ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ»

**ΜΠΑΛΑΦΟΥΤΗ ΠΑΝΑΓΙΩΤΑ   Α.Μ. 220**

# ΜΟΡΦΕΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΕΥΑΙΣΘΗΣΙΑΣ ΓΙΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΠΑΤΡΑ 2010

*στους γονείς μου*

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

# ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Ο γραμμικός προγραμματισμός είναι μια μεθοδολογία της Επιχειρησιακής Έρευνας η οποία ασχολείται με το πρόβλημα της κατανομής των περιορισμένων πόρων ενός συστήματος σε ανταγωνιζόμενες μεταξύ τους δραστηριότητες με τον καλύτερο δυνατό τρόπο. Από μαθηματικής σκοπιάς το πρόβλημα αφορά τη μεγιστοποίηση ή ελαχιστοποίηση μιας γραμμικής συνάρτησης σύμφωνα με κάποιους γραμμικούς περιορισμούς. Τόσο η μαθηματική διατύπωση του προβλήματος, όσο και μια συστηματική διαδικασία επίλυσής του, η μέθοδος Simplex, οφείλεται στον G.B. Duntzig στα 1947. Την ίδια εποχή ο J. Von Neuman διατύπωνε το αργότερα γνωστό ως δυϊκό πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού.

Το πρώτο κεφάλαιο της παρούσης εργασίας ξεκινά με τη γενική μαθηματική θεώρηση των δύο προβλημάτων και συνεχίζει με τα βασικά θεωρήματα τα οποία αφορούν τη διαδικασία λύσης, τις ιδιότητές τους καθώς επίσης και τις σχέσεις που τα συνδέουν.

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζονται διάφοροι τύποι ανάλυσης ευαισθησίας του γραμμικού μοντέλου, της μελέτης δηλαδή των αλλαγών που επιφέρουν στην άριστη λύση, αλλαγές σε διάφορα μεγέθη -παράμετροι- του προβλήματος.

Στο ίδιο κεφάλαιο παρουσιάζεται η ανάλυση ευαισθησίας μιας ειδικής κλάσης προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού, του προβλήματος καταμερισμού εργασίας (εκχώρησης). Τέλος γίνεται μια σύντομη αναφορά στον υπολογισμό των δυϊκών τιμών στην περίπτωση των εκφυλισμένων λύσεων.

# ABSTRACT

Linear programming is a method of Operations Research which deals with the problem of distribution of limited resources of a system to rivaling activities -with each other - in the best possible way. From mathematics point of view the problem concerns the maximization or minimization of a linear function according to certain linear restrictions. Not only the mathematic formulation of the problem, but also a systematic procedure of solution (gradualism), the Simplex method, are due to G. B. Duntzig (1947). At the same time J. Von Neuman formulated the later known as dual problem of linear programming.

The first chapter of this paper starts with the general mathematical regard of these two problems and steps to the essential theorems used for the solution procedure, their attributes as well as the relations that bind them.

In the second chapter various types of linear model’s sensitivity analysis are presented, the study of changes that lead to the most efficient solution, changes in various elements - parameters of the problem.

At the same chapter the sensitivity analysis of special group of linear programming problems is presented, the assignment problem. Finally a brief note is made at the calculation of dual values in case of degenerated solutions.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

## ΚΛΑΣΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΥΑΙΣΘΗΣΙΑΣ

## 1.1 ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΟΥ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

Ο **γραμμικός προγραμματισμός** (linear programming) είναι μια από τις πιο σπουδαίες μαθηματικές ανακαλύψεις των μέσων χρόνων του $20^{ου}$ αιώνα. *Πρόκειται για μια μεθοδολογία - μαθηματικό μοντέλο - της Επιχειρησιακής Έρευνας που επιλύει το πρόβλημα κατανομής των περιορισμένων πόρων ενός συστήματος (χρόνος εργασίας, πρώτες ύλες, κ.λπ) σε ανταγωνιζόμενες δραστηριότητες (προϊόντα, υπηρεσίες, κ.α.) με το καλύτερο δυνατό τρόπο.*

Μέσα σε αυτό το γενικό πλαίσιο εντάσσονται πάμπολα οικονομικά (και όχι μόνο) προβλήματα, όπως:

* Το *πρόβλημα επιλογής συνδυασμού παραγωγής προϊόντων* (The Product Mix Problem). Τα προβλήματα αυτά αναφέρονται σε συστήματα τα οποία εκμεταλλευόμενα τους περιορισμένους πόρους που έχουν στη διάθεσή τους, παράγουν διάφορα προϊόντα. Η (βέλτιστη) απόφαση που αναζητείται αφορά τον εντοπισμό του πλήθους των τεμαχίων που πρέπει να παράγονται από το κάθε προϊόν ώστε να βελτιστοποιείται κάποιο κριτήριο επίδοσης του συστήματος (π.χ. μεγιστοποίηση των κερδών του για μια συγκεκριμένη χρονική περίοδο).
* Το *πρόβλημα της μεταφοράς* (The Transportation Problem). Είναι μια από τις πρώτες εφαρμογές του γραμμικού προγραμματισμού όπου αναζητείται η οικονομικότερη διακίνηση προϊόντος από ορισμένους σταθμούς παραγωγής

(εργοστάσια, βιομηχανίες) σε ορισμένους σταθμούς προορισμού (αποθήκες, σημεία πώλησης).

* Το *πρόβλημα της μίξης* (The Blending Problem). Εδώ, δύο ή περισσότερα υλικά αναμειγνύονται προκειμένου να δημιουργήσουν κάποια προϊόντα. Τα υλικά αυτά πρέπει να αναμειχθούν σε τρόπο ώστε τα τελικά προϊόντα να περιέχουν συγκεκριμένες αναλογίες από τα συστατικά τους. Αποτελεί μια από τις διαδεδομένες εφαρμογές του γραμμικού μοντέλου (στη βιομηχανία πετρελαίου, τη χημική βιομηχανία, τη βιομηχανία τροφίμων, κ.λπ).
* Το *πρόβλημα της επιλογής χαρτοφυλακίου* (The Portfolio Selection Problem). Εμφανίζεται σε θέματα που αφορούν την εύρεση των *καλύτερων δυνατών επενδύσεων* (μετοχές, ομόλογα) για ένα προκαθορισμένο κεφάλαιο. Στα προβλήματα αυτού του είδους ενδιαφερόμαστε για τη μεγιστοποίηση του αναμενόμενου κέρδους ή την ελαχιστοποίηση των κινδύνων επένδυσης σε μια ορισμένη χρονική περίοδο. Οι περιορισμοί μπορεί να προέρχονται από το είδος των παραδεκτών επενδύσεων, τους νόμους, την επιθυμητή πολιτική του επενδυτή, το μέγιστο επιτρεπτό ρίσκο, κ.λπ.
* *Το πρόβλημα επιλογής της* (*άριστης*) *σύνθεσης των μέσων μιας διαφημιστικής καμπάνιας* (The Media Selection Problem). Αφορά τον προσδιορισμό του αριθμού των καταχωρήσεων/προβολών που πρέπει να γίνουν σε διάφορα μέσα όπως, τηλεόραση, εφημερίδες, διαφημιστικές πινακίδες, έτσι ώστε να μεγιστοποιηθεί το πλήθος των ατόμων που θα έρθουν σε «επαφή» με το διαφημιζόμενο προϊόν. Παράγοντες που συνήθως λαμβάνονται υπόψη είναι ο συνολικός προϋπολογισμός της εκστρατείας, ο μέγιστος/ελάχιστος αριθμός καταχωρήσεων που μπορούν να γίνουν, κ.α.

* Το *πρόβλημα της δίαιτας* (The Diet Problem). Στόχος είναι ο υπολογισμός των ποσοτήτων ορισμένων ειδών διατροφής που πρέπει να καταναλωθούν, έτσι ώστε να ικανοποιούνται δοσμένες διατροφικές απαιτήσεις με το ελάχιστο δυνατόν κόστος.
* Το *πρόβλημα καταμερισμού της εργασίας* (The Assignment Problem) το οποίο αναφέρεται στην ανάθεση εργασιών σε άτομα, σε τρόπο ώστε να μεγιστοποιείται η συνολική απόδοση (παραγωγικότητα) ενός συστήματος.

Δίνοντας μαθηματική ερμηνεία στον όρο **γραμμικός προγραμματισμός**, εννοούμε *τις υπολογιστικές τεχνικές οι οποίες προσδιορίζουν το μέγιστο ή το ελάχιστο μιας γραμμικής συνάρτησης της οποίας οι άγνωστοι (μεταβλητές) απαιτείται να ικανοποιούν ένα σύστημα γραμμικών ανισώσεων ή/και εξισώσεων*. Σε κάθε πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού (π.γ.π.) διακρίνουμε τα εξής βασικά στοιχεία:

* ένα σύνολο δραστηριοτήτων (*n* πλήθος) σε κάθε μία από τις οποίες αντιστοιχούμε μια μεταβλητή $x_j$, $j=1, \ldots, n$
* ένα σύνολο πόρων ή μέσων που διατίθενται σε περιορισμένες ποσότητες για την εκτέλεση των ανωτέρω δραστηριοτήτων
* ένα σύνολο τεχνικών περιορισμών οι οποίοι εκφράζουν τους νόμους λειτουργίας των δραστηριοτήτων
* ένα σύνολο θεσμολογικών περιορισμών οι οποίοι εκφράζουν διοικητικής και οργανωτικής φύσεως αποφάσεις
* ένα μέτρο *z* της αποδοτικότητας (επίδοσης) του συστήματος που μοντελοποιείται.

Το μοντέλο του γραμμικού προγραμματισμού αφορά τη βελτιστοποίηση του μέτρου αποδοτικότητας του συστήματος (αντικειμενικός στόχος) με την προϋπόθεση ότι οι τιμές των μεταβλητών απόφασης είναι μη αρνητικές ή δεν έχουν περιορισμό στο πρόσημο. Ας είναι $\alpha_{ij}$ η ποσότητα του πόρου *i* η οποία καταναλώνεται για την παραγωγή μιας μονάδας της δραστηριότητας *j* και έστω $c_j$ η μεταβολή που θα προκύψει στο μέτρο αποδοτικότητας z του συστήματος από τη μεταβολή κατά μία μονάδα της τιμής της μεταβλητής $x_j$. Έστω επίσης $b_i \;\; i=1,...,m$ οι διαθέσιμες ποσότητες των πόρων. Τότε, τα αθροίσματα $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$ και $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ παριστάνουν, αντίστοιχα, τη συνολική ποσότητα του πόρου *i* που θα χρησιμοποιηθεί (η οποία φυσικά δεν μπορεί να ξεπερνά τη διαθέσιμη) και το μέτρο της αποδοτικότητας του συστήματος. Έτσι η γενική μορφή του γραμμικού μοντέλου είναι η εξής:

$$\max \;\; z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$$

υπό τους περιορισμούς

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n \; [\leq \; ή \; \geq \; ή \; =] \; b_1 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n \; [\leq \; ή \; \geq \; ή \; =] \; b_m \\ x_j \geq 0 \qquad j = 1, \ldots, n \end{array}$$

ή ισοδύναμα με την μορφή πινάκων

$$\max \;\; z = \mathbf{c}'\mathbf{x}$$

υπό τους περιορισμούς

$$\begin{array}{l} \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \; ή \; \geq \mathbf{b} \; ή \; = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

όπου

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

*ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:*

1. Κάθε πρόβλημα ελαχιστοποίησης μετατρέπεται εύκολα σε ένα ισοδύναμο πρόβλημα μεγιστοποίησης $\min(\mathbf{c}'\mathbf{x}) = -[\max(-\mathbf{c}'\mathbf{x})]$.
2. Οι συντελεστές $c_j$ ονομάζονται αντικειμενικοί συντελεστές.
3. Το ποσό ενός πόρου που δεν χρησιμοποιείται ονομάζεται περιθώρια τιμή και έχει κάτω όριο το μηδέν. Τότε ο αντίστοιχος περιορισμός καλείται δεσμευτικός (ενεργός) διαφορετικά καλείται χαλαρός (μη ενεργός).
4. Συμφωνούμε στις κατωτέρω παραδοχές (αξιώματα του γραμμικού μοντέλου):
   - *Αναλογικότητα*: σε ότι αφορά την αντικειμενική συνάρτηση αυτό σημαίνει ότι η συνεισφορά στη συνολική τιμή του z από μια μεταβλητή απόφασης είναι γραμμικά ανάλογη της τιμής που παίρνει η εν λόγω μεταβλητή. Δηλαδή αν $c_j$ το κέρδος από μια μονάδα της j-δραστηριότητας, τότε η συμβολή των $x_j$ μονάδων είναι $c_j x_j$. Σχετικά, με τους περιορισμούς, η παραδοχή της αναλογικότητας σημαίνει ότι η κατανάλωση ενός πόρου *i* για την εκτέλεση της *j*-δραστηριότητας είναι ανάλογη του επιπέδου $x_j$ της παραγωγής της.
   - *Προσθετικότητα*: σε ότι αφορά την αντικειμενική συνάρτηση η προσθετικότητα εξασφαλίζει ότι η συνεισφορά κάθε μεταβλητής απόφασης στην τιμή του z είναι ανεξάρτητη από τις τιμές που παίρνουν οι υπόλοιπες ενώ, σχετικά με τους περιορισμούς, ότι η κατανάλωση $\alpha_{ij}$ ενός πόρου *i*

για την εκτέλεση της *j*-δραστηριότητας είναι ανεξάρτητη από την κατάνάλωση του συγκεκριμένου πόρου για την εκτέλεση οποιασδήποτε άλλης δραστηριότητας.

- *Διαιρετότητα*: μέσω αυτής εξασφαλίζεται νόημα στην ύπαρξη κλασματικών τιμών στις μεταβλητές του προβλήματος.
- *Προσδιοριστικότητα*: όλες οι τιμές των παραμέτρων θεωρείται ότι είναι γνωστές σταθερές.

5. Η ολοκληρωμένη μαθηματική διατύπωση επίλυσης του προβλήματος έγινε από τον Dantzig (1947). Νωρίτερα διάφορα προβλήματα τύπου γραμμικού προγραμματισμού, είχαν διατυπωθεί και επιλυθεί όπως π.χ. το πρόβλημα της δίαιτας (Stigler 1945) και το πρόβλημα μεταφοράς (Hitchcock 1941, Koopmans 1949). Ο Dantzig κατασκεύασε ένα γενικό πλαίσιο, τη μέθοδο Simplex, η οποία παρέχει έναν αποτελεσματικό, γρήγορο και αξιόπιστο *αλγόριθμο* για την επίλυση οποιουδήποτε π.γ.π.
6. Ένα π.γ.π. είναι σε **τυπική μορφή** όταν (i) είναι πρόβλημα μεγιστοποίησης, (ii) όλοι οι περιορισμοί είναι εξισώσεις με μη αρνητικούς τους σταθερούς όρους, (iii) όλες οι μεταβλητές είναι μη αρνητικές, και (iv) rank(**A**)=m<n.

## 1.2 Η ΜΕΘΟΔΟΣ SIMPLEX

Προτού προχωρήσουμε στην μέθοδο επίλυσης Simplex του προβλήματος θυμίζουμε τους κατωτέρω συμβολισμούς ή/και ορισμούς.

*ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ - ΟΡΙΣΜΟΙ:*

1. Συμβολίζουμε με $\mathbf{P}_j$ τη j-στήλη του πίνακα **A**. Τότε οι περιορισμοί του γραμμικού μοντέλου γράφονται και ως $x_1\mathbf{P}_1 + x_2\mathbf{P}_2 + \ldots + x_n\mathbf{P}_n = \mathbf{b}$.

2. Επιλέγουμε m γραμμικώς ανεξάρτητες στήλες του πίνακα **A**, θέτουμε τις n-m μεταβλητές οι οποίες αντιστοιχούν στις εναπομείνασες στήλες ίσες με μηδέν και επιλύουμε ως προς τις υπόλοιπες m μεταβλητές. Η λύση που προκύπτει τότε $\mathbf{x} = \left(0,...,0,x_{i1},0,...,0,x_{i2},0,...,0,x_{im},0,...,0\right)$ ονομάζεται **βασική λύση** του π.γ.π. και οι αντίστοιχες μεταβλητές, **βασικές μεταβλητές**.
3. Κάθε βασική λύση με όλες τις μεταβλητές μη αρνητικές ονομάζεται βασική εφικτή λύση.
4. Μια βασική εφικτή λύση που έχει τουλάχιστον μια από τις βασικές μεταβλητές ίση με μηδέν ονομάζεται εκφυλισμένη βασική εφικτή λύση.
5. **Άριστη** ή **βέλτιστη λύση** ενός π.γ.π. λέγεται κάθε εφικτή λύση που μεγιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση.
6. Η επίλυση ενός π.γ.π. μπορεί να καταλήξει σε τρεις περιπτώσεις:
    - <u>αδύνατο</u>, όταν δεν υπάρχουν τιμές των μεταβλητών απόφασης οι οποίες να ικανοποιούν ταυτόχρονα όλους τους περιορισμούς.
    - σε <u>μη φραγμένη λύση</u>, εννοώντας ότι αν θέλουμε μεγιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης, η τιμή της θα αυξάνει αόριστα χωρίς να παραβιάζεται κάποιος περιορισμός.
    - να <u>έχει τουλάχιστον μια βέλτιστη λύση</u>.

Η ιδέα της μεθόδου Simplex είναι σχετικά απλή: δημιουργεί βασικές εφικτές λύσεις $\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1, ..., \mathbf{x}^k$ με $\mathbf{c}'\mathbf{x}^0 \le \mathbf{c}'\mathbf{x}^1 \le ... \le \mathbf{c}'\mathbf{x}^k$, οι οποίες συγκλίνουν στην άριστη λύση (αν υπάρχει) σε πεπερασμένο αριθμό επαναλήψεων. Έστω **x** μια μη εκφυλισμένη βασική εφικτή λύση. Συμβολίζουμε με $\mathbf{x}_B$ και $\mathbf{x}_N$ τα διανύσματα των βασικών και μη βασικών μεταβλητών αντίστοιχα. Έστω **B** ο mxn πίνακας που σχηματίζεται από τις στήλες που αντιστοιχούν στις βασικές μεταβλητές (βασικές στήλες) και **N** ο mx(n-m) πίνακας που δημιουργείται από τις εναπομείνασες στήλες του πίνακα **A**. Εκ κατασκευής, οι στήλες του **B** δημιουργούν μια βάση του $\mathbb{R}^m$ (οπότε $\det \mathbf{B} \neq 0$, κι άρα υπάρχει ο αντίστροφος πίνακας $\mathbf{B}^{-1}$).

*ΚΟΣΤΟΣ ΕΥΚΑΙΡΙΑΣ*

Θεωρούμε το π.γ.π. σε τυπική μορφή: $z = \max \mathbf{c}'x$, $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$, $\mathbf{x}\geq\mathbf{0}$, όπου $\mathbf{A}\in\mathbb{R}_{mxn}$, $\mathbf{x},\mathbf{c}\in\mathbb{R}_{nx1}$, $\mathbf{b}\in\mathbb{R}_{mx1}$, $\mathbf{b}\geq\mathbf{0}$ και $rank(\mathbf{A}) = m < n$. Τότε για την τυχαία μη εκφυλισμένη βασική εφικτή λύση **x** έχουμε

$$\mathbf{b} = \mathbf{Ax} = [\mathbf{B},\mathbf{N}]\begin{pmatrix}\mathbf{x_B}\\ \mathbf{x_N}\end{pmatrix} = \mathbf{Bx_B} + \mathbf{Nx_N} \Rightarrow$$

$$\mathbf{x_B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{Nx_N} \tag{1}$$

και

$$\begin{aligned} z &= \mathbf{c}'\mathbf{x} = \mathbf{c}'_{\mathbf{B}}\mathbf{x_B} + \mathbf{c}'_{\mathbf{N}}\mathbf{x_N} = \mathbf{c}'_{\mathbf{B}}\left(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{Nx_N}\right) + \mathbf{c}'_{\mathbf{N}}\mathbf{x_N} = \\ &= \mathbf{c}'_{\mathbf{B}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \left(\mathbf{c}'_{\mathbf{B}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} - \mathbf{c}'_{\mathbf{N}}\right)\mathbf{x_N} \end{aligned} \tag{2}$$

Είναι όμως $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ με $\mathbf{x_N} = \mathbf{0}$, οπότε από τις (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix}\mathbf{x_B}\\ \mathbf{x_N}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}\\ \mathbf{0}\end{pmatrix} \geq \mathbf{0}$$
$$z = \mathbf{c}'_{\mathbf{B}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$

Συμβολίζουμε με U το σύνολο των δεικτών για τις μη βασικές μεταβλητές. Τότε οι εξισώσεις (1) και (2) γράφονται:

$$\begin{aligned} \mathbf{x_B} &= \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \sum_{j\in U}(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j)x_j \\ z &= \mathbf{c}'_{\mathbf{B}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \sum_{j\in U}(\mathbf{c}'_{\mathbf{B}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j - c_j)x_j \end{aligned} \tag{3}$$

Επομένως, ο ρυθμός μεταβολής της τιμής z ως προς τη μη βασική μεταβλητή $x_j$ ισούται με

$$\frac{\partial z}{\partial x_j} = -(\mathbf{c}'_{\mathbf{B}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j - c_j)\,.$$

Εάν $\frac{\partial z}{\partial x_j} \geq 0$, τότε αύξηση της $x_j$ κατά μία μονάδα συνεπάγεται αύξηση της αντικειμενικής συνάρτησης κατά την ποσότητα $(\mathbf{c}'_{\mathbf{B}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j - c_j)$. Η ποσότητα αυτή καλείται *κόστος ευκαιρίας* της $x_j$ (μη βασικής) μεταβλητής και συμβολίζεται συνήθως ως $\left(z_j - c_j\right)$.

## ΕΛΕΓΧΟΣ ΑΡΙΣΤΟΤΗΤΑΣ

Η μέθοδος ελέγχει τοπικά, εάν η βασική εφικτή λύση **x** είναι άριστη, αν δηλαδή ισχύει

$$\frac{\partial z}{\partial x_j} = -(\mathbf{c}'_{\mathbf{B}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j - \mathbf{c}_j) \leq 0, \quad \forall j \in U\,.$$

Τότε, η τιμή z της αντικειμενικής συνάρτησης δεν είναι δυνατό να βελτιωθεί (μεγαλώσει) περισσότερο, και η λύση **x** είναι η βέλτιστη. Εάν όμως υπάρχει μια μη βασική μεταβλητή $x_j$ με κόστος ευκαιρίας $z_j - c_j \prec 0$, τότε $\frac{\partial z}{\partial x_j} \succ 0$ και η αντικειμενική συνάρτηση μπορεί να βελτιωθεί εάν η $x_j$ πάρει κάποια θετική τιμή.

## ΒΕΛΤΙΩΣΗ ΤΗΣ ΥΠΑΡΧΟΥΣΑΣ ΛΥΣΗΣ

Η μη βασική μεταβλητή $x_k$ η οποία ικανοποιεί το κριτήριο

$$\left|z_k - c_k\right| = \max_{j \in U}\left\{\left|z_j - c_j\right| : z_j - c_j \prec 0\right\}$$

επιλέγεται ως *εισερχόμενη μεταβλητή*: η τιμή της πρέπει να αυξηθεί από μηδέν σε κάποια θετική ποσότητα. Άμεσα διερευνάται πόσο μεγάλη μπορεί να είναι αυτή η αύξηση σε σχέση με τον περιορισμό της μη αρνητικότητας των μεταβλητών.

Ας είναι $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ και $\mathbf{y}_j = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j$. Τότε το διάνυσμα των βασικών μεταβλητών (3) γράφεται

$$\mathbf{x}_B = \boldsymbol{\beta} - \sum_{j \in U} \mathbf{y}_j x_j \ .$$

Όλες όμως οι μεταβλητές $x_j$, $j \in U$, εκτός της $x_k$, έχουν τιμή 0. Κατά συνέπεια

$$\mathbf{x}_B = \boldsymbol{\beta} - x_k \mathbf{y}_k = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} - x_k \begin{pmatrix} y_{1,k} \\ y_{2,k} \\ \vdots \\ y_{m,k} \end{pmatrix}$$

κι επομένως η τιμή της $x_k$ μπορεί να αυξηθεί τόσο, όσο να διατηρείται η σχέση $\mathbf{x}_B \geq 0$ (minimum ratio test):

$$x_k \leq \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\beta_i}{y_{i,k}} : y_{i,k} \succ 0 \right\} \tag{4}$$

Σημειώνουμε τέλος, ότι εάν $y_{i,k} \leq 0$ για κάθε i, τότε το πρόβλημα είναι μη φραγμένο.

## TO SIMPLEX TABLEAU

Το Simplex tableau είναι ένας πίνακας στον οποίο, αφενός μεν καταγράφονται όλα τα δεδομένα του μοντέλου, αφετέρου δε, υλοποιούνται όλοι οι υπολογισμοί της ομώνυμης μεθόδου. Για το (αρχικό) π.γ.π. στην τυπική του μορφή, το Simplex tableau διαμορφώνεται ως ακολούθως:

$\mathbf{x}_N$ $\qquad$ $\mathbf{x}_B$ $\qquad$ Δεξιά Μέλη

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| z | $\mathbf{c}'_{\mathbf{B}}$ | $\mathbf{c}'_{N}$ | $\mathbf{0}$ | Μηδενική γραμμή |
| $\mathbf{x}_B$ | $\mathbf{B}$ | $\mathbf{N}$ | $\mathbf{b}$ | Γραμμή 1 έως m |

Ανάλογη είναι η μορφή και στην τυχαία λύση $\mathbf{x} = \left(\mathbf{x_B}, \mathbf{x_N}\right)$ σε κάποια επανάληψη της μεθόδου. Για τη λύση αυτή, οι σχέσεις (1) και (2) δίνουν αντίστοιχα

$$\mathbf{x_B} + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\,\mathbf{x_N} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$
$$z + \mathbf{U}\,\mathbf{x_B} + \left(\mathbf{c}'_{\mathbf{B}}\,\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} - \mathbf{c}'_{\mathbf{N}}\right)\mathbf{x_N} = \mathbf{c}'_{\mathbf{B}}\,\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$

με το Simplex tableau να είναι το

| | $\mathbf{x}_N$ | $\mathbf{x}_B$ | Δεξιά Μέλη | |
|---|---|---|---|---|
| z | $\mathbf{0}$ | $\mathbf{c}'_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}-\mathbf{c}'_N$ | $\mathbf{c}'_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ | Μηδενική γραμμή |
| $\mathbf{x}_B$ | $\mathbf{I}$ | $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$ | $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ | Γραμμή 1 έως m |

Στο tableau δεν καταγράφεται απλά η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης $\mathbf{c}'_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ και των βασικών μεταβλητών $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$, αλλά υπάρχουν και όλες οι απαιτούμενες πληροφορίες για την εφαρμογή της μεθόδου Simplex. Το κόστος ευκαιρίας που είναι μηδενικό για τις βασικές μεταβλητές και $\mathbf{c}'_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}-\mathbf{c}'_N$ για τις μη βασικές εμφανίζεται στη μηδενική γραμμή. Δηλαδή, η μηδενική γραμμή μας πληροφορεί εάν έχουμε βέλτιστη λύση ($z_j - c_j \geq 0$), ή ποιάς μη βασικής μεταβλητής πρέπει να αυξήσουμε την τιμή. Αυξάνοντας την τιμή της $x_k$, το διάνυσμα $\mathbf{y}_k = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_k$ το οποίο υπάρχει στο tableau στη στήλη που υποδεικνύει η μεταβλητή $x_k$ (γραμμές 1 έως m), θα μας υποδείξει πόσο μεγάλη μπορεί να είναι η αύξηση αυτή. Το minimum ratio test, το οποίο μπορεί να υλοποιηθεί μια και οι ποσότητες $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ και $\mathbf{y}_k$ είναι διαθέσιμες στο tableau, θα υποδείξει την εξερχόμενη μεταβλητή.

Η εφαρμογή της διαδικασίας που μόλις περιγράφηκε, προϋποθέτει ότι ο αρχικός βασικός πίνακας είναι ο μοναδιαίος $\mathbf{B}=\mathbf{I}$, γεγονός το οποίο δε προκύπτει πάντοτε από τις στήλες του **A**. Τότε, δεν θα υπάρχει μια προφανής αρχική βασική εφικτή λύση για να ξεκινήσει ο αλγόριθμος Simplex. Σε μια τέτοια περίπτωση καταφεύγουμε στη χρήση των *τεχνητών μεταβλητών* (βλέπε π.χ. Τσάντας και Βασιλείου, 2000).

## ΤΟ ΔΥΪΚΟ Π.Γ.Π.

Έστω το π.γ.π. σε κανονική μορφή $z=\max \mathbf{c}'\mathbf{x}$, $\mathbf{A}\mathbf{x}\leq\mathbf{b}$, $\mathbf{x}\geq\mathbf{0}$, όπου $\mathbf{c},\mathbf{x}\in\mathbb{R}_{n\times 1},\mathbf{b}\in\mathbb{R}_{m\times 1},\mathbf{A}\in\mathbb{R}_{m\times n}$. Ορίζουμε ως δυϊκό (πρόβλημα του πρωτεύοντος) το πρόβλημα $\min \mathbf{b}'\mathbf{w}$, $\mathbf{A}'\mathbf{w}\geq\mathbf{c}$, $\mathbf{w}\geq\mathbf{0}$, όπου $\mathbf{w}\in\mathbb{R}_{m\times 1}$ και $\mathbf{A}'$ ο ανάστροφος του **A** πίνακα.

Το ζεύγος των παραπάνω προβλημάτων αποτελεί τη συμμετρική μορφή του πρωτεύοντος-δυϊκού προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού: εάν το πρόβλημα έχει *n* μεταβλητές και *m* περιορισμούς, το δυϊκό πρόβλημα θα έχει *m* μεταβλητές (μια δυϊκή μεταβλητή για καθένα εκ των περιορισμών του πρωτεύοντος) και *n* περιορισμούς (ένας δυϊκός περιορισμός για κάθε μία εκ των μεταβλητών του πρωτεύοντος). Η ακριβής σχέση έχει ως κατωτέρω:

| Πρωτεύον<br>maximize z | Δυϊκό<br>minimize u |
|---|---|
| i-περιορισμός μορφής $\leq$ | i-μεταβλητή $w_i\geq 0$ |

| | |
|---|---|
| i-περιορισμός μορφής $=$ | i-μεταβλητή $w_i \in \mathbb{R}$ |
| i-περιορισμός μορφής $\geq$ | i-μεταβλητή $w_i \leq 0$ |
| i-μεταβλητή $x_i \geq 0$ | i-περιορισμός μορφής $\geq$ |
| i-μεταβλητή $x_i \in \mathbb{R}$ | i-περιορισμός μορφής $=$ |
| i-μεταβλητή $x_i \leq 0$ | i-περιορισμός μορφής $\leq$ |

## *ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΔΥΪΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ*

Σε ένα π.γ.π., όπως ήδη έχει προαναφερθεί, με $a_{ij}$ συμβολίζουμε την ποσότητα του i - πόρου (i=1,...,m) που καταναλώνεται για την παραγωγή μιας μονάδας της j - δραστηριότητας (j=1,…,n) και με $c_j$ την αύξηση που θα προκύψει στο μέτρο αποδοτικότητας z του συστήματος από την αύξηση κατά μια μονάδα της μεταβλητής $x_j$. Επομένως στο π.γ.π. μεγιστοποίησης (πρωτεύον):

* το αριστερό μέρος του i-περιορισμού $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$ παριστά την συνολική ποσότητα του i-πόρου που θα χρησιμοποιηθεί, ποσότητα που δεν μπορεί να υπερβαίνει τη διαθέσιμη $b_i$ (i=1,...,m).
* η αντικειμενική συνάρτηση $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ δίνει το συνολικό κέρδος από την παραγωγή των $x_j$ μονάδων της δραστηριότητας j (j=1,…,n).

Οπότε στο αντίστοιχο δυϊκό πρόβλημα προκειμένου να είναι οι περιορισμοί του προβλήματος συμβιβαστοί θα πρέπει το $w_i$ να παριστά την **αξία έκαστης μονάδας του μέσου-πόρου i**. Συνεπώς, η ποσότητα

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$$

παριστά την αξία εκείνης της σύνθεσης των πόρων που θα χρησιμοποιηθούν για την παραγωγή μιας μονάδας j-προϊόντος, ενώ η ανίσωση

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \geq c_j \quad j = 1, \ldots, n$$

(j-περιορισμός του δυϊκού) σημαίνει ότι η αποδιδόμενη αξία στη σύνθεση αυτή των πόρων πρέπει να είναι τουλάχιστον τόση, όσο το κέρδος που έχουμε από μια μονάδα του j προϊόντος/δραστηριότητας.

*ΘΕΩΡΗΜΑ 1 :* Το δυϊκό του δυϊκού είναι το πρωτεύον πρόβλημα.

***ΘΕΩΡΗΜΑ 2*** *(ΑΣΘΕΝΟΥΣ ΔΥΪΣΜΟΥ) :* Αν **x** μια εφικτή λύση του πρωτεύοντος και **w** μια εφικτή λύση του δυϊκού προβλήματος τότε $\mathbf{c}'\mathbf{x} \leq \mathbf{b}'\mathbf{w}$.

*ΘΕΩΡΗΜΑ 3 :* Έστω **x*** μία λύση του πρωτεύοντος προβλήματος και **y*** μία λύση του δυϊκού. Αν **c**΄·**x*** = **b**΄·**y*** τότε **x*** είναι η βέλτιστη λύση του πρωτεύοντος προβλήματος και **y*** η βέλτιστη λύση του δυϊκού.

*ΘΕΩΡΗΜΑ 4 :* Αν το δυϊκό πρόβλημα δεν έχει εφικτές λύσεις τότε το πρωτεύον είτε δεν έχει εφικτές λύσεις, είτε είναι μη φραγμένο.

*ΘΕΩΡΗΜΑ 5 :* Αν ένα πρωτεύον πρόβλημα είναι μη φραγμένο τότε το δυϊκό του δεν έχει εφικτές λύσεις.

***ΘΕΩΡΗΜΑ 6** (ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΔΥΪΣΜΟΥ):* Αν το πρωτεύον π.γ.π. έχει βέλτιστη λύση τότε και το δυϊκό π.γ.π. έχει επίσης και μάλιστα οι τιμές των αντικειμενικών συναρτήσεών τους είναι ίσες.

*Απόδειξη*

Έστω το πρωτεύον πρόβλημα σε τυπική μορφή

$$
\begin{aligned}
&\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
&\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \;\; i = 1,\dots,m \\
&x_j \geq 0 \;\; j = 1,\dots,n
\end{aligned}
$$

όπου $x_j$ μεταβλητές απόφασης, περιθώριες και τεχνητές. Ισοδύναμα, σε μορφή πινάκων, είναι

$$
\begin{aligned}
&\max z = \mathbf{c}_{\mathbf{I}}' \mathbf{x}_{\mathbf{I}} + \mathbf{c}_{\mathbf{II}}' \mathbf{x}_{\mathbf{II}} \\
&(\mathbf{NI}) \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{\mathbf{I}} \\ \mathbf{x}_{\mathbf{II}} \end{pmatrix} = \mathbf{b} \\
&\mathbf{x}_{\mathbf{I}}, \mathbf{x}_{\mathbf{II}} \geq \mathbf{0}
\end{aligned}
\tag{5}
$$

όπου $\mathbf{x}_{\mathbf{I}}$ και $\mathbf{x}_{\mathbf{II}}$ οι βασικές και οι μη βασικές αρχικές μεταβλητές αντίστοιχα. Συνεπώς

$$
\begin{aligned}
&\min u = \mathbf{b}' \mathbf{w} \\
&(\mathbf{N}^T \mathbf{I}) \mathbf{w} \geq \begin{pmatrix} \mathbf{c}_{\mathbf{I}} \\ \mathbf{c}_{\mathbf{II}} \end{pmatrix} \\
&\mathbf{w} \in \mathbb{R}
\end{aligned}
\tag{6}
$$

θα είναι το δυϊκό του προβλήματος (5).

Έστω **B** η βάση που αντιστοιχεί στη βέλτιστη λύση **x*** του πρωτεύοντος και $\mathbf{c_B}$ το διάνυσμα των αντίστοιχων αντικειμενικών συντελεστών. Θεωρούμε το διάνυσμα

$$\mathbf{w}^{*'} = \left(w_1^*, w_2^*, ..., w_m^*\right)' = \mathbf{c}_\mathbf{B}'\mathbf{B}^{-1}$$

ως βέλτιστη λύση του δυϊκού.

Αρκεί να δείξουμε ότι **w*** είναι εφικτή λύση του δυϊκού, ότι δηλαδή $\Leftrightarrow \mathbf{N}^T\mathbf{w}^* \geq \mathbf{c_I}\ , \mathbf{w}^* \geq \mathbf{c_{II}}\ , \mathbf{w}^* \geq \mathbf{0}$ και $\min \mathbf{b}'\mathbf{w}^* = \max \mathbf{c}'\mathbf{x}^*$.

Για το πρωτεύον πρόβλημα το αρχικό Simplex tableau είναι

$$\leftarrow x_I \rightarrow \quad \leftarrow x_{II} \rightarrow$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\mathbf{c_{II}}$ | $\mathbf{b}$ | $\mathbf{N}$ | $\mathbf{I}$ |
| $z$ | $\mathbf{c}'_{\mathbf{II}}\mathbf{b}$ | $-\mathbf{c}_\mathbf{I}'$ | $\mathbf{0}$ |

και περιέχει την αρχική βασική λύση **b**. Η δομή που έχει το Simplex tableau για μια τυχαία επανάληψη της μεθόδου είναι η εξής:

$$\leftarrow \quad x_I \quad \rightarrow \quad \leftarrow \quad x_{II} \quad \rightarrow$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\mathbf{c}_B$ | $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ | $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$ | $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{I}$ |
| $z$ | $\mathbf{c}'_\mathbf{B}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ | $\mathbf{c}_\mathbf{B}'\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} - \mathbf{c}_\mathbf{I}'$ | $\mathbf{c}_\mathbf{B}'\mathbf{B}^{-1} - \mathbf{c}_\mathbf{II}'$ |

Στο τελικό tableau η λύση $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \boldsymbol{\beta}$ είναι η άριστη **x***, ενώ όλες οι διαφορές $z_j$-$c_j$ της τελευταίας γραμμής είναι μη αρνητικές:

$$\mathbf{c}_\mathbf{B}'\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} - \mathbf{c_I} \geq \mathbf{0} \tag{7}$$

και
$$\mathbf{c}_\mathbf{B}'\mathbf{B}^{-1} - \mathbf{c_{II}} \geq \mathbf{0} \tag{8}$$

Άρα, για $\mathbf{w}^* = \mathbf{c}_\mathbf{B}'\mathbf{B}^{-1}$ η (7) δίνει $\mathbf{w}^{*}{}'\mathbf{N} \geq \mathbf{c}_\mathbf{I}' \Rightarrow \mathbf{N}^T\mathbf{w}^* \geq \mathbf{c_I}$ και η (8) $\mathbf{w}^{*'} \geq \mathbf{c_{II}}$ ενώ είναι φανερό ότι η **w*** δεν έχει αρνητικά στοιχεία. Επομένως, **w*** εφικτή λύση του δυϊκού.

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι είναι και η βέλτιστη λύση. Ισχύει,

$$u = \mathbf{b}'\mathbf{w}^* = \mathbf{w}^{*\prime}\mathbf{b} = \mathbf{c}_\mathbf{B}'\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{c}_\mathbf{B}'\mathbf{x}^* = z$$

και συνεπώς από το θεώρημα 3, η $\mathbf{w}^* = \mathbf{c}_B'\mathbf{B}^{-1}$ είναι η βέλτιστη λύση του δυϊκού.

## 1.3 ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΥΑΙΣΘΗΣΙΑΣ. Η ΚΛΑΣΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ

Η βέλτιστη λύση ενός π.γ.π. προσδιορίζεται για συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων του. Επομένως αν μετά την επίλυση του προβλήματος οι τιμές μιας ή περισσότερων παραμέτρων μεταβληθούν, ενδέχεται να διαταραχθεί και η βέλτιστη λύση. Έτσι προκύπτει η ανάγκη για αυτό που ονομάζεται *ανάλυση ευαισθησίας* της βέλτιστης λύσης.

Η μελέτη ευαισθησίας της βέλτιστης λύσης, δεδομένου ότι κάθε μεταβολή γίνεται σε μία και μόνο παράμετρο διατηρώντας τους άλλους σταθερούς, διακρίνεται στις εξής περιπτώσεις:

- μεταβολή των αντικειμενικών συντελεστών $c_j$
- μεταβολή των σταθερών όρων $b_i$
- μεταβολή των συντελεστών $a_{ij}$ του συστήματος των περιορισμών
- προσθήκη/αφαίρεση μεταβλητών
- προσθήκη/αφαίρεση περιορισμών

*ΟΡΙΣΜΟΙ:*

1. Το διάστημα μέσα στο οποίο κυμαίνεται η τιμή ενός αντικειμενικού συντελεστή χωρίς να μεταβάλλεται η βέλτιστη λύση του π.γ.π., καλείται *εύρος αριστότητας*.

2. Η ανάλυση ευαισθησίας για το δεξιό μέλος $b_i$ ενός περιορισμού αποσκοπεί στον καθορισμό ενός διαστήματος τιμών που ονομάζεται *εύρος εφικτότητας*. Όσο ο

όρος $b_i$ λαμβάνει τιμές στο διάστημα αυτό η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης μεταβάλλεται με σταθερό ρυθμό, (*δυϊκή ή σκιώδης* τιμή του πόρου που αυτός αντιπροσωπεύει. Η σκιώδης τιμή ενός πόρου που χρησιμοποιήθηκε πλήρως (δεσμευτικός περιορισμός) είναι μη μηδενική ενώ κάποιου που έχει πλεόνασμα (χαλαρός περιορισμός) είναι μηδενική.

## Α. ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΙΚΟΥ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗ $C_j$

(i) Ας είναι $x_j$ μη βασική μεταβλητή με αντίστοιχο συντελεστή $c_j$ τον οποίο μεταβάλλουμε κατά $\Delta c_j$ οπότε και προκύπτει $c_j^{new} = c_j + \Delta c_j$. Το διάνυσμα **c**B δεν επηρρεάζεται και άρα ούτε η ποσότητα $z_j = \mathbf{c}'_{\mathrm{B}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j$ για κάποιο j. Απλώς η τιμή $z_j - c_j$ αντικαθίσταται στο τελικό tableau από την $z_j - c_j^{new}$. Οπότε $z_j - c_j^{new} \geq 0$ και η άριστη λύση διατηρείται όταν $\Delta c_j \leq z_j - c_j$ άρα, το εύρος του νέου συντελεστή είναι:

$$-\infty \leq c_j^{new} \leq c_j - \bar{c}_j \text{ με } \bar{c}_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_j \text{ με j=1,…,n.}$$

(ii) Θεωρούμε μια βασική μεταβλητή $x_j$ της οποίας ο συντελεστής μεταβάλλεται κατά $\Delta c_j$ άρα και η νέα τιμή του διανύσματος **c**B είναι $\mathbf{c}_B^{new}$. Τότε

$$z_j^{new} - c_j = \mathbf{c}_B{}'^{new}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j - c_j = (z_j - c_j) + \Delta\mathbf{c}_{B_r} y_{rj} .$$

Για να παραμείνει άριστη η λύση του προβλήματος, για όλα τα βασικά διανύσματα **P**j θα πρέπει να ισχύει $(z_j - c_j) + \Delta\mathbf{c}_{B_r} y_{rj} \geq 0$ επομένως,

$$\max_j \left\{ -\frac{z_j - c_j}{y_{rj}} : y_{rj} \succ 0 \right\} \leq \Delta\mathbf{c}_{B_r} \leq \min_j \left\{ -\frac{z_j - c_j}{y_{rj}} : y_{rj} \prec 0 \right\}.$$

## *Β. ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΣΤΑΘΕΡΟΥ ΟΡΟΥ $b_j$*

Κάθε μεταβολή του διανύσματος **b** συνεπάγεται μεταβολή του εύρους εφικτότητας. Μεταβάλλουμε τον $b_k$ οπότε $b_k^{new} = b_k + \Delta b_k$. Τότε, $\mathbf{b}^{new} = \mathbf{b} + \Delta b_k \mathbf{e}_k$ όπου $\mathbf{e}_k$ κ-μοναδιαίο διάνυσμα. Επομένως, $\mathbf{x}_B^{new} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} + \Delta b_k \mathbf{B}^{-1}\mathbf{e}_k = \mathbf{x}_B + \Delta b_k \mathbf{B}^{-1}\mathbf{e}_k$ και θα πρέπει για να είναι η νέα λύση εφικτή να ισχύει $\mathbf{x}_B^{new} \geq 0$. Ισοδύναμα για κάθε i=1,…,m, για όλα τα μη βασικά διανύσματα $\mathbf{P}_j$, θα πρέπει να ισχύει:

$$\max_j \left\{ -\frac{x_{B_i}}{y_{ik}} : y_{ik} \succ 0 \right\} \leq \Delta \mathbf{b}_k \leq \min_j \left\{ -\frac{x_{B_i}}{y_{ik}} : y_{ik} \prec 0 \right\}.$$

## *Γ. ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΤΩΝ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ $a_{ij}$*

(i) Ας είναι $\mathbf{P}_j$ μη βασικό διάνυσμα, του οποίου τα στοιχεία $a_{ij}$ μεταβάλλονται. Τότε η λύση $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$, που περιέχεται στο τελικό tableau, δε μεταβάλλεται αλλά δε γνωρίζουμε αν παραμένει και βέλτιστη. Αν ικανοποιείται η σχέση $z^{new} - c_j \geq 0$ η αριστότητα διατηρείται, διαφορετικά συνεχίζουμε την επαναληπτική διαδικασία έως ότου καταλήξουμε σε άριστη λύση. (ii) Θεωρούμε βασικό διάνυσμα $\mathbf{P}_j$ το οποίο γίνεται $\mathbf{P}_j^{new}$ οπότε και η λύση που περιέχεται στο τελικό tableau, μεταβάλλεται και πρέπει να προσδιοριστεί ξανά. Θέτουμε το $\mathbf{P}_j^{new}$ ως πρόσθετο μη βασικό διάνυσμα με αντικειμενικό συντελεστή $c_j$ αντιστοιχώντας ταυτόχρονα στο βασικό διάνυσμα $\mathbf{P}_j$ συντελεστή –M (M >>0). Επίσης οδηγεί το βασικό διάνυσμα $\mathbf{P}_j^{new}$ να βγει από τη βάση και να προσδιοριστεί η νέα βασική λύση κατά το γνωστό τρόπο.

## *Δ. ΠΡΟΣΘΗΚΗ/ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ*

(i) *Προσθήκη μεταβλητής*: για να ληφθεί υπόψη κάποια εναλλακτική δραστηριότητα στο πρόβλημα βελτιστοποίησης γραμμικού προγραμματισμού, απαιτείται η εισαγωγή μιας νέας μεταβλητής έστω $x_{n+1}$ με αντίστοιχο αντικειμενικό συντελεστή $c_{n+1}$ και η οποία αντιστοιχεί σε ένα διάνυσμα συντελεστών $\mathbf{P}_{n+1}$. Στο τελικό tableau τότε, η στήλη που αντιστοιχεί στη μεταβλητή θα είναι η $y_{n+1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_{n+1}$ με τιμή στη γραμμή των $z_j - c_j$ ίση με $z_{n+1} - c_{n+1} = \mathbf{c}_{\mathrm{B}}' y_{n+1}$. Εάν $z_{n+1} - c_{n+1} \geq 0$ το κριτήριο βελτιστοποίησης ικανοποιείται. Σε αντίθετη περίπτωση απαιτείται ο προσδιορισμός της νέας βέλτιστης λύσης εισάγοντας στη βάση τη μεταβλητή $x_{n+1}$ και εφαρμόζοντας τη μέθοδο Simplex. (ii) *Αφαίρεση μεταβλητής*: εάν $x_j$ μη βασική προς αφαίρεση μεταβλητή τότε, η βέλτιστη λύση παραμένει ίδια. Σε αντίθετη περίπτωση εισάγουμε συντελεστή της μεταβλητής στην αντικειμενική συνάρτηση -Μ ο οποίος εξαναγκάζει τη μεταβλητή να βγει από τη βάση έως ότου βρεθεί βέλτιστη λύση. Αν η μεταβλητή αυτή δε βγει με τους μετασχηματισμούς σημαίνει ότι η αφαίρεση της μεταβλητής καθιστά τους περιορισμούς ασυμβίβαστους και δεν είναι δυνατόν να υπάρξει λύση.

## *Ε. ΠΡΟΣΘΕΣΗ/ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΩΝ*

Το πρόβλημα της πρόσθεσης/αφαίρεσης ενός περιορισμού είναι ισοδύναμο με την προσθήκη/αφαίρεση μεταβλητών στο δυϊκό του. Γενικά η προσθήκη ενός περιορισμού σε ένα πρότυπο π.γ.π. δεν βελτιώνει ποτέ την τιμή z της αντικειμενικής συνάρτησης. Αν η άριστη λύση ικανοποιεί τον πρόσθετο περιορισμό, είναι άριστη λύση και για το επαυξημένο και δε χρειάζεται περαιτέρω ενέργεια. Αν όμως τον παραβιάζει, εισάγουμε τον νέο περιορισμό στο τελικό tableau προσθέτοντας μια περιθώρια μεταβλητή την οποία κάνουμε βασική. Απαλείφουμε τους όρους που περιέχουν βασικές μεταβλητές από τον περιορισμό και εφαρμόζουμε τη δυϊκή Simplex μέχρι να βρούμε τη νέα βέλτιστη λύση, αν φυσικά υπάρχει.

## *ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ*

Ο παραμετρικός προγραμματισμός χρησιμοποιείται για την επίλυση προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού των οποίων οι παράμετροι αποτελούν γραμμικές συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής λ, που ονομάζεται παράμετρος της μεταβολής. Ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού εμφανίζεται συνήθως παραμετρικοποιημένο είτε προς την αντικειμενική συνάρτηση, είτε ως προς το διάνυσμα των διαθέσιμων πόρων. Η βασική ιδέα αυτού συνίσταται στον προσδιορισμό των διαστημάτων τιμών της παραμέτρου λ εντός των οποίων έχουμε την ίδια βέλτιστη βάση.

## *Α. ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΤΩΝ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ $c_j$*

Θεωρούμε $z=\mathbf{c}'\mathbf{x}$ η αντικειμενική συνάρτηση η οποία αντικαθίσταται από την παραμετρική $z=(\mathbf{c}'+\lambda\hat{\mathbf{c}}')\mathbf{x}$ με αποτέλεσμα το διάνυσμα $\mathbf{c_B}$ να διαταράσσεται και γίνεται $\mathbf{c'_B}$. Οπότε η συνθήκη αριστότητας αλλάζει και απαιτείται

$$\left(\mathbf{c}_B'+\lambda\hat{\mathbf{c}}'_B\right)\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j-\left(c_j-\lambda c'_j\right)\geq 0 \quad \forall j \Leftrightarrow$$

$$\left(z_j-c_j\right)+\lambda\left(\hat{z}_j-\hat{c}_j\right)\geq 0 \quad \forall j \qquad (11)$$

Ανάλογα προκύπτει ότι η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του παραμετρικοποιημένου προβλήματος για τη βέλτιστη λύση θα είναι ιση με

$$z=\left(\mathbf{c}'_B+\lambda\hat{\mathbf{c}}'_B\right)\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}=\mathbf{c}'_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}+\lambda\hat{\mathbf{c}}'_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}.$$

Η διαδικασία ανάλυσης της διακύμανσης των αντικειμενικών τιμών $c_j$ ξεκινά βρίσκοντας τη βέλτιστη λύση για το αρχικό π.γ.π. (λ=0) και αφού καταχωρηθούν στο βέλτιστο tableau οι ποσότητες $\hat{z}_j - \hat{c}_j = \hat{\mathbf{c}}'_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{P}_j - \hat{c}_j$ (σε μια πρόσθετη γραμμή στο τέλος του tableau) προσδιορίζεται διάστημα τιμών [L,U] της λ έτσι ώστε να ικανοποιείται η (11). Για κάθε άκρο το οποίο είναι πεπερασμένο προσδιορίζεται για ποια μη βασική μεταβλητή μηδενίζεται η (11) και θέτουμε το λ ίσο με την τιμή αυτού. Στη συνέχεια καθίσταται η μη βασική αυτή μεταβλητή ως εισερχόμενη και εφαρμόζεται η μέθοδος Simplex. Οπότε, με επαναληπτικό τρόπο προσδιορίζονται και διερευνούνται όλα τα διαστήματα τιμών της παραμέτρου λ.

## *Β. ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΤΩΝ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ $b_i$*

Η παραμετρικοποίηση των $b_i$ είναι η αντίστοιχη των $c_j$ της αντικειμενικής συνάρτησης του δυϊκού. Αν η διαταραχή του **b** διανύσματος είναι $\lambda \hat{\mathbf{b}}$ το παραμετρικοποιημένο πρόβλημα είναι:

$$\max \mathbf{c}'\mathbf{x},\ \ \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} + \lambda \hat{\mathbf{b}},\ \ \mathbf{x} \geq 0$$

Τότε

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{b} + \lambda \hat{\mathbf{b}}) = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} + \lambda \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \boldsymbol{\beta} + \lambda \hat{\boldsymbol{\beta}} \geq 0 \tag{12}$$

και η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης

$$z = \mathbf{c}'_B \left[ \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{b} + \lambda \hat{\mathbf{b}}) \right] = \mathbf{c}'_B \boldsymbol{\beta} + \lambda \mathbf{c}'_B \hat{\boldsymbol{\beta}}.$$

Η διαδικασία ανάλυσης της διακύμανσης των αντικειμενικών τιμών $b_i$ στα δύο μέλη των περιορισμών ξεκινά βρίσκοντας τη βέλτιστη λύση για το αρχικό π.γ.π. (λ=0) και αφού καταχωρηθούν οι ποσότητες $\beta_i + \lambda \hat{\beta}_i = 0$ στο βέλτιστο tableau σε μία επιπλέον στήλη, προσδιορίζεται διάστημα τιμών της λ, [L,U], για τις οποίες ικανοποιείται η συνθήκη εφικτότητας (12). Για κάθε άκρο του διαστήματος το οποίο είναι πεπερασμένο, προσδιορίζεται για ποια βασική μεταβλητή $x_{B,i}$ είναι $\beta_i + \lambda \hat{\beta}_i = 0$ όταν λ ίσο με την τιμή του άκρου. Τότε καθίσταται ως εξερχόμενη η μεταβλητή αυτή και εφαρμόζουμε τη δυϊκή Simplex, καταλήγοντας σε νέο tableau και σε νέα λύση (το πιθανότερο). Επομένως, με επαναληπτικό τρόπο προσδιορίζονται και διερευνούνται όλα τα διαστήματα της παραμέτρου λ.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

## ΜΗ ΚΛΑΣΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΥΑΙΣΘΗΣΙΑΣ

Σε πολλές περιπτώσεις οι βασικές παράμετροι ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού, όπως τα κέρδη ή το απόθεμα των πόρων, μεταβάλλονται και ο αποφασίζων θα πρέπει να γνωρίζει πως θα δράσει στη περίπτωση τέτοιων αλλαγών. Η λύση σε αυτούς τους προβληματισμούς είναι η ανάλυση ευαισθησίας, όπως ήδη έχουμε προαναφέρει, στόχος της οποίας είναι η ανάλυση των αποτελεσμάτων που επιφέρουν στη λύση του μοντέλου οι αλλαγές των δεξιών μελών των περιορισμών ή των αντικειμενικών συντελεστών.

Αναμφισβήτητα το είδος των λύσεων του προβλήματος επηρεάζουν τόσο τον τρόπο διεξαγωγής της ανάλυσης ευαισθησίας όσο και τα αποτελέσματά της. Χαρακτηριστικότερο παράδειγμα είναι η περίπτωση των εκφυλισμένων λύσεων. Τότε η βέλτιστη βάση δεν είναι μοναδική, καθώς περισσότερες από μία βέλτιστες βάσεις αντιστοιχούν στην άριστη εκφυλισμένη λύση γεγονός που δημιουργεί προβλήματα στην ανάλυση ευαισθησίας και την παραμετρική ανάλυση.

## 2.1 ΤΥΠΟΙ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΕΥΑΙΣΘΗΣΙΑΣ

Σύμφωνα με τους Koltai και Terklay [1] η ανάλυση ευαισθησίας διακρίνεται σε τρεις τύπους. Η ανάλυση ευαισθησίας τύπου I (κλασική ανάλυση ευαισθησίας), η οποία γενικά προσδιορίζει τις τιμές εκείνων των παραμέτρων του μοντέλου για τις οποίες η βέλτιστη βάση παραμένει βέλτιστη. Ειδικότερα, για τους αντικειμενικούς συντελεστές της συνάρτησης, προσδιορίζει το διάστημα τιμών εκάστου εκ των συντελεστών, στο οποίο παραμένει αμετάβλητη η βέλτιστη βάση, καθώς επίσης και τη μεταβολή της βέλτιστης τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης, όταν η τιμή του αντικειμενικού συντελεστή βρίσκεται εντός του διαστήματος αυτού. Για τα δεξιά μέλη, προσδιορίζει το διάστημα τιμών ενός από τα δεξιά μέλη, μέσα στο οποίο η βέλτιστη βάση παραμένει βέλτιστη καθώς και τον ρυθμό μεταβολής (δυική τιμή) της αντικειμενικής συνάρτηση εντός του καθορισμένου διαστήματος.

Η ανάλυση ευαισθησίας τύπου I εφαρμόζεται σε όλα τα λογισμικά πακέτα επίλυσης προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού. Όμως, στην περίπτωση των εκφυλισμένων λύσεων δίνει διαφορετικά διαστήματα ευαισθησίας και διαφορετικούς ρυθμούς μεταβολής εφόσον διαφορετικές βάσεις δύναται να αντιστοιχούν στην ίδια άριστη λύση. Από μαθηματικής απόψεως, τα αποτελέσματα είναι σωστά όμως αν η ερμηνεία αυτών δεν γίνει σωστά, οι πληροφορίες για τον αποφασίζοντα μπορεί να είναι παραπλανητικές.

Βελτίωση στο θέμα αυτό επιχειρείται με την ανάλυση ευαισθησίας τύπου II προσδιορίζει τις τιμές των παραμέτρων του μοντέλου για τις οποίες οι θετικές μεταβλητές παραμένουν θετικές και οι μηδενικές παραμένουν μηδενικές, είτε είναι του πρωτεύοντος, είτε του δυϊκού. Ειδικότερα, για μια άριστη λύση $\mathbf{x}$, όχι απαραίτητα βασική, με σύνολο θετικών μεταβλητών $\{i / x_i \succ 0\}$, αναζητούμε τις τιμές των παραμέτρων, για τις οποίες μία άριστη λύση έχει ακριβώς το ίδιο σύνολο θετικών μεταβλητών. Οι πληροφορίες που παίρνουμε από την ανάλυση ευαισθησίας τύπου II για τους αντικειμενικούς συντελεστές και τα δεξιά μέλη, ταυτίζονται με αυτά της ανάλυσης τύπου I. Η ανάλυση ευαισθησίας τύπου II εξαρτάται από την άριστη λύση που παράγεται, αλλά όχι από τη βάση που την αντιπροσωπεύει, όπως συμβαίνει με την ανάλυση τύπου I.

Η ανάλυση ευαισθησίας τύπου III προσδιορίζει τις τιμές εκείνες των παραμέτρων του μοντέλου για τις οποίες ο ρυθμός μεταβολής της βέλτιστης τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης είναι ο ίδιος. Όταν πραγματοποιούμε ανάλυση ευαισθησίας τύπου III, αναζητούμε τον ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης της βέλτιστης τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης και τα διαστήματα στα οποία αυτή μεταβάλλεται γραμμικά, γνωρίζοντας ότι η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι μία τμηματικά γραμμική συνάρτηση της παραμέτρου που μεταβάλλεται. Επίσης, η ανάλυση τύπου III είναι ανεξάρτητη των βάσεων και εξαρτημένη μόνο από τα δεδομένα του προβλήματος.

Ο υπολογισμός των τριών τύπων ευαισθησίας εξαρτάται από το είδος της βέλτιστης λύσης που παράγεται. Εξαιτίας της ύπαρξης εκφυλισμένων λύσεων, μπορούν να παρατηρηθούν οι παρακάτω περιπτώσεις:

- Στη περίπτωση που, <u>τόσο η άριστη λύση του πρωτεύοντος, όσο και του δυϊκού είναι μη εκφυλισμένες</u>, τα αποτελέσματα_που λαμβάνουμε από την ανάλυση ευαισθησίας και των τριών τύπων είναι ίδια (αφού υπάρχει μία και μοναδική βάση που αντιστοιχεί στην άριστη λύση).
- Στην περίπτωση που <u>η άριστη λύση του πρωτεύοντος προβλήματος είναι εκφυλισμένη</u>, οπότε θα υπάρχουν αντιστοιχούν διάφορες βέλτιστες βάσεις, οι αναλύσεις ευαισθησίας των τύπων I και II είναι δυνατόν να δίνουν διαφορετικά αποτελέσματα, καθώς οι πληροφορίες που λαμβάνουμε από την τύπου I ανάλυση ευαισθησίας διαφέρουν για κάθε βέλτιστη βάση. Στην περίπτωση μιας αύξησης ή ελάττωσης ενός από τα δεξιά μέλη των περιορισμών, λαμβάνουμε διαφορετικούς ρυθμούς μεταβολής για την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης, με αποτέλεσμα να εισάγουμε αριστερές και δυϊκές τιμές για τις οποίες θα μιλήσουμε αναλυτικότερα παρακάτω. Δεδομένου ότι οι αναλύσεις τύπου II και III

δεν εξαρτώνται από τις βάσεις, επομένως δίνουν τα ίδια αποτελέσματα στην περίπτωση των εκφυλισμένων λύσεων του πρωτεύοντος.

- Όταν η άριστη δυϊκή λύση είναι εκφυλισμένη, υπάρχουν αρκετές διαφορετικές βασικές και μη βασικές λύσεις για το πρωτεύον, με διαφορετικά σύνολα θετικών μεταβλητών, ενώ η δυϊκή άριστη λύση είναι μοναδική. Σε αυτή τη περίπτωση οι αναλύσεις ευαισθησίας τύπου I και II σε κάθε εναλλακτική άριστη βασική λύση του πρωτεύοντος είναι ταυτόσημες, με τη διαφορά ότι η τύπου II μπορούν να υπολογισθούν και από τις μη βασικές λύσεις.
- Όταν οι άριστες λύσεις τόσο του πρωτεύοντος όσο και του δυϊκού είναι εκφυλισμένες, τότε και οι τρεις τύποι αναλύσεις δίνουν διαφορετικά αποτελέσματα. Σε αυτή την περίπτωση σε κάθε βέλτιστη βάση αντιστοιχούν διαφορετικά αποτελέσματα ανάλυσης τύπου I. Οι άριστες λύσεις με διαφορετικά σύνολα θετικών μεταβλητών έχουν διαφορετικά διαστήματα τύπου II. Λόγω ότι η τύπου III ανάλυση ευαισθησίας είναι ανεξάρτητη της άριστης λύσης, τα διαστήματα που αποκτώνται από τις τύπου I και II είναι υποδιαστήματα των τύπου III.

Ο Gal [2,3] εισήγαγε την θεωρία του εκφυλισμού και την έννοια της κρίσιμης περιοχής η οποία μπορεί να προσδιοριστεί από μερικές βέλτιστες βάσεις. Ο προσδιορισμός όλων των βέλτιστων βάσεων είναι χρονοβόρος και οι προτάσεις που έχουν γίνει είναι προς βελτίωση αυτής της προσέγγισης. Το διάστημα ευαισθησίας τύπου II είναι υπερσύνολο των διαστημάτων τύπου I και τα δύο όμως εξαρτώνται καθαρά από το τρέχον βέλτιστο ακραίο σημείο. Στη περίπτωση όπου το πρόβλημα έχει πολλαπλά βέλτιστα σημεία (άριστη λύση) αυτά αντιστοιχούν σε διαφορετικού τύπου II διαστήματα ευαισθησίας.

Ο Jansen [4] αναφέρει ότι υπάρχουν τρία είδη διαστημάτων ευαισθησίας τύπου III όταν η τρέχουσα βέλτιστη βάση είναι εκφυλισμένη.

(1) *Χρησιμοποιώντας τις βέλτιστες τιμές*. Υποθέτουμε ότι η βέλτιστη τιμή $z^*$ είναι γνωστή. Τότε το ελάχιστο όριο $L_i$ των $\Delta c_j$ τύπου III θα είναι οι βέλτιστες τιμές των γραμμικών μοντέλων

$$\min L_i$$

υπό τους περιορισμούς

$$\begin{aligned} \mathbf{A}'\mathbf{y} - L_i\mathbf{e}_i &\leq \mathbf{c} \\ \mathbf{b}'\mathbf{y} - L_i x_i^* &= z^* \end{aligned}$$

όπου $\mathbf{e}_i$ είναι το i μοναδιαίο διάνυσμα στήλη και $x_i^*$ η i τιμή της τρέχουσας βέλτιστης βασικής λύσης, $x^*$.

Από την άλλη μεριά, το άνω όριο $U_i$ θα είναι η βέλτιστη λύση του παρακάτω γραμμικού μοντέλου

$$\max U_i$$

υπό τους περιορισμούς

$$\begin{aligned} \mathbf{A}'\mathbf{y} - U_i\mathbf{e}_i &\leq \mathbf{c} \\ \mathbf{b}'\mathbf{y} - U_i x_i^* &= z^* \end{aligned}$$

Εάν το γραμμικό μοντέλο έχει πολλαπλά βέλτιστα ακραία σημεία, τότε η $x_i^*$ τιμή μπορεί να μην είναι μοναδική, γεγονός που υποδεικνύει ότι τα παραπάνω μοντέλα παύουν να είναι ορθά.

(2) *Χρησιμοποιώντας τις βέλτιστες βάσεις*. Ο προσδιορισμός του εύρους ευαισθησίας τύπου III, θεωρώντας όλες τις βάσεις βέλτιστες δεν είναι επαρκής.

Πρέπει να πάρουμε το ολικό εύρος ευαισθησίας των $\Delta c_j$ τύπου I κάθε βέλτιστης βάσης οι οποίες στο πρωτεύον έχουν το ίδιο ακραίο βέλτιστο σημείο. Εάν το γραμμικό πρόβλημα έχει πολλαπλά βέλτιστα ακραία σημεία τότε η προσέγγιση αυτή έχει τα ίδια ελλείμματα με την αρχική.

(3) *Χρησιμοποιώντας βέλτιστα «μέρη».* Η προσέγγιση αυτή είναι χρήσιμη μόνο όταν η τρέχουσα άριστη λύση είναι αυστηρά complementary βέλτιστη λύση. Όταν αποκτηθεί η προαναφερθείσα λύση, μπορούμε να κατασκευάσουμε την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης και το διάστημα ευαισθησίας τύπου III δύναται εύκολα να αποκτηθεί.

## 2.2. ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΚΑΤΑΜΕΡΙΣΜΟΥ ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Στη συνέχεια ακολουθεί η μελέτη ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού, το οποίο παρουσιάζει έντονα το φαινόμενο του εκφυλισμού και η κλασική ανάλυση ευαισθησίας (τύπου I), δεν έχει πρακτική αξία. Πρόκειται για την ειδική περίπτωση προβλήματος μεταφοράς, το πρόβλημα καταμερισμού εργασίας (εκχώρησης), το οποίο ως πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού, ορίζεται ως εξής:

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j$$

υπό τους περιορισμούς

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \ , \ i = 1, 2, \ldots, n \\ &\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \ , \ j = 1, 2, \ldots, n \\ &x_{ij} \geq 0 \end{aligned} \qquad (2.1)$$

Λόγω της ιδιαίτερης μορφής των περιορισμών του, το προαναφερθέν πρόβλημα αντιμετωπίζεται είτε ως πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού, είτε ως 0-1 πρόβλημα ακέραιου προγραμματισμού. Στην πρώτη περίπτωση ο Ουγγρικός αλγόριθμος (Kuhn, 1955 και 1956) είναι αυτός που χρησιμοποιείται προς επίλυση του προβλήματος.

*ΟΥΓΓΡΙΚΟΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ*

$B_1$. Διαμόρφωσε ένα ισορροπημένο πρόβλημα εκχώρησης δηλαδή το σύνολο των διαθέσιμων πόρων να ισούται με το σύνολο των απαιτούμενων.

$B_2$. Κατασκεύασε τον πίνακα κόστος ευκαιρίας αφαιρώντας το μικρότερο στοιχείο κάθε γραμμής από όλα τα στοιχεία αυτής, οπότε και δημιουργείται τουλάχιστον ένα μηδενικό στοιχείο στην κάθε γραμμή. Αντίστοιχα, αφαιρώντας το μικρότερο στοιχείο κάθε στήλης από όλα τα στοιχεία αυτής δημιουργείται τουλάχιστον ένα μηδενικό στοιχείο στην κάθε στήλη.

$B_3$. Σύμφωνα με το θεώρημα της συμπληρωματικής χαλαρότητας, εκχωρήσεις γίνονται μόνο στα κελιά του πίνακα κόστους ευκαιρίας των οποίων οι τιμές είναι μηδενικές. Συνεπώς, διαμόρφωσε μια εκχώρηση στο μηδενικό κελί κάθε γραμμής η οποία περιέχει μόνο ένα μηδενικό στοιχείο. Ταυτοποίησε αυτήν με ένα τετράγωνο γύρω από το μηδέν του κελιού και διέγραψε όποια μηδενικά στοιχεία της στήλης περιέχονται εντός του τετραγώνου. Αντίστοιχη διαδικασία πράττεται για κάθε στήλη και επανέλαβε τα βήματα αυτά έως ότου καμία εκχώρηση να είναι δυνατή. Εάν πραγματοποιήθηκαν m εκχωρήσεις τότε η διαδικασία σταματά και τα κελιά με τα τετράγωνα υποδεικνύουν τη βέλτιστη εκχώρηση, διαφορετικά αν έγιναν $k<m$ καταχωρήσεις πήγαινε στο βήμα 4.

$B_4$. Καταμέτρησε το πλήθος των μη καλυμμένων μηδενικών σε κάθε γραμμή και στήλη του πίνακα κόστους ευκαιρίας του προβλήματος. Χάραξε μια γραμμή κατά μήκος της γραμμής ή στήλης με το μεγαλύτερο πλήθος μη καλυμμένων μηδενικών και επανέλαβε τα βήματα αυτά έως ότου «καλυφθούν» όλα τα μηδενικά.

$B_5$. Έστω $c_0$ το μικρότερο μη καλυμμένο στοιχείο του πίνακα. Αφαίρεσε το $c_0$ από όλα τα μη καλυμμένα στοιχεία του πίνακα, στη συνέχεια πρόσθεσέ το σε όλα τα στοιχεία του πίνακα που βρίσκονται στην τομή δύο γραμμών κάλυψης και επέστρεψε στο βήμα 3.

Για την επαρκή επίλυσή του έχουν αναπτυχθεί και διάφοροι οι αλγόριθμοι, που χρησιμοποιούν τον πίνακα των αντικειμενικών συντελεστών στη μορφή

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} \ldots \; c_{1j} \ldots \; c_{1n} \\ \vdots \\ c_{i1} \ldots \; c_{ij} \ldots \; c_{in} \\ \vdots \\ c_{n1} \ldots \; c_{nj} \ldots \; c_{nn} \end{pmatrix}$$

όπου, χωρίς περιορισμό της γενικότητας, θεωρείται ότι είναι $c_{ij} \geq 0$.

Μετά την εύρεση της άριστης λύσης, ο αποφασίζων πραγματοποιεί την ανάλυση ευαισθησίας, ώστε να γνωρίζει τις συνέπειες από πιθανές μεταβολές των παραμέτρων του προβλήματος. Δυστυχώς το φαινόμενο του εκφυλισμού που προκύπτει στο πρόβλημα καταμερισμού της εργασίας είναι η ύπαρξη μεγάλου βαθμού εκφυλισμένων λύσεων που με τη σειρά τους αντιστοιχούν σε διαφορετικές άριστες βάσεις. Στη συνέχεια πραγματοποιείται ανάλυση ευαισθησίας για το πρόβλημα (2.1), στη περίπτωση όπου ένας από τους αντικειμενικούς συντελεστές $c_{ij}$ αλλάζει και η μεταβολή αυτή συμβολίζεται με $\Delta c_{ij}$.

*ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΥΑΙΣΘΗΣΙΑΣ ΤΥΠΟΥ ΙΙ*

Έστω $\mathbf{B}^*$ μια από τις βέλτιστες βάσεις του προβλήματος (2.1) με πίνακα αντικειμενικών συντελεστών $\mathbf{C}$. Ορίζεται το σύνολο με τα ζεύγη των δεικτών των θετικών μεταβλητών της βέλτιστης εκχώρησης στην οποία αντιστοιχεί η $\mathbf{B}^*$ ως $\omega^* = \left\{ (i,j) / x_{ij} = 1, (i,j) \in \mathbf{B}^* \right\}$, με βέλτιστη τιμή αντικειμενικής συνάρτησης $\mathbf{C}(\omega^*)$. Στο πρόβλημα (2.1) ο υψηλός βαθμός εκφυλισμού που παρατηρείται, μπορεί να προκαλέσει αλλαγή στις βάσεις $\mathbf{B}^*$, αλλά η άριστη λύση $\omega^*$ μπορεί να παραμείνει αμετάβλητη. Ορίζεται επίσης $\left[ L_{pq}, U_{pq} \right]$ το διάστημα ευαισθησίας τύπου ΙΙ για το $\Delta c_{pq}$ έτσι ώστε η $\omega^*$ να παραμένει βέλτιστη. Επομένως, το παραμετρικοποιημένο μοντέλο του (2.1) προβλήματος διαμορφώνεται ως εξής:

$$\min \; c_{11}x_{11} + \ldots + \left( c_{pq} + \Delta c_{pq} \right) x_{pq} + \ldots + c_{nn}x_{nn}$$

υπό τους περιορισμούς

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \;,\; i = 1, 2, \ldots, n \\ &\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \;,\; j = 1, 2, \ldots, n \qquad (2.2) \\ &x_{ij} \geq 0 \end{aligned}$$

όπου $\Delta c_{pq} \in \left[ L_{pq}, U_{pq} \right]$ και ο πίνακας $\mathbf{D}$ ορίζεται

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} c_{11} \ldots & c_{1q} & \ldots \; c_{1n} \\ \vdots & & \\ c_{p1} \ldots & c_{pq} + \Delta c_{pq} & \ldots \; c_{pn} \\ \vdots & & \\ c_{n1} \ldots & c_{nq} & \ldots \; c_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ορίζουμε τον πίνακα των αντικειμενικών συντελεστών $\mathbf{C}_1$, αντικαθιστώντας τα στοιχεία της γραμμής p και στήλης q του $\mathbf{C}$ από ένα πολύ μεγάλο θετικό αριθμό Μ (Μ$\rightarrow\infty$) εκτός του $c_{pq}$

$$\mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} c_{11} \dots M \dots c_{1n} \\ \vdots \\ M \dots c_{pq} \dots M \\ \vdots \\ c_{n1} \dots M \dots c_{nn} \end{pmatrix}$$

και τον πίνακα των αντικειμενικών συντελεστών $\mathbf{C}_0$, όπου έχει αντικατασταθεί το στοιχείο $c_{pq}$ του πίνακα $\mathbf{C}$ από το Μ

$$\mathbf{C}_0 = \begin{pmatrix} c_{11} \dots c_{1q} \dots c_{1n} \\ \vdots \\ c_{p1} \dots M \dots c_{pn} \\ \vdots \\ c_{n1} \dots c_{nq} \dots c_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ορίζουμε επίσης:

- $\omega$ : κάθε εφικτή λύση του πίνακα $\mathbf{C}$ και/ή $\mathbf{D}$ η οποία ικανοποιεί τους περιορισμούς του (2.1)
- $\Omega$: το σύνολο όλων των εφικτών λύσεων του πίνακα $\mathbf{C}$ και/ή $\mathbf{D}$
- $\omega_{pq}$: κάθε εφικτή λύση του πίνακα $\mathbf{C}$ η οποία περιέχει το στοιχείο $c_{pq}$
- $\omega_{\overline{pq}}$: κάθε εφικτή λύση του πίνακα $\mathbf{C}$ η οποία δεν περιέχει το στοιχείο $c_{pq}$
- $\Omega_{pq}$: υποσύνολο του $\mathbf{\Omega}$ το οποίο περιέχει όλες τις εφικτές λύσεις του πίνακα $\mathbf{C}$ οι οποίες περιέχουν στοιχείο $c_{pq}$
- $\Omega_{\overline{pq}}$: υποσύνολο του $\mathbf{\Omega}$ το οποίο περιέχει τις εφικτές λύσεις του πίνακα $\mathbf{C}$ οι οποίες δεν περιέχουν στοιχείο $c_{pq}$

- $\omega^*$ : η τρέχουσα άριστη εκχώρηση του πίνακα $\mathbf{C}$
- $\omega_1^*$ : η τρέχουσα άριστη εκχώρηση του πίνακα $\mathbf{C}_1$
- $\omega_0^*$ : η τρέχουσα άριστη εκχώρηση του πίνακα $\mathbf{C}_0$
- $\mathbf{C}(\omega)$ : η αντικειμενική τιμή του πίνακα $\mathbf{C}$ για τη λύση $\omega$. Ανάλογα ορίζονται και οι τιμές $\mathbf{C}_0(\omega_0^*)$, $\mathbf{D}(\omega)$ κ.λπ.

Στη συνέχεια αναφέρουμε τις ακόλουθες σημαντικές προτάσεις [5] με βάση τους ανωτέρω συμβολισμούς, οι οποίες αποδεικνύονται χρήσιμες στην προσπάθεια εύρεσης των διαστημάτων ευαισθησίας.

Πρόταση 2.1 : $\Omega_{pq} \cap \Omega_{\overline{pq}} = \varnothing$, $\Omega_{pq} \cup \Omega_{\overline{pq}} = \Omega$, δηλαδή τα σύνολα $\Omega_{pq}$ και $\Omega_{\overline{pq}}$ αποτελούν μία διαμέριση του $\Omega$.

Πρόταση 2.2 : Αν ισχύει $\mathbf{D}\left(\omega^*\right) \leq \mathbf{D}\left(\omega_{pq}\right)$, $\forall \omega_{pq} \in \Omega_{pq}$ και $\mathbf{D}\left(\omega^*\right) \leq \mathbf{D}\left(\omega_{\overline{pq}}\right)$, $\forall \omega_{\overline{pq}} \in \Omega_{\overline{pq}}$ τότε η λύση $\omega^*$ είναι άριστη λύση του πίνακα $\mathbf{D}$.

Πρόταση 2.3 : Αν $\omega_1$ είναι μία εφικτή λύση του πίνακα $\mathbf{C}_1$, τότε $\left(p,q\right) \in \omega_1$. Αν $\omega_0$ είναι μία εφικτή λύση του πίνακα $\mathbf{C}_0$, τότε $\left(p,q\right) \notin \omega_0$.

Πρόταση 2.4 : Υποθέτουμε ότι η $\omega$ είναι μία οποιαδήποτε εφικτή λύση του πίνακα $\mathbf{C}$ ή $\mathbf{D}$,

(α) Αν $\left(p,q\right) \in \omega$, τότε $\mathbf{C}(\omega) + \Delta c_{pq} = \mathbf{C}_1(\omega) + \Delta c_{pq} = \mathbf{D}(\omega)$.

(β) Αν $(p,q)\notin\omega$, τότε $\mathbf{C}(\omega)=\mathbf{C}_0(\omega)=\mathbf{D}(\omega)$.

Πρόταση 2.5 : Οι τιμές $\mathbf{C}(\omega^*)$, $\mathbf{C}_0(\omega_0^*)$, $\mathbf{C}_1(\omega_1^*)$ είναι οι βέλτιστες τιμές των αντικειμενικών συναρτήσεων των προβλημάτων καταμερισμού εργασίας με πίνακες αντικειμενικών συντελεστών $\mathbf{C}$, $\mathbf{C}_0$, $\mathbf{C}_1$ αντίστοιχα.

Τα επόμενα λήμματα αποτελούν τον τρόπο εύρεσης των διαστημάτων ευαισθησίας για το $\Delta c_{pq}$ [5].

Λήμμα 2.1 : Εάν $(p,q)\in\omega^*$ και $\omega_0^*$ είναι μία άριστη λύση για τον πίνακα $\mathbf{C}_0$, τότε, το διάστημα ευαισθησίας του $\Delta c_{pq}$ τύπου II είναι $\left[L_{pq},U_{pq}\right]=\left(-\infty,\mathbf{C}_0(\omega_0^*)-\mathbf{C}(\omega^*)\right]$. Δηλαδή η $\omega^*$ είναι άριστη λύση του $\mathbf{D}$ αν και μόνο αν $\Delta c_{pq}\in\left(-\infty,\mathbf{C}_0(\omega_0^*)-\mathbf{C}(\omega^*)\right]$.

*Απόδειξη*

Έστω ότι $\Delta c_{pq}\le\mathbf{C}_0(\omega_0^*)-\mathbf{C}(\omega^*)$.

Εφ' όσον $(p,q)\in\omega^*$, από την πρόταση 2.4 προκύπτει ότι $\mathbf{D}(\omega^*)=\mathbf{C}(\omega^*)+\Delta c_{pq}$. Είναι

$$\mathbf{D}(\omega_{pq})-\mathbf{D}(\omega^*)=\mathbf{C}(\omega_{pq})+\Delta c_{pq}-\mathbf{C}(\omega^*)-\Delta c_{pq}=\mathbf{C}(\omega_{pq})-\mathbf{C}(\omega^*)\ge 0 \qquad (2.3)$$

και

$$\begin{aligned}\mathbf{D}(\omega_{\overline{pq}})-\mathbf{D}(\omega^*)&=\mathbf{C}_0(\omega_{\overline{pq}})-\mathbf{C}(\omega^*)-\Delta c_{pq}\\ &\ge\mathbf{C}_0(\omega_{\overline{pq}})-\mathbf{C}(\omega^*)-\mathbf{C}_0(\omega_0^*)+\mathbf{C}(\omega^*)\\ &=\mathbf{C}_0(\omega_{\overline{pq}})-\mathbf{C}_0(\omega_0^*)\ge 0.\end{aligned} \qquad (2.4)$$

Επομένως, από την πρόταση 2.2 και τις σχέσεις (2.3) και (2.4), συμπεραίνουμε ότι η $\omega^*$ είναι άριστη λύση του $\mathbf{D}$.

Επίσης, εάν $\Delta c_{pq} \succ \mathbf{C}_0(\omega_0^*) - \mathbf{C}(\omega^*)$, τότε είναι

$$\begin{aligned}\mathbf{D}(\omega^*) = \mathbf{C}(\omega^*) + \Delta c_{pq} &\succ \mathbf{C}(\omega^*) + \mathbf{C}_0(\omega_0^*) - \mathbf{C}(\omega^*)\\ &= \mathbf{C}_0(\omega_0^*) = \mathbf{D}(\omega_0^*)\end{aligned}$$

Συνεπώς, αφού $\mathbf{D}(\omega_0^*) \prec \mathbf{D}\left(\omega^*\right)$, η $\omega_0^*$ είναι καλύτερη άριστη λύση από την $\omega^*$, οπότε η $\omega^*$ δεν είναι άριστη λύση του πίνακα $\mathbf{D}$.

■

Επειδή κάθε στοιχείο του πίνακα $\mathbf{C}_0$ είναι μεγαλύτερο ή ίσο του αντίστοιχού του του πίνακα $\mathbf{C}$, είναι προφανές ότι $\mathbf{C}_0(\omega_0^*) - \mathbf{C}(\omega^*) \geq 0$ δηλαδή $U_{pq} \geq 0$. Εάν $U_{pq} = 0$, τότε είναι και $\mathbf{C}_0(\omega_0^*) = \mathbf{C}(\omega^*)$, οπότε υπάρχει τουλάχιστον μία άριστη λύση του $\mathbf{C}_0$, $\omega^{\neq}$, με $(p,q) \notin \omega^{\neq}$ η οποία είναι και άριστη λύση του $\mathbf{C}$. Άμεση συνέπεια αυτού του γεγονότος είναι το παρακάτω πόρισμα.

Πόρισμα 2.1 : Αν $(p,q) \in \omega^*$ και $U_{pq} \succ 0$, τότε το $(p,q)$ ανήκει σε κάθε άριστη λύση του πίνακα $\mathbf{C}$. Αντίθετα, αν $U_{pq} = 0$, τότε υπάρχει τουλάχιστον άλλη μία βέλτιστη λύση $\omega^{\neq}$ του $\mathbf{C}$, τέτοια ώστε $(p,q) \notin \omega^{\neq}$. Η $\omega_0^*$ είναι μία τέτοιου είδους λύση.

Λήμμα 2.2 : Αν $(p,q) \notin \omega^*$ και $\omega_1^*$ είναι μία άριστη λύση του πίνακα $\mathbf{C}_1$, τότε, το διάστημα ευαισθησίας του $\Delta c_{pq}$ τύπου II είναι $\left[L_{pq}, U_{pq}\right] = \left[\mathbf{C}(\omega^*) - \mathbf{C}_1(\omega_1^*), \infty\right)$. Δηλαδή η $\omega^*$ είναι άριστη λύση του $\mathbf{D}$ αν και μόνο αν $\Delta c_{pq} \in \left[\mathbf{C}(\omega^*) - \mathbf{C}_1(\omega_1^*), \infty\right)$.

*Απόδειξη*

Έστω $\Delta c_{pq} \geq \mathbf{C}(\omega^*) - \mathbf{C}_1(\omega_1^*)$.

Αφού $(p,q) \notin \omega^*$, από την 2.4 (b) πρόταση προκύπτει ότι $\mathbf{D}(\omega^*) = \mathbf{C}(\omega^*)$. Επιπλέον είναι

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\omega_{pq}) - \mathbf{D}(\omega^*) &= \mathbf{C}_1(\omega_{pq}) + \Delta c_{pq} - \mathbf{C}(\omega^*) \\ &\geq \mathbf{C}_1(\omega_{pq}) + \mathbf{C}(\omega^*) - \mathbf{C}_1(\omega_{pq}) - \mathbf{C}(\omega^*) \\ &= \mathbf{C}_1(\omega_{pq}) - \mathbf{C}_1(\omega_1^*) \geq 0. \end{aligned} \tag{2.6}$$

και

$$\mathbf{D}(\omega_{\overline{pq}}) - \mathbf{D}(\omega^*) = \mathbf{C}(\omega_{\overline{pq}}) - \mathbf{C}(\omega^*) \geq 0. \tag{2.7}$$

Από την πρόταση (2.2) και τις σχέσεις (2.6), (2.7) συμπεραίνουμε ότι η $\omega^*$ είναι άριστη λύση του πίνακα $\mathbf{D}$.

Αντίστροφα, εάν $\Delta c_{pq} \prec \mathbf{C}(\omega^*) - \mathbf{C}_1(\omega_1^*)$, τότε

$$\mathbf{D}(\omega^*) = \mathbf{C}(\omega^*) \succ \mathbf{C}_1(\omega_1^*) + \Delta c_{pq} = \mathbf{D}(\omega_1^*). \tag{2.8}$$

δηλαδή είναι $\mathbf{D}(\omega_1^*) \prec \mathbf{D}(\omega^*)$ που συνεπάγεται ότι η $\boldsymbol{\omega}^*$ δεν είναι πλέον η άριστη λύση του $\mathbf{D}$.

■

Πράττοντας με τον ανάλογο συλλογισμό που χρησιμοποιήσαμε στο πόρισμα 2.1, εφ' όσον κάθε στοιχείο του πίνακα $\mathbf{C}$ είναι μικρότερο ή ίσο από το αντίστοιχο στοιχείο του πίνακα $\mathbf{C}_1$ είναι προφανές ότι $C(\boldsymbol{\omega}^*) - C_1(\boldsymbol{\omega}_1^*) \leq 0$, δηλαδή $L_{pq} \leq 0$. Επομένως, καταλήγουμε στο ακόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 2.2 : Αν $(p,q) \notin \omega^*$ και $L_{pq} \prec 0$, τότε το $(p,q)$ δεν συμμετέχει σε καμία άριστη λύση του πίνακα $\mathbf{C}$. Αντιθέτως, εάν $L_{pq} = 0$, τότε υπάρχει τουλάχιστον μια άριστη λύση του πίνακα $\mathbf{C}$, $\omega^{\neq}$ τέτοια ώστε $(p,q)\in\omega^{\neq}$. Μια τέτοια άριστη λύση είναι η $\omega_1^*$.

Στη περίπτωση όπου το πρόβλημα έχει εναλλακτικές άριστες λύσεις, τα λήμματα (2.1) και (2.2) είναι κατάλληλα για την εύρεση ευρών ευαισθησίας τύπου $\mathrm{II}$. Από την άλλη μεριά όμως δείχνουν ότι δεν είναι μοναδικά, δηλαδή αν αλλάξει η άριστη λύση μπορεί να αλλάξει και το διάστημα ευαισθησίας τύπου $\mathrm{II}$. Αν και μελετάμε τη περίπτωση όπου μια $c_{ij}$ παράμετρος αλλάζει υπάρχουν οι περιπτώσεις όπου όλα τα στοιχεία της βέλτιστης βάσης μπορούν να μεταβληθούν ταυτόχρονα και η τρέχουσα άριστη λύση να συνεχίσει να είναι άριστη. Αφού βρούμε τα διαστήματα ευαισθησίας τύπου $\mathrm{II}$, εξετάζεται η περίπτωση όπου το $\Delta c_{pq}$ ξεπερνάει τα όρια του αντίστοιχου διαστήματος. Εφ' όσον η αρχική άριστη λύση παύει να είναι βέλτιστη με τη βοήθεια των παρακάτω λημμάτων υπολογίζεται η νέα.

Λήμμα 2.3 : Έστω $\omega^*$ είναι μια άριστη λύση του πίνακα $\mathbf{C}$. Εάν $(p,q)\in\boldsymbol{\omega}^*$ και $\Delta c_{pq}\succ U_{pq}$, τότε η άριστη λύση του πίνακα $\mathbf{D}$ θα είναι η $\omega_0^*$ δηλαδή η άριστη λύση του πίνακα $\mathbf{C}_0$, με βέλτιστη αντικειμενική τιμή της $\mathbf{C}_0(\omega_0^*)$. Με άλλα λόγια, αντικαθιστούμε με ένα πολύ μεγάλο M ($M\to\infty$) το $c_{pq}+\Delta c_{pq}$, όταν $\Delta c_{pq}\succ U_{pq}$.

*Απόδειξη*

Βάση του λήμματος 2.1, είναι

$$\Delta c_{pq}\succ U_{pq}=\mathbf{C}_0(\omega_0^*)-\mathbf{C}(\omega^*)$$

από το οποίο προκύπτει ότι $\mathbf{C}_0(\omega_0^*)\prec\mathbf{C}(\omega^*)+\Delta c_{pq}$. Επομένως, ισχύει (α) $\mathbf{D}(\omega_0^*) = \mathbf{C}_0(\omega_0^*) \prec \mathbf{C}(\omega^*) + \Delta c_{pq} \leq \mathbf{C}(\omega_{pq}) + \Delta c_{pq} = \mathbf{D}(\omega_{pq})$ (2.9)

και

(β) $\mathbf{D}(\omega_0^*) = \mathbf{C}_0(\omega_0^*) \leq \mathbf{C}_0(\omega_{\overline{pq}}) = \mathbf{C}(\omega_{\overline{pq}}) = \mathbf{D}(\omega_{\overline{pq}})$. (2.10)

Σύμφωνα με τις σχέσεις (2.9), (2.10) και την πρόταση 2.2 η $\omega_0^*$ είναι άριστη λύση του πίνακα $\mathbf{D}$, με βέλτιστη αντικειμενική τιμή $\mathbf{C}_0(\omega_0^*)$.

■

Λήμμα 2.4 : Έστω $\omega^*$ είναι μια άριστη λύση του πίνακα $\mathbf{C}$. Εάν $(p,q) \notin \omega^*$ και $\Delta c_{pq} \prec L_{pq}$ τότε, η άριστη λύση του πίνακα $\mathbf{D}$ θα είναι η $\omega_1^*$, δηλαδή η άριστη λύση του πίνακα $\mathbf{C}_1$, με βέλτιστη αντικειμενική τιμή ίση με $\mathbf{C}_1(\omega_1^*) + \Delta c_{pq}$.

*Απόδειξη*

Είναι $\Delta c_{pq} \prec L_{pq} \Rightarrow \Delta c_{pq} \prec \mathbf{C}(\omega^*) - \mathbf{C}_1(\omega_1^*)$ και σύμφωνα με την πρόταση 2.3 ισχύει και $(p,q) \in \omega_1^*$. Επομένως,

$$\mathbf{D}(\omega_1^*) = \mathbf{C}(\omega_1^*) + \Delta c_{pq} \leq \mathbf{C}(\omega_{pq}) + \Delta c_{pq} = \mathbf{D}(\omega_{pq}) \quad (2.11)$$

και

$$\mathbf{D}(\omega_1^*) = \mathbf{C}_1(\omega_1^*) + \Delta c_{pq} \prec \mathbf{C}(\omega^*) \leq \mathbf{C}(\omega_{\overline{pq}}) = \mathbf{D}(\omega_{\overline{pq}}) \quad (2.12)$$

Επομένως, η $\omega_1^*$ είναι άριστη λύση του $\mathbf{D}$.

Συνοψίζοντας, η διαδικασία εύρεσης του διαστήματος ευαισθησίας τύπου II περιγράφεται, ως εξής:

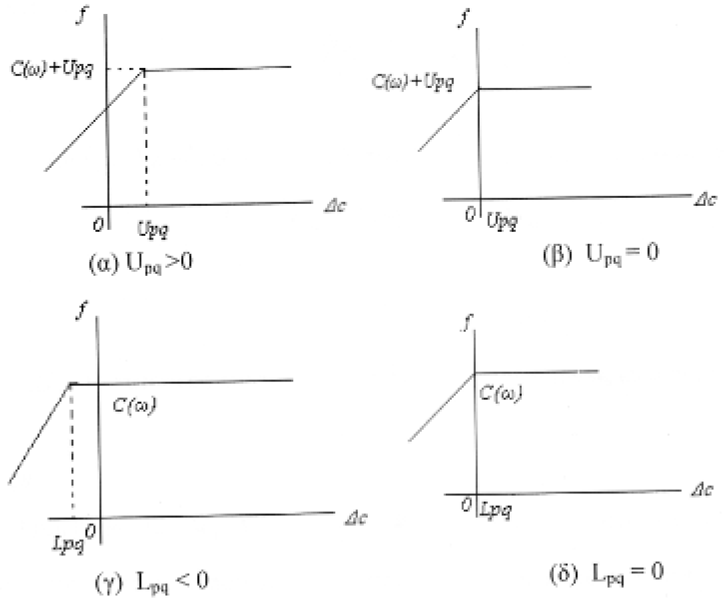
1. Λύνουμε το ζητούμενο πρόβλημα καταμερισμού εργασίας (εκχώρησης) με τον πίνακα $\mathbf{C}$. Προσδιορίζουμε την άριστη λύση $\omega^*$ και την άριστη τιμή $\mathbf{C}(\omega^*)$.

2. Εάν $(p,q)\in\omega^*$, τότε $L_{pq}\to-\infty$ και το $U_{pq}$ ισούται με την διαφορά των βέλτιστων τιμών των πινάκων $\mathbf{C}_0$ και $\mathbf{C}$, διαφορετικά $U_{pq}\to\infty$ και το $L_{pq}$ ισούται με την διαφορά των βέλτιστων τιμών των $\mathbf{C}_1$ και $\mathbf{C}$.

*ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΥΑΙΣΘΗΣΙΑΣ ΤΥΠΟΥ III*

Σύμφωνα με τον ορισμό που δόθηκε σε προηγούμενη παράγραφο, η ανάλυση ευαισθησίας τύπου III προσδιορίζει τις τιμές των παραμέτρων του μοντέλου, για τις οποίες ο ρυθμός μεταβολής της αντικειμενικής συνάρτησης είναι ο ίδιος. Ορίζεται με $f_{pq}$ η αντικειμενική συνάρτηση όταν έχουμε μία μεταβολή $\Delta c_{pq}$, η οποία είναι μία τμηματικά γραμμική, κυρτή και αύξουσα συνάρτηση. Το γράφημά της αποτελείται από διάφορα ευθύγραμμα τμήματα με διαφορετικές κλίσεις. Η ανάλυση ευαισθησίας τύπου III χρησιμοποιείται για να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία η $f_{pq}$ είναι γραμμική και περιλαμβάνεται η μεταβολή $\Delta c_{pq}=0$, όπως συμβαίνει στα γραφήματα (α) και (γ) της εικόνας 2.1. Μια ιδιαίτερη περίπτωση είναι όταν συμβαίνει για $\Delta c_{pq}=0$ να αλλάζει η κλίση της $f_{pq}$, όπως φαίνεται στα γραφήματα (β) και (δ) της εικόνας 2.1. Στην περίπτωση αυτή, για την οποία ορίζουμε $\left[L_{pq}',U_{pq}'\right]=\left[0,0\right]$, οι αρνητικές και οι θετικές τιμές της μεταβολής $\Delta c_{pq}$, δηλαδή η αύξηση ή η μείωση του $c_{pq}$, έχουν ως αποτέλεσμα διαφορετικούς ρυθμούς μεταβολής.

**Εικόνα 2.1**




Η ανάλυση ευαισθησίας τύπου III αντιστοιχεί πρακτικά στην εύρεση της αντικειμενικής συνάρτησης $f_{pq}$. Για το λόγο αυτό παρατίθεται ένα λήμμα για την εύρεση της $f_{pq}$, από την οποία εξασφαλίζονται τα διαστήματα ευαισθησίας.

Λήμμα 2.5 : Έστω $\omega^*$ η άριστη λύση του πίνακα $\mathbf{C}$ και $f_{pq}$ η αντικειμενική συνάρτηση η οποία αντιπροσωπεύει τις βέλτιστες τιμές του πίνακα $\mathbf{D}$ συναρτήσει του $\Delta c_{pq}$. Τότε

(1) Αν $(p,q) \in \omega^*$, τότε

$$f_{pq} = \begin{cases} \Delta c_{pq} + \mathbf{C}(\omega^*), & \Delta c_{pq} \le U_{pq} \\ \mathbf{C}(\omega^*) + U_{pq}, & \Delta c_{pq} \ge U_{pq} \end{cases}$$

(2) Αν $(p,q) \notin \omega^*$, τότε

$$f_{pq} = \begin{cases} \Delta c_{pq} + \mathbf{C}(\omega^*) - L_{pq}, & \Delta c_{pq} \le L_{pq} \\ \mathbf{C}(\omega^*) \quad\quad\quad\quad\quad, & \Delta c_{pq} \ge L_{pq} \end{cases}$$

όπου $L_{pq}$ και $U_{pq}$ είναι το κατώτερο και το ανώτερο άκρο του διαστήματος ευαισθησίας τύπου ΙΙ του $\Delta c_{pq}$.

*Απόδειξη*

Αν $(p,q) \in \omega^*$ και $\Delta c_{pq} \le U_{pq}$, τότε σύμφωνα με το Λήμμα 2.1 και εξ' ορισμού του διαστήματος ευαισθησίας τύπου ΙΙ, προκύπτει ότι η $\omega^*$ παραμένει άριστη λύση του πίνακα $\mathbf{D}$, δηλαδή

$$f_{pq} = \mathbf{D}(\omega^*) = \mathbf{C}(\omega^*) + \Delta c_{pq} \tag{2.13}$$

Εάν $(p,q) \in \omega^*$ και $\Delta c_{pq} \succ U_{pq}$, τότε σύμφωνα με το Λήμμα 2.3 η $\omega_0^*$ είναι άριστη λύση του πίνακα $\mathbf{D}$ και

$$f_{pq} = \mathbf{D}(\omega_0^*) = \mathbf{C}_0(\omega_0^*) = \mathbf{C}(\omega^*) + U_{pq} \tag{2.14}$$

Εάν $(p,q) \notin \omega^*$ και $\Delta c_{pq} \prec L_{pq}$, τότε σύμφωνα με το Λήμμα 2.4, η $\omega_1^*$ είναι άριστη λύση του πίνακα $\mathbf{D}$, οπότε

$$f_{pq} = \mathbf{D}(\omega_1^*) = \mathbf{C}_1(\omega_1^*) + \Delta c_{pq} = \mathbf{C}(\omega^*) - L_{pq} + \Delta c_{pq} \tag{2.15}$$

Εάν $(p,q) \notin \omega^*$ και $\Delta c_{pq} \ge L_{pq}$, τότε σύμφωνα με το Λήμμα 2.2 και εξ' ορισμού του διαστήματος ευαισθησίας τύπου ΙΙ, η $\omega^*$ παραμένει άριστη λύση του πίνακα $\mathbf{D}$, επομένως ισχύει

$$f_{pq} = \mathbf{D}(\omega^*) = \mathbf{C}(\omega^*).$$

■

Εφαρμόζοντας τα Λήμματα 2.1, 2.2 και 2.5, σε συνδυασμό με τον ορισμό των διαστημάτων ευαισθησίας τύπου ΙΙΙ, προκύπτει το επόμενο Λήμμα 2.6.

Λήμμα 2.6 : Έστω $\omega^*$ είναι η άριστη λύση του πίνακα $\mathbf{C}$. Επιπλέον, ας είναι $\mathbf{C}(\omega^*)$, $\mathbf{C}_0(\omega_0^*)$, $\mathbf{C}_1(\omega_1^*)$ οι βέλτιστες τιμές των πινάκων $\mathbf{C}$, $\mathbf{C}_0$, $\mathbf{C}_1$ αντίστοιχα.

Τότε

(1) Αν $(p,q) \in \omega^*$,

a) και $U_{pq} = \mathbf{C}_0(\omega_0^*) - \mathbf{C}(\omega^*) \succ 0$, τότε το διάστημα ευαισθησίας τύπου III είναι το $\left[L_{pq}', U_{pq}'\right] = \left(-\infty, \mathbf{C}_0(\omega_0^*) - \mathbf{C}(\omega^*)\right]$, το οποίο ταυτίζεται με το διάστημα ευαισθησίας τύπου II.

b) και $U_{pq} = \mathbf{C}_0(\omega_0^*) - \mathbf{C}(\omega^*) = 0$, τότε το διάστημα ευαισθησίας τύπου III είναι το $\left[L_{pq}', U_{pq}'\right] = [0,0]$.

(2) Αν $(p,q) \notin \omega^*$,

a) και $L_{pq} = \mathbf{C}(\omega^*) - \mathbf{C}_1(\omega_1^*) \prec 0$, τότε το διάστημα ευαισθησίας τύπου III είναι το $\left[L_{pq}', U_{pq}'\right] = \left[\mathbf{C}(\omega^*) - \mathbf{C}_1(\omega_1^*), \infty\right)$, το οποίο είναι ίδιο με το διάστημα ευαισθησίας τύπου II.

a) και $L_{pq} = \mathbf{C}(\omega^*) - \mathbf{C}_1(\omega_1^*) = 0$, τότε το διάστημα ευαισθησίας τύπου III είναι το $\left[L_{pq}', U_{pq}'\right] = [0,0]$.

Σύμφωνα με το Λήμμα 2.6 φαίνεται ότι τα διαστήματα ευαισθησίας τύπου III υπολογίζονται είτε με χρήση των διαστημάτων ευαισθησίας τύπου απευθείας II, είτε απευθείας από τις τιμές $C(\boldsymbol{\omega}^*)$, $C_0(\boldsymbol{\omega}_0^*)$ και $C_1(\boldsymbol{\omega}_1^*)$. Επίσης, αν το σημείο για το οποίο ισχύει $\Delta c_{pq} = 0$, τα διαστήματα ευαισθησίας τύπου II και III ταυτίζονται. Αντίθετα, αν στο σημείο με $\Delta c_{pq} = 0$, η κλίση της $f_{pq}$ αλλάζει, τότε το διάστημα ευαισθησίας τύπου

ΙΙ εξαρτάται από την άριστη λύση $\omega^*$ και ισούται με ή $\left[0,U_{pq}\right]$. Συγκεκριμένα, στην περίπτωση αυτή, από το Λήμμα 2.1 και το Πόρισμα 2.2 έχουμε ότι το διάστημα ευαισθησίας τύπου ΙΙ ισούται με $\left[L_{pq},0\right]$ αν $(p,q)\in\omega^*$, ενώ σύμφωνα με το Λήμμα 2.2 και το Πόρισμα 2.2 το διάστημα ευαισθησίας τύπου ΙΙ ισούται με $\left[0,U_{pq}\right]$ αν $(p,q)\notin\omega^*$. Οι ιδιότητες αυτές που δίνουν το διάστημα ευαισθησίας τύπου ΙΙ για μία συγκεκριμένη άριστη λύση του προβλήματος καταμερισμού εργασίας συνοψίζονται στο παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 2.7 : Έστω $\omega^*$ είναι η άριστη λύση του πίνακα $\mathbf{C}$. Εάν τα διαστήματα ευαισθησίας τύπου ΙΙΙ του προβλήματος καταμερισμού της εργασίας είναι γνωστά, τότε τα διαστήματα ευαισθησίας τύπου ΙΙ είναι τα εξής:

(1) εάν $\left[L_{pq}',U_{pq}'\right]\neq[0,0]$, τότε το διάστημα ευαισθησίας τύπου ΙΙ είναι $\left[L_{pq},U_{pq}\right]=\left[L_{pq}',U_{pq}'\right]$,

(2) εάν $\left[L_{pq}',U_{pq}'\right]=[0,0]$ τότε είναι αντίστοιχα,

$$\left[L_{pq},U_{pq}\right]=\begin{cases}(-\infty,0), & (p,q)\in\omega^* \\ [0,\infty)\ , & (p,q)\notin\omega^*\end{cases}$$

Εάν το πρόβλημα έχει πολλαπλές άριστες λύσεις, τότε υπολογίζονται τα διαστήματα ευαισθησίας τύπου ΙΙΙ, που είναι ανεξάρτητα από την άριστη λύση και σύμφωνα με το Λήμμα 2.7, υπολογίζοντα τα διαστήματα ευαισθησίας τύπου ΙΙΙ της κάθε βέλτιστης λύσης ξεχωριστά.

## 2.3 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Στη συνέχεια παρατίθεται ένα αριθμητικό παράδειγμα καταμερισμού εργασίας.

Έστω $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 6 & 2 & 4 \\ 9 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ ο πίνακας αντικειμενικών συντελεστών, $\omega^* = \{(1,1),(2,3),(3,2)\}$ η άριστη λύση αυτού και $\mathbf{C}(\omega^*) = 8$ η βέλτιστη αντικειμενική τιμή που προκύπτει. Ας είναι $\Delta c_{11}$ και $\Delta c_{21}$ οι μεταβολές των αντικειμενικών συντελεστών $c_{11}$ και $c_{21}$ αντίστοιχα, για τις οποίες θα υπολογισθούν τα διαστήματα ευαισθησίας τύπου II.

Το $(1,1) \in \omega^*$, οπότε σύμφωνα με το Λήμμα 2.1, το διάστημα ευαισθησίας για το $\Delta c_{11}$ είναι το $[L_{11}, U_{11}] = \left(-\infty, \mathbf{C}_0^{(1,1)}(\omega_0^*) - \mathbf{C}(\omega^*)\right]$, όπου $\mathbf{C}_0^{(1,1)} = \begin{pmatrix} M & 3 & 6 \\ 6 & 2 & 4 \\ 9 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ και $\omega_0^* = \{(1,3),(2,1),(3,2)\}$ είναι η άριστη λύση που αντιστοιχεί στον $\mathbf{C}_0^{(1,1)}$. Επομένως $L_{11} = -\infty$ και $U_{11} = \mathbf{C}_0^{(1,1)}(\omega_0^*) - \mathbf{C}(\omega^*) = 14 - 8 = 6$. Αν $\Delta c_{11} \succ 6$, τότε, σύμφωνα με το Λήμμα 2.3, η άριστη λύση θα είναι η $\omega_0^*$, με βέλτιστη αντικειμενική τιμή 14.

Το $(2,1) \notin \omega^*$, οπότε σύμφωνα με το Λήμμα 2.2, το διάστημα ευαισθησίας για το $\Delta c_{21}$ είναι το $[L_{21}, U_{21}] = \left[\mathbf{C}(\omega^*) - \mathbf{C}_1^{(2,1)}(\omega_1^*), \infty\right)$, όπου $\mathbf{C}_1^{(2,1)} = \begin{pmatrix} M & 3 & 6 \\ 6 & M & M \\ M & 2 & 7 \end{pmatrix}$ και $\omega_1^* = \{(1,3),(2,1),(3,2)\}$ η άριστη λύση που αντιστοιχεί στον πίνακα $\mathbf{C}_1^{(2,1)}$. Επομένως $U_{21} = \infty$ και $\mathbf{C}(\omega^*) - \mathbf{C}_1^{(2,1)}(\omega_1^*) = 8 - 14 = -6$. Αν $\Delta c_{21} \prec -6$, τότε σύμφωνα με το Λήμμα 2.4, η άριστη λύση θα είναι η $\omega_1^*$ με βέλτιστη αντικειμενική τιμή $14 + \Delta c_{21}$.

## 2.4 ΕΚΦΥΛΙΣΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ-ΔΥΪΚΕΣ ΤΙΜΕΣ

Όπως ήδη έχει αναφερθεί, το φαινόμενο του εκφυλισμού παρατηρείται συχνά στο πρόβλημα καταμερισμού της εργασίας. Το φαινόμενο αυτό επηρεάζει την τιμή των δυϊκών τιμών και διαφοροποιεί τη σημασία τους.

Παρακάτω παρατίθενται δύο σύγχρονες και ολοκληρωμένες προτάσεις προς σωστή ερμηνεία των δυϊκών μεταβλητών, οι οποίες (όπως και άλλες προτάσεις που έχουν γίνει για αυτό το σκοπό) μιλάνε για αριστερές και δεξιές δυϊκές τιμές ανάλογα με το αν αυξάνονται ή μειώνονται τα δεξιά μέλη των αντίστοιχων περιορισμών.

Βασικοί χρήσιμοι συμβολισμοί είναι:

- $\mathbf{x_B} = \left(x_{B_1}, x_{B_2}, \ldots, x_{B_n}\right)$ η άριστη λύση του προβλήματος
- $T = \left\{ i / x_{B_i} = 0 \right\}$ το σύνολο των δεικτών που αντιστοιχούν στις μηδενικές βασικές μεταβλητές
- $p_i$ η δυϊκή τιμή που αντιστοιχεί στον i περιορισμό
- $p_i^+$ η δυϊκή τιμή του i περιορισμού στην περίπτωση που το δεξιό μέλος του αντίστοιχου περιορισμού αυξηθεί κατά μία μονάδα
- $p_i^-$ η δυϊκή τιμή του i περιορισμού στην περίπτωση που το δεξιό μέλος του αντίστοιχου περιορισμού ελαττωθεί κατά μία μονάδα

Στην περίπτωση μη εκφυλισμένων λύσεων $p_i = p_i^+ = p_i^-$ .

Η πρώτη πρόταση είναι του Akgul [6], ο οποίος εισάγει ως αντικειμενική συνάρτηση την γνωστή

$$F\left(b\right) = \max\left\{ \mathbf{c}^T \mathbf{x} \,/\, A\mathbf{x} = b, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \right\} \qquad (2.17)$$

η οποία είναι συνεχής, τμηματικά γραμμική και κυρτή. Η παράγωγος της F στο b κατά τη διεύθυνση ενός διανύσματος **u** ορίζεται ως εξής:

$$D_u F(b) = \lim_{t \to o^+} \frac{F(b+tu)}{t} \tag{2.18}$$

και συμβολίζονται με $p_u^+ = D_u F(b)$ και $p_u^- = -D(-u)F(b)$, όπου ο Akgul θεωρεί την πιθανότητα ο αποφασίζων να αντιμετωπίζει αλλαγές που αφορούν ένα συνδυασμό διαφόρων πόρων, ο οποίος αντιπροσωπεύεται από το διάνυσμα u.

Οι δυϊκές τιμές $p_i^+$ και $p_i^-$ ορίζονται αντιστοίχως ως $p_i^+ = D_{e^i} F(b)$ και $p_i^- = D_{(-e^i)} F(b)$ όπου $\mathbf{u} = \mathbf{e}^i$ και $\mathbf{u} = -\mathbf{e}^i$ αντίστοιχα. Οι $p_i^+$ και $p_i^-$ τιμές ερμηνεύονται ως μέγιστη και ελάχιστη αγοραστική αξία του πόρου i.

Η δεύτερη πρόταση έγινε από τον G. Knolmayer [7]. Ορίζεται:

- $\underline{b_r}$ το κατώτερο φράγμα του διαστήματος ευαισθησίας για το δεξιό μέλος $b_r$ του r περιορισμού
- $\overline{b_r}$ το ανώτερο φράγμα του διαστήματος ευαισθησίας για το δεξιό μέλος $b_r$ του r περιορισμού.

Εάν $\underline{b_r} \prec b_r \prec \overline{b_r}$ έχουμε μη εκφυλισμένες λύσεις. Αντιθέτως, στην περίπτωση του εκφυλισμού υπάρχουν τρία πιθανά ενδεχόμενα:

- $\underline{b_r} = b_r \prec \overline{b_r}$
- $\underline{b_r} \prec b_r = \overline{b_r}$
- $\underline{b_r} = b_r = \overline{b_r}$

Έστω $x_{n+r}$ είναι η r-οστή χαλαρή μεταβλητή του πρωτεύοντος και $y_{i,n+r}$ το στοιχείο της i γραμμής και της n+r στήλης του τελικού Simplex tableau. Τότε η $w_r$ δυϊκή μεταβλητή μπορεί να ερμηνευτεί ως ακολούθως

a) αν ισχύει $y_{i,n+r} = 0, \ \forall i \in T$ , όπως στην μη εκφυλισμένη περίπτωση

b) αν ισχύει $y_{i,n+r} \geq 0, \ \forall i \in T$ και $y_{i,n+r} \succ 0$ , για ένα τουλάχιστον $i \in T$ , όπως η $p_r^+$

c) αν ισχύει $y_{i,n+r} \leq 0, \ \forall i \in T$ και $y_{i,n+r} \prec 0$ , για ένα τουλάχιστον $i \in T$ , όπως η $p_r^-$

d) αν $k \in T$ και $l \in T$ , τέτοια ώστε $y_{k,n+r} * y_{l,n+r} \prec 0$ , στην περίπτωση αυτή δεν υπάρχει δυστυχώς κάποια ερμηνεία.

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ


[1] T. Koltai, T. Terklay, The difference between the managerial and mathematical interpretation of sensitivity analysis results in linear programming, International Journal of Production Economics 65 (2000) 257-274.

[2] T. Gal, Linear Programming 2: Degeneracy graphs, in: T. Gal, H.J. Grennberg (Eds), Advances in Sensitivity Analysis and Parametric Programming, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 1997.

[3] T. Gal, Post-optimal Analyses, Parametric Programming, and Related Topics: Degeneracy, Multi-criteria Decision-Making, and Redundancy, second ed., W. deGruyter, Berlin, 1995.

[4] B. Jansen, J.J. de Jong, C. Roos, T. Terklay, Sensitivity analysis in linear programming: just be careful!, European Journal of Operational Research 101 (1997) 15-28.

[5] Chi-Jen Lin, Ue-Pyng Wen, Sensitivity analysis of the optimal assignment, European Journal of Operational Research 149 (2003) 35-46.

[6] M. Akgul, A note on shadow prices in linear programming, Journal of the Operational Research Society 35 (1984) 425-431.

[7] G. Knolmayer, The effects of degeneracy on cost-coefficient ranges and an algorithm to resolve interpretation problems, Decision Sciences 15 (1984) 14-21.