Εκτιμητές τύπου Strawderman για παραμέτρους κλίμακας

Παναγιώτης Μπομποτάς

Διδακτορική Διατριβή

Πανεπιστήμιο Πατρών
Τμήμα Μαθηματικών

Πάτρα 2010

Η παρούσα Διδακτορική Διατριβή στοιχειοθετήθηκε με το πρόγραμμα LaTeX (διανομή MiKTeX). Για την παραγωγή των αριθμητικών αποτελεσμάτων και των γραφικών παραστάσεων χρησιμοποιήθηκε το πρόγραμμα *Mathematica*.

Ευχαριστίες

Αισθάνομαι πρωτίστως την ανάγκη να ευχαριστήσω θερμά τον δάσκαλό μου και επιβλέποντα, Καθηγητή κ. Σταύρο Κουρούκλη για την ευκαιρία που μου προσέφερε, για την ουσιαστική καθοδήγησή του και την πολύτιμη βοήθειά του στην εκπόνηση και συγγραφή της διατριβής μου.

Ευχαριστώ θερμά τα μέλη της τριμελούς συμβουλευτικής μου επιτροπής Αναπληρωτές Καθηγητές κ.κ. Γιώργο Ηλιόπουλο και Νικόλαο Παπαδάτο για την πολύτιμη βοήθειά τους και την άμεση ανταπόκρισή τους όποτε τους ζητήθηκε.

Ευχαριστίες εκφράζω και προς το Κοινωφελές Ίδρυμα Αλέξανδρος Σ. Ωνάσης για την οικονομική υποστήριξη της διατριβής με υποτροφία.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου για τη στήριξη και την αμέριστη συμπαράστασή τους σε αυτήν την πορεία μου.

Παναγιώτης Μπομποτάς

Πάτρα, Ιανουάριος 2010

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή

Η παρούσα διατριβή εντάσσεται ερευνητικά στην περιοχή της Στατιστικής Θεωρίας Αποφάσεων και ειδικότερα στην (σημειακή) εκτίμηση παραμέτρου κλίμακας.

Στο εισαγωγικό αυτό κεφάλαιο γίνεται μία ιστορική αναδρομή στο πρόβλημα εκτίμησης παραμέτρου κλίμακας από την πλευρά της Στατιστικής Θεωρίας Αποφάσεων, όταν υπάρχει και άλλη άγνωστη παράμετρος στην υπό μελέτη στατιστική κατανομή. Στη συνέχεια παρουσιάζονται συνοπτικά τα αποτελέσματα της διατριβής ανά κεφάλαιο.

1.1 Ανασκόπηση βιβλιογραφίας

Η μελέτη του προβλήματος (σημειακής) εκτίμησης παραμέτρου κλίμακας ή συναρτήσεών της από τη σκοπιά της Στατιστικής Θεωρίας Αποφάσεων, όταν επί πλέον υπάρχει και άλλη άγνωστη παράμετρος (nuisance parameter) στο υπό θεώρηση στατιστικό μοντέλο, έχει μακρά ιστορία, αρχής γενομένης με την εκτίμηση της διασποράς κανονικής κατανομής με άγνωστη μέση τιμή από τον Stein (1964). Στην εργασία εκείνη ο Stein απέδειξε ότι, με κριτήριο την τετραγωνική συνάρτηση ζημίας, ο βέλτιστος αναλλοίωτος εκτιμητής της διασποράς – δηλαδή ο καλύτερος εκτιμητής της μορφής (θετική σταθερά)$\times$(δειγματική διασπορά) – είναι μη αποδεκτός (inadmissible), κατασκευάζοντας άλλον με μικρότερη μέση τετραγωνική ζημία.

Το ιστορικό αυτό αποτέλεσμα προσέλκυσε το ενδιαφέρον πολλών ερευνητών και αποτέλεσε το έναυσμα για την κατασκευή εκτιμητών παραμέτρων κλίμακας σε άλλες κατανομές (πέραν της κανονικής), με άλλες συναρτήσεις ζημίας (πέραν της τετραγωνικής συνάρτησης ζημίας) και σε άλλες διαστάσεις (πέραν της μίας – δηλαδή σε πολυμεταβλητές κατανομές και παραμέτρους), οι οποίοι έχουν μέση ζημία (risk) μικρότερη από αυτήν του βέλτιστου αναλλοίωτου εκτιμητή. Τέτοιοι εκτιμητές αναφέρονται γενικά ως *βελτιωμένοι εκτιμητές* (improved estimators). Πρώτος μετά τον Stein (1964), ο Brown (1968) κατασκεύασε μία οικογένεια βελτιωμένων εκτιμητών της παραμέτρου κλίμακας μίας γενικής κατανομής με επίσης άγνωστη παράμετρο θέσης (location-scale distribution), για τυχούσα bowl-shaped συνάρτηση ζημίας. Οι εκτιμητές αυτοί αναφέρονται στη βιβλιογραφία ως εκτιμητές *τύπου Brown*. Ακολούθως, οι Brewster and Zidek (1974) παρουσίασαν δύο γενικές τεχνικές κατασκευής βελτιωμένων εκτιμητών. Οι τεχνικές αυτές εφαρμόζονται επίσης για τυχούσα bowl-shaped συνάρτηση ζημίας και είναι επιτυχείς κυρίως (αλλά όχι μόνον) όταν η υπό εκτίμηση παράμετρος είναι παράμετρος κλίμακας και επί πλέον υπάρχει και άλλη άγνωστη παράμετρος. Η πρώτη από τις δύο αυτές τεχνικές βασίζεται στη μέθοδο του Stein (1964) και στην περίπτωση εκτίμησης της διασποράς κανονικής κατανομής με άγνωστη μέση τιμή αναπαράγει τον εκτιμητή του Stein (1964). Για αυτό το λόγο έχει επικρατήσει οι εκτιμητές που προκύπτουν με αυτήν την τεχνική να αναφέρονται στη βιβλιογραφία ως εκτιμητές *τύπου Stein*, η δε τεχνική να αναφέρεται ως *τεχνική Stein*. Η δεύτερη τεχνική παράγει εκτιμητές οι οποίοι είναι όρια ακολουθιών εκτιμητών, ο πρώτος όρος των οποίων είναι ένας εκτιμητής τύπου Brown και κάθε άλλος όρος τους είναι καλύτερος εκτιμητής από όλους τους προηγούμενούς του (δηλαδή έχει μικρότερη μέση ζημία). Οι εκτιμητές που προκύπτουν με αυτή την τεχνική έχουν καθιερωθεί στη βιβλιογραφία ως εκτιμητές *τύπου Brewster and Zidek* και η τεχνική ως *τεχνική Brewster and Zidek*. Ένα πλεονέκτημα των τελευταίων έναντι των εκτιμητών τύπου Stein και Brown είναι ότι, σε ορισμένες κατανομές, είναι αναλυτικές συναρτήσεις του δείγματος και συνεπώς δυνητικά αποδεκτοί (admissible) εκτιμητές. Πράγματι, ο Proskin (1985), στη διδακτορική διατριβή του, απέδειξε ότι στην περίπτωση της τετραγωνικής συνάρτησης ζημίας ο εκτιμητής τύπου Brewster and Zidek της διασποράς της κανονικής κατανομής με άγνωστη μέση τιμή είναι αποδεκτός. Εκτός από την κανονική κατανομή, οι δύο τεχνικές εφαρμόσθηκαν στην εκθετική κατανομή για την εκτίμηση της διασποράς της ή γενικότερα δυνάμεών της, σε έναν ή περισσότερους πληθυσμούς, από τους Zidek (1973), Brewster (1974), Rukhin and Zidek (1985), Elfesi and Pal (1991), Madi and Tsui (1990a), στην inverse Gaussian κατανομή για την εκτίμηση της παραμέτρου διασποράς, από τους Pal and Sinha (1989) και Shorrock and McGibbon (1997). Ο Kubokawa (1994a) χρησιμοποιώντας μία νέα μέθοδο, πέτυχε να αναπαραγάγει τους εκτιμητές τύπου Stein και Brewster and Zidek για γενική παράμετρο κλίμακας και bowl-shaped συνάρτηση ζημίας κατά έναν ενιαίο τρόπο (ενώ οι Brewster and Zidek (1974) τους είχαν παρουσιάσει ως απόρροια δύο διαφορετικών τεχνικών). Στην περίπτωση εκτίμησης της διασποράς κανονικής κατανομής, ο Maruyama (1998) κατασκεύασε μία άλλη κλάση βελτιωμένων εκτιμητών στην οποία ανήκει ο εκτιμητής των Brewster and Zidek (1974) και, ως οριακή περίπτωση, ο εκτιμητής του Stein (1964). Η μέθοδος του Maruyama (1998) επεκτάθηκε και στην περίπτωση της εκθετικής κατανομής από τους Petropoulos and Kourouklis (2002). Συγχρόνως περίπου με τους Brewster and Zidek (1974), μία άλλη κλάση βελτιωμένων εκτιμητών αυθαίρετης θετικής δύναμης της διασποράς κανονικής κατανομής με άγνωστη μέση τιμή παρουσιάσθηκε από τον Strawderman (1974). Οι εκτιμητές αυτοί αναφέρονται ως εκτιμητές *τύπου Strawderman*. Οι Pal and Ling (1995, 1996) μελέτησαν το ίδιο πρόβλημα εκτίμησης χρησιμοποιώντας την τεχνική του Strawderman (1974) ως προς τη συνάρτηση ζημίας εντροπίας και τη συνάρτηση ζημίας του Brown (1968), ενώ ο Sugiura (1988, 1989) την εφάρμοσε στην εκτίμηση δυνάμεων της γενικευμένης διασποράς. Οι Mathew et al. (1992a,b) χρησιμοποίησαν την τεχνική του Strawderman (1974) και παρουσίασαν βελτιωμένους εκτιμητές για τη διασπορά των σφαλμάτων σε ένα μικτό γραμμικό μοντέλο (mixed effects model). Πρόσφατα, η ίδια τεχνική χρησιμοποιήθηκε από τους Maruyama and Strawderman (2006), οι οποίοι παρουσίασαν μία νέα κλάση βελτιωμένων γενικευμένων Bayes εκτιμητών τύπου Strawderman για τη διασπορά κανονικής κατανομής ως προς την τετραγωνική συνάρτηση ζημίας και τη συνάρτηση ζημίας εντροπίας. Σημειώνουμε ότι η τεχνική του Strawderman (1974) δεν έχει εφαρμοσθεί από άλλους ερευνητές μέχρι τώρα σε άλλο στατιστικό μοντέλο, εκτός από αυτό της κανονικής κατανομής.

Τα αποτελέσματα και οι τεχνικές Stein, Brown και Brewster and Zidek επεκτάθηκαν ακολούθως σε δύο ανεξάρτητους πληθυσμούς με άγνωστες παραμέτρους κλίμακας και τουλάχιστον μία άγνωστη παράμετρο θέσης στο πρόβλημα εκτίμησης του λόγου παραμέτρων κλίμακας. Έτσι, υπάρχουν στη βιβλιογραφία βελτιωμένοι εκτιμητές του λόγου που είναι τύπου Stein, Brown και Brewster and Zidek και έχουν μικρότερη μέση ζημία από αυτήν του βέλτιστου αναλλοίωτου εκτιμητή ο οποίος, για παράδειγμα, στην περίπτωση της κανονικής κατανομής, είναι της μορφής (θετική σταθερά)×(λόγος δειγματικών διασπορών). Στην περίπτωση του λόγου των διασπορών δύο ανεξάρτητων κανονικών κατανομών, τέτοιοι βελτιωμένοι εκτιμητές κατασκευάστηκαν από τους Gelfand and Dey (1988) και Madi (1995), ενώ για το λόγο των παραμέτρων κλίμακας δύο ανεξάρτητων εκθετικών κατανομών από τους Madi and Tsui (1990b). Επίσης, στην περίπτωση του λόγου των διασπορών δύο ανεξάρτητων κανονικών κατανομών οι Ghosh and Kundu (1996) παρουσίασαν κλάσεις βελτιωμένων ιεραρχικών Bayes εκτιμητών, επεκτείνοντας σε δύο δείγματα τη μέθοδο του Kubokawa (1994a) για ένα δείγμα. Οι παραπάνω εκτιμητές χρησιμοποιούν μόνον έναν από τους εκτιμητές των παραμέτρων θέσης και γι' αυτό θα αναφέρονται ως *βελτιωμένοι εκτιμητές απλής προσαρμογής* (single adjustment improved estimators). Οι Kubokawa (1994b) και Kubokawa and Srivastava (1996) γενίκευσαν τα αποτελέσματα του Kubokawa (1994a) στην εκτίμηση του λόγου παραμέτρων κλίμακας και παρουσίασαν νέες κλάσεις βελτιωμένων εκτιμητών, τους *βελτιωμένους εκτιμητές διπλής προσαρμογής* (double adjustment improved estimators), οι οποίοι χρησιμοποιούν όλα τα δεδομένα, για κυρτή συνάρτηση ζημίας $L(t)$. Ένα σημαντικό πλεονέκτημα των βελτιωμένων εκτιμητών διπλής προσαρμογής είναι ότι είναι καλύτεροι από αντίστοιχους βελτιωμένους εκτιμητές απλής προσαρμογής. Τέλος, οι Iliopoulos and Kourouklis (1999) χρησιμοποιώντας μία διαφορετική μεθοδολογία για την εκτίμηση του λόγου παραμέτρων κλίμακας, από τη μία πλευρά αναπαρήγαγαν την κλάση των βελτιωμένων εκτιμητών διπλής προσαρμογής του Kubokawa (1994b) και από την άλλη κατασκεύασαν μία νέα κλάση βελτιωμένων εκτιμητών διπλής προσαρμογής, όταν η συνάρτηση ζημίας $L(t)$ είναι κυρτή συνάρτηση του $\ln t$.

1.2 Περιληπτική παρουσίαση των υπολοίπων κεφαλαίων

Όπως αναφέρθηκε στην Ενότητα 1.1, σε αντίθεση με τις τεχνικές Stein, Brown, Brewster and Zidek και Kubokawa, η τεχνική του Strawderman (1974) δεν έχει εφαρμοσθεί από άλλους ερευνητές μέχρι τώρα σε κάποιο άλλο στατιστικό μοντέλο, εκτός από αυτό της κανονικής κατανομής. Εύλογα λοιπόν τίθεται το ερώτημα κατά πόσον αυτή η τεχνική μπορεί να χρησιμοποιηθεί πέραν της κανονικής κατανομής. Η διατριβή έχει ως σκοπό να μελετήσει αυτό το ερώτημα. Πιο συγκεκριμένα, αντικείμενο της διατριβής είναι η μελέτη των προβλημάτων κατασκευής βελτιωμένων εκτιμητών τύπου Strawderman για παράμετρο κλίμακας ενός πληθυσμού καθώς και για το λόγο των παραμέτρων κλίμακας δύο ανεξάρτητων πληθυσμών. Η παρουσίαση των επί μέρους θεμάτων και αποτελεσμάτων της διατριβής αυτής οργανώνεται ως εξής.

Στο Κεφάλαιο 2 περιέχονται κάποιοι ορισμοί και παρουσιάζονται, για λόγους πληρότητας, γνωστά σχετικά αποτελέσματα που αφορούν σε βελτιωμένους εκτιμητές παραμέτρων κλίμακας και λόγου παραμέτρων κλίμακας. Όλα τα αποτελέσματα των υπολοίπων κεφαλαίων είναι πρωτότυπα.

Στο Κεφάλαιο 3 το κλασικό αποτέλεσμα του Strawderman (1974) για την εκτίμηση της διασποράς κανονικής κατανομής επεκτείνεται σε κατανομές με παράμετρο κλίμακας και μία άλλη άγνωστη («ενοχλητική») παράμετρο για την εκτίμηση της παραμέτρου κλίμακας ως προς την τετραγωνική συνάρτηση ζημίας και τη συνάρτηση ζημίας εντροπίας. Συγκεκριμένα, θεωρώντας τυπικές συνθήκες μονότονου λόγου πιθανοφανειών, κατασκευάζεται για την παράμετρο κλίμακας μία νέα κλάση βελτιωμένων εκτιμητών τύπου Strawderman, ειδικής μορφής, ενώ θεωρώντας μία επί πλέον συνθήκη κατασκευάζεται μία ευρύτερη κλάση βελτιωμένων εκτιμητών τύπου Strawderman. Η μέθοδος απόδειξης των αποτελεσμάτων, παρά το γεγονός ότι διατηρεί το «σκελετό» της μεθόδου του Strawderman (1974), διαφέρει (αναπόφευκτα) τεχνικά από αυτήν επειδή ο Strawderman (1974) βασίζεται σε ειδικά χαρακτηριστικά της κανονικής κατανομής. Ακολούθως, τα γενικά αποτελέσματα εφαρμόζονται στην εκθετική και την κανονική κατανομή (και συνεπώς ισχύουν για την κατανομή Pareto και την λογαριθμοκανονική κατανομή). Στην περίπτωση της εκθετικής κατανομής δίνονται νέες ικανές συνθήκες (δηλαδή, διαφορετικές από αυτές των Brewster and Zidek (1974) και Kubokawa (1994a)) για τη βελτίωση του καλύτερου αναλλοίωτου ως προς μετασχηματισμούς θέσης-κλίμακας εκτιμητή. Στη συνέχεια, κατασκευάζονται κλάσεις εκτιμητών που ικανοποιούν τις νέες συνθήκες, αποδεικνύεται ότι μία εξ αυτών δεν ικανοποιεί τις συνθήκες των Brewster and Zidek (1974), ενώ συγχρόνως εμπλουτίζεται η οικογένεια των βελτιωμένων εκτιμητών τύπου Brewster and Zidek με μία νέα κλάση. Στην περίπτωση της κανονικής κατανομής, αναπαράγονται τα αποτελέσματα των Strawderman (1974) και Maruyama and Strawderman (2006). Επί πλέον, κατασκευάζεται εκτιμητής τύπου Strawderman, ειδικής μορφής, στην περίπτωση της inverse Gaussian κατανομής. Ακόμη, αποδεικνύονται αποτελέσματα γενικότερα και ισχυρότερα από αυτά των Mathew et al. (1992a,b). Το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με την κατασκευή εκτιμητών τύπου Strawderman, ειδικής μορφής, ως προς τη συμμετρική συνάρτηση ζημίας $L(t) = t + 1/t - 2$.

Στο Κεφάλαιο 4 το αποτέλεσμα του Strawderman (1974) επεκτείνεται σε κατανομές με παράμετρο κλίμακας και μία άλλη άγνωστη («ενοχλητική») παράμετρο για την εκτίμηση του αντιστρόφου της παραμέτρου κλίμακας ως προς την τετραγωνική συνάρτηση ζημίας και τη συνάρτηση ζημίας εντροπίας. Η τεχνική απόδειξης είναι παρόμοια με αυτήν του Κεφαλαίου 3. Ακολούθως, τα γενικά αποτελέσματα εφαρμόζονται στην εκθετική και την κανονική κατανομή. Στην περίπτωση της εκθετικής κατανομής, αποδεικνύεται ότι οι νέες ικανές συνθήκες που δίνονται για τη βελτίωση του καλύτερου αναλλοίωτου ως προς μετασχηματισμούς θέσης-κλίμακας εκτιμητή είναι διαφορετικές από αυτές των Brewster and Zidek (1974) και Kubokawa (1994a). Κατασκευάζονται κλάσεις εκτιμητών που ικανοποιούν τις νέες συνθήκες, αποδεικνύεται ότι μία εξ αυτών δεν ικανοποιεί τις συνθήκες των Brewster and Zidek (1974), ενώ συγχρόνως εμπλουτίζεται η οικογένεια των βελτιωμένων εκτιμητών τύπου Brewster and Zidek με μία νέα κλάση. Το κεφάλαιο κλείνει με την κατασκευή εκτιμητών τύπου Strawderman, ειδικής μορφής, ως προς τη συμμετρική συνάρτηση ζημίας $L(t) = t + 1/t - 2$. Πέραν της δικής τους αξίας, τα αποτελέσματα αυτού του κεφαλαίου (όπως και του Κεφαλαίου 3) είναι χρήσιμα (ουσιαστικά, απαραίτητα) και στην κατασκευή εκτιμητών τύπου Strawderman για το λόγο των παραμέτρων κλίμακας δύο κατανομών, που είναι το αντικείμενο των δύο επόμενων κεφαλαίων.

Στο Κεφάλαιο 5 κατασκευάζονται κλάσεις εκτιμητών τύπου Strawderman για το λόγο των διασπορών, σ_2^2/σ_1^2, κανονικών κατανομών, ως προς την τετραγωνική συνάρτηση ζημίας και τη συνάρτηση ζημίας εντροπίας. Οι εκτιμητές αυτοί έχουν τις εξής ιδιότητες. Είναι συναρτήσεις όλων των δεδομένων, άρα είναι εκτιμητές διπλής προσαρμογής, είναι «λείοι», σε αντίθεση με τους διαθέσιμους στη βιβλιογραφία εκτιμητές τύπου Stein, και έχουν πολύ απλή συναρτησιακή μορφή, σε αντίθεση με τους διαθέσιμους στη βιβλιογραφία εκτιμητές τύπου Brewster and Zidek. Επί πλέον, στην περίπτωση της συνάρτησης ζημίας εντροπίας οι εκτιμητές μιας εκ των κλάσεων αποδεικνύεται ότι είναι γενικευμένοι Bayes. Σε συνδυασμό, μάλιστα, με την αξιοσημείωτη αριθμητική βελτίωση ως προς τη μέση ζημία που προσφέρουν έναντι των κλασικών εκτιμητών, ενδεχομένως να είναι «ελκυστικοί» και σε στατιστικές εφαρμογές. Η μέθοδος απόδειξης δεν είναι η τυπική για το πρόβλημα εκτίμησης του σ_2^2/σ_1^2, η οποία (τυπική απόδειξη) απαιτεί την επέκταση αποτελεσμάτων από έναν πληθυσμό σε δύο πληθυσμούς (όπως έχει γίνει από τους Gelfand and Dey (1988), Madi and Tsui (1990b), Kubokawa (1994b), Kubokawa and Srivastava (1996), Ghosh and Kundu (1996)). Αντιθέτως, εφαρμόζεται η μεθοδολογία των Iliopoulos and Kourouklis (1999) που ανάγει το πρόβλημα εκτίμησης του σ_2^2/σ_1^2 σε δύο προβλήματα ενός πληθυσμού, ένα αυτό της εκτίμησης του σ_2^2 και, το άλλο, αυτό της εκτίμησης του $1/\sigma_1^2$. Ως προκαταρκτικό αποτέλεσμα (ανεξάρτητου ενδιαφέροντος) κατασκευάζονται, επίσης, νέες κλάσεις βελτιωμένων γενικευμένων εκτιμητών Bayes για την κανονική ακρίβεια, $1/\sigma_1^2$, ακολουθώντας την τεχνική του Strawderman (1974).

Στο Κεφάλαιο 6 κατασκευάζονται κλάσεις εκτιμητών τύπου Strawderman για το λόγο των παραμέτρων κλίμακας δύο εκθετικών κατανομών. Τα αποτελέσματα είναι ανάλογα αυτών του Κεφαλαίου 5. Η κατασκευή χρησιμοποιεί τους εκτιμητές των Ενοτήτων 3.3 και 4.3 σε συνδυασμό με τη μεθοδολογία των Iliopoulos and Kourouklis (1999).

Το Παράρτημα περιέχει βοηθητικά τεχνικά αποτελέσματα.

1.3 Συμβολή της διατριβής

Τα πρωτότυπα αποτελέσματα της διατριβής περιέχονται στα Κεφάλαια 3, 4, 5 και 6, η δε συμβολή της συνίσταται:

α) Στην επέκταση για πρώτη φορά στη βιβλιογραφία της τεχνικής του Strawderman (1974) πέραν της κανονικής κατανομής και σε άλλα στατιστικά μοντέλα για την εκτίμηση παραμέτρου κλίμακας από την πλευρά της Στατιστικής Θεωρίας Αποφάσεων.

β) Στην περίπτωση της εκθετικής κατανομής, στην παραγωγή νέων ικανών συνθηκών για τη βελτίωση του καλύτερου αναλλοίωτου ως προς μετασχηματισμούς θέσης-κλίμακας εκτιμητή της παραμέτρου κλίμακας και του αντιστρόφου της παραμέτρου κλίμακας.

γ) Στην περίπτωση της εκθετικής κατανομής, στην κατασκευή νέων βελτιωμένων εκτιμητών της παραμέτρου κλίμακας και του αντιστρόφου της παραμέτρου κλίμακας, η υπεροχή των οποίων δεν μπορεί να αποδειχθεί με τις υπάρχουσες στη βιβλιογραφία ικανές συνθήκες διότι δεν τις ικανοποιούν.

δ) Στην κατασκευή βελτιωμένων εκτιμητών διπλής προσαρμογής και απλής μορφής για το λόγο των διασπορών δύο κανονικών κατανομών, ορισμένοι εκ των οποίων είναι, επί πλέον, γενικευμένοι Bayes. Και σε αυτή την περίπτωση, η υπεροχή αυτών των βελτιωμένων εκτιμητών δεν μπορεί να αποδειχθεί με τις υπάρχουσες στη βιβλιογραφία ικανές συνθήκες διότι δεν τις ικανοποιούν.

ε) Στην κατασκευή βελτιωμένων εκτιμητών διπλής προσαρμογής για το λόγο των παραμέτρων κλίμακας δύο εκθετικών κατανομών, η υπεροχή των οποίων δεν μπορεί να αποδειχθεί με τις υπάρχουσες στη βιβλιογραφία ικανές συνθήκες διότι δεν τις ικανοποιούν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Βασικές έννοιες και γνωστά αποτελέσματα

Στο κεφάλαιο αυτό δίνονται ορισμοί βασικών εννοιών και ακολούθως παρατίθενται ορισμένα γνωστά αποτελέσματα για τα προβλήματα εκτίμησης παραμέτρου κλίμακας και λόγου παραμέτρων κλίμακας, από την πλευρά της Στατιστικής Θεωρίας Αποφάσεων.

2.1 Στοιχεία Στατιστικής Θεωρίας Αποφάσεων

Η Στατιστική Θεωρία Αποφάσεων θεμελιώθηκε από τον Wald (1950). Στηρίζεται στην αρχή ότι εσφαλμένες εκτιμήσεις συνεπάγονται ζημία και συνεπώς για την απόφαση χρησιμοποίησης ή μη ενός εκτιμητή η αναμενόμενη ζημία θα πρέπει να παίξει καθοριστικό ρόλο.

Έστω δεδομένα X με κατανομή P_θ που εξαρτάται από κάποια άγνωστη παράμετρο $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^q$, $q \geqslant 1$. Το σύνολο Θ καλείται παραμετρικός χώρος. Ας θεωρήσουμε το πρόβλημα (σημειακής) εκτίμησης της τιμής $\tau(\theta)$, όπου $\tau\colon \Theta \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $p \geqslant 1$, είναι μία συνάρτηση. Έστω ακόμα η συνάρτηση $L\colon \mathbb{R}^p \times \Theta \longrightarrow \mathbb{R}$ για την οποία απαιτούμε τις εξής δύο ιδιότητες:

$$\begin{aligned} &L(t,\theta) \geqslant 0 \qquad , \quad \forall\, t,\theta, \\ &L(\tau(\theta),\theta) = 0 \quad , \quad \forall\, \theta. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Η τιμή $L(t,\theta)$ εκφράζει τη ζημία που θα προκύψει εάν εκτιμηθεί η ποσότητα $\tau(\theta)$ με την τιμή t. Στη δεύτερη ιδιότητα εκφράζεται το γεγονός ότι η ζημία είναι 0 στην περίπτωση που η εκτίμηση είναι απολύτως ακριβής (δηλαδή, με σφάλμα 0). Η $L(t,\theta)$ αναφέρεται ως *συνάρτηση ζημίας* (loss function), η δε αξιολόγηση ενός εκτιμητή $T(X)$ γίνεται μέσω της *συνάρτησης κινδύνου* $R(T,\theta)$ (risk function) που ορίζεται ως η μέση τιμή της συνάρτησης ζημίας, δηλαδή

$$R(T,\theta) = \mathsf{E}L(T(X),\theta).$$

Ορισμός 2.1. *Ένας εκτιμητής T_1 καλείται καλύτερος από τον T_2 (ή βελτιώνει τον T_2) ως προς τη συνάρτηση ζημίας $L(t,\theta)$, αν*

$$\begin{aligned} &R(T_1,\theta) \leqslant R(T_2,\theta), \quad \forall\theta \in \Theta, \\ &R(T_1,\theta) < R(T_2,\theta), \quad \textit{για τουλάχιστον ένα } \theta \in \Theta. \end{aligned}$$

Σε αυτήν την περίπτωση ο T_2 καλείται μη αποδεκτός (inadmissible). Αν δεν υπάρχει καλύτερος εκτιμητής από τον T_2, τότε αυτός καλείται αποδεκτός (admissible).

Παρατήρηση 2.1. Ο εκτιμητής T_1 του παραπάνω ορισμού συχνά θα αναφέρεται στη συνέχεια και ως *βελτιωμένος εκτιμητής* (improved estimator).

2.2 Αναλλοίωτοι εκτιμητές

Έστω $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$, το σύνολο των δυνατών τιμών δεδομένων X και $\mathcal{G}$ ένα σύνολο ένα προς ένα και επί μετασχηματισμών του $\mathcal{X}$ στον εαυτό του που είναι ομάδα με πράξη τη σύνθεση. Θεωρούμε το πρόβλημα εκτίμησης του $\tau(\theta)$ με συνάρτηση ζημίας $L(t, \theta)$ και έστω $\mathcal{A} = \tau(\Theta)$. Το σύνολο $\mathcal{A}$ καλείται χώρος δράσης (action space) του προβλήματος.

Ορισμός 2.2. *Το πρόβλημα εκτίμησης του $\tau(\theta)$ καλείται αναλλοίωτο ως προς την ομάδα μετασχηματισμών $\mathcal{G}$, αν $\forall\, g \in \mathcal{G}$ υπάρχουν αντιστρέψιμοι μετασχηματισμοί $\bar{g}\colon \Theta \longrightarrow \Theta$ και $\tilde{g}\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$, τέτοιοι ώστε αν τα δεδομένα X έχουν κατανομή P_θ, να ισχύουν τα ακόλουθα.*

(i) *$Y = g(X)$ έχει κατανομή $\mathsf{P}_{\bar{g}(\theta)}$,*

(ii) *$\tau(\bar{g}(\theta)) = \tilde{g}(\tau(\theta)), \forall\, \theta$,*

(iii) *$L(\tilde{g}(t), \bar{g}(\theta)) = L(t, \theta), \forall\, t, \theta$.*

Έστω ότι το πρόβλημα εκτίμησης του $\tau(\theta)$ είναι αναλλοίωτο ως προς $\mathcal{G}$. Τότε δίνεται ο εξής ορισμός.

Ορισμός 2.3. *Ένας εκτιμητής $T(X)$ του $\tau(\theta)$ (με τιμές στο $\mathcal{A}$) καλείται $\mathcal{G}$-αναλλοίωτος αν*

$$T(g(x)) = \tilde{g}(T(x)), \quad \forall\, g \in \mathcal{G},\ x \in \mathcal{X}.$$

Αν στην κλάση αυτών των εκτιμητών υπάρχει κάποιος που ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση κινδύνου, τότε αυτός καλείται βέλτιστος $\mathcal{G}$-αναλλοίωτος (ή ο καλύτερος στην κλάση $\mathcal{G}$) εκτιμητής του $\tau(\theta)$.

Από τον ορισμό του αναλλοίωτου προβλήματος εκτίμησης προκύπτει ότι κάθε μετασχηματισμός $g \in \mathcal{G}$ επάγει ένα μετασχηματισμό $\bar{g}$ του παραμετρικού χώρου Θ στον εαυτό του. Έστω $\bar{\mathcal{G}}$ το σύνολο αυτών των μετασχηματισμών.

Ορισμός 2.4. *Για κάθε $\theta_0 \in \Theta$ το σύνολο $\{\bar{g}(\theta_0)\colon \bar{g} \in \bar{\mathcal{G}}\}$ λέγεται $\mathcal{G}$-τροχιά (orbit) του θ_0.*

Η $\mathcal{G}$-τροχιά του θ_0 είναι δηλαδή το σύνολο των $\theta \in \Theta$, τα οποία είναι εικόνες του θ_0 μέσω (όλων) των μετασχηματισμών $\bar{g} \in \bar{\mathcal{G}}$. Οι $\mathcal{G}$-τροχιές ορίζουν κλάσεις ισοδυναμίας στον παραμετρικό χώρο Θ. Το επόμενο θεώρημα παρουσιάζει μία σημαντική ιδιότητα των αναλλοίωτων εκτιμητών, η οποία σε αρκετές περιπτώσεις χρησιμεύει στην εύρεση του βέλτιστου $\mathcal{G}$-αναλλοίωτου εκτιμητή.

Θεώρημα 2.1 (Lehmann and Casella, 1998)**.** *Η συνάρτηση κινδύνου ενός $\mathcal{G}$-αναλλοίωτου εκτιμητή T είναι σταθερή σε κάθε $\mathcal{G}$-τροχιά, δηλαδή*

$$R(T, \theta) = R(T, \bar{g}(\theta)), \quad \forall\, \theta \in \Theta,\ \bar{g} \in \bar{\mathcal{G}}.$$

2.3 Εκτιμητές Bayes και εκτιμητές minimax

Στην Ενότητα 2.1 είδαμε ότι ένα γενικό κριτήριο αξιολόγησης του εκτιμητή $T(X)$ είναι η συνάρτηση κινδύνου $R(T, \theta)$. Ιδανικά θα επιθυμούσαμε να κατασκευάσουμε έναν εκτιμητή με την ελάχιστη δυνατή συνάρτηση κινδύνου (για κάθε $\theta \in \Theta$). Επειδή όμως κάτι τέτοιο δεν είναι εφικτό, μπορούμε να αναζητήσουμε έναν εκτιμητή $T(X)$ ο οποίος ελαχιστοποιεί ως προς T την παράσταση

$$\int_\Theta R(T, \theta)\pi(\theta)d\theta$$

όπου $\pi(\theta)$, $\theta \in \Theta$ είναι μία συνάρτηση που έχει τις ιδιότητες της πυκνότητας πιθανότητας, δηλαδή

(i) $\pi(\theta) \geqslant 0$, $\theta \in \Theta$ και

(ii) $\int_\Theta \pi(\theta)d\theta = 1$.

Η συνάρτηση $\pi(\theta)$ αναφέρεται ως *εκ των προτέρων κατανομή* (prior distribution) του θ και μπορεί να θεωρηθεί ότι είτε εκφράζει την προσωπική μας αντίληψη για την πιθανή τιμή του θ, είτε συνοψίζει κάποιες εκ των προτέρων (δηλαδή πριν τη συλλογή των δεδομένων) πληροφορίες για το θ. Τυπικά, η άγνωστη παράμετρος θ μπορεί να θεωρηθεί ως τυχαία μεταβλητή με κατανομή $\pi(\theta)$. (Στην περίπτωση διακριτού παραμετρικού χώρου, τα παραπάνω ολοκληρώματα αντικαθίστανται με αθροίσματα ή σειρές.)

Ορισμός 2.5. *Ο εκτιμητής $T^*(X)$ καλείται εκτιμητής Bayes του $\tau(\theta)$ ως προς τη συνάρτηση ζημίας $L(t, \theta)$ και εκ των προτέρων κατανομή $\pi(\theta)$ αν*

$$\int_\Theta R(T^*, \theta)\pi(\theta)d\theta \leqslant \int_\Theta R(T, \theta)\pi(\theta)d\theta \tag{2.2}$$

για κάθε άλλον εκτιμητή $T(X)$.

Έστω $f(x; \theta)$ η πυκνότητα πιθανότητας των δεδομένων X, θέτουμε $m(x) = \int_\Theta f(x; \theta)\pi(\theta)d\theta$ και

$$\pi(\theta \mid x) = \frac{f(x; \theta)\pi(\theta)}{m(x)}.$$

Τότε η συνάρτηση $\pi(\theta \mid x)$ (με μεταβλητή το θ) αναφέρεται ως *εκ των υστέρων κατανομή* (posterior distribution) του θ και έχει τις ιδιότητες πυκνότητας πιθανότητας. Η εκ των υστέρων κατανομή $\pi(\theta \mid x)$ μπορεί να θεωρηθεί ότι παρέχει τις εκ των υστέρων πληροφορίες για το θ, δηλαδή πληροφορίες που προκύπτουν από τα δεδομένα σε συνδυασμό με την εκ των προτέρων κατανομή. Το επόμενο θεώρημα παρέχει έναν τρόπο εύρεσης του εκτιμητή Bayes.

Θεώρημα 2.2 (Lehmann and Casella, 1998)**.** *Υποθέτουμε ότι ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες για το πρόβλημα εκτίμησης του $\tau(\theta)$ ως προς τη συνάρτηση ζημίας $L(t, \theta)$.*

(a) Υπάρχει τουλάχιστον ένας εκτιμητής T_0 με πεπερασμένη συνάρτηση κινδύνου.

(β) Για όλες σχεδόν τις τιμές x, υπάρχει μία τιμή $T^*(x)$ η οποία ελαχιστοποιεί ως προς t τη συνάρτηση $\mathsf{E}\{L(t,\theta) \mid X = x\}$, όπου η μέση τιμή υπολογίζεται ως προς την εκ των υστέρων κατανομή του θ.

Τότε ο $T^*(X)$ είναι ένας εκτιμητής Bayes.

Παρατήρηση 2.2. Στην περίπτωση που η συνάρτηση $\pi(\theta)$ ικανοποιεί τις συνθήκες

(i) $\pi(\theta) \geqslant 0$, $\theta \in \Theta$ και

(ii) $\int_\Theta \pi(\theta) d\theta = \infty$,

αυτή αναφέρεται ως *γενικευμένη εκ των προτέρων κατανομή* (generalized prior distribution) και ο εκτιμητής $T^*(X)$ που πληροί την (2.2) αναφέρεται ως *γενικευμένος εκτιμητής Bayes* (generalized Bayes estimator) και υπολογίζεται όπως στο Θεώρημα 2.2, εφόσον η συνάρτηση $\pi(\theta \mid x)$ είναι πυκνότητα πιθανότητας.

Μία άλλη μέθοδος εκτίμησης είναι να αναζητήσουμε εκείνον τον εκτιμητή $T(X)$ που ελαχιστοποιεί τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης κινδύνου, $\sup_{\theta\in\Theta} R(T,\theta)$, δηλαδή τη μέγιστη (ως προς θ) μέση ζημία.

Ορισμός 2.6. *Ο εκτιμητής $T^*(X)$ καλείται εκτιμητής minimax του $\tau(\theta)$ ως προς τη συνάρτηση ζημίας $L(t,\theta)$ αν*

$$\sup_{\theta\in\Theta} R(T^*,\theta) \leqslant \sup_{\theta\in\Theta} R(T,\theta)$$

για κάθε άλλον εκτιμητή $T(X)$.

2.4 Παράμετρος κλίμακας και bowl-shaped συναρτήσεις ζημίας

Ορισμός 2.7. *Έστω X απολύτως συνεχής (ως προς το μέτρο Lebesgue) τυχαία μεταβλητή με οικογένεια πυκνοτήτων πιθανότητας*

$$\{\sigma^{-1} f(x\sigma^{-1})\colon \sigma > 0\}.$$

Τότε η παράμετρος σ καλείται παράμετρος κλίμακας της κατανομής της τυχαίας μεταβλητής X.

Έστω X μία παρατήρηση από κατανομή με θετικές τιμές και παράμετρο κλίμακας σ. Θεωρούμε την ομάδα μετασχηματισμών

$$\mathcal{G} = \{g_\alpha\colon \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+, \alpha > 0\},$$

όπου

$$g_\alpha(x) = \alpha x, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Το πρόβλημα εκτίμησης του σ είναι αναλλοίωτο ως προς $\mathcal{G}$ αν η συνάρτηση ζημίας έχει τη μορφή $L^*(\delta,\sigma) = L(\delta/\sigma)$. Σε αυτή την περίπτωση, οι $\mathcal{G}$-αναλλοίωτοι εκτιμητές είναι της μορφής

$$T(X) = cX, \quad c > 0.$$

Από την (2.1) απαιτείται να ισχύει $L(1) = 0$. Επίσης, λογική είναι και η απαίτηση να αυξάνεται η τιμή της συνάρτησης $L(\delta/\sigma)$ όσο η εκτίμηση δ «απομακρύνεται» από την τιμή της παραμέτρου σ, δηλαδή όταν το δ/σ είτε ελαττώνεται είτε αυξάνεται. Αυτές οι απαιτήσεις ικανοποιούνται από την κλάση των *bowl-shaped* συναρτήσεων που ορίστηκε από τον Brown (1968). Σύμφωνα με τον Brown (1968), μία συνάρτηση $L(\cdot)$ ορισμένη στο σύνολο των πραγματικών θετικών αριθμών καλείται bowl-shaped (αντίστοιχα, αυστηρά bowl-shaped) αν υπάρχει $t_0 \in (0, \infty)$, τέτοιο ώστε η $L(t)$ να είναι φθίνουσα (αντίστοιχα, γνησίως φθίνουσα) για $0 < t < t_0$ και αύξουσα (αντίστοιχα, γνησίως αύξουσα) για $t > t_0$.

2.5 Βελτιωμένοι εκτιμητές για παραμέτρους κλίμακας

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται γνωστοί βελτιωμένοι εκτιμητές παραμέτρων κλίμακας και κυρίως της διασποράς πολυμεταβλητής κανονικής κατανομής. Κάποια από αυτά τα αποτελέσματα είχαν αρχικά εμφανιστεί στην περίπτωση τυχαίου δείγματος από έναν πληθυσμό, όμως, για ομοιομορφία, εδώ όλα παρουσιάζονται στη (γενικότερη) κανονική μορφή γραμμικού μοντέλου. Θα πρέπει να αναφερθεί ότι εξαιρετικές ανασκοπήσεις του προβλήματος εκτίμησης παραμέτρου κλίμακας έχουν γίνει από τους Maatta and Casella (1990), Pal et al. (1998) και Kubokawa (1999).

Το 1964 ο Stein παρουσίασε ένα απρόσμενο αποτέλεσμα. Ως προς την τετραγωνική συνάρτηση ζημίας, απέδειξε ότι ο βέλτιστος αναλλοίωτος εκτιμητής της διασποράς κανονικής κατανομής $N(\mu, \sigma^2)$ με άγνωστη μέση τιμή,

$$\delta_0 = \frac{S}{n+2}, \tag{2.3}$$

είναι μη αποδεκτός. Συγκεκριμένα ισχύει το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 2.3 (Stein, 1964). *Έστω $X \sim N_p(\mu, \sigma^2 I_p)$ και $S \sim \sigma^2 \chi^2_n$ ανεξάρτητα δεδομένα, όπου $\mu \in \mathbb{R}^p$ και $\sigma > 0$ είναι άγνωστα. Με συνάρτηση ζημίας $L(t, \mu, \sigma) = (t/\sigma^2 - 1)^2$, ο δ_0 στην* (2.3) *είναι μη αποδεκτός για την εκτίμηση του σ^2 και ένας καλύτερος (βελτιωμένος) εκτιμητής είναι ο*

$$\delta_S = \min\left\{\frac{S}{n+2}, \frac{S + \|X\|^2}{n+p+2}\right\}. \tag{2.4}$$

Μία ερμηνεία του δ_S έχει ως ακολούθως. Ο δ_0 βασίζεται μόνο στην παρατήρηση S. Δηλαδή δεν γίνεται χρήση πληροφοριών για το $\theta = (\mu, \sigma)$ που περιέχονται στα υπόλοιπα δεδομένα X. Ο βελτιωμένος εκτιμητής δ_S χρησιμοποιεί κατά κάποιον τρόπο αυτές τις πληροφορίες. Παρατηρούμε ότι είναι ο ελάχιστος μεταξύ δύο εκτιμητών: του δ_0 που είναι ο βέλτιστος αναλλοίωτος και του $\delta_1 = (S + \|X\|^2)/(n + p + 2)$ που είναι ο βέλτιστος αναλλοίωτος όταν είναι γνωστό ότι $\mu = 0$. Ο έλεγχος λόγου πιθανοφανειών (t-test) απορρίπτει τη μηδενική υπόθεση $H_0 : \mu = 0$, όταν $\|X\|^2/S > C$, $C > 0$. Συνεπώς, ο δ_S επιλέγει μεταξύ του δ_0 και του δ_1 ανάλογα με το εάν ο έλεγχος της H_0 με περιοχή απόρριψης $\|X\|^2/S > p/(n + 2)$ την απορρίπτει ή όχι. Τέτοιοι εκτιμητές όπως αυτοί του Stein καλούνται ελεγχοεκτιμητές (testimators).

Μία άλλη προσέγγιση για τη βελτίωση του εκτιμητή δ_0, αναπτύχθηκε από τον Brown (1968), ο οποίος εμφάνισε μία κλάση βελτιωμένων εκτιμητών για τη διασπορά κανονικής κατανομής ως προς οποιαδήποτε αυστηρά bowl-shaped συνάρτηση ζημίας, όπως φαίνεται στο ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 2.4 (Brown, 1968). *Έστω $X \sim N_p(\mu, \sigma^2 I_p)$ και $S \sim \sigma^2\chi^2_n$ ανεξάρτητα δεδομένα, όπου $\mu \in \mathbb{R}^p$ και $\sigma > 0$ είναι άγνωστα. Τότε εάν $L(t)$ είναι μία αυστηρά bowl-shaped συνάρτηση ζημίας, ο βέλτιστος αναλλοίωτος εκτιμητής του σ^2,*

$$\delta_0 = c_0 S$$

όπου c_0 είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης $\mathsf{E}_{\mu=0,\sigma^2=1}\{L'(cS)S\} = 0$ ως προς c, είναι μη αποδεκτός και ένας βελτιωμένος εκτιμητής είναι ο

$$\delta_B = \begin{cases} d_0(r)S & \text{εάν } W \leqslant r, \\ c_0 S & \text{εάν } W > r, \end{cases} \tag{2.5}$$

όπου $W = \|X\|^2/S$, $r > 0$ αυθαίρετο και $d_0(r)$ είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης

$$\mathsf{E}_{\mu=0,\sigma^2=1}\{L'(dS)S \mid W \leqslant r\} = 0$$

ως προς d.

Οι Brewster and Zidek (1974) παρουσίασαν, βασιζόμενοι στην προσέγγιση του Brown (1968) ένα βελτιωμένο εκτιμητή του σ^2, ο οποίος είναι αναλυτική συνάρτηση των δεδομένων. Παράλληλα, γενίκευσαν την ιδέα του Stein (1964) για οποιαδήποτε αυστηρά bowl-shaped συνάρτηση ζημίας.

Θεώρημα 2.5 (Brewster and Zidek, 1974). *Έστω $X \sim N_p(\mu, \sigma^2 I_p)$ και $S \sim \sigma^2\chi^2_n$ ανεξάρτητα δεδομένα με $\mu \in \mathbb{R}^p$, $\sigma > 0$ άγνωστα και $\delta_0 = c_0 S$ ο βέλτιστος αναλλοίωτος εκτιμητής του σ^2 ως προς μία αυστηρά bowl-shaped συνάρτηση ζημίας $L(t)$. Για $W = \|X\|^2/S$, $w > 0$, έστω $\phi_S(w)$, $\phi_{BZ}(w)$ οι μοναδικές λύσεις των εξισώσεων $\mathsf{E}_{\mu=0,\sigma^2=1}\{L'(\phi_S S)S \mid W = w\} = 0$, $\mathsf{E}_{\mu=0,\sigma^2=1}\{L'(\phi_{BZ} S)S \mid W \leqslant w\} = 0$ ως προς ϕ_S, ϕ_{BZ}, αντίστοιχα. Τότε οι εκτιμητές*

$$\delta_S = \min\{\phi_S(W), c_0\}S, \tag{2.6}$$

$$\delta_{BZ} = \phi_{BZ}(W)S \tag{2.7}$$

είναι καλύτεροι από τον δ_0.

Οι τεχνικές από τις οποίες προκύπτουν οι εκτιμητές δ_S και δ_{BZ} είναι οι τεχνικές Stein και Brewster and Zidek, αντίστοιχα. Οι εκτιμητές της μορφής (2.6) αναφέρονται ως *εκτιμητές τύπου Stein* και οι εκτιμητές της μορφής (2.7) αναφέρονται ως *εκτιμητές τύπου Brewster and Zidek*. Στην περίπτωση της τετραγωνικής συνάρτησης ζημίας, ο εκτιμητής στην (2.6) συμπίπτει με εκείνον του Stein στην (2.4). Επίσης, παρατηρούμε ότι η $\phi_{BZ}(W)$ στην (2.7) είναι ίδια με την $d_0(W)$ που εμφανίζεται στον εκτιμητή Brown (1968) στην (2.5).

Οι τεχνικές Stein και Brewster and Zidek δεν περιορίζονται μόνο στην περίπτωση που τα δεδομένα προέρχονται από κανονική κατανομή. Μπορούν να εφαρμοσθούν και στις περιπτώσεις της εκθετικής, της λογαριθμοκανονικής, της Pareto, της inverse Gaussian και ακόμα σε γενικότερα μοντέλα που περιέχουν εκτός από την υπό εκτίμηση παράμετρο κλίμακας και άλλες «ενοχλητικές» παραμέτρους. Ο Kubokawa (1994a) ενοποίησε τις τεχνικές των Stein και Brewster and Zidek, προτείνοντας μία τεχνική η οποία βασίζεται στην ιδέα έκφρασης της διαφοράς των συναρτήσεων κινδύνου μέσω ενός ολοκληρώματος.

Θεώρημα 2.6 (Kubokawa, 1994a). *Έστω S και T ανεξάρτητα δεδομένα, όπου S/σ και T/σ έχουν πυκνότητες πιθανότητας*

$$g(s)I_{(0,\infty)}(s) \quad \text{και} \quad h(t;\lambda)I_{(\kappa(\lambda),\infty)}(t),$$

αντίστοιχα, για μία άγνωστη παράμετρο λ και μία πραγματική συνάρτηση $\kappa(\lambda)$ με $\kappa(0) = 0$. Θέτοντας $h(t) = h(t;0)$, $H(x;\lambda) = \int_0^x h(t;\lambda)I_{(\kappa(\lambda),\infty)}(t)dt$ και $H(x) = \int_0^x h(t)dt$, $x > 0$, υποθέτουμε ότι ισχύουν οι εξής συνθήκες.

(A1) Η $g(c_1x)/g(c_2x)$ είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση του $x > 0$ για κάθε $0 < c_1 < c_2$.

(A2) Η $H(x;\lambda)/H(x)$ είναι αύξουσα (μη φθίνουσα) συνάρτηση του $x > 0$.

Έστω $L(t)$ μία αυστηρά bowl-shaped συνάρτηση ζημίας και $\delta_0 = c_0S^a$ ο βέλτιστος εκτιμητής του σ^a στην κλάση $\{cS^a : c > 0\}$. Για $a > 0$ (αντίστοιχα, < 0) θεωρούμε απολύτως συνεχή συνάρτηση $\phi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ που ικανοποιεί

(i) *$\phi(w)$ είναι αύξουσα (αντίστοιχα, φθίνουσα) και $\lim_{w\to\infty} \phi(w) = c_0$,*

(ii) *$\int_0^\infty L'(\phi(w)s^a)s^a g(s)H(ws)ds \geqslant$ (αντίστοιχα, $\leqslant$) 0, $\forall\ w > 0$.*

Τότε για $W = T/S$ ο εκτιμητής

$$\delta_\phi = \begin{cases} \phi(W)S^a & \text{εάν } W > 0, \\ c_0S^a & \text{διαφορετικά,} \end{cases}$$

είναι καλύτερος από τον δ_0.

Στην περίπτωση εκτίμησης της διασποράς κανονικής κατανομής μία άλλη κλάση βελτιωμένων εκτιμητών (που ικανοποιούν τις συνθήκες του Kubokawa (1994a)) κατασκευάστηκε από τον Maruyama (1998).

Την ίδια εποχή με τους Brewster and Zidek (1974), ο Strawderman (1974) παρουσίασε μία διαφορετική κλάση βελτιωμένων εκτιμητών η οποία δίνεται στο επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 2.7 (Strawderman, 1974). *Έστω $X \sim N_p(\mu, \sigma^2 I_p)$ και $S \sim \sigma^2\chi^2_n$ ανεξάρτητα δεδομένα με $\mu \in \mathbb{R}^p$, $\sigma > 0$ άγνωστα και $\delta_0 = c_0S^a$ ο βέλτιστος αναλλοίωτος εκτιμητής του σ^{2a}, $a > 0$, ως προς την τετραγωνική συνάρτηση ζημίας. Τότε ο εκτιμητής της μορφής*

$$\delta_\varphi = c_0(1 - \varphi(W))S^a, \tag{2.8}$$

όπου $W = \|X\|^2/S$ και η συνάρτηση $\varphi(w)$ ικανοποιεί, για κάποιο $\varepsilon > 0$,

(ST1) $(1 + w)^\varepsilon \varphi(w)$ είναι φθίνουσα στο $(0, \infty)$,

(ST2) $0 \leqslant \varphi(w) \leqslant D(n,p,\varepsilon,a)$ *για* $w > 0$,

είναι καλύτερος από τον δ_0.

Το άνω φράγμα $D(n,p,\varepsilon,a)$ δίνεται σε αναλυτική μορφή από τον Strawderman (1974). Οι βελτιωμένοι εκτιμητές της μορφής (2.8) που ικανοποιούν τις (ST1) και (ST2) αναφέρονται ως *εκτιμητές τύπου Strawderman*. Οι Pal and Ling (1995, 1996) μελέτησαν το ίδιο πρόβλημα εκτίμησης χρησιμοποιώντας την τεχνική του Strawderman (1974) για τη συνάρτηση ζημίας εντροπίας και τη συνάρτηση ζημίας του Brown (1968), ενώ ο Sugiura (1988, 1989) μελέτησε την εκτίμηση δυνάμεων της γενικευμένης διασποράς ως προς την τετραγωνική συνάρτηση ζημίας και τη συνάρτηση ζημίας εντροπίας. Πρόσφατα, οι Maruyama and Strawderman (2006) χρησιμοποίησαν την τεχνική του Strawderman (1974) και παρουσίασαν μία νέα κλάση βελτιωμένων γενικευμένων εκτιμητών Bayes της διασποράς κανονικής κατανομής ως προς την τετραγωνική συνάρτηση ζημίας και τη συνάρτηση ζημίας εντροπίας.

Θεώρημα 2.8 (Maruyama and Strawderman, 2006). *Έστω* $X \sim N_p(\mu, \sigma^2 I_p)$ *και* $S \sim \sigma^2\chi^2_n$ *ανεξάρτητα δεδομένα με* $\mu \in \mathbb{R}^p$, $\sigma > 0$ *άγνωστα και* $\delta_0 = c_0 S$ *ο βέλτιστος αναλλοίωτος εκτιμητής του* σ^2 *ως προς την τετραγωνική συνάρτηση ζημίας ή ως προς τη συνάρτηση ζημίας εντροπίας. Τότε ο εκτιμητής της μορφής*

$$\delta_\varphi = c_0(1-\varphi(W))S, \tag{2.9}$$

όπου $W = \|X\|^2/S$ *και η συνάρτηση* $\varphi(w)$ *ικανοποιεί, για κάποιο* $\varepsilon > 0$,

(ST1) $(1+w)^\varepsilon \varphi(w)$ *είναι φθίνουσα στο* $(0,\infty)$,

(ST2) $0 \leqslant \varphi(w) \leqslant B_1(\varepsilon)$ *στην περίπτωση της τετραγωνικής συνάρτησης ζημίας, ή*
$0 \leqslant \varphi(w) \leqslant B_2(\varepsilon)$ *στην περίπτωση της συνάρτησης ζημίας εντροπίας,*

με

$$\begin{aligned}
B_1(\varepsilon) &= \min\left\{\frac{2p}{p+n+2}, \frac{2p\varepsilon}{p+n+2}\frac{\Gamma(p/2+n/2+2\varepsilon+2)\Gamma(n/2+\varepsilon+1)}{\Gamma(p/2+n/2+\varepsilon+2)\Gamma(n/2+2\varepsilon+2)}\right\},\\
B_2(\varepsilon) &= \min\left\{B_*, \left(1+\frac{n}{2p\varepsilon}\frac{\Gamma(n/2+2\varepsilon)\Gamma(p/2+n/2+\varepsilon+1)}{\Gamma(n/2+\varepsilon)\Gamma(p/2+n/2+2\varepsilon)}\right)^{-1}\right\},
\end{aligned}$$

και B_* *τη μοναδική λύση της εξίσωσης* $x^{-1}\ln(1-x) = -(p+n)/n$, *είναι καλύτερος από τον* δ_0.

Σημειώνουμε ότι, το μεν $B_1(\varepsilon)$ είναι τροποποιημένη μορφή των αντίστοιχων φραγμάτων του Strawderman (1974) και των Pal et al. (1998), το δε $B_2(\varepsilon)$ είναι μεγαλύτερο από το αντίστοιχο φράγμα των Pal and Ling (1995).

Επίσης, μέσα από την κλάση των γενικευμένων εκτιμητών Bayes του σ^2 που κατασκεύασαν ως προς την τετραγωνική συνάρτηση ζημίας ή τη συνάρτηση ζημίας εντροπίας (για την εκ των προτέρων κατανομή βλέπε Maruyama and Strawderman (2006)) και οι οποίοι ικανοποιούν τις συνθήκες του Θεωρήματος 2.8, παρουσίασαν τους εξής γενικευμένους εκτιμητές Bayes του σ^2 απλής μορφής.

Θεώρημα 2.9 (Maruyama and Strawderman, 2006). (i) *Ως προς την τετραγωνική συνάρτηση ζημίας, ο γενικευμένος εκτιμητής Bayes*

$$\frac{1+W}{(n+2)(r+1+W)}S, \quad 0 < r \leqslant \max_{\varepsilon \leqslant 1} \min\left\{\frac{B_1(\varepsilon)}{1-B_1(\varepsilon)}, \frac{1}{\varepsilon}-1\right\}$$

είναι καλύτερος από τον βέλτιστο αναλλοίωτο εκτιμητή του σ^2, $\delta_0 = S/(n+2)$.

(ii) *Ως προς τη συνάρτηση ζημίας εντροπίας, ο γενικευμένος εκτιμητής Bayes*

$$\frac{1+W}{n(r+1+W)}S, \quad 0 < r \leqslant \max_{\varepsilon \leqslant 1} \min\left\{\frac{B_2(\varepsilon)}{1-B_2(\varepsilon)}, \frac{1}{\varepsilon}-1\right\}$$

είναι καλύτερος από τον βέλτιστο αναλλοίωτο εκτιμητή του σ^2, $\delta_0 = S/n$.

Ανάλογα, στην περίπτωση του προβλήματος εκτίμησης της παραμέτρου κλίμακας εκθετικής κατανομής $E(\mu, \sigma)$ με $\mu \in \mathbb{R}$ και $\sigma > 0$ άγνωστα, βελτιωμένοι εκτιμητές έχουν δοθεί από τους Arnold (1970), Zidek (1973) και Brewster (1974), οι οποίοι προκύπτουν και από τον Kubokawa (1994a), ενώ μία διαφορετική κλάση βελτιωμένων εκτιμητών (που ικανοποιούν τις συνθήκες του Kubokawa (1994a)) έχει δοθεί από τους Petropoulos and Kourouklis (2002).

2.6 Βελτιωμένοι εκτιμητές για το λόγο παραμέτρων κλίμακας

Ένα πρόβλημα σχετικό ως προς τη δομή με το πρόβλημα εκτίμησης της διασποράς κανονικής κατανομής είναι αυτό της εκτίμησης του λόγου των διασπορών, $\rho = \sigma_2^2/\sigma_1^2$, δύο ανεξάρτητων κανονικών πληθυσμών, όπου δηλαδή θεωρούμε $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $S_1 \sim \sigma_1^2\chi_n^2$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, $S_2 \sim \sigma_2^2\chi_m^2$ ανεξάρτητα δεδομένα με $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ και $\sigma_1, \sigma_2 > 0$ άγνωστες παραμέτρους. Οι Gelfand and Dey (1988) απέδειξαν ότι ο βέλτιστος αναλλοίωτος εκτιμητής του ρ ως προς την τετραγωνική συνάρτηση ζημίας,

$$\delta_0 = \frac{n-4}{m+2}\frac{S_2}{S_1} \tag{2.10}$$

είναι μη αποδεκτός. Συγκεκριμένα, ισχύει το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 2.10 (Gelfand and Dey, 1988). *Έστω* $X \sim N_p(\mu_1, \sigma_1^2 I_p)$, $Y \sim N_q(\mu_2, \sigma_2^2 I_q)$, $S_1 \sim \sigma_1^2\chi_n^2$, $S_2 \sim \sigma_2^2\chi_m^2$ *ανεξάρτητα δεδομένα, όπου* $\mu_1 \in \mathbb{R}^p$, $\mu_2 \in \mathbb{R}^q$ *και* $\sigma_1, \sigma_2 > 0$ *είναι άγνωστα. Ως προς την τετραγωνική συνάρτηση ζημίας οι εκτιμητές*

$$\delta_1 = \max\left\{\frac{n-4}{m+2}\frac{S_2}{S_1}, \frac{n+p-4}{m+2}\frac{S_2}{S_1+\|X\|^2}\right\},$$
$$\delta_2 = \min\left\{\frac{n-4}{m+2}\frac{S_2}{S_1}, \frac{n-4}{m+q+2}\frac{S_2+\|Y\|^2}{S_1}\right\},$$

είναι καλύτεροι από τον δ_0 *στην* (2.10).

Οι εκτιμητές δ_1, δ_2 είναι βελτιωμένοι εκτιμητές τύπου Stein. Στην ίδια εργασία, οι Gelfand and Dey (1988) κατασκεύασαν και εκτιμητές του ρ με την τεχνική του Brown, ενώ βελτιωμένους εκτιμητές τύπου Brewster and Zidek κατασκεύασε ο Madi (1995) για οποιαδήποτε αυστηρά bowl-shaped συνάρτηση ζημίας. Επίσης, οι Ghosh and Kundu (1996) παρουσίασαν κλάσεις βελτιωμένων ιεραρχικών Bayes εκτιμητών ως προς την τετραγωνική συνάρτηση ζημίας.

Οι παραπάνω βελτιωμένοι εκτιμητές για την εκτίμηση του ρ έχουν τη μορφή

$$\delta_\phi = \phi(W_1)\frac{S_2}{S_1} \quad \text{ή} \quad \delta_\psi = \psi(W_2)\frac{S_2}{S_1},$$

όπου $W_1 = \|X\|^2/S_1$, $W_2 = \|Y\|^2/S_2$, και έτσι αφήνουν πληροφορίες που περιέχονται αντίστοιχα στα δεδομένα Y, X για την άγνωστη παράμετρο ανεκμετάλλευτες. Ο Kubokawa (1994b) πέτυχε στην περίπτωση αυστηρά κυρτής συνάρτησης ζημίας (συνθήκη ισχυρότερη από αυστηρά bowl-shaped) να κατασκευάσει βελτιωμένους εκτιμητές του λόγου των παραμέτρων κλίμακας δύο γενικών κατανομών χρησιμοποιώντας όλα τα δεδομένα.

Θεώρημα 2.11 (Kubokawa, 1994b). *Έστω S_i, T_i, $i = 1, 2$, ανεξάρτητα δεδομένα, όπου S_i/σ_i και T_i/σ_i έχουν πυκνότητες πιθανότητας*

$$g_i(s_i)I_{(0,\infty)}(s_i) \quad \text{και} \quad h_i(t_i;\lambda_i)I_{(\kappa_i(\lambda_i),\infty)}(t_i),$$

αντίστοιχα, για μία άγνωστη παράμετρο λ_i και μία πραγματική συνάρτηση $\kappa_i(\lambda_i)$, με $\kappa_i(0) = 0$, $i = 1, 2$. Θέτοντας $h_i(t_i) = h_i(t_i, 0)$, $H_i(x;\lambda_i) = \int_0^x h_i(t;\lambda_i)I_{(\kappa_i(\lambda_i),\infty)}(t)dt$ και $H_i(x) = \int_0^x h_i(t)dt$, $x > 0$, $i = 1, 2$, υποθέτουμε ότι ισχύουν οι εξής συνθήκες:

(A1) Η $g_i(c_1x)/g_i(c_2x)$ είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση του $x > 0$ για κάθε $0 < c_1 < c_2$, $i = 1, 2$.

(A2) Η $H_i(x;\lambda_i)/H_i(x)$ είναι αύξουσα (μη φθίνουσα) συνάρτηση του $x > 0$, $i = 1, 2$.

Έστω $L(t)$ μία αυστηρά κυρτή συνάρτηση ζημίας και $\delta_0 = c_0S_2/S_1$ ο βέλτιστος εκτιμητής του $\rho = \sigma_2/\sigma_1$ στην κλάση $\{cS_2/S_1 : c > 0\}$.

(A) Για απολύτως συνεχή συνάρτηση $\phi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ που ικανοποιεί

(i) *$\phi(w_1)$ είναι φθίνουσα και $\lim_{w_1\to\infty}\phi(w_1) = c_0$,*

(ii) $\int_0^\infty\int_0^\infty L'(\phi(w_1)s_2/s_1)(s_2/s_1)g_1(s_1)g_2(s_2)H_1(w_1s_1)ds_1ds_2 \leqslant 0, \forall\, w_1 > 0$

και $W_1 = T_1/S_1$ ο εκτιμητής

$$\delta_\phi = \begin{cases} \phi(W_1)S_2/S_1 & \text{εάν } W_1 > 0, \\ c_0S_2/S_1 & \text{διαφορετικά}, \end{cases} \tag{2.11}$$

είναι καλύτερος από τον δ_0.

(B) Για απολύτως συνεχή συνάρτηση $\psi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ που ικανοποιεί

(i) *$\psi(w_2)$ είναι αύξουσα και $\lim_{w_2\to\infty}\psi(w_2) = c_0$,*

(ii) $\int_0^\infty\int_0^\infty L'(\psi(w_2)s_2/s_1)(s_2/s_1)g_1(s_1)g_2(s_2)H_2(w_2s_2)ds_1ds_2 \geqslant 0, \forall\, w_2 > 0$

και $W_2 = T_2/S_2$ ο εκτιμητής

$$\delta_\psi = \begin{cases} \psi(W_2)S_2/S_1 & \textit{εάν } W_2 > 0, \\ c_0 S_2/S_1 & \textit{διαφορετικά}, \end{cases} \tag{2.12}$$

είναι καλύτερος από τον δ_0.

(Γ) Αν δ_ϕ, δ_ψ είναι όπως στα (Α), (Β) αντίστοιχα, τότε ο εκτιμητής

$$\delta_{\phi+\psi-c_0} = \begin{cases} \big(\phi(W_1) + \psi(W_2) - c_0\big)S_2/S_1 & \textit{εάν } W_1 > 0, W_2 > 0, \\ \phi(W_1)S_2/S_1 & \textit{εάν } W_1 > 0, W_2 \leqslant 0, \\ \psi(W_2)S_2/S_1 & \textit{εάν } W_1 \leqslant 0, W_2 > 0, \\ c_0 S_2/S_1 & \textit{εάν } W_1 \leqslant 0, W_2 \leqslant 0, \end{cases} \tag{2.13}$$

είναι καλύτερος από τους δ_ϕ, δ_ψ (και συνεπώς από τον δ_0).

Σημειώνουμε ότι εκτιμητές της μορφής δ_ϕ, δ_ψ στις (2.11), (2.12), αντίστοιχα, θα αναφέρονται ως *βελτιωμένοι εκτιμητές απλής προσαρμογής* (single adjustment improved estimators), επειδή χρησιμοποιούν ένα μόνον από τα T_1, T_2. Πιο συγκεκριμένα, ο δ_ϕ θα αναφέρεται ως *βελτιωμένος εκτιμητής επέκτασης* (improved expansion estimator) και ο δ_ψ ως *βελτιωμένος εκτιμητής συρρίκνωσης* (improved shrinkage estimator). Ο εκτιμητής στην (2.13) που συνδυάζει εκτιμητές απλής προσαρμογής και συνεπώς χρησιμοποιεί όλα τα δεδομένα θα αναφέρεται ως *βελτιωμένος εκτιμητής διπλής προσαρμογής* (double adjustment improved estimator).

Οι Iliopoulos and Kourouklis (1999) χρησιμοποιώντας μία διαφορετική μεθοδολογία για την εκτίμηση του λόγου σ_2/σ_1 από αυτήν του Kubokawa (1994b), αφ' ενός μεν αναπαρήγαγαν την κλάση των εκτιμητών στην (2.13), αφ' ετέρου δε κατασκεύασαν μία νέα κλάση βελτιωμένων εκτιμητών διπλής προσαρμογής της μορφής

$$\delta_{\phi\psi/c_0} = \begin{cases} \big(\phi(W_1)\psi(W_2)/c_0\big)S_2/S_1 & \text{εάν } W_1 > 0, W_2 > 0, \\ \phi(W_1)S_2/S_1 & \text{εάν } W_1 > 0, W_2 \leqslant 0, \\ \psi(W_2)S_2/S_1 & \text{εάν } W_1 \leqslant 0, W_2 > 0, \\ c_0 S_2/S_1 & \text{εάν } W_1 \leqslant 0, W_2 \leqslant 0, \end{cases} \tag{2.14}$$

όταν η $tL'(t)$ είναι αύξουσα (δηλαδή η $L(t)$ είναι αύξουσα ως προς $\ln t$).

Ανεξάρτητα από τους Iliopoulos and Kourouklis (1999), η κλάση εκτιμητών στην (2.14) παρουσιάστηκε και από τους Kubokawa and Srivastava (1996) χρησιμοποιώντας την τεχνική του Kubokawa (1994b), για αυστηρά κυρτή συνάρτηση ζημίας.

Τέλος, στην περίπτωση του προβλήματος εκτίμησης του λόγου των παραμέτρων κλίμακας δύο εκθετικών κατανομών, οι Madi and Tsui (1990b) κατασκεύασαν βελτιωμένους εκτιμητές απλής προσαρμογής ως προς bowl-shaped συνάρτηση ζημίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Εκτιμητές τύπου Strawderman για παράμετρο κλίμακας

Στο κεφάλαιο αυτό, το κλασικό αποτέλεσμα του Strawderman (1974) για την εκτίμηση της διασποράς κανονικής κατανομής επεκτείνεται σε κατανομές με παράμετρο κλίμακας και μία άλλη άγνωστη («ενοχλητική») παράμετρο για την εκτίμηση της παραμέτρου κλίμακας ως προς την τετραγωνική συνάρτηση ζημίας και τη συνάρτηση ζημίας εντροπίας. Ακολούθως, τα γενικά αποτελέσματα εφαρμόζονται στην εκθετική και την κανονική κατανομή. Στην περίπτωση της εκθετικής κατανομής δίνονται νέες ικανές συνθήκες (δηλαδή, διαφορετικές από αυτές των Brewster and Zidek (1974) και Kubokawa (1994a)) για τη βελτίωση του καλύτερου αναλλοίωτου ως προς μετασχηματισμούς θέσης-κλίμακας εκτιμητή. Στη συνέχεια, κατασκευάζονται κλάσεις εκτιμητών που ικανοποιούν τις νέες συνθήκες. Στην περίπτωση της κανονικής κατανομής αναπαράγονται τα αποτελέσματα των Strawderman (1974) και Maruyama and Strawderman (2006). Η μέθοδος απόδειξης των αποτελεσμάτων, παρά το γεγονός ότι διατηρεί το «σκελετό» της μεθόδου του Strawderman (1974), διαφέρει (αναπόφευκτα) τεχνικά από αυτήν επειδή ο Strawderman (1974) βασίζεται σε ειδικά χαρακτηριστικά της κανονικής κατανομής. Το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με την κατασκευή εκτιμητών τύπου Strawderman, ειδικής μορφής, ως προς τη συμμετρική συνάρτηση ζημίας $L(t) = t + 1/t - 2$. Το Κεφάλαιο 3 είναι το κύριο κεφάλαιο της διατριβής. Τα αποτελέσματα των Ενοτήτων 3.1, 3.3.1, 3.4 έχουν δημοσιευθεί στην εργασία Bobotas and Kourouklis (2009), ενώ η Ενότητα 3.5 αποτελεί μέρος της εργασίας Bobotas, Iliopoulos and Kourouklis (2009).

3.1 Εκτίμηση ως προς την τετραγωνική συνάρτηση ζημίας

Έστω S, X ανεξάρτητες στατιστικές συναρτήσεις τέτοιες ώστε οι S/σ και X/σ έχουν κατανομές

$$g(v)I(v > 0) \quad \text{και} \quad h(x;\lambda)I(x > \kappa(\lambda)) \tag{3.1}$$

αντίστοιχα, όπου $\lambda = \lambda(\mu, \sigma)$ είναι μία συνάρτηση των άγνωστων παραμέτρων μ και σ με $\sigma > 0$, $\kappa(\lambda)$ είναι μία πραγματική συνάρτηση του λ και $I(\cdot)$ είναι η δείκτρια συνάρτηση.

Για κάποιο $\lambda = \lambda_0$ υποθέτουμε $\kappa(\lambda_0) = 0$ και θέτουμε $h(x) = h(x;\lambda_0)$. Στη συνέχεια, για απλότητα του συμβολισμού, για κάθε συνάρτηση $f(x;\lambda)$ θέτουμε $f(x;0) = f(x;\lambda_0)$. Αυτό το μοντέλο μελετήθηκε για πρώτη φορά από τον Kubokawa (1994a) και εμπεριέχει, ως τυπικές περιπτώσεις, την κανονική και την εκθετική κατανομή.

Βασιζόμενοι στα δεδομένα (S, X) θέλουμε να εκτιμήσουμε το σ με έναν εκτιμητή δ ως προς την τετραγωνική συνάρτηση ζημίας $L_1(\delta,\sigma) = (\delta/\sigma - 1)^2$. Μεταξύ των εκτιμητών της μορφής cS, $c > 0$, ο καλύτερος ως προς τη μέση τετραγωνική ζημία είναι

$$\delta_0 = c_0 S, \quad c_0 = \frac{\int_0^\infty v g(v)dv}{\int_0^\infty v^2 g(v)dv}. \tag{3.2}$$

Υποθέτουμε ότι το c_0 είναι καλά ορισμένο. Ακολουθώντας τον Strawderman (1974), στόχος μας είναι η βελτίωση του δ_0 θεωρώντας εκτιμητές της μορφής

$$\delta_\varphi = \begin{cases} c_0\{1 - \varphi(W)\}S & \text{εάν } W > 0, \\ \delta_0 & \text{διαφορετικά}, \end{cases} \tag{3.3}$$

όπου $W = X/S$ και η συνάρτηση $\varphi(w)$ ικανοποιεί, για κάποιο $\varepsilon > 0$, τις συνθήκες

$(1 + w)^\varepsilon \varphi(w)$ είναι φθίνουσα στο $(0, \infty)$,
$0 \leqslant \varphi(w) \leqslant B(\varepsilon)$ για $w > 0$.

Ο όρος φθίνουσα (αύξουσα) χρησιμοποιείται με τη μη αυστηρή έννοια. Το $B(\varepsilon)$ είναι ένα κατάλληλο άνω φράγμα που πρέπει να καθοριστεί έτσι ώστε ο δ_φ να βελτιώνει τον δ_0. Ένας τέτοιος εκτιμητής δ_φ θα αναφέρεται ως *εκτιμητής τύπου Strawderman*. Ως μία ειδική περίπτωση του δ_φ, μελετούμε πρώτα εκτιμητές της μορφής

$$\delta^{(r)} = \begin{cases} c_0\{1 - r\,(1 + W)^{-\varepsilon}\}S & \text{εάν } W > 0, \\ \delta_0 & \text{διαφορετικά}, \end{cases} \tag{3.4}$$

όπου $\varepsilon > 0$ και $r > 0$. Στην περίπτωση αυτή, η $\varphi(w) = r\,(1 + w)^{-\varepsilon}$ τετριμμένα ικανοποιεί την πρώτη από τις παραπάνω συνθήκες ενώ η δεύτερη ισχύει εάν $r \leqslant B(\varepsilon)$.

Απαιτούμε τις ακόλουθες συνθήκες (τύπου) μονότονου λόγου πιθανοφανειών (ΜΛΠ) (οι οποίες χρησιμοποιήθηκαν επίσης από τον Kubokawa (1994a)):

(A1) $h(x;\lambda)/h(x)$ είναι αύξουσα ως προς $x > 0$.

(A2) $g(c_1 x)/g(c_2 x)$ είναι αύξουσα ως προς $x > 0$ για $0 < c_1 < c_2$.

Για $0 < u < 1$, θέτουμε

$$\alpha = \max\left\{\frac{\kappa(\lambda)}{1 - u}, 0\right\}. \tag{3.5}$$

Το επόμενο αποτέλεσμα αποδεικνύει ότι ο εκτιμητής τύπου Strawderman $\delta^{(r)}$ είναι καλύτερος από τον κλασικό εκτιμητή δ_0, παρέχοντας συνεπώς μία πολύ απλή κλάση βελτιωμένων εκτιμητών για το σ.

Θεώρημα 3.1. *Έστω ότι οι (A1) και (A2) ισχύουν. Τότε, για κάθε* $\varepsilon > 0$, *η μέση τετραγωνική ζημία του* $\delta^{(r)}$ *στην* (3.4) *είναι αυστηρά μικρότερη (αντίστοιχα, μικρότερη ή ίση) από αυτήν του* δ_0 *στην* (3.2) *εάν* $0 < r <$ *(αντίστοιχα,* $\leqslant$*)*$B_0(\varepsilon)$, *όπου*

$$B_0(\varepsilon) = \Big\{2c_0 \int_0^1 u^{\varepsilon+2} \int_0^\infty v^3 g(uv)h((1-u)v)dvdu - 2\int_0^1 u^{\varepsilon+1} \int_0^\infty v^2 g(uv)h((1-u)v)dvdu\Big\} \times \Big\{c_0 \int_0^1 u^{2\varepsilon+2} \int_0^\infty v^3 g(uv)h((1-u)v)dvdu\Big\}^{-1}. \tag{3.6}$$

Απόδειξη. Έστω $RD(\delta_0, \delta^{(r)}) = \mathsf{E}(\delta_0/\sigma - 1)^2 - \mathsf{E}(\delta^{(r)}/\sigma - 1)^2$. Λόγω της μορφής των δ_0 και $\delta^{(r)}$ έχουμε

$$\begin{aligned} RD(\delta_0, \delta^{(r)}) &= \mathsf{E}\Big[\Big\{c_0 \frac{r}{(1+W)^\varepsilon}\frac{S}{\sigma}\Big\}\Big\{2c_0\frac{S}{\sigma} - c_0\frac{r}{(1+W)^\varepsilon}\frac{S}{\sigma} - 2\Big\}I(W>0)\Big] \\ &= c_0\, r \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{y}{(1+w)^\varepsilon}\Big\{2c_0 y - c_0\frac{r}{(1+w)^\varepsilon}y - 2\Big\} \\ &\quad \times yg(y)h(wy;\lambda)I(wy > \kappa(\lambda))dydw. \end{aligned}$$

Με αλλαγή των μεταβλητών $u = 1/(1+w)$ και $v = (1+w)y$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} RD(\delta_0, \delta^{(r)}) &= c_0\, r \int_0^1 u^{\varepsilon+1} \int_\alpha^\infty \Big\{2c_0 uv^3 - c_0 r u^{\varepsilon+1} v^3 - 2v^2\Big\} \\ &\quad \times g(uv)h((1-u)v;\lambda)dvdu \\ &= c_0 r \Big\{2c_0 \int_0^1 u^{\varepsilon+2} \int_\alpha^\infty v^3 g(uv)h((1-u)v;\lambda)dv \\ &\quad - c_0 r \int_0^1 u^{2\varepsilon+2} \int_\alpha^\infty v^3 g(uv)h((1-u)v;\lambda)dv \\ &\quad - 2\int_0^1 u^{\varepsilon+1} \int_\alpha^\infty v^2 g(uv)h((1-u)v;\lambda)dv\Big\}\, du. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Έτσι, $RD(\delta_0, \delta^{(r)}) \geqslant 0$ εάν

$$\begin{aligned} r &\leqslant \Big\{2c_0 \int_0^1 u^{\varepsilon+2} \int_\alpha^\infty v^3 g(uv)h((1-u)v;\lambda)dvdu \\ &\quad - 2\int_0^1 u^{\varepsilon+1} \int_\alpha^\infty v^2 g(uv)h((1-u)v;\lambda)dvdu\Big\} \\ &\quad \times \Big\{c_0 \int_0^1 u^{2\varepsilon+2} \int_\alpha^\infty v^3 g(uv)h((1-u)v;\lambda)dvdu\Big\}^{-1} \\ &= B(\varepsilon;\lambda). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Η απόδειξη ολοκληρώνεται εάν δείξουμε ότι $B_0(\varepsilon) \leqslant B(\varepsilon;\lambda)$. Γράφουμε το $B(\varepsilon;\lambda)$ στη μορφή

$$B(\varepsilon;\lambda) = \frac{2\int_0^1 u^{\varepsilon+2} \int_\alpha^\infty v^3 g(uv)h((1-u)v;\lambda)dvdu}{\int_0^1 u^{2\varepsilon+2} \int_\alpha^\infty v^3 g(uv)h((1-u)v;\lambda)dvdu}$$

$$\times\left\{1-\frac{\int_0^1 u^{\varepsilon+1}\int_\alpha^\infty v^2 g(uv)h((1-u)v;\lambda)dvdu}{c_0\int_0^1 u^{\varepsilon+2}\int_\alpha^\infty v^3 g(uv)h((1-u)v;\lambda)dvdu}\right\}$$
$$=2I_1(\varepsilon;\lambda)\{1-c_0^{-1}I_2(\varepsilon;\lambda)\}. \tag{3.9}$$

Αρχικά, αποδεικνύουμε ότι

$$I_1(\varepsilon;\lambda)\geqslant I_1(\varepsilon;0). \tag{3.10}$$

Έχουμε $I_1(\varepsilon;\lambda)=\mathsf{E}_\lambda U^{-\varepsilon}$, όπου U έχει πυκνότητα $f(u;\lambda)\propto u^{2\varepsilon+2}\int_\alpha^\infty v^3 g(uv)h((1-u)v;\lambda)dv$, $0<u<1$. Επειδή η $u^{-\varepsilon}$ είναι φθίνουσα, από το Λήμμα Α.2, η (3.10) θα ισχύει εάν η $f(u;\lambda)/f(u;0)$ είναι φθίνουσα. Τώρα,

$$\frac{f(u;\lambda)}{f(u;0)}\propto\frac{\int_\alpha^\infty v^3 g(uv)h((1-u)v;\lambda)dv}{\int_0^\infty v^3 g(uv)h((1-u)v)dv}\propto\frac{\int_{\alpha(1-u)}^\infty y^3 g(\frac{u}{1-u}y)h(y;\lambda)dy}{\int_0^\infty y^3 g(\frac{u}{1-u}y)h(y)dy}$$
$$\propto\mathsf{E}_u\left[\frac{h(Y;\lambda)}{h(Y)}I(Y>\max\{\kappa(\lambda),0\})\right],$$

όπου Y έχει πυκνότητα $f_u(y)\propto y^3 g(\frac{u}{1-u}y)h(y)$, $y>0$. Για $0<u_1<u_2<1$, η $f_{u_1}(y)/f_{u_2}(y)$ είναι αύξουσα ως προς y λόγω της (Α2), και συνεπώς η (Α1) και το Λήμμα Α.2 συνεπάγονται ότι $f(u_1;\lambda)/f(u_1;0)\geqslant f(u_2;\lambda)/f(u_2;0)$, το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη της (3.10).

Στη συνέχεια αποδεικνύουμε ότι

$$I_2(\varepsilon;\lambda)\leqslant I_2(\varepsilon;0). \tag{3.11}$$

Θέτοντας $\beta=\max\{\kappa(\lambda),0\}$, έχουμε

$$I_2(\varepsilon;\lambda)=\frac{\int_0^1 u^{\varepsilon-2}\int_{\alpha u}^\infty y^2 g(y)h(\frac{1-u}{u}y;\lambda)dydu}{\int_0^1 u^{\varepsilon-2}\int_{\alpha u}^\infty y^3 g(y)h(\frac{1-u}{u}y;\lambda)dydu}$$
$$=\frac{\int_0^\infty y^2 g(y)\int_0^{y/(y+\beta)} u^{\varepsilon-2}h(\frac{1-u}{u}y;\lambda)dudy}{\int_0^\infty y^3 g(y)\int_0^{y/(y+\beta)} u^{\varepsilon-2}h(\frac{1-u}{u}y;\lambda)dudy}$$
$$=\frac{\int_0^\infty y^{\varepsilon+1}g(y)\int_\beta^\infty(z+y)^{-\varepsilon}h(z;\lambda)dzdy}{\int_0^\infty y^{\varepsilon+2}g(y)\int_\beta^\infty(z+y)^{-\varepsilon}h(z;\lambda)dzdy}=\mathsf{E}_\lambda Y^{-1}, \tag{3.12}$$

όπου Y έχει πυκνότητα $f(y;\lambda)\propto y^{\varepsilon+2}g(y)\int_\beta^\infty(z+y)^{-\varepsilon}h(z;\lambda)dz$, $y>0$. Οπότε, από το Λήμμα Α.2, για να αποδείξουμε την (3.11) αρκεί να δείξουμε ότι η $f(y;\lambda)/f(y;0)$ είναι αύξουσα ως προς $y>0$. Προς αυτή την κατεύθυνση, παρατηρούμε ότι

$$\frac{f(y;\lambda)}{f(y;0)}\propto\frac{\int_\beta^\infty(z+y)^{-\varepsilon}h(z;\lambda)dz}{\int_0^\infty(z+y)^{-\varepsilon}h(z)dz}\propto\mathsf{E}_y\left[\frac{h(Z;\lambda)}{h(Z)}I(Z>\beta)\right], \tag{3.13}$$

όπου Z έχει πυκνότητα $k(z;y)\propto(z+y)^{-\varepsilon}h(z)$, $z>0$. Έστω τώρα ότι $0<y_1<y_2$. Τότε, η $k(z;y_2)/k(z;y_1)\propto((z+y_1)/(z+y_2))^\varepsilon$ είναι αύξουσα ως προς $z>0$. Επί πλέον, από την (Α1), η $h(z;\lambda)I(z>\beta)/h(z)$ είναι αύξουσα. Συνεπώς, εφαρμόζοντας το Λήμμα Α.2 στη μέση τιμή στην (3.13) συμπεραίνουμε ότι $f(y_2;\lambda)/f(y_2;0)\geqslant f(y_1;\lambda)/f(y_1;0)$, το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη της (3.11). Τέλος, δείχνουμε ότι

$$I_2(\varepsilon;0)<c_0. \tag{3.14}$$

Από την (3.12) παίρνουμε

$$I_2(\varepsilon;0) = \frac{\int_0^\infty y^{\varepsilon+1} g(y) \int_0^\infty (z+y)^{-\varepsilon} h(z) dz dy}{\int_0^\infty y^{\varepsilon+2} g(y) \int_0^\infty (z+y)^{-\varepsilon} h(z) dz dy} = \mathsf{E}\, Y^{-1}, \tag{3.15}$$

όπου Y έχει πυκνότητα $f(y;0) \propto y^{\varepsilon+2} g(y) \int_0^\infty (z+y)^{-\varepsilon} h(z) dz$, $y > 0$. Έστω η πυκνότητα $f_0(y) \propto y^2 g(y)$, $y > 0$. Τότε, η $f(y;0)/f_0(y) \propto \int_0^\infty \big(y/(z+y)\big)^\varepsilon h(z) dz$ είναι προφανώς γνησίως αύξουσα ως προς $y > 0$ και επομένως, η (3.15) και το Λήμμα Α.2 δίνουν $I_2(\varepsilon;0) = \mathsf{E}\, Y^{-1} < \int_0^\infty y^{-1} f_0(y) dy = \int_0^\infty y g(y) dy / \int_0^\infty y^2 g(y) dy = c_0$. Συνδυάζοντας τις (3.9), (3.10), (3.11) και (3.14) καταλήγουμε ότι $B(\varepsilon;\lambda) \geqslant 2 I_1(\varepsilon;0)\{1 - c_0^{-1} I_2(\varepsilon;0)\} = B_0(\varepsilon) > 0$, σχέση η οποία ήταν προς απόδειξη. □

Παρατήρηση 3.1. Ορίζοντας ως $C(\varepsilon;\lambda)$ τον παρονομαστή του $B(\varepsilon;\lambda)$ στην (3.8), η σχέση (3.7) μπορεί να γραφεί ως $RD(\delta_0, \delta^{(r)}) = c_0\, C(\varepsilon;\lambda)\{B(\varepsilon;\lambda)\, r - r^2\}$. Οπότε, η $RD(\delta_0, \delta^{(r)})$ είναι γνησίως αύξουσα για $0 < r < B(\varepsilon;\lambda)/2$, γεγονός που συνεπάγεται ότι ο $\delta^{(r)}$, $0 < r < B_0(\varepsilon)/2$, είναι καλύτερος από τον δ_0 αλλά μη αποδεκτός αφού ο $\delta^{(r_0)}$ με $r_0 = B_0(\varepsilon)/2$ είναι καλύτερος και από αυτόν.

Παρατήρηση 3.2. Σημειώνεται ότι ο $\delta^{(r)}$ είναι τόσο «λείος» (smooth) όσο και ο αντίστοιχος εκτιμητής τύπου Brewster and Zidek και συνεπώς πιο «λείος» από τον εκτιμητή τύπου Stein.

Οι (Α1) και (Α2) είναι ήπιες συνθήκες και ισχύουν, συγκεκριμένα, για την κανονική, εκθετική και άρα λογαριθμοκανονική και Pareto κατανομή (βλέπε επίσης τις Ενότητες 3.3 και 3.4). Παρακάτω, δίνουμε μερικές άλλες σημαντικές εφαρμογές του Θεωρήματος 3.1.

Παράδειγμα 3.1 (Inverse Gaussian κατανομή)**.** Έστω $X_1, \dots, X_n$, $n \geqslant 2$, ένα τυχαίο δείγμα από μία inverse Gaussian κατανομή με πυκνότητα

$$(2\pi\sigma x^3)^{-1/2} \exp\big\{ -(x-\mu)^2/(2\sigma\mu^2 x)\big\}, \quad x > 0,\ \mu > 0,\ \sigma > 0.$$

Θέτουμε $S = \sum_{i=1}^n (X_i^{-1} - \bar{X}^{-1})$ και $X = n(\bar{X} - 1)^2/\bar{X}$. Η ελάχιστη επαρκής στατιστική συνάρτηση είναι $(S, \bar{X})$. Είναι γνωστό ότι S και X είναι ανεξάρτητα τέτοια ώστε $S/\sigma \sim \chi^2_{n-1}$ και, όταν $\mu = 1$, $X/\sigma \sim \chi^2_1$ (βλέπε Chhikara and Folks (1989)). Στο παράδειγμα αυτό, το μοντέλο στην (3.1) ισχύει με $\lambda = (\mu, \sigma)$, $\kappa(\lambda) = 0$, $\lambda_0 = (1, \sigma)$, $g(v)$ την πυκνότητα της χ^2_{n-1} και $h(x)$ την πυκνότητα της χ^2_1. Από την (3.2), έχουμε ότι $\delta_0 = S/(n+1)$. Οι εκτιμητές τύπου Stein και τύπου Brewster and Zidek του σ έχουν δοθεί από τους Pal and Sinha (1989) και Kourouklis (1997). Η συνθήκη (Α1) έχει δειχθεί από τον Kourouklis (1997, Corollary 2.2), ενώ η (Α2) είναι η γνωστή ιδιότητα ΜΛΠ της κατανομής γάμμα ως προς την παράμετρο κλίμακάς της. Οπότε, από το Θεώρημα 3.1, ο $\delta^{(r)}$ στην (3.4) είναι καλύτερος από τον δ_0 για κάθε

$$0 < r \leqslant \frac{2\varepsilon\Gamma((n+1)/2+\varepsilon)\Gamma((n+4)/2+2\varepsilon)}{\Gamma((n+4)/2+\varepsilon)\Gamma((n+3)/2+2\varepsilon)(n+2)}.$$

Παράδειγμα 3.2 (Mathew et al., 1992a)**.** Έστω S, V, U ανεξάρτητες στατιστικές συναρτήσεις τέτοιες ώστε $S \sim \sigma\chi^2_n$, $V \sim \sigma_1\chi^2_p$, $U \sim \sigma_2\chi^2_q(\beta)$, όπου $\sigma \leqslant \sigma_1$, $\sigma \leqslant \sigma_2$ είναι θετικά και $\beta \geqslant 0$. Τα δεδομένα αυτά εμφανίζονται για παράδειγμα σε ένα ισορροπημένο μικτό γραμμικό μοντέλο (balanced mixed effects model) με σ να παριστάνει τη διασπορά των σφαλμάτων, βλέπε Mathew et al. (1992a). Για την εκτίμηση του σ, βασιζόμενοι στον Strawderman (1974) και κάνοντας υπολογισμούς σε δεσμευμένες μέσες ζημίες καθώς και πολύπλοκες αλγεβρικές πράξεις, οι Mathew et al. (1992a) έδειξαν ότι οι εκτιμητές $\delta_1 = \{1 - r_1 S/(S+V)\}S/(n+2)$ και $\delta_2 = \{1 - r_2 S/(S+U)\}S/(n+2)$ βελτιώνουν τον $\delta_0 = S/(n+2)$ για

$$0 < r_1 \leqslant s_1 = \frac{4p}{(n+p+2)(n+4)}, \quad 0 < r_2 \leqslant s_2 = \frac{4q}{(n+q+2)(n+4)},$$

αντίστοιχα. Εδώ δίνουμε μία πολύ απλή απόδειξη και μία γενίκευση αυτού του αποτελέσματος απλά μόνο με εφαρμογή του Θεωρήματος 3.1. Το μοντέλο στην (3.1) ισχύει με $X = V$, $\lambda = \sigma_1/\sigma \geqslant 1$, $\kappa(\lambda) = 0$, $\lambda_0 = 1$, $g(v)$ την πυκνότητα της χ^2_n και $h(x)$ την πυκνότητα της χ^2_p. Οι συνθήκες (A1) και (A2) επαληθεύονται εύκολα, οπότε από το Θεώρημα 3.1, ο $\delta^{(r)} = \big\{1 - r\big(S/(S+V)\big)^{\varepsilon}\big\}S/(n+2)$ είναι καλύτερος από τον δ_0 για

$$0 < r \leqslant B_0(\varepsilon) = \frac{2p\varepsilon\Gamma(p/2+n/2+2\varepsilon+2)\Gamma(n/2+\varepsilon+1)}{\Gamma(p/2+n/2+\varepsilon+2)\Gamma(n/2+2\varepsilon+2)(p+n+2)}.$$

Για $\varepsilon = 1$, ο $\delta^{(r)}$ με $r = r_1$ συμπίπτει με τον δ_1 των Mathew et al. (1992a) και το άνω φράγμα που προτείνουμε,

$$B_0(1) = \frac{4p(n+p+6)}{(n+p+2)(n+4)(n+6)},$$

είναι αυστηρά μεγαλύτερο από το s_1. Επί πλέον, από την Παρατήρηση 3.1, ο εκτιμητής δ_1 με $r_1 = s_1/2$ ο οποίος προτείνεται ως «βέλτιστος» από τους Mathew et al. (1992a) είναι μη αποδεκτός αφού ο $\delta^{(r)}$ με $r = B_0(1)/2$ είναι καλύτερος από αυτόν. Ομοίως, παίρνοντας $X = U$, $\lambda = (\sigma, \sigma_2, \beta)$, $\kappa(\lambda) = 0$, $\lambda_0 = (\sigma, \sigma, 0)$ και $h(x)$ την πυκνότητα της χ^2_q, εύκολα διαπιστώνουμε ότι οι (A1) και (A2) ισχύουν, η πρώτη λόγω της ιδιότητας του ΜΛΠ της μη κεντρικής κατανομής χι-τετράγωνο ως προς την παράμετρο μη κεντρικότητάς της, βλέπε Lehmann and Romano (2005, σελ.307). Συνεπώς, από το Θεώρημα 3.1, ο $\delta^{(r)} = \big\{1 - r\big(S/(S+U)\big)^{\varepsilon}\big\}S/(n+2)$ είναι καλύτερος από τον δ_0 για

$$0 < r \leqslant B_0(\varepsilon) = \frac{2q\varepsilon\Gamma(q/2+n/2+2\varepsilon+2)\Gamma(n/2+\varepsilon+1)}{\Gamma(q/2+n/2+\varepsilon+2)\Gamma(n/2+2\varepsilon+2)(q+n+2)}.$$

Για $\varepsilon = 1$, ο $\delta^{(r)}$ με $r = r_2$ συμπίπτει με τον δ_2 και το άνω φράγμα που προτείνουμε,

$$B_0(1) = \frac{4q(n+q+6)}{(n+q+2)(n+4)(n+6)},$$

είναι αυστηρά μεγαλύτερο από το s_2.

Παράδειγμα 3.3 (Mathew et al., 1992b)**.** Έστω οι ανεξάρτητες στατιστικές συναρτήσεις $S \sim \sigma\chi^2_n$, $V_i \sim (\sigma + \theta_i\sigma_1)\chi^2_{m_i}$ για άγνωστες παραμέτρους $\sigma > 0$, $\sigma_1 \geqslant 0$ και γνωστές σταθερές $\theta_i > 0$, $i = 1, \ldots, k$. Το μοντέλο αυτό εμφανίζεται στην αναλλοίωτη (ως προς τη θέση) εκτίμηση της διασποράς των σφαλμάτων σ σε ένα μη ισορροπημένο μικτό γραμμικό μοντέλο (unbalanced mixed effects model) με δύο συνιστώσες διασποράς, βλέπε Mathew et al. (1992b). Για την εκτίμηση του σ, βασιζόμενοι στον Strawderman (1974), οι Mathew et al. (1992b) επέκτειναν το προηγούμενό τους αποτέλεσμα και έδειξαν, μετά από αρκετή «άλγεβρα», ότι ο εκτιμητής $\delta = \{1 - rS/(S + \sum_{i=1}^{k} V_i)\}S/(n+2)$ βελτιώνει τον $\delta_0 = S/(n+2)$ για

$$0 < r \leqslant s_3 = \frac{2(\theta_*/\theta^*)^5(n+m+4)(n+2)}{(n+m+2)(n+4)}\left\{\frac{(n+m+2)(n+4)}{(n+m+4)(n+2)} - (\theta^*/\theta_*)^5\right\},$$

όπου $m = \sum_{i=1}^{k} m_i$, $\theta_* = \min\{\theta_1, \ldots, \theta_k\}$ και $\theta^* = \max\{\theta_1, \ldots, \theta_k\}$. Το αποτέλεσμα αυτό είναι επίσης μία ειδική περίπτωση του Θεωρήματος 3.1. Πράγματι, το μοντέλο στην (3.1) ισχύει με $X = \sum_{i=1}^{k} V_i$, $\lambda = \sigma_1/\sigma \geqslant 0$, $\kappa(\lambda) = 0$, $\lambda_0 = 0$, $g(v)$ την πυκνότητα της χ_n^2 και $h(x)$ την πυκνότητα της χ_m^2. Η συνθήκη (A2) είναι η ίδια όπως στο Παράδειγμα 3.2 ενώ η (A1) αποδεικνύεται στους Mathew et al. (1992b, σελ.93) (βλέπε επίσης Λήμμα A.5). Επομένως, από το Θεώρημα 3.1 με $\varepsilon = 1$, ο εκτιμητής δ είναι καλύτερος από τον δ_0 για

$$0 < r \leqslant B_0(1) = \frac{4m(n+m+6)}{(n+m+2)(n+4)(n+6)}.$$

Στη συνέχεια μελετούμε τη (γενική) κλάση των εκτιμητών τύπου Strawderman δ_φ που δίνονται στην (3.3). Με α όπως στην (3.5), θέτουμε

$$\varphi_\lambda(u) = \frac{\int_\alpha^\infty v^2 g(uv)h((1-u)v;\lambda)dv}{\int_\alpha^\infty v^3 g(uv)h((1-u)v;\lambda)dv}, \quad 0 \leqslant u \leqslant 1, \tag{3.16}$$

όπου $\varphi_\lambda(0) = \lim_{u\to 0^+}\varphi_\lambda(u)$ και $\varphi_\lambda(1) = \lim_{u\to 1^-}\varphi_\lambda(u)$. Προφανώς, $\varphi_\lambda(u) \geqslant 0$ αλλά υποθέτουμε ότι $\varphi_\lambda(0) > 0$. Επίσης, υποθέτουμε ότι η $\varphi_\lambda(u)$ είναι συνεχής.

Για να αποδείξουμε ότι ο δ_φ είναι καλύτερος από τον δ_0 χρειαζόμαστε, εκτός των (A1), (A2), την εξής συνθήκη:

(A3) Η $\varphi_\lambda(u)$ είναι κυρτή ως προς $0 < u < 1$ ή είναι φθίνουσα ως προς $0 < u < 1$.

Ακολουθεί ένα προκαταρκτικό αποτέλεσμα. Θέτουμε $\varphi_0(u) = \varphi_{\lambda_0}(u)$.

Λήμμα 3.2. *Έστω ότι οι (A1), (A3) ισχύουν και* $\max\{\varphi_0(0), \varphi_0(1)\} < c_0$. *Τότε για* $\varepsilon > 0$ *και* $B > 0$, *η συνάρτηση* $2c_0u - c_0Bu^{\varepsilon+1} - 2\varphi_\lambda(u)$, $0 \leqslant u \leqslant 1$, *έχει μία μόνον αλλαγή προσήμου από αρνητική σε θετική για κάθε* λ *και για κάθε* $0 < B < 2 - 2\max\{\varphi_0(0), \varphi_0(1)\}/c_0$.

Απόδειξη. Έστω $s(u;\lambda) = 2c_0u - c_0Bu^{\varepsilon+1} - 2\varphi_\lambda(u)$. Αρχικά αποδεικνύουμε ότι η $s(u;\lambda)$ έχει τουλάχιστον μία αλλαγή προσήμου αρχίζοντας αρνητική και καταλήγοντας θετική. Προς αυτή την κατεύθυνση, αρκεί να δείξουμε ότι

$$s(0;\lambda) < 0 \quad \text{και} \quad s(1;\lambda) > 0. \tag{3.17}$$

Υπενθυμίζουμε ότι $\varphi_\lambda(0) > 0$. Συνεπώς, λαμβάνουμε $s(0;\lambda) = -2\varphi_\lambda(0) < 0$. Για να δείξουμε τη δεύτερη ανισότητα στην (3.17), παρατηρούμε πρώτα ότι $\varphi_\lambda(u) = \mathsf{E}_\lambda V^{-1}$, όπου V έχει πυκνότητα $g_1(v;\lambda) \propto v^3 g(uv)h((1-u)v;\lambda)I(v > \alpha)$. Λόγω της (A1), η $g_1(v;\lambda)/g_1(v;0)$ είναι αύξουσα και επειδή η v^{-1} είναι φθίνουσα, από το Λήμμα A.2, έπεται ότι

$$\varphi_\lambda(u) \leqslant \varphi_0(u). \tag{3.18}$$

Τότε έχουμε $s(u;\lambda) \geqslant 2c_0u - c_0Bu^{\varepsilon+1} - 2\varphi_0(u)$, από την οποία έπεται ότι $s(1;\lambda) \geqslant 2c_0 - c_0B - 2\varphi_0(1) > 0$. Τώρα, εάν, σύμφωνα με την (A3), η $\varphi_\lambda(u)$ είναι κυρτή και επειδή η $2c_0u - c_0Bu^{\varepsilon+1}$ είναι γνησίως κοίλη, έχουμε ότι η $s(u;\lambda)$ είναι κοίλη. Η κοιλότητά της εξασφαλίζει ότι έχει μία μόνον αλλαγή προσήμου. Εάν, από την άλλη πλευρά, η $\varphi_\lambda(u)$ είναι φθίνουσα τότε η $s(u;\lambda)$ είναι η διαφορά μεταξύ της γνησίως κοίλης συνάρτησης $2c_0u - c_0Bu^{\varepsilon+1}$ και της φθίνουσας συνάρτησης $2\varphi_\lambda(u)$. Τότε η $s(u;\lambda)$ θα έχει μία μόνον αλλαγή προσήμου εφ' όσον δείξουμε ότι $2\varphi_\lambda(0) < (2c_0u - c_0Bu^{\varepsilon+1})\,|_{u=1}= 2c_0 - c_0B$. Η τελευταία ανισότητα ισχύει επειδή, από την (3.18), $\varphi_\lambda(0) \leqslant \varphi_0(0)$ και $B < 2 - 2\varphi_0(0)/c_0$. □

Παρατήρηση 3.3. Σημειώνουμε ότι, σε τυπικές περιπτώσεις, $\varphi_0(1) < c_0$. Όντως, αυτό ισχύει υπό τη συνθήκη ΜΛΠ ότι η $h(c_1x)/h(c_2x)$ είναι γνησίως αύξουσα ως προς $x > 0$ για $0 < c_1 < c_2$. Επί πλέον, εάν η (A3) ικανοποιείται με την $\varphi_\lambda(u)$ να είναι κυρτή τότε η σχέση $B < 2-2\varphi_0(1)/c_0$ αρκεί ώστε να ισχύει το Λήμμα 3.2.

Το επόμενο θεώρημα αποδεικνύει την ανωτερότητα του εκτιμητή τύπου Strawderman δ_φ στην (3.3) ως προς τον κλασικό εκτιμητή δ_0 στην (3.2) και επεκτείνει το Θεώρημα 1 του Strawderman (1974) και το Θεώρημα 2.1 των Maruyama and Strawderman (2006). Όπως και με το Θεώρημα 3.1, η μέθοδός μας είναι να εργασθούμε απευθείας με τη διαφορά των μέσων τετραγωνικών ζημιών μεταξύ των δ_0 και δ_φ. Σημειώνουμε ότι στην περίπτωση της κανονικής κατανομής, ο Strawderman (1974) και οι Maruyama and Strawderman (2006) κατέληξαν στο αποτέλεσμα δείχνοντας ότι η δεσμευμένη μέση τετραγωνική ζημία του δ_0 δοθείσης μιας βοηθητικής Poisson τυχαίας μεταβλητής L είναι μεγαλύτερη ή ίση εκείνης του δ_φ για κάθε $L = 0, 1, \ldots$.

Θεώρημα 3.3. *Έστω ότι (A1), (A2), (A3) ισχύουν και* $\max\{\varphi_0(0), \varphi_0(1)\} < c_0$. *Τότε η μέση τετραγωνική ζημία του* δ_φ *στην* (3.3) *είναι μικρότερη ή ίση από αυτήν του* δ_0 *στην* (3.2) *εάν η συνάρτηση* $\varphi(w)$ *ικανοποιεί, για κάποιο* $\varepsilon > 0$,

(ST1) $(1+w)^\varepsilon\varphi(w)$ *είναι φθίνουσα στο* $(0,\infty)$,

(ST2) $0 \leqslant \varphi(w) \leqslant B(\varepsilon)$ *για* $w > 0$,

όπου $B(\varepsilon) = \min\left\{2 - 2\max\{\varphi_0(0), \varphi_0(1)\}/c_0, B_0(\varepsilon)\right\}$. *Επί πλέον, εάν αντί της (ST2) ισχύει* $0 < \lim_{w\to 0^+}\varphi(w) < B(\varepsilon)$, *τότε η μέση τετραγωνική ζημία του* δ_φ *είναι αυστηρά μικρότερη από αυτήν του* δ_0.

Απόδειξη. Αποδεικνύουμε το αποτέλεσμα δείχνοντας ότι η διαφορά των μέσων τετραγωνικών ζημιών μεταξύ των δ_0 και δ_φ φράσσεται από κάτω από ένα θετικό πολλαπλάσιο της διαφοράς των μέσων τετραγωνικών ζημιών μεταξύ των δ_0 και $\delta^{(r)}$, για κάποιο r που θα προσδιοριστεί, και επικαλούμενοι στη συνέχεια το Θεώρημα 3.1. Έστω $RD = \mathsf{E}(\delta_0/\sigma-1)^2 - \mathsf{E}(\delta_\varphi/\sigma - 1)^2$. Τότε λόγω της μορφής των δ_0 και δ_φ έχουμε

$$RD = \mathsf{E}\left[\left\{c_0\frac{\psi(W)}{(1+W)^\varepsilon}\frac{S}{\sigma}\right\}\left\{2c_0\frac{S}{\sigma} - c_0\frac{\psi(W)}{(1+W)^\varepsilon}\frac{S}{\sigma} - 2\right\}I(W>0)\right],$$

όπου $\psi(w) = (1+w)^\varepsilon\varphi(w)$. Από την (ST1), η $\psi(w)$ είναι φθίνουσα και συνεπώς

$$0 \leqslant \psi(w) \leqslant \lim_{w\to 0^+}\psi(w) = \lim_{w\to 0^+}\varphi(w) = B. \tag{3.19}$$

Επομένως, έχουμε

$$
\begin{aligned}
RD &\geqslant \mathsf{E}\Big[\Big\{c_0\frac{\psi(W)}{(1+W)^\varepsilon}\frac{S}{\sigma}\Big\}\Big\{2c_0\frac{S}{\sigma}-c_0\frac{B}{(1+W)^\varepsilon}\frac{S}{\sigma}-2\Big\}I(W>0)\Big]\\
&=\int_0^\infty\int_0^\infty\Big\{c_0\frac{\psi(w)}{(1+w)^\varepsilon}y\Big\}\Big\{2c_0y-c_0\frac{B}{(1+w)^\varepsilon}y-2\Big\}\\
&\qquad\times yg(y)h(wy;\lambda)I(wy>\kappa(\lambda))dydw.
\end{aligned}
$$

Με αλλαγή των μεταβλητών $u=1/(1+w)$ και $v=(1+w)y$ παίρνουμε

$$
\begin{aligned}
RD &\geqslant \int_0^1 c_0\psi\Big(\frac{1-u}{u}\Big)u^{\varepsilon+1}\int_\alpha^\infty\Big\{2c_0uv^3-c_0Bu^{\varepsilon+1}v^3-2v^2\Big\}\\
&\qquad\times g(uv)h((1-u)v;\lambda)dvdu\\
&=\int_0^1 c_0\psi\Big(\frac{1-u}{u}\Big)u^{\varepsilon+1}\int_\alpha^\infty v^3g(uv)h((1-u)v;\lambda)dv\\
&\qquad\times\Big\{2c_0u-c_0Bu^{\varepsilon+1}-2\varphi_\lambda(u)\Big\}\,du.
\end{aligned}\tag{3.20}
$$

Από τις (3.19) και (ST2) έπεται ότι $B\leqslant 2-2\max\{\varphi_0(0),\varphi_0(1)\}/c_0$. Συνεπώς, το Λήμμα 3.2 εξασφαλίζει ότι η $2c_0u-c_0Bu^{\varepsilon+1}-2\varphi_\lambda(u)$ έχει μία μόνον αλλαγή προσήμου από αρνητική σε θετική. Επειδή η $\psi(\frac{1-u}{u})$ είναι αύξουσα, από το Λήμμα A.1 και την (3.20) συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $0<u_0<1$ τέτοιο ώστε

$$
\begin{aligned}
RD &\geqslant c_0\psi\Big(\frac{1-u_0}{u_0}\Big)\int_0^1 u^{\varepsilon+1}\int_\alpha^\infty v^3g(uv)h((1-u)v;\lambda)dv\\
&\qquad\times\Big\{2c_0u-c_0Bu^{\varepsilon+1}-2\varphi_\lambda(u)\Big\}\,du\\
&=c_0\psi\Big(\frac{1-u_0}{u_0}\Big)\Big\{2c_0\int_0^1 u^{\varepsilon+2}\int_\alpha^\infty v^3g(uv)h((1-u)v;\lambda)dvdu\\
&\qquad-c_0B\int_0^1 u^{2\varepsilon+2}\int_\alpha^\infty v^3g(uv)h((1-u)v;\lambda)dvdu\\
&\qquad-2\int_0^1 u^{\varepsilon+1}\int_\alpha^\infty v^2g(uv)h((1-u)v;\lambda)dvdu\Big\}.
\end{aligned}\tag{3.21}
$$

Συγκρίνοντας με την (3.7), βλέπουμε ότι η (3.21) γίνεται $RD\geqslant r^{-1}\psi(\frac{1-u_0}{u_0})RD(\delta_0,\delta^{(r)})$ με $r=B$. Επομένως, το αποτέλεσμα έπεται άμεσα από το Θεώρημα 3.1 αφού $B\leqslant B_0(\varepsilon)$. □

3.2 Εκτίμηση ως προς τη συνάρτηση ζημίας εντροπίας

Εδώ, βασιζόμενοι στα δεδομένα (S,X) που δίνονται στην (3.1) θέλουμε να εκτιμήσουμε το σ ως προς τη συνάρτηση ζημίας εντροπίας $L_2(\delta,\sigma)=\delta/\sigma-\ln\delta/\sigma-1$. Μεταξύ των εκτιμητών της μορφής cS, $c>0$, ο καλύτερος είναι

$$
\delta_0=c_0S,\quad c_0=\frac{1}{\int_0^\infty vg(v)dv}.\tag{3.22}
$$

Υποθέτουμε ότι το c_0 είναι καλά ορισμένο. Όπως και στην προηγούμενη ενότητα, στόχος μας είναι να βελτιώσουμε τον δ_0 με εκτιμητές τύπου Strawderman δ_φ της μορφής (3.3), όπου η $\varphi(w)$

ικανοποιεί τις συνθήκες τύπου Strawderman, ή $\delta^{(r)}$ της μορφής (3.4). Το άνω φράγμα $B(\varepsilon)$ θα καθορισθεί στη συνέχεια. Αρχίζουμε και πάλι τη μελέτη με τους εκτιμητές $\delta^{(r)}$. Έστω ότι α είναι όπως στην (3.5). Το επόμενο αποτέλεσμα αποδεικνύει ότι ο εκτιμητής τύπου Strawderman $\delta^{(r)}$ είναι καλύτερος από τον κλασικό εκτιμητή δ_0, παρέχοντας συνεπώς μία πολύ απλή κλάση βελτιωμένων εκτιμητών για το σ.

Θεώρημα 3.4. *Έστω ότι οι (A1) και (A2) ισχύουν. Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$, η μέση ζημία εντροπίας του $\delta^{(r)}$ στην* (3.4) *είναι αυστηρά μικρότερη (αντίστοιχα, μικρότερη ή ίση) από αυτήν του δ_0 στην* (3.22) *εάν $0 < r <$ (αντίστοιχα, $\leqslant$)$B_0(\varepsilon)$, όπου*

$$B_0(\varepsilon) = \left\{1 + \left[2\frac{\int_0^1 u^\varepsilon \int_0^\infty vg(uv)h((1-u)v)dvdu}{\int_0^1 u^{2\varepsilon} \int_0^\infty vg(uv)h((1-u)v)dvdu} \times \left(c_0\frac{\int_0^1 u^{\varepsilon+1} \int_0^\infty v^2g(uv)h((1-u)v)dvdu}{\int_0^1 u^\varepsilon \int_0^\infty vg(uv)h((1-u)v)dvdu} - 1\right)\right]^{-1}\right\}^{-1}. \tag{3.23}$$

Απόδειξη. Έστω $RD(\delta_0, \delta^{(r)}) = \mathsf{E}(\delta_0/\sigma - \ln\delta_0/\sigma - 1) - \mathsf{E}(\delta^{(r)}/\sigma - \ln\delta^{(r)}/\sigma - 1)$. Λόγω της μορφής των δ_0 και $\delta^{(r)}$ έχουμε

$$\begin{aligned} RD(\delta_0, \delta^{(r)}) &= \mathsf{E}\left[\left\{c_0\frac{r}{(1+W)^\varepsilon}\frac{S}{\sigma} + \ln(1 - \frac{r}{(1+W)^\varepsilon})\right\}I(W>0)\right] \\ &= r\int_0^\infty \int_0^\infty \left\{c_0\frac{y}{(1+w)^\varepsilon} + \frac{1}{r}\ln(1 - \frac{r}{(1+w)^\varepsilon})\right\} \\ &\qquad \times yg(y)h(wy;\lambda)I(wy > \kappa(\lambda))dydw. \end{aligned}$$

Με αλλαγή των μεταβλητών $u = 1/(1+w)$ και $v = (1+w)y$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} RD(\delta_0, \delta^{(r)}) &= r\int_0^1 \int_\alpha^\infty \left\{c_0u^{\varepsilon+1}v + \frac{\ln(1-ru^\varepsilon)}{r}\right\}vg(uv)h((1-u)v;\lambda)dvdu \\ &= r\left\{c_0\int_0^1 u^{\varepsilon+1}\int_\alpha^\infty v^2g(uv)h((1-u)v;\lambda)dvdu \right. \\ &\qquad \left. + \int_0^1 \frac{\ln(1-ru^\varepsilon)}{r}\int_\alpha^\infty vg(uv)h((1-u)v;\lambda)dvdu\right\}. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Επειδή $\ln(1-x) \geqslant -x - x^2/\big(2(1-x)\big)$, η (3.24) δίνει

$$\begin{aligned} RD(\delta_0, \delta^{(r)}) \geqslant r\left\{c_0\int_0^1 u^{\varepsilon+1}\int_\alpha^\infty v^2g(uv)h((1-u)v;\lambda)dvdu \right. \\ \left. - \int_0^1 \left(u^\varepsilon + \frac{ru^{2\varepsilon}}{2(1-r)}\right)\int_\alpha^\infty vg(uv)h((1-u)v;\lambda)dvdu\right\}. \end{aligned}$$

Έτσι, $RD(\delta_0, \delta^{(r)}) \geqslant 0$ εάν

$$\begin{aligned} r \leqslant \left\{1 + \frac{1}{2}\int_0^1 u^{2\varepsilon}\int_\alpha^\infty vg(uv)h((1-u)v;\lambda)dvdu \right. \\ \times \left\{c_0\int_0^1 u^{\varepsilon+1}\int_\alpha^\infty v^2g(uv)h((1-u)v;\lambda)dvdu \right. \end{aligned}$$

$$- \int_0^1 u^\varepsilon \int_\alpha^\infty vg(uv)h((1-u)v;\lambda)dvdu\Big\}^{-1}\Big\}^{-1}$$

$$= B(\varepsilon;\lambda). \tag{3.25}$$

Η απόδειξη θα ολοκληρωθεί εάν δείξουμε ότι $B_0(\varepsilon) \leqslant B(\varepsilon;\lambda)$. Από την (3.25) μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{1}{B(\varepsilon,\lambda)} = 1 + \frac{1}{2I_3(\varepsilon,\lambda)\{c_0 I_4(\varepsilon,\lambda)-1\}},$$

όπου

$$I_3(\varepsilon,\lambda) = \frac{\int_0^1 u^\varepsilon \int_\alpha^\infty vg(uv)h((1-u)v;\lambda)dvdu}{\int_0^1 u^{2\varepsilon} \int_\alpha^\infty vg(uv)h((1-u)v;\lambda)dvdu}$$

και

$$I_4(\varepsilon,\lambda) = \frac{\int_0^1 u^{\varepsilon+1} \int_\alpha^\infty v^2 g(uv)h((1-u)v;\lambda)dvdu}{\int_0^1 u^{\varepsilon} \int_\alpha^\infty vg(uv)h((1-u)v;\lambda)dvdu}.$$

Με ανάλογο τρόπο όπως στην απόδειξη των (3.10), (3.11) και (3.14), μπορεί να δειχθεί ότι $I_3(\varepsilon,\lambda) \geqslant I_3(\varepsilon;0)$, $I_4(\varepsilon,\lambda) \geqslant I_4(\varepsilon;0)$ και $I_4(\varepsilon;0) > c_0^{-1}$, αντίστοιχα. Συνεπώς,

$$B(\varepsilon,\lambda) \geqslant \Big\{1 + \frac{1}{2I_3(\varepsilon;0)\big(c_0 I_4(\varepsilon;0)-1\big)}\Big\}^{-1} = B_0(\varepsilon).$$

□

Παρατήρηση 3.4. Σημειώνεται ότι ο $\delta^{(r)}$ είναι τόσο «λείος» (smooth) όσο και ο αντίστοιχος εκτιμητής τύπου Brewster and Zidek και συνεπώς πιο «λείος» από τον εκτιμητή τύπου Stein.

Παρατήρηση 3.5. Σημειώνεται ότι ανάλογα αποτελέσματα με αυτά των Παραδειγμάτων 3.1, 3.2 και 3.3 προκύπτουν και στην περίπτωση της συνάρτησης ζημίας εντροπίας.

Στη συνέχεια μελετούμε την (γενική) κλάση των εκτιμητών τύπου Strawderman δ_φ που δίνονται στην (3.3). Με α όπως στην (3.5), θέτουμε

$$\varphi_\lambda(u) = \frac{\int_\alpha^\infty vg(uv)h((1-u)v;\lambda)dv}{\int_\alpha^\infty v^2 g(uv)h((1-u)v;\lambda)dv}, \quad 0 \leqslant u \leqslant 1, \tag{3.26}$$

όπου $\varphi_\lambda(0) = \lim_{u\to 0^+}\varphi_\lambda(u)$ και $\varphi_\lambda(1) = \lim_{u\to 1^-}\varphi_\lambda(u)$. Προφανώς, $\varphi_\lambda(u) \geqslant 0$ αλλά υποθέτουμε ότι $\varphi_\lambda(0) > 0$. Επίσης, υποθέτουμε ότι η $\varphi_\lambda(u)$ είναι συνεχής. Θέτουμε $\varphi_0(u) = \varphi_{\lambda_0}(u)$.

Για να αποδείξουμε ότι ο δ_φ είναι καλύτερος από τον δ_0 χρειαζόμαστε τα ακόλουθα προκαταρκτικά αποτελέσματα. Επειδή η $b(x) = -x/\ln(1-x)$ για $0 < x < 1$ είναι γνησίως φθίνουσα με $\lim_{x\to 0^+} b(x) = 1$ και $\lim_{x\to 1^-} b(x) = 0$, η εξίσωση $-x/\ln(1-x) = \max\{\varphi_0(0),\varphi_0(1)\}/c_0$ έχει μία μοναδική λύση, την οποία συμβολίζουμε ως B_*, όταν $\max\{\varphi_0(0),\varphi_0(1)\} < c_0$.

Λήμμα 3.5. *Έστω $0 < B < 1$ και $\varepsilon > 0$. Τότε η συνάρτηση $f(u) = -Bu^{\varepsilon+1}/\ln(1-Bu^\varepsilon)$ είναι γνησίως κοίλη για $0 < u < 1$.*

Απόδειξη. Επειδή $\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty} x^k/k$, $0<x<1$, έχουμε

$$f(u) = \frac{Bu^{\varepsilon+1}}{\sum_{k=1}^{\infty}(Bu^{\varepsilon})^k/k},$$

έτσι ώστε

$$f'(u) = \frac{(\varepsilon+1)Bu^{\varepsilon}\sum_{k=1}^{\infty}(Bu^{\varepsilon})^k/k - \varepsilon(Bu^{\varepsilon})^2\sum_{k=1}^{\infty}(Bu^{\varepsilon})^{k-1}}{\Big[\sum_{k=1}^{\infty}(Bu^{\varepsilon})^k/k\Big]^2}. \tag{3.27}$$

Θέτοντας $x = Bu^{\varepsilon}$ μελετούμε τη συνάρτηση

$$f_1(x) = \frac{(\varepsilon+1)x\sum_{k=1}^{\infty}x^k/k - \varepsilon x^2\sum_{k=1}^{\infty}x^{k-1}}{\Big[\sum_{k=1}^{\infty}x^k/k\Big]^2} = \frac{\sum_{k=2}^{\infty}a_k x^k}{\sum_{k=2}^{\infty}b_k x^k},$$

όπου $a_k = \big(1-(k-2)\varepsilon\big)/(k-1)$ και $b_k = \sum_{n=1}^{k-1}1/\big(n(k-n)\big) = (2/k)\sum_{n=1}^{k-1}1/n$, $k = 2,3,\dots$. Θα αποδείξουμε ότι η $f_1(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα εφαρμόζοντας το Λήμμα Α.3. Προς αυτή την κατεύθυνση, θα δείξουμε ότι $a_k b_{k+1} > a_{k+1}b_k$, $k=2,3,\dots$, ή, ισοδύναμα, ότι $\big\{kb_{k+1}-(k-1)b_k\big\} + \big\{(k-1)^2 b_k - k(k-2)b_{k+1}\big\}\varepsilon > 0$, το οποίο ισχύει καθώς και οι δύο ποσότητες στα άγκιστρα αποδεικνύονται πολύ εύκολα ότι είναι θετικές. Συνεπώς, η $f'(u)$ είναι γνησίως φθίνουσα και άρα η $f(u)$ είναι γνησίως κοίλη. □

Λήμμα 3.6. *Έστω ότι οι (A1), (A3) ισχύουν και* $\max\{\varphi_0(0),\varphi_0(1)\} < c_0$. *Τότε για* $\varepsilon>0$ *και* $0<B<1$, *η συνάρτηση* $-c_0Bu^{\varepsilon+1}/\ln(1-Bu^{\varepsilon}) - \varphi_\lambda(u)$, $0<u\leqslant 1$, *έχει μία μόνον αλλαγή προσήμου από αρνητική σε θετική για κάθε* λ *και για κάθε* $0<B<B_*$.

Απόδειξη. Έστω $s(u;\lambda) = -c_0Bu^{\varepsilon+1}/\ln(1-Bu^{\varepsilon}) - \varphi_\lambda(u)$. Αρχικά αποδεικνύουμε ότι η $s(u;\lambda)$ έχει τουλάχιστον μία αλλαγή προσήμου αρχίζοντας αρνητική και καταλήγοντας θετική. Προς αυτή την κατεύθυνση, παρατηρούμε πρώτα ότι

$$\lim_{u\to 0^+} s(u;\lambda) = -\varphi_\lambda(0) < 0. \tag{3.28}$$

Με ανάλογο τρόπο όπως και στην απόδειξη του Λήμματος 3.2, παίρνουμε

$$s(1;\lambda) \geqslant -\frac{c_0B}{\ln(1-B)} - \varphi_0(1) > 0.$$

Τώρα, εάν, σύμφωνα με την (A3), η $\varphi_\lambda(u)$ είναι κυρτή και επειδή η $-c_0Bu^{\varepsilon+1}/\ln(1-Bu^{\varepsilon})$ είναι γνησίως κοίλη, έχουμε ότι η $s(u;\lambda)$ είναι κοίλη. Η κοιλότητά της εξασφαλίζει ότι έχει μία μόνον αλλαγή προσήμου. Εάν, από την άλλη πλευρά, η $\varphi_\lambda(u)$ είναι φθίνουσα τότε η $s(u;\lambda)$ είναι η διαφορά μεταξύ της γνησίως κοίλης συνάρτησης $-c_0Bu^{\varepsilon+1}/\ln(1-Bu^{\varepsilon})$ και της φθίνουσας συνάρτησης $\varphi_\lambda(u)$. Τότε η $s(u;\lambda)$ θα έχει μία μόνον αλλαγή προσήμου εάν δείξουμε ότι $\varphi_\lambda(0) < -c_0Bu^{\varepsilon+1}/\ln(1-Bu^{\varepsilon})\mid_{u=1} = -c_0B/\ln(1-B)$. Η τελευταία ανισότητα ισχύει επειδή, από την ανάλογη σχέση της (3.18), $\varphi_\lambda(0)\leqslant\varphi_0(0)$ και $B<B_*$. □

Παρατήρηση 3.6. Σημειώνουμε ότι, σε τυπικές περιπτώσεις, $\varphi_0(1)<c_0$. Όντως, αυτό ισχύει υπό τη συνθήκη ΜΛΠ ότι η $h(c_1x)/h(c_2x)$ είναι γνησίως αύξουσα ως προς $x>0$ για $0<c_1<c_2$. Επί πλέον, εάν η (A3) ικανοποιείται με την $\varphi_\lambda(u)$ να είναι κυρτή τότε η σχέση $B<B_*$, με B_* τη μοναδική λύση της εξίσωσης $-x/\ln(1-x) = \varphi_0(1)/c_0$ αρκεί ώστε να ισχύει το Λήμμα 3.6.

Το επόμενο θεώρημα αποδεικνύει ότι ο εκτιμητής τύπου Strawderman δ_φ στην (3.3) είναι καλύτερος από τον κλασικό εκτιμητή δ_0 στην (3.22). Το θεώρημα αυτό επεκτείνει το Θεώρημα 2.2 των Maruyama and Strawderman (2006).

Θεώρημα 3.7. *Έστω ότι (A1), (A2), (A3) ισχύουν και* $\max\{\varphi_0(0), \varphi_0(1)\} < c_0$. *Τότε η μέση ζημία εντροπίας του* δ_φ *στην* (3.3) *είναι μικρότερη ή ίση από αυτήν του* δ_0 *στην* (3.22) *εάν η συνάρτηση* $\varphi(w)$ *ικανοποιεί, για κάποιο* $\varepsilon > 0$,

(ST1) $(1+w)^\varepsilon \varphi(w)$ *είναι φθίνουσα στο* $(0, \infty)$,

(ST2) $0 \leqslant \varphi(w) \leqslant B(\varepsilon)$ *για* $w > 0$,

όπου $B(\varepsilon) = \min\big\{B_*, B_0(\varepsilon)\big\}$. *Επί πλέον, εάν αντί της (ST2) ισχύει* $0 < \lim_{w\to 0^+} \varphi(w) < B(\varepsilon)$, *τότε η μέση ζημία εντροπίας του* δ_φ *είναι αυστηρά μικρότερη από αυτήν του* δ_0.

Απόδειξη. Έστω $RD = \mathsf{E}(\delta_0/\sigma - \ln\delta_0/\sigma - 1) - \mathsf{E}(\delta_\varphi/\sigma - \ln\delta_\varphi/\sigma - 1)$. Τότε λόγω της μορφής των δ_0 και δ_φ έχουμε

$$RD = \mathsf{E}\Big[\Big\{c_0\frac{\psi(W)}{(1+W)^\varepsilon}\frac{S}{\sigma} + \ln(1 - \frac{\psi(W)}{(1+W)^\varepsilon})\Big\}I(W>0)\Big],$$

όπου $\psi(w) = (1+w)^\varepsilon\varphi(w)$. Από την (ST1), η $\psi(w)$ είναι φθίνουσα και συνεπώς

$$0 \leqslant \psi(w) \leqslant \lim_{w\to 0^+}\psi(w) = \lim_{w\to 0^+}\varphi(w) = B. \tag{3.29}$$

Άρα, χρησιμοποιώντας ότι η $x^{-1}\ln(1-x)$ για $0 < x < 1$ είναι φθίνουσα, παίρνουμε

$$\begin{aligned}RD &\geqslant \mathsf{E}\Big[\psi(W)\Big\{c_0\frac{1}{(1+W)^\varepsilon}\frac{S}{\sigma} + \frac{1}{B}\ln(1 - \frac{B}{(1+W)^\varepsilon})\Big\}I(W>0)\Big]\\ &= \int_0^\infty\int_0^\infty \psi(w)\Big\{c_0\frac{y}{(1+w)^\varepsilon} + \frac{1}{B}\ln(1-\frac{B}{(1+w)^\varepsilon})\Big\}\\ &\qquad\times yg(y)h(wy;\lambda)I(wy > \kappa(\lambda))dydw.\end{aligned}$$

Με αλλαγή των μεταβλητών $u = 1/(1+w)$ και $v = (1+w)y$ προκύπτει

$$\begin{aligned}RD &\geqslant \int_0^1 \psi\Big(\frac{1-u}{u}\Big)\Big\{c_0u^{\varepsilon+1}\int_\alpha^\infty v^2g(uv)h((1-u)v;\lambda)dv\\ &\qquad + \frac{1}{B}\ln(1-Bu^\varepsilon)\int_\alpha^\infty vg(uv)h((1-u)v;\lambda)dv\Big\}du\\ &= \int_0^1 \psi\Big(\frac{1-u}{u}\Big)\Big[-\frac{\ln(1-Bu^\varepsilon)}{B}\Big]\int_\alpha^\infty v^2g(uv)h((1-u)v;\lambda)dv\\ &\qquad\times\Big\{-\frac{c_0Bu^{\varepsilon+1}}{\ln(1-Bu^\varepsilon)} - \frac{\int_\alpha^\infty vg(uv)h((1-u)v;\lambda)dv}{\int_\alpha^\infty v^2g(uv)h((1-u)v;\lambda)dv}\Big\}du.\end{aligned} \tag{3.30}$$

Από τις (3.29) και (ST2) έπεται ότι $B \leqslant B_*$. Συνεπώς, το Λήμμα 3.6 εξασφαλίζει ότι η $-c_0Bu^{\varepsilon+1}/\ln(1-Bu^\varepsilon) - \varphi_\lambda(u)$ έχει μία μόνον αλλαγή προσήμου από αρνητική σε θετική. Επειδή η $\psi(\frac{1-u}{u})$ είναι αύξουσα, από το Λήμμα A.1 και την (3.30) συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $0 < u_0 < 1$ τέτοιο ώστε

$$RD \geqslant \psi\Big(\frac{1-u_0}{u_0}\Big)\int_0^1\Big[-\frac{\ln(1-Bu^\varepsilon)}{B}\Big]\int_\alpha^\infty v^2g(uv)h((1-u)v;\lambda)dv$$

$$\begin{aligned}
&\times \left\{ -\frac{c_0 B u^{\varepsilon+1}}{\ln(1-Bu^{\varepsilon})} - \frac{\int_\alpha^\infty v g(uv)h((1-u)v;\lambda)dv}{\int_\alpha^\infty v^2 g(uv)h((1-u)v;\lambda)dv} \right\} du \\
&= \psi\Big(\frac{1-u_0}{u_0}\Big)\bigg\{ \int_0^1 c_0 u^{\varepsilon+1} \int_\alpha^\infty v^2 g(uv)h((1-u)v;\lambda)dv \\
&\quad + \int_0^1 \frac{\ln(1-Bu^{\varepsilon})}{B} \int_\alpha^\infty v g(uv)h((1-u)v;\lambda)dvdu \bigg\}. \qquad (3.31)
\end{aligned}$$

Συγκρίνοντας με την (3.24), βλέπουμε ότι η (3.31) γίνεται $RD \geqslant r^{-1}\psi(\frac{1-u_0}{u_0})RD(\delta_0, \delta^{(r)})$ με $r = B$. Επομένως, το αποτέλεσμα έπεται άμεσα από το Θεώρημα 3.4 αφού $B \leqslant B_0(\varepsilon)$. □

3.3 Η εκθετική κατανομή $E(\mu, \sigma)$

Εδώ, εφαρμόζουμε τα αποτελέσματα των Ενοτήτων 3.1, 3.2 στην εκθετική κατανομή. Έστω $X_1, \dots, X_n$, $n \geqslant 2$, τυχαίο δείγμα από μία διπαραμετρική εκθετική κατανομή $E(\mu, \sigma)$ με πυκνότητα που δίνεται από τη σχέση

$$f(x;\mu,\sigma) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma}\exp\Big\{-\dfrac{1}{\sigma}(x-\mu)\Big\} & \text{εάν } x > \mu, \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Η παράμετρος θέσης μ και η παράμετρος κλίμακας σ είναι άγνωστες με $-\infty < \mu < +\infty$ και $\sigma > 0$. Η ελάχιστη επαρκής στατιστική συνάρτηση για αυτό το μοντέλο είναι $(S, X_{(1)})$, όπου $S = \sum_{i=1}^n (X_i - X_{(1)})$ και $X_{(1)} = \min\{X_1, \dots, X_n\}$. Στην περίπτωση αυτή, S και $X = nX_{(1)}$ είναι ανεξάρτητα με πυκνότητες $G(n-1, \sigma)$ (γάμμα) και $E(n\mu, \sigma)$, αντίστοιχα. Οπότε, σύμφωνα με την (3.1) έχουμε

$$g(v) = \frac{1}{(n-2)!} v^{n-2} e^{-v},\ v > 0, \qquad h(x;\lambda) = e^{-(x-n\mu/\sigma)},\ x > \frac{n\mu}{\sigma}, \tag{3.32}$$

$\lambda = n\mu/\sigma$, $\kappa(\lambda) = \lambda$ και $\lambda_0 = 0$. Επίσης, $h(x) = h(x;0) = e^{-x}$, $x > 0$ και $W = nX_{(1)}/S$. Στη συνέχεια μελετούμε το πρόβλημα εκτίμησης του σ ως προς την τετραγωνική συνάρτηση ζημίας L_1 και τη συνάρτηση ζημίας εντροπίας L_2.

3.3.1 Εκτίμηση του σ ως προς την τετραγωνική συνάρτηση ζημίας

Από τις (3.2) και (3.32) έχουμε $c_0 = 1/n$ και $\delta_0 = S/n$. Ο εκτιμητής τύπου Stein και ο εκτιμητής τύπου Brewster and Zidek του σ είναι, αντίστοιχα,

$$\delta_S = \{1 - \varphi_S(W)\}S/n \quad \text{και} \quad \delta_{BZ} = \{1 - \varphi_{BZ}(W)\}S/n, \tag{3.33}$$

όπου

$$\varphi_S(W) = \begin{cases} \max\Big\{0, \dfrac{1-nW}{n+1}\Big\} & \text{εάν } W > 0, \\ 0 & \text{διαφορετικά,} \end{cases}$$

και

$$\varphi_{BZ}(W) = \begin{cases} \dfrac{W}{(1+W)^{n+1}-1} & \text{εάν } W > 0, \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Οι βελτιωμένοι εκτιμητές δ_S, δ_{BZ} έχουν τη μορφή του δ_φ στην (3.3) αλλά ικανοποιούν τις συνθήκες Brewster and Zidek

(BZ1) $\varphi(w)$ είναι φθίνουσα στο $(0,\infty)$,

(BZ2) $0 \leqslant \varphi(w) \leqslant \varphi_{BZ}(w)$ για $w > 0$.

Επαληθεύουμε τις (A1), (A2) και (A3) και βρίσκουμε τους εκτιμητές τύπου Strawderman. Οι δύο πρώτες συνθήκες είναι γνωστό ότι ισχύουν (και απλό να δειχθούν). Θα αποδείξουμε τώρα την (A3). Θεωρούμε πρώτα $\mu \leqslant 0$. Τότε, από τις (3.5) και (3.32) παίρνουμε $\alpha = 0$ και συνεπώς η (3.16) δίνει $\varphi_\lambda(u) = 1/(n+1)$, $0 \leqslant u \leqslant 1$, οπότε η (A3) ισχύει τετριμμένα. Από την άλλη πλευρά, για $\mu > 0$, έχουμε $\alpha = n\mu/(1-u)\sigma$ και $\varphi_\lambda(u) = \int_\alpha^\infty v^n e^{-v}dv / \int_\alpha^\infty v^{n+1}e^{-v}dv$, $0 < u < 1$. Ο αριθμητής της παραγώγου της $\varphi_\lambda(u)$ ως προς u είναι

$$\left(\frac{n\mu}{\sigma}\right)^{n+1} e^{-n\mu/(1-u)\sigma}(1-u)^{-n-2}\int_{n\mu/(1-u)\sigma}^{\infty}\left(\frac{n\mu}{(1-u)\sigma} - v\right)v^n e^{-v}dv,$$

που είναι προφανώς αρνητικός. Επομένως, η $\varphi_\lambda(u)$ είναι γνησίως φθίνουσα, δηλαδή η (A3) ισχύει. Επί πλέον, η (3.6) δίνει

$$B_0(\varepsilon) = \frac{2\varepsilon(n+2\varepsilon+1)}{(n+1)(n+\varepsilon)(n+\varepsilon+1)},$$

ενώ $2 - 2\max\{\varphi_0(0), \varphi_0(1)\}/c_0 = 2 - 2(n+1)^{-1}/n^{-1} = 2/(n+1)$. Εφαρμόζοντας τώρα το Θεώρημα 3.1 έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 3.8. *Ο εκτιμητής*

$$\delta^{(r)} = \begin{cases} \{1 - r\,(1+W)^{-\varepsilon}\}S/n & \textit{εάν } W > 0, \\ S/n & \textit{διαφορετικά,} \end{cases}$$

για $\varepsilon > 0$ και $0 < r <$ (αντίστοιχα, $\leqslant$) $2\varepsilon(n+2\varepsilon+1)/[(n+1)(n+\varepsilon)(n+\varepsilon+1)]$ έχει μέση τετραγωνική ζημία αυστηρά μικρότερη (αντίστοιχα, μικρότερη ή ίση) από τον $\delta_0 = S/n$.

Παρατήρηση 3.7. Σημειώνουμε ότι, τουλάχιστον για $\varepsilon < n$, το ότι ο $\delta^{(r)}$ είναι καλύτερος από τον $\delta_0 = S/n$ δεν μπορεί να προκύψει από τις συνθήκες Brewster and Zidek επειδή για $w \to \infty$, $\varphi_{BZ}(w) = O(w^{-n})$ (βλέπε (3.33)) και $r\,(1+w)^{-\varepsilon} = O(w^{-\varepsilon})$, οπότε παραβιάζεται η (BZ2).

Από την άλλη πλευρά, εφαρμόζοντας το Θεώρημα 3.3 παίρνουμε νέες ικανές συνθήκες, τύπου Strawderman, ώστε ένας αναλλοίωτος κατά κλίμακα εκτιμητής να είναι καλύτερος από τον βέλτιστο αναλλοίωτο εκτιμητή $\delta_0 = S/n$.

Θεώρημα 3.9. *Ο εκτιμητής*

$$\delta_\varphi = \begin{cases} \{1-\varphi(W)\}S/n & \text{εάν } W > 0, \\ S/n & \text{διαφορετικά}, \end{cases}$$

έχει μέση τετραγωνική ζημία μικρότερη ή ίση από αυτήν του $\delta_0 = S/n$ εάν για κάποιο $\varepsilon > 0$,

(ST1) $(1+w)^\varepsilon \varphi(w)$ είναι φθίνουσα ως προς $w > 0$ και

(ST2) $0 \leqslant \varphi(w) \leqslant B(\varepsilon)$, όπου

$$B(\varepsilon) = \min\Big\{\frac{2}{n+1}, \frac{2\varepsilon(n+2\varepsilon+1)}{(n+1)(n+\varepsilon)(n+\varepsilon+1)}\Big\}. \tag{3.34}$$

Παρατήρηση 3.8. Επειδή ο S/n είναι minimax, το ίδιο ισχύει και για τους $\delta^{(r)}$ και δ_φ των Θεωρημάτων 3.8 και 3.9. Επίσης, ανάλογα αποτελέσματα όπως αυτά των Θεωρημάτων 3.8 και 3.9 μπορούν να εξαχθούν για την εκτίμηση του σ^m, $m > 0$.

Παρακινούμενοι από τους Maruyama and Strawderman (2006), προχωρούμε τώρα στην κατασκευή μιας κλάσης εκτιμητών οι οποίοι είναι γενικευμένοι Bayes όταν $S + X > 0$. Θα βρούμε στη συνέχεια μία υποκλάση αυτής της κλάσης της οποίας οι εκτιμητές ικανοποιούν τις (ST1) και (ST2) του Θεωρήματος 3.9 και συνεπώς είναι καλύτεροι από τον δ_0.

Θεωρούμε την ακόλουθη εκ των προτέρων κατανομή. Για $\eta = 1/\sigma$, έστω ότι η δεσμευμένη πυκνότητα του μ δοθέντων των η και τ, $0 < \tau < 1$, είναι ανάλογη του $e^{-n\eta\tau\mu}$ και έστω ότι η και τ είναι ανεξάρτητα με πυκνότητες ανάλογες των $\eta^a I(\eta > 0)$ και $\tau^a(1-\tau)^b I(0 < \tau < 1)$. Οπότε, η εκ των προτέρων πυκνότητα του (μ, η) είναι ανάλογη του $\eta^a \int_0^1 e^{-n\eta\tau\mu}\, \tau^a(1-\tau)^b d\tau$, ενώ η πυκνότητα του (μ, η, S, X) δίνεται από τη σχέση

$$\pi(\mu,\eta,s,x) \propto \eta^{a+n} s^{n-2} e^{-\eta(s+x-n\mu)} \int_0^1 e^{-n\eta\tau\mu}\, \tau^a(1-\tau)^b d\tau,$$

όπου $-\infty < \mu < \infty$, $\eta > 0$, $s > 0$, $x > n\mu$. Συνεπώς, η πυκνότητα του (η, S, X) είναι

$$\begin{aligned}\pi(\eta,s,x) &\propto \eta^{a+n} s^{n-2} e^{-\eta(s+x)} \int_0^1 \tau^a(1-\tau)^b \int_{-\infty}^{x/n} e^{n\eta(1-\tau)\mu} d\mu d\tau \\ &\propto \eta^{a+n-1} s^{n-2} e^{-\eta s} \int_0^1 e^{-\eta\tau x} \tau^a (1-\tau)^{b-1} d\tau.\end{aligned}$$

Ο γενικευμένος εκτιμητής Bayes του σ ως προς την τετραγωνική συνάρτηση ζημίας L_1 δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned}\delta_{GB} &= \frac{\mathsf{E}(\eta \mid S, X)}{\mathsf{E}(\eta^2 \mid S, X)} \\ &= \frac{\int_0^\infty \eta^{a+n} e^{-\eta S} \int_0^1 e^{-n\tau X}\, \tau^a(1-\tau)^{b-1} d\tau d\eta}{\int_0^\infty \eta^{a+n+1} e^{-\eta S} \int_0^1 e^{-n\tau X}\, \tau^a(1-\tau)^{b-1} d\tau d\eta} \\ &= \frac{\int_0^1 \tau^a(1-\tau)^{b-1} \int_0^\infty \eta^{a+n} e^{-\eta(S+\tau X)} d\eta d\tau}{\int_0^1 \tau^a(1-\tau)^{b-1} \int_0^\infty \eta^{a+n+1} e^{-\eta(S+\tau X)} d\eta d\tau}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{a+n+1} \frac{\int_0^1 \tau^a (1-\tau)^{b-1} (S+\tau X)^{-(a+n+1)} d\tau}{\int_0^1 \tau^a (1-\tau)^{b-1} (S+\tau X)^{-(a+n+2)} d\tau} \\
&= \frac{1}{a+n+1} \frac{\int_0^1 \tau^a (1-\tau)^{b-1} (1+\tau W)^{-(a+n+1)} d\tau}{\int_0^1 \tau^a (1-\tau)^{b-1} (1+\tau W)^{-(a+n+2)} d\tau} \, S,
\end{aligned}
$$

η οποία είναι καλά ορισμένη για $a > -1$, $b > 0$ και $S + X > 0$. Επί πλέον, για $W > 0$, κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $t = (1+W)\tau/(1+W\tau)$, έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
\delta_{GB} &= \frac{1}{a+n+1} \frac{\int_0^1 t^a (1-t)^{b-1} (1-\frac{W}{1+W} t)^{n-b} dt}{\int_0^1 t^a (1-t)^{b-1} (1-\frac{W}{1+W} t)^{n-b+1} dt} \, S \\
&= \frac{1}{n} \{1 - \varphi_{a,b}(W)\} S, \qquad (3.35)
\end{aligned}
$$

όπου η τελευταία ισότητα χρησιμοποιείται για τον ορισμό της $\varphi_{a,b}(w)$.

Έστω τώρα

$$
\delta_{a,b} = \begin{cases} \{1 - \varphi_{a,b}(W)\} S/n & \text{εάν } W > 0, \\ S/n & \text{διαφορετικά} \end{cases} \qquad (3.36)
$$

και ας θεωρήσουμε την κλάση των εκτιμητών του σ, $\{\delta_{a,b} : a > -1, b \geqslant 1\}$. Αρχικά συλλέγουμε ιδιότητες της συνάρτησης $\varphi_{a,b}(w)$ στην (3.35) που χρειάζονται για την εφαρμογή των (ST1) και (ST2) του Θεωρήματος 3.9. Αυτές προκύπτουν άμεσα από αντίστοιχα αποτελέσματα των Maruyama and Strawderman (2006). Πράγματι, για $m > 0$, $p > 0$, $a_1 > -p/2 - 1$, $b_1 > -1$, $w > 0$, έστω

$$
\begin{aligned}
\varphi_{MS}(w; m, p, a_1, b_1) &= \frac{1}{p + m + 2(a_1 + 2)} \\
&\times \frac{\int_0^1 t^{p/2+a_1} (1-t)^{b_1} \{1 - wt/(1+w)\}^{m/2-b_1} dt}{\int_0^1 t^{p/2+a_1} (1-t)^{b_1} \{1 - wt/(1+w)\}^{m/2-b_1+1} dt} \qquad (3.37)
\end{aligned}
$$

η συνάρτηση στη σχέση (9) των Maruyama and Strawderman (2006). Παρατηρούμε ότι η $\varphi_{a,b}(w)$ στην (3.35) μπορεί να εκφραστεί ως $\varphi_{a,b}(w) = 1 - 2n\varphi_{MS}(w; 2(n-1), p, a-p/2, b-1)$. Επομένως, από τους Maruyama and Strawderman (2006) και συγκεκριμένα, το Λήμμα 3.1, την εξίσωση μετά τη σχέση (11) και το Θεώρημα 3.3, έχουμε το εξής αποτέλεσμα.

Λήμμα 3.10. (i) *$\varphi_{a,b}(w)$ είναι φθίνουσα ως προς $w > 0$.*

(ii) *$\varphi_{a,b}(w)$ είναι αύξουσα ως προς a.*

(iii) *Εάν $w \to \infty$, τότε $\varphi_{a,1}(w) = O(w^{-n})$ και $\varphi_{a,b}(w) = O(w^{-1})$ για $b > 1$.*

(iv) *$\varphi_{a,b}(w) \leqslant (a+1)/(a+n+1)$,*

(v) *$(1+w)^{\varepsilon} \varphi_{a,b}(w)$ είναι φθίνουσα εάν*

(a) *$b = 1$, $\varepsilon < n$ και $a \leqslant -2 + n/\varepsilon$ ή*

(b) *$1 < b \leqslant n+1$, $\varepsilon < \min\{1, n/b\}$ και $a \leqslant -1 - b + n/\varepsilon$ ή*

(c) $b > n+1$, $\varepsilon < n/b$ *και* $a \leqslant -1 + (n - b\varepsilon)/(b - n - 1 + \varepsilon)$.

Συνδυάζοντας το Θεώρημα 3.9 και τις παραπάνω ιδιότητες της $\varphi_{a,b}(w)$, βρίσκουμε τους εξής βελτιωμένους εκτιμητές τύπου Strawderman εντός της κλάσης $\{\delta_{a,b} : a > -1, b \geqslant 1\}$.

Θεώρημα 3.11. *Έστω ότι $B(\varepsilon)$ είναι όπως στην* (3.34). *Ο εκτιμητής $\delta_{a,b}$ στην* (3.36) *ικανοποιεί τις (ST1) και (ST2) του Θεωρήματος 3.9 και συνεπώς είναι καλύτερος από τον $\delta_0 = S/n$ εάν*

(i) $b = 1$ *και* $-1 < a \leqslant -1 + \max\limits_{\varepsilon < n} \min\left\{nB(\varepsilon)/(1 - B(\varepsilon)), n/\varepsilon - 1\right\}$ *ή*

(ii) $1 < b \leqslant n+1$ *και* $-1 < a \leqslant -1 + \max\limits_{\varepsilon < \min\{1, n/b\}} \min\left\{nB(\varepsilon)/(1 - B(\varepsilon)), n/\varepsilon - b\right\}$ *ή*

(iii) $b > n+1$ *και* $-1 < a \leqslant -1 + \max\limits_{\varepsilon < n/b} \min\left\{nB(\varepsilon)/(1 - B(\varepsilon)), (n - b\varepsilon)/(b - n - 1 + \varepsilon)\right\}$.

Για επιλεγμένες τιμές των n και b, τα άνω φράγματα για το a δίνονται στον Πίνακα 3.1. Αξίζει να σημειωθεί ότι για $b = n$ και a όπως στο Θεώρημα 3.11(ii) αλλά με το δεξιό μέρος της ανισότητας ως αυστηρή ανισότητα παίρνουμε το βελτιωμένο εκτιμητή

$$\delta_{a,n} = \begin{cases} \dfrac{1+W}{a+1+n(1+W)} S & \text{εάν } W > 0, \\ S/n & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

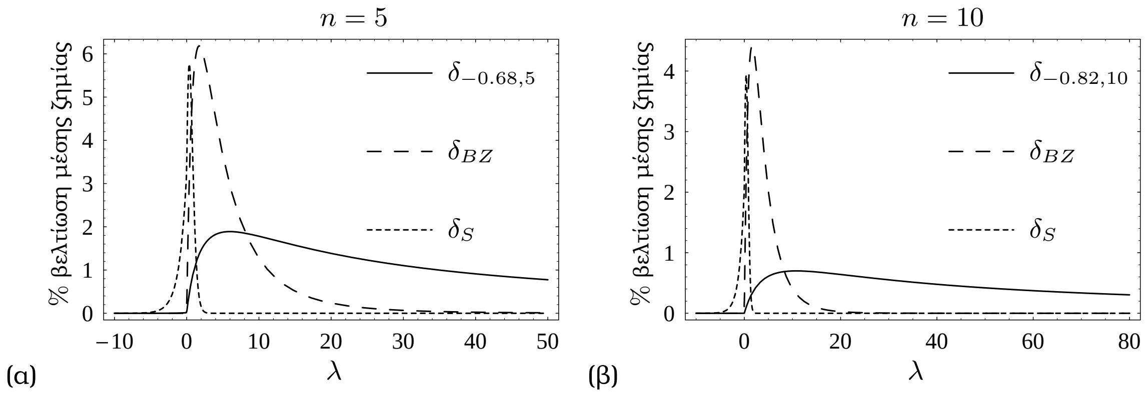
ο οποίος είναι γενικευμένος Bayes για $W > 0$, απλός στη μορφή, πιο «λείος» από τον εκτιμητή τύπου Stein δ_S στην (3.33), τόσο «λείος» όσο ο εκτιμητής τύπου Brewster and Zidek-type δ_{BZ} στην (3.33) και, αντίθετα από τον δ_{BZ}, λόγω του Θεωρήματος 3.3, βελτιώνει τη μέση τετραγωνική ζημία του S/n για όλα τα μ και σ.

Πίνακας 3.1: Τιμές άνω φράγματος για το a

b	n		
	3	5	10
1	-0.1324	-0.1122	-0.0965
n	-0.5430	-0.6814	-0.8208
$n+2$	-0.7315	-0.7764	-0.8520

Το Σχήμα 3.1 απεικονίζει τις επί τοις εκατό βελτιώσεις των μέσων τετραγωνικών ζημιών των δ_S, δ_{BZ} και $\delta_{a,n}$ για $n = 5, 10$ και $a = -0.68, -0.82$ (αυτές οι τιμές είναι λίγο μικρότερες από τα άνω φράγματα του Θεωρήματος 3.11(ii)). Βλέπουμε ότι ο δ_S παρουσιάζει σημαντική βελτίωση για $\lambda = 0$ η οποία ωστόσο φθίνει ραγδαία προς το 0. Ο δ_{BZ} προσφέρει σημαντικά μεγαλύτερη βελτίωση από τον $\delta_{a,n}$ σε μία συγκριτικά μικρή δεξιά περιοχή του $\lambda = 0$ (αλλά όχι στο $\lambda = 0$, όπου η μέση τετραγωνική ζημία του είναι ίση με αυτήν του δ_0) ενώ ο $\delta_{a,n}$ παραμένει σαφώς καλύτερος από τον δ_{BZ} για ένα μεγαλύτερο εύρος τιμών του λ.

Στη συνέχεια, προτείνουμε μία νέα κλάση βελτιωμένων εκτιμητών του σ που είναι υποσύνολο της $\{\delta_{a,b} : a > -1, b \geqslant 1\}$ και οι οποίοι ικανοποιούν τις συνθήκες Brewster and Zidek.



Σχήμα 3.1: % βελτιώσεις των μέσων τετραγωνικών ζημιών των δ_S, δ_{BZ} και $\delta_{a,n}$ για (α) $n = 5$, $a = -0.68$ και (β) $n = 10$, $a = -0.82$.

Θεώρημα 3.12. *Ο εκτιμητής $\delta_{a,1}$, $-1 < a \leqslant 0$, ικανοποιεί τις συνθήκες Brewster and Zidek και συνεπώς είναι καλύτερος από τον $\delta_0 = S/n$.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι $\delta_{0,1} = \delta_{BZ}$ έτσι ώστε $\varphi_{0,1}(w) = \varphi_{BZ}(w)$. Από το Λήμμα 3.10 (i), η $\varphi_{a,1}(w)$ είναι φθίνουσα ως προς w, οπότε η (BZ1) ισχύει. Από το Λήμμα 3.10 (ii), για $a \leqslant 0$ έχουμε $\varphi_{a,1}(w) \leqslant \varphi_{0,1}(w) = \varphi_{BZ}(w)$, οπότε η (BZ2) ισχύει επίσης. □

Τέλος, αποδεικνύουμε ότι οι συνθήκες (ST1), (ST2) του Θεωρήματος 3.9 και οι συνθήκες Brewster and Zidek είναι πράγματι διαφορετικές. Ένας βελτιωμένος εκτιμητής του σ που ικανοποιεί τις πρώτες δεν ικανοποιεί απαραίτητα τις τελευταίες. Η ανάλογη συμπεριφορά στην περίπτωση της κανονικής κατανομής παρατηρήθηκε από τους Pal et al. (1998) και Maruyama and Strawderman (2006).

Θεώρημα 3.13. (i) *Ο εκτιμητής δ_{BZ} δεν ικανοποιεί τις συνθήκες (ST1), (ST2) του Θεωρήματος 3.9, αλλά ο εκτιμητής δ_S τις ικανοποιεί.*

(ii) *Έστω $a_0 = -1 + \max_{\varepsilon<n} \min\left\{nB(\varepsilon)/(1 - B(\varepsilon)), n/\varepsilon - 1\right\}$, όπου το $B(\varepsilon)$ δίνεται από την* (3.34). *Τότε, $a_0 < 0$ και ο $\delta_{a,1}$, $-1 < a \leqslant a_0$, ικανοποιεί ταυτόχρονα τις συνθήκες (ST1), (ST2) και τις συνθήκες Brewster and Zidek, (BZ1) και (BZ2).*

(iii) *Για $b > 1$, ο $\delta_{a,b}$ δεν ικανοποιεί τις συνθήκες Brewster and Zidek, (BZ1) και (BZ2).*

Απόδειξη. (i) Οι συνθήκες (ST1), (ST2) για τον δ_{BZ} απαιτούν ότι για κάποιο $\varepsilon > 0$, η $(1 + w)^{\varepsilon}\varphi_{BZ}(w)$ είναι φθίνουσα στο $(0, \infty)$ και $0 \leqslant \varphi_{BZ}(w) \leqslant B(\varepsilon)$, όπου $B(\varepsilon)$ δίνεται από την (3.34). Από την (3.33), έχουμε $(1+w)^{\varepsilon}\varphi_{BZ}(w) = u^{n-\varepsilon}(1-u)/(1-u^{n+1}) = u^{n-\varepsilon}/\sum_{k=0}^{n} u^k = K(u)$, όπου $u = (1 + w)^{-1}$. Παρατηρούμε ότι ο αριθμητής της παραγώγου $K'(u)$ είναι $u^{n-\varepsilon-1}\sum_{k=0}^{n}(n-\varepsilon-k)u^k$ όπου, για $u = 1$, έχει τιμή $\sum_{k=0}^{n}(n-\varepsilon-k) = (n+1)(n/2-\varepsilon) < 0$ εάν $\varepsilon > n/2$. Συνεπώς, για να είναι η $K(u)$ αύξουσα στο $(0, 1)$, αναγκαία συνθήκη είναι $\varepsilon \leqslant n/2$. (Στην πραγματικότητα, μπορεί να αποδειχθεί ότι η $K(u)$ είναι αύξουσα στο $(0, 1)$ εάν και μόνον εάν $0 < \varepsilon \leqslant n/2$.) Από την άλλη πλευρά, $\varphi_{BZ}(w) \leqslant \varphi_{BZ}(0^+) = (n + 1)^{-1}$ έτσι ώστε η σχέση $\varphi_{BZ}(w) \leqslant B(\varepsilon)$ ισοδύναμα γίνεται $3\varepsilon^2 + \varepsilon \geqslant n(n + 1)$, η οποία δεν ισχύει λόγω της $\varepsilon \leqslant n/2$.

Το συμπέρασμα είναι ότι ο δ_{BZ} δεν ικανοποιεί τις συνθήκες (ST1), (ST2). Επί πλέον, για την $\varphi_S(w)$ στην (3.33) εύκολα παρατηρούμε ότι οι (ST1), (ST2) του Θεωρήματος 3.9 ικανοποιούνται παίρνοντας για παράδειγμα $\varepsilon = n/\sqrt{2}$.
(ii) Έστω $a_0 \geqslant 0$. Τότε, από το Θεώρημα 3.11(i) προκύπτει ότι ο $\delta_{0,1} = \delta_{BZ}$ ικανοποιεί τις (ST1), (ST2). Επομένως, $a_0 < 0$ και το υπόλοιπο μέρος της απόδειξης προκύπτει από το Θεώρημα 3.11(i) και το Θεώρημα 3.12.
(iii) Έστω $b > 1$. Τότε, από το Λήμμα 3.10(iii) προκύπτει $\varphi_{a,b}(w) = O(w^{-1})$ και $\varphi_{BZ}(w) = \varphi_{0,1}(w) = O(w^{-n})$. Συνεπώς, για αρκετά μεγάλο w, $\varphi_{a,b}(w) > \varphi_{BZ}(w)$ παραβιάζοντας την (BZ2). □

Παρατήρηση 3.9. Έστω $Y_1, \ldots, Y_n$, $n \geqslant 2$, τυχαίο δείγμα από μία κατανομή Pareto με πυκνότητα που δίνεται από τη σχέση

$$\frac{\beta^{1/\sigma}}{\sigma x^{1/\sigma+1}} I(x > \beta),$$

όπου β και σ είναι άγνωστες θετικές παράμετροι. Επειδή οι $X_i = \ln Y_i$, $i = 1, \ldots, n$, είναι ανεξάρτητες με κοινή κατανομή $E(\mu, \sigma)$, $\mu = \ln \beta$, τα αποτελέσματα αυτής της ενότητας εφαρμόζονται επίσης στην εκτίμηση του σ.

3.3.2 Εκτίμηση του σ ως προς τη συνάρτηση ζημίας εντροπίας

Από τις (3.2) και (3.32) παίρνουμε $c_0 = 1/(n-1)$ και $\delta_0 = S/(n-1)$. Ο εκτιμητής τύπου Stein και ο εκτιμητής τύπου Brewster and Zidek του σ είναι, αντίστοιχα,

$$\delta_S = \{1 - \varphi_S(W)\}S/(n-1) \quad \text{και} \quad \delta_{BZ} = \{1 - \varphi_{BZ}(W)\}S/(n-1), \tag{3.38}$$

όπου

$$\varphi_S(W) = \begin{cases} \max\left\{0, \dfrac{1-(n-1)W}{n}\right\} & \text{εάν } W > 0, \\ 0 & \text{διαφορετικά,} \end{cases}$$

και

$$\varphi_{BZ}(W) = \begin{cases} \dfrac{W}{(1+W)^n - 1} & \text{εάν } W > 0, \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Οι βελτιωμένοι εκτιμητές δ_S, δ_{BZ} έχουν τη μορφή του δ_φ στην (3.3), αλλά, όπως αναφέρθηκε στην Ενότητα 3.3.1, ικανοποιούν τις συνθήκες Brewster and Zidek

(BZ1) $\varphi(w)$ είναι φθίνουσα στο $(0, \infty)$,

(BZ2) $0 \leqslant \varphi(w) \leqslant \varphi_{BZ}(w)$ για $w > 0$,

όπου το $\varphi_{BZ}(w)$ εδώ δίνεται από την (3.38).

Επαληθεύουμε τις (A1), (A2) και (A3) και βρίσκουμε τους εκτιμητές τύπου Strawderman. Όπως σημειώθηκε προηγουμένως, οι πρώτες δύο συνθήκες είναι γνωστό ότι ισχύουν. Τώρα, η (3.26) δίνει $\varphi_\lambda(u) = 1/n$, για $\mu \leqslant 0$ και $\varphi_\lambda(u) = \int_\alpha^\infty v^{n-1}e^{-v}dv / \int_\alpha^\infty v^n e^{-v}dv$ για $\mu > 0$, όπου $\alpha = n\mu/(1-u)\sigma$, η οποία μπορεί να δειχθεί ότι είναι φθίνουσα με τον ίδιο τρόπο όπως η αντίστοιχη $\varphi_\lambda(u)$ στην περίπτωση της τετραγωνικής συνάρτησης ζημίας. Συνεπώς η (A3) ισχύει επίσης. Επί πλέον, η (3.23) δίνει

$$B_0(\varepsilon) = \frac{2\varepsilon(n+2\varepsilon-1)}{2\varepsilon(n+2\varepsilon-1)+(n-1)(n+\varepsilon)(n+\varepsilon-1)},$$

ενώ $\max\{\varphi_0(0), \varphi_0(1)\}/c_0 = (n-1)/n$. Εφαρμόζοντας τώρα το Θεώρημα 3.4 έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 3.14. *Ο εκτιμητής*

$$\delta^{(r)} = \begin{cases} \{1 - r\ (1+W)^{-\varepsilon}\}S/(n-1) & \textit{εάν } W > 0, \\ S/(n-1) & \textit{διαφορετικά}, \end{cases}$$

για $\varepsilon > 0$ και $0 < r <$ (αντίστοιχα, $\leqslant$) $2\varepsilon(n+2\varepsilon-1)/[2\varepsilon(n+2\varepsilon-1)+(n-1)(n+\varepsilon)(n+\varepsilon-1)]$ έχει μέση ζημία εντροπίας αυστηρά μικρότερη (αντίστοιχα, μικρότερη ή ίση) από τον $\delta_0 = S/(n-1)$.

Παρατήρηση 3.10. Σημειώνουμε ότι, τουλάχιστον για $\varepsilon < n-1$, το ότι ο $\delta^{(r)}$ είναι καλύτερος από τον $\delta_0 = S/(n-1)$ δεν μπορεί να προκύψει από τις συνθήκες Brewster and Zidek επειδή για $w \to \infty$, $\varphi_{BZ}(w) = O(w^{-n+1})$ (βλέπε (3.38)) και $r\ (1+w)^{-\varepsilon} = O(w^{-\varepsilon})$, οπότε παραβιάζεται η (BZ2).

Από την άλλη πλευρά, εφαρμόζοντας το Θεώρημα 3.7 παίρνουμε νέες ικανές συνθήκες, τύπου Strawderman, ώστε ένας αναλλοίωτος κατά κλίμακα εκτιμητής να είναι καλύτερος από τον βέλτιστο αναλλοίωτο εκτιμητή $\delta_0 = S/(n-1)$.

Θεώρημα 3.15. *Ο εκτιμητής*

$$\delta_\varphi = \begin{cases} \{1 - \varphi(W)\}S/(n-1) & \textit{εάν } W > 0, \\ S/(n-1) & \textit{διαφορετικά}, \end{cases}$$

έχει μέση ζημία εντροπίας μικρότερη ή ίση από αυτή του $\delta_0 = S/(n-1)$ εάν για κάποιο $\varepsilon > 0$,

(ST1) $(1+w)^\varepsilon \varphi(w)$ είναι φθίνουσα ως προς $w > 0$ και

(ST2) $0 \leqslant \varphi(w) \leqslant B(\varepsilon)$, όπου

$$B(\varepsilon) = \min\left\{B_*, \frac{2\varepsilon(n+2\varepsilon-1)}{2\varepsilon(n+2\varepsilon-1)+(n-1)(n+\varepsilon)(n+\varepsilon-1)}\right\} \tag{3.39}$$

και B_* είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης $-x/\ln(1-x) = (n-1)/n$.

Παρατήρηση 3.11. Επειδή ο $S/(n-1)$ είναι minimax, το ίδιο ισχύει και για τους $\delta^{(r)}$ και δ_φ των Θεωρημάτων 3.14 και 3.15. Επίσης, ανάλογα αποτελέσματα όπως αυτά των Θεωρημάτων 3.14 και 3.15 μπορούν να εξαχθούν για την εκτίμηση του σ^m, $m > 0$.

Στη συνέχεια, προχωρούμε στην κατασκευή μιας κλάσης εκτιμητών οι οποίοι είναι γενικευμένοι Bayes όταν $S + X > 0$, χρησιμοποιώντας την ίδια εκ των προτέρων κατανομή όπως στην περίπτωση της τετραγωνικής συνάρτησης ζημίας. Επειδή ο γενικευμένος εκτιμητής Bayes του σ δίνεται από τη σχέση $\delta_{GB} = 1/\mathsf{E}(\eta \mid S, X)$, παίρνουμε

$$\begin{aligned}\delta_{GB} &= \frac{1}{a+n}\frac{\int_0^1 t^a(1-t)^{b-1}(1-\frac{W}{1+W}t)^{n-b-1}dt}{\int_0^1 t^a(1-t)^{b-1}(1-\frac{W}{1+W}t)^{n-b}dt}\, S \\ &= \frac{1}{n-1}\{1-\varphi_{a,b}(W)\}S, \end{aligned} \tag{3.40}$$

όπου η τελευταία ισότητα χρησιμοποιείται για τον ορισμό της $\varphi_{a,b}(w)$.

Έστω τώρα

$$\delta_{a,b} = \begin{cases} \{1-\varphi_{a,b}(W)\}S/(n-1) & \text{εάν } W > 0, \\ S/(n-1) & \text{διαφορετικά} \end{cases} \tag{3.41}$$

και ας θεωρήσουμε την κλάση των εκτιμητών του σ, $\{\delta_{a,b} : a > -1, b \geqslant 1\}$. Παρατηρούμε ότι η (3.41) μπορεί να παραχθεί αντικαθιστώντας με $n-1$ το n στην (3.36) και συνεπώς ο $\delta_{a,b}$ και η $\varphi_{a,b}(w)$ έχουν την ίδια συμπεριφορά με τις αντίστοιχες ποσότητες ως προς την τετραγωνική συνάρτηση ζημίας. Έτσι, το Λήμμα 3.10 ισχύει για την $\varphi_{a,b}(w)$ στην (3.40) αν αντικαταστήσουμε το n με $n-1$ και συνδυάζοντάς το με το Θεώρημα 3.15 βρίσκουμε τους εξής βελτιωμένους εκτιμητές τύπου Strawderman.

Θεώρημα 3.16. *Έστω ότι $B(\varepsilon)$ είναι όπως στην* (3.39). *Ο εκτιμητής $\delta_{a,b}$ στην* (3.41) *ικανοποιεί τις (ST1) και (ST2) του Θεωρήματος 3.15 και συνεπώς είναι καλύτερος από τον $\delta_0 = S/(n-1)$ εάν*

(i) $b = 1$ *και* $-1 < a \leqslant -1 + \max\limits_{\varepsilon < n-1} \min\left\{(n-1)B(\varepsilon)/(1-B(\varepsilon)), (n-1)/\varepsilon - 1\right\}$ *ή*

(ii) $1 < b \leqslant n$ *και* $-1 < a \leqslant -1 + \max\limits_{\varepsilon < \min\{1,(n-1)/b\}} \min\left\{(n-1)B(\varepsilon)/(1-B(\varepsilon)), (n-1)/\varepsilon - b\right\}$ *ή*

(iii) $b > n$ *και* $-1 < a \leqslant -1 + \max\limits_{\varepsilon < (n-1)/b} \min\left\{(n-1)B(\varepsilon)/(1-B(\varepsilon)), (n-1-b\varepsilon)/(b-n+\varepsilon)\right\}$.

Για επιλεγμένες τιμές των n και b, τα άνω φράγματα για το a δίνονται στον Πίνακα 3.2. Αξίζει να σημειωθεί ότι για $b = n-1$ και a όπως στο Θεώρημα 3.16(i) ή (ii), αναλόγως αν $n = 2$ ή $n > 2$, αλλά με το δεξιό μέρος της ανισότητας να ισχύει ως αυστηρή ανισότητα παίρνουμε το βελτιωμένο εκτιμητή

$$\delta_{a,n-1} = \begin{cases} \dfrac{1+W}{a+1+(n-1)(1+W)}S & \text{εάν } W > 0, \\ S/(n-1) & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

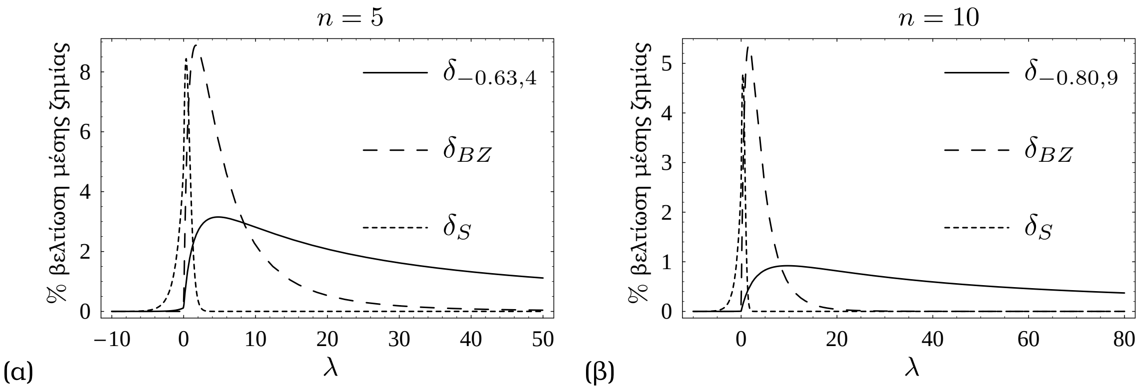
ο οποίος είναι γενικευμένος Bayes για $W > 0$, απλός στη μορφή, πιο «λείος» από τον εκτιμητή τύπου Stein δ_S στην (3.38), τόσο «λείος» όσο ο εκτιμητής τύπου Brewster and Zidek-type δ_{BZ}

Πίνακας 3.2: Τιμές άνω φράγματος για το a

b	n		
	3	5	10
1	-0.2483	-0.1747	-0.1255
$n-1$	-0.4656	-0.6326	-0.8042
$n+1$	-0.7234	-0.7982	-0.8412

στην (3.38) και, αντίθετα από τον δ_{BZ}, λόγω του Θεωρήματος 3.7, βελτιώνει τη μέση ζημία εντροπίας του $S/(n-1)$ για όλα τα μ και σ.

Το Σχήμα 3.2 απεικονίζει τις επί τοις εκατό βελτιώσεις των μέσων ζημιών εντροπίας των δ_S, δ_{BZ} και $\delta_{a,n-1}$ για $n=5,10$ και $a=-0.63,-0.80$ (αυτές οι τιμές είναι λίγο μικρότερες από τα άνω φράγματα του Θεωρήματος 3.16(ii)). Βλέπουμε ότι ο δ_S παρουσιάζει σημαντική βελτίωση για $\lambda=0$ η οποία ωστόσο φθίνει ραγδαία προς το 0. Ο δ_{BZ} προσφέρει σημαντικά μεγαλύτερη βελτίωση από τον $\delta_{a,n-1}$ σε μία συγκριτικά μικρή δεξιά περιοχή του $\lambda=0$ (αλλά όχι στο $\lambda=0$ όπου η μέση ζημία εντροπίας του είναι ίση με αυτήν του δ_0) ενώ ο $\delta_{a,n-1}$ παραμένει σαφώς καλύτερος από τον δ_{BZ} για ένα μεγαλύτερο εύρος τιμών του λ.



Σχήμα 3.2: % βελτιώσεις των μέσων ζημιών εντροπίας των δ_S, δ_{BZ} και $\delta_{a,n-1}$ για (α) $n=5$, $a=-0.63$ και (β) $n=10$, $a=-0.80$.

Όμοια με το Θεώρημα 3.12, συμπεραίνουμε ότι η $\{\delta_{a,1} : -1 < a \leqslant 0\}$ είναι μία νέα κλάση βελτιωμένων εκτιμητών για το σ ως προς την L_2, οι οποίοι ικανοποιούν τις συνθήκες Brewster and Zidek. Επί πλέον, ισχύει το ανάλογο του Θεωρήματος 3.13. Συνεπώς, ο εκτιμητής τύπου Brewster and Zidek για το σ ως προς την L_2 (ο οποίος συμπίπτει με τον $\delta_{0,1}$) δεν ικανοποιεί τις συνθήκες (ST1), (ST2) του Θεωρήματος 3.15, αλλά ο εκτιμητής τύπου Stein τις ικανοποιεί και, για $b=1$, η κλάση των εκτιμητών που ικανοποιεί τις (ST1), (ST2) είναι ένα υποσύνολο της κλάσης των εκτιμητών που ικανοποιούν τις συνθήκες Brewster and Zidek. Από την άλλη πλευρά όμως, για $b>1$, η κλάση των εκτιμητών που ικανοποιεί τις συνθήκες Brewster and Zidek είναι κενή, ενώ η κλάση των εκτιμητών που ικανοποιεί τις (ST1), (ST2) είναι μη αριθμήσιμη.

Τέλος, ανάλογα με την Παρατήρηση 3.9, τα αποτελέσματα αυτής της ενότητας μπορούν να εφαρμοσθούν και στην κατανομή Pareto.

3.4 Η κανονική κατανομή $N_p(\mu, \theta^2 I_p)$

Στην ενότητα αυτή επανεξετάζουμε το πρόβλημα εκτίμησης της διασποράς κανονικής κατανομής που μελετήθηκε από τους Strawderman (1974) και Maruyama and Strawderman (2006). Έστω ότι Y και S είναι ανεξάρτητα όπου $Y \sim N_p(\mu, \theta^2 I_p)$, $S/\theta^2 \sim \chi_n^2$ και μ, $\sigma = \theta^2$ είναι άγνωστα. Θέτουμε $X = \|Y\|^2$. Τότε, σύμφωνα με την (3.1), $g(v)$ είναι η πυκνότητα της χ_n^2, $h(x;\lambda)$ είναι η πυκνότητα της $\chi_p^2(\|\mu\|^2/\sigma)$, $\lambda = \|\mu\|^2/\sigma$, $\kappa(\lambda) = 0$, $\lambda_0 = 0$ και $h(x)$ είναι η πυκνότητα της χ_p^2. Η μελέτη του προβλήματος εκτίμησης του θ^2 γίνεται ως προς την τετραγωνική συνάρτηση ζημίας L_1 και τη συνάρτηση ζημίας εντροπίας L_2.

3.4.1 Εκτίμηση του θ^2 ως προς την τετραγωνική συνάρτηση ζημίας

Η συνθήκη (A1) ισχύει από τη γνωστή ιδιότητα ΜΛΠ της μη κεντρικής κατανομής χι-τετράγωνο ως προς την παράμετρο μη κεντρικότητάς της. Η (A2) επίσης ισχύει από την ιδιότητα ΜΛΠ της κατανομής γάμμα ως προς την παράμετρο κλίμακάς της. Για να μελετήσουμε την (A3) σημειώνουμε πρώτα ότι $\alpha = 0$ (βλέπε (3.5)) και

$$h(x;\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda/2} \frac{(\lambda/2)^k}{k!} \frac{x^{k+p/2-1} e^{-x/2}}{\Gamma(k+p/2) 2^{k+p/2}}, \quad x > 0.$$

Συνεπώς, μετά από απλούς υπολογισμούς, η (3.16) δίνει

$$\varphi_\lambda(u) = \frac{1}{2} \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda/2)^k}{k!} \frac{\Gamma(n/2+p/2+k+1)}{\Gamma(k+p/2)} (1-u)^k}{\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda/2)^k}{k!} \frac{\Gamma(n/2+p/2+k+2)}{\Gamma(k+p/2)} (1-u)^k}, \quad 0 < u < 1. \tag{3.42}$$

Από το Λήμμα Α.3, η $\varphi_\lambda(u)$ στην (3.42) είναι αύξουσα, οπότε για να επαληθεύσουμε την (A3) εστιάζουμε στο να δείξουμε την κυρτότητα της $\varphi_\lambda(u)$. Αυτό φαίνεται να αποτελεί ένα μη τετριμμένο πρόβλημα. Όπως θα δειχθεί παρακάτω, για άρτιο n, η $\varphi_\lambda(u)$ στην (3.42) μετατρέπεται σε λόγο δύο πολυωνύμων και άρα είναι πιο εύκολο να μελετηθεί, ενώ όταν το n είναι περιττός δεν μπορεί να απλοποιηθεί, διατηρώντας τη μορφή της ως λόγος δύο δυναμοσειρών. Ορίζουμε

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n/2+p/2+k+1)}{\Gamma(p/2+k)} \frac{x^k}{k!}, \quad x > 0, \ n = 2, 3, \dots . \tag{3.43}$$

Τότε, από τις (3.42) και (3.43), η $\varphi_\lambda(u)$ είναι κυρτή ως προς $0 < u < 1$ εάν και μόνον εάν η $f_n(x)/f_{n+2}(x)$ είναι κυρτή ως προς $x > 0$. Αλλά $f_n(x)/f_{n+2}(x) > 0$, οπότε αρκεί η $f_{n+2}(x)/f_n(x)$ να είναι κοίλη. Παρατηρώντας ότι

$$f_{n+2}(x) = \frac{n+p+2}{2} f_n(x) + x f_n'(x), \tag{3.44}$$

βλέπουμε ότι η κυρτότητα της $\varphi_\lambda(u)$ ισοδυναμεί με την κοιλότητα της

$$h_n(x) = \frac{x f_n'(x)}{f_n(x)}. \tag{3.45}$$

Ισχυρισμός: Η συνάρτηση $h_n(x)$ στην (3.45) είναι κοίλη ως προς $x > 0$ για όλα τα $n = 2, 3, \ldots,$ και συνεπώς η $\varphi_\lambda(u)$ είναι κυρτή.

Απόδειξη του ισχυρισμού. Θεωρούμε πρώτα ότι το n είναι άρτιος, $n = 2m$, $m = 1, 2, \ldots$. Τότε αποδεικνύεται ότι

$$f_{2m}(x) = e^x \sum_{j=0}^{m+1} a_{jm} x^j, \tag{3.46}$$

όπου $a_{jm} = \binom{m+1}{j} \prod_{i=j}^{m} (p/2 + i)$, $j = 0, 1, \ldots, m$, $a_{m+1,m} = 1$, και η $h_{2m}(x)$ απλοποιείται στη μορφή

$$h_{2m}(x) = x + \frac{\sum_{j=1}^{m+1} j a_{jm} x^j}{\sum_{j=0}^{m+1} a_{jm} x^j}. \tag{3.47}$$

Πράγματι, από την (3.43), $f_2(x) = e^x\{(p/2+1)p/2 + 2(p/2+1)x + x^2\}$, οπότε η (3.46) ισχύει για $m = 1$. Η σχέση (3.46) τώρα προκύπτει με επαγωγή, χρησιμοποιώντας την (3.44) για $n = 2m$ και τις αναδρομικές σχέσεις

$$\begin{aligned}
a_{0,m+1} &= \frac{2(m+1)+p}{2} a_{0m} \\
a_{j,m+1} &= \frac{2(m+1+j)+p}{2} a_{jm} + a_{j-1,m}, \quad j = 1, 2, \ldots, m+1 \\
a_{m+2,m+1} &= a_{m+1,m}.
\end{aligned}$$

Άρα, η (3.47) είναι άμεση, χρησιμοποιώντας τις (3.45) και (3.46). Λαμβάνοντας υπ' όψη την (3.47), ο ισχυρισμός είναι αληθής για άρτιο n εάν

$$g_{2m}(x) = \sum_{j=1}^{m+1} j a_{jm} x^j \Big/ \sum_{j=0}^{m+1} a_{jm} x^j, \quad x > 0,$$

είναι κοίλη για $m = 1, 2, \ldots$. Η παράγωγος $g_{2m}'(x)$ μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$g_{2m}'(x) = \sum_{j=0}^{2m} c_{jm} x^j \Big/ \sum_{j=0}^{2(m+1)} d_{jm} x^j,$$

όπου οι συντελεστές c_{jm} και d_{jm} μπορούν να υπολογιστούν σε κλειστή μορφή συναρτήσει των a_{jm}. Τότε η κοιλότητα θα αποδειχθεί εάν δείξουμε ότι η $g_{2m}'(x)$ είναι φθίνουσα. Προς αυτή την κατεύθυνση, από το Λήμμα Α.4, αρκεί να αποδειχθεί ότι η πεπερασμένη ακολουθία $\{c_{jm}/d_{jm} : j = 0, 1, \ldots, 2m\}$ είναι φθίνουσα. Για «μικρά» m αυτό είναι απλό να δειχθεί ενώ για κάθε m, μπορεί να δειχθεί με χρήση του Mathematica ακολουθώντας την εξής διαδικασία.

Βήμα 1: εισαγωγή του m

Βήμα 2: υπολογισμός της $g_{2m}(x)$ και των συντελεστών a_{jm} ως συναρτήσεις του p για $j = 0, 1, \ldots, m + 1$

Βήμα 3: υπολογισμός της παραγώγου $g'_{2m}(x)$ και των συντελεστών c_{jm} και d_{jm} ως συναρτήσεις του p για $j = 0, 1, \ldots, 2(m + 1)$

Βήμα 4: έλεγχος των ανισοτήτων $c_{jm}/d_{jm} > c_{j+1,m}/d_{j+1,m}$ για $j = 0, 1, \ldots, 2m - 1$

Η διαδικασία αυτή είναι επιτυχής για κάθε τιμή του m που δοκιμάστηκε (μέχρι και $m = 35$, δηλαδή δειγματικό μέγεθος $n = 70$). Ο αντίστοιχος κώδικας για το Mathematica είναι διαθέσιμος στη διεύθυνση http://www.math.upatras.gr/~pb/pcode.

Για περιττό n, η $h_n(x)$ στην (3.45) είναι ο λόγος δύο δυναμοσειρών και γραφικές παραστάσεις για επιλεγμένες τιμές των n και p υποδεικνύουν την κοιλότητά της. Όντως, για $n = 3, 5, \ldots, 19$ και $p = 1$, αποδείχθηκε η κοιλότητα επαληθεύοντας ότι $h''_n(x) < 0$ με χρήση του Mathematica (βλέπε την παραπάνω διεύθυνση). Είναι σχεδόν βέβαιο ότι ο ισχυρισμός είναι αληθής αλλά υπήρξε δυσκολία να δοθεί απόδειξη για κάθε n. □

Υποθέτοντας την ισχύ της (Α3) για όλα τα n, το Θεώρημα 3.3 αναπαράγει το Θεώρημα 2.1 των Maruyama and Strawderman (2006) και δίνει τη δική τους κλάση των minimax εκτιμητών της διασποράς κανονικής κατανομής. Πράγματι, $\delta_0 = c_0 S = S/(n + 2)$ και από την (3.42) έχουμε $\varphi_0(u) = 1/(n + p + 2)$, $0 \leqslant u \leqslant 1$, που συνεπάγεται ότι $2 - 2\max\{\varphi_0(0), \varphi_0(1)\}/c_0 = 2p/(n + p + 2)$. Επί πλέον, η (3.6) δίνει

$$B_0(\varepsilon) = 2\,\frac{\Gamma(p/2 + n/2 + 2\varepsilon + 2)\Gamma(n/2 + \varepsilon + 1)}{\Gamma(p/2 + n/2 + \varepsilon + 2)\Gamma(n/2 + 2\varepsilon + 2)}\,\frac{p\varepsilon}{p + n + 2}$$

και συνεπώς το άνω φράγμα $B(\varepsilon)$ στο Θεώρημα 3.3 είναι $B(\varepsilon) = \min\{2p/(n+p+2), B_0(\varepsilon)\}$ που συμπίπτει με το $B_2(p, n, \varepsilon)$ των Maruyama and Strawderman (2006, Θεώρημα 2.1). Επίσης, εφαρμόζοντας το Θεώρημα 3.1, προκύπτει ότι ο εκτιμητής $\delta^{(r)} = \{1 - r\,(1 + W)^{-\varepsilon}\}S/(n + 2)$ για $W = \|Y\|^2/S$, $\varepsilon > 0$ και $0 < r \leqslant B_0(\varepsilon)$ είναι καλύτερος από τον $S/(n + 2)$.

3.4.2 Εκτίμηση του θ^2 ως προς τη συνάρτηση ζημίας εντροπίας

Όπως αναφέρθηκε και στην περίπτωση της τετραγωνικής συνάρτησης ζημίας, η συνθήκη (Α1) ισχύει από τη γνωστή ιδιότητα ΜΛΠ της μη κεντρικής κατανομής χι-τετράγωνο ως προς την παράμετρο μη κεντρικότητάς της και η (Α2) ισχύει από την ιδιότητα ΜΛΠ της κατανομής γάμμα ως προς την παράμετρο κλίμακάς της. Για να μελετήσουμε την (Α3) παρατηρούμε ότι η (3.26), για $\alpha = 0$, δίνει

$$\varphi_\lambda(u) = \frac{1}{2}\,\frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda/2)^k}{k!}\frac{\Gamma(n/2 + p/2 + k)}{\Gamma(k + p/2)}(1 - u)^k}{\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda/2)^k}{k!}\frac{\Gamma(n/2 + p/2 + k + 1)}{\Gamma(k + p/2)}(1 - u)^k}, \quad 0 < u < 1. \tag{3.48}$$

Είναι προφανές ότι η (3.48) προκύπτει αν αντικαταστήσουμε με $n - 2$ το n στην (3.42), οπότε οι (3.42) και (3.48) έχουν τις ίδιες ιδιότητες ως συναρτήσεις του u. Από το Λήμμα Α.3, η $\varphi_\lambda(u)$

στην (3.48) είναι αύξουσα, οπότε για να επαληθεύσουμε την (A3) εστιάζουμε στο να δείξουμε την κυρτότητα της $\varphi_\lambda(u)$ (βλέπε τη συζήτηση για την κυρτότητα της $\varphi_\lambda(u)$ στην Ενότητα 3.4.1).

Υποθέτοντας τώρα την ισχύ της (A3) για όλα τα n, το Θεώρημα 3.7 αναπαράγει το Θεώρημα 2.2 των Maruyama and Strawderman (2006). Πράγματι, $\delta_0 = c_0 S = S/n$ και από την (3.48) έχουμε $\varphi_0(u) = 1/(n+p)$, $0 \leqslant u \leqslant 1$, που συνεπάγεται ότι $\max\{\varphi_0(0), \varphi_0(1)\}/c_0 = n/(n+p)$, οπότε B_* είναι η λύση της εξίσωσης $-x/\ln(1-x) = n/(n+p)$. Επί πλέον, η (3.23) δίνει

$$B_0(\varepsilon) = \left(1 + \frac{n}{2p\,\varepsilon} \frac{\Gamma(n/2+2\varepsilon)\Gamma(n/2+p/2+\varepsilon+1)}{\Gamma(n/2+\varepsilon)\Gamma(n/2+p/2+2\varepsilon)}\right)^{-1}$$

και συνεπώς το άνω φράγμα $B(\varepsilon)$ στο Θεώρημα 3.7 είναι $B(\varepsilon) = \min\{B_*, B_0(\varepsilon)\}$ που συμπίπτει με το $B_1(p, n, \varepsilon)$ των Maruyama and Strawderman (2006, Θεώρημα 2.2). Τέλος, εφαρμόζοντας το Θεώρημα 3.4, έχουμε ότι ο εκτιμητής $\delta^{(r)} = \{1 - r\,(1+W)^{-\varepsilon}\}S/n$ για $W = \|Y\|^2/S$, $\varepsilon > 0$ και $0 < r \leqslant B_0(\varepsilon)$ είναι καλύτερος από τον S/n.

3.5 Εκτίμηση ως προς τη συμμετρική συνάρτηση ζημίας $L(t) = t + 1/t - 2$

Στην ενότητα αυτή, βασιζόμενοι στα δεδομένα που δίνονται στην (3.1) θέλουμε να εκτιμήσουμε το σ ως προς τη συμμετρική συνάρτηση ζημίας $L(t) = t + 1/t - 2$. Μεταξύ των εκτιμητών της μορφής cS, $c > 0$, ο καλύτερος είναι

$$\delta_0 = c_0 S, \quad c_0^2 = \frac{\int_0^\infty v^{-1} g(v)dv}{\int_0^\infty v g(v)dv}. \tag{3.49}$$

Υποθέτουμε ότι το c_0 είναι καλά ορισμένο. Στόχος μας εδώ είναι να βελτιώσουμε τον δ_0 με εκτιμητές τύπου Strawderman $\delta^{(r)}$ της μορφής (3.4). Έστω ότι α είναι όπως στην (3.5). Το επόμενο αποτέλεσμα αποδεικνύει ότι ο εκτιμητής τύπου Strawderman $\delta^{(r)}$ είναι καλύτερος από τον κλασικό εκτιμητή δ_0, παρέχοντας συνεπώς μία πολύ απλή κλάση βελτιωμένων εκτιμητών για το σ.

Θεώρημα 3.17. *Έστω ότι οι (A1) και (A2) ισχύουν. Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$, η μέση ζημία του $\delta^{(r)}$ στην* (3.4) *ως προς την $L(t)$ είναι αυστηρά μικρότερη (αντίστοιχα, μικρότερη ή ίση) από αυτήν του δ_0 στην* (3.49) *εάν $0 < r <$ (αντίστοιχα, $\leqslant$)$B_0(\varepsilon)$, όπου*

$$B_0(\varepsilon) = 1 - \frac{1}{c_0^2} \frac{\int_0^1 u^{\varepsilon-1} \int_0^\infty g(uv)h((1-u)v)dvdu}{\int_0^1 u^{\varepsilon+1} \int_0^\infty v^2 g(uv)h((1-u)v)dvdu}.$$

Απόδειξη. Έστω $RD(\delta_0, \delta^{(r)}) = \mathsf{E}(\delta_0/\sigma + (\delta_0/\sigma)^{-1} - 2) - \mathsf{E}(\delta^{(r)}/\sigma + (\delta^{(r)}/\sigma)^{-1} - 2)$. Λόγω της μορφής των δ_0 και $\delta^{(r)}$ έχουμε

$$\begin{aligned} RD(\delta_0, \delta^{(r)}) &= r\,\mathsf{E}\left[\left\{c_0 \frac{1}{(1+W)^\varepsilon} \frac{S}{\sigma} - \left\{c_0 \frac{S}{\sigma}\Big(1 - \frac{r}{(1+W)^\varepsilon}\Big)(1+W)^\varepsilon\right\}^{-1}\right\} I(W>0)\right] \\ &= r \int_0^\infty \int_0^\infty \left\{c_0 \frac{y}{(1+w)^\varepsilon} - \left\{c_0 y\Big(1 - \frac{r}{(1+W)^\varepsilon}\Big)(1+W)^\varepsilon\right\}^{-1}\right\} \end{aligned}$$

$$\times\, yg(y)h(wy;\lambda)I(wy > \kappa(\lambda))dydw.$$

Με αλλαγή των μεταβλητών $u = 1/(1+w)$ και $v = (1+w)y$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}
RD(\delta_0, \delta^{(r)}) &= r \int_0^1 \int_\alpha^\infty \Big\{ c_0 u^{\varepsilon+1} v - \frac{u^{\varepsilon-1}}{c_0 v(1 - r u^\varepsilon)} \Big\} v g(uv) h((1-u)v;\lambda) dv du \\
&= r \Big\{ \int_0^1 c_0 u^{\varepsilon+1} \int_\alpha^\infty v^2 g(uv) h((1-u)v;\lambda) dv du \\
&\qquad - \int_0^1 \frac{u^{\varepsilon-1}}{c_0(1 - r u^\varepsilon)} \int_\alpha^\infty g(uv) h((1-u)v;\lambda) dv du \Big\} \\
&\geqslant r \Big\{ \int_0^1 c_0 u^{\varepsilon+1} \int_\alpha^\infty v^2 g(uv) h((1-u)v;\lambda) dv du \\
&\qquad - \int_0^1 \frac{u^{\varepsilon-1}}{c_0(1 - r)} \int_\alpha^\infty g(uv) h((1-u)v;\lambda) dv du \Big\}.
\end{aligned}$$

Έτσι, $RD(\delta_0, \delta^{(r)}) \geqslant 0$ εάν

$$\begin{aligned}
r &\leqslant 1 - \frac{1}{c_0^2} \frac{\int_0^1 u^{\varepsilon-1} \int_0^\infty g(uv) h((1-u)v;\lambda) dv du}{\int_0^1 u^{\varepsilon+1} \int_0^\infty v^2 g(uv) h((1-u)v;\lambda) dv du} \\
&= 1 - c_0^{-2} I(\varepsilon;\lambda).
\end{aligned}$$

Η απόδειξη θα είναι πλήρης εάν δείξουμε ότι $B_0(\varepsilon) \leqslant 1 - c_0^{-2} I(\varepsilon;\lambda)$. Με ανάλογο τρόπο όπως αποδείχθηκαν οι (3.11) και (3.14), μπορεί να δειχθεί ότι, εάν ισχύουν οι (A1), (A2), τότε ισχύει $I(\varepsilon,\lambda) \leqslant I(\varepsilon;0) < c_0^2$ και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. $\square$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Εκτιμητές τύπου Strawderman για το αντίστροφο παραμέτρου κλίμακας

Στο κεφάλαιο αυτό, το αποτέλεσμα του Strawderman (1974) επεκτείνεται σε κατανομές με παράμετρο κλίμακας και μία άλλη άγνωστη («ενοχλητική») παράμετρο για την εκτίμηση του αντιστρόφου της παραμέτρου κλίμακας ως προς την τετραγωνική συνάρτηση ζημίας και τη συνάρτηση ζημίας εντροπίας. Ακολούθως, τα γενικά αποτελέσματα εφαρμόζονται στην εκθετική και την κανονική κατανομή. Η τεχνική απόδειξης είναι παρόμοια με αυτήν του Κεφαλαίου 3. Το κεφάλαιο κλείνει με την κατασκευή εκτιμητών τύπου Strawderman, ειδικής μορφής, ως προς τη συμμετρική συνάρτηση ζημίας $L(t) = t + 1/t - 2$. Πέραν της δικής τους αξίας, τα αποτελέσματα αυτού του κεφαλαίου (όπως και του Κεφαλαίου 3), είναι χρήσιμα (ουσιαστικά, απαραίτητα) και στην κατασκευή εκτιμητών τύπου Strawderman για το λόγο των παραμέτρων κλίμακας δύο κατανομών, που είναι το αντικείμενο των δύο επόμενων κεφαλαίων.

4.1 Εκτίμηση ως προς την τετραγωνική συνάρτηση ζημίας

Στην ενότητα αυτή, βασιζόμενοι στα δεδομένα (S, X) που δίνονται στην (3.1) θέλουμε να εκτιμήσουμε το $1/\sigma$ ως προς την τετραγωνική συνάρτηση ζημίας $L_1(\delta, \sigma) = (\delta/\sigma^{-1} - 1)^2$. Μεταξύ των εκτιμητών της μορφής cS^{-1}, $c > 0$, ο καλύτερος είναι

$$\delta_0 = c_0 S^{-1}, \quad c_0 = \frac{\int_0^\infty v^{-1} g(v) dv}{\int_0^\infty v^{-2} g(v) dv}. \tag{4.1}$$

Υποθέτουμε ότι το c_0 είναι καλά ορισμένο. Στόχος μας είναι η βελτίωση του δ_0 θεωρώντας εκτιμητές της μορφής

$$\delta_\varphi = \begin{cases} c_0\{1 + \varphi(W)\}S^{-1} & \text{εάν } W > 0, \\ \delta_0 & \text{διαφορετικά}, \end{cases} \tag{4.2}$$

όπου $W = X/S$ και η συνάρτηση $\varphi(w)$ ικανοποιεί, για κάποιο $\varepsilon > 0$, τις συνθήκες

$(1+w)^{\varepsilon}\varphi(w)$ είναι φθίνουσα στο $(0,\infty)$,
$0 \leqslant \varphi(w) \leqslant B(\varepsilon)$ για $w>0$.

Υπενθυμίζουμε ότι ο όρος φθίνουσα (αύξουσα) χρησιμοποιείται με τη μη αυστηρή έννοια. Το $B(\varepsilon)$ είναι ένα κατάλληλο άνω φράγμα που πρέπει να καθοριστεί έτσι ώστε ο δ_φ να βελτιώνει τον δ_0. Ένας τέτοιος εκτιμητής δ_φ θα αναφέρεται ως εκτιμητής τύπου Strawderman. Ως μία ειδική περίπτωση του δ_φ, μελετούμε πρώτα εκτιμητές της μορφής

$$\delta^{(r)} = \begin{cases} c_0\{1 + r\,(1+W)^{-\varepsilon}\}S^{-1} & \text{εάν } W>0, \\ \delta_0 & \text{διαφορετικά,} \end{cases} \tag{4.3}$$

όπου $\varepsilon>0$ και $r>0$. Στην περίπτωση αυτή, η $\varphi(w) = r\,(1+w)^{-\varepsilon}$ τετριμμένα ικανοποιεί την πρώτη από τις παραπάνω συνθήκες ενώ η δεύτερη ισχύει εάν $r \leqslant B(\varepsilon)$.

Έστω ότι το α είναι όπως στην (3.5) και (A1), (A2) οι συνθήκες (τύπου) μονότονου λόγου πιθανοφανειών (ΜΛΠ) όπως ορίστηκαν στο Κεφάλαιο 3. Το επόμενο αποτέλεσμα αποδεικνύει ότι ο εκτιμητής τύπου Strawderman $\delta^{(r)}$ είναι καλύτερος από τον κλασικό εκτιμητή δ_0, παρέχοντας συνεπώς μία πολύ απλή κλάση βελτιωμένων εκτιμητών για το $1/\sigma$.

Θεώρημα 4.1. *Έστω ότι οι (A1) και (A2) ισχύουν. Τότε, για κάθε $\varepsilon>0$, η μέση τετραγωνική ζημία του $\delta^{(r)}$ στην* (4.3) *είναι αυστηρά μικρότερη (αντίστοιχα, μικρότερη ή ίση) από αυτήν του δ_0 στην* (4.1) *εάν $0<r<$ (αντίστοιχα, $\leqslant$)$B_0(\varepsilon)$, όπου*

$$\begin{aligned} B_0(\varepsilon) = \Big\{ 2\int_0^1 u^{\varepsilon-1}\int_0^\infty g(uv)h((1-u)v)\,dv\,du \\ - 2c_0\int_0^1 u^{\varepsilon-2}\int_0^\infty v^{-1}g(uv)h((1-u)v)\,dv\,du \Big\} \\ \times \Big\{ c_0\int_0^1 u^{2\varepsilon-2}\int_0^\infty v^{-1}g(uv)h((1-u)v)\,dv\,du \Big\}^{-1}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Απόδειξη. Έστω $RD(\delta_0,\delta^{(r)}) = \mathsf{E}(\delta_0/\sigma^{-1}-1)^2 - \mathsf{E}(\delta^{(r)}/\sigma^{-1}-1)^2$. Λόγω της μορφής των δ_0 και $\delta^{(r)}$ έχουμε

$$\begin{aligned} RD(\delta_0,\delta^{(r)}) &= \mathsf{E}\Big[\Big\{c_0\frac{r}{(1+W)^{\varepsilon}}\Big(\frac{S}{\sigma}\Big)^{-1}\Big\} \\ &\qquad \times \Big\{2 - 2c_0\Big(\frac{S}{\sigma}\Big)^{-1} - c_0\frac{r}{(1+W)^{\varepsilon}}\Big(\frac{S}{\sigma}\Big)^{-1}\Big\} I(W>0)\Big] \\ &= c_0\,r\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{y^{-1}}{(1+w)^{\varepsilon}}\Big\{2 - 2c_0y^{-1} - c_0\frac{r}{(1+w)^{\varepsilon}}y^{-1}\Big\} \\ &\qquad \times yg(y)h(wy;\lambda)I(wy>\kappa(\lambda))\,dy\,dw. \end{aligned}$$

Με αλλαγή των μεταβλητών $u = 1/(1+w)$ και $v = (1+w)y$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} RD(\delta_0,\delta^{(r)}) = c_0\,r\int_0^1 u^{\varepsilon-1}\int_\alpha^\infty \Big\{2 - 2c_0u^{-1}v^{-1} - c_0ru^{\varepsilon-1}v^{-1}\Big\} \\ \times g(uv)h((1-u)v;\lambda)\,dv\,du \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= c_0 r \left\{ 2\int_0^1 u^{\varepsilon-1} \int_\alpha^\infty g(uv)h((1-u)v;\lambda)dv \right. \\
&\quad - 2c_0 \int_0^1 u^{\varepsilon-2} \int_\alpha^\infty v^{-1} g(uv)h((1-u)v;\lambda)dv \\
&\quad \left. - c_0 r \int_0^1 u^{2\varepsilon-2} \int_\alpha^\infty v^{-1} g(uv)h((1-u)v;\lambda)dv \right\} du. \qquad (4.5)
\end{aligned}
$$

Έτσι, $RD(\delta_0, \delta^{(r)}) \geqslant 0$ εάν

$$
\begin{aligned}
r &\leqslant \left\{ 2\int_0^1 u^{\varepsilon-1} \int_\alpha^\infty g(uv)h((1-u)v;\lambda)dvdu \right. \\
&\quad \left. - 2c_0 \int_0^1 u^{\varepsilon-2} \int_\alpha^\infty v^{-1} g(uv)h((1-u)v;\lambda)dvdu \right\} \\
&\quad \times \left\{ c_0 \int_0^1 u^{2\varepsilon-2} \int_\alpha^\infty v^{-1} g(uv)h((1-u)v;\lambda)dvdu \right\}^{-1} \\
&= B(\varepsilon;\lambda). \qquad (4.6)
\end{aligned}
$$

Η απόδειξη ολοκληρώνεται εάν δείξουμε ότι $B_0(\varepsilon) \leqslant B(\varepsilon;\lambda)$. Γράφουμε το $B(\varepsilon;\lambda)$ στη μορφή

$$
\begin{aligned}
B(\varepsilon;\lambda) &= \frac{2\int_0^1 u^{\varepsilon-2} \int_\alpha^\infty v^{-1} g(uv)h((1-u)v;\lambda)dvdu}{\int_0^1 u^{2\varepsilon-2} \int_\alpha^\infty v^{-1} g(uv)h((1-u)v;\lambda)dvdu} \\
&\quad \times \left\{ \frac{\int_0^1 u^{\varepsilon-1} \int_\alpha^\infty g(uv)h((1-u)v;\lambda)dvdu}{c_0 \int_0^1 u^{\varepsilon-2} \int_\alpha^\infty v^{-1} g(uv)h((1-u)v;\lambda)dvdu} - 1 \right\} \\
&= 2I_1(\varepsilon;\lambda)\{c_0^{-1} I_2(\varepsilon;\lambda) - 1\}. \qquad (4.7)
\end{aligned}
$$

Με ανάλογο τρόπο όπως αποδείχθηκαν οι (3.10), (3.11) και (3.14), μπορεί να δειχθεί ότι $I_1(\varepsilon,\lambda) \geqslant I_1(\varepsilon;0)$, $I_2(\varepsilon,\lambda) \geqslant I_2(\varepsilon;0)$ και $I_2(\varepsilon;0) > c_0$, αντίστοιχα. Συνεπώς, $B(\varepsilon,\lambda) \geqslant 2I_1(\varepsilon;0)\{c_0^{-1} I_2(\varepsilon;0) - 1\} = B_0(\varepsilon)$. □

Στη συνέχεια μελετούμε τη (γενική) κλάση των εκτιμητών τύπου Strawderman δ_φ που δίνονται στην (4.2). Με α όπως στην (3.5), θέτουμε

$$
\varphi_\lambda(u) = \frac{\int_\alpha^\infty v^{-1} g(uv)h((1-u)v;\lambda)dv}{\int_\alpha^\infty g(uv)h((1-u)v;\lambda)dv}, \quad 0 \leqslant u \leqslant 1, \qquad (4.8)
$$

όπου $\varphi_\lambda(0) = \lim_{u\to 0^+} \varphi_\lambda(u)$ και $\varphi_\lambda(1) = \lim_{u\to 1^-} \varphi_\lambda(u)$. Προφανώς, $\varphi_\lambda(u) \geqslant 0$ αλλά υποθέτουμε ότι $\varphi_\lambda(0) > 0$. Επίσης, υποθέτουμε ότι η $\varphi_\lambda(u)$ είναι συνεχής. Θέτουμε $\varphi_0(u) = \varphi_{\lambda_0}(u)$. Για να αποδείξουμε ότι ο δ_φ είναι καλύτερος από τον δ_0 χρειαζόμαστε, εκτός των (Α1), (Α2) του Κεφαλαίου 3, την εξής συνθήκη:

(Α3) Η $\varphi_\lambda(u)$ είναι κυρτή ως προς $0 < u < 1$ ή είναι φθίνουσα ως προς $0 < u < 1$.

Ακολουθούν δύο προκαταρκτικά αποτελέσματα.

Λήμμα 4.2. *Έστω $B > 0$ και $\varepsilon > 0$. Τότε η συνάρτηση $f(u) = u/(2 + Bu^\varepsilon)$, $0 < u < 1$ είναι γνησίως κοίλη για $0 < \varepsilon \leqslant 1$ ή για $\varepsilon > 1$ και $B \leqslant 2(\varepsilon+1)/(\varepsilon-1)$.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$f''(u) = \frac{(2+Bu^{\varepsilon})Bu^{\varepsilon-1}\varepsilon\big\{-2(1+\varepsilon)+Bu^{\varepsilon}(\varepsilon-1)\big\}}{(2+Bu^{\varepsilon})^4}$$

και συνεπώς το συμπέρασμα είναι άμεσο. □

Λήμμα 4.3. *Έστω ότι οι (A1), (A3) ισχύουν και* $\max\{\varphi_0(0), \varphi_0(1)\} < c_0^{-1}$. *Τότε η συνάρτηση* $2u/(2c_0 + c_0Bu^{\varepsilon}) - \varphi_{\lambda}(u)$, $0 \leqslant u \leqslant 1$, *έχει μία μόνον αλλαγή προσήμου από αρνητική σε θετική για κάθε* λ *όταν* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *και* $0 < B < 2c_0^{-1}/\max\{\varphi_0(0), \varphi_0(1)\} - 2$, *ή όταν* $\varepsilon > 1$ *και* $0 < B < \min\big\{2(\varepsilon+1)/(\varepsilon-1), 2c_0^{-1}/\max\{\varphi_0(0), \varphi_0(1)\} - 2\big\}$.

Απόδειξη. Έστω $s(u;\lambda) = 2u/(2c_0 + c_0Bu^{\varepsilon}) - \varphi_{\lambda}(u)$. Αρχικά αποδεικνύουμε ότι η $s(u;\lambda)$ έχει τουλάχιστον μία αλλαγή προσήμου αρχίζοντας αρνητική και καταλήγοντας θετική. Προς αυτή την κατεύθυνση, αρκεί να δείξουμε ότι

$$s(0;\lambda) < 0 \quad \text{και} \quad s(1;\lambda) > 0. \tag{4.9}$$

Υπενθυμίζουμε ότι $\varphi_{\lambda}(0) > 0$. Συνεπώς, λαμβάνουμε $s(0;\lambda) = -\varphi_{\lambda}(0) < 0$. Για να δείξουμε τη δεύτερη ανισότητα στην (4.9) παρατηρούμε πρώτα ότι $\varphi_{\lambda}(u) = \mathsf{E}_{\lambda}V^{-1}$, όπου η V έχει πυκνότητα $g_1(v;\lambda) \propto g(uv)h((1-u)v;\lambda)I(v > \alpha)$. Λόγω της (A1), η $g_1(v;\lambda)/g_1(v;0)$ είναι αύξουσα και επειδή η v^{-1} είναι φθίνουσα, από το Λήμμα A.2 έπεται ότι

$$\varphi_{\lambda}(u) \leqslant \varphi_0(u). \tag{4.10}$$

Τότε έχουμε $s(u;\lambda) \geqslant 2u/(2c_0+c_0Bu^{\varepsilon}) - \varphi_0(u)$ από την οποία προκύπτει ότι $s(1;\lambda) \geqslant 2/(2c_0 + c_0B) - \varphi_0(1) > 0$. Τώρα, εάν, σύμφωνα με την (A3), η $\varphi_{\lambda}(u)$ είναι κυρτή και επειδή η $2u/(2c_0 + c_0Bu^{\varepsilon})$ είναι γνησίως κοίλη, έχουμε ότι η $s(u;\lambda)$ είναι κοίλη. Η κοιλότητά της εξασφαλίζει ότι έχει μία μόνον αλλαγή προσήμου. Εάν, από την άλλη πλευρά, η $\varphi_{\lambda}(u)$ είναι φθίνουσα τότε η $s(u;\lambda)$ είναι η διαφορά μεταξύ της γνησίως κοίλης συνάρτησης $2u/(2c_0 + c_0Bu^{\varepsilon})$ και της φθίνουσας συνάρτησης $\varphi_{\lambda}(u)$. Τότε η $s(u;\lambda)$ θα έχει μία μόνον αλλαγή προσήμου εάν δείξουμε ότι $\varphi_{\lambda}(0) < 2u/(2c_0 + c_0Bu^{\varepsilon})\,|_{u=1} = 2/(2c_0 + c_0B)$. Η τελευταία ανισότητα ισχύει επειδή, από την (4.10), $\varphi_{\lambda}(0) \leqslant \varphi_0(0)$ και $B < 2/(c_0\varphi_0(0)) - 2$. □

Το επόμενο θεώρημα αποδεικνύει ότι ο εκτιμητής τύπου Strawderman δ_{φ} στην (4.2) είναι καλύτερος από τον κλασικό εκτιμητή δ_0 στην (4.1). Το θεώρημα αυτό αποτελεί επέκταση του Θεωρήματος 1 του Strawderman (1974) και του Θεωρήματος 2.1 των Maruyama and Strawderman (2006) στο γενικό μοντέλο (3.1) για την εκτίμηση του $1/\sigma$ ως προς την τετραγωνική συνάρτηση ζημίας.

Θεώρημα 4.4. *Έστω ότι (A1), (A2), (A3) ισχύουν και* $\max\{\varphi_0(0), \varphi_0(1)\} < c_0^{-1}$. *Τότε η μέση τετραγωνική ζημία του* δ_{φ} *στην (4.2) είναι μικρότερη ή ίση από αυτήν του* δ_0 *στην (4.1) εάν η συνάρτηση* $\varphi(w)$ *ικανοποιεί, για κάποιο* $\varepsilon > 0$,

(ST1) $(1+w)^{\varepsilon}\varphi(w)$ *είναι φθίνουσα στο* $(0, \infty)$,

(ST2) $0 \leqslant \varphi(w) \leqslant B(\varepsilon)$ *για* $w > 0$,

όπου $B(\varepsilon) = \min\big\{2c_0^{-1}/\max\{\varphi_0(0), \varphi_0(1)\} - 2, B_0(\varepsilon)\big\}$ *για* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *ή* $B(\varepsilon) = \min\big\{2(\varepsilon + 1)/(\varepsilon - 1), 2c_0^{-1}/\max\{\varphi_0(0), \varphi_0(1)\} - 2, B_0(\varepsilon)\big\}$ *για* $\varepsilon > 1$. *Επί πλέον, εάν αντί της (ST2) ισχύει* $0 < \lim_{w \to 0^+} \varphi(w) < B(\varepsilon)$, *τότε η μέση τετραγωνική ζημία του* δ_φ *είναι αυστηρά μικρότερη από αυτήν του* δ_0.

Απόδειξη. Αποδεικνύουμε το αποτέλεσμα δείχνοντας ότι η διαφορά των μέσων τετραγωνικών ζημιών μεταξύ των δ_0 και δ_φ φράσσεται από κάτω από ένα θετικό πολλαπλάσιο της διαφοράς των μέσων τετραγωνικών ζημιών μεταξύ των δ_0 και $\delta^{(r)}$ για κάποιο r που θα προσδιοριστεί και επικαλούμενοι στη συνέχεια το Θεώρημα 4.1. Έστω $RD = \mathsf{E}(\delta_0/\sigma^{-1} - 1)^2 - \mathsf{E}(\delta_\varphi/\sigma^{-1} - 1)^2$. Τότε λόγω της μορφής των δ_0 και δ_φ έχουμε

$$RD = \mathsf{E}\bigg[\Big\{c_0 \frac{\psi(W)}{(1+W)^\varepsilon}\Big(\frac{S}{\sigma}\Big)^{-1}\Big\}\Big\{2 - 2c_0\Big(\frac{S}{\sigma}\Big)^{-1} - c_0\frac{\psi(W)}{(1+W)^\varepsilon}\Big(\frac{S}{\sigma}\Big)^{-1}\Big\}I(W>0)\bigg],$$

όπου $\psi(w) = (1+w)^\varepsilon \varphi(w)$. Από την (ST1), η $\psi(w)$ είναι φθίνουσα και συνεπώς

$$0 \leqslant \psi(w) \leqslant \lim_{w\to 0^+}\psi(w) = \lim_{w \to 0^+}\varphi(w) = B. \tag{4.11}$$

Επομένως, έχουμε

$$\begin{aligned} RD &\geqslant \mathsf{E}\bigg[\Big\{c_0 \frac{\psi(W)}{(1+W)^\varepsilon}\Big(\frac{S}{\sigma}\Big)^{-1}\Big\}\Big\{2 - 2c_0\Big(\frac{S}{\sigma}\Big)^{-1} - c_0\frac{B}{(1+W)^\varepsilon}\Big(\frac{S}{\sigma}\Big)^{-1}\Big\}I(W>0)\bigg] \\ &= \int_0^\infty\int_0^\infty \Big\{c_0\frac{\psi(w)}{(1+w)^\varepsilon}y^{-1}\Big\}\Big\{2 - 2c_0y^{-1} - c_0\frac{B}{(1+W)^\varepsilon}y^{-1}\Big\} \\ &\qquad \times yg(y)h(wy;\lambda)I(wy > \kappa(\lambda))dydw. \end{aligned}$$

Με αλλαγή των μεταβλητών $u = 1/(1+w)$ και $v = (1+w)y$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} RD &\geqslant \int_0^1 c_0\psi\Big(\frac{1-u}{u}\Big)u^{\varepsilon-1}\int_\alpha^\infty \Big\{2 - 2c_0u^{-1}v^{-1} - c_0Bu^{\varepsilon-1}v^{-1}\Big\} \\ &\qquad \times g(uv)h((1-u)v;\lambda)dvdu \\ &= \int_0^1 c_0\psi\Big(\frac{1-u}{u}\Big)u^{\varepsilon-1}\int_\alpha^\infty g(uv)h((1-u)v;\lambda)dv \\ &\qquad \times \Big\{2 - 2c_0u^{-1}\varphi_\lambda(u) - c_0Bu^{\varepsilon-1}\varphi_\lambda(u)\Big\}du \\ &= \int_0^1 c_0\psi\Big(\frac{1-u}{u}\Big)u^{\varepsilon-1}\int_\alpha^\infty g(uv)h((1-u)v;\lambda)dv \\ &\qquad \times \big(2c_0u^{-1} + c_0Bu^{\varepsilon-1}\big)\Big\{\frac{2u}{2c_0 + c_0Bu^\varepsilon} - \varphi_\lambda(u)\Big\}du. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Από τις (4.11) και (ST2) έπεται ότι $B \leqslant 2c_0^{-1}/\max\{\varphi_0(0), \varphi_0(1)\} - 2$ για $0 < \varepsilon \leqslant 1$ ή $B \leqslant \min\big\{2(\varepsilon+1)/(\varepsilon-1), 2c_0^{-1}/\max\{\varphi_0(0), \varphi_0(1)\} - 2\big\}$ για $\varepsilon > 1$. Συνεπώς, το Λήμμα 4.3 εξασφαλίζει ότι η $2u/(2c_0 + c_0Bu^\varepsilon) - \varphi_\lambda(u)$ έχει μία μόνον αλλαγή προσήμου από αρνητική σε θετική. Επειδή η $\psi(\frac{1-u}{u})$ είναι αύξουσα, από το Λήμμα A.1 και την (4.12) συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $0 < u_0 < 1$ τέτοιο ώστε

$$RD \geqslant c_0\psi\Big(\frac{1-u_0}{u_0}\Big)\int_0^1 u^{\varepsilon-1}\int_\alpha^\infty g(uv)h((1-u)v;\lambda)dv$$

$$
\begin{aligned}
&\times \left(2c_0 u^{-1} + c_0 B u^{\varepsilon-1}\right)\Big\{\frac{2u}{2c_0 + c_0 B u^{\varepsilon}} - \varphi_\lambda(u)\Big\}\, du \\
&= c_0 \psi\Big(\frac{1-u_0}{u_0}\Big)\Big\{2\int_0^1 u^{\varepsilon-1}\int_\alpha^\infty g(uv)h((1-u)v;\lambda)dv \\
&\quad - 2c_0 \int_0^1 u^{\varepsilon-2}\int_\alpha^\infty v^{-1} g(uv)h((1-u)v;\lambda)dv \\
&\quad - c_0 B \int_0^1 u^{2\varepsilon-2}\int_\alpha^\infty v^{-1} g(uv)h((1-u)v;\lambda)dv\Big\}\, du. \qquad (4.13)
\end{aligned}
$$

Συγκρίνοντας με την (4.5), παρατηρούμε ότι η (4.13) γίνεται $RD \geqslant r^{-1}\psi(\frac{1-u_0}{u_0})RD(\delta_0, \delta^{(r)})$ με $r = B$. Επομένως, το αποτέλεσμα προκύπτει άμεσα από το Θεώρημα 4.1 επειδή $B \leqslant B_0(\varepsilon)$. $\square$

4.2 Εκτίμηση ως προς τη συνάρτηση ζημίας εντροπίας

Εδώ, βασιζόμενοι στο (S, X) που δίνεται στην (3.1) θέλουμε να εκτιμήσουμε το $1/\sigma$ ως προς τη συνάρτηση ζημίας εντροπίας $L_2(\delta, \sigma) = \delta/\sigma^{-1} - \ln \delta/\sigma^{-1} - 1$. Μεταξύ των εκτιμητών της μορφής cS^{-1}, $c > 0$, ο καλύτερος είναι

$$
\delta_0 = c_0 S^{-1}, \quad c_0 = \frac{1}{\int_0^\infty v^{-1} g(v)dv}. \qquad (4.14)
$$

Υποθέτουμε ότι το c_0 είναι καλά ορισμένο. Όπως και στην προηγούμενη ενότητα, στόχος μας είναι να βελτιώσουμε τον δ_0 με εκτιμητές τύπου Strawderman δ_φ της μορφής (4.2), όπου η $\varphi(w)$ ικανοποιεί τις συνθήκες τύπου Strawderman, ή $\delta^{(r)}$ της μορφής (4.3). Το άνω φράγμα $B(\varepsilon)$ θα καθορισθεί στη συνέχεια. Αρχίζουμε και πάλι τη μελέτη πρώτα με τους εκτιμητές $\delta^{(r)}$. Έστω ότι το α είναι όπως στην (3.5). Το επόμενο αποτέλεσμα αποδεικνύει ότι ο εκτιμητής τύπου Strawderman $\delta^{(r)}$ είναι καλύτερος από τον κλασικό εκτιμητή δ_0 στην (4.14), παρέχοντας συνεπώς μία πολύ απλή κλάση βελτιωμένων εκτιμητών για το $1/\sigma$.

Θεώρημα 4.5. *Έστω ότι οι (A1) και (A2) ισχύουν. Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$, η μέση ζημία εντροπίας του $\delta^{(r)}$ στην (4.3) είναι αυστηρά μικρότερη (αντίστοιχα, μικρότερη ή ίση) από αυτήν του δ_0 στην (4.14) εάν $0 < r <$ (αντίστοιχα, $\leqslant$)$B_0(\varepsilon)$, όπου*

$$
\begin{aligned}
B_0(\varepsilon) = &\Big\{2\int_0^1 u^{\varepsilon}\int_0^\infty v g(uv)h((1-u)v)dvdu \\
&- 2c_0 \int_0^1 u^{\varepsilon-1}\int_0^\infty g(uv)h((1-u)v)dvdu\Big\} \\
&\times \Big\{\int_0^1 u^{2\varepsilon}\int_0^\infty v g(uv)h((1-u)v)dvdu\Big\}^{-1}. \qquad (4.15)
\end{aligned}
$$

Απόδειξη. Έστω $RD(\delta_0, \delta^{(r)}) = \mathsf{E}(\delta_0/\sigma^{-1} - \ln \delta_0/\sigma^{-1} - 1) - \mathsf{E}(\delta^{(r)}/\sigma^{-1} - \ln \delta^{(r)}/\sigma^{-1} - 1)$. Λόγω της μορφής των δ_0 και $\delta^{(r)}$ έχουμε

$$
\begin{aligned}
RD(\delta_0, \delta^{(r)}) &= \mathsf{E}\Big[\Big\{\ln\Big(1 + \frac{r}{(1+W)^\varepsilon}\Big) - c_0 \frac{r}{(1+W)^\varepsilon}\Big(\frac{S}{\sigma}\Big)^{-1}\Big\} I(W > 0)\Big] \\
&= r\int_0^\infty \int_0^\infty \Big\{\frac{1}{r}\ln\Big(1 + \frac{r}{(1+w)^\varepsilon}\Big) - c_0 \frac{y^{-1}}{(1+w)^\varepsilon}\Big\}
\end{aligned}
$$

$$\times\, yg(y)h(wy;\lambda)I(wy>\kappa(\lambda))dydw.$$

Με αλλαγή των μεταβλητών $u = 1/(1+w)$ και $v = (1+w)y$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}
RD(\delta_0,\delta^{(r)}) &= r\int_0^1\int_\alpha^\infty \Big\{\frac{\ln(1+ru^\varepsilon)}{r} - c_0u^{\varepsilon-1}v^{-1}\Big\}vg(uv)h((1-u)v;\lambda)dvdu\\
&= r\Big\{\int_0^1 \frac{\ln(1+ru^\varepsilon)}{r}\int_\alpha^\infty vg(uv)h((1-u)v;\lambda)dvdu\\
&\quad - c_0\int_0^1 u^{\varepsilon-1}\int_\alpha^\infty g(uv)h((1-u)v;\lambda)dvdu\Big\}. \qquad (4.16)
\end{aligned}$$

Επειδή $\ln(1+x)\geqslant x - x^2/2$, η (4.16) δίνει

$$\begin{aligned}
RD(\delta_0,\delta^{(r)}) \geqslant r\Big\{&\int_0^1 \Big(u^\varepsilon - \frac{r}{2}u^{2\varepsilon}\Big)\int_\alpha^\infty vg(uv)h((1-u)v;\lambda)dvdu\\
&- c_0\int_0^1 u^{\varepsilon-1}\int_\alpha^\infty g(uv)h((1-u)v;\lambda)dvdu\Big\}.
\end{aligned}$$

Έτσι, $RD(\delta_0,\delta^{(r)})\geqslant 0$ εάν

$$\begin{aligned}
r \leqslant &\Big\{2\int_0^1 u^\varepsilon\int_0^\infty vg(uv)h((1-u)v;\lambda)dvdu\\
&- 2c_0\int_0^1 u^{\varepsilon-1}\int_0^\infty g(uv)h((1-u)v;\lambda)dvdu\Big\}\\
&\times\Big\{\int_0^1 u^{2\varepsilon}\int_0^\infty vg(uv)h((1-u)v;\lambda)dvdu\Big\}^{-1}\\
=\ & B(\varepsilon,\lambda). \qquad (4.17)
\end{aligned}$$

Η απόδειξη θα ολοκληρωθεί εάν δείξουμε ότι $B_0(\varepsilon)\leqslant B(\varepsilon;\lambda)$. Γράφουμε το $B(\varepsilon;\lambda)$ στη μορφή

$$\begin{aligned}
B(\varepsilon;\lambda) &= \frac{2\int_0^1 u^\varepsilon\int_\alpha^\infty vg(uv)h((1-u)v;\lambda)dvdu}{\int_0^1 u^{2\varepsilon}\int_\alpha^\infty vg(uv)h((1-u)v;\lambda)dvdu}\\
&\qquad\times\Big\{1-\frac{c_0\int_0^1 u^{\varepsilon-1}\int_\alpha^\infty g(uv)h((1-u)v;\lambda)dvdu}{\int_0^1 u^\varepsilon\int_\alpha^\infty vg(uv)h((1-u)v;\lambda)dvdu}\Big\}\\
&= 2I_3(\varepsilon;\lambda)\{1-c_0I_4(\varepsilon;\lambda)\}. \qquad (4.18)
\end{aligned}$$

Με ανάλογο τρόπο όπως αποδείχθηκαν οι (3.10), (3.11) και (3.14), μπορεί να δειχθεί ότι $I_3(\varepsilon,\lambda)\geqslant I_3(\varepsilon;0)$, $I_4(\varepsilon,\lambda)\leqslant I_4(\varepsilon;0)$ και $I_4(\varepsilon;0) < c_0^{-1}$, αντίστοιχα. Συνεπώς, $B(\varepsilon,\lambda)\geqslant 2I_3(\varepsilon;0)\{1-c_0I_4(\varepsilon;0)\} = B_0(\varepsilon)$. □

Στη συνέχεια, μελετούμε τη (γενική) κλάση των εκτιμητών τύπου Strawderman δ_φ που δίνονται στην (4.2). Με α όπως στην (3.5), θέτουμε

$$\varphi_\lambda(u) = \frac{\int_\alpha^\infty g(uv)h((1-u)v;\lambda)dv}{\int_\alpha^\infty vg(uv)h((1-u)v;\lambda)dv},\quad 0\leqslant u\leqslant 1, \qquad (4.19)$$

όπου $\varphi_\lambda(0) = \lim_{u\to 0^+}\varphi_\lambda(u)$ και $\varphi_\lambda(1) = \lim_{u\to 1^-}\varphi_\lambda(u)$. Προφανώς, $\varphi_\lambda(u)\geqslant 0$ αλλά υποθέτουμε ότι $\varphi_\lambda(0) > 0$. Επίσης, υποθέτουμε ότι η $\varphi_\lambda(u)$ είναι συνεχής. Θέτουμε $\varphi_0(u) = \varphi_{\lambda_0}(u)$.

Για να αποδείξουμε ότι ο δ_φ είναι καλύτερος από τον δ_0 χρειαζόμαστε τα ακόλουθα προκαταρκτικά αποτελέσματα. Επειδή η $a(x) = x^{-1}\ln(1+x)$ για $x > 0$ είναι γνησίως φθίνουσα με $\lim_{x\to 0^+} a(x) = 1$ και $\lim_{x\to\infty} a(x) = 0$, η εξίσωση $x^{-1}\ln(1+x) = c_0 \max\{\varphi_0(0), \varphi_0(1)\}$ έχει μία μοναδική λύση, την οποία συμβολίζουμε ως B^*, όταν $\max\{\varphi_0(0), \varphi_0(1)\} < c_0^{-1}$. Ακόμα, επειδή η $b(x) = ((1+x)/x)^2 \ln(1+x) - (1+x)/x$ για $x > 0$ είναι γνησίως αύξουσα (βλέπε Λήμμα A.6) με $\lim_{x\to 0^+} b(x) = 1/2$ και $\lim_{x\to\infty} b(x) = \infty$, η εξίσωση $\varepsilon/(\varepsilon-1) = ((1+x)/x)^2\ln(1+x) - (1+x)/x$ έχει μία μοναδική λύση την οποία συμβολίζουμε ως B^{**}.

Λήμμα 4.6. *Η συνάρτηση $f(u) = \ln(1+Bu^\varepsilon)/Bu^{\varepsilon-1}$, $0 < u < 1$ είναι γνησίως κοίλη για $0 < \varepsilon \leqslant 1$ και $B > 0$ ή για $\varepsilon > 1$ και $0 < B < B^{**}$.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$f'(u) = \frac{\varepsilon}{1+Bu^\varepsilon} + (1-\varepsilon)\frac{\ln(1+Bu^\varepsilon)}{Bu^\varepsilon},$$

οπότε για $0 < \varepsilon \leqslant 1$ η $f'(u)$ είναι γνησίως φθίνουσα ως προς $0 < u < 1$ και άρα η $f(u)$ είναι γνησίως κοίλη για $0 < u < 1$. Στη συνέχεια μελετούμε την περίπτωση όπου $\varepsilon > 1$. Έχουμε

$$f''(u) = \frac{Bu^{\varepsilon-1}}{(Bu^\varepsilon)^2}\Big\{-\varepsilon^2\Big(\frac{Bu^\varepsilon}{1+Bu^\varepsilon}\Big)^2 + (1-\varepsilon)\varepsilon\Big(\frac{Bu^\varepsilon}{1+Bu^\varepsilon} - \ln(1+Bu^\varepsilon)\Big)\Big\}$$

και παρατηρούμε ότι $f''(u) < 0$ εάν

$$\begin{aligned}\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1} &> \frac{1+Bu^\varepsilon}{Bu^\varepsilon}\Big\{\frac{1+Bu^\varepsilon}{Bu^\varepsilon}\ln(1+Bu^\varepsilon) - 1\Big\}\\ &= \Big(\frac{1+Bu^\varepsilon}{Bu^\varepsilon}\Big)^2\ln(1+Bu^\varepsilon) - \frac{1+Bu^\varepsilon}{Bu^\varepsilon}.\end{aligned} \tag{4.20}$$

Θέτοντας $x = Bu^\varepsilon$ η ποσότητα στο δεξιό μέλος της (4.20) είναι η συνάρτηση $b(x)$ που ορίστηκε παραπάνω και η οποία είναι γνησίως αύξουσα για $x > 0$. Συνεπώς, για να είναι η $f(u)$ γνησίως κοίλη, ικανή συνθήκη είναι η

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1} > \Big(\frac{1+B}{B}\Big)^2\ln(1+B) - \frac{1+B}{B}$$

και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Λήμμα 4.7. *Έστω ότι οι (A1), (A3) ισχύουν και $\max\{\varphi_0(0), \varphi_0(1)\} < c_0^{-1}$. Τότε η συνάρτηση $\ln(1+Bu^\varepsilon)/(c_0Bu^{\varepsilon-1}) - \varphi_\lambda(u)$, $0 < u \leqslant 1$, έχει μία μόνον αλλαγή προσήμου από αρνητική σε θετική για κάθε λ, όταν $0 < \varepsilon \leqslant 1$ και $0 < B < B^*$ ή όταν $\varepsilon > 1$ και $0 < B < \min\{B^*, B^{**}\}$.*

Απόδειξη. Έστω $s(u;\lambda) = \ln(1+Bu^\varepsilon)/(c_0Bu^{\varepsilon-1}) - \varphi_\lambda(u)$. Αρχικά αποδεικνύουμε ότι η $s(u;\lambda)$ έχει τουλάχιστον μία αλλαγή προσήμου αρχίζοντας αρνητική και καταλήγοντας θετική. Προς αυτή την κατεύθυνση, παρατηρούμε πρώτα ότι

$$\lim_{u\to 0^+} s(u;\lambda) = -\varphi_\lambda(0) < 0. \tag{4.21}$$

Με ανάλογο τρόπο όπως και στην απόδειξη του Λήμματος 4.3, παίρνουμε

$$s(1;\lambda) \geqslant \frac{\ln(1+B)}{c_0B} - \varphi_0(1) > 0.$$

Τώρα, εάν, σύμφωνα με την (A3), η $\varphi_\lambda(u)$ είναι κυρτή και επειδή η $\ln(1+Bu^\varepsilon)/(c_0 Bu^{\varepsilon-1})$ είναι γνησίως κοίλη, έχουμε ότι η $s(u;\lambda)$ είναι κοίλη. Η κοιλότητά της εξασφαλίζει ότι έχει μία μόνον αλλαγή προσήμου. Εάν, από την άλλη πλευρά, η $\varphi_\lambda(u)$ είναι φθίνουσα τότε η $s(u;\lambda)$ είναι η διαφορά μεταξύ της γνησίως κοίλης συνάρτησης $\ln(1+Bu^\varepsilon)/(c_0 Bu^{\varepsilon-1})$ και της φθίνουσας συνάρτησης $\varphi_\lambda(u)$. Τότε η $s(u;\lambda)$ θα έχει μία μόνον αλλαγή προσήμου εφ' όσον δείξουμε ότι $\varphi_\lambda(0) < \ln(1+Bu^\varepsilon)/(c_0 Bu^{\varepsilon-1})\,|_{u=1} = \ln(1+B)/(c_0 B)$. Η τελευταία ανισότητα ισχύει επειδή, από την ανάλογη σχέση της (4.10), $\varphi_\lambda(0) \leqslant \varphi_0(0)$ και $B < B^*$. □

Το επόμενο θεώρημα αποδεικνύει ότι ο εκτιμητής τύπου Strawderman δ_φ στην (4.2) είναι καλύτερος από τον κλασικό εκτιμητή δ_0 στην (4.14). Το θεώρημα αυτό αποτελεί επέκταση του Θεωρήματος 2.2 των Maruyama and Strawderman (2006) στο γενικό μοντέλο (3.1) για την εκτίμηση του $1/\sigma$ ως προς τη συνάρτηση ζημίας εντροπίας.

Θεώρημα 4.8. *Έστω ότι (A1), (A2), (A3) ισχύουν και* $\max\{\varphi_0(0), \varphi_0(1)\} < c_0^{-1}$. *Τότε η μέση ζημία εντροπίας του* δ_φ *στην* (4.2) *είναι μικρότερη ή ίση από αυτήν του* δ_0 *στην* (4.14) *εάν η συνάρτηση* $\varphi(w)$ *ικανοποιεί, για κάποιο* $\varepsilon > 0$,

(ST1) $(1+w)^\varepsilon \varphi(w)$ *είναι φθίνουσα στο* $(0,\infty)$,

(ST2) $0 \leqslant \varphi(w) \leqslant B(\varepsilon)$ *για* $w > 0$,

όπου $B(\varepsilon) = \min\{B^*, B_0(\varepsilon)\}$ *για* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *ή* $B(\varepsilon) = \min\{B^*, B^{**}, B_0(\varepsilon)\}$ *για* $\varepsilon > 1$. *Επί πλέον, εάν αντί της (ST2) ισχύει* $0 < \lim_{w\to 0^+} \varphi(w) < B(\varepsilon)$, *τότε η μέση ζημία εντροπίας του* δ_φ *είναι αυστηρά μικρότερη από αυτήν του* δ_0.

Απόδειξη. Αποδεικνύουμε το αποτέλεσμα δείχνοντας ότι η διαφορά των μέσων ζημιών εντροπίας μεταξύ των δ_0 και δ_φ φράσσεται από κάτω από ένα θετικό πολλαπλάσιο της διαφοράς των μέσων ζημιών εντροπίας μεταξύ των δ_0 και $\delta^{(r)}$ για κάποιο r που θα προσδιοριστεί και επικαλούμενοι στη συνέχεια το Θεώρημα 4.5. Έστω $RD = \mathsf{E}(\delta_0/\sigma^{-1} - \ln \delta_0/\sigma^{-1} - 1) - \mathsf{E}(\delta_\varphi/\sigma^{-1} - \ln \delta_\varphi/\sigma^{-1} - 1)$. Τότε λόγω της μορφής των δ_0 και δ_φ έχουμε

$$RD = \mathsf{E}\Big[\psi(W)\Big\{\frac{1}{\psi(W)}\ln\Big(1+\frac{\psi(W)}{(1+W)^\varepsilon}\Big) - \frac{c_0}{(1+W)^\varepsilon}\Big(\frac{S}{\sigma}\Big)^{-1}\Big\} I(W>0)\Big],$$

όπου $\psi(w) = (1+w)^\varepsilon \varphi(w)$. Από την (ST1), η $\psi(w)$ είναι φθίνουσα και συνεπώς

$$0 \leqslant \psi(w) \leqslant \lim_{w\to 0^+} \psi(w) = \lim_{w\to 0^+} \varphi(w) = B. \tag{4.22}$$

Άρα, λαμβάνοντας υπ' όψη ότι η $x^{-1}\ln(1+x)$ για $x>0$ είναι φθίνουσα, παίρνουμε

$$\begin{aligned} RD &\geqslant \mathsf{E}\Big[\psi(W)\Big\{\frac{1}{B}\ln\Big(1+\frac{B}{(1+W)^\varepsilon}\Big) - \frac{c_0}{(1+W)^\varepsilon}\Big(\frac{S}{\sigma}\Big)^{-1}\Big\} I(W>0)\Big] \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \psi(w)\Big\{\frac{1}{B}\ln\Big(1+\frac{B}{(1+w)^\varepsilon}\Big) - c_0\frac{y^{-1}}{(1+w)^\varepsilon}\Big\} \\ &\quad \times yg(y)h(wy;\lambda)I(wy>\kappa(\lambda))dydw. \end{aligned}$$

Με αλλαγή των μεταβλητών $u = 1/(1+w)$ και $v = (1+w)y$ έχουμε

$$
\begin{aligned}
RD &\geqslant \int_0^1 \psi\Big(\frac{1-u}{u}\Big) \int_\alpha^\infty \Big\{\frac{\ln(1+Bu^\varepsilon)}{B} - c_0 u^{\varepsilon-1} v^{-1}\Big\} vg(uv)h((1-u)v;\lambda)dvdu \\
&= \int_0^1 \psi\Big(\frac{1-u}{u}\Big)\Big\{\frac{\ln(1+Bu^\varepsilon)}{B} \int_\alpha^\infty vg(uv)h((1-u)v;\lambda)dv \\
&\qquad - c_0 u^{\varepsilon-1} \int_\alpha^\infty g(uv)h((1-u)v;\lambda)dv\Big\} du \\
&= \int_0^1 \psi\Big(\frac{1-u}{u}\Big) c_0 u^{\varepsilon-1} \int_\alpha^\infty vg(uv)h((1-u)v;\lambda)dv \\
&\qquad \times \Big\{\frac{\ln(1+Bu^\varepsilon)}{c_0 B u^{\varepsilon-1}} - \varphi_\lambda(u)\Big\} du.
\end{aligned}
\tag{4.23}
$$

Από τις (4.22) και (ST2) έπεται ότι $B \leqslant B^*$ για $0 < \varepsilon \leqslant 1$ ή $B \leqslant \min\{B^*, B^{**}\}$ για $\varepsilon > 1$. Συνεπώς, το Λήμμα 4.7 εξασφαλίζει ότι η $\ln(1+Bu^\varepsilon)/(c_0 B u^{\varepsilon-1}) - \varphi_\lambda(u)$ έχει μία μόνον αλλαγή προσήμου από αρνητική σε θετική. Επειδή η $\psi(\frac{1-u}{u})$ είναι αύξουσα, από το Λήμμα A.1 και την (4.23) συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $0 < u_0 < 1$ τέτοιο ώστε

$$
\begin{aligned}
RD &\geqslant \psi(\frac{1-u_0}{u_0}) \int_0^1 c_0 u^{\varepsilon-1} \int_\alpha^\infty vg(uv)h((1-u)v;\lambda)dv \\
&\qquad \times \Big\{\frac{\ln(1+Bu^\varepsilon)}{c_0 B u^{\varepsilon-1}} - \varphi_\lambda(u)\Big\} du \\
&= \psi(\frac{1-u_0}{u_0})\Big\{ \int_0^1 \frac{\ln(1+Bu^\varepsilon)}{B} \int_\alpha^\infty vg(uv)h((1-u)v;\lambda)dvdu \\
&\qquad - c_0 \int_0^1 u^{\varepsilon-1} \int_\alpha^\infty g(uv)h((1-u)v;\lambda)dvdu\Big\}.
\end{aligned}
\tag{4.24}
$$

Συγκρίνοντας με την (4.16), παρατηρούμε ότι η (4.24) γίνεται $RD \geqslant r^{-1}\psi(\frac{1-u_0}{u_0})RD(\delta_0, \delta^{(r)})$ με $r = B$. Επομένως, το αποτέλεσμα έπεται άμεσα από το Θεώρημα 4.5 επειδή $B \leqslant B_0(\varepsilon)$. □

4.3 Η εκθετική κατανομή $E(\mu, \sigma)$

Εδώ, εφαρμόζουμε τα αποτελέσματα των Ενοτήτων 4.1, 4.2 στην εκθετική κατανομή. Έστω $X_1, \ldots, X_n$, $n \geqslant 2$, τυχαίο δείγμα από μία διπαραμετρική εκθετική κατανομή $E(\mu, \sigma)$ με πυκνότητα που δίνεται από τη σχέση

$$
f(x;\mu,\sigma) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma}\exp\Big\{-\dfrac{1}{\sigma}(x-\mu)\Big\} & \text{εάν } x > \mu, \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}
$$

Η παράμετρος θέσης μ και η παράμετρος κλίμακας σ είναι άγνωστες με $-\infty < \mu < +\infty$ και $\sigma > 0$. Όπως αναφέρθηκε και στην Ενότητα 3.3, η ελάχιστη επαρκής στατιστική συνάρτηση για αυτό το μοντέλο είναι $(S, X_{(1)})$, όπου $S = \sum_{i=1}^n (X_i - X_{(1)})$ και $X_{(1)} = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$. Στην περίπτωση αυτή, υπενθυμίζουμε ότι S και $X = nX_{(1)}$ είναι ανεξάρτητα με πυκνότητες $G(n-1, \sigma)$ και $E(n\mu, \sigma)$, αντίστοιχα, ενώ σύμφωνα με την (3.1) έχουμε

$$
g(v) = \frac{1}{(n-2)!} v^{n-2} e^{-v},\ v > 0, \qquad h(x;\lambda) = e^{-(x - n\mu/\sigma)},\ x > \frac{n\mu}{\sigma}, \tag{4.25}
$$

$\lambda = n\mu/\sigma$, $\kappa(\lambda) = \lambda$ και $\lambda_0 = 0$. Επίσης, $h(x) = h(x;0) = e^{-x}$, $x > 0$, και $W = nX_{(1)}/S$. Στη συνέχεια μελετούμε το πρόβλημα εκτίμησης του $1/\sigma$ ως προς την τετραγωνική συνάρτηση ζημίας L_1 και τη συνάρτηση ζημίας εντροπίας L_2.

4.3.1 Εκτίμηση του $1/\sigma$ ως προς την τετραγωνική συνάρτηση ζημίας

Από τις (4.1) και (4.25) παίρνουμε $c_0 = n-3$ και $\delta_0 = (n-3)S^{-1}$. Ο εκτιμητής τύπου Stein και ο εκτιμητής τύπου Brewster and Zidek του $1/\sigma$ είναι, αντίστοιχα,

$$\delta_S = (n-3)\{1+\varphi_S(W)\}S^{-1} \quad \text{και} \quad \delta_{BZ} = (n-3)\{1+\varphi_{BZ}(W)\}S^{-1}, \tag{4.26}$$

όπου

$$\varphi_S(W) = \begin{cases} \max\left\{0, \dfrac{1-(n-3)W}{(n-3)(1+W)}\right\} & \text{εάν } W > 0, \\ 0 & \text{διαφορετικά,} \end{cases}$$

και

$$\varphi_{BZ}(W) = \begin{cases} \dfrac{W}{(1+W)^{n-2} - (1+W)} & \text{εάν } W > 0, \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Οι βελτιωμένοι εκτιμητές δ_S, δ_{BZ} έχουν τη μορφή του δ_φ στην (4.2), αλλά ικανοποιούν τις συνθήκες Brewster and Zidek

(BZ1) $\varphi(w)$ είναι φθίνουσα στο $(0,\infty)$,

(BZ2) $0 \leqslant \varphi(w) \leqslant \varphi_{BZ}(w)$ για $w > 0$,

όπου το $\varphi_{BZ}(w)$ εδώ δίνεται από την (4.26).

Επαληθεύουμε τις (A1), (A2) και (A3) και βρίσκουμε τους εκτιμητές τύπου Strawderman. Οι δύο πρώτες συνθήκες, όπως είδαμε και στο προηγούμενο κεφάλαιο, είναι γνωστό ότι ισχύουν. Τώρα, η (4.8) δίνει $\varphi_\lambda(u) = 1/(n-2)$, για $\mu \leqslant 0$ και $\varphi_\lambda(u) = \int_\alpha^\infty v^{n-3}e^{-v}dv / \int_\alpha^\infty v^{n-2}e^{-v}dv$ για $\mu > 0$, όπου $\alpha = n\mu/(1-u)\sigma$, η οποία μπορεί να δειχθεί ότι είναι φθίνουσα με τον ίδιο τρόπο όπως η αντίστοιχη $\varphi_\lambda(u)$ στην περίπτωση της τετραγωνικής συνάρτησης ζημίας για την εκτίμηση του σ (βλέπε Ενότητα 3.3.1). Συνεπώς η (A3) ισχύει επίσης. Επί πλέον, η (4.4) δίνει

$$B_0(\varepsilon) = \frac{2\varepsilon(n+2\varepsilon-3)}{(n-3)(n+\varepsilon-2)(n+\varepsilon-3)},$$

ενώ $2c_0^{-1}/\max\{\varphi_0(0), \varphi_0(1)\} - 2 = 2/(n-3)$. Εφαρμόζοντας τώρα το Θεώρημα 4.1 έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 4.9. *Ο εκτιμητής*

$$\delta^{(r)} = \begin{cases} (n-3)\{1+r\,(1+W)^{-\varepsilon}\}S^{-1} & \textit{εάν } W > 0, \\ (n-3)S^{-1} & \textit{διαφορετικά,} \end{cases}$$

για $\varepsilon > 0$ και $0 < r <$ (αντίστοιχα, $\leqslant$) $2\varepsilon(n+2\varepsilon-3)/[(n-3)(n+\varepsilon-2)(n+\varepsilon-3)]$ έχει μέση τετραγωνική ζημία αυστηρά μικρότερη (αντίστοιχα, μικρότερη ή ίση) από τον $\delta_0 = (n-3)S^{-1}$.

Παρατήρηση 4.1. Σημειώνουμε ότι, τουλάχιστον για $\varepsilon < n-3$, το ότι ο $\delta^{(r)}$ είναι καλύτερος από τον $\delta_0 = (n-3)S^{-1}$ δεν μπορεί να προκύψει από τις συνθήκες Brewster and Zidek επειδή για $w \to \infty$, $\varphi_{BZ}(w) = O(w^{-n+3})$ (βλέπε (4.26)) και $r\ (1+w)^{-\varepsilon} = O(w^{-\varepsilon})$, οπότε παραβιάζεται η (BZ2).

Από την άλλη πλευρά, εφαρμόζοντας το Θεώρημα 4.4 παίρνουμε νέες ικανές συνθήκες, τύπου Strawderman, ώστε ένας αναλλοίωτος κατά κλίμακα εκτιμητής να είναι καλύτερος από τον βέλτιστο αναλλοίωτο εκτιμητή $\delta_0 = (n-3)S^{-1}$. Σημειώνουμε ότι και στις δύο περιπτώσεις, $0 < \varepsilon \leqslant 1$ και $\varepsilon > 1$, τα φράγματα $B(\varepsilon)$ του Θεωρήματος 4.4 αποδεικνύεται ότι συμπίπτουν.

Θεώρημα 4.10. *Ο εκτιμητής*

$$\delta_\varphi = \begin{cases} (n-3)\{1+\varphi(W)\}S^{-1} & \textit{εάν}\ W > 0, \\ (n-3)S^{-1} & \textit{διαφορετικά}, \end{cases} \tag{4.27}$$

έχει μέση τετραγωνική ζημία μικρότερη ή ίση από αυτήν του $\delta_0 = (n-3)S^{-1}$ εάν για κάποιο $\varepsilon > 0$,

(ST1) $(1+w)^\varepsilon \varphi(w)$ είναι φθίνουσα ως προς $w > 0$ και

(ST2) $0 \leqslant \varphi(w) \leqslant B(\varepsilon)$, όπου

$$B(\varepsilon) = \min\left\{\frac{2}{n-3}, \frac{2\varepsilon(n+2\varepsilon-3)}{(n-3)(n+\varepsilon-2)(n+\varepsilon-3)}\right\}. \tag{4.28}$$

Παρατήρηση 4.2. Επειδή ο $(n-3)S^{-1}$ είναι minimax, το ίδιο ισχύει και για τους $\delta^{(r)}$ και δ_φ των Θεωρημάτων 4.9 και 4.10. Επίσης, ανάλογα αποτελέσματα όπως αυτά των Θεωρημάτων 4.9 και 4.10 μπορούν να εξαχθούν για την εκτίμηση του $(1/\sigma)^m$, $m > 0$.

Στη συνέχεια, προχωρούμε στην κατασκευή μιας κλάσης εκτιμητών οι οποίοι είναι γενικευμένοι Bayes όταν $S + X > 0$, χρησιμοποιώντας την ίδια εκ των προτέρων κατανομή όπως στην Ενότητα 3.3. Επειδή ο γενικευμένος εκτιμητής Bayes του $\eta = 1/\sigma$ δίνεται από τη σχέση $\delta_{GB} = \mathsf{E}(\eta^{-1} \mid S, X)/\mathsf{E}(\eta^{-2} \mid S, X)$, παίρνουμε

$$\begin{aligned}\delta_{GB} &= (a+n-2)\frac{\int_0^1 t^a(1-t)^{b-1}(1-\frac{W}{1+W}t)^{n-b-2}dt}{\int_0^1 t^a(1-t)^{b-1}(1-\frac{W}{1+W}t)^{n-b-3}dt}\, S^{-1} \\ &= (n-3)\{1+\varphi_{a,b}(W)\}S^{-1},\end{aligned} \tag{4.29}$$

όπου η τελευταία ισότητα χρησιμοποιείται για τον ορισμό της $\varphi_{a,b}(w)$.

Έστω τώρα

$$\delta_{a,b} = \begin{cases} (n-3)\{1+\varphi_{a,b}(W)\}S^{-1} & \text{εάν}\ W > 0, \\ (n-3)S^{-1} & \text{διαφορετικά} \end{cases} \tag{4.30}$$

και ας θεωρήσουμε την κλάση των εκτιμητών του $1/\sigma$, $\{\delta_{a,b} : a > -1, b \geqslant 1\}$. Λαμβάνοντας υπ' όψη την $\varphi_{MS}(w; m, p, a_1, b_1)$ που δίνεται στην (3.37), παρατηρούμε ότι η $\varphi_{a,b}(w)$ στην (4.29) μπορεί να εκφραστεί ως

$$\varphi_{a,b}(w) = \left\{2(n-3)\varphi_{MS}(w; 2(n-4), p, a-p/2, b-1)\right\}^{-1} - 1.$$

Επομένως, από τους Maruyama and Strawderman (2006) και συγκεκριμένα, το Λήμμα 3.1, την εξίσωση μετά τη σχέση (11) και το Θεώρημα 3.3, έχουμε το εξής αποτέλεσμα.

Λήμμα 4.11. (i) *$\varphi_{a,b}(w)$ είναι φθίνουσα ως προς $w > 0$.*

(ii) *$\varphi_{a,b}(w)$ είναι αύξουσα ως προς a.*

(iii) *Εάν $w \to \infty$, τότε $\varphi_{a,1}(w) = O(w^{-n+3})$ και $\varphi_{a,b}(w) = O(w^{-1})$ για $b > 1$.*

(iv) *$\varphi_{a,b}(w) \leqslant (a+1)/(n-3)$,*

(v) *$(1+w)^{\varepsilon}\varphi_{a,b}(w)$ είναι φθίνουσα εάν*

(a) *$b = 1$, $\varepsilon < n-3$ και $a \leqslant -2 + (n-3)/\varepsilon$ ή*

(b) *$1 < b \leqslant n-2$, $\varepsilon < \min\{1, (n-3)/b\}$ και $a \leqslant -1 - b + (n-3)/\varepsilon$ ή*

(c) *$b > n-2$, $\varepsilon < (n-3)/b$ και $a \leqslant -1 + (n-3-b\varepsilon)/(b-n+2+\varepsilon)$.*

Συνδυάζοντας το Θεώρημα 4.10 και τις παραπάνω ιδιότητες της $\varphi_{a,b}(w)$, βρίσκουμε τους εξής βελτιωμένους εκτιμητές τύπου Strawderman εντός της κλάσης $\{\delta_{a,b} : a > -1, b \geqslant 1\}$.

Θεώρημα 4.12. *Έστω ότι $B(\varepsilon)$ είναι όπως στην* (4.28). *Ο εκτιμητής $\delta_{a,b}$ στην* (4.30) *ικανοποιεί τις (ST1) και (ST2) του Θεωρήματος 4.10 και συνεπώς είναι καλύτερος από τον $\delta_0 = (n-3)S^{-1}$ εάν*

(i) $b = 1$ *και* $-1 < a \leqslant -1 + \max_{\varepsilon < n-3} \min\big\{(n-3)B(\varepsilon), (n-3)/\varepsilon - 1\big\}$ *ή*

(ii) $1 < b \leqslant n-2$ *και* $-1 < a \leqslant -1 + \max_{\varepsilon < \min\{1,(n-3)/b\}} \min\big\{(n-3)B(\varepsilon), (n-3)/\varepsilon - b\big\}$ *ή*

(iii) $b > n-2$ *και* $-1 < a \leqslant -1 + \max_{\varepsilon < (n-3)/b} \min\big\{(n-3)B(\varepsilon), (n-3-b\varepsilon)/(b-n+2+\varepsilon)\big\}$.

Αξίζει να σημειωθεί ότι για $b = n-3$ και a όπως στο Θεώρημα 4.12(ii) αλλά με το δεξιό μέρος της ανισότητας να ισχύει ως αυστηρή ανισότητα παίρνουμε τον βελτιωμένο εκτιμητή

$$\delta_{a,n-3} = \begin{cases} (n-3)\Big\{1 + \dfrac{a+1}{(n-3)(1+W)}\Big\}S^{-1} & \text{εάν } W > 0, \\ (n-3)S^{-1} & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

ο οποίος είναι γενικευμένος Bayes για $W > 0$, απλός στη μορφή, πιο «λείος» από τον εκτιμητή τύπου Stein δ_S στην (4.26), τόσο «λείος» όσο ο εκτιμητής τύπου Brewster and Zidek-type δ_{BZ} στην (4.26) και, αντίθετα από τον δ_{BZ}, λόγω του Θεωρήματος 4.4, βελτιώνει τη μέση τετραγωνική ζημία του $(n-3)S^{-1}$ για όλα τα μ και σ.

Έστω τώρα, για $r > 0$,

$$\delta_{ST} = \begin{cases} (n-3)\Big\{1 + \dfrac{r}{1+W}\Big\}S^{-1} & \text{εάν } W > 0, \\ (n-3)S^{-1} & \text{διαφορετικά.} \end{cases} \tag{4.31}$$

Το επόμενο θεώρημα παρέχει βελτιωμένους εκτιμητές τύπου Strawderman στην κλάση $\{\delta_{ST} : r > 0\}$.

Θεώρημα 4.13. *Ο εκτιμητής* δ_{ST} *στην* (4.31), *για*

$$0 < r < \max_{\varepsilon \leqslant 1} \min \left\{ \frac{2}{n-3}, \frac{2\varepsilon(n+2\varepsilon-3)}{(n-3)(n+\varepsilon-2)(n+\varepsilon-3)} \right\},$$

έχει μικρότερη μέση τετραγωνική ζημία από τον $(n-3)S^{-1}$.

Απόδειξη. Ο δ_{ST} είναι της μορφής (4.27) με $\varphi(w) = r/(1+w)$. Οπότε, η (ST1) προφανώς ικανοποιείται για $0 < \varepsilon \leqslant 1$ και $r > 0$, ενώ η σχέση

$$0 < \lim_{w \to 0^+} \varphi(w) < \min \left\{ \frac{2}{(n-3)}, \frac{2\varepsilon(n+2\varepsilon-3)}{(n-3)(n+\varepsilon-2)(n+\varepsilon-3)} \right\}$$

ισχύει όταν

$$r < \min \left\{ \frac{2}{(n-3)}, \frac{2\varepsilon(n+2\varepsilon-3)}{(n-3)(n+\varepsilon-2)(n+\varepsilon-3)} \right\}.$$

Το αποτέλεσμα τώρα προκύπτει από το Θεώρημα 4.10. □

Για επιλεγμένες τιμές των n, τα άνω φράγματα για το r του Θεωρήματος 4.13 δίνονται στον Πίνακα 4.1. Το Σχήμα 4.1 απεικονίζει τις επί τοις εκατό βελτιώσεις των μέσων τετραγωνικών ζημιών των δ_S, δ_{BZ} και δ_{ST} για $n = 7, 10$ και $r = 0.1, 0.0357$. Βλέπουμε ότι ο δ_S παρουσιάζει σημαντική βελτίωση για $\lambda = 0$ η οποία ωστόσο φθίνει ραγδαία προς το 0. Ο δ_{BZ} προσφέρει σημαντικά μεγαλύτερη βελτίωση από τον δ_{ST} σε μία συγκριτικά μικρή δεξιά περιοχή του $\lambda = 0$ (αλλά όχι στο $\lambda = 0$ όπου η μέση τετραγωνική ζημία του είναι ίση με αυτήν του δ_0) ενώ ο δ_{ST} παραμένει σαφώς καλύτερος από τον δ_{BZ} για ένα μεγαλύτερο εύρος τιμών του λ.

Πίνακας 4.1: Τιμές άνω φράγματος για το r

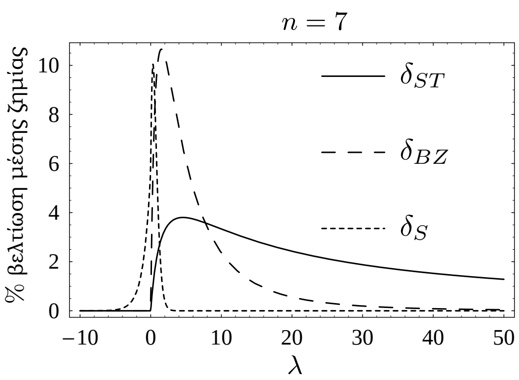
r	n			
	5	6	7	10
	0.3333	0.1666	0.1	0.0357

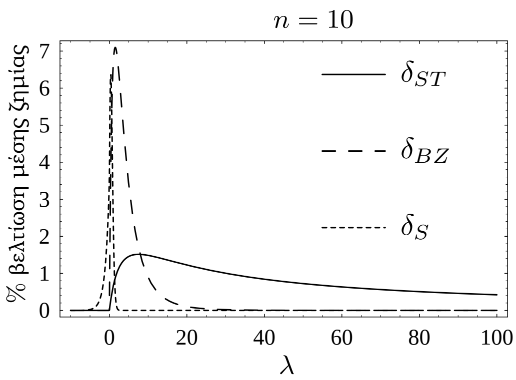
Στη συνέχεια, προτείνουμε μία νέα κλάση βελτιωμένων εκτιμητών του $1/\sigma$ που είναι υποσύνολο της $\{\delta_{a,b} : a > -1, b \geqslant 1\}$ και οι οποίοι ικανοποιούν τις συνθήκες Brewster and Zidek.

Θεώρημα 4.14. *Ο εκτιμητής* $\delta_{a,1}$, $-1 < a \leqslant 0$, *ικανοποιεί τις συνθήκες Brewster and Zidek και συνεπώς είναι καλύτερος από τον* $\delta_0 = (n-3)S^{-1}$.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι $\delta_{0,1} = \delta_{BZ}$ έτσι ώστε $\varphi_{0,1}(w) = \varphi_{BZ}(w)$. Από το Λήμμα 4.11(i), η $\varphi_{a,1}(w)$ είναι φθίνουσα ως προς w, οπότε η (BZ1) ισχύει. Από το Λήμμα 4.11(ii), για $a \leqslant 0$ έχουμε $\varphi_{a,1}(w) \leqslant \varphi_{0,1}(w) = \varphi_{BZ}(w)$, οπότε η (BZ2) ισχύει επίσης. □

Τέλος, αποδεικνύουμε ότι οι συνθήκες (ST1), (ST2) του Θεωρήματος 4.12 και οι συνθήκες Brewster and Zidek είναι πράγματι διαφορετικές. Ένας βελτιωμένος εκτιμητής του $1/\sigma$ που ικανοποιεί τις πρώτες δεν ικανοποιεί απαραίτητα τις τελευταίες.





Σχήμα 4.1: % βελτιώσεις των μέσων τετραγωνικών ζημιών των δ_S, δ_{BZ} και δ_{ST} για (α) $n = 7$, $r = 0.1$ και (β) $n = 10$, $r = 0.0357$.

Θεώρημα 4.15. (i) *Ο εκτιμητής δ_{BZ} (για $n \geqslant 5$) δεν ικανοποιεί τις συνθήκες (ST1), (ST2) του Θεωρήματος 4.10.*

(ii) *Έστω $a_0 = -1 + \max_{\varepsilon<(n-3)} \min\left\{(n-3)B(\varepsilon), (n-3)/\varepsilon - 1\right\}$, όπου το $B(\varepsilon)$ δίνεται από την* (4.28). *Τότε, $a_0 < 0$ και ο $\delta_{a,1}$, $-1 < a \leqslant a_0$, ικανοποιεί ταυτόχρονα τις συνθήκες (ST1), (ST2) και τις συνθήκες Brewster and Zidek, (BZ1) και (BZ2).*

(iii) *Για $b > 1$, ο $\delta_{a,b}$ δεν ικανοποιεί τις συνθήκες Brewster and Zidek, (BZ1) και (BZ2).*

Απόδειξη. (i) Οι συνθήκες (ST1), (ST2) για τον δ_{BZ} απαιτούν ότι για κάποιο $\varepsilon > 0$, η $(1 + w)^{\varepsilon}\varphi_{BZ}(w)$ είναι φθίνουσα στο $(0, \infty)$ και $0 \leqslant \varphi_{BZ}(w) \leqslant B(\varepsilon)$, όπου $B(\varepsilon)$ δίνεται από την (4.28). Από την (4.26), έχουμε $(1+w)^{\varepsilon}\varphi_{BZ}(w) = u^{n-\varepsilon-3}(1-u)/(1-u^{n-3}) = u^{n-\varepsilon-3}/\sum_{k=0}^{n-4} u^k$ $= K(u)$, όπου $u = (1 + w)^{-1}$. Παρατηρούμε ότι ο αριθμητής της παραγώγου $K'(u)$ είναι $u^{n-\varepsilon-4}\sum_{k=0}^{n-4}(n-\varepsilon-3-k)u^k$ όπου, για $u = 1$, έχει τιμή $\sum_{k=0}^{n-4}(n-\varepsilon-3-k) = (n-3)(n/2-1-\varepsilon) < 0$ εάν $\varepsilon > n/2-1$. Συνεπώς, για να είναι η $K(u)$ αύξουσα στο $(0, 1)$, αναγκαία συνθήκη είναι $\varepsilon \leqslant n/2 - 1$. (Στην πραγματικότητα, μπορεί να αποδειχθεί ότι η $K(u)$ είναι αύξουσα στο $(0, 1)$ εάν και μόνον εάν $0 < \varepsilon \leqslant n/2 - 1$.) Από την άλλη πλευρά, $\varphi_{BZ}(w) \leqslant \varphi_{BZ}(0^+) = (n-3)^{-1}$ έτσι ώστε η σχέση $\varphi_{BZ}(w) \leqslant B(\varepsilon)$ ισοδύναμα γίνεται $3\varepsilon^2 - \varepsilon \geqslant (n-2)(n-3)$, η οποία δεν ισχύει λόγω της $\varepsilon \leqslant n/2 - 1$. Το συμπέρασμα είναι ότι ο δ_{BZ} δεν ικανοποιεί τις συνθήκες (ST1), (ST2).
(ii) Έστω $a_0 \geqslant 0$. Τότε, από το Θεώρημα 4.12(i) προκύπτει ότι ο $\delta_{0,1} = \delta_{BZ}$ ικανοποιεί τις (ST1), (ST2). Επομένως, $a_0 < 0$ και το υπόλοιπο μέρος της απόδειξης προκύπτει από το Θεώρημα 4.12(i) και το Θεώρημα 4.14.
(iii) Έστω $b > 1$. Τότε, από το Λήμμα 4.11(iii) προκύπτει $\varphi_{a,b}(w) = O(w^{-1})$ και $\varphi_{BZ}(w) = \varphi_{0,1}(w) = O(w^{-n+3})$. Συνεπώς, για αρκετά μεγάλο w, $\varphi_{a,b}(w) > \varphi_{BZ}(w)$ παραβιάζοντας την (BZ2). □

Παρατήρηση 4.3. Για $n = 4$, μπορεί να δειχθεί ότι ο εκτιμητής δ_{BZ} ικανοποιεί τις συνθήκες (ST1), (ST2) του Θεωρήματος 4.10.

4.3.2 Εκτίμηση του $1/\sigma$ ως προς τη συνάρτηση ζημίας εντροπίας

Από τις (4.14) και (4.25) παίρνουμε $c_0 = n-2$ και $\delta_0 = (n-2)S^{-1}$. Ο εκτιμητής τύπου Stein και ο εκτιμητής τύπου Brewster and Zidek του $1/\sigma$ είναι, αντίστοιχα,

$$\delta_S = (n-2)\{1+\varphi_S(W)\}S^{-1} \quad \text{και} \quad \delta_{BZ} = (n-2)\{1+\varphi_{BZ}(W)\}S^{-1}, \tag{4.32}$$

όπου

$$\varphi_S(W) = \begin{cases} \max\left\{0, \dfrac{1-(n-2)W}{(n-2)(1+W)}\right\} & \text{εάν } W>0, \\ 0 & \text{διαφορετικά,} \end{cases}$$

και

$$\varphi_{BZ}(W) = \begin{cases} \dfrac{W}{(1+W)^{n-1}-(1+W)} & \text{εάν } W>0, \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Οι βελτιωμένοι εκτιμητές δ_S, δ_{BZ} έχουν τη μορφή του δ_φ στην (4.2), αλλά, όπως αναφέρθηκε στην Ενότητα 4.3.1, ικανοποιούν τις συνθήκες Brewster and Zidek

(BZ1) $\varphi(w)$ είναι φθίνουσα στο $(0,\infty)$,

(BZ2) $0 \leqslant \varphi(w) \leqslant \varphi_{BZ}(w)$ για $w>0$,

όπου το $\varphi_{BZ}(w)$ εδώ δίνεται από την (4.32).

Επαληθεύουμε τις (A1), (A2) και (A3) και βρίσκουμε τους εκτιμητές τύπου Strawderman. Όπως σημειώθηκε προηγουμένως, οι δύο πρώτες συνθήκες είναι γνωστό ότι ισχύουν. Τώρα, η (4.19) δίνει $\varphi_\lambda(u) = 1/(n-1)$, για $\mu \leqslant 0$ και $\varphi_\lambda(u) = \int_\alpha^\infty v^{n-2}e^{-v}dv / \int_\alpha^\infty v^{n-1}e^{-v}dv$ για $\mu>0$, όπου $\alpha = n\mu/(1-u)\sigma$, η οποία μπορεί να δειχθεί ότι είναι φθίνουσα (με τον ίδιο τρόπο όπως η αντίστοιχη $\varphi_\lambda(u)$ στην Ενότητα 3.3.1). Συνεπώς η (A3) ισχύει επίσης. Επί πλέον, η (4.15) δίνει

$$B_0(\varepsilon) = \frac{2\varepsilon(n+2\varepsilon-1)}{(n-1)(n+\varepsilon-1)(n+\varepsilon-2)},$$

ενώ $c_0 \max\{\varphi_0(0), \varphi_0(1)\} = (n-2)/(n-1)$. Εφαρμόζοντας τώρα το Θεώρημα 4.5 έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 4.16. *Ο εκτιμητής*

$$\delta^{(r)} = \begin{cases} (n-2)\{1+r\,(1+W)^{-\varepsilon}\}S^{-1} & \textit{εάν } W>0, \\ (n-2)S^{-1} & \textit{διαφορετικά,} \end{cases}$$

για $\varepsilon>0$ και $0<r<$ (αντίστοιχα, $\leqslant$) $2\varepsilon(n+2\varepsilon-1)/[(n-1)(n+\varepsilon-1)(n+\varepsilon-2)]$ έχει μέση ζημία εντροπίας αυστηρά μικρότερη (αντίστοιχα, μικρότερη ή ίση) από τον $\delta_0 = (n-2)S^{-1}$.

Παρατήρηση 4.4. Σημειώνουμε ότι, τουλάχιστον για $\varepsilon < n-2$, το ότι ο $\delta^{(r)}$ είναι καλύτερος από τον $\delta_0 = (n-2)S^{-1}$ δεν μπορεί να προκύψει από τις συνθήκες Brewster and Zidek επειδή για $w \to \infty$, $\varphi_{BZ}(w) = O(w^{-n+2})$ (βλέπε (4.32)) και $r\ (1+w)^{-\varepsilon} = O(w^{-\varepsilon})$, οπότε παραβιάζεται η (BZ2).

Από την άλλη πλευρά, εφαρμόζοντας το Θεώρημα 4.8 παίρνουμε νέες ικανές συνθήκες, τύπου Strawderman, ώστε ένας αναλλοίωτος κατά κλίμακα εκτιμητής να είναι καλύτερος από τον βέλτιστο αναλλοίωτο εκτιμητή $\delta_0 = (n-2)S^{-1}$. Σημειώνουμε ότι και στις δύο περιπτώσεις, $0 < \varepsilon \leqslant 1$ και $\varepsilon > 1$, τα φράγματα $B(\varepsilon)$ του Θεωρήματος 4.8 αποδεικνύεται ότι συμπίπτουν.

Θεώρημα 4.17. *Ο εκτιμητής*

$$\delta_\varphi = \begin{cases} (n-2)\{1+\varphi(W)\}S^{-1} & \textit{εάν } W > 0, \\ (n-2)S^{-1} & \textit{διαφορετικά}, \end{cases} \tag{4.33}$$

έχει μέση ζημία εντροπίας μικρότερη ή ίση από αυτή του $\delta_0 = (n-2)S^{-1}$ εάν για κάποιο $\varepsilon > 0$,

(ST1) $(1+w)^\varepsilon \varphi(w)$ είναι φθίνουσα ως προς $w > 0$ και

(ST2) $0 \leqslant \varphi(w) \leqslant B(\varepsilon)$, όπου

$$B(\varepsilon) = \min\left\{B^*, \frac{2\varepsilon(n+2\varepsilon-1)}{(n-1)(n+\varepsilon-1)(n+\varepsilon-2)}\right\} \tag{4.34}$$

και B^* η μοναδική λύση της εξίσωσης $x^{-1}\ln(1+x) = (n-2)/(n-1)$.

Παρατήρηση 4.5. Επειδή ο $(n-2)S^{-1}$ είναι minimax, το ίδιο ισχύει και για τους $\delta^{(r)}$ και δ_φ των Θεωρημάτων 4.16 και 4.17. Επίσης, ανάλογα αποτελέσματα όπως αυτά των Θεωρημάτων 4.16 και 4.17 μπορούν να εξαχθούν για την εκτίμηση του $(1/\sigma)^m$, $m > 0$.

Στη συνέχεια, προχωρούμε στην κατασκευή μιας κλάσης εκτιμητών οι οποίοι είναι γενικευμένοι Bayes όταν $S + X > 0$, χρησιμοποιώντας την ίδια εκ των προτέρων κατανομή όπως στην Ενότητα 3.3. Επειδή ο γενικευμένος εκτιμητής Bayes του $\eta = 1/\sigma$ δίνεται από τη σχέση $\delta_{GB} = 1/\mathsf{E}(\eta^{-1} \mid S, X)$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \delta_{GB} &= (a+n-1)\frac{\int_0^1 t^a(1-t)^{b-1}(1-\frac{W}{1+W}t)^{n-b-1}dt}{\int_0^1 t^a(1-t)^{b-1}(1-\frac{W}{1+W}t)^{n-b-2}dt}\ S^{-1} \\ &= (n-2)\{1+\varphi_{a,b}(W)\}S^{-1}, \end{aligned} \tag{4.35}$$

όπου η τελευταία ισότητα χρησιμοποιείται για τον ορισμό της $\varphi_{a,b}(w)$.

Έστω τώρα

$$\delta_{a,b} = \begin{cases} (n-2)\{1+\varphi_{a,b}(W)\}S^{-1} & \text{εάν } W > 0, \\ (n-2)S^{-1} & \text{διαφορετικά} \end{cases} \tag{4.36}$$

και ας θεωρήσουμε την κλάση των εκτιμητών του $1/\sigma$, $\{\delta_{a,b} : a > -1, b \geqslant 1\}$. Παρατηρούμε ότι η (4.36) μπορεί να παραχθεί αντικαθιστώντας με n το $n-1$ στην (4.30) και συνεπώς ο $\delta_{a,b}$ και η $\varphi_{a,b}(w)$ έχουν την ίδια συμπεριφορά με τις αντίστοιχες ποσότητες ως προς την τετραγωνική συνάρτηση ζημίας. Έτσι, το Λήμμα 4.11 ισχύει για την $\varphi_{a,b}(w)$ στην (4.35) αν αντικαταστήσουμε το $n-1$ με n και συνδυάζοντάς το με το Θεώρημα 4.17 βρίσκουμε τους εξής βελτιωμένους εκτιμητές τύπου Strawderman.

Θεώρημα 4.18. *Έστω ότι $B(\varepsilon)$ είναι όπως στην* (4.34). *Ο εκτιμητής $\delta_{a,b}$ στην* (4.36) *ικανοποιεί τις (ST1) και (ST2) του Θεωρήματος 4.17 και συνεπώς είναι καλύτερος από τον $\delta_0 = (n-2)S^{-1}$ εάν*

(i) $b = 1$ *και* $-1 < a \leqslant -1 + \max\limits_{\varepsilon < n-2} \min\left\{(n-2)B(\varepsilon), (n-2)/\varepsilon - 1\right\}$ *ή*

(ii) $1 < b \leqslant n-1$ *και* $-1 < a \leqslant -1 + \max\limits_{\varepsilon < \min\{1,(n-2)/b\}} \min\left\{(n-2)B(\varepsilon), (n-2)/\varepsilon - b\right\}$ *ή*

(iii) $b > n-1$ *και* $-1 < a \leqslant -1 + \max\limits_{\varepsilon < (n-2)/b} \min\left\{(n-2)B(\varepsilon), (n-2-b\varepsilon)/(b-n+1+\varepsilon)\right\}$.

Σημειώνουμε ότι για $b = n-2$ και a όπως στο Θεώρημα 4.18(ii) αλλά με το δεξιό μέρος της ανισότητας να ισχύει ως αυστηρή ανισότητα παίρνουμε τον βελτιωμένο εκτιμητή

$$\delta_{a,n-2} = \begin{cases} (n-2)\left\{1 + \dfrac{a+1}{(n-2)(1+W)}\right\}S^{-1} & \text{εάν } W > 0, \\ (n-2)S^{-1} & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

ο οποίος είναι γενικευμένος Bayes για $W > 0$, απλός στη μορφή, πιο «λείος» από τον εκτιμητή τύπου Stein δ_S στην (4.32), τόσο «λείος» όσο ο εκτιμητής τύπου Brewster and Zidek-type δ_{BZ} στην (4.32) και, αντίθετα από τον δ_{BZ}, λόγω του Θεωρήματος 4.8, βελτιώνει τη μέση ζημία εντροπίας του $(n-2)S^{-1}$ για όλα τα μ και σ.

Έστω τώρα, για $r > 0$,

$$\delta_{ST} = \begin{cases} (n-2)\left\{1 + \dfrac{r}{1+W}\right\}S^{-1} & \text{εάν } W > 0, \\ (n-2)S^{-1} & \text{διαφορετικά.} \end{cases} \tag{4.37}$$

Το επόμενο θεώρημα παρέχει βελτιωμένους εκτιμητές τύπου Strawderman στην κλάση $\{\delta_{ST} : r > 0\}$.

Θεώρημα 4.19. *Ο εκτιμητής δ_{ST} στην* (4.37), *για*

$$0 < r < \max_{\varepsilon \leqslant 1} \min\left\{B^*, \frac{2\varepsilon(n+2\varepsilon-1)}{(n-1)(n+\varepsilon-1)(n+\varepsilon-2)}\right\},$$

όπου B^* η μοναδική λύση της εξίσωσης $x^{-1}\ln(1+x) = (n-2)/(n-1)$, έχει μικρότερη μέση ζημία εντροπίας από τον $(n-2)S^{-1}$.

Απόδειξη. Ο δ_{ST} είναι της μορφής (4.33) με $\varphi(w) = r/(1+w)$. Οπότε, η (ST1) προφανώς ικανοποιείται για $0 < \varepsilon \leqslant 1$ και $r > 0$, ενώ η σχέση

$$0 < \lim_{w \to 0^+} \varphi(w) < \min\left\{B^*, \frac{2\varepsilon(n+2\varepsilon-1)}{(n-1)(n+\varepsilon-1)(n+\varepsilon-2)}\right\}$$

ισχύει όταν

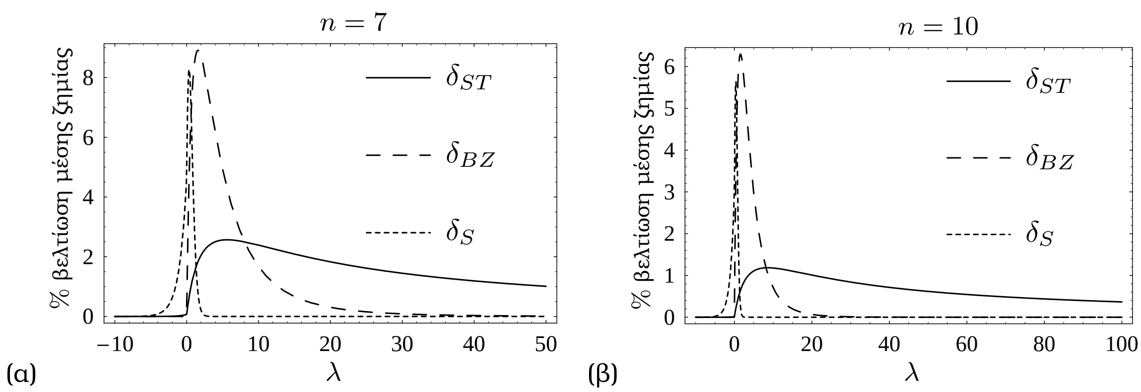
$$r < \min\left\{B^*, \frac{2\varepsilon(n+2\varepsilon-1)}{(n-1)(n+\varepsilon-1)(n+\varepsilon-2)}\right\}.$$

Το αποτέλεσμα τώρα προκύπτει από το Θεώρημα 4.17. □

Για επιλεγμένες τιμές των n, τα άνω φράγματα για το r του Θεωρήματος 4.19 δίνονται στον Πίνακα 4.2. Το Σχήμα 4.2 απεικονίζει τις επί τοις εκατό βελτιώσεις των μέσων ζημιών εντροπίας των δ_S, δ_{BZ} και δ_{ST} για $n = 7, 10$ και $r = 0.0634, 0.0271$. Βλέπουμε ότι ο δ_S παρουσιάζει σημαντική βελτίωση για $\lambda = 0$ η οποία ωστόσο φθίνει ραγδαία προς το 0. Ο δ_{BZ} προσφέρει σημαντικά μεγαλύτερη βελτίωση από τον δ_{ST} σε μία συγκριτικά μικρή δεξιά περιοχή του $\lambda = 0$ (αλλά όχι στο $\lambda = 0$ όπου η μέση ζημία εντροπίας του είναι ίση με αυτήν του δ_0) ενώ ο δ_{ST} παραμένει σαφώς καλύτερος από τον δ_{BZ} για ένα μεγαλύτερο εύρος τιμών του λ.

Πίνακας 4.2: Τιμές άνω φράγματος για το r

r	n				
	4	5	6	7	10
	0.2777	0.15	0.0933	0.0634	0.0271



Σχήμα 4.2: % βελτιώσεις των μέσων ζημιών εντροπίας των δ_S, δ_{BZ} και δ_{ST} για (α) $n = 7$, $r = 0.0634$ και (β) $n = 10$, $r = 0.0271$.

Όμοια με το Θεώρημα 4.14, συμπεραίνουμε ότι η $\{\delta_{a,1} : -1 < a \leqslant 0\}$ είναι μία νέα κλάση βελτιωμένων εκτιμητών για το $1/\sigma$ ως προς την L_2, οι οποίοι ικανοποιούν τις συνθήκες Brewster and Zidek. Επί πλέον, ισχύει το ανάλογο του Θεωρήματος 4.15. Συνεπώς, ο εκτιμητής τύπου Brewster and Zidek για το $1/\sigma$ ως προς την L_2 (ο οποίος συμπίπτει με τον $\delta_{0,1}$) δεν ικανοποιεί τις συνθήκες (ST1), (ST2) του Θεωρήματος 4.17 και, για $b = 1$, η κλάση των εκτιμητών που ικανοποιεί τις (ST1), (ST2) είναι ένα υποσύνολο της κλάσης των εκτιμητών που ικανοποιούν τις συνθήκες Brewster and Zidek. Από την άλλη πλευρά όμως, για $b > 1$, η κλάση των εκτιμητών που ικανοποιεί τις συνθήκες Brewster and Zidek είναι κενή, ενώ η κλάση των εκτιμητών που ικανοποιεί τις (ST1), (ST2) είναι μη αριθμήσιμη.

4.4 Η κανονική κατανομή $N_p(\mu, \theta^2 I_p)$

Στην ενότητα αυτή, εφαρμόζουμε τα αποτελέσματα των Ενοτήτων 4.1, 4.2 στην κανονική κατανομή. Έστω ότι Y και S είναι ανεξάρτητα όπου $Y \sim N_p(\mu, \theta^2 I_p)$, $S/\theta^2 \sim \chi^2_n$ και μ, $\sigma = \theta^2$ είναι άγνωστα. Θέτουμε $X = \|Y\|^2$. Τότε, σύμφωνα με την (3.1), $g(v)$ είναι η πυκνότητα της χ^2_n, $h(x;\lambda)$ είναι η πυκνότητα της $\chi^2_p(\|\mu\|^2/\sigma)$, $\lambda = \|\mu\|^2/\sigma$, $\kappa(\lambda) = 0$, $\lambda_0 = 0$ και $h(x)$ είναι η πυκνότητα της χ^2_p. Επί πλέον, σημειώνουμε ότι $\alpha = 0$ (βλέπε (3.5)) και

$$h(x;\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda/2} \frac{(\lambda/2)^k}{k!} \frac{x^{k+p/2-1} e^{-x/2}}{\Gamma(k+p/2) 2^{k+p/2}}, \quad x > 0.$$

Υπενθυμίζουμε ότι το αντίστροφο της κανονικής διασποράς, $1/\theta^2$, αναφέρεται και ως κανονική ακρίβεια (normal precision). Στη συνέχεια, δίνουμε τους εκτιμητές τύπου Strawderman για την κανονική ακρίβεια ως προς την τετραγωνική συνάρτηση ζημίας L_1 και τη συνάρτηση ζημίας εντροπίας L_2.

4.4.1 Εκτίμηση του $1/\theta^2$ ως προς την τετραγωνική συνάρτηση ζημίας

Από την (4.1) παίρνουμε $c_0 = n - 4$ και $\delta_0 = (n-4)S^{-1}$. Ο εκτιμητής τύπου Stein και ο εκτιμητής τύπου Brewster and Zidek του $1/\theta^2$ είναι, αντίστοιχα,

$$\delta_S = (n-4)\{1 + \varphi_S(W)\}S^{-1} \quad \text{και} \quad \delta_{BZ} = (n-4)\{1 + \varphi_{BZ}(W)\}S^{-1}, \tag{4.38}$$

όπου

$$\varphi_S(W) = \max\left\{0, \frac{p - (n-4)W}{(n-4)(1+W)}\right\}$$

και

$$\varphi_{BZ}(W) = \frac{2(1+W)^{-n/2+2}}{(n-4)\int_0^1 t^{p/2-1}\left(1 - \frac{W}{1+W}t\right)^{n/2-3} dt}.$$

Η συνθήκη (A1) ισχύει από τη γνωστή ιδιότητα ΜΛΠ της μη κεντρικής κατανομής χι-τετράγωνο ως προς την παράμετρο μη κεντρικότητάς της. Η (A2) επίσης ισχύει από την ιδιότητα ΜΛΠ της κατανομής γάμμα ως προς την παράμετρο κλίμακάς της. Μετά από απλούς υπολογισμούς, η (4.8) δίνει

$$\varphi_\lambda(u) = \frac{1}{2} \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda/2)^k}{k!} \frac{\Gamma(n/2 + p/2 + k - 2)}{\Gamma(k + p/2)} (1-u)^k}{\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda/2)^k}{k!} \frac{\Gamma(n/2 + p/2 + k - 1)}{\Gamma(k + p/2)} (1-u)^k}, \quad 0 < u < 1. \tag{4.39}$$

Είναι προφανές ότι η (4.39) προκύπτει αν αντικαταστήσουμε με $n - 6$ το n στην (3.42). Από το Λήμμα A.3, η $\varphi_\lambda(u)$ στην (4.39) είναι αύξουσα. Έτσι, για να επαληθεύσουμε την (A3) εστιάζουμε στο να δείξουμε την κυρτότητα της $\varphi_\lambda(u)$. Όπως αναφέρθηκε και στην Ενότητα 3.4, αυτό φαίνεται να αποτελεί ένα μη τετριμμένο πρόβλημα. Στη συνέχεια, εφαρμόζουμε και τα αποτελέσματα τα οποία προϋποθέτουν την ισχύ της (Α3), για εκείνα τα n (τουλάχιστον) για τα οποία δείξαμε ότι ισχύει η (Α3) (βλέπε τη συζήτηση στην Ενότητα 3.4). Επί πλέον, η (4.4) δίνει

$$B_0(\varepsilon) = \frac{\Gamma(p/2+n/2+2\varepsilon-2)\Gamma(n/2+\varepsilon-2)}{\Gamma(p/2+n/2+\varepsilon-1)\Gamma(n/2+2\varepsilon-2)} \frac{2p\varepsilon}{n-4},$$

ενώ $2c_0^{-1}/\max\{\varphi_0(0), \varphi_0(1)\} - 2 = 2p/(n-4)$. Εφαρμόζοντας τώρα το Θεώρημα 4.1 έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 4.20. *Ο εκτιμητής $\delta^{(r)} = (n-4)\{1 + r\,(1+W)^{-\varepsilon}\}S^{-1}$ για $\varepsilon > 0$ και*

$$0 < r < (\text{αντίστοιχα}, \leqslant) \frac{\Gamma(p/2+n/2+2\varepsilon-2)\Gamma(n/2+\varepsilon-2)}{\Gamma(p/2+n/2+\varepsilon-1)\Gamma(n/2+2\varepsilon-2)} \frac{2p\varepsilon}{n-4}$$

έχει μέση τετραγωνική ζημία αυστηρά μικρότερη (αντίστοιχα, μικρότερη ή ίση) από τον $\delta_0 = (n-4)S^{-1}$.

Από την άλλη πλευρά, εφαρμόζοντας το Θεώρημα 4.4 παίρνουμε νέες ικανές συνθήκες, τύπου Strawderman, ώστε ένας αναλλοίωτος κατά κλίμακα εκτιμητής να είναι καλύτερος από τον βέλτιστο αναλλοίωτο εκτιμητή $\delta_0 = (n-4)S^{-1}$.

Θεώρημα 4.21. *Ο εκτιμητής*

$$\delta_\varphi = (n-4)\{1 + \varphi(W)\}S^{-1} \tag{4.40}$$

έχει μέση τετραγωνική ζημία μικρότερη ή ίση από αυτήν του $\delta_0 = (n-4)S^{-1}$ εάν για κάποιο $\varepsilon > 0$,

(ST1) $(1+w)^\varepsilon \varphi(w)$ είναι φθίνουσα ως προς $w > 0$ και

(ST2) $0 \leqslant \varphi(w) \leqslant B(\varepsilon)$, όπου

$$B(\varepsilon) = \min\left\{\frac{2p}{n-4}, \frac{\Gamma(p/2+n/2+2\varepsilon-2)\Gamma(n/2+\varepsilon-2)}{\Gamma(p/2+n/2+\varepsilon-1)\Gamma(n/2+2\varepsilon-2)} \frac{2p\varepsilon}{n-4}\right\} \tag{4.41}$$

για $0 < \varepsilon \leqslant 1$ ή

$$B(\varepsilon) = \min\left\{\frac{2(\varepsilon+1)}{\varepsilon-1}, \frac{2p}{n-4}, \frac{\Gamma(p/2+n/2+2\varepsilon-2)\Gamma(n/2+\varepsilon-2)}{\Gamma(p/2+n/2+\varepsilon-1)\Gamma(n/2+2\varepsilon-2)} \frac{2p\varepsilon}{n-4}\right\} \tag{4.42}$$

για $\varepsilon > 1$.

Στη συνέχεια, προχωρούμε στην κατασκευή μιας κλάσης εκτιμητών οι οποίοι είναι γενικευμένοι Bayes, χρησιμοποιώντας την ίδια εκ των προτέρων κατανομή με τους Maruyama and Strawderman (2006). Για $\eta = 1/\theta^2$, έστω ότι η δεσμευμένη πυκνότητα του μ δοθέντων των η και τ, $0 < \tau < 1$, είναι $N_p(0, \tau^{-1}(1-\tau^{-1})\eta^{-1} I_p)$ και έστω ότι η και τ είναι ανεξάρτητα με πυκνότητες ανάλογες των $\eta^a I_{(0,\infty)}(\eta)$ και $\tau^a(1-\tau)^b I_{(0,1)}(\tau)$. Τότε, ο γενικευμένος εκτιμητής Bayes του $\eta = 1/\theta^2$ ως προς την τετραγωνική συνάρτηση ζημίας δίνεται από τη σχέση

$$\delta_{GB} = \frac{\mathsf{E}(\eta^{-1} \mid S, X)}{\mathsf{E}(\eta^{-2} \mid S, X)}$$

$$= (n+p+2a-2)\frac{\int_0^1 \tau^{a+p/2}(1-\tau)^b(1+W\tau)^{-n/2-p/2-a}d\tau}{\int_0^1 \tau^{a+p/2}(1-\tau)^b(1+W\tau)^{-n/2-p/2-a+1}d\tau}S^{-1},$$

η οποία είναι καλά ορισμένη για $a > -p/2-1$ και $b > -1$. Επί πλέον, κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $t = (1+W)\tau/(1+W\tau)$, μπορούμε να δούμε ότι

$$\begin{aligned}\delta_{GB} &= (n+p+2a-2)\frac{\int_0^1 t^{a+p/2}(1-t)^b(1-\frac{W}{1+W}t)^{n/2-b-2}dt}{\int_0^1 t^{a+p/2}(1-t)^b(1-\frac{W}{1+W}t)^{n/2-b-3}dt}\ S^{-1}\\ &= (n-4)\{1+\varphi_{a,b}(W)\}S^{-1}, \qquad (4.43)\end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισότητα χρησιμοποιείται για τον ορισμό της $\varphi_{a,b}(w)$.

Έστω τώρα

$$\delta_{a,b} = (n-4)\{1+\varphi_{a,b}(W)\}S^{-1} \qquad (4.44)$$

και ας θεωρήσουμε την κλάση των εκτιμητών του $1/\theta^2$, $\{\delta_{a,b} : a > -p/2-1, b \geqslant 0\}$. Λαμβάνοντας υπ' όψη την $\varphi_{MS}(w; m, p, a_1, b_1)$ που δίνεται στην (3.37), παρατηρούμε ότι η $\varphi_{a,b}(w)$ στην (4.43) μπορεί να εκφραστεί ως $\varphi_{a,b}(w) = \{(n-4)\varphi_{MS}(w; n-6, p, a-p/2, b)\}^{-1} - 1$. Επομένως, από τους Maruyama and Strawderman (2006, Theorem 3.3) και επειδή $\varphi_{a,b}(w) \leqslant \varphi_{a,b}(0) = (p+2a+2)/(n-4)$ έχουμε ότι

(i) $\varphi_{a,b}(w) \leqslant (p+2a+2)/(n-4)$,

(ii) $(1+w)^{\varepsilon}\varphi_{a,b}(w)$ είναι φθίνουσα εάν

  (a) $b = 0$, $\varepsilon < n/2-2$ και $a \leqslant -p/2-2+(n/2-2)/\varepsilon$ ή

  (b) $0 < b \leqslant n/2-2$, $\varepsilon < \min\{1, (n/2-2)/(b+1)\}$ και $a \leqslant -p/2-b-2+(n/2-2)/\varepsilon$ ή

  (c) $b > n/2-2$, $\varepsilon < (n/2-2)/(b+1)$ και $a \leqslant -p/2-b-2+b(b-n/2+3)/(\varepsilon+b-n/2+2)$.

Συνδυάζοντας το Θεώρημα 4.21 και τις παραπάνω ιδιότητες της $\varphi_{a,b}(w)$, εντός της κλάσης $\{\delta_{a,b} : a > -p/2-1, b \geqslant 0\}$, βρίσκουμε τους εξής βελτιωμένους εκτιμητές τύπου Strawderman.

Θεώρημα 4.22. *Έστω ότι $B(\varepsilon)$ είναι όπως στις (4.41), (4.42), για $0 < \varepsilon \leqslant 1$ και $\varepsilon > 1$, αντίστοιχα. Ο εκτιμητής $\delta_{a,b}$ στην (4.44) ικανοποιεί τις (ST1) και (ST2) του Θεωρήματος 4.21 και συνεπώς είναι καλύτερος από τον $\delta_0 = (n-4)S^{-1}$ εάν*

(i) $b = 0$ *και* $-p/2-1 < a \leqslant -p/2-1+\max_{\varepsilon<n/2-2}\min\{(n/2-2)B(\varepsilon), (n/2-2)/\varepsilon-1\}$ *ή*

(ii) $0 < b \leqslant n/2-2$ *και*
$-p/2-1 < a \leqslant -p/2-1+\max_{\varepsilon<\min\{1,(n/2-2)/(b+1)\}}\min\{(n/2-2)B(\varepsilon), (n/2-2)/\varepsilon-b-1\}$
ή

(iii) $b > n/2-2$ *και*
$-p/2-1 < a \leqslant -p/2-1+\max_{\varepsilon<(n/2-2)/(b+1)}\min\{(n/2-2)B(\varepsilon), -b-1+b(b-n/2+3)/(\varepsilon+b-n/2+2)\}$.

4.4.2 Εκτίμηση του $1/\theta^2$ ως προς τη συνάρτηση ζημίας εντροπίας

Από την (4.14) παίρνουμε $c_0 = n-2$ και $\delta_0 = (n-2)S^{-1}$. Ο εκτιμητής τύπου Stein και ο εκτιμητής τύπου Brewster and Zidek του $1/\theta^2$ είναι

$$\delta_S = (n-2)\{1+\varphi_S(W)\}S^{-1} \quad \text{και} \quad \delta_{BZ} = (n-2)\{1+\varphi_{BZ}(W)\}S^{-1}, \tag{4.45}$$

αντίστοιχα, όπου

$$\varphi_S(W) = \max\left\{0, \frac{p-(n-2)W}{(n-2)(1+W)}\right\}$$

και

$$\varphi_{BZ}(W) = \frac{2(1+W)^{-n/2+1}}{(n-2)\int_0^1 t^{p/2-1}\big(1-\frac{W}{1+W}t\big)^{n/2-2}dt}.$$

Η συνθήκη (A1) ισχύει από τη γνωστή ιδιότητα ΜΛΠ της μη κεντρικής κατανομής χι-τετράγωνο ως προς την παράμετρο μη κεντρικότητάς της. Η (A2) επίσης ισχύει από την ιδιότητα ΜΛΠ της κατανομής γάμμα ως προς την παράμετρο κλίμακάς της. Μετά από απλούς υπολογισμούς, η (4.19) δίνει

$$\varphi_\lambda(u) = \frac{1}{2}\frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda/2)^k}{k!}\frac{\Gamma(n/2+p/2+k-1)}{\Gamma(k+p/2)}(1-u)^k}{\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda/2)^k}{k!}\frac{\Gamma(n/2+p/2+k)}{\Gamma(k+p/2)}(1-u)^k}, \quad 0<u<1. \tag{4.46}$$

Είναι προφανές ότι η (4.46) προκύπτει αν αντικαταστήσουμε με $n-4$ το n στην (3.42). Όπως αναφέρθηκε και στην προηγούμενη ενότητα, η επαλήθευση της (A3) ως προς την κυρτότητα της $\varphi_\lambda(u)$ φαίνεται να αποτελεί μη τετριμμένο πρόβλημα. Στη συνέχεια, εφαρμόζουμε και τα αποτελέσματα τα οποία προϋποθέτουν την ισχύ της (A3), για εκείνα τα n (τουλάχιστον) για τα οποία δείξαμε ότι ισχύει η (A3) (βλέπε τη συζήτηση στην Ενότητα 3.4). Επί πλέον, η (4.15) δίνει

$$B_0(\varepsilon) = \frac{\Gamma(p/2+n/2+2\varepsilon)\Gamma(n/2+\varepsilon-1)}{\Gamma(p/2+n/2+\varepsilon)\Gamma(n/2+2\varepsilon)}\frac{2p\varepsilon}{n+p-2},$$

ενώ $c_0\max\{\varphi_0(0),\varphi_0(1)\} = (n-2)/(n+p-2)$. Εφαρμόζοντας τώρα το Θεώρημα 4.5 έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 4.23. *Ο εκτιμητής $\delta^{(r)} = (n-2)\{1+r\,(1+W)^{-\varepsilon}\}S^{-1}$ για $\varepsilon>0$ και*

$$0<r<(\textit{αντίστοιχα}, \leqslant)\ \frac{\Gamma(p/2+n/2+2\varepsilon)\Gamma(n/2+\varepsilon-1)}{\Gamma(p/2+n/2+\varepsilon)\Gamma(n/2+2\varepsilon)}\frac{2p\varepsilon}{n+p-2}$$

έχει μέση ζημία εντροπίας αυστηρά μικρότερη (αντίστοιχα, μικρότερη ή ίση) από τον $\delta_0 = (n-2)S^{-1}$.

Από την άλλη πλευρά, εφαρμόζοντας το Θεώρημα 4.8 παίρνουμε νέες ικανές συνθήκες, τύπου Strawderman, ώστε ένας αναλλοίωτος κατά κλίμακα εκτιμητής να είναι καλύτερος από τον βέλτιστο αναλλοίωτο εκτιμητή $\delta_0 = (n-2)S^{-1}$.

Θεώρημα 4.24. *Ο εκτιμητής*

$$\delta_\varphi = (n-2)\{1+\varphi(W)\}S^{-1} \tag{4.47}$$

έχει μέση ζημία εντροπίας μικρότερη ή ίση από αυτή του $\delta_0 = (n-2)S^{-1}$ *εάν για κάποιο* $\varepsilon > 0$,

(ST1) $(1+w)^\varepsilon \varphi(w)$ *είναι φθίνουσα ως προς* $w > 0$ *και*

(ST2) $0 \leqslant \varphi(w) \leqslant B(\varepsilon)$, *όπου*

$$B(\varepsilon) = \min\left\{B^*, \frac{\Gamma(p/2+n/2+2\varepsilon)\Gamma(n/2+\varepsilon-1)}{\Gamma(p/2+n/2+\varepsilon)\Gamma(n/2+2\varepsilon)}\frac{2p\varepsilon}{n+p-2}\right\} \tag{4.48}$$

για $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *ή*

$$B(\varepsilon) = \min\left\{B^*, B^{**}, \frac{\Gamma(p/2+n/2+2\varepsilon)\Gamma(n/2+\varepsilon-1)}{\Gamma(p/2+n/2+\varepsilon)\Gamma(n/2+2\varepsilon)}\frac{2p\varepsilon}{n+p-2}\right\} \tag{4.49}$$

για $\varepsilon > 1$, *με* B^* *τη μοναδική λύση της εξίσωσης* $x^{-1}\ln(1+x) = (n-2)/(n+p-2)$ *και* B^{**} *τη μοναδική λύση της εξίσωσης* $\varepsilon/(\varepsilon-1) = ((1+x)/x)^2\ln(1+x) - (1+x)/x$.

Στη συνέχεια, προχωρούμε στην κατασκευή μιας κλάσης εκτιμητών οι οποίοι είναι γενικευμένοι Bayes, χρησιμοποιώντας την ίδια εκ των προτέρων κατανομή όπως στην προηγούμενη ενότητα. Τότε, ο γενικευμένος εκτιμητής Bayes του $\eta = 1/\theta^2$ ως προς την συνάρτηση ζημίας εντροπίας δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned}
\delta_{GB} &= \frac{1}{\mathsf{E}(\eta^{-1} \mid S, X)} \\
&= (n+p+2a)\frac{\int_0^1 t^{a+p/2}(1-t)^b(1-\frac{W}{1+W}t)^{n/2-b-1}dt}{\int_0^1 t^{a+p/2}(1-t)^b(1-\frac{W}{1+W}t)^{n/2-b-2}dt}\, S^{-1} \\
&= (n-2)\{1+\varphi_{a,b}(W)\}S^{-1},
\end{aligned} \tag{4.50}$$

όπου η τελευταία ισότητα χρησιμοποιείται για τον ορισμό της $\varphi_{a,b}(w)$.

Έστω τώρα

$$\delta_{a,b} = (n-2)\{1+\varphi_{a,b}(W)\}S^{-1} \tag{4.51}$$

και ας θεωρήσουμε την κλάση των εκτιμητών του $1/\theta^2$, $\{\delta_{a,b} : a > -p/2-1, b \geqslant 0\}$. Παρατηρούμε ότι η (4.50) μπορεί να παραχθεί αντικαθιστώντας με n το $n-2$ στην (4.43) και συνεπώς οι $\delta_{a,b}$ και $\varphi_{a,b}(w)$ στην (4.51) έχουν την ίδια συμπεριφορά με τις αντίστοιχες ποσότητες ως προς την τετραγωνική συνάρτηση ζημίας. Έτσι, οι συνθήκες (i) και (ii) πριν από το Θεώρημα 4.22 ισχύουν για την $\varphi_{a,b}(w)$ στην (4.51) αν αντικαταστήσουμε το $n-2$ με n και συνδυάζοντάς τις με το Θεώρημα 4.24 βρίσκουμε τους εξής βελτιωμένους εκτιμητές τύπου Strawderman.

Θεώρημα 4.25. *Έστω ότι* $B(\varepsilon)$ *είναι όπως στις* (4.48), (4.49), *για* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *και* $\varepsilon > 1$, *αντίστοιχα. Ο εκτιμητής* $\delta_{a,b}$ *στην* (4.51) *ικανοποιεί τις (ST1) και (ST2) του Θεωρήματος 4.24 και συνεπώς είναι καλύτερος από τον* $\delta_0 = (n-2)S^{-1}$ *εάν*

(i) $b = 0$ *και* $-p/2 - 1 < a \leqslant -p/2 - 1 + \max\limits_{\varepsilon < n/2-1} \min\big\{(n/2-1)B(\varepsilon), (n/2-1)/\varepsilon - 1\big\}$ *ή*

(ii) $0 < b \leqslant n/2 - 1$ *και*
$-p/2-1 < a \leqslant -p/2-1+ \max\limits_{\varepsilon<\min\{1,(n/2-1)/(b+1)\}} \min\big\{(n/2-1)B(\varepsilon), (n/2-1)/\varepsilon - b - 1\big\}$
ή

(iii) $b > n/2 - 1$ *και*
$-p/2 - 1 < a \leqslant -p/2 - 1 + \max\limits_{\varepsilon<(n/2-1)/(b+1)} \min\big\{(n/2-1)B(\varepsilon), -b - 1 + b(b - n/2 + 2)/(\varepsilon + b - n/2 + 1)\big\}$.

4.5 Εκτίμηση ως προς τη συμμετρική συνάρτηση ζημίας $L(t) = t + 1/t - 2$

Στην ενότητα αυτή θέλουμε να εκτιμήσουμε το $1/\sigma$ ως προς τη συμμετρική συνάρτηση ζημίας $L(t) = t + 1/t - 2$, βασιζόμενοι στα δεδομένα που δίνονται στην (3.1). Μεταξύ των εκτιμητών της μορφής cS^{-1}, $c > 0$, ο καλύτερος είναι

$$\delta_0 = c_0 S^{-1}, \quad c_0^2 = \frac{\int_0^\infty v g(v)dv}{\int_0^\infty v^{-1} g(v)dv}. \tag{4.52}$$

Υποθέτουμε ότι το c_0 είναι καλά ορισμένο. Στόχος μας εδώ είναι να βελτιώσουμε τον δ_0 με εκτιμητές τύπου Strawderman $\delta^{(r)}$ της μορφής (4.3). Έστω ότι α είναι όπως στην (3.5). Το επόμενο αποτέλεσμα αποδεικνύει ότι ο εκτιμητής τύπου Strawderman $\delta^{(r)}$ είναι καλύτερος από τον κλασικό εκτιμητή δ_0, παρέχοντας συνεπώς μία πολύ απλή κλάση βελτιωμένων εκτιμητών για το $1/\sigma$.

Θεώρημα 4.26. *Έστω ότι οι (A1) και (A2) ισχύουν. Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$, η μέση ζημία του $\delta^{(r)}$ στην* (4.3) *ως προς την $L(t)$ είναι αυστηρά μικρότερη (αντίστοιχα, μικρότερη ή ίση) από αυτήν του δ_0 στην* (4.52) *εάν $0 < r <$ (αντίστοιχα, $\leqslant$)$B_0(\varepsilon)$, όπου*

$$B_0(\varepsilon) = \frac{1}{c_0^2} \frac{\int_0^1 u^{\varepsilon+1} \int_0^\infty v^2 g(uv)h((1-u)v)dvdu}{\int_0^1 u^{\varepsilon-1} \int_0^\infty g(uv)h((1-u)v)dvdu} - 1.$$

Απόδειξη. Έστω $RD(\delta_0, \delta^{(r)}) = \mathsf{E}(\delta_0/\sigma^{-1} + (\delta_0/\sigma^{-1})^{-1} - 2) - \mathsf{E}(\delta^{(r)}/\sigma^{-1} + (\delta^{(r)}/\sigma^{-1})^{-1} - 2)$. Λόγω της μορφής των δ_0 και $\delta^{(r)}$ έχουμε

$$\begin{aligned}
RD(\delta_0, \delta^{(r)}) &= r\,\mathsf{E}\Bigg[\bigg\{\Big\{c_0\Big(\frac{S}{\sigma}\Big)^{-1}\Big(1 + \frac{r}{(1+W)^\varepsilon}\Big)(1+W)^\varepsilon\Big\}^{-1} \\
&\qquad - c_0\frac{1}{(1+W)^\varepsilon}\Big(\frac{S}{\sigma}\Big)^{-1}\bigg\} I(W > 0)\Bigg] \\
&= r\int_0^\infty \int_0^\infty \bigg\{\Big\{c_0 y^{-1}\Big(1 + \frac{r}{(1+W)^\varepsilon}\Big)(1+W)^\varepsilon\Big\}^{-1} - c_0\frac{y^{-1}}{(1+w)^\varepsilon}\bigg\} \\
&\qquad \times yg(y)h(wy;\lambda)I(wy > \kappa(\lambda))dydw.
\end{aligned}$$

Με αλλαγή των μεταβλητών $u = 1/(1+w)$ και $v = (1+w)y$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}
RD(\delta_0, \delta^{(r)}) &= r \int_0^1 \int_\alpha^\infty \Big\{ \frac{u^{\varepsilon+1} v}{c_0(1+ru^\varepsilon)} - c_0 u^{\varepsilon-1} v^{-1} \Big\} v g(uv) h((1-u)v;\lambda) dv du \\
&= r \Big\{ \int_0^1 \frac{u^{\varepsilon+1}}{c_0(1+ru^\varepsilon)} \int_\alpha^\infty v^2 g(uv) h((1-u)v;\lambda) dv du \\
&\qquad - \int_0^1 c_0 u^{\varepsilon-1} \int_\alpha^\infty g(uv) h((1-u)v;\lambda) dv du \Big\} \\
&\geqslant r \Big\{ \int_0^1 \frac{u^{\varepsilon+1}}{c_0(1+r)} \int_\alpha^\infty v^2 g(uv) h((1-u)v;\lambda) dv du \\
&\qquad - \int_0^1 c_0 u^{\varepsilon-1} \int_\alpha^\infty g(uv) h((1-u)v;\lambda) dv du \Big\}.
\end{aligned}$$

Έτσι, $RD(\delta_0, \delta^{(r)}) \geqslant 0$ εάν

$$\begin{aligned}
r &\leqslant \frac{1}{c_0^2} \frac{\int_0^1 u^{\varepsilon+1} \int_0^\infty v^2 g(uv) h((1-u)v;\lambda) dv du}{\int_0^1 u^{\varepsilon-1} \int_0^\infty g(uv) h((1-u)v;\lambda) dv du} - 1 \\
&= c_0^{-2} I(\varepsilon;\lambda) - 1.
\end{aligned}$$

Η απόδειξη θα είναι πλήρης εάν δείξουμε ότι $B_0(\varepsilon) \leqslant c_0^{-2} I(\varepsilon;\lambda) - 1$. Με ανάλογο τρόπο όπως αποδείχθηκαν οι (3.11) και (3.14), μπορεί να δειχθεί ότι, εάν ισχύουν οι (A1), (A2), τότε ισχύει $I(\varepsilon,\lambda) \geqslant I(\varepsilon;0) > c_0^2$ και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Εκτιμητές τύπου Strawderman για το λόγο των διασπορών δύο κανονικών κατανομών

Στο κεφάλαιο αυτό, κατασκευάζονται κλάσεις εκτιμητών τύπου Strawderman για το λόγο των διασπορών, σ_2^2/σ_1^2, κανονικών κατανομών, ως προς την τετραγωνική συνάρτηση ζημίας και τη συνάρτηση ζημίας εντροπίας. Οι εκτιμητές αυτοί έχουν τις εξής ιδιότητες. Είναι συναρτήσεις όλων των δεδομένων, είναι «λείοι», σε αντίθεση, με τους διαθέσιμους στη βιβλιογραφία εκτιμητές τύπου Stein και έχουν πολύ απλή συναρτησιακή μορφή, σε αντίθεση με τους διαθέσιμους στη βιβλιογραφία εκτιμητές τύπου Brewster and Zidek. Επί πλέον, στην περίπτωση της συνάρτησης ζημίας εντροπίας οι εκτιμητές μιας εκ των κλάσεων αποδεικνύεται ότι είναι γενικευμένοι Bayes. Σε συνδυασμό, μάλιστα, με την αξιοσημείωτη αριθμητική βελτίωση ως προς τη μέση ζημία που προσφέρουν έναντι των κλασικών εκτιμητών, ενδεχομένως να είναι «ελκυστικοί» και σε στατιστικές εφαρμογές. Ως προκαταρκτικό αποτέλεσμα (ανεξάρτητου ενδιαφέροντος) κατασκευάζονται, επίσης, νέες κλάσεις βελτιωμένων γενικευμένων εκτιμητών Bayes για την κανονική ακρίβεια, $1/\sigma_1^2$. Η μέθοδος απόδειξης δεν είναι η τυπική για το πρόβλημα εκτίμησης του σ_2^2/σ_1^2, η οποία (τυπική απόδειξη) απαιτεί την επέκταση αποτελεσμάτων από έναν πληθυσμό σε δύο πληθυσμούς (όπως έχει γίνει από τους Gelfand and Dey (1988), Madi and Tsui (1990b), Kubokawa (1994b), Kubokawa and Srivastava (1996), Ghosh and Kundu (1996)). Αντιθέτως, εφαρμόζεται η μεθοδολογία των Iliopoulos and Kourouklis (1999) που ανάγει το πρόβλημα εκτίμησης του σ_2^2/σ_1^2 σε δύο προβλήματα ενός πληθυσμού, ένα αυτό της εκτίμησης του σ_2^2 και, το άλλο, αυτό της εκτίμησης του $1/\sigma_1^2$. Τα αποτελέσματα αυτού του κεφαλαίου θα εμφανισθούν στην εργασία Bobotas and Kourouklis (2010).

5.1 Μερικά προκαταρκτικά αποτελέσματα

Έστω τα ανεξάρτητα δεδομένα X, Y, S_1 και S_2 τέτοια ώστε τα X, Y έχουν κανονικές κατανομές $N_p(\mu_1, \sigma_1^2 I_p)$, $N_q(\mu_2, \sigma_2^2 I_q)$, αντίστοιχα, με άγνωστες μέσες τιμές μ_1, μ_2 και τα S_1/σ_1^2, S_2/σ_2^2 έχουν κατανομές χι-τετράγωνο χ_n^2, χ_m^2, αντίστοιχα, με n, m βαθμούς ελευθερίας. Το πρόβλημα είναι η εκτίμηση του λόγου των διασπορών των δύο πληθυσμών, $\rho = \sigma_2^2/\sigma_1^2$, με έναν εκτιμητή

δ ως προς την τετραγωνική συνάρτηση ζημίας $L_1(\delta,\rho) = (\delta/\rho - 1)^2$ και τη συνάρτηση ζημίας εντροπίας $L_2(\delta,\rho) = \delta/\rho - \ln(\delta/\rho) - 1$. Στη συνέχεια, για λόγους απλότητας, χρησιμοποιούμε ίδιους συμβολισμούς ως προς την L_1 και την L_2.

Ο βέλτιστος αναλλοίωτος εκτιμητής του ρ είναι ο $\delta_0 = c_0 S_2/S_1$, όπου $c_0 = (n-4)/(m+2)$ ως προς την L_1 και $c_0 = (n-2)/m$ ως προς την L_2. Ο βέλτιστος αναλλοίωτος εκτιμητής του $1/\sigma_1^2$ είναι ο

$$\delta_{01} = c_1 S_1^{-1}, \tag{5.1}$$

όπου $c_1 = n-4$ ως προς την L_1 και $c_1 = n-2$ ως προς την L_2 και ο βέλτιστος αναλλοίωτος εκτιμητής του σ_2^2 είναι ο

$$\delta_{02} = c_2 S_2, \tag{5.2}$$

όπου $c_2 = 1/(m+2)$ ως προς την L_1 και $c_2 = 1/m$ ως προς την L_2.

Οι Strawderman (1974) και Maruyama and Strawderman (2006) έδειξαν ότι ο δ_{02} βελτιώνεται από έναν εκτιμητή δ_ψ της μορφής

$$\delta_\psi = c_2\left\{1 - \psi(W_2)\right\} S_2, \tag{5.3}$$

όπου $W_2 = \|Y\|^2/S_2$ και η συνάρτηση $\psi(w_2)$ ικανοποιεί, για κάποιο $\varepsilon > 0$,

(ST1) $(1+w_2)^\varepsilon \psi(w_2)$ είναι φθίνουσα,

(ST2) $0 \leqslant \psi(w_2) \leqslant B_1(\varepsilon)$ στην περίπτωση της L_1 ή
$0 \leqslant \psi(w_2) \leqslant B_2(\varepsilon)$ στην περίπτωση της L_2,

με

$$B_1(\varepsilon) = \min\left\{\frac{2q}{q+m+2}, \frac{2q\varepsilon}{q+m+2}\frac{\Gamma(q/2+m/2+2\varepsilon+2)\Gamma(m/2+\varepsilon+1)}{\Gamma(q/2+m/2+\varepsilon+2)\Gamma(m/2+2\varepsilon+2)}\right\},$$
$$B_2(\varepsilon) = \min\left\{B_{**}, \left(1 + \frac{m}{2q\varepsilon}\frac{\Gamma(m/2+2\varepsilon)\Gamma(q/2+m/2+\varepsilon+1)}{\Gamma(m/2+\varepsilon)\Gamma(q/2+m/2+2\varepsilon)}\right)^{-1}\right\},$$

και B_{**} τη μοναδική λύση της εξίσωσης $x^{-1}\ln(1-x) = -(q+m)/m$. Επί πλέον, οι Maruyama and Strawderman (2006) κατασκεύασαν τους ακόλουθους πολύ απλούς γενικευμένους εκτιμητές Bayes του σ_2^2,

$$\delta_{2ST} = \frac{1+W_2}{(m+2)(r_2+1+W_2)} S_2, \quad 0 < r_2 < \max_{\varepsilon \leqslant 1} \min\left\{\frac{B_1(\varepsilon)}{1-B_1(\varepsilon)}, \frac{1}{\varepsilon} - 1\right\} \tag{5.4}$$

ως προς την L_1 και (χρησιμοποιώντας τον ίδιο συμβολισμό για απλότητα)

$$\delta_{2ST} = \frac{1+W_2}{m(r_2+1+W_2)} S_2, \quad 0 < r_2 < \max_{\varepsilon \leqslant 1} \min\left\{\frac{B_2(\varepsilon)}{1-B_2(\varepsilon)}, \frac{1}{\varepsilon} - 1\right\} \tag{5.5}$$

ως προς την L_2 και έδειξαν ότι ικανοποιούν τις συνθήκες (ST1), (ST2) μετά τη σχέση (5.3), οπότε είναι καλύτεροι από τον δ_{02}. Στην πραγματικότητα, ο δ_{2ST} στις (5.4) και (5.5) έχει αυστηρά μικρότερη μέση τετραγωνική ζημία ή μέση ζημία εντροπίας αντίστοιχα, από τον δ_{02}.

Όπως αναφέρθηκε στις Ενότητες 4.4.1, 4.4.2, για τη βελτίωση του δ_{01} θεωρούμε εκτιμητές της μορφής

$$\delta_\varphi = c_1\{1+\varphi(W_1)\}S_1^{-1}, \tag{5.6}$$

όπου $W_1 = \|X\|^2/S_1$ και η $\varphi(w_1)$ ικανοποιεί, για κάποιο $\varepsilon > 0$, τις (ST1), (ST2) του Θεωρήματος 4.21, στην περίπτωση της τετραγωνικής συνάρτησης ζημίας και του Θεωρήματος 4.24 στην περίπτωση της συνάρτησης ζημίας εντροπίας. Στη συνέχεια δίνουμε εναλλακτικά αποτελέσματα των Θεωρημάτων 4.21, 4.24, αποφεύγοντας την προϋπόθεση ισχύος της συνθήκης (A3) (βλέπε τη συζήτηση στις Ενότητες 4.4.1, 4.4.2) και ακολουθώντας την προσέγγιση των Strawderman (1974) και Maruyama and Strawderman (2006) οι οποίοι κατέληξαν στο αποτέλεσμά τους αποδεικνύοντας ότι η δεσμευμένη μέση τετραγωνική ζημία (ή μέση ζημία εντροπίας) του δ_{02} δοθείσης μιας βοηθητικής τυχαίας μεταβλητής Poisson L είναι μεγαλύτερη ή ίση από αυτήν του δ_ψ στην (5.3) για κάθε $L = 0, 1, \ldots$.

Θεώρημα 5.1. *Η μέση τετραγωνική ζημία του δ_φ στην (5.6) είναι μικρότερη ή ίση από αυτήν του δ_{01} στην (5.1) εάν για κάποιο $\varepsilon > 0$,*

(ST1) $(1+w_1)^\varepsilon\varphi(w_1)$ *είναι φθίνουσα,*

(ST2) $0 \leqslant \varphi(w_1) \leqslant B_3(\varepsilon)$, *όπου*

$$B_3(\varepsilon) = \min\left\{\frac{2p}{n-4}, \frac{2p\varepsilon}{n-4}\frac{\Gamma(n/2+\varepsilon-2)\Gamma(n/2+p/2+2\varepsilon-2)}{\Gamma(n/2+2\varepsilon-2)\Gamma(n/2+p/2+\varepsilon-1)}\right\}. \tag{5.7}$$

Επί πλέον, εάν αντί της (ST2) ισχύει $0 < \varphi(0) < B_3(\varepsilon)$, τότε η μέση τετραγωνική ζημία του δ_φ είναι αυστηρά μικρότερη από αυτήν του δ_{01}.

Απόδειξη. Έστω $RD = \mathsf{E}(\delta_{01}/\sigma_1^{-2}-1)^2 - \mathsf{E}(\delta_\varphi/\sigma_1^{-2}-1)^2$. Θέτουμε $h(w_1) = (1+w_1)^\varepsilon\varphi(w_1)$ και $V = S_1/\sigma_1^2$. Τότε, λόγω της μορφής του δ_{01} στην (5.1) και του δ_φ στην (5.6) έχουμε

$$\begin{aligned} RD =&(n-4)\mathsf{E}\big[h(W_1)(1+W_1)^{-\varepsilon} \\ &\times\left\{2V^{-1}-2(n-4)V^{-2}-(n-4)h(W_1)(1+W_1)^{-\varepsilon}V^{-2}\right\}\big]. \end{aligned}$$

Από την (ST1), η $h(w_1)$ είναι φθίνουσα και συνεπώς $0 \leqslant h(w_1) \leqslant h(0) = \varphi(0) = B$. Επομένως, προκύπτει

$$\begin{aligned} RD \geqslant&(n-4)\mathsf{E}\big[h(W_1)(1+W_1)^{-\varepsilon} \\ &\times\left\{2V^{-1}-2(n-4)V^{-2}-(n-4)B(1+W_1)^{-\varepsilon}V^{-2}\right\}\big]. \end{aligned}$$

Ακολουθώντας τον Strawderman (1974), η τελευταία μέση τιμή μπορεί να υπολογιστεί εισάγοντας μία βοηθητική τυχαία μεταβλητή Poisson L με παράμετρο $\|\mu_1\|^2/(2\sigma_1^2)$, ανεξάρτητη του S_1 και τέτοια ώστε η $\|X\|^2/\sigma_1^2$, δοθέντος $L = \ell$, είναι $\chi^2_{p+2\ell}$. Τότε, δεσμεύοντας ως προς $L = \ell$ και $W_1 = w_1$, η V έχει κατανομή γάμμα $G((n+p+2\ell)/2, 2(1+w_1)^{-1})$ έτσι ώστε $\mathsf{E}(V^{-1} \mid W_1 = w_1, L = \ell) = (n+p+2\ell-4)C_\ell(1+w_1)$, $\mathsf{E}(V^{-2} \mid W_1 = w_1, L = \ell) = C_\ell(1+w_1)^2$, όπου $C_\ell^{-1} = (n+p+2\ell-2)(n+p+2\ell-4)$. Επομένως, προκύπτει ότι

$$RD \geqslant(n-4)\mathsf{E}\left[\mathsf{E}\left[C_L h\left(\frac{1-U}{U}\right)U^{\varepsilon-1}\right.\right.$$

$$\times \left\{2(n+p+2L-4) - 2(n-4)U^{-1} - (n-4)BU^{\varepsilon-1}\right\} \Big| L \Big]\Big],$$

με $U = (1+W_1)^{-1}$. Συνεπώς, το πρώτο μέρος θα ισχύει εάν δείξουμε ότι για κάθε $\ell = 0, 1, \ldots,$

$$\begin{aligned} A_\ell =& \mathsf{E}\Bigg[h\left(\frac{1-U}{U}\right)U^{\varepsilon-1} \\ &\times \{2(n+p+2\ell-4) - 2(n-4)U^{-1} - (n-4)BU^{\varepsilon-1}\}\Big| L=\ell\Bigg] \geqslant 0. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Παρατηρούμε ότι η $h((1-u)/u)$ είναι αύξουσα και, από την (ST2), $B \leqslant B_3(\varepsilon)$. Οπότε, χρησιμοποιώντας τα Λήμματα A.7 και A.1, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $0 < u_0 < 1$ τέτοιο ώστε $A_\ell \geqslant h((1-u_0)/u_0)\,\mathsf{E}\left[2(n+p+2\ell-4)U^{\varepsilon-1} - 2(n-4)U^{\varepsilon-2} - (n-4)BU^{2\varepsilon-2} \mid L=\ell\right]$, από την οποία προκύπτει ότι η (5.8) ισχύει εάν

$$B \leqslant \frac{2(n+p+2\ell-4)\mathsf{E}_\ell U^{\varepsilon-1} - 2(n-4)\mathsf{E}_\ell U^{\varepsilon-2}}{(n-4)\mathsf{E}_\ell U^{2\varepsilon-2}} = B(\varepsilon,\ell), \quad \ell = 0, 1, \ldots. \tag{5.9}$$

Για να αποδείξουμε την (5.9), χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι, δοθέντος $L = \ell$, η U έχει κατανομή βήτα $Beta(n/2, (p+2\ell)/2)$ και συνεπώς μετά από εύκολους υπολογισμούς έχουμε

$$\begin{aligned} B(\varepsilon,\ell) &= 2\frac{\mathsf{E}_\ell U^{\varepsilon-2}}{\mathsf{E}_\ell U^{2\varepsilon-2}} \frac{2\varepsilon(p+2\ell)}{(n-4)(n+2\varepsilon-4+p+2\ell)} \\ &\geqslant 2\frac{\mathsf{E}_\ell U^{\varepsilon-2}}{\mathsf{E}_\ell U^{2\varepsilon-2}} \frac{2p\varepsilon}{(n-4)(n+2\varepsilon-4+p)}. \end{aligned}$$

Επί πλέον, παρατηρούμε ότι $\mathsf{E}_\ell U^{\varepsilon-2}/\mathsf{E}_\ell U^{2\varepsilon-2} = \mathsf{E}_\ell Y^{-\varepsilon}$, όπου η Y έχει πυκνότητα ανάλογη προς $y^{n/2+2\varepsilon-3}(1-y)^{p/2+\ell-1}$ και συνεπώς, από το Λήμμα A.2, προκύπτει $\mathsf{E}_\ell Y^{-\varepsilon} \geqslant \mathsf{E}_0 Y^{-\varepsilon}$. Επομένως,

$$\begin{aligned} B(\varepsilon,\ell) &\geqslant B(\varepsilon,0) \\ &= 2\frac{\mathsf{E}_0 U^{\varepsilon-2}}{\mathsf{E}_0 U^{2\varepsilon-2}} \frac{2p\varepsilon}{(n-4)(n+2\varepsilon-4+p)} \\ &= \frac{2p\varepsilon}{n-4} \frac{\Gamma(n/2+\varepsilon-2)\Gamma(n/2+p/2+2\varepsilon-2)}{\Gamma(n/2+2\varepsilon-2)\Gamma(n/2+p/2+\varepsilon-1)}. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Η τελευταία ανισότητα μαζί με την (5.7) συνεπάγονται την (5.9), η οποία ήταν προς απόδειξη. Στην περίπτωση που $0 < \varphi(0) < B_3(\varepsilon)$, τότε η (5.8) ισχύει ως αυστηρή ανισότητα και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Θεώρημα 5.2. *Η μέση ζημία εντροπίας του δ_φ στην* (5.6) *είναι μικρότερη ή ίση από αυτή του δ_{01} στην* (5.1) *εάν για κάποιο $\varepsilon > 0$,*

(ST1) $(1+w_1)^\varepsilon \varphi(w_1)$ *είναι φθίνουσα,*

(ST2) $0 \leqslant \varphi(w_1) \leqslant B_4(\varepsilon)$, *όπου*

$$B_4(\varepsilon) = \min\left\{B^*, \frac{2p\varepsilon}{n+p-2}\frac{\Gamma(n/2+\varepsilon-1)\Gamma(n/2+p/2+2\varepsilon)}{\Gamma(n/2+2\varepsilon)\Gamma(n/2+p/2+\varepsilon)}\right\} \tag{5.11}$$

και B^* είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης $x^{-1}\ln(1+x) = (n-2)/(n+p-2)$. Επί πλέον, εάν αντί της (ST2) ισχύει $0 < \varphi(0) < B_4(\varepsilon)$, τότε η μέση ζημία εντροπίας του δ_φ είναι αυστηρά μικρότερη από αυτήν του δ_{01}.

Απόδειξη. Η διαφορά μέσων ζημιών εντροπίας μεταξύ του δ_{01} στην (5.1) και δ_{φ} στην (5.6) μπορεί να γραφεί ως

$$RD = \mathsf{E}\left[-(n-2)h(W_1)(1+W_1)^{-\varepsilon}V^{-1} + \ln\left(1+h(W_1)(1+W_1)^{-\varepsilon}\right)\right],$$

όπου $h(w_1) = (1+w_1)^{\varepsilon}\varphi(w_1)$ και $V = S_1/\sigma_1^2$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η $x^{-1}\ln(1+x)$ είναι φθίνουσα και, λόγω της (ST1), ότι $0 \leqslant h(w_1) \leqslant h(0) = \varphi(0) = B$, έχουμε $RD \geqslant \mathsf{E}\left[h(W_1)\left\{B^{-1}\ln\left(1+B(1+W_1)^{-\varepsilon}\right) - (n-2)(1+W_1)^{-\varepsilon}V^{-1}\right\}\right]$. Επί πλέον, εισάγοντας μία τυχαία μεταβλητή Poisson όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 5.1, προκύπτει ότι

$$RD \geqslant \mathsf{E}\left[\mathsf{E}\left[h\left(\frac{1-U}{U}\right)\left\{\frac{1}{B}\ln(1+BU^{\varepsilon}) - \frac{n-2}{n+p+2L-2}U^{\varepsilon-1}\right\}\,\Big|\, L\right]\right],$$

με $U = (1+W_1)^{-1}$. Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι για κάθε $\ell = 0, 1, \ldots,$

$$A_{\ell} = \mathsf{E}\left[h\left(\frac{1-U}{U}\right)\left\{\frac{1}{B}\ln(1+BU^{\varepsilon}) - \frac{n-2}{n+p+2\ell-2}U^{\varepsilon-1}\right\}\,\Big|\, L=\ell\right] \geqslant 0, \tag{5.12}$$

το οποίο θα ολοκληρώσει την απόδειξη του πρώτου μέρους. Προς την κατεύθυνση αυτή, εφαρμόζοντας τα Λήμματα A.8 και A.1 συμπεραίνουμε ότι, για κάποιο $0 < u_0 < 1$,

$$A_{\ell} \geqslant h\left(\frac{1-u_0}{u_0}\right)\mathsf{E}\left[\frac{1}{B}\ln(1+BU^{\varepsilon}) - \frac{n-2}{n+p+2\ell-2}U^{\varepsilon-1}\Big|\, L=\ell\right].$$

Επειδή $x^{-1}\ln(1+x) > 1 - x/2$, $x > 0$, η (5.12) θα ισχύει εάν

$$B \leqslant 2\frac{\mathsf{E}_{\ell}U^{\varepsilon} - \frac{n-2}{n+p+2\ell}\mathsf{E}_{\ell}U^{\varepsilon-1}}{\mathsf{E}_{\ell}U^{2\varepsilon}} = B(\varepsilon,\ell). \tag{5.13}$$

Με ανάλογο τρόπο όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 5.1 έχουμε

$$B(\varepsilon,\ell) \geqslant B(\varepsilon,0) = \frac{2p\varepsilon}{n+p-2}\frac{\Gamma(n/2+\varepsilon-1)\Gamma(n/2+p/2+2\varepsilon)}{\Gamma(n/2+2\varepsilon)\Gamma(n/2+p/2+\varepsilon)}. \tag{5.14}$$

Η τελευταία ανισότητα μαζί με την (5.11) συνεπάγονται την (5.13), η οποία ήταν προς απόδειξη. Στην περίπτωση που $0 < \varphi(0) < B_4(\varepsilon)$, τότε η (5.12) ισχύει ως αυστηρή ανισότητα και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Παρατήρηση 5.1. Σημειώνουμε ότι ο Sugiura (1988, 1989) έδωσε ικανές συνθήκες τύπου Strawderman για την εκτίμηση της γενικευμένης κανονικής ακρίβειας, $|\Sigma|^{-1}$ (όπου Σ ο πίνακας συνδιασποράς πολυμεταβλητής κανονικής κατανομής). Τα άνω φράγματά του είναι διαφορετικά από τα $B_3(\varepsilon)$ και $B_4(\varepsilon)$ στις (5.7) και (5.11) και αριθμητικοί υπολογισμοί για διάφορες τιμές των n, p, ε, υποδεικνύουν ότι δεν είναι μεγαλύτερα.

Στη συνέχεια, κατασκευάζουμε γενικευμένους εκτιμητές Bayes του $1/\sigma_1^2$, απλής μορφής, ως προς την τετραγωνική συνάρτηση ζημίας και τη συνάρτηση ζημίας εντροπίας, οι οποίοι ικανοποιούν τις (ST1), (ST2) των Θεωρημάτων 5.1, 5.2, αντίστοιχα. Θεωρούμε την ίδια εκ των προτέρων κατανομή με τους Maruyama and Strawderman (2006) (βλέπε επίσης Ενότητες 4.4.1, 4.4.2). Για $\eta_1 = 1/\sigma_1^2$, έστω ότι η δεσμευμένη πυκνότητα του μ_1 δοθέντων των η_1 και τ_1,

$0 < \tau_1 < 1$, είναι $N_p(0, \tau_1^{-1}(1-\tau_1)\eta_1^{-1} I_p)$ και έστω ότι τα η_1 και τ_1 είναι ανεξάρτητα με πυκνότητες ανάλογες προς $\eta_1^c I_{(0,\infty)}(\eta_1)$ και $\tau_1^c(1-\tau_1)^d I_{(0,1)}(\tau_1)$. Τότε, ο γενικευμένος εκτιμητής Bayes του $\eta_1 = 1/\sigma_1^2$ ως προς την τετραγωνική συνάρτηση ζημίας δίνεται από τη σχέση $\delta_{1GB} = \mathsf{E}(\eta_1^{-1} \mid X, S_1)/\mathsf{E}(\eta_1^{-2} \mid X, S_1)$, οπότε με απλούς υπολογισμούς προκύπτει ο εκτιμητής

$$\delta_{1GB} = (n+p+2c-2)\frac{\int_0^1 \tau_1^{c+p/2}(1-\tau_1)^d(1+W_1\tau_1)^{-n/2-p/2-c}d\tau_1}{\int_0^1 \tau_1^{c+p/2}(1-\tau_1)^d(1+W_1\tau_1)^{-n/2-p/2-c+1}d\tau_1} S_1^{-1},$$

ο οποίος είναι καλά ορισμένος για $c > -p/2-1$ και $d > -1$. Επί πλέον, κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $t = (1+W_1)\tau_1/(1+W_1\tau_1)$, μπορούμε να δούμε ότι

$$\delta_{1GB} = (n+p+2c-2)\frac{\int_0^1 t^{c+p/2}(1-t)^d\left(1-\frac{W_1}{1+W_1}t\right)^{n/2-d-2}dt}{\int_0^1 t^{c+p/2}(1-t)^d\left(1-\frac{W_1}{1+W_1}t\right)^{n/2-d-3}dt} S_1^{-1} \tag{5.15}$$

(που δίνεται και στην (4.43)). Θέτοντας $d = n/2-3$ στην (5.15) προκύπτει ο απλός γενικευμένος εκτιμητής Bayes

$$\delta_{1GB} = (n-4)\left\{1+\frac{2c+p+2}{(n-4)(1+W_1)}\right\} S_1^{-1}. \tag{5.16}$$

Έστω τώρα, για $r_1 > 0$,

$$\delta_{1ST} = (n-4)\left\{1+\frac{r_1}{1+W_1}\right\} S_1^{-1}. \tag{5.17}$$

Το ακόλουθο θεώρημα παρέχει βελτιωμένους εκτιμητές τύπου Strawderman για το $1/\sigma_1^2$ στην κλάση $\{\delta_{1ST} : r_1 > 0\}$.

Θεώρημα 5.3. *Για $0 < r_1 < \max_{\varepsilon \leqslant 1} B_3(\varepsilon)$, ο γενικευμένος εκτιμητής Bayes δ_{1ST} στην (5.17) έχει αυστηρά μικρότερη μέση τετραγωνική ζημία από τον $\delta_{01} = (n-4)S_1^{-1}$.*

Απόδειξη. Ο δ_{1ST} είναι της μορφής (5.6) με $c_1 = n-4$ και $\varphi(w_1) = r_1/(1+w_1)$. Οπότε, η (ST1) του Θεωρήματος 5.1 προφανώς ικανοποιείται για $0 < \varepsilon \leqslant 1$ και $r_1 > 0$, ενώ η σχέση $0 < \varphi(0) < B_3(\varepsilon)$ ισχύει όταν $r_1 < B_3(\varepsilon)$. Το αποτέλεσμα τώρα προκύπτει από το Θεώρημα 5.1. □

Ως προς τη συνάρτηση ζημίας εντροπίας, ο γενικευμένος εκτιμητής Bayes του $\eta_1 = 1/\sigma_1^2$ δίνεται από τη σχέση $1/\mathsf{E}(\eta_1^{-1} \mid X, S_1)$. Χρησιμοποιώντας την ίδια εκ των προτέρων κατανομή όπως προηγουμένως, παίρνουμε τον γενικευμένο εκτιμητή Bayes

$$\delta_{1GB} = (n+p+2c)\frac{\int_0^1 t^{c+p/2}(1-t)^d\left(1-\frac{W_1}{1+W_1}t\right)^{n/2-d-1}dt}{\int_0^1 t^{c+p/2}(1-t)^d\left(1-\frac{W_1}{1+W_1}t\right)^{n/2-d-2}dt} S_1^{-1} \tag{5.18}$$

(που δίνεται και στην (4.50)). Θέτοντας $d = n/2-2$ στην (5.18) προκύπτει ο απλός γενικευμένος εκτιμητής Bayes

$$\delta_{1GB} = (n-2)\left\{1+\frac{2c+p+2}{(n-2)(1+W_1)}\right\} S_1^{-1}. \tag{5.19}$$

Θεωρούμε στη συνέχεια, για $r_1 > 0$, τους εκτιμητές

$$\delta_{1ST} = (n-2)\left\{1 + \frac{r_1}{1+W_1}\right\} S_1^{-1}. \tag{5.20}$$

Το ακόλουθο θεώρημα παρέχει βελτιωμένους εκτιμητές τύπου Strawderman για το $1/\sigma_1^2$ στην κλάση $\{\delta_{1ST} : r_1 > 0\}$.

Θεώρημα 5.4. *Για $0 < r_1 < \max_{\varepsilon \leqslant 1} B_4(\varepsilon)$, ο γενικευμένος εκτιμητής Bayes δ_{1ST} στην (5.20) έχει αυστηρά μικρότερη μέση ζημία εντροπίας από τον $\delta_{01} = (n-2)S_1^{-1}$.*

Απόδειξη. Ο δ_{1ST} είναι της μορφής (5.6) με $c_1 = n-2$ και $\varphi(w_1) = r_1/(1+w_1)$. Οπότε, η (ST1) του Θεωρήματος 5.2 προφανώς ικανοποιείται για $0 < \varepsilon \leqslant 1$ και $r_1 > 0$, ενώ η σχέση $0 < \varphi(0) < B_4(\varepsilon)$ ισχύει όταν $r_1 < B_4(\varepsilon)$. Το αποτέλεσμα τώρα προκύπτει από το Θεώρημα 5.2. □

5.2 Εκτιμητές τύπου Strawderman απλής προσαρμογής

Για να βελτιώσουμε τον δ_0 θα είναι χρήσιμο το επόμενο όχι και τόσο γνωστό αποτέλεσμα. Αναφέρεται εμμέσως στους Gelfand and Dey (1988, Remark 3.2) στην περίπτωση που η συνάρτηση ζημίας είναι η L_1 και επίσης αναφέρεται χωρίς απόδειξη στους Iliopoulos and Kourouklis (1999, σελ.185) για συγκεκριμένες ευρέως χρησιμοποιούμενες συναρτήσεις ζημίας. Η απόδειξη του αποτελέσματος δίνεται στη διατριβή Ηλιόπουλος (1999).

Θεώρημα 5.5 (Gelfand and Dey, 1988· Ηλιόπουλος, 1999)**.** *Για τις συναρτήσεις ζημίας L_1 και L_2 και για αυθαίρετες συναρτήσεις $\varphi^*(w_1)$ και $\psi^*(w_2)$ (έτσι ώστε να υπάρχουν οι μέσες τιμές), έχουμε τα ακόλουθα.*

(i) *Ο $c_0\varphi^*(W_1)S_2/S_1$ βελτιώνει τον c_0S_2/S_1 (για την εκτίμηση του ρ) εάν και μόνον εάν ο $c_1\varphi^*(W_1)S_1^{-1}$ βελτιώνει τον $c_1S_1^{-1}$ (για την εκτίμηση του σ_1^{-2}).*

(ii) *Ο $c_0\psi^*(W_2)S_2/S_1$ βελτιώνει τον c_0S_2/S_1 (για την εκτίμηση του ρ) εάν και μόνον εάν ο $c_2\psi^*(W_2)S_2$ βελτιώνει τον c_2S_2 (για την εκτίμηση του σ_2^2).*

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 5.5, μπορούμε να κατασκευάσουμε βελτιωμένους εκτιμητές επέκτασης (improved expansion estimators) τύπου Strawderman του ρ της μορφής

$$\delta_1 = \delta_\varphi\delta_{02} = c_0\{1+\varphi(W_1)\}\frac{S_2}{S_1}, \tag{5.21}$$

όπου ο δ_{02} είναι όπως στην (5.2) και ο δ_φ είναι όπως στα Θεωρήματα 5.1, 5.2 και ικανοποιεί τις συνθήκες (ST1) και (ST2). Επίσης, μπορούμε να κατασκευάσουμε βελτιωμένους εκτιμητές συρρίκνωσης (improved shrinkage estimators) τύπου Strawderman του ρ της μορφής

$$\delta_2 = \delta_\psi\delta_{01} = c_0\{1-\psi(W_2)\}\frac{S_2}{S_1}, \tag{5.22}$$

όπου ο δ_{01} είναι όπως στην (5.1) και ο δ_ψ είναι όπως στην (5.3) και ικανοποιεί τις συνθήκες (ST1), (ST2) μετά τη σχέση (5.3).

Μεταξύ αυτών, παρουσιάζουμε τους εξής βελτιωμένους εκτιμητές τύπου Strawderman απλής προσαρμογής (επέκτασης ή συρρίκνωσης) για το ρ, οι οποίοι έχουν απλή μορφή και είναι επί πλέον γενικευμένοι Bayes.

Θεώρημα 5.6. (i) *Ως προς την L_1, οι εκτιμητές*

$$\delta_{ST}^{(1)} = \frac{n-4}{m+2}\left(1+\frac{r_1}{1+W_1}\right)\frac{S_2}{S_1}, \quad 0<r_1<\max_{\varepsilon\leqslant 1} B_3(\varepsilon),$$

$$\delta_{ST}^{(2)} = \frac{n-4}{m+2}\frac{1+W_2}{r_2+1+W_2}\frac{S_2}{S_1}, \quad 0<r_2<\max_{\varepsilon\leqslant 1}\min\left\{\frac{B_1(\varepsilon)}{1-B_1(\varepsilon)}, \frac{1}{\varepsilon}-1\right\},$$

είναι γενικευμένοι Bayes και έχουν αυστηρά μικρότερη μέση τετραγωνική ζημία από τον $(n-4)S_2/(m+2)S_1$.

(ii) *Ως προς την L_2, οι εκτιμητές*

$$\delta_{ST}^{(1)} = \frac{n-2}{m}\left(1+\frac{r_1}{1+W_1}\right)\frac{S_2}{S_1}, \quad 0<r_1<\max_{\varepsilon\leqslant 1} B_4(\varepsilon),$$

$$\delta_{ST}^{(2)} = \frac{n-2}{m}\frac{1+W_2}{r_2+1+W_2}\frac{S_2}{S_1}, \quad 0<r_2<\max_{\varepsilon\leqslant 1}\min\left\{\frac{B_2(\varepsilon)}{1-B_2(\varepsilon)}, \frac{1}{\varepsilon}-1\right\},$$

είναι γενικευμένοι Bayes και έχουν αυστηρά μικρότερη μέση ζημία εντροπίας από τον $(n-2)S_2/mS_1$.

Απόδειξη. (i) Από το Θεώρημα 5.3, ο $(n-4)\{1+r_1/(1+W_1)\}S_1^{-1}$ έχει αυστηρά μικρότερη μέση τετραγωνική ζημία από τον $(n-4)S_1^{-1}$. Τότε από το Θεώρημα 5.5, έπεται ότι ο $\delta_{ST}^{(1)}$ έχει αυστηρά μικρότερη μέση τετραγωνική ζημία από τον $(n-4)S_2/(m+2)S_1$. Ομοίως, χρησιμοποιώντας τον δ_{2ST} στην (5.4) και το Θεώρημα 5.5, έχουμε ότι ο $\delta_{ST}^{(2)}$ έχει αυστηρά μικρότερη μέση τετραγωνική ζημία από τον $(n-4)S_2/(m+2)S_1$. Στη συνέχεια αποδεικνύουμε ότι οι $\delta_{ST}^{(1)}$ και $\delta_{ST}^{(2)}$ είναι γενικευμένοι Bayes. Θέτουμε $\eta_1=\sigma_1^{-2}$ και $\eta_2=\sigma_2^{-2}$ και θεωρούμε την ακόλουθη εκ των προτέρων κατανομή. Δοθέντων των η_1, η_2 και τ_1, έστω ότι τα μ_1 και μ_2 είναι ανεξάρτητα με $\mu_1 \sim N_p(0,\tau_1^{-1}(1-\tau_1)\eta_1^{-1}I_p)$ και $\mu_2 \sim Uniform$ στο $(-\infty,\infty)$. Έστω επίσης ότι τα η_1, η_2, τ_1 είναι ανεξάρτητα με πυκνότητες ανάλογες προς $\eta_1^c I_{(0,\infty)}(\eta_1)$, $\eta_2^{-1}I_{(0,\infty)}(\eta_2)$, $\tau_1^c(1-\tau_1)^{n/2-3}I_{(0,1)}(\tau_1)$. Τότε ο γενικευμένος εκτιμητής Bayes του $\rho=\eta_1/\eta_2$ ως προς την L_1 είναι

$$\delta_{GB} = \frac{\mathsf{E}(\rho^{-1}\mid X,Y,S_1,S_2)}{\mathsf{E}(\rho^{-2}\mid X,Y,S_1,S_2)} = \frac{\mathsf{E}(\eta_1^{-1}\mid X,S_1)}{\mathsf{E}(\eta_2^{-2}\mid X,S_1)}\frac{E(\eta_2\mid Y,S_2)}{E(\eta_2^2\mid Y,S_2)}. \tag{5.23}$$

Ο πρώτος όρος του γινομένου στην (5.23) είναι ο δ_{1GB} στην (5.16) και ο δεύτερος εύκολα αποδεικνύεται ότι είναι ο $S_2/(m+2)$. Συνεπώς, $\delta_{GB}=\delta_{ST}^{(1)}$ θέτοντας $r_1=(2c+p+2)/(n-4)$.

Για να δείξουμε ότι ο $\delta_{ST}^{(2)}$ είναι γενικευμένος Bayes χρησιμοποιούμε την ακόλουθη εκ των προτέρων κατανομή: δοθέντων των η_1, η_2 και τ_2, έστω ότι τα μ_1 και μ_2 είναι ανεξάρτητα με $\mu_1 \sim Uniform$ στο $(-\infty,\infty)$ και $\mu_2 \sim N_q(0,\tau_2^{-1}(1-\tau_2)\eta_2^{-1}I_q)$. Επίσης, τα η_1, η_2, τ_2 θεωρούνται ότι είναι ανεξάρτητα με πυκνότητες ανάλογες προς $\eta_1^{-1}I_{(0,\infty)}(\eta_1)$, $\eta_2^a I_{(0,\infty)}(\eta_2)$, $\tau_2^a(1-\tau_2)^{m/2}I_{(0,1)}(\tau_2)$. Χρησιμοποιώντας πάλι την (5.23), μπορούμε να δούμε ότι $\delta_{GB}=\delta_{ST}^{(2)}$ θέτοντας $r_2=(2a+p+2)/(m+2)$.

(ii) Προκύπτει ομοίως με το (i). □

5.3 Εκτιμητές τύπου Strawderman διπλής προσαρμογής

Οι βελτιωμένοι εκτιμητές δ_1 στην (5.21) και δ_2 στην (5.22) βασίζονται στα (X, S_1, S_2) και (Y, S_1, S_2), αντίστοιχα. Χρησιμοποιώντας την μεθοδολογία των Iliopoulos and Kourouklis (1999), είμαστε τώρα σε θέση να κατασκευάσουμε βελτιωμένους εκτιμητές τύπου Strawderman που βασίζονται σε όλα τα δεδομένα (X, Y, S_1, S_2), γεγονός που είναι ο κύριος στόχος αυτού του κεφαλαίου. Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.5 των Iliopoulos and Kourouklis (1999), μπορούμε να συνδυάσουμε έναν αυθαίρετο βελτιωμένο εκτιμητή επέκτασης $\delta_1^* = c_0\{1+\varphi(W_1)\}S_2/S_1$ με έναν αυθαίρετο βελτιωμένο εκτιμητή συρρίκνωσης $\delta_2^* = c_0\{1-\psi(W_2)\}S_2/S_1$ για να παράγουμε τον βελτιωμένο εκτιμητή διπλής προσαρμογής (double adjustment improved estimator)

$$\delta_1^* + \delta_2^* - \delta_0 = c_0\{1+\varphi(W_1)-\psi(W_2)\}\frac{S_2}{S_1} \tag{5.24}$$

ως προς την L_1 ή την L_2 καθώς επίσης τον βελτιωμένο εκτιμητή διπλής προσαρμογής

$$\frac{\delta_1^*\delta_2^*}{\delta_0} = c_0\{1+\varphi(W_1)\}\{1-\psi(W_2)\}\frac{S_2}{S_1} \tag{5.25}$$

ως προς την L_2, ο οποίος είναι καλύτερος από τους δ_1^* και δ_2^* και συνεπώς από τον δ_0, εάν οι $\varphi(w_1)$ και $\psi(w_2)$ είναι σχεδόν παντού διαφορίσιμες με $\lim_{w_1\to\infty}\varphi(w_1) = \lim_{w_2\to\infty}\psi(w_2) = 0$. Σημειώνεται ότι η (5.24) είναι η κλάση των βελτιωμένων εκτιμητών διπλής προσαρμογής του Kubokawa (1994b).

Παίρνοντας ως δ_1^* και δ_2^* τους βελτιωμένους εκτιμητές απλής προσαρμογής τύπου Stein ή τύπου Brewster and Zidek του ρ, οι οποίοι δίνονται από τους Gelfand and Dey (1988) και Madi (1995), οι (5.24) και (5.25) παράγουν τους βελτιωμένους εκτιμητές διπλής προσαρμογής

$$\delta_{S1} = \frac{n-4}{m+2}\left\{1+\max\left\{0, \frac{p-(n-4)W_1}{(n-4)(1+W_1)}\right\} - \max\left\{0, \frac{q-(m+2)W_2}{m+q+2}\right\}\right\}\frac{S_2}{S_1},$$

$$\begin{aligned}\delta_{BZ1} = \frac{n-4}{m+2}\Bigg\{&1+\frac{2(1+W_1)^{-n/2+2}}{(n-4)\int_0^1 t^{p/2-1}\left(1-\frac{W_1}{1+W_1}t\right)^{n/2-3}dt} \\ &-\frac{2(1+W_2)^{-m/2-1}}{(m+q+2)\int_0^1 t^{q/2-1}\left(1-\frac{W_2}{1+W_2}t\right)^{m/2+1}dt}\Bigg\}\frac{S_2}{S_1},\end{aligned}$$

ως προς την L_1 και

$$\delta_{S2} = \frac{n-2}{m}\left\{1+\max\left\{0, \frac{p-(n-2)W_1}{(n-2)(1+W_1)}\right\} - \max\left\{0, \frac{q-mW_2}{m+q}\right\}\right\}\frac{S_2}{S_1},$$

$$\begin{aligned}\delta_{BZ2} = \frac{n-2}{m}\Bigg\{&1+\frac{2(1+W_1)^{-n/2+1}}{(n-2)\int_0^1 t^{p/2-1}\left(1-\frac{W_1}{1+W_1}t\right)^{n/2-2}dt} \\ &-\frac{2(1+W_2)^{-m/2}}{(m+q)\int_0^1 t^{q/2-1}\left(1-\frac{W_2}{1+W_2}t\right)^{m/2}dt}\Bigg\}\frac{S_2}{S_1},\end{aligned}$$

$$\delta_S = \frac{n-2}{m}\left\{1+\max\left\{0, \frac{p-(n-2)W_1}{(n-2)(1+W_1)}\right\}\right\}\left\{1-\max\left\{0, \frac{q-mW_2}{m+q}\right\}\right\}\frac{S_2}{S_1},$$

$$\delta_{BZ} = \frac{n-2}{m}\left\{1+\frac{2(1+W_1)^{-n/2+1}}{(n-2)\int_0^1 t^{p/2-1}\left(1-\frac{W_1}{1+W_1}t\right)^{n/2-2}dt}\right\}$$
$$\times\left\{1-\frac{2(1+W_2)^{-m/2}}{(m+q)\int_0^1 t^{q/2-1}\left(1-\frac{W_2}{1+W_2}t\right)^{m/2}dt}\right\}\frac{S_2}{S_1}.$$

ως προς την L_2, οι οποίοι, εντούτοις, είναι περίπλοκοι στη μορφή ή όχι «λείοι» (smooth).

Αντιθέτως, χρησιμοποιώντας στις (5.24) και (5.25) $\delta_1^* = \delta_{ST}^{(1)}$ και $\delta_2^* = \delta_{ST}^{(2)}$ του Θεωρήματος 5.6, προτείνουμε τους ακόλουθους «λείους» και πολύ απλούς βελτιωμένους εκτιμητές τύπου Strawderman διπλής προσαρμογής.

Θεώρημα 5.7. (i) *Ως προς την L_1, ο εκτιμητής*

$$\delta_{ST1} = \frac{n-4}{m+2}\left\{\frac{r_1}{1+W_1}+\frac{1+W_2}{r_2+1+W_2}\right\}\frac{S_2}{S_1},$$
$$0<r_1<\max_{\varepsilon\leqslant 1} B_3(\varepsilon), \quad 0<r_2<\max_{\varepsilon\leqslant 1}\min\left\{\frac{B_1(\varepsilon)}{1-B_1(\varepsilon)}, \frac{1}{\varepsilon}-1\right\},$$

έχει αυστηρά μικρότερη μέση τετραγωνική ζημία από τον $(n-4)S_2/(m+2)S_1$.

(ii) *Ως προς την L_2, οι εκτιμητές*

$$\delta_{ST2} = \frac{n-2}{m}\left\{\frac{r_1}{1+W_1}+\frac{1+W_2}{r_2+1+W_2}\right\}\frac{S_2}{S_1},$$
$$0<r_1<\max_{\varepsilon\leqslant 1} B_4(\varepsilon), \quad 0<r_2<\max_{\varepsilon\leqslant 1}\min\left\{\frac{B_2(\varepsilon)}{1-B_2(\varepsilon)}, \frac{1}{\varepsilon}-1\right\},$$

και

$$\delta_{ST} = \frac{n-2}{m}\left\{\frac{r_1+1+W_1}{1+W_1}\right\}\left\{\frac{1+W_2}{r_2+1+W_2}\right\}\frac{S_2}{S_1},$$
$$0<r_1<\max_{\varepsilon\leqslant 1} B_4(\varepsilon), \quad 0<r_2<\max_{\varepsilon\leqslant 1}\min\left\{\frac{B_2(\varepsilon)}{1-B_2(\varepsilon)}, \frac{1}{\varepsilon}-1\right\},$$

έχουν αυστηρά μικρότερη μέση ζημία εντροπίας από τον $(n-2)S_2/mS_1$. Επί πλέον, ο δ_{ST} είναι γενικευμένος Bayes.

Απόδειξη. Το μέρος που αφορά στη μικρότερη μέση τετραγωνική ζημία (ή μέση ζημία εντροπίας) προκύπτει από τα σχόλια που προηγούνται των σχέσεων (5.24) και (5.25). Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη θεωρούμε την ακόλουθη εκ των προτέρων κατανομή. Δοθέντων των $\eta_1 = \sigma_1^{-2}$, $\eta_2 = \sigma_2^{-2}$, τ_1, τ_2 έστω ότι τα μ_1 και μ_2 είναι ανεξάρτητα με $\mu_1 \sim N_p(0, \tau_1^{-1}(1-\tau_1)\eta_1^{-1}I_p)$ και $\mu_2 \sim N_q(0, \tau_2^{-1}(1-\tau_2)\eta_2^{-1}I_q)$. Έστω επίσης ότι τα η_1, η_2, τ_1, τ_2 είναι ανεξάρτητα με πυκνότητες ανάλογες προς $\eta_1^c I_{(0,\infty)}(\eta_1)$, $\eta_2^a I_{(0,\infty)}(\eta_2)$, $\tau_1^c(1-\tau_1)^{n/2-2}I_{(0,1)}(\tau_1)$, $\tau_2^a(1-\tau_2)^{m/2-1}I_{(0,1)}(\tau_2)$. Τότε ο γενικευμένος εκτιμητής Bayes του $\rho = \eta_1/\eta_2$ ως προς την L_2 είναι

$$\delta_{GB} = \frac{1}{\mathsf{E}(\rho^{-1} \mid X, Y, S_1, S_2)} = \frac{1}{\mathsf{E}(\eta_1^{-1} \mid X, S_1)}\frac{1}{\mathsf{E}(\eta_2 \mid Y, S_2)}. \tag{5.26}$$

Ο πρώτος όρος στην (5.26) είναι ο δ_{1GB} στην (5.19) και ο δεύτερος είναι

$$\frac{1}{m}\left(1+\frac{2a+q+2}{m(1+W_2)}\right)^{-1} S_2$$

όπως δείχθηκε στους Maruyama and Strawderman (2006). Συνεπώς, $\delta_{GB} = \delta_{ST}$ θέτοντας $r_1 = (2c+p+2)/(n-2)$ και $r_2 = (2a+q+2)/m$. □

Παρατήρηση 5.2. Ο εκτιμητής δ_{ST} επιδέχεται δύο ενδιαφέρουσες ερμηνείες. Είναι ένας εκτιμητής-γινόμενο καθώς εκτιμά το σ_2^2/σ_1^2 με έναν εκτιμητή του σ_1^{-2}, $(n-2)(1+r_1/(1+W_1))S_1^{-1}$, επί έναν εκτιμητή του σ_2^2, $m^{-1}(1+r_2/(1+W_2))^{-1}S_2$. Επίσης, γράφοντας $\delta_{ST} = \delta_{ST}^{(1)}(\delta_{ST}^{(2)}/\delta_0) = \delta_{ST}^{(2)}(\delta_{ST}^{(1)}/\delta_0)$, όπου $\delta_{ST}^{(1)}$ και $\delta_{ST}^{(2)}$ είναι όπως στο Θεώρημα 5.6, ο όρος $\delta_{ST}^{(2)}/\delta_0 < 1$ μπορεί να ερμηνευθεί ως ένας παράγοντας συρρίκνωσης για τη διόρθωση της υπέρ-επέκτασης στον $\delta_{ST}^{(1)}$. Ομοίως, ο όρος $\delta_{ST}^{(1)}/\delta_0 > 1$ παίζει το ρόλο ενός παράγοντα επέκτασης για τη διόρθωση της υπέρ-συρρίκνωσης στον $\delta_{ST}^{(2)}$. Οι ερμηνείες αυτές ισχύουν επίσης για κάθε εκτιμητή της μορφής (5.25). Μία παρόμοια ερμηνεία μπορεί να δοθεί στον εκτιμητή στην (5.24).

Παρατήρηση 5.3. Έστω δ_{sum} ο εκτιμητής στην (5.24) και δ_{pro} αυτός στην (5.25). Τότε, λόγω της κυρτότητας της L_2, ο $\tau\delta_{sum} + (1-\tau)\delta_{pro}$, για $0 < \tau < 1$, είναι επίσης καλύτερος από τους δ_1^* και δ_2^*, άρα και τον δ_0. Ομοίως, ως προς την L_1, ο $\tau\delta_1^* + (1-\tau)\delta_2^*$ είναι καλύτερος από τον δ_0. Πιο γενικά, λόγω της κυρτότητας των συναρτήσεων κινδύνου, κάθε κυρτός συνδυασμός οποιουδήποτε αριθμού βελτιωμένων εκτιμητών απλής προσαρμογής ή βελτιωμένων εκτιμητών διπλής προσαρμογής μπορεί να παράγει έναν άλλο βελτιωμένο εκτιμητή του δ_0.

Για επιλεγμένες τιμές των n, m, p και q, τα άνω φράγματα για τα r_1 και r_2 του Θεωρήματος 5.7 δίνονται στον Πίνακα 5.1.

Πίνακας 5.1: Τιμές των άνω φραγμάτων για τα r_1 και r_2

r_1	p	n					r_2	q	m				
		5	6	8	10	12			5	6	8	10	12
	1	1.3333	0.5	0.1666	0.0833	0.05		1	0.0611	0.0484	0.032	0.0234	0.0176
L_1	5	6.6666	2.5	0.8333	0.4166	0.25		5	0.2650	0.2147	0.149	0.1093	0.0835
	10	13.333	5	1.6666	0.8333	0.5		10	0.4515	0.3739	0.2683	0.2013	0.1563
	1	0.2285	0.15	0.0785	0.0481	0.032		1	0.1050	0.0781	0.0479	0.0323	0.0233
L_2	5	0.8571	0.6018	0.3409	0.2179	0.1507		5	0.3865	0.304	0.2016	0.1428	0.1061
	10	1.4945	1.0714	0.625	0.4074	0.2857		10	0.5814	0.4742	0.3331	0.2461	0.1886

Είναι γνωστό ότι, για την εκτίμηση της διασποράς κανονικής κατανομής, ο εκτιμητής τύπου Stein επιτυγχάνει τη μέγιστη βελτίωση στο μηδέν, ενώ η βέλτιστη συμπεριφορά του εκτιμητή τύπου Brewster and Zidek πραγματοποιείται κάπου «πιο πέρα» από το μηδέν (βλέπε Rukhin and Ananda, 1992). Από την άλλη πλευρά, έχει υποδειχθεί από τους Maruyama and Strawderman (2006) ότι ο εκτιμητής τύπου Strawderman έχει μία διαφορετική συμπεριφορά μέσης ζημίας από αυτήν των προηγούμενων εκτιμητών. Συγκεκριμένα, παρατηρήθηκε ότι ενώ αυτός ο εκτιμητής προσφέρει σημαντικά μικρότερη βελτίωση μέσης ζημίας σε μία σχετικά μικρή περιοχή μικρών τιμών της παραμέτρου μη κεντρικότητας, η μέση ζημία του παραμένει αρκετά μικρότερη από τη μέση ζημία των εκτιμητών τύπου Stein και Brewster and Zidek για ένα αρκετά μεγαλύτερο εύρος μεγάλων τιμών της παραμέτρου μη κεντρικότητας. Επομένως, για να εξετάσουμε τη συμπεριφορά της μέσης ζημίας των προτεινόμενων εκτιμητών θεωρήσαμε μικρές και μεγάλες τιμές των παραμέτρων μη κεντρικότητας .

Οι Πίνακες 5.2–5.4 παρουσιάζουν τα αποτελέσματα του αριθμητικού υπολογισμού των επί τοις εκατό βελτιώσεων μέσων ζημιών των εκτιμητών τύπου Strawderman δ_{ST1}, δ_{ST2} και δ_{ST} που προτάθηκαν στο Θεώρημα 5.7 ως προς τον δ_0 (με $r_1 = 5$, $r_2 = 0.373$ για $n = m = 6$, $p = q = 10$, $r_1 = 0.833$, $r_2 = 0.2$ για $n = m = 10$, $p = q = 10$, $r_1 = 0.833$, $r_2 = 0.083$ για $n = 8$, $m = 12$, $p = q = 5$ και $r_1 = 0.25$, $r_2 = 0.149$ για $n = 12$, $m = 8$, $p = q = 5$ ως προς την L_1, και με $r_1 = 1.071$, $r_2 = 0.474$ για $n = m = 6$, $p = q = 10$, $r_1 = 0.407$, $r_2 = 0.246$ για $n = m = 10$, $p = q = 10$, $r_1 = 0.34$, $r_2 = 0.106$ για $n = 8$, $m = 12$, $p = q = 5$ και $r_1 = 0.15$, $r_2 = 0.201$ για $n = 12$, $m = 8$, $p = q = 5$ ως προς την L_2) καθώς επίσης και εκείνων των εκτιμητών τύπου Stein δ_{S1}, δ_{S2}, δ_S και των εκτιμητών τύπου Brewster and Zidek δ_{BZ1}, δ_{BZ2}, δ_{BZ} που δίνονται κάτω από τις (5.24) και (5.25). Παρατηρούμε ότι οι εκτιμητές τύπου Stein και Brewster and Zidek έχουν σημαντικά μεγαλύτερη μέγιστη βελτίωση από αυτήν των εκτιμητών τύπου Strawderman. Από την άλλη πλευρά, οι βελτιώσεις σταδιακά φθίνουν καθώς και οι δύο παράμετροι μη κεντρικότητας $\lambda_1 = \|\mu_1\|^2/\sigma_1^2$ και $\lambda_2 = \|\mu_2\|^2/\sigma_2^2$ «απομακρύνονται» από το 0, πιο γρήγορα στην περίπτωση των εκτιμητών τύπου Stein κατόπιν στην περίπτωση των εκτιμητών τύπου Brewster and Zidek, ενώ οι εκτιμητές τύπου Strawderman έχουν το μικρότερο ρυθμό μείωσης. Συνολικά, φαίνεται ότι οι δ_{S1}, δ_{S2}, δ_S, δ_{BZ1}, δ_{BZ2}, δ_{BZ} είναι καλύτεροι όταν τουλάχιστον ένα από τα λ_1, λ_2 είναι «μικρό», ενώ οι δ_{ST1}, δ_{ST2}, δ_{ST} έχουν καλύτερη συμπεριφορά μέσης ζημίας όταν και τα δύο τα λ_1 και λ_2 είναι «μεγάλα». Επομένως, αυτή η συμπεριφορά είναι σε συμφωνία με τη συμπεριφορά μέσης ζημίας των εκτιμητών τύπου Stein, Brewster and Zidek και Strawderman ενός πληθυσμού, όπως αναφέρθηκε παραπάνω.

Πίνακας 5.2: % βελτιώσεις των μέσων ζημιών των βελτιωμένων εκτιμητών διπλής προσαρμογής ως προς τον δ_0 κοντά στο μηδέν

λ_1	λ_2	δ_{S1}	δ_{BZ1}	δ_{ST1}	δ_{S2}	δ_{BZ2}	δ_{ST2}	δ_S	δ_{BZ}	δ_{ST}	δ_{S1}	δ_{BZ1}	δ_{ST1}	δ_{S2}	δ_{BZ2}	δ_{ST2}	δ_S	δ_{BZ}	δ_{ST}
		$n=m=6, p=q=10$									$n=m=10, p=q=10$								
0	0	37.05	26.67	15.85	35.17	34.79	19.96	36.15	41.69	21.14	27.23	27.03	11.04	27.95	30.53	11.34	28.35	33.20	11.77
	2	35.46	24.35	14.92	32.25	32.40	19.27	33.47	40.10	20.60	25.25	24.87	10.61	25.19	28.44	11.06	25.79	31.91	11.59
	4	34.06	22.20	14.09	29.56	30.09	18.62	30.80	38.18	20.04	23.43	22.72	10.19	22.60	26.27	10.77	23.22	30.16	11.36
	6	32.88	20.22	13.34	27.20	27.90	18.01	28.35	36.12	19.49	21.88	20.63	9.80	20.33	24.11	10.47	20.91	28.19	11.10
	8	31.91	18.41	12.66	25.21	25.86	17.45	26.21	34.01	18.96	20.62	18.66	9.43	18.46	22.03	10.17	18.95	26.13	10.84
	10	31.14	16.76	12.04	23.57	23.95	16.92	24.41	31.92	18.44	19.63	16.82	9.08	16.96	20.07	9.88	17.36	24.07	10.56
	12	30.53	15.26	11.48	22.23	22.20	16.43	22.93	29.90	17.95	18.87	15.13	8.75	15.79	18.24	9.59	16.10	22.08	10.30
	15	29.88	13.28	10.72	20.73	19.82	15.77	21.23	27.06	17.27	18.07	12.86	8.30	14.53	15.75	9.19	14.74	19.29	9.90
2	0	34.69	31.91	22.49	32.72	37.42	20.41	32.76	41.00	21.02	24.55	29.19	12.51	25.40	31.72	11.72	25.29	32.40	11.93
	2	33.46	29.99	21.71	30.30	35.42	19.80	30.71	40.04	20.59	23.08	27.62	12.15	23.22	30.20	11.49	23.37	31.81	11.80
	4	32.34	28.18	21.00	27.97	33.43	19.22	28.53	38.68	20.13	21.64	25.97	11.80	21.03	28.49	11.24	21.28	30.68	11.62
	6	31.36	26.50	20.36	25.87	31.51	18.67	26.46	37.09	19.66	20.37	24.31	11.46	19.05	26.71	10.98	19.33	29.23	11.41
	8	30.55	24.95	19.77	24.06	29.69	18.16	24.62	35.41	19.20	19.30	22.70	11.14	17.38	24.95	10.72	17.64	27.62	11.19
	10	29.89	23.52	19.24	22.55	27.98	17.68	23.04	33.70	18.75	18.45	21.18	10.83	16.01	23.25	10.45	16.23	25.95	10.95
	12	29.37	22.22	18.75	21.31	26.38	17.23	21.73	32.01	18.32	17.79	19.76	10.54	14.93	21.63	10.20	15.11	24.30	10.72
	15	28.80	20.49	18.10	19.89	24.19	16.62	20.21	29.58	17.71	17.09	17.83	10.14	13.76	19.41	9.83	13.89	21.93	10.37
4	0	31.53	34.76	26.46	29.71	38.58	20.50	29.25	39.74	20.68	21.40	29.74	13.39	22.50	31.66	11.89	22.15	30.98	11.92
	2	30.56	33.17	25.80	27.70	36.93	19.97	27.65	39.29	20.34	20.29	28.64	13.09	20.76	30.64	11.71	20.68	30.96	11.84
	4	29.64	31.63	25.19	25.67	35.23	19.44	25.83	38.37	19.96	19.12	27.39	12.79	18.89	29.34	11.50	18.94	30.32	11.71
	6	28.82	30.19	24.63	23.78	33.55	18.95	24.04	37.18	19.56	18.04	26.08	12.50	17.13	27.90	11.27	17.24	29.29	11.55
	8	28.12	28.84	24.12	22.12	31.92	18.48	22.40	35.83	19.16	17.12	24.77	12.22	15.60	26.41	11.04	15.72	28.04	11.36
	10	27.55	27.60	23.66	20.72	30.38	18.03	20.99	34.42	18.77	16.34	23.50	11.95	14.34	24.93	10.80	14.46	26.69	11.15
	12	27.09	26.46	23.23	19.56	28.92	17.62	19.80	32.99	18.38	15.78	22.29	11.70	13.34	23.50	10.57	13.43	25.31	10.95
	15	26.58	24.92	22.65	18.22	26.91	17.05	18.41	30.91	17.84	15.14	20.63	11.34	12.23	21.51	10.23	12.30	23.28	10.63
6	0	28.16	36.11	28.72	26.64	38.77	20.35	25.94	38.17	20.22	18.30	29.31	13.88	19.70	30.81	11.92	19.27	29.22	11.82
	2	27.39	34.77	28.14	24.96	37.44	19.88	24.67	38.13	19.96	17.45	28.58	13.62	18.30	30.23	11.78	18.12	29.66	11.79
	4	26.61	33.46	27.61	23.16	35.99	19.42	23.10	37.58	19.64	16.47	27.66	13.36	16.67	29.29	11.60	16.61	29.42	11.69
	6	25.90	32.21	27.12	21.45	34.52	18.96	21.50	36.69	19.30	15.53	26.62	13.11	15.07	28.14	11.40	15.09	28.73	11.56
	8	25.29	31.03	26.68	19.91	33.07	18.53	20.02	35.62	18.95	14.71	25.55	12.87	13.66	26.88	11.20	13.71	27.78	11.40
	10	24.78	29.93	26.27	18.59	31.68	18.12	18.72	34.45	18.60	14.03	24.49	12.63	12.48	25.60	10.99	12.53	26.68	11.22
	12	24.37	28.92	25.89	17.49	30.34	17.74	17.62	33.24	18.26	13.49	23.46	12.40	11.53	24.34	10.77	11.58	25.52	11.04
	15	23.90	27.54	25.38	16.21	28.48	17.20	16.33	31.43	17.76	12.90	22.01	12.08	10.48	22.55	10.46	10.52	23.77	10.76

συνεχίζεται στην επόμενη σελίδα

Πίνακας 5.2 (συνέχεια)

λ_1	λ_2	δ_{S1}	δ_{BZ1}	δ_{ST1}	δ_{S2}	δ_{BZ2}	δ_{ST2}	δ_S	δ_{BZ}	δ_{ST}	δ_{S1}	δ_{BZ1}	δ_{ST1}	δ_{S2}	δ_{BZ2}	δ_{ST2}	δ_S	δ_{BZ}	δ_{ST}
		$n=m=6,\ p=q=10$									$n=m=10,\ p=q=10$								
8	0	24.88	36.51	29.86	23.75	38.34	20.06	22.96	36.46	19.69	15.52	28.30	14.09	17.22	29.49	11.85	16.79	27.32	11.65
	2	24.25	35.38	29.35	22.33	37.28	19.65	21.93	36.76	19.49	14.84	27.88	13.87	16.08	29.30	11.75	15.86	28.13	11.66
	4	23.59	34.25	28.89	20.73	36.07	19.23	20.54	36.49	19.23	13.99	27.22	13.65	14.62	28.66	11.60	14.52	28.21	11.60
	6	22.97	33.16	28.46	19.15	34.79	18.82	19.09	35.87	18.94	13.15	26.42	13.43	13.15	27.77	11.43	13.12	27.80	11.49
	8	22.42	32.12	28.07	17.71	33.50	18.42	17.73	35.02	18.63	12.40	25.54	13.22	11.83	26.73	11.25	11.83	27.09	11.36
	10	21.95	31.14	27.70	16.46	32.23	18.04	16.51	34.05	18.32	11.77	24.64	13.01	10.70	25.62	11.06	10.72	26.20	11.20
	12	21.58	30.23	27.37	15.41	31.01	17.68	15.48	33.01	18.01	11.27	23.75	12.80	9.79	24.50	10.86	9.81	25.21	11.04
	15	21.15	28.99	26.91	14.19	29.29	17.18	14.25	31.43	17.56	10.72	22.49	12.52	8.78	22.87	10.58	8.80	23.69	10.79
10	0	21.85	36.32	30.28	21.15	37.49	19.68	20.38	34.70	19.14	13.13	26.97	14.11	15.13	27.91	11.72	14.75	25.38	11.44
	2	21.33	35.36	29.84	19.96	36.69	19.32	19.51	35.27	18.99	12.58	26.81	13.93	14.17	28.05	11.64	13.96	26.50	11.48
	4	20.75	34.38	29.43	18.50	35.69	18.94	18.26	35.25	18.78	11.83	26.37	13.75	12.85	27.69	11.53	12.74	26.84	11.45
	6	20.19	33.42	29.05	17.03	34.58	18.56	16.92	34.84	18.53	11.06	25.75	13.56	11.48	27.02	11.38	11.42	26.66	11.37
	8	19.69	32.50	28.70	15.67	33.43	18.20	15.63	34.19	18.25	10.36	25.04	13.37	10.22	26.16	11.22	10.20	26.15	11.25
	10	19.27	31.62	28.37	14.48	32.28	17.84	14.48	33.38	17.97	9.77	24.28	13.18	9.14	25.21	11.05	9.13	25.43	11.12
	12	18.92	30.79	28.07	13.47	31.16	17.51	13.49	32.48	17.69	9.29	23.51	13.00	8.25	24.21	10.87	8.26	24.59	10.98
	15	18.52	29.67	27.66	12.28	29.56	17.03	12.31	31.08	17.28	8.76	22.39	12.74	7.27	22.74	10.60	7.28	23.25	10.75
12	0	19.12	35.76	30.24	18.90	36.41	19.25	18.18	32.95	18.58	11.15	25.49	14.01	13.42	26.21	11.54	13.10	23.47	11.20
	2	18.69	34.95	29.86	17.87	35.83	18.93	17.44	33.76	18.48	10.69	25.54	13.87	12.61	26.64	11.50	12.42	24.85	11.27
	4	18.18	34.10	29.49	16.54	35.02	18.60	16.29	33.95	18.30	10.01	25.28	13.71	11.39	26.52	11.40	11.28	25.41	11.26
	6	17.67	33.25	29.15	15.16	34.06	18.25	15.02	33.71	18.09	9.29	24.82	13.54	10.08	26.05	11.28	10.03	25.42	11.21
	8	17.21	32.42	28.84	13.86	33.04	17.91	13.80	33.21	17.84	8.62	24.24	13.37	8.87	25.35	11.14	8.84	25.07	11.11
	10	16.81	31.63	28.54	12.72	32.00	17.58	12.69	32.54	17.59	8.06	23.59	13.21	7.82	24.53	10.98	7.81	24.50	11.00
	12	16.47	30.88	28.27	11.74	30.97	17.26	11.73	31.77	17.33	7.60	22.92	13.04	6.96	23.64	10.82	6.96	23.78	10.87
	15	16.10	29.84	27.89	10.58	29.48	16.81	10.59	30.52	16.94	7.09	21.93	12.80	6.00	22.30	10.57	6.00	22.59	10.66
15	0	15.64	34.54	29.67	16.15	34.53	18.56	15.55	30.43	17.75	8.87	23.19	13.72	11.51	23.61	11.23	11.28	20.77	10.83
	2	15.30	33.91	29.35	15.31	34.26	18.30	14.94	31.52	17.71	8.51	23.50	13.61	10.85	24.42	11.22	10.70	22.46	10.93
	4	14.86	33.22	29.04	14.12	33.69	18.01	13.89	31.96	17.58	7.89	23.46	13.49	9.72	24.61	11.16	9.64	23.28	10.95
	6	14.40	32.51	28.75	12.84	32.94	17.71	12.70	31.94	17.41	7.22	23.19	13.35	8.49	24.39	11.07	8.44	23.52	10.93
	8	13.97	31.80	28.48	11.61	32.09	17.40	11.53	31.63	17.20	6.59	22.77	13.21	7.32	23.89	10.95	7.30	23.37	10.86
	10	13.61	31.11	28.22	10.51	31.20	17.10	10.47	31.13	16.98	6.05	22.26	13.07	6.31	23.24	10.81	6.30	22.96	10.77
	12	13.30	30.45	27.98	9.57	30.28	16.81	9.55	30.50	16.75	5.60	21.71	12.93	5.47	22.50	10.67	5.46	22.39	10.66
	15	12.94	29.53	27.65	8.45	28.94	16.40	8.45	29.45	16.41	5.12	20.86	12.72	4.53	21.32	10.45	4.53	21.39	10.48

Πίνακας 5.3: % βελτιώσεις των μέσων ζημιών των βελτιωμένων εκτιμητών διπλής προσαρμογής ως προς τον δ_0 κοντά στο μηδέν

λ_1	λ_2	δ_{S1}	δ_{BZ1}	δ_{ST1}	δ_{S2}	δ_{BZ2}	δ_{ST2}	δ_S	δ_{BZ}	δ_{ST}	δ_{S1}	δ_{BZ1}	δ_{ST1}	δ_{S2}	δ_{BZ2}	δ_{ST2}	δ_S	δ_{BZ}	δ_{ST}
		$n=8, m=12, p=q=5$									$n=12, m=8, p=q=5$								
0	0	21.39	15.94	5.94	19.32	18.10	6.67	19.47	20.16	6.95	14.40	15.83	5.27	16.90	18.97	5.96	17.06	19.17	5.97
	2	19.72	13.62	5.62	16.93	15.81	6.48	17.18	18.12	6.82	12.52	14.77	5.23	14.26	18.30	6.18	14.57	19.36	6.30
	4	18.46	11.55	5.33	15.05	13.66	6.29	15.28	15.98	6.65	10.86	13.45	5.15	11.80	17.09	6.24	12.12	18.61	6.44
	6	17.56	9.74	5.07	13.68	11.72	6.10	13.87	13.92	6.48	9.56	12.07	5.02	9.82	15.64	6.21	10.09	17.37	6.46
	8	16.96	8.19	4.82	12.74	10.00	5.91	12.87	12.03	6.30	8.61	10.72	4.88	8.34	14.15	6.11	8.54	15.92	6.39
	10	16.56	6.87	4.60	12.10	8.52	5.73	12.20	10.34	6.12	7.96	9.45	4.73	7.28	12.70	5.98	7.42	14.43	6.28
	12	16.31	5.75	4.39	11.70	7.24	5.55	11.76	8.85	5.95	7.51	8.29	4.58	6.55	11.34	5.82	6.64	12.98	6.14
	15	16.10	4.41	4.11	11.34	5.67	5.31	11.38	6.99	5.70	7.11	6.79	4.36	5.87	9.53	5.57	5.93	11.00	5.90
2	0	18.56	20.72	9.80	16.63	20.95	7.84	16.44	21.42	7.92	12.06	16.10	5.78	14.53	18.45	6.10	14.43	17.70	6.02
	2	17.46	19.01	9.55	14.92	19.30	7.71	14.91	20.24	7.84	10.79	15.70	5.80	12.62	18.54	6.38	12.69	18.67	6.40
	4	16.55	17.46	9.32	13.46	17.64	7.56	13.50	18.78	7.73	9.53	14.92	5.76	10.61	17.90	6.49	10.73	18.53	6.59
	6	15.88	16.07	9.11	12.33	16.06	7.40	12.39	17.26	7.60	8.48	13.96	5.68	8.89	16.89	6.48	9.01	17.79	6.65
	8	15.42	14.85	8.91	11.53	14.63	7.24	11.58	15.80	7.46	7.69	12.95	5.57	7.57	15.73	6.42	7.67	16.75	6.62
	10	15.10	13.79	8.73	10.98	13.36	7.09	11.02	14.46	7.32	7.13	11.95	5.45	6.60	14.53	6.31	6.68	15.59	6.53
	12	14.90	12.89	8.56	10.62	12.25	6.94	10.65	13.25	7.18	6.74	11.02	5.33	5.93	13.37	6.17	5.98	14.41	6.41
	15	14.73	11.78	8.33	10.31	10.86	6.73	10.32	11.71	6.97	6.40	9.78	5.14	5.30	11.78	5.95	5.33	12.74	6.20
4	0	15.02	22.40	11.89	13.54	21.70	8.47	13.26	21.22	8.40	9.78	15.38	6.04	12.34	17.18	6.13	12.17	15.93	5.98
	2	14.27	21.24	11.70	12.30	20.58	8.38	12.20	20.66	8.38	8.88	15.47	6.10	10.90	17.88	6.45	10.88	17.47	6.41
	4	13.59	20.08	11.52	11.12	19.31	8.26	11.09	19.71	8.31	7.85	15.08	6.09	9.18	17.70	6.60	9.21	17.79	6.63
	6	13.06	18.99	11.35	10.16	18.04	8.14	10.16	18.59	8.21	6.96	14.44	6.04	7.64	17.04	6.62	7.68	17.42	6.72
	8	12.68	18.02	11.19	9.46	16.83	8.00	9.47	17.45	8.10	6.26	13.68	5.97	6.42	16.15	6.58	6.46	16.69	6.71
	10	12.42	17.15	11.04	8.97	15.74	7.87	8.98	16.36	7.99	5.76	12.89	5.87	5.51	15.16	6.49	5.55	15.77	6.65
	12	12.24	16.40	10.89	8.64	14.76	7.74	8.65	15.36	7.87	5.41	12.12	5.77	4.88	14.16	6.38	4.90	14.80	6.55
	15	12.10	15.47	10.70	8.35	13.52	7.55	8.36	14.06	7.70	5.09	11.07	5.60	4.28	12.75	6.18	4.29	13.37	6.37
6	0	11.74	22.54	12.94	10.80	21.28	8.75	10.52	20.24	8.59	7.91	14.19	6.12	10.60	15.58	6.08	10.43	14.11	5.88
	2	11.21	21.73	12.79	9.87	20.59	8.70	9.74	20.15	8.60	7.23	14.65	6.22	9.46	16.78	6.44	9.40	16.07	6.35
	4	10.67	20.86	12.64	8.87	19.65	8.61	8.82	19.58	8.57	6.35	14.56	6.24	7.92	16.97	6.62	7.91	16.75	6.60
	6	10.22	20.01	12.50	8.03	18.62	8.51	8.01	18.76	8.50	5.55	14.15	6.22	6.49	16.60	6.68	6.50	16.66	6.72
	8	9.89	19.21	12.37	7.39	17.60	8.40	7.38	17.86	8.42	4.91	13.58	6.16	5.33	15.91	6.65	5.35	16.15	6.73
	10	9.66	18.49	12.24	6.94	16.65	8.29	6.94	16.97	8.32	4.44	12.95	6.09	4.47	15.09	6.58	4.48	15.42	6.69
	12	9.51	17.85	12.12	6.63	15.78	8.17	6.63	16.12	8.23	4.11	12.31	6.00	3.85	14.22	6.48	3.87	14.60	6.61
	15	9.37	17.05	11.95	6.35	14.67	8.01	6.36	14.99	8.08	3.81	11.40	5.86	3.27	12.95	6.30	3.28	13.35	6.45

συνεχίζεται στην επόμενη σελίδα

Πίνακας 5.3 (συνέχεια)

λ_1	λ_2	δ_{S1}	δ_{BZ1}	δ_{ST1}	δ_{S2}	δ_{BZ2}	δ_{ST2}	δ_S	δ_{BZ}	δ_{ST}	δ_{S1}	δ_{BZ1}	δ_{ST1}	δ_{S2}	δ_{BZ2}	δ_{ST2}	δ_S	δ_{BZ}	δ_{ST}
		$n=8, m=12, p=q=5$									$n=12, m=8, p=q=5$								
8	0	9.03	21.83	13.36	8.61	20.25	8.82	8.38	18.90	8.60	6.50	12.84	6.09	9.31	13.90	5.98	9.18	12.37	5.76
	2	8.64	21.31	13.24	7.89	19.91	8.79	7.77	19.17	8.64	6.96	13.58	6.22	8.36	15.50	6.38	8.31	14.66	6.26
	4	8.18	20.66	13.12	7.01	19.23	8.73	6.96	18.88	8.63	5.16	13.71	6.28	6.94	16.00	6.58	6.92	15.60	6.54
	6	7.79	19.98	13.00	6.24	18.40	8.65	6.21	18.30	8.58	4.41	13.48	6.27	5.58	15.85	6.67	5.58	15.72	6.67
	8	7.49	19.31	12.90	5.64	17.54	8.56	5.63	17.58	8.52	3.81	13.06	6.23	4.46	15.34	6.66	4.47	15.38	6.70
	10	7.28	18.70	12.79	5.22	16.71	8.46	5.21	16.83	8.44	3.37	12.54	6.17	3.62	14.65	6.61	3.63	14.79	6.68
	12	7.14	18.15	12.68	4.92	15.93	8.36	4.92	16.10	8.36	3.05	11.99	6.10	3.02	13.88	6.52	3.03	14.09	6.61
	15	7.01	17.45	12.54	4.66	14.92	8.21	4.66	15.10	8.23	2.76	11.20	5.98	2.46	12.73	6.35	2.46	12.98	6.46
10	0	6.93	20.73	13.41	6.97	18.92	8.75	6.79	17.42	8.48	5.50	11.48	6.00	8.41	12.28	5.86	8.32	10.78	5.61
	2	6.62	20.41	13.31	6.38	18.88	8.76	6.29	17.98	8.55	5.03	12.44	6.16	7.58	14.21	6.29	7.54	13.32	6.14
	4	6.22	19.93	13.22	5.58	18.42	8.72	5.54	17.91	8.56	4.29	12.74	6.23	6.23	14.95	6.51	6.21	14.46	6.44
	6	5.86	19.39	13.12	4.86	17.76	8.66	4.84	17.50	8.54	3.57	12.65	6.25	4.91	14.98	6.61	4.91	14.75	6.59
	8	5.58	18.83	13.03	4.29	17.03	8.58	4.28	16.92	8.50	2.99	12.34	6.22	3.82	14.61	6.63	3.82	14.54	6.64
	10	5.38	18.31	12.94	3.88	16.29	8.49	3.88	16.28	8.43	2.56	11.91	6.18	3.00	14.02	6.58	3.00	14.06	6.63
	12	5.25	17.82	12.85	3.60	15.59	8.40	3.60	15.64	8.36	2.25	11.44	6.12	2.41	13.34	6.51	2.41	13.44	6.57
	15	5.13	17.20	12.72	3.34	14.66	8.27	3.34	14.75	8.25	1.97	10.72	6.01	1.85	12.29	6.36	1.85	12.43	6.44
12	0	5.36	19.45	13.23	5.78	17.49	8.61	5.65	15.94	8.31	4.81	10.19	5.87	7.81	10.77	5.72	7.74	9.36	5.46
	2	5.10	19.31	13.17	5.28	17.69	8.63	5.21	16.71	8.40	4.39	11.32	6.05	7.05	12.97	6.17	7.02	12.09	6.01
	4	4.73	18.96	13.09	4.54	17.42	8.61	4.50	16.82	8.43	3.68	11.76	6.14	5.74	13.90	6.42	5.73	13.39	6.33
	6	4.40	18.52	13.01	3.85	16.90	8.56	3.83	16.55	8.42	2.98	11.78	6.17	4.45	14.08	6.54	4.45	13.80	6.49
	8	4.13	18.05	12.93	3.30	16.27	8.50	3.29	16.08	8.39	2.41	11.55	6.16	3.38	13.83	6.57	3.38	13.69	6.56
	10	3.94	17.59	12.85	2.90	15.62	8.43	2.89	15.53	8.34	1.98	11.19	6.13	2.56	13.33	6.54	2.56	13.30	6.55
	12	3.81	17.17	12.77	2.62	14.99	8.35	2.62	14.96	8.28	1.68	10.77	6.08	1.98	12.72	6.47	1.98	12.75	6.51
	15	3.69	16.60	12.66	2.37	14.12	8.23	2.37	14.15	8.18	1.40	10.12	5.98	1.42	11.74	6.33	1.42	11.82	6.39
15	0	3.77	17.49	12.76	4.64	15.37	8.30	4.57	13.84	7.98	4.18	8.47	5.64	7.27	8.79	5.50	7.23	7.54	5.22
	2	3.56	17.55	12.72	4.22	15.87	8.35	4.18	14.86	8.10	3.80	9.79	5.84	6.57	11.30	5.99	6.55	10.49	5.80
	4	3.22	17.36	12.67	3.52	15.82	8.36	3.50	15.17	8.15	3.11	10.38	5.95	5.30	12.46	6.26	5.29	11.96	6.14
	6	2.90	17.04	12.60	2.86	15.47	8.33	2.85	15.05	8.16	2.43	10.51	6.01	4.02	12.82	6.40	4.02	12.51	6.33
	8	2.65	16.67	12.54	2.32	14.97	8.29	2.32	14.71	8.14	1.87	10.38	6.02	2.97	12.70	6.44	2.97	12.52	6.41
	10	2.46	16.28	12.48	1.93	14.42	8.23	1.93	14.26	8.11	1.45	10.10	6.00	2.16	12.30	6.43	2.16	12.21	6.43
	12	2.34	15.92	12.41	1.66	13.86	8.16	1.66	13.77	8.07	1.15	9.75	5.96	1.58	11.77	6.38	1.58	11.74	6.39
	15	2.22	15.42	12.32	1.42	13.08	8.06	1.42	13.05	7.98	0.87	9.17	5.88	1.03	10.88	6.26	1.03	10.90	6.29

Πίνακας 5.4: % βελτιώσεις των μέσων ζημιών των βελτιωμένων εκτιμητών διπλής προσαρμογής ως προς τον δ_0 για μεγάλο εύρος των παραμέτρων μη κεντρικότητας

λ_1	λ_2	δ_{S1}	δ_{BZ1}	δ_{ST1}	δ_{S2}	δ_{BZ2}	δ_{ST2}	δ_S	δ_{BZ}	δ_{ST}	δ_{S1}	δ_{BZ1}	δ_{ST1}	δ_{S2}	δ_{BZ2}	δ_{ST2}	δ_S	δ_{BZ}	δ_{ST}
		$n=m=6,\ p=q=10$									$n=m=10,\ p=q=10$								
	0	37.05	26.67	15.85	35.17	34.79	19.96	36.15	41.69	21.14	27.23	27.03	11.04	27.95	30.53	11.34	28.35	33.20	11.77
	10	31.14	16.76	12.04	23.57	23.95	16.92	24.41	31.92	18.44	19.63	16.82	9.08	16.96	20.07	9.88	17.36	24.07	10.56
0	25	28.94	8.47	8.77	18.37	13.77	14.03	18.51	19.32	15.40	17.04	7.42	7.04	12.83	9.61	8.05	12.88	12.03	8.73
	50	28.70	3.12	6.01	17.62	6.22	11.48	17.62	8.96	12.53	16.84	1.99	5.07	12.46	3.02	6.17	12.46	3.84	6.73
	100	28.70	0.70	3.68	17.60	1.90	9.31	17.60	2.77	10.00	16.84	0.26	3.24	12.46	0.49	4.40	12.46	0.62	4.78
	0	21.85	36.32	30.28	21.15	37.49	19.68	20.38	34.70	19.14	13.13	26.97	14.11	15.13	27.91	11.72	14.75	25.38	11.44
	10	19.27	31.62	28.37	14.48	32.28	17.84	14.48	33.38	17.97	9.77	24.28	13.18	9.14	25.21	11.05	9.13	25.43	11.12
10	25	17.91	26.77	26.56	10.32	25.16	15.73	10.33	26.73	16.06	8.05	19.35	11.97	5.85	18.58	9.79	5.86	19.13	9.99
	50	17.75	23.30	24.92	9.65	19.14	13.71	9.65	20.08	14.03	7.90	15.89	10.68	5.53	13.48	8.33	5.53	13.73	8.53
	100	17.75	21.63	23.49	9.63	15.46	11.92	9.63	15.79	12.16	7.90	14.68	9.41	5.52	11.36	6.87	5.52	11.41	7.03
	0	8.31	29.67	26.20	11.09	28.03	16.31	10.85	23.36	15.31	5.27	16.43	12.27	8.69	16.06	10.06	8.63	13.63	9.57
	10	6.73	27.77	25.32	6.36	27.37	15.38	6.33	26.39	15.05	2.77	17.48	11.99	3.99	18.66	10.01	3.99	18.13	9.85
25	25	5.63	24.77	24.29	2.60	22.68	13.85	2.60	22.82	13.79	1.22	14.79	11.31	0.93	14.61	9.19	0.93	14.61	9.19
	50	5.49	22.31	23.26	1.96	17.85	12.23	1.96	18.09	12.27	1.08	12.31	10.45	0.62	10.52	8.06	0.62	10.56	8.11
	100	5.48	21.05	22.31	1.95	14.70	10.73	1.95	14.78	10.78	1.08	11.36	9.53	0.61	8.67	6.85	0.61	8.68	6.90
	0	3.25	20.59	18.67	8.80	16.68	12.33	8.79	13.11	11.39	4.13	7.32	9.06	7.95	6.20	7.71	7.95	5.08	7.24
	10	1.89	20.37	18.39	4.42	19.52	12.11	4.42	18.42	11.70	1.69	10.11	9.22	3.37	11.77	8.14	3.37	11.44	7.94
50	25	0.82	18.47	17.83	0.73	16.66	11.03	0.73	16.45	10.86	0.16	8.45	8.89	0.32	9.15	7.68	0.32	9.09	7.60
	50	0.68	16.61	17.16	0.10	12.85	9.71	0.10	12.72	9.65	0.02	6.43	8.31	0.01	5.60	6.79	0.01	5.60	6.78
	100	0.68	15.60	16.49	0.09	9.91	8.42	0.09	9.92	8.41	0.02	5.60	7.62	0.008	3.90	5.77	0.008	3.90	5.78
	0	2.56	12.41	11.48	8.69	7.50	8.56	8.69	5.68	7.89	4.11	2.18	5.77	7.94	1.36	5.27	7.94	1.10	4.92
	10	1.19	13.27	11.60	4.33	12.79	8.89	4.33	12.15	8.57	1.67	5.67	6.23	3.36	8.15	6.09	3.36	8.07	5.92
100	25	0.15	12.09	11.34	0.64	11.18	8.17	0.64	11.01	8.02	0.13	4.44	6.15	0.31	6.11	5.90	0.31	6.09	5.82
	50	0.01	10.63	10.91	0.01	7.83	7.10	0.01	7.80	7.03	0	2.60	5.77	0.003	2.79	5.22	0.003	2.79	5.19
	100	0.01	9.77	10.43	0	5.26	5.98	0	5.26	5.95	0	1.82	5.25	0	1.15	4.35	0	1.15	4.34

συνεχίζεται στην επόμενη σελίδα

Πίνακας 5.4 (συνέχεια)

λ_1	λ_2	δ_{S1}	δ_{BZ1}	δ_{ST1}	δ_{S2}	δ_{BZ2}	δ_{ST2}	δ_S	δ_{BZ}	δ_{ST}	δ_{S1}	δ_{BZ1}	δ_{ST1}	δ_{S2}	δ_{BZ2}	δ_{ST2}	δ_S	δ_{BZ}	δ_{ST}
		$n=8, m=12, p=q=5$									$n=12, m=8, p=q=5$								
	0	21.39	15.94	5.94	19.32	18.10	6.67	19.47	20.16	6.95	14.40	15.83	5.27	16.90	18.97	5.96	17.06	19.17	5.97
	10	16.56	6.87	4.60	12.10	8.52	5.73	12.20	10.34	6.12	7.96	9.45	4.73	7.28	12.70	5.98	7.42	14.43	6.28
0	25	15.93	1.85	3.38	11.05	2.56	4.64	11.05	3.20	5.01	6.75	3.46	3.69	5.22	5.31	4.76	5.23	6.22	5.08
	50	15.92	0.30	2.33	11.02	0.46	3.63	11.02	0.57	3.90	6.72	0.77	2.60	5.16	1.47	3.39	5.16	1.74	3.63
	100	15.92	0.06	1.43	11.02	0.067	2.74	11.02	0.07	2.92	6.72	0.10	1.60	5.16	0.24	2.14	5.16	0.29	2.30
	0	6.93	20.73	13.41	6.97	18.92	8.75	6.79	17.42	8.48	5.50	11.48	6.00	8.41	12.28	5.86	8.32	10.78	5.61
	10	5.38	18.31	12.94	3.88	16.29	8.49	3.88	16.28	8.43	2.56	11.91	6.18	3.00	14.02	6.58	3.00	14.06	6.63
10	25	5.02	15.87	12.36	3.11	12.58	7.85	3.11	12.67	7.87	1.70	8.85	5.62	1.28	9.39	5.77	1.28	9.53	5.88
	50	5.01	14.95	11.80	3.09	10.99	7.14	3.09	11.01	7.18	1.67	7.07	4.87	1.22	6.35	4.64	1.22	6.40	4.74
	100	5.01	14.79	11.29	3.09	10.67	6.47	3.09	10.67	6.51	1.67	6.59	4.13	1.22	5.30	3.56	1.22	5.30	3.63
	0	1.87	12.11	10.76	3.43	9.73	7.14	3.42	8.59	6.80	3.58	4.58	4.82	6.78	4.42	4.79	6.77	3.71	4.51
	10	0.66	12.10	10.68	0.89	10.66	7.30	0.88	10.47	7.15	0.91	7.29	5.40	1.78	9.69	6.00	1.78	9.58	5.95
25	25	0.33	10.59	10.41	0.15	8.08	6.93	0.15	8.07	6.87	0.08	5.20	5.11	0.09	6.25	5.46	0.09	6.25	5.48
	50	0.32	9.90	10.07	0.13	6.75	6.41	0.13	6.76	6.39	0.05	3.73	4.56	0.03	3.55	4.49	0.03	3.55	4.53
	100	0.32	9.78	9.73	0.13	6.47	5.88	0.13	6.47	5.87	0.05	3.31	3.96	0.03	2.58	3.52	0.03	2.58	3.55
	0	1.54	5.62	7.21	3.27	3.53	4.99	3.27	3.06	4.72	3.52	1.21	3.37	6.73	0.96	3.55	6.73	0.79	3.33
	10	0.34	6.58	7.34	0.74	6.04	5.43	0.74	5.95	5.29	0.86	4.57	4.19	1.74	7.35	5.10	1.74	7.31	5.04
50	25	0.009	5.44	7.22	0.02	3.97	5.25	0.02	3.96	5.18	0.02	2.76	4.08	0.06	4.28	4.76	0.06	4.28	4.75
	50	0.002	4.84	7.00	0	2.76	4.85	0	2.76	4.82	0	1.38	3.64	0	1.69	3.91	0	1.69	3.93
	100	0.002	4.73	6.75	0	2.49	4.41	0	2.49	4.40	0	0.98	3.13	0	0.75	3.02	0	0.74	3.04
	0	1.54	2.04	4.23	3.27	0.85	3.05	3.27	0.73	2.87	3.52	0.19	2.07	6.73	0.12	2.41	6.73	0.10	2.26
	10	0.34	3.40	4.49	0.74	3.95	3.69	0.74	3.92	3.60	0.86	3.70	3.06	1.74	6.74	4.22	1.74	6.73	4.17
100	25	0.007	2.42	4.46	0.018	2.06	3.64	0.018	2.06	3.59	0.02	1.95	3.05	0.06	3.75	4.02	0.06	3.75	4.00
	50	0	1.86	4.31	0	0.89	3.33	0	0.89	3.30	0	0.59	2.70	0	1.18	3.26	0	1.18	3.26
	100	0	1.76	4.11	0	0.63	2.95	0	0.62	2.94	0	0.19	2.24	0	0.24	2.43	0	0.24	2.43

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Εκτιμητές τύπου Strawderman για το λόγο των παραμέτρων κλίμακας δύο εκθετικών κατανομών

Στο κεφάλαιο αυτό, κατασκευάζονται κλάσεις εκτιμητών τύπου Strawderman για το λόγο των παραμέτρων κλίμακας δύο εκθετικών κατανομών. Τα αποτελέσματα είναι ανάλογα αυτών του Κεφαλαίου 5. Η κατασκευή χρησιμοποιεί τους εκτιμητές των Ενοτήτων 3.3 και 4.3 σε συνδυασμό με τη μεθοδολογία των Iliopoulos and Kourouklis (1999).

Θεωρούμε ανεξάρτητα τυχαία δείγματα $X_1, \ldots, X_n$, $Y_1, \ldots, Y_m$ από τις διπαραμετρικές εκθετικές κατανομές $E(\mu_1, \sigma_1)$, $E(\mu_2, \sigma_2)$, αντίστοιχα, με πυκνότητες που δίνονται από τη σχέση

$$f(x_i; \mu_i, \sigma_i) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma_i} \exp\left\{ -\dfrac{1}{\sigma_i}(x_i - \mu_i)\right\} & \text{εάν } x_i > \mu_i, \\ 0 & \text{διαφορετικά,} \end{cases} \qquad \text{για } i = 1, 2.$$

Οι παράμετροι θέσης μ_1, μ_2 και οι παράμετροι κλίμακας σ_1, σ_2 είναι άγνωστες με $-\infty < \mu_1 < \infty$, $-\infty < \mu_2 < \infty$, $\sigma_1 > 0$ και $\sigma_2 > 0$. Θέτουμε $S_1 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - X_{(1)})$, $X_{(1)} = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$, $S_2 = \sum_{i=1}^{m}(Y_i - Y_{(1)})$ και $Y_{(1)} = \min\{Y_1, \ldots, Y_m\}$. Στην περίπτωση αυτή, S_1, S_2, $X = nX_{(1)}$ και $Y = mY_{(1)}$ είναι ανεξάρτητα με πυκνότητες $G(n-1, \sigma_1)$, $G(m-1, \sigma_2)$, $E(n\mu_1, \sigma_1)$ και $E(m\mu_2, \sigma_2)$, αντίστοιχα. Το πρόβλημα εδώ είναι η εκτίμηση του λόγου των παραμέτρων κλίμακας των δύο πληθυσμών, $\rho = \sigma_2/\sigma_1$, με έναν εκτιμητή δ ως προς την τετραγωνική συνάρτηση ζημίας $L_1(\delta, \rho) = (\delta/\rho - 1)^2$ και τη συνάρτηση ζημίας εντροπίας $L_2(\delta, \rho) = \delta/\rho - \ln(\delta/\rho) - 1$. Στη συνέχεια, για λόγους απλότητας, χρησιμοποιούμε ίδιους συμβολισμούς ως προς την L_1 και την L_2.

Ο βέλτιστος αναλλοίωτος εκτιμητής του ρ είναι ο $\delta_0 = c_0 S_2/S_1$, όπου $c_0 = (n-3)/m$ ως προς την L_1 και $c_0 = (n-2)/(m-1)$ ως προς την L_2. Ο βέλτιστος αναλλοίωτος εκτιμητής του $1/\sigma_1$ είναι ο

$$\delta_{01} = c_1 S_1^{-1}, \tag{6.1}$$

όπου $c_1 = n - 3$ ως προς την L_1 και $c_1 = n - 2$ ως προς την L_2 και ο βέλτιστος αναλλοίωτος εκτιμητής του σ_2 είναι ο

$$\delta_{02} = c_2 S_2, \tag{6.2}$$

όπου $c_2 = 1/m$ ως προς την L_1 και $c_2 = 1/(m-1)$ ως προς την L_2.

Στην Ενότητα 3.3 (βλέπε Θεωρήματα 3.9, 3.15), δείχθηκε ότι ο δ_{02} βελτιώνεται από έναν εκτιμητή δ_ψ της μορφής

$$\delta_\psi = \begin{cases} c_2 \left\{1 - \psi(W_2)\right\} S_2 & \text{εάν } W_2 > 0, \\ c_2 S_2 & \text{διαφορετικά,} \end{cases} \tag{6.3}$$

όπου $W_2 = mY_{(1)}/S_2$ και η συνάρτηση $\psi(w_2)$ ικανοποιεί, για κάποιο $\varepsilon > 0$,

(ST1) $(1 + w_2)^\varepsilon \psi(w_2)$ είναι φθίνουσα,

(ST2) $0 \leqslant \psi(w_2) \leqslant B_1(\varepsilon)$ στην περίπτωση της L_1 ή
$0 \leqslant \psi(w_2) \leqslant B_2(\varepsilon)$ στην περίπτωση της L_2,

με

$$B_1(\varepsilon) = \min\left\{\frac{2}{m+1}, \frac{2\varepsilon(m + 2\varepsilon + 1)}{(m+1)(m+\varepsilon)(m+\varepsilon+1)}\right\},$$
$$B_2(\varepsilon) = \min\left\{B_*, \frac{2\varepsilon(m + 2\varepsilon - 1)}{2\varepsilon(m+2\varepsilon-1) + (m-1)(m+\varepsilon)(m+\varepsilon-1)}\right\},$$

και B_* τη μοναδική λύση της εξίσωσης $-x/\ln(1-x) = (m-1)/m$. Επίσης, κατασκευάστηκαν οι ακόλουθοι πολύ απλοί στη μορφή εκτιμητές του σ_2,

$$\delta_{2ST} = \begin{cases} \dfrac{1 + W_2}{m(r_2 + 1 + W_2)} S_2 & \text{εάν } W_2 > 0, \\ S_2/m & \text{διαφορετικά,} \end{cases}$$
$$0 < r_2 < \max_{\varepsilon \leqslant 1} \min\left\{\frac{B_1(\varepsilon)}{1 - B_1(\varepsilon)}, \frac{1}{\varepsilon} - 1\right\} \tag{6.4}$$

ως προς την L_1 και

$$\delta_{2ST} = \begin{cases} \dfrac{1 + W_2}{(m-1)(r_2 + 1 + W_2)} S_2 & \text{εάν } W_2 > 0, \\ S_2/(m-1) & \text{διαφορετικά,} \end{cases}$$
$$0 < r_2 < \max_{\varepsilon \leqslant 1} \min\left\{\frac{B_2(\varepsilon)}{1 - B_2(\varepsilon)}, \frac{1}{\varepsilon} - 1\right\} \tag{6.5}$$

ως προς την L_2, οι οποίοι είναι γενικευμένοι Bayes για $W_2 > 0$ και ικανοποιούν τις παραπάνω συνθήκες (ST1), (ST2) οπότε είναι καλύτεροι από τον δ_{02}. Στην πραγματικότητα, ο δ_{2ST} στις (6.4) και (6.5) έχει αυστηρά μικρότερη μέση τετραγωνική ζημία ή μέση ζημία εντροπίας, αντίστοιχα, από τον δ_{02}.

Στην Ενότητα 4.3 (βλέπε Θεωρήματα 4.10, 4.17), δείχθηκε ότι ο δ_{01} βελτιώνεται από έναν εκτιμητή δ_ϕ της μορφής

$$\delta_\phi = \begin{cases} c_1 \left\{1 + \varphi(W_1)\right\} S_1^{-1} & \text{εάν } W_1 > 0, \\ c_1 S_1^{-1} & \text{διαφορετικά,} \end{cases} \tag{6.6}$$

όπου $W_1 = nX_{(1)}/S_1$ και η συνάρτηση $\varphi(w_1)$ ικανοποιεί, για κάποιο $\varepsilon > 0$,

(ST1) $(1 + w_1)^\varepsilon \varphi(w_1)$ είναι φθίνουσα,

(ST2) $0 \leqslant \varphi(w_1) \leqslant B_3(\varepsilon)$ στην περίπτωση της L_1 ή
$0 \leqslant \varphi(w_1) \leqslant B_4(\varepsilon)$ στην περίπτωση της L_2, όπου

$$B_3(\varepsilon) = \min\left\{\frac{2}{n-3}, \frac{2\varepsilon(n+2\varepsilon-3)}{(n-3)(n+\varepsilon-2)(n+\varepsilon-3)}\right\},$$
$$B_4(\varepsilon) = \min\left\{B^*, \frac{2\varepsilon(n+2\varepsilon-1)}{(n-1)(n+\varepsilon-1)(n+\varepsilon-2)}\right\},$$

και B^* είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης $x^{-1}\ln(1+x) = (n-2)/(n-1)$. Επίσης, κατασκευάστηκαν οι ακόλουθοι πολύ απλοί σε μορφή εκτιμητές του $1/\sigma_1$ (βλέπε Θεωρήματα 4.13, 4.19),

$$\delta_{1ST} = \begin{cases} (n-3)\left\{1 + \dfrac{r_1}{1+W_1}\right\} S_1^{-1} & \text{εάν } W_1 > 0, \\ (n-3) S_1^{-1} & \text{διαφορετικά,} \end{cases}$$
$$0 < r_1 < \max_{\varepsilon \leqslant 1} \min B_3(\varepsilon), \tag{6.7}$$

ως προς την L_1

$$\delta_{1ST} = \begin{cases} (n-2)\left\{1 + \dfrac{r_1}{1+W_1}\right\} S_1^{-1} & \text{εάν } W_1 > 0, \\ (n-2) S_1^{-1} & \text{διαφορετικά,} \end{cases}$$
$$0 < r_1 < \max_{\varepsilon \leqslant 1} \min B_4(\varepsilon), \tag{6.8}$$

ως προς την L_2, οι οποίοι είναι γενικευμένοι Bayes για $W_1 > 0$ και ικανοποιούν τις παραπάνω συνθήκες (ST1), (ST2), οπότε είναι καλύτεροι από τον δ_{01}. Στην πραγματικότητα, ο δ_{1ST} στις (6.7) και (6.8) έχει αυστηρά μικρότερη μέση τετραγωνική ζημία ή μέση ζημία εντροπίας, αντίστοιχα, από τον δ_{01}.

6.1 Εκτιμητές τύπου Strawderman απλής προσαρμογής

Για να βελτιώσουμε τον δ_0, θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 5.5, το οποίο ισχύει και στην περίπτωση εκθετικών κατανομών με $S_1 = \sum_{i=1}^n (X_i - X_{(1)})$, $S_2 = \sum_{i=1}^m (Y_i - Y_{(1)})$, $W_1 = nX_{(1)}/S_1$ και $W_2 = mY_{(1)}/S_2$ και συνεπώς επαναδιατυπώνεται ως εξής.

Θεώρημα 6.1. *Για τις συναρτήσεις ζημίας L_1 και L_2 και για αυθαίρετες συναρτήσεις $\varphi^*(w_1)$ και $\psi^*(w_2)$ (έτσι ώστε να υπάρχουν οι μέσες τιμές), έχουμε τα ακόλουθα.*

(i) *Ο $c_0\varphi^*(W_1)S_2/S_1$ βελτιώνει τον c_0S_2/S_1 (για την εκτίμηση του ρ) εάν και μόνον εάν ο $c_1\varphi^*(W_1)S_1^{-1}$ βελτιώνει τον $c_1S_1^{-1}$ (για την εκτίμηση του σ_1^{-1}).*

(ii) *Ο $c_0\psi^*(W_2)S_2/S_1$ βελτιώνει τον c_0S_2/S_1 (για την εκτίμηση του ρ) εάν και μόνον εάν ο $c_2\psi^*(W_2)S_2$ βελτιώνει τον c_2S_2 (για την εκτίμηση του σ_2).*

Με εφαρμογή του Θεωρήματος 6.1, μπορούμε να κατασκευάσουμε βελτιωμένους εκτιμητές επέκτασης τύπου Strawderman του ρ της μορφής

$$\delta_1 = \delta_\varphi\delta_{02} = c_0\{1+\varphi(W_1)\}\frac{S_2}{S_1}, \tag{6.9}$$

όπου ο δ_{02} είναι όπως στην (6.2) και ο δ_φ είναι όπως στην (6.6) και ικανοποιεί τις συνθήκες (ST1) και (ST2) μετά τη σχέση (6.6). Επίσης, μπορούμε να κατασκευάσουμε βελτιωμένους εκτιμητές συρρίκνωσης τύπου Strawderman του ρ της μορφής

$$\delta_2 = \delta_\psi\delta_{01} = c_0\{1-\psi(W_2)\}\frac{S_2}{S_1}, \tag{6.10}$$

όπου ο δ_{01} είναι όπως στην (6.1) και ο δ_ψ είναι όπως στην (6.3) και ικανοποιεί τις συνθήκες (ST1) και (ST2) μετά τη σχέση (6.3).

Μεταξύ αυτών, στο επόμενο θεώρημα παρουσιάζουμε τους εξής βελτιωμένους εκτιμητές τύπου Strawderman απλής προσαρμογής (επέκτασης ή συρρίκνωσης) για το ρ, οι οποίοι έχουν απλή μορφή.

Θεώρημα 6.2. (i) *Ως προς την L_1, οι εκτιμητές*

$$\delta_{ST}^{(1)} = \begin{cases} \dfrac{n-3}{m}\left(1+\dfrac{r_1}{1+W_1}\right)\dfrac{S_2}{S_1} & \text{εάν } W_1 > 0, \\ \dfrac{n-3}{m}\dfrac{S_2}{S_1} & \text{διαφορετικά,} \end{cases}$$
$$0 < r_1 < \max_{\varepsilon\leqslant 1} B_3(\varepsilon),$$

και

$$\delta_{ST}^{(2)} = \begin{cases} \dfrac{n-3}{m}\dfrac{1+W_2}{r_2+1+W_2}\dfrac{S_2}{S_1} & \text{εάν } W_2 > 0, \\ \dfrac{n-3}{m}\dfrac{S_2}{S_1} & \text{διαφορετικά,} \end{cases}$$
$$0 < r_2 < \max_{\varepsilon\leqslant 1}\min\left\{\frac{B_1(\varepsilon)}{1-B_1(\varepsilon)}, \frac{1}{\varepsilon}-1\right\},$$

έχουν αυστηρά μικρότερη μέση τετραγωνική ζημία από τον $(n-3)S_2/mS_1$.

(ii) *Ως προς την L_2, οι εκτιμητές*

$$\delta_{ST}^{(1)} = \begin{cases} \dfrac{n-2}{m-1}\left(1+\dfrac{r_1}{1+W_1}\right)\dfrac{S_2}{S_1} & \text{εάν } W_1 > 0, \\ \dfrac{n-2}{m-1}\dfrac{S_2}{S_1} & \text{διαφορετικά,} \end{cases}$$

$$0 < r_1 < \max_{\varepsilon \leqslant 1} B_4(\varepsilon),$$

και

$$\delta_{ST}^{(2)} = \begin{cases} \dfrac{n-2}{m-1}\dfrac{1+W_2}{r_2+1+W_2}\dfrac{S_2}{S_1} & \text{εάν } W_2 > 0, \\ \dfrac{n-2}{m-1}\dfrac{S_2}{S_1} & \text{διαφορετικά,} \end{cases}$$

$$0 < r_2 < \max_{\varepsilon \leqslant 1} \min\left\{\frac{B_2(\varepsilon)}{1-B_2(\varepsilon)}, \frac{1}{\varepsilon} - 1\right\},$$

έχουν αυστηρά μικρότερη μέση ζημία εντροπίας από τον $(n-2)S_2/(m-1)S_1$.

Απόδειξη. Προκύπτει αμέσως από τα σχόλια που προηγούνται του Θεωρήματος 6.2. □

6.2 Εκτιμητές τύπου Strawderman διπλής προσαρμογής

Οι βελτιωμένοι εκτιμητές δ_1 στην (6.9) και δ_2 στην (6.10) βασίζονται στα $(X_{(1)}, S_1, S_2)$ και $(Y_{(1)}, S_1, S_2)$, αντίστοιχα. Χρησιμοποιώντας τη μεθοδολογία των Iliopoulos and Kourouklis (1999), είμαστε τώρα σε θέση να κατασκευάσουμε βελτιωμένους εκτιμητές τύπου Strawderman που βασίζονται σε όλα τα δεδομένα $(X_{(1)}, Y_{(1)}, S_1, S_2)$, γεγονός που είναι ο κύριος στόχος αυτού του κεφαλαίου. Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.5 των Iliopoulos and Kourouklis (1999), μπορούμε να συνδυάσουμε έναν αυθαίρετο βελτιωμένο εκτιμητή επέκτασης $\delta_1^* = c_0\{1+\varphi(W_1)\}S_2/S_1$ με έναν αυθαίρετο βελτιωμένο εκτιμητή συρρίκνωσης $\delta_2^* = c_0\{1-\psi(W_2)\}S_2/S_1$ για να παράγουμε τον βελτιωμένο εκτιμητή διπλής προσαρμογής

$$\delta_1^* + \delta_2^* - \delta_0 = c_0\{1+\varphi(W_1)-\psi(W_2)\}\frac{S_2}{S_1} \tag{6.11}$$

ως προς την L_1 ή την L_2 καθώς επίσης τον βελτιωμένο εκτιμητή διπλής προσαρμογής

$$\frac{\delta_1^*\delta_2^*}{\delta_0} = c_0\{1+\varphi(W_1)\}\{1-\psi(W_2)\}\frac{S_2}{S_1} \tag{6.12}$$

ως προς την L_2, ο οποίος είναι καλύτερος από τους δ_1^* και δ_2^* και συνεπώς από τον δ_0, εάν οι $\varphi(w_1)$ και $\psi(w_2)$ είναι σχεδόν παντού διαφορίσιμες με $\lim_{w_1\to\infty}\varphi(w_1) = \lim_{w_2\to\infty}\psi(w_2) = 0$. Σημειώνεται ότι η (6.11) είναι η κλάση των βελτιωμένων εκτιμητών διπλής προσαρμογής του Kubokawa (1994b).

Παίρνοντας ως δ_1^* και δ_2^* τους βελτιωμένους εκτιμητές απλής προσαρμογής τύπου Stein ή τύπου Brewster and Zidek του ρ, οι (6.11) και (6.12) παράγουν τους βελτιωμένους εκτιμητές διπλής προσαρμογής τύπου Stein ή τύπου Brewster and Zidek, αντίστοιχα.

Εναλλακτικά, παίρνοντας στις (6.11) και (6.12) $\delta_1^* = \delta_{ST}^{(1)}$ και $\delta_2^* = \delta_{ST}^{(2)}$ του Θεωρήματος 6.2, προτείνουμε τους ακόλουθους βελτιωμένους εκτιμητές τύπου Strawderman διπλής προσαρμογής .

Θεώρημα 6.3. (i) *Ως προς την L_1, ο εκτιμητής*

$$\delta_{ST1} = \begin{cases} \dfrac{n-3}{m}\left\{\dfrac{r_1}{1+W_1} + \dfrac{1+W_2}{r_2+1+W_2}\right\}\dfrac{S_2}{S_1} & \text{εάν } W_1 > 0, W_2 > 0, \\ \dfrac{n-3}{m}\left\{\dfrac{r_1+1+W_1}{1+W_1}\right\}\dfrac{S_2}{S_1} & \text{εάν } W_1 > 0, W_2 \leqslant 0, \\ \dfrac{n-3}{m}\left\{\dfrac{1+W_2}{r_2+1+W_2}\right\}\dfrac{S_2}{S_1} & \text{εάν } W_1 \leqslant 0, W_2 > 0, \\ \dfrac{n-3}{m}\dfrac{S_2}{S_1} & \text{εάν } W_1 \leqslant 0, W_2 \leqslant 0, \end{cases}$$

$$0 < r_1 < \max_{\varepsilon \leqslant 1} B_3(\varepsilon), \quad 0 < r_2 < \max_{\varepsilon \leqslant 1} \min\left\{\frac{B_1(\varepsilon)}{1-B_1(\varepsilon)}, \frac{1}{\varepsilon} - 1\right\},$$

έχει αυστηρά μικρότερη μέση τετραγωνική ζημία από τον $(n-3)S_2/mS_1$.

(ii) *Ως προς την L_2, οι εκτιμητές*

$$\delta_{ST2} = \begin{cases} \dfrac{n-2}{m-1}\left\{\dfrac{r_1}{1+W_1} + \dfrac{1+W_2}{r_2+1+W_2}\right\}\dfrac{S_2}{S_1} & \text{εάν } W_1 > 0, W_2 > 0, \\ \dfrac{n-2}{m-1}\left\{\dfrac{r_1+1+W_1}{1+W_1}\right\}\dfrac{S_2}{S_1} & \text{εάν } W_1 > 0, W_2 \leqslant 0, \\ \dfrac{n-2}{m-1}\left\{\dfrac{1+W_2}{r_2+1+W_2}\right\}\dfrac{S_2}{S_1} & \text{εάν } W_1 \leqslant 0, W_2 > 0, \\ \dfrac{n-2}{m-1}\dfrac{S_2}{S_1} & \text{εάν } W_1 \leqslant 0, W_2 \leqslant 0, \end{cases}$$

$$0 < r_1 < \max_{\varepsilon \leqslant 1} B_4(\varepsilon), \quad 0 < r_2 < \max_{\varepsilon \leqslant 1} \min\left\{\frac{B_2(\varepsilon)}{1-B_2(\varepsilon)}, \frac{1}{\varepsilon} - 1\right\},$$

και

$$\delta_{ST} = \begin{cases} \dfrac{n-2}{m-1}\left\{\dfrac{r_1+1+W_1}{1+W_1}\right\}\left\{\dfrac{1+W_2}{r_2+1+W_2}\right\}\dfrac{S_2}{S_1} & \text{εάν } W_1 > 0, W_2 > 0, \\ \dfrac{n-2}{m-1}\left\{\dfrac{r_1+1+W_1}{1+W_1}\right\}\dfrac{S_2}{S_1} & \text{εάν } W_1 > 0, W_2 \leqslant 0, \\ \dfrac{n-2}{m-1}\left\{\dfrac{1+W_2}{r_2+1+W_2}\right\}\dfrac{S_2}{S_1} & \text{εάν } W_1 \leqslant 0, W_2 > 0, \\ \dfrac{n-2}{m-1}\dfrac{S_2}{S_1} & \text{εάν } W_1 \leqslant 0, W_2 \leqslant 0, \end{cases}$$

$$0 < r_1 < \max_{\varepsilon \leqslant 1} B_4(\varepsilon), \quad 0 < r_2 < \max_{\varepsilon \leqslant 1} \min\left\{\frac{B_2(\varepsilon)}{1-B_2(\varepsilon)}, \frac{1}{\varepsilon} - 1\right\},$$

έχουν αυστηρά μικρότερη μέση ζημία εντροπίας από τον $(n-2)S_2/(m-1)S_1$.

Απόδειξη. Προκύπτει αμέσως από τις σχέσεις (6.11) και (6.12) σε συνδυασμό με τα σχόλια που προηγούνται αυτών των σχέσεων. □

Παράρτημα

Στο παράρτημα αυτό περιέχονται βοηθητικά τεχνικά αποτελέσματα.

Λήμμα A.1. *Έστω $p(x)$ μία μη αρνητική και αύξουσα συνάρτηση στο $[0, 1]$. Εάν $q(x) < 0$ για $0 \leqslant x < x_0$ και $q(x) > 0$ για $x_0 < x \leqslant 1$, τότε $\int_0^1 p(x)q(x)dx \geqslant p(x_0)\int_0^1 q(x)dx$ και η ανισότητα είναι αυστηρή εκτός εάν η $p(x)$ είναι σταθερά σχεδόν παντού.*

Απόδειξη. Βλέπε Kubokawa (1994a). □

Λήμμα A.2. *Υποθέτουμε ότι $b_1(x)$ και $b_2(x)$ είναι πυκνότητες πιθανότητας ορισμένες στα διαστήματα S_1 και S_2 αντίστοιχα, όπου $S_1 \subseteq S_2$ και η $b_1(x)/b_2(x)$ είναι αύξουσα για $x \in S_2$. Εάν X είναι μία τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα πιθανότητας $b_1(x)$ ή $b_2(x)$ και $h(x)$, $x \in S_2$, είναι αύξουσα (αντίστοιχα, φθίνουσα) τότε $\mathsf{E}_{b_1}h(X) \geqslant$ (αντίστοιχα, $\leqslant$) $\mathsf{E}_{b_2}h(X)$. Επί πλέον, εάν $h(x)$ και $b_1(x)/b_2(x)$ είναι γνησίως μονότονες, τότε $\mathsf{E}_{b_1}h(X) >$ (αντίστοιχα, $<$) $\mathsf{E}_{b_2}h(X)$.*

Απόδειξη. Δίνεται, ουσιαστικά, στους Lehmann and Romano (2005, σελ.70). □

Λήμμα A.3. *Έστω $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ και $\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ δύο πραγματικές δυναμοσειρές που συγκλίνουν στο διάστημα $(0, r)$, $r > 0$. Εάν $b_k > 0$ για κάθε k και η ακολουθία $\{a_k/b_k\colon k = 0, 1, \dots\}$ είναι αύξουσα (αντίστοιχα, φθίνουσα) τότε η συνάρτηση $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k / \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ είναι επίσης αύξουσα (αντίστοιχα, φθίνουσα). Επί πλέον, η μονοτονία είναι γνήσια εκτός εάν ο λόγος a_k/b_k είναι σταθερός ως προς k.*

Απόδειξη. Για $a_k > 0$, βλέπε Lehmann and Romano (2005, σελ.308). Για αυθαίρετο a_k, βλέπε Lindèn (2006). □

Λήμμα A.4. *Έστω $\{a_k : k = 0, 1, \dots, m\}$ και $\{b_k : k = 0, 1, \dots, m\}$ δύο πεπερασμένες ακολουθίες πραγματικών αριθμών με $b_k > 0$ για κάθε k. Εάν η ακολουθία $\{a_k/b_k : k = 0, 1, \dots, m\}$ είναι αύξουσα (αντίστοιχα, φθίνουσα), τότε και η συνάρτηση $\sum_{k=0}^{m} a_k x^k / \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$ είναι αύξουσα (αντίστοιχα, φθίνουσα) για $x > 0$ και $m = 1, 2, \dots$. Επί πλέον, η μονοτονία είναι γνήσια εκτός εάν ο λόγος a_k/b_k είναι σταθερός ως προς k.*

Απόδειξη. Βλέπε Lindèn (2006). □

Η απόδειξη του ακόλουθου λήμματος δίνεται, ουσιαστικά, στους Mathew et al. (1992b, σελ.93) αλλά περιέχεται εδώ για λόγους πληρότητας.

Λήμμα A.5. *Έστω $f_1(x)$ η πυκνότητα πιθανότητας του αθροίσματος $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \chi_i^2$ όπου, για $i = 1, \dots, k$, $\lambda_i \geqslant 1$ είναι σταθερές και χ_i^2 είναι ανεξάρτητες χι-τετράγωνο τυχαίες μεταβλητές με m_i*

βαθμούς ελευθερίας. Επίσης, έστω $m = \sum_{i=1}^{k} m_i$ *και* $f_2(x)$ *η πυκνότητα πιθανότητας της* χ^2_m. *Τότε* $f_1(x)/f_2(x)$ *είναι γνησίως αύξουσα ως προς* $x > 0$, *εκτός εάν* $\lambda_i = 1$, $i = 1, \ldots, k$ (*όπου στην περίπτωση αυτή* $f_1(x) = f_2(x)$).

Απόδειξη. Έστω $X = \sum_{i=1}^{k} U_i$, όπου $U_i \sim \lambda_i \chi^2_i$, $i = 1, \ldots, k$. Κάνοντας το μετασχηματισμό $Y_1 = X$, $Y_i = U_i$, $i = 2, \ldots, k$, εύκολα διαπιστώνουμε ότι

$$f_1(x) \propto x^{m/2-1} \int_{\sum_{i=2}^{k} y_i \leqslant 1} (1 - \sum_{i=2}^{k} y_i)^{m_1/2-1} \prod_{i=2}^{k} y_i^{m_i/2-1}$$
$$\times \exp\Big\{ - \frac{x}{2\lambda_1}(1 - \sum_{i=2}^{k} y_i) - \frac{x}{2} \sum_{i=2}^{k} \frac{y_i}{\lambda_i} \Big\} \prod_{i=2}^{k} dy_i.$$

Συνεπώς το αποτέλεσμα προκύπτει υπό την προϋπόθεση ότι $-\lambda_1^{-1}(1 - \sum_{i=2}^{k} y_i) - \sum_{i=2}^{k} y_i/\lambda_i + 1 \geqslant 0$, το οποίο ισχύει επειδή $1 - \sum_{i=2}^{k} y_i \geqslant 0$ και $\lambda_i \geqslant 1$. □

Λήμμα Α.6. *Η συνάρτηση* $b(x) = ((1+x)/x)^2 \ln(1+x) - (1+x)/x$ *για* $x > 0$ *είναι γνησίως αύξουσα.*

Απόδειξη. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι

$$b'(x) = \frac{1}{x^2}\Big\{2 + x - \frac{2(1+x)}{x} \ln(1+x)\Big\} = \frac{1}{x^2}\, b_1(x).$$

Όμως, $b_1'(x) = 1 - 2x^{-2}\{x - \ln(1+x)\} = 2x^{-2}\{x^2/2 - x + \ln(1+x)\} > 0$ επειδή $\ln(1+x) > x - x^2/2$ για $x > 0$. Συνεπώς, η $b_1(x)$ είναι αύξουσα για $x > 0$ και επειδή $\lim_{x\to 0^+} b_1(x) = 0$ έπεται ότι $b_1(x) > 0$ για $x > 0$, το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Στο επόμενο λήμμα, το $B_3(\varepsilon)$ ορίζεται από τη σχέση (5.7).

Λήμμα Α.7. *Για* $\ell = 0, 1, \ldots$, $\varepsilon > 0$ *και* $0 < B \leqslant B_3(\varepsilon)$, *η συνάρτηση* $2(n + p + 2\ell - 4) - 2(n - 4)u^{-1} - (n-4)Bu^{\varepsilon-1}$, $0 < u < 1$, *έχει μία μόνον αλλαγή προσήμου από αρνητική σε θετική.*

Απόδειξη. Θέτουμε $2(n+p+2\ell-4) - 2(n-4)u^{-1} - (n-4)Bu^{\varepsilon-1} = u^{-1}g(u)$. Παρατηρούμε ότι $g(0) = -2(n-4) < 0$ και $g(1) = 2(n+p+2\ell-4) - 2(n-4) - (n-4)B \geqslant 0$, επειδή $B \leqslant 2p/(n-4)$ από τον ορισμό του $B_3(\varepsilon)$ στην (5.7). Εάν $g(1) > 0$ τότε η $g(u)$ έχει τουλάχιστον μία αλλαγή προσήμου από αρνητική σε θετική. Επίσης, όταν $g(1) = 0$, επειδή $\mathsf{E}[U^{\varepsilon-2} g(U) \mid L = \ell] \geqslant 0$ για $B \leqslant B(\varepsilon, 0)$ (βλέπε (5.9) και (5.10)) τότε η $g(u)$ τέμνει τον οριζόντιο άξονα, οπότε η $g(u)$ έχει τουλάχιστον μία αλλαγή προσήμου. Υπολογίζοντας την πρώτη και δεύτερη παράγωγο της $g(u)$ προκύπτει ότι για $\varepsilon = 1$ η $g(u)$ είναι γνησίως αύξουσα, για $\varepsilon > 1$ είναι κοίλη και για $\varepsilon < 1$ είναι κυρτή και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Στο επόμενο λήμμα, το $B_4(\varepsilon)$ ορίζεται από τη σχέση (5.11).

Λήμμα Α.8. *Για* $\ell = 0, 1, \ldots$, $\varepsilon > 0$ *και* $0 < B \leqslant B_4(\varepsilon)$, *η συνάρτηση* $B^{-1}\ln(1 + Bu^{\varepsilon}) - (n-2)u^{\varepsilon-1}/(n + p + 2\ell - 2)$, $0 < u < 1$, *έχει μία μόνον αλλαγή προσήμου από αρνητική σε θετική.*

Απόδειξη. Θέτουμε $B^{-1}\ln(1+Bu^{\varepsilon})-(n-2)u^{\varepsilon-1}/(n+p+2\ell-2)=u^{\varepsilon}g(u)$. Παρατηρούμε ότι $\lim_{u\to 0^+} g(u)=-\infty$ και $g(1)=B^{-1}\ln(1+B)-(n-2)/(n+p+2\ell-2)\geqslant 0$, επειδή $B\leqslant B_*$ από τον ορισμό της $B_4(\varepsilon)$ στην (5.11). Εάν $g(1)>0$ τότε η $g(u)$ έχει τουλάχιστον μία αλλαγή προσήμου από αρνητική σε θετική. Επίσης, όταν $g(1)=0$, επειδή $\mathsf{E}[U^{\varepsilon}g(U)\mid L=\ell]\geqslant 0$ για $B\leqslant B(\varepsilon,0)$ (βλέπε (5.13) και (5.14)) τότε η $g(u)$ τέμνει τον οριζόντιο άξονα, οπότε η $g(u)$ έχει τουλάχιστον μία αλλαγή προσήμου. Τώρα, έστω ότι $\alpha=(n-2)/(n+p+2\ell-2)$, τότε για $u^{\varepsilon}=x$ η εξίσωση $g(u)=0$ είναι ισοδύναμη με την $1+Bx=h(x)$, όπου $h(x)=e^{\alpha Bx^{1-1/\varepsilon}}$. Για $\varepsilon\leqslant 1$, το συμπέρασμα προκύπτει άμεσα επειδή η $h(x)$ είναι φθίνουσα ως προς x. Για $\varepsilon>1$, παρατηρώντας ότι η $h''(x)=\alpha^2B^2(1-1/\varepsilon)^2x^{-1-1/\varepsilon}e^{\alpha Bx^{1-1/\varepsilon}}(x^{1-1/\varepsilon}-\beta)$, όπου $\beta=\alpha^{-1}B^{-1}(1-1/\varepsilon)^{-1}\varepsilon^{-1}$, προκύπτει ότι η $h(x)$ είναι κοίλη στο $(0,\beta^{\varepsilon/(\varepsilon-1)}]$ και κυρτή στο $(\beta^{\varepsilon/(\varepsilon-1)},\infty)$. Επομένως, η $g(u)$ έχει το πολύ δύο ρίζες στο $(0,\infty)$ και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. $\square$

Synopsis

This PhD thesis deals with the study of the problem of point estimation of a scale parameter from the decision theoretic point of view.

Chapter 1 contains an overview of the problem of point estimation of a scale parameter from the decision theoretic point of view as well as a concise presentation of the results of this thesis per chapter.

In Chapter 2, some basic notions and definitions are given and, for the sake of completeness, relative known results about improved estimators of scale parameters and ratio of scale parameters are presented. All the results of the remaining chapters are new.

In Chapter 3, Strawderman's (1974) result for estimating the variance of a normal distribution is extended to estimating a general scale parameter in the presence of a nuisance parameter under both quadratic and entropy losses. Application of this general result to the exponential distribution gives new sufficient conditions, i.e., different from those available in the literature, for improving upon the best affine equivariant estimator. Also, new classes of estimators satisfying the above conditions are constructed.

In Chapter 4, Strawderman's (1974) result for estimating the variance of a normal distribution is extended to estimating the reciprocal of a general scale parameter in the presence of a nuisance parameter under both quadratic and entropy losses. The results are analogous to those of Chapter 3. In addition to their own value, the results of this chapter – as well as those of Chapter 3 – are also useful (essentially, necessary) for the construction of Strawderman (1974)-type estimators for the ratio of scale parameters of two independent populations, which is studied in the next two chapters.

In Chapter 5, new classes of improved, Strawderman (1974)-type, estimators for the ratio of the variances, σ_2^2/σ_1^2, of two normal populations are constructed under both quadratic and entropy losses. The method of proof is not the typical one for this kind of problem which requires a two-sample extension of respective one-sample arguments. In contrast, the methodology of Iliopoulos and Kourouklis (1999) is applied which reduces the two-sample problem of estimating σ_2^2/σ_1^2 to two one-sample problems, namely, one of estimating σ_2^2 and another of estimating $1/\sigma_1^2$.

In Chapter 6, new classes of improved, Strawderman (1974)-type, estimators for the ratio of the scale parameters of two exponential distributions are constructed. The results are analogous to those of Chapter 5.

Finally, the thesis is completed with the Appendix which provides auxiliary results.

Βιβλιογραφία

Arnold, B.C. (1970). Inadmissibility of the usual scale estimate for a shifted exponential distribution. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 65, 1260–1264.

Bobotas, P., Kourouklis, S. (2009). Strawderman-type estimators for a scale parameter with application to the exponential distribution. *J. Statist. Plan. Infer.*, 139, 3001–3012.

Bobotas, P., Iliopoulos, G., Kourouklis, S. (2009). Estimating the ratio of two scale parameters: A simple approach. (submitted)

Bobotas, P., Kourouklis, S. (2010). On the estimation of a normal precision and a normal variance ratio. *Statist. Meth.*, doi:10.1016/j.stamet.2010.01.001.

Brewster, J.F. (1974). Alternative estimators for the scale parameter of the exponential distribution with unknown location. *Ann. Statist.*, 2, 553–557.

Brewster, J.F., Zidek, J.V. (1974). Improving on equivariant estimators. *Ann. Statist.*, 2, 21–38.

Brown, L.D. (1968). Inadmissibility of the usual estimators of scale parameters in problems with unknown location and scale parameters. *Ann. Math. Statist.*, 39, 29–48.

Chhikara, R.S., Folks, J.L. (1989). *The inverse Gaussian distribution: Theory, Methodology and Applications*, Marcel Dekker, New York.

Elfesi, A., Pal, N. (1991). On location and scale parameters of exponential distributions with censored observations. *Comm. Statist.-Theory Methods*, 20, 1579–1592.

Gelfand, A.E., Dey, D.K. (1988). On the estimation of a variance ratio. *J. Statist. Plan. Infer.*, 19, 121–131.

Ghosh, M., Kundu, S. (1996). Decision theoretic estimation of the variance ratio. *Statist. Decisions*, 14, 161–175.

Ηλιόπουλος, Γ. (1999). Εκτίμηση και διαστήματα εμπιστοσύνης για ορισμένες παραμέτρους κλίμακος. Διδακτορική Διατριβή. Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Πατρών.

Iliopoulos, G., Kourouklis, S. (1999). Improving on the best affine equivariant estimator of the ratio of the generalized variances. *J. Multivariate Anal.*, 68, 176-192.

Kourouklis, S. (1997). A new property of the inverse Gaussian distribution with applications. *Statist. Probab. Letters*, 32, 161–166.

Kubokawa, T. (1994a). A unified approach to improving equivariant estimators. *Ann. Statist.*, 22, 290–299.

Kubokawa, T. (1994b). Double shrinkage estimation of ratio of scale parameters. *Ann. Inst. Statist. Math.*, 46, no. 1, 95–116.

Kubokawa, T., Srivastava, M.S. (1996). Double shrinkage estimators of ratio of variances. *Proceedings of the Sixth Lukacs Symposium*, 139–154.

Kubokawa, T. (1999). Shrinkage and modification techniques in estimation of variance and the related problems: A review. *Commun. Statist.-Theory Meth.*, 28, no. 3-4, 613-650.

Lehmann, E.L., Casella, G. (1998). *Theory of Point Estimation*. 2nd ed., Springer.

Lehmann, E.L., Romano, J.P. (2005). *Testing Statistical Hypotheses*. 3rd ed., Springer.

Lindèn, H. (2006). Convexity and inequalities for power series. http://vanha.math.utu.fi /opetusohj /seminaarit /convineq.pdf, http://mathstat.helsinki.fi /analysis /seminar /esitelmat /convineq.pdf.

Madi, M. (1995). On the invariant estimation of a normal variance ratio. *J. Statist. Plan. Infer.*, 44, 349–357.

Madi, M., Tsui, K.W. (1990a). Estimation of the common scale of several shifted exponential distributions with unknown location. *Comm. Statist.-Theory Methods*, 19,2295–2313.

Madi, M., Tsui, K.W. (1990b). Estimation of the ratio of the scale parameters of two exponential distributions with unknown location parameters. *Ann. Inst. Statist. Math.*, 42, no.1, 77–87.

Maatta, J.M., Casella, G. (1990). Developments in decision-theoretic variance estimation. *Statist. Science*, 5, no. 1, 90-101.

Maruyama, Y. (1998). Minimax estimators of a normal variance. *Metrika*, 48, 209–214.

Maruyama, Y., Strawderman, W.E. (2006). A new class of minimax generalized Bayes estimators of a normal variance. *J. Statist. Plan. Infer.*, 136, 3822–3836.

Mathew, T., Sinha, B.K., Sutradhar, B.C. (1992a). Improved estimation of error variance in general balanced mixed models. *Statist. Decisions*, 10, 227–238.

Mathew, T., Sinha, B.K., Sutradhar, B.C. (1992b). Nononegative estimation of variance components in unbalanced mixed models with two variance components. *J. Multivariate Anal.*, 42, 77–101.

Pal, N., Sinha, B.K. (1989). Improved estimators of dispersion of an inverse Gaussian distribution. *Statistical Data Analysis and Inference*, Elsevier, Amsterdam, 215–222.

Pal, N., Ling, C. (1995). Improved minimax estimation of powers of the variance of a multivariate normal distribution under the entropy loss function. *Statist. Probab. Lett.*, 24, 205–211.

Pal, N., Ling, C. (1996). Estimation of a normal scale parameter under a balanced loss function. *J. Indian Statist. Assoc.*, 34, 21–38.

Pal, N., Ling, C., Lin, J. (1998). Estimation of a normal variance – a critical review. *Statist. Papers*, 4, 389–404.

Petropoulos, C., Kourouklis, S. (2002). A class of improved estimators for the scale parameter of an exponential distribution with unknown location. *Commun. Statist. —Theory Meth.*, 31, 325–335.

Proskin, H.M. (1985). An admissibility theorem with applications to the estimation of the variance of the normal distribution. PhD Dissertation, Department of Statistics, Rutgers University.

Rukhin, A.L., Ananda, M.M.A. (1992). Risk behavior of variance estimators in multivariate normal distribution. *Statist. Probab. Lett.*, 13, 159–166.

Rukhin, A.L., Zidek, J.V. (1985). Estimation of linear parametric functions for several exponential samples. *Statist. Decisions*, 3, 225–238.

Shorrock, G., McGibbon, B. (1997). Shrimkage estimators for the dispersion parameter of the inverse Gausssian distribution. *Statist. Prob. Lett.*, 32, 207–214.

Stein, C. (1964). Inadmissibility of the usual estimator for the variance of a normal distribution with unknown mean. *Ann. Inst. Statist. Math.*, 16, 155–160.

Strawderman, W.E. (1974). Minimax estimation of powers of the variance of a normal population under squared error loss. *Ann. Statist.*, 2, 190–198.

Sugiura, N. (1988). A class of improved estimators of powers of the generalized variance and precision under squared loss. *Statistical Theory and Data Analysis II*, 421–428. K. Matusita (ed.), North Holland, Amsterdam.

Sugiura, N. (1989). Entropy loss and a class of improved estimators for powers of the generalized variance. *Sankhyā*, Ser. A, 51, no. 3, 328–333.

Wald, A. (1950). *Statistical Decision functions*, Wiley, New York.

Zidek, J.V. (1973). Estimating the scale parameter of the exponential distribution with unknown location. *Ann. Statist.*, 1, 264–278.