κάθε μήνα, όπου θα παίρνονται και οι αποφάσεις για την ανανέωση του αποθέματος. Επίσης, λόγω τεχνικών προβλημάτων η επιχείρηση ενημερώθηκε ότι δεν είναι δυνατή η διάθεση άνω των 300 ραδιοφώνων κάθε μήνα και επιπλέον οι ποσότητες ραδιοφώνων που θα διατίθενται κάθε μήνα θα πρέπει να είναι υποχρεωτικά πολλαπλάσια του 40, για το τρίμηνο που ακολουθεί. Αναζητούμε και πάλι τη βέλτιστη πολιτική παραγγελίας δεδομένου ότι όλες οι υπόλοιπες υποθέσεις του βασικού μοντέλου παραμένουν οι ίδιες καθώς επίσης σημειώνεται ότι δεν γίνεται να διατεθούν πάνω από 300 θέσεις, από αυτές της επιχείρησης, για την αποθήκευση των ραδιοφώνων.

Εύρεση βέλτιστης λύσης

Ο χρονικός ορίζοντας του προβλήματος θεωρείται το ένα τρίμηνο. Επιπλέον, οποιαδήποτε απόφαση για την ποσότητα παραγγελίας των ραδιοφώνων αναλαμβάνεται από την αρχή κάθε μήνα.

Το τρίμηνο θα χωριστεί σε 3 χρονικές περιόδους, δηλαδή μία περίοδος θα είναι 1 μήνας και t = 0, 1, 2, 3. Θυμόμαστε ότι το κόστος αποθήκευσης ήταν 0.80€ / ραδιόφωνο / τρίμηνο. Άρα, εδώ θα είναι (0.80/3) € / ραδιόφωνο / μήνα.

Έστω λοιπόν,

1^{ος} μήνας: $c_1 = 80$€, $D_1 = 240$, $h_1 = 0.80/3$,

$K_1 = 60$€, $Mx_1 = 300$, $Mi_1 = 300$

2^{ος} μήνας: $c_2 = 80$€, $D_2 = 170$, $h_2 = 0.80/3$,

$K_2 = 60$€, $Mx_2 = 300$, $Mi_2 = 300$

3^{ος} μήνας: $c_3 = 80$€, $D_3 = 190$, $h_3 = 0.80/3$,

$K_3 = 60$€, $Mx_3 = 300$, $Mi_3 = 300$

Η βέλτιστη συνάρτηση θα είναι:

$F_t(i_{t-1})$ = { το ελάχιστο συνολικό κόστος για την επιχείρηση που προκύπτει για την ικανοποίηση της ζήτησης των ραδιοφώνων για τους μήνες t, t+1,….,T όταν η ποσότητα ραδιοφώνων που είναι αποθηκευμένη στην αρχή του μήνα t είναι i_{t-1}}

με t = 1, 2, 3.

Χρησιμοποιώντας την προς τα πίσω μέθοδο του δυναμικού προγραμματισμού θα πρέπει για τους μήνες 1, 2 σε κάθε σημείο απόφασης (δηλαδή στην αρχή κάθε μήνα) να ισχύει:

$f_t(i_{t-1}) = \min_{x_t}\{TC(x_t) + f_{t+1}(i_t)\}$ για t = 1, 2.

Το $TC(x_t)$ υπολογίζεται από τη σχέση:

$$TC(x_t) = \begin{cases} K_t + c_t \cdot x_t + h_t \cdot i_t, & \text{αν } \chi_t > 0 \\ h_t \cdot i_t, & \text{αν } \chi_t = 0 \end{cases}$$

υπό τους περιορισμούς,

$i_t = i_{t-1} + x_t - D_t$ για t = 1, 2, 3

$i_t \leq Mi_t$ για t = 0, 1, 2

$x_t \leq Mx_t$ για t = 1, 2.

Αφού τον τελευταίο μήνα, δηλαδή τον 3^{ο} μήνα, δεν θέλουμε να έχουμε απόθεμα θα ισχύει $i_3 = 0$ και $x_3 = D_3 - i_2$, $x_3 \geq 0$ υπό τον περιορισμό: $x_3 \leq Mx_3$ και με ελάχιστο κόστος :

$$f_3(i_2) = \begin{cases} K_3 + c_3 x_3, & \text{αν } \chi_3 > 0 \\ 0, & \text{αν } \chi_3 = 0 \end{cases}.$$

<u>Αρχικές παρατηρήσεις:</u>

1. Στην αρχή του 1^{ου} μήνα (δηλαδή t = 0) το απόθεμα είναι μηδενικό και για να καλύψει τη ζήτηση τον 1^{ο} μήνα (D_1 = 240) θα πρέπει να παραγγείλει μία ποσότητα ραδιοφώνων χ_1 η οποία θα είναι μεγαλύτερη ή ίση από 240 και μικρότερη ή ίση από το Mx_1 = 300 δηλαδή $240 \leq x_1 \leq 300$ και επειδή οι παραγγελίες γίνονται σε πολλαπλάσια των 40 ραδιοφώνων θα είναι x_1 = 240 ή 280.

- Αν x_1 = 240: $i_1 = i_0 + x_1 - D_1 = 0 + 240 - 240 = 0$
- Αν x_1 = 280: $i_1 = i_0 + x_1 - D_1 = 0 + 280 - 240 = 40$.

Άρα, x_1 = 240 ή 280 ραδιόφωνα και i_1 = 0 ή 40.

2. Για τον 2^{ο} μήνα διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

Α) Στην αρχή του $2^{ου}$ μήνα το απόθεμα είναι i_1 = 0. Για να καλυφθεί η ζήτηση του $2^{ου}$ μήνα D_2 = 170, θα πρέπει να παραγγελθεί ποσότητα x_2 η οποία είναι μεγαλύτερη ή ίση από 170 και μικρότερη ή ίση από το Mx_2 = 300, δηλαδή $170 \le x_2 \le 300$. Άρα, x_2 = 200 ή 240 ή 280.

- Αν x_2 = 200: $i_2 = i_1 + x_2 - D_2 = 0 + 200 - 170 = 30$
- Αν x_2 = 240: $i_2 = i_1 + x_2 - D_2 = 0 + 240 - 170 = 70$
- Αν x_2 = 280: $i_2 = i_1 + x_2 - D_2 = 0 + 280 - 170 = 110$.

Β) Αν στην αρχή του $2^{ου}$ μήνα (t = 1), το απόθεμα είναι i_1 = 40 για να καλυφθεί η ζήτηση του $2^{ου}$ μήνα D_2 = 170, θα πρέπει να παραγγελθεί ποσότητα μεγαλύτερη ή ίση του 170 – 40 = 130 και μικρότερη ή ίση του Mx_2 = 300. Άρα, x_2 = 160 ή 200 ή 240 ή 280 ραδιόφωνα.

- Αν x_2 = 160: $i_2 = i_1 + x_2 - D_2 = 40 + 160 - 170 = 30$
- Αν x_2 = 200: $i_2 = i_1 + x_2 - D_2 = 40 + 200 - 170 = 70$
- Αν x_2 = 240: $i_2 = i_1 + x_2 - D_2 = 40 + 240 - 170 = 110$
- Αν x_2 = 280: $i_2 = i_1 + x_2 - D_2 = 40 + 280 - 170 = 150$.

Σύμφωνα λοιπόν με τα παραπάνω:

x_2 = 160 ή 200 ή 240 ή 280 ραδιόφωνα και i_2 = 30 ή 70 ή 110 ή 150.

3.

- Αν i_2 = 30, τότε $x_3 = D_3 – i_2$ = 190 - 30 = 160 ραδιόφωνα,
- Αν i_2 = 70, τότε $x_3 = D_3 – i_2$ = 190 - 70 = 120 ραδιόφωνα,
- Αν i_2 = 110, τότε $x_3 = D_3 – i_2$ = 190 - 110 = 80 ραδιόφωνα,
- Αν i_2 = 150, τότε $x_3 = D_3 – i_2$ = 190 - 150 = 40 ραδιόφωνα.

Θα έχουμε λοιπόν αναγκαστικά τελικό απόθεμα $i_3 = 40$ ραδιόφωνα.

Παρακάτω, χρησιμοποιείται η προς τα πίσω μέθοδος του δυναμικού προγραμματισμού για την εύρεση της βέλτιστης πολιτικής παραγγελίας. Έτσι:

- Για τον 3ο μήνα:

Α) Για $i_2 = 30$: $x_3 = 160$ και $f_3(30) = 60 + 80 \cdot 160 = 12860$€

Β) Για $i_2 = 70$: $x_3 = 120$ και $f_3(70) = 60 + 80 \cdot 120 = 9960$€

Γ) Για $i_2 = 110$: $x_3 = 80$ και $f_3(110) = 60 + 80 \cdot 180 = 6460$€

Δ) Για $i_2 = 150$: $x_3 = 40$ και $f_3(150) = 60 + 80 \cdot 40 = 3260$€

- Για τον 2ο μήνα:

Α) Για $i_1 = 0$ τότε:

$$f_2(0) = \min_{x_2}\{TC(x_2) + f_3(i_2)\} = \min\{60 + 80 \cdot 200 + \frac{0.80}{3} \cdot 30 + f_3(30)\ ,\ 60 + 80 \cdot 240 + \frac{0.80}{3} \cdot 70 + f_3(70),\ 60 + 80 \cdot 280 + \frac{0.80}{3} \cdot 110 + f_3(110)\} =$$

$= \min\{\ 12068 + f_3(30),\ 19278.67 + f_3(70)\ ,\ 22489.33 + f_3(110)\ \} =$

$= \min\{\ 24928,\ 29238.67,\ 28949.33\ \} =$

$= 24928.$

Β) Για $i_1 = 40$ έχουμε:

$$f_2(40) = \min_{x_2}\{TC(x_2) + f_3(i_2)\} = \min\{60 + 80 \cdot 160 + \frac{0.80}{3} \cdot 30 + f_3(30)\ ,\ 60 + 80\ 200 + \frac{0.80}{3} \cdot 70 + f_3\ (70),\ 60 + 80240 + \frac{0.80}{3} \cdot 110 + f_3(110)\ ,\ 60 + \cdot 80280 + + \frac{0.80}{3} \cdot 150 + f_3(150)\ \} =$$

$= \min \{ 12868 + f_3(30), 16078.67 + f_3(70) , 19289.33 + f_3(110), 22500 + f_3(150) \} =$

$= \min \{ 25728, 26038.67, 25749.33, 25760\} =$

$= 25728.$

- Για τον 1° μήνα:

Αφού $i_0 = 0$ θα έχουμε:

$$f_1(0) = \min_{x_1}\{TC(x_1) + f_2(i_1)\} = \min\{60 + 60 \cdot 240 + \frac{0.80}{3} \cdot 0 + f_2(0),\ 60 + 60 \cdot 280 + \frac{0.80}{3} \cdot 40 + f_2(40)\} =$$

$= \min \{ 39388, 42598.67 \} = 39388.$

Ξεκινώντας από την $f_1(0)$ και εντοπίζοντας την ποσότητα παραγγελίας που οδηγεί στην ελάχιστη τιμή του συνολικού κόστους (κίτρινη υπογράμμιση) προχωράμε σταδιακά στην εύρεση της βέλτιστης πολιτικής παραγγελίας. Η βέλτιστη παραγγελία δίνεται στον παρακάτω πίνακα και έχει συνολικό τριμηνιαίο κόστος 39388€.

	Μήνας		
	1ος	2ος	3ος
Μέγιστη ποσότητα παραγγελίας	300	300	300
Παραγγελία (ποσότητα)	240	200	160
Ζήτηση	240	170	190
Αποθήκευση	0	30	0
Χωρητικότητα αποθήκης	300	300	300

Εφαρμογή 4.6 Το μοντέλο των Wagner – Whitin

Έστω τώρα ότι το επίπεδο του αποθέματος των ραδιοφώνων ελέγχεται στην αρχή κάθε μήνα όπου θα παίρνονται και οι σχετικές αποφάσεις σχετικά με την ανανέωση του αποθέματος. Θεωρούμε επίσης ότι υπάρχει ένα αρχικό απόθεμα 40 ραδιοφώνων που ξέμειναν από την ποσότητα παραγγελίας του προηγούμενου μήνα. Ψάχνουμε πάλι τη βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας για το τρίμηνο που ακολουθεί δεδομένου ότι όλες οι υπόλοιπες υποθέσεις παραμένουν οι ίδιες.

Εύρεση της βέλτιστης πολιτικής

Όπως αναφέραμε παραπάνω, ο χρονικός ορίζοντας είναι το ένα τρίμηνο καθώς επίσης οι αποφάσεις σχετικά με την ποσότητα παραγγελίας λαμβάνονται στην αρχή κάθε μήνα. Το ένα τρίμηνο θα χωριστεί σε 3 χρονικές περιόδους όπου κάθε χρονική περίοδος θα είναι ένας μήνας και t = 0, 1, 2, 3. Αφού το κόστος αποθήκευσης είναι 0.80€ / ραδιόφωνο / τρίμηνο, θα έχουμε (0.80/3) € / ραδιόφωνο / μήνα.

Έστω λοιπόν,

- $t = 0 : i_0 = 40$
- $t = 1 : c_1 = 80$€, $D_1 = 240$, $h_1 = 0.80/3$, $K_1 = 60$€
- $t = 2 : c_2 = 80$€, $D_2 = 170$, $h_2 = 0.80/3$, $K_2 = 60$€
- $t = 3 : c_3 = 80$€, $D_3 = 190$, $h_3 = 0.80/3$, $K_3 = 60$€

Η βέλτιστη συνάρτηση θα είναι:

F_t = { το ελάχιστο συνολικό κόστος για την επιχείρηση που προκύπτει για την ικανοποίηση της ζήτησης των ραδιοφώνων για τους μήνες t, t+1,…..,T, όταν το απόθεμα στην αρχή του μήνα t είναι 0 ($i_{t-1} = 0$) } για t = 1, 2, 3.

Χρησιμοποιώντας την προς τα πίσω μέθοδο του δυναμικού προγραμματισμού θα βρούμε τη βέλτιστη πολιτική παραγγελίας.

- Για τον 3^{o} μήνα:

$F_3 = 60 + 80 \cdot 190 = 15260$ * (παραγγελία ραδιοφώνων για τον 3^{o} μήνα)

Αν λοιπόν στην αρχή του $3^{ου}$ μήνα δεν υπάρχει καθόλου απόθεμα, τότε προκειμένου να ελαχιστοποιηθεί το συνολικό κόστος θα πρέπει να παραγγελθούν $D_3 = 190$ ραδιόφωνα ώστε να ικανοποιηθεί η ζήτηση του $3^{ου}$ μήνα.

- Για τον 2^{o} μήνα:

$F_2 = \min\{60 + 80 \cdot 170 + F_3 = 28920$ (παραγγελία ραδιοφώνων για τον 2^{o} μήνα),

$60 + 80\ (170+190) + \frac{0.80}{3} \cdot 190 = 28910.67$* (παραγγελία ραδιοφώνων για τον 2^{o} μήνα, 3^{o} μήνα) }

Αν λαπόν στην αρχή του $2^{ου}$ μήνα η επιχείρηση έχει μηδενικό απόθεμα, τότε προκειμένου να έχουμε το ελάχιστο συνολικό κόστος πρέπει να παραγγείλουμε $D_2 + D_3 = 170 + 190 = 360$ ραδιόφωνα για την ικανοποίηση της ζήτησης του $2^{ου}$ και $3^{ου}$ μήνα.

- Για τον 1^{o} μήνα:

Θεωρώντας ότι το αρχικό απόθεμα είναι μη μηδενικό ότι δηλαδή έχουμε αρχική ζήτηση $D_1 – i_0$ θα έχουμε:

$F_1 = \min\{ 60 + 80 \cdot \underset{(D_1 - i_0 = 200)}{200} + F_2 = 44970.67$ (παραγγελία ραδιοφώνων για τον 1^{o} μήνα),

$60 + 80 \cdot (200 + 170) + \frac{0.80}{3} \cdot 170 + F_3 = 44965.33^*$ (παραγγελία ραδιοφώνων για τον 1^o και τον 2^o μήνα),

$60 + 80 \cdot (200 + 170 + 190) + \frac{0.80}{3} \cdot (170 + 190) + \frac{0.80}{3} \cdot 190 = 45006.67$ (παραγγελία ραδιοφώνων για τον 1^o και 2^o και 3^o μήνα) }.

Άρα, στην αρχή του $1^{ου}$ μήνα, επειδή η επιχείρηση έχει αρχικό απόθεμα 40 ραδιόφωνα προκειμένου να ελαχιστοποιηθεί το συνολικό κόστος θα πρέπει να παραγγελθούν $(D_1 – i_0) + D_2 = 370$ ραδιόφωνα για να ικανοποιηθεί η ζήτηση του $1^{ου}$ και του $2^{ου}$ μήνα. Στη συνέχεια, εντοπίζοντας κάθε φορά την ποσότητα παραγγελίας που οδηγεί στην ελάχιστη τιμή του συνολικού κόστους (κίτρινη υπογράμμιση) καθώς επίσης και την αντίστοιχη βέλτιστη συνάρτηση προχωράμε στην εύρεση της βέλτιστης παραγγελίας. Το συνολικό τριμηνιαίο κόστος ανέρχεται στα 44965.33€. Να σημειωθεί ότι με * σημειώνουμε την παραγγελία που επιφέρει το ελάχιστο δυνατό κόστος.

5. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Βασιλείου, Π.-Χ.Γ. (2001). *Εφαρμοσμένος Μαθηματικός Προγραμματισμός.* Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη.

Βασιλείου, Π.-Χ.Γ. και Τσακλίδης, Γ. (2001). *Εφαρμοσμένη Θεωρία Πινάκων.* Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη.

Γεωργίου, Α.Κ. και Οικονόμου, Γ.Σ. (2000). *Ποσοτική Ανάλυση για τη Λήψη Διοικητικών Αποφάσεων.* Τόμος Β΄, Εκδόσεις Ευγ. Μπένου, Αθήνα.

Δερβιτσιώτης, Κ.Ν. (1995). *Σύγχρονες Προσεγγίσεις στη Διοίκηση Παραγωγής.* Έκδοση ιδίου, Αθήνα.

Παππής, Κ.Π. (1995). *Προγραμματισμός Παραγωγής.* Εκδόσεις Α. Σταμούλης, Αθήνα – Πειραιάς.

Ψωϊνός, Δ.Π. (1990). *Ποσοτική Ανάλυση.* 2ος Τόμος.. Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη, 2η Έκδοση.

Baker, R.C. and Urban, T.L. (1988). A deterministic inventory system with an inventory-level-dependent demand rate, *Journal of the Operational Research Society* **39** 823-831.

Blackburn, J.D. and Millen, R.A. (1979). Selecting a lot-sizing method for a single level assembly process: Part-I-analytical results, *Production and Inventory Management* **20**(3) 42 - 47.

Chang, Y.-L. (2003). *WinQSB Version 2.0.* John Wiley & Sons.

Cheng T.C.E. (1989). An economic production quantity model with flexibility and reliability considerations, *European Journal of Operational Research* **39** 174-179.

Cheng T.C.E. (1989). An economic order quantity model with demand-dependent unit cost, *European Journal of Operational Research* **40**(2) 252-256.

Cheng T.C.E. (1991). An Economic Order Quantity model with demand-dependent unit production cost and imperfect production processes, *IIE Transactions* **23** 23-28.

Datta, T.K. and Pal, A.K. (1990). A note on an inventory model with inventory-level-dependent demand rate. *Journal of the Operational Research Society* **41** 971-975.

Gass, S.I. and Harris, C.M. (2001) *Encyclopedia of Operations Research and Management Science* Second Edition, Kluwer Academic Publishers, Boston/Dordrecht/London.

Hillier, F.S. and Lieberman, G.J. (2001). *Introduction to Operations Research.* McGraw-Hill, Boston, 7th Edition.

Johnson, D.G. (1972). An Alternative Approach to Price Break Analysis, *Int. J. Educ. Sci. Techn* **3** 43-50.

Lee, W.J. and Kim, D.S. (1993). Optimal and heuristic decision strategies for integrated production and marketing planning, *Decision Sciences* **24** 1203-1213.

Lee, W.J. (1994). Optimal order quantities and prices with storage space and inventory investment limitations, *Computers and Industrial Engineering* **26** 481-488.

Magge, J.F. and Boodman, D.M. (1967). *Production Planning and Inventory Control.* McGraw-Hill.

Silver, E.A. and Peterson, R. (1985). *Decision Systems for Inventory Management and Production Planning.* Wiley and Sons, New York.

Silver, E.A, Pyke, D.F. and Peterson, R. (1998). *Inventory Management and Production Planning and Scheduling.* John Wiley and Sons, New-York, 3rd Edition.

Taha, H.A. (2003). *Operations Research. An Introduction.* Prentice Hall International, 7th Edition.

Tersine, R.J. (1994). *Principles OI Inventory and Materials Management.* PTR Prentice Hall, 4th Edition.

Wagner, H. and Whitin, T. (1958). Dynamic Version of the Economic Lot Size Model, *Management Science* **5** 89-96.

Winston, W.L. (1994). *Operations Research. Applications and Algorithms.* 3rd edition, Duxbury Press, Belmont California.

Zimmermann, H.J. and Sovereign M.H. (1974). *Quantitative Models for Production Management.* Prentice Hall.