ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΗΣ ΔΙΑΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ ΧΩΡΩΝ

Διπλωματική Εργασία για Μ.Δ.Ε. στα Θεωρητικά Μαθηματικά

ΑΘΗΝΑ Α. ΠΑΠΑΡΓΥΡΗ

Επιβλέπουσα Καθηγήτρια: Αγγελική Κοντολάτου

ΠΑΤΡΑ 2010

Η φιλοσοφία της φύσης είναι γραμμένη σε εκείνο το μεγάλο βιβλίο που βρίσκεται συνεχώς μπροστά στα μάτια μας, εννοώ το σύμπαν. Δεν μπορούμε όμως να το κατανοήσουμε χωρίς να μάθουμε πρώτα τη γλώσσα του και να αντιληφθούμε το νόημα των συμβόλων της.

Το βιβλίο είναι γραμμένο στη γλώσσα των Μαθηματικών…

Γαλιλαίος

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στα πλαίσια του προγράμματος μεταπτυχιακών σπουδών «Μαθηματικά και σύγχρονες εφαρμογές» του Τομέα των Θεωρητικών Μαθηματικών του Τμήματος Μαθηματικών της Σχολής Θετικών Επιστημών του Πανεπιστημίου Πατρών.

Σε αυτό το σημείο, αισθάνομαι έντονη την ανάγκη να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου και τις ειλικρινείς ευχαριστίες μου στην επιβλέπουσα καθηγήτριά μου κ. Αγγελική Κοντολάτου για την καθοδήγησή της, την υπομονή και τη στήριξή της, τόσο σε επιστημονικό επίπεδο, δεδομένης της επιστημονικής κατάρτισής της, όσο και ψυχολογικό, διότι υπήρξε για μένα πηγή έμπνευσης και πέρα από καθηγήτριά μου, δασκάλα και φίλη, δείχνοντάς μου πάντα αμέριστη εμπιστοσύνη.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τον ομότιμο καθηγητή κ. Ιωάννη Σταμπάκη για το ενδιαφέρον του, τις εύστοχες παρατηρήσεις του, καθώς και την προθυμία του να συμβάλει στην ολοκλήρωση αυτής της εργασίας.

Δε θα μπορούσα να μην ευχαριστήσω τον αναπληρωτή καθηγητή κ. Δημήτρη Γεωργίου, πρώτον ως διδάσκοντα κατά τη διάρκεια των προπτυχιακών και μεταπτυχιακών σπουδών μου και δεύτερον για τις πολύτιμες συμβουλές του και την άψογη συνεργασία μας.

Κλείνοντας, ευχαριστώ την οικογένειά μου για την έμπρακτη και ουσιαστική στήριξη που μου προσέφεραν, αλλά και για την εμπιστοσύνη που έδειξαν στο πρόσωπό μου. Χωρίς αυτούς αλλά και τους φίλους μου, που επίσης θεωρώ οικογένεια μου, απλά δε θα ήμουν εγώ.

Ευχαριστώ όλους όσους μου είπαν όχι…
Γι'αυτό έφτασα εδώ που έφτασα.
Άλμπερτ Αϊνστάιν

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η μαθηματική θεωρία, η οποία αποτελεί το κορύφωμα της συστηματοποίησης των μαθηματικών γνώσεων, είναι γνωστή στη βιβλιογραφία ως συνολοθεωρία ή θεωρία συνόλων και αποτελεί τη βάση για μια γενίκευση των μαθηματικών. Επίσης, ασχολείται με τη μελέτη των συνόλων και των πράξεων που μπορούν να οριστούν σε αυτά. Έχει αναπτυχθεί ιδιαίτερα τα τελευταία χρόνια, προκαλώντας ανανέωση στα Μαθηματικά και βρίσκοντας συνεχώς νέες εφαρμογές. Η θεωρία συνόλων που διετύπωσε στα τέλη του $19^{ου}$ αιώνα ο Cantor υπεισέρχεται συστηματικά στους διάφορους κλάδους των Μαθηματικών. Στην Ελλάδα την εισήγαγε το 1918 ο Π. Ζερβός. Η θεωρία συνόλων προκάλεσε την τρίτη μεγάλη κρίση στα Μαθηματικά. Η πρώτη ήταν η ανακάλυψη των άρρητων αριθμών (Πυθαγόρειοι, $5^{ος}$ αιώνας π.Χ.), η δεύτερη προέκυψε μετά τη δημιουργία του Απειροστικού Λογισμού (διαμάχες Berkeley, Robins κ.α.) και η τρίτη δημιουργήθηκε με τα παράδοξα της θεωρίας συνόλων (Buralli-Forti, Russel). Με τη θεωρία συνόλων «καταργείται» η έννοια της μονάδας και εμφανίζεται η έννοια του συνεχούς, η οποία με την έννοια της ισχύος (ή δύναμης) του συνόλου επιτρέπει την ταξινόμηση των συνόλων. Ο πληθάριθμος οδηγεί στην υπερπεπερασμένη επαγωγή. Ο διατακτικός αριθμός οδηγεί στα διατεταγμένα ή ολικώς διατεταγμένα σύνολα και στο αξίωμα της επιλογής του E. Zermelo (1904) "*κάθε απειροσύνολο περιέχει ένα αριθμήσιμο υποσύνολο*". Το αξίωμα αυτό (που παρουσιάζει ανάλογη σπουδαιότητα με το $5^{ο}$ αίτημα του Ευκλείδη στις Μη-Ευκλείδειες Γεωμετρίες) και η χρήση των υπερπεπερασμένων αριθμών, οδήγησαν στα παράδοξα της θεωρίας συνόλων και στο διαχωρισμό των μαθηματικών σε τρεις μεγάλες σχολές, στους «λογικιστές» και τους «φορμαλιστές», που αποδέχονται το αξίωμα του Zermelo και στους «ιντιουσιονιστές» που δεν αποδέχονται το αξίωμα αυτό. Στους λογικιστές ανήκουν ο G. Frege, ο B. Russel, ο R. Dedekind, στους φορμαλιστές ανήκουν οι D. Hilbert, J. Hadamard, W. Sierpinski ενώ στους ιντιουσιονιστές ανήκουν οι E. Borel, H. Lebesgue, N. Lusin. Τα «πέντε γράμματα για τη θεωρία συνόλων» που αντάλλαξαν οι Baire, Borel, Hadamard και Lebesgue αποτελούν ένα πολύ σημαντικό κείμενο για τα Μαθηματικά. Ο E. Borel γράφει τα «Παράδοξα του απείρου», Παρίσι, 1946. Οι έρευνες του Zermelo συνεχίζονται από τους Fraenkel, Bernays, Von Neumann και Gödel και διατυπώνουν θεωρήματα που γίνονται αποδεκτά. Ο Gödel αποδεικνύει ότι, αν η θεωρία συνόλων θεμελιωμένη με τα αξιώματα, χωρίς το αξίωμα της επιλογής, δεν είναι αντιφατική, τότε η θεωρία συνόλων που θα προκύψει όταν συμπεριλάβουμε και το αξίωμα αυτό ή την υπόθεση του συνεχούς δεν είναι αντιφατική.

Με τη σειρά της, η θεωρία ομάδων έχει μία μακρά και πλούσια ιστορία. Ξεκινώντας από τις ανάγκες της θεωρίας Galois, αναπτύχθηκε αρχικά ως η θεωρία των πεπερασμένων ομάδων (Cauchy, Jordan, Sylow). Εν τούτοις, ανακαλύφθηκε πολύ γρήγορα ότι για την πλειονότητα των προβλημάτων που παρουσιάζουν ενδιαφέρον στη θεωρία, αυτό το εξειδικευμένο υλικό -συγκεκριμένα αντικαταστάσεις- που χρησιμοποιήθηκε στην κατασκευή των ομάδων δεν είναι στοιχειώδες και ότι το κύριο θέμα είναι η μελέτη ιδιοτήτων μιας μόνο αλγεβρικής πράξης, ορισμένης σε ένα σύνολο αποτελούμενο από ένα πεπερασμένο πλήθος τυχαίων στοιχείων. Αυτή η ανακάλυψη, η οποία μπορεί να φαίνεται τετριμμένη σήμερα, κατέληξε να είναι, στην πραγματικότητα, πολύ εποικοδομητική και οδήγησε στη δημιουργία της γενικής θεωρίας πεπερασμένων ομάδων. Η χρυσή εποχή της θεωρίας των πεπερασμένων ομάδων ήταν στο τέλος του 19^{ου} αιώνα και στην πρώτη δεκαετία του 20^{ου} αιώνα. Κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου επιτεύχθηκαν τα θεμελιώδη αποτελέσματα της θεωρίας, ετέθησαν οι θεμελιώδεις κατευθύνσεις της έρευνας και αναπτύχθηκαν οι θεμελιώδεις μέθοδοι μελέτης. Πάνω από όλα, στο πρόβλημα που παρουσιάζει μία δοθείσα ομάδα, ορίζοντας μία σχέση διάταξης επ'αυτής, η θεωρία ομάδων κατάφερε για πρώτη φορά να δώσει τη σαφήνεια και την αυστηρότητα, που έλειπαν στο προηγούμενο στάδιο της ανάπτυξής της.

Μια μερικώς διατεταγμένη ομάδα έχει τη δομή της ομάδας και τη δομή ενός μερικώς διατεταγμένου συνόλου που συνδέονται με φυσικό τρόπο. Αυτές οι συσχετίσεις καθορίστηκαν, όπως ήδη αναφέραμε, τη χρονική περίοδο μεταξύ του τέλους του 19^{ου} και τις αρχές του 20^{ου} αιώνα. Διαπιστώθηκε ότι διατεταγμένα αλγεβρικά συστήματα απαντώνται σε διάφορους κλάδους των μαθηματικών, συνδεδεμένα με τα θεμελιώδη δεδομένα τους. Παραδείγματος χάριν, η κλασικοποίηση των απειροστών πραγματοποιήθηκε με την ανακάλυψη των μη αρχιμήδειων διατεταγμένων αλγεβρικών συστημάτων, ο φορμαλισμός της έννοιας των πραγματικών αριθμών οδήγησε στον ορισμό των διατεταγμένων ομάδων και διατεταγμένων σωμάτων, η κατασκευή μη αρχιμήδειων γεωμετριών είχε ως αποτέλεσμα τη μελέτη των μη-αρχιμήδειων διατεταγμένων ομάδων και σωμάτων. Η θεωρία των μερικώς διατεταγμένων ομάδων αναπτύχθηκε από τους: R. Dedekind, O. Hölder, D. Gilbert,

B. Neumann, A.I. Mal'cev, P. Hall, G. Birkhoff. Αυτές οι συσχετίσεις μεταξύ μερικής διάταξης και πράξεων ομάδων, μας επιτρέπουν να μελετήσουμε τις ιδιότητες των μερικώς διατεταγμένων ομάδων. Το βαθύτερο και πιο αναπτυγμένο κομμάτι της θεωρίας των μερικώς διατεταγμένων ομάδων είναι η θεωρία των lattice-διατεταγμένων ομάδων. Στη δεκαετία του $40'$, ακολουθώντας τις δημοσιεύσεις των εργασιών των G. Birkhoff, H. Nakano και P. Lorenzen, η θεωρία των lattice-διατεταγμένων ομάδων έγινε δικαιωματικά αντικείμενο μελέτης. Πρόσφατα, οι διατεταγμένες ομάδες έχουν ενσωματωθεί σε πολλές περιοχές των μαθηματικών, όπως στη θεωρία των Bezout περιοχών, των διατεταγμένων σωμάτων και της καθολικής άλγεβρας.

Η παρούσα διπλωματική εργασία έχει αφετηρία το κεφάλαιο 1, όπου γίνεται μελέτη διατεταγμένων αλγεβρικών δομών. Δίνονται ορισμοί, αποδείξεις και στοιχειώδη αποτελέσματα, απαραίτητα σε όλη την πορεία της εργασίας. Ορίζουμε μερικώς διατεταγμένα σύνολα και μερική διάταξη σε αλγεβρικά συστήματα, βλέπουμε υπό ποίες προϋποθέσεις η μερική διάταξη επεκτείνεται σε ολική και άρα το σύνολο γίνεται ολικώς διατεταγμένο και στη συνέχεια τα διατεταγμένα σύνολα με μία εσωτερική πράξη ορίζουν μερικώς ή ολικώς διατεταγμένες ομάδες.

Στο κεφάλαιο 2 παρουσιάζουμε συμπληρώσεις διατεταγμένων συνόλων και συγκεκριμένα, τα συμπληρώματα Dedekind, Kurepa και Krasner καθώς και ορισμένες ιδιότητες αυτών. Ο Dedekind (1831-1916) όρισε τις τομές Dedekind με τη βοήθεια των οποίων επέκτεινε τη διάταξη των φυσικών στο $\mathbb{R}$ και θεμελίωσε με αυτόν τον τρόπο το $\mathbb{R}$ ως ένα διατεταγμένο σώμα. Η κατασκευή των δομών $(\mathbb{R},+,\cdot,\leq)$ και $(\mathbb{R}^2,+,\cdot,\leq)$ κατά Dedekind παρουσιάζεται εκτενέστερα στο κεφάλαιο 3. Η γενίκευση της έννοιας του συμπληρώματος Kurepa και η εισαγωγή του συμπληρώματος Krasner, οφείλονται στον καθηγητή Λ. Ντόκα (1963).

Η μέθοδος του Dedekind της συμπλήρωσης με τομές δεν είναι η μόνη μέθοδος κατασκευής των πραγματικών αριθμών. Η μέθοδος του Cantor της συμπλήρωσης με ακολουθίες, είναι η δεύτερη εξίσου σημαντική μέθοδος, την οποία θα παρουσιάσουμε στο κεφάλαιο 4. Σύμφωνα με τον G. Cantor (1845-1918) ως σύνολο θα εννοούμε «μια συλλογή αντικειμένων διακεκριμένων και πλήρως καθορισμένων που λαμβάνονται από τον κόσμο είτε της εμπειρίας μας, είτε της σκέψης μας». Τα αντικείμενα ενός συνόλου τα ονόμασε *στοιχεία του συνόλου* και θεώρησε ότι δύο σύνολα είναι ίσα όταν έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία. Επίσης, έδωσε τον ορισμό του κενού συνόλου, το οποίο συμβόλισε $\varnothing$, ως ένα σύνολο που δεν περιέχει κανένα στοιχείο.

Η μελέτη μας ολοκληρώνεται στο κεφάλαιο 5, όπου παρουσιάζεται ένα ενδιαφέρον αποτέλεσμα για τις μερικώς διατεταγμένες ομάδες και τις συνθήκες κάτω από τις οποίες αυτές επεκτείνονται σε ολικώς διατεταγμένες ομάδες, στηριζόμενοι στην εργασία "embedding groups into linear or lattice structures" των Κοντολάτου-Σταμπάκη (1987), όπου πραγματοποιούν επέκταση μίας μερικώς διατεταγμένης ομάδας, χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα του Fuchs για ύπαρξη επέκτασης ενός μερικώς διατεταγμένου συνόλου σε ολικώς διατεταγμένο.

Από την εκτενή και αντιπροσωπευτική βιβλιογραφία που ακολουθεί, ο αναγνώστης μπορεί να ανασύρει όλες τις πληροφορίες που αναπόφευκτα παραλείπονται σε κάποια σημεία της εν λόγω Διπλωματικής Εργασίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΔΙΑΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΔΟΜΕΣ

Τα αλγεβρικά συστήματα εφοδιασμένα με μερική ή ολική διάταξη, συναντώνται σε διάφορους κλάδους των μαθηματικών. Επειδή η θεωρία των μερικώς διατεταγμένων αλγεβρικών συστημάτων είναι εκτενής, έπρεπε να παρακάμψουμε τη μελέτη της πληρότητας και να αρκεστούμε στις κυριότερες αλγεβρικές πτυχές της θεωρίας. Έχουμε προσπαθήσει η παρουσίαση να είναι αυτόνομη και να δοθούν πλήρεις αποδείξεις των αποτελεσμάτων. Παρ’όλα αυτά σε κάποια σημεία αναπόφευκτα χρειάζονται κάποιες προηγούμενες γνώσεις, περισσότερο ή λιγότερο γνωστές, της αφηρημένης άλγεβρας. Φυσικά, οι πιο γνωστές έννοιες χρησιμοποιούνται χωρίς αναφορές.

1.1 Μερικώς διατεταγμένα σύνολα

Θα παραθέσουμε κατωτέρω στοιχειώδη αποτελέσματα και ορολογία που θα χρειαστούμε.

Ορισμός 1.1.1 *Διμελής σχέση* επί ενός συνόλου A είναι ένα υποσύνολο R του καρτεσιανού γινομένου $A\times A$. Λέμε ότι το x πληροί τη σχέση R με το y, όπου $x, y \in A$ και συμβολίζουμε $xRy \Leftrightarrow (x, y) \in R$.

Ορισμός 1.1.2 Αν μία διμελής σχέση $\leq$ ορίζεται σε ένα σύνολο A και έχει τις ιδιότητες:

(1) $a \leq a$ (αυτοπαθής)

(2) $a \leq b, b \leq a$, τότε $a = b$ (αντισυμμετρική)

(3) $a \leq b, b \leq c$, τότε $a \leq c$ (μεταβατική)

για κάθε $a, b, c \in A$, τότε το σύνολο $(A, \leq)$ καλείται *μερικώς διατεταγμένο σύνολο* και η σχέση $\leq$ καλείται *μερική διάταξη* στο A.

Ο δυικός χώρος του $(A, \leq)$ είναι το μερικώς διατεταγμένο σύνολο $(A', \leq')$ με τα ίδια στοιχεία και με τη μερική διάταξη $\leq'$ που ορίζεται ως εξής:
$a \leq' b$ (στο A') αν και μόνον αν $b \leq a$ (στο A). Μπορούμε να γράψουμε $b \geq a$ για $a \leq b$ και $a < b$ για $a \leq b$ και $a \neq b$. Αν ούτε $a \leq b$, ούτε $b \leq a$, τότε τα a και b καλούνται *μη συγκρίσιμα* ή *παράλληλα* και γράφουμε $a // b$.

Ορισμός 1.1.3 Αν μία σχέση $\leq$ ικανοποιεί μόνο τις ιδιότητες (1) και (3) , καλείται *προδιάταξη.*

Μία προδιάταξη ορίζει μία σχέση ισοδυναμίας $\sim$ στο A ως εξής:

$$a \sim b \text{ αν και μόνον αν } a \leq b \text{ και } b \leq a .$$

Το σύνολο των κλάσεων $a,^* c^*, \ldots$ αυτής της ισοδυναμίας μπορεί να διαταχθεί μερικώς με τη φυσική επαγόμενη διάταξη: $a^* \leq c^*$ αν για κάποιο a στο a^* και για κάποιο c στο c^* , έχουμε $a \leq c$. Το σύνολο A^* των κλάσεων $a^*, c^*, \ldots$ είναι ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο.

Μία μερική διάταξη στο A ορίζει κατά φυσικό τρόπο μία μερική διάταξη σε κάθε μη κενό υποσύνολο B του A. Συγκεκριμένα, για $a, b \in B$, θέτουμε $a \leq b$ στο B, αν και μόνον αν $a \leq b$ σύμφωνα με την αρχική μερική διάταξη στο A.
Αυτή η εισαχθείσα μερική διάταξη του B συμβολίζεται με το ίδιο σύμβολο $\leq$.

Ορισμός 1.1.4 *Κλειστό διάστημα* $[a, b]$ στο A (όπου $a \leq b$) ορίζεται το σύνολο όλων των $c \in A$, τα οποία ικανοποιούν τη σχέση $a \leq c \leq b$, τα δε a και b καλούνται *άκρα του διαστήματος*.

Τα υποσύνολα $I_a = [x \in A / x \geq a]$ οριζόμενα για κάθε $a \in A$ και τα δυικά τους $J_a = [x \in A / x \leq a]$ μπορούν επίσης να θεωρηθούν ως κλειστά διαστήματα.

Ορισμός 1.1.5 Ένα υποσύνολο του A καλείται *κυρτό*, αν για $a, b \in A$ περιέχει όλο το διάστημα $[a, b]$, δηλαδή $[a, b] \subseteq A$.

Αν αντικαταστήσουμε τη σχέση $\leq$ με $<$, ορίζουμε τα ανοικτά διαστήματα (a, b).

Ορισμός 1.1.6 Έστω $(A, \leq)$ και $(A', \leq')$ μερικώς διατεταγμένα σύνολα. Μία απεικόνιση από το A στο A', με $a \mapsto a'$, καλείται *ισότονη* αν διατηρεί τη διάταξη έτσι ώστε αν $a \leq b$ να συνεπάγεται $a' \leq' b'$.

Ορισμός 1.1.7 • Μία αντιστρέψιμη απεικόνιση, η οποία είναι ισότονη και από τις δύο διευθύνσεις, καλείται *ισομορφισμός* ή *order-ισομορφισμός* από το A στο A'. Τα A και A' καλούνται *ισόμορφα ως προς τη διάταξη* ή *order-ισόμορφα.*

• Αν μία 1-1 και επί απεικόνιση ανάμεσα στα A και A' αντιστρέφει τη διάταξη, δηλαδή $a \leq b$ αν και μόνον αν $a' \geq b'$, τότε καλείται *δυικός ισομορφισμός*.

Έστω δύο μερικές διατάξεις $\leq_1$ και $\leq_2$ ορισμένες στο ίδιο σύνολο A. Τότε η $\leq_2$ είναι μία *επέκταση* της $\leq_1$, αν για όλα τα $a, b \in A$, $a \leq_1 b$ συνεπάγεται $a \leq_2 b$.

Το A έχει την τετριμμένη διάταξη αν για όλα τα $a, b \in A$, $a \leq b$ συνεπάγεται $a = b$.

Η σχέση διάταξης $\leq$ καλείται *ολική διάταξη* στο A και το A *ολικώς διατεταγμένο σύνολο* ή μία *αλυσίδα* αν στις (1)-(3) προστεθεί και η

(4) Για όλα τα $a, b \in A$ ισχύει είτε $a < b$ είτε $a = b$ είτε $a > b$.

Τα υποσύνολα ενός ολικώς διατεταγμένου συνόλου είναι επίσης ολικώς διατεταγμένα σύνολα ως προς την ορισμένη διάταξη.

Για ένα υποσύνολο B ενός μερικώς διατεταγμένου συνόλου A, ένα *άνω* (κάτω) *φράγμα* του B στο A είναι ένα στοιχείο $u \in A$ $(v \in A)$ τέτοιο ώστε $b \leq u$ $(b \geq v)$ για κάθε $b \in B$. Το B καλείται *φραγμένο* (στο A) αν εντός του A υπάρχει και άνω και κάτω φράγμα αυτού. Το σύνολο όλων των άνω (κάτω) φραγμάτων του B θα συμβολίζεται με $U(B)$ ($L(B)$). Αν το B αποτελείται από τα στοιχεία $x, y, \ldots$, τότε θα γράφουμε $U(B) = U(x, y, \ldots)$ και $L(\mathrm{B}) = L(x, y, \ldots)$.

Αν το B είναι το κενό σύνολο τότε $U(B) = L(B) = A$, ενώ αν το B δεν έχει άνω φράγμα στο A, τότε $U(B) = \varnothing$.

Σημείωση: $B \subseteq C$ συνεπάγεται $U(B) \supseteq U(C)$ και $L(B) \subseteq L(C)$. Επιπλέον, $L(U(B)) \supset B$ και $U(L(B)) \supset B$, συνεπώς $U(L(U(B))) = U(B)$ και $L(U(L(B))) = L(B)$.

Ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο $(A, \leq)$, για το οποίο ικανοποιείται η ιδιότητα:

(5) Για οποιαδήποτε $a, b \in A$, το σύνολο $U(a, b)$ είναι μη κενό

και για το δυικό του $(A, \leq')$, η ιδιότητα:

(6) Για οποιαδήποτε $a, b \in A$, το σύνολο $L(a, b)$ είναι μη κενό,

καλείται *άνω κατευθυνόμενο* (u-directed) και το δυικό του *κάτω κατευθυνόμενο* (l-directed).

Προφανώς, από την (5), συνεπάγεται ότι το $U(B)$ δεν είναι ποτέ κενό αν το B είναι ένα πεπερασμένο υποσύνολο του A.

Το A καλείται *κατευθυνόμενο* (directed) (ή έχει τη Moore-Smith ιδιότητα) αν ικανοποιούνται και οι δύο ιδιότητες (5) και (6).

Ορισμός 1.1.8 Ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο $(A, \leq)$ καλείται *άνω-ημιδικτυωτό* (u-semilattice) αν ισχύει η

(7) Για κάθε $a, b \in A$ υπάρχει ένα $c \in A$ τέτοιο ώστε $U(a, b) = U(c)$

ή είναι κάτω *ημιδικτυωτό* (l-semilattice) αν ισχύει η

(8) Για κάθε $a, b \in A$ υπάρχει ένα $d \in A$ τέτοιο ώστε $L(a, b) = L(d)$.

Τα στοιχεία $c = a \vee b$ και $d = a \wedge b$ είναι μοναδικώς ορισμένα στοιχεία του A (αν υπάρχουν) και καλούνται *κατώτατο άνω φράγμα* (ή ένωση) και *ανώτατο κάτω φράγμα* (ή τομή) των a και b.

Αν ικανοποιούνται ταυτόχρονα οι (7) και (8), τότε το $(A, \leq)$ καλείται *δικτυωτό* (lattice).

Ένα δικτυωτό σύνολο μπορεί να οριστεί ως ένα αλγεβρικό σύστημα με τις πράξεις $\vee$ και $\wedge$ οι οποίες ορίζονται έτσι ώστε:

(I) $a \vee a = a$ και $a \wedge a = a$

(II) $a \vee b = b \vee a$ και $a \wedge b = b \wedge a$

(III) $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$ και $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$, για κάθε $a, b, c \in A$.

(IV) $(a \vee b) \wedge a = a$ και $(a \wedge b) \vee a = a$

Ορισμός 1.1.9 Ένα ολικώς διατεταγμένο σύνολο $(W, \leq)$ καλείται *καλώς-διατεταγμένο,* εάν κάθε μη κενό υποσύνολο V του W περιέχει ένα ελάχιστο στοιχείο (δηλαδή υπάρχει $u \in V$ τέτοιο ώστε $u \leq v$, για κάθε $v \in V$).

Από το θεώρημα Zermelo, κάθε σύνολο μπορεί να είναι καλώς-διατεταγμένο. Μία ισοδύναμη πρόταση είναι το λήμμα του Zorn:

Αν κάθε υποσύνολο ενός μερικώς διατεταγμένου συνόλου A, το οποίο είναι μία αλυσίδα, έχει ένα άνω φράγμα στο A, τότε το A περιέχει ένα maximal στοιχείο, έστω x, ώστε αν $y \in A$ και $x \leq y$, τότε $y = x$.

1.2 Μερική διάταξη σε αλγεβρικά συστήματα

Με τον όρο *αλγεβρικό σύστημα* (ή αλγεβρική δομή) εννοούμε ένα σύνολο A, εφοδιασμένο με εσωτερικές πράξεις, οι οποίες ικανοποιούν συγκεκριμένους κανόνες. Κάθε τέτοια πράξη είναι μία απεικόνιση από το $A \times A \times \ldots \times A$ στο A. Οι έννοιες του ισομορφισμού, ομομορφισμού κ.τ.λ. δύο αλγεβρικών συστημάτων θα εννοούνται με το συνήθη τρόπο.

Ορισμός 1.2.1 Μία συνάρτηση $g(x)$ από ένα αλγεβρικό σύστημα $(A, \leq, f)$ σε ένα αλγεβρικό σύστημα $(A', \leq', f')$ καλείται *ισότονη*, αν $x \leq y$ στο A συνεπάγεται $g(x) \leq' g(y)$ στο A' και *αντίτονη* αν $x \leq y$ στο A, συνεπάγεται $g(x) \geq' g(y)$ στο A'.

Μία συνάρτηση $g(x_1,...,x_n)$ περισσοτέρων της μιας μεταβλητών, μπορεί να είναι ισότονη σε κάποιες από τις μεταβλητές της , αντίτονη σε κάποιες άλλες και τα δύο σε κάποιες τρίτες και μπορεί φυσικά, να μην είναι τίποτα απ'αυτά σε άλλες μεταβλητές.

Θα λέμε ότι μία πράξη f ενός αλγεβρικού συστήματος A, ικανοποιεί ένα νόμο μονοτονίας με περιοχή μονοτονίας C αν

1. $f(x_1,...,x_n) \in C$,όπου $x_1,...,x_n \in C$ (δηλαδή η πράξη είναι κλειστή)

2. Για κάθε i $(i=1,...n)$, η f είναι είτε ισότονη είτε αντίτονη ή και τα δύο για τις μεταβλητές $x_i \in C$.

Ορισμός 1.2.2 Με τον όρο *μερικώς διατεταγμένο αλγεβρικό σύστημα* εννοούμε ένα σύστημα $(A,\ f_a\,,\ \leq)$ που ικανοποιεί τα εξής:

(α) Το $(A\ ,\ f_a)$ είναι ένα αλγεβρικό σύστημα.

(β) Το $(A\ ,\ \leq)$ είναι ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο.

(γ) Κάθε πράξη f_a του A είναι συμβιβαστή με τη διάταξη.

1.3 Μερικώς διατεταγμένες ομάδες

Ορισμός 1.3.1 Μία *μερικώς διατεταγμένη ομάδα* είναι ένα σύνολο G εφοδιασμένο με μία εσωτερική πράξη $\cdot$ και μία διμελή σχέση $\leq$ τέτοιο ώστε:

(1) Το σύνολο $(G,\cdot)$ είναι ομάδα.

(2) Το $(G,\leq)$ είναι μερικώς διατεταγμένο σύνολο.

(3) Η πράξη είναι συμβιβαστή με τη διάταξη, δηλαδή, αν $a \leq b \Rightarrow (ca \leq cb$ και $ac \leq bc)$, για κάθε $c \in G$.

Εφόσον μία ομάδα περιέχει ένα ουδέτερο στοιχείο, έστω e και ισχύει ο νόμος διαγραφής , κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμη με την **(3)** :

(I) $a \leq b \Rightarrow cad \leq cbd$, για κάθε $c,d \in G$.

(II) $a \leq b \Rightarrow ca \leq cb$ και $ac \leq bc$, για κάθε $c \in G$.

(Δηλαδή οι απεικονίσεις , $x \mapsto cx$ και $x \mapsto xc$ είναι 1-1 και ισότονες , για κάθε $c \in G$.)

(III) $a \leq b \Rightarrow cad \leq cbd$, για κάθε $c, d \in G$.

Χρησιμοποιώντας τη μεταβατικότητα της $\leq$, προκύπτει ότι επιπλέον ισοδύναμες προτάσεις είναι οι νόμοι :

(IV) $a \leq b$ και $a' \leq b' \Rightarrow aa' \leq bb'$.

(V) $a \leq b$ και $a' \leq b' \Rightarrow aa' \leq bb'$ και $a'a \leq b'b$.

Αναφέρουμε τις ακόλουθες άμεσες συνέπειες του ορισμού:

(VI) $a \leq b \Rightarrow a^{-1} \geq b^{-1} \left(a < b \Rightarrow a^{-1} > b^{-1} \right)$

(VII) Για κάθε $a, b \in G$, τα σύνολα $U(a)$ και $U(b)$, που έχουν θεωρηθεί ως μερικώς διατεταγμένα σύνολα, είναι ισόμορφα σύμφωνα με την απεικόνιση $x \mapsto ba^{-1}x$.

(VIII) Για κάθε $a \in G$, τα σύνολα $U(a)$ και $L(a)$ είναι, πάλι ως μερικώς διατεταγμένα σύνολα, δυικά ισόμορφα σύμφωνα με την απεικόνιση $x \mapsto ax^{-1}a$.

(IX) Αν G είναι μία μερικώς διατεταγμένη ομάδα, παραμένει το ίδιο, αν η μερική διάταξη αντικατασταθεί από τη δυική της.

Αν η ιδιότητα **(2)** εμφανίζει το G ως ένα προδιατεταγμένο σύνολο, τότε η **(3)** συνεπάγεται ότι

$x \sim y$ αν και μόνον αν, $xy^{-1} \sim e$ (ή $y^{-1}x \sim e$)

και ότι

$x_1 \sim y_{1,}$ $x_2 \sim y_2$ συνεπάγεται $x_1 x_2 \sim y_1 y_2$.

Προκύπτει λοιπόν ότι, η κλάση ισοδυναμίας που περιέχει το e , είναι μία κανονική υποομάδα N της G και οι υπόλοιπες κλάσεις είναι ακριβώς τα σύμπλοκα της N. Το μερικώς διατεταγμένο σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας δεν είναι τίποτα άλλο παρά η ομάδα πηλίκο G/N , η οποία είναι τώρα μία μερικώς διατεταγμένη ομάδα.

Αν τα $a, b \in G$ έχουν ένα άνω (κάτω) φράγμα $c \in G$, τότε τα αντίστροφα στοιχεία a^{-1} , b^{-1} έχουν ένα κάτω (άνω) φράγμα.

Συνεπώς, μία μερικώς διατεταγμένη ομάδα που είναι άνω κατευθυνόμενη (u-directed), αντίστοιχα κάτω κατευθυνόμενη (l-directed), είναι απαραίτητα κάτω κατευθυνόμενη (άνω κατευθυνόμενη) και τελικά κατευθυνόμενη. Σε αυτήν την περίπτωση η G θα καλείται *κατευθυνόμενη ομάδα* (directed group).

Επιπλέον, αν θεωρήσουμε ότι στη μερικώς διατεταγμένη ομάδα G, για κάποιο σταθερό στοιχείο $a_0 \in G$ και για κάθε $b \in G$, ένα άνω (κάτω) φράγμα των a_0 και b υπάρχει, τότε η G είναι κατευθυνόμενη. Πράγματι, αν a_1 και b_1 είναι τυχαία και c ένα άνω (κάτω) φράγμα των a_0 και $b = a_0 a_1^{-1} b_1$, τότε το $a_1 a_0^{-1} c$ είναι ένα άνω (κάτω) φράγμα για τα a_1 και b_1.

Πρόταση 1.3.1 (*Clifford[8]*)
Αν μία μερικώς διατεταγμένη ομάδα G περιέχει ένα στοιχείο $a \geq e$ τέτοιο ώστε το $U(a)$ να είναι γεννήτορας της G , τότε η G είναι κατευθυνόμενη ομάδα.

Αντιστρόφως, αν G είναι μία κατευθυνόμενη ομάδα , τότε για κάθε $a \in G$, κάθε στοιχείο b της G μπορεί να γραφεί υπό τη μορφή

$$b = yz^{-1}, \quad \text{με} \quad y, z \in U(a).$$

Απόδειξη
Αρκεί να επαληθεύσουμε το πρώτο μέρος για $a = e$, αφού το $U(e) = a^{-1}U(a)$ περιέχεται στην υποομάδα που έχει γεννήτορα το $U(a)$.

Υποθέτοντας ότι $<U(e)>= G$, κάθε $b \in G$ έχει τη μορφή $b = x_1, ..., x_n$ με x_i ή $x_i^{-1} \in U(e)$. Εφόσον το γινόμενο δύο στοιχείων του $U(e)$ και τα σύμπλοκα κάθε στοιχείου του $U(e)$ ανήκουν επίσης στο $U(e)$, το b μπορεί να γραφεί ως $b = yz^{-1}$, με $y, z \in U(e)$. Τότε $y \geq e$ και $y \geq b$, δηλαδή, το e και κάθε b έχουν ένα άνω φράγμα και έτσι η G είναι κατευθυνόμενη ομάδα.

Αντιστρόφως , αν G είναι μία κατευθυνόμενη ομάδα , τότε τα $e, b \in G$ έχουν ένα άνω φράγμα $c \in G$. Έστω $y = ca$ και $z = (b^{-1}c)a$. Τότε $y, z \in U(a)$ και το $b = yz^{-1}$ έχει τη ζητούμενη μορφή.

Αν τα $a, b \in G$ έχουν ένα κατώτατο άνω φράγμα $a \vee b$ στο G , τότε τα αντίστροφα στοιχεία τους a^{-1}, b^{-1} έχουν ένα ανώτατο κάτω φράγμα , $a^{-1} \wedge b^{-1}$ στο G. Πράγματι, $(a \vee b)^{-1} \leq a^{-1}$ και $(a \vee b)^{-1} \leq b^{-1}$, επειδή $a \vee b \geq a, b$ κι αν επιπλέον

$x \le a^{-1}, b^{-1}$, τότε $x^{-1} \ge a, b$, απ'όπου έχουμε $x^{-1} \ge a \vee b$, $x \le (a \vee b)^{-1}$ και $(a \vee b)^{-1}$ είναι το ανώτατο κάτω φράγμα των a^{-1} και b^{-1}. Άρα μία μερικώς διατεταγμένη ομάδα G, η οποία είναι ένα άνω-ημιδικτυωτό ($\vee$-semilattice) [αντίστοιχα κάτω-ημιδικτυωτό ($\wedge$-semilattice)] είναι ταυτοχρόνως ένα κάτω-ημιδικτυωτό (αντίστοιχα άνω-ημιδικτυωτό) και άρα ένα δικτυωτό, όπου $a \wedge b = \left(a^{-1} \vee b^{-1}\right)^{-1}$ και $a \vee b = \left(a^{-1} \wedge b^{-1}\right)^{-1}$.

Μία μερικώς διατεταγμένη ομάδα , η οποία είναι δικτυωτό σε σχέση με τη μερική διάταξή του , θα λέγεται *δικτυωτή ομάδα* (lattice-order group).
Αν η διάταξη της G είναι ολική , θα λέμε ότι η G είναι *ολικώς διατεταγμένη ομάδα.*
Παραθέτουμε μερικούς στοιχειώδεις και χρήσιμους κανόνες για τα σύνολα $U(\ldots, a_a, \ldots)$ και $L(\ldots, a_a, \ldots)$:

(α) $U(\ldots, a_a, \ldots) = \bigcap_a U(a_a)$

(β) $xU(\ldots, a_a, \ldots)y = U(\ldots, xa_a y, \ldots)$

(γ) Ο πολλαπλασιασμός στο $U(\ldots, a_a, \ldots)$ (που ορίζεται ως πολλαπλασιασμός των υποσυνόλων της ομάδας) είναι αντιμεταθετικός.

(δ) $U(\ldots, a_a, \ldots)^{-1} = L\left(\ldots, a_a^{-1}, \ldots\right)$

(ε) $L(a,b) = a \bigcup (a,b)^{-1} b$

(στ) $U(\ldots, a_a, \ldots) U(\ldots, b_b, \ldots) \subseteq U(\ldots, a_a, b_b, \ldots)$

(ζ) $U(x) U(\ldots, a_a, \ldots) = U(\ldots, xa_a, \ldots)$

Ισχύουν οι δυικοί νόμοι για όλα τα $a_a, b_b, x, y \in G$. Οι αποδείξεις είναι προφανείς.

Αν η μερικώς διατεταγμένη ομάδα είναι ταυτοχρόνως μία ομάδα τελεστών με πεδίο ορισμού των τελεστών το Ω, τότε θεωρούμε ότι οι φορείς $\omega \in \Omega$ διατηρούν τη διάταξη. Δηλαδή , αν $a \le b$ συνεπάγεται $a^{\omega} \le b^{\omega}$, για κάθε $\omega \in \Omega$.

Ορισμός 1.3.2 Μία μερικώς διατεταγμένη ομάδα G θα λέμε ότι είναι *Αρχιμήδεια* αν

$$a^n < b \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \text{ συνεπάγεται } a = e,$$

δηλαδή, εάν το $\{e\}$ είναι η μόνη υποομάδα που έχει ένα άνω φράγμα στη G.

Μία άλλη δυνατότητα για να ορίσουμε μία Αρχιμήδεια ιδιότητα είναι να απαιτήσουμε ότι

$$\text{αν } \ a > e \text{ και } b > e, \text{ τότε } a^n > b, \text{ για κατάλληλο } n \geq 1.$$

Παρατήρηση 1.3.1 Εν γένει καμία από αυτές τις δύο Αρχιμήδειες ιδιότητες δεν συνεπάγεται την άλλη, αλλά στις δικτυωτές ομάδες ο δεύτερος ορισμός συνεπάγεται τον πρώτο, ενώ στις ολικώς διατεταγμένες ομάδες οι δύο ορισμοί είναι προφανώς ισοδύναμοι.(Cf. Jaffard [20]).

Ορισμός 1.3.3 Μία μερικώς διατεταγμένη ομάδα καλείται *πλήρως ακεραία κλειστή,* αν $a^n < b \quad (n = 1, 2, ...)$ συνεπάγεται $a \leq e$.

Πρόταση 1.3.2 Κάθε πλήρως ακεραία κλειστή μερικώς διατεταγμένη ομάδα είναι Αρχιμήδεια.

Απόδειξη

Αν $a^n < b \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$, τότε $a^n < b$ και $\left(a^{-1}\right)^n < b \quad (n = 1, 2, ...)$, από όπου έχουμε ότι $a \leq e$ και $a^{-1} \leq e$, λόγω της πλήρους ακεραίας κλειστότητας. Άρα $a = e$.

Το αντίστροφο δεν ισχύει εν γένει (βλ. Everett και Ulam[16]). Ισχύει όμως στις δικτυωτές ομάδες.

1.4 Ο θετικός κώνος διατεταγμένης ομάδας

Σε μία μερικώς διατεταγμένη ομάδα, ένα στοιχείο a καλείται θετικό (ακέραιο) αν $a \geq e$, αυστηρά θετικό (ακέραιο) αν $a > e$ και αρνητικό αν $a \leq e$. Αν η πράξη της ομάδας συμβολίζεται ως πρόθεση και το 0 δηλώνει το ουδέτερο στοιχείο, τότε η θετικότητα έχει τη συνήθη έννοια $a \geq 0$.

Το σύνολο $P = P(G) = G^{+}$ των θετικών στοιχείων της G, δηλαδή $P = U(e)$, καλείται ο *θετικός κώνος* της G. Η έννοια αυτή είναι ένα φυσικό εργαλείο για τη μελέτη των μερικών διατάξεων.

Μία μερική διάταξη $\leq$ είναι μονοσήμαντα ορισμένη από τον αντίστοιχο θετικό κώνο P, διότι **(1)** $a \leq b$ ισοδυναμεί με $ba^{-1} \in P$ (και $a^{-1}b \in P$). Βάση αυτού, αντί της φράσης "η μερική διάταξη με το θετικό κώνο P" μπορούμε να λέμε εν συντομία "η μερική διάταξη P".

Ήδη είναι προφανές, ότι η ανακλαστική ιδιότητα της $\leq$ είναι ισοδύναμη με το $e \in P$, η αντισυμμετρική της με το γεγονός ότι το σύνολο $P \bigcap P^{-1}$ δεν περιέχει κανένα στοιχείο διάφορο του e, η μεταβατικότητα είναι ισοδύναμη με $PP \subseteq P$, ενώ ο νόμος μονοτονίας είναι ισοδύναμος προς το γεγονός ότι $ba^{-1} \in P$ συνεπάγεται $(cbd)(cad)^{-1} = c(ba^{-1})c^{-1} \in P$, δηλαδή $cPc^{-1} \subseteq P$.

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση **(1)** για να ορίσουμε τη διάταξη $\leq$, από το P, αν το P δίνεται.

Θεώρημα 1.4.1 Ένα υποσύνολο P μιας ομάδας G είναι ο θετικός κώνος κάποιας μερικής διάταξης της G, αν και μόνον αν, ικανοποιούνται οι ακόλουθες τρεις προϋποθέσεις:

α) $P \bigcap P^{-1} = \{e\}$,

β) $PP \subseteq P$,

γ) $xPx^{-1} \subseteq P$, για κάθε $x \in G$.

Παρατήρηση 1.4.1 Σημειώνουμε ότι στη γ) η σχέση του περιέχεσθαι μπορεί προφανώς να αντικατασταθεί από ισότητα και λόγω της α) το ίδιο είναι αληθές για τη β).

Με άλλα λόγια, το P είναι μία κανονική υποομάδα της G, που περιέχει το e, αλλά κανένα άλλο στοιχείο με το αντίστροφό του. Αυτό το αποτέλεσμα μπορεί να συμπληρωθεί από την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 1.4.1 (a) Η G είναι μία κατευθυνόμενη ομάδα, αν και μόνον αν, το σύνολο P παράγει την G.

(b) Η G είναι μία δικτυωτή ομάδα, αν και μόνον αν, το P παράγει την G και το P είναι ένα δικτυωτό, σύμφωνα με την επαγόμενη διάταξη.

(c) Η G είναι μία ολικώς διατεταγμένη ομάδα, αν και μόνον αν, $P \bigcup P^{-1} = G$.

Παρατήρηση 1.4.2 Το μέρος **(a)** οφείλεται στον Clifford[8], το **(b)** στον Birkhoff [2]. Μία άλλη μορφή της **(c)** είναι: Το P παράγει την G και είναι ολικώς διατεταγμένη.

Η συνθήκη **(a)** περιέχεται στην πρόταση (Clifford[8]), ενώ η **(c)** έπεται αμέσως από το γεγονός ότι η G είναι ολικώς διατεταγμένη ομάδα, ακριβώς εάν για κάθε $a \in G$, είτε $a \geq e$ είτε $a^{-1} \geq e$. Το " και μόνον αν " μέρος του **(b)** προκύπτει από το **(a)** και από την προφανή ιδιότητα του P ως υποδικτυωτού. Τελικώς, το " αν " μέρος μπορεί να δειχθεί με την επαλήθευση ότι $\left(ac^{-1} \wedge bc^{-1}\right)c$ είναι ένα μέγιστο κάτω φράγμα, για $a, b \in G$, όπου c είναι ένα κάτω φράγμα των a, b.

(Επισημαίνεται ότι ac^{-1}, bc^{-1} και $ac^{-1} \wedge bc^{-1} \in P$).

Παρατηρείται ότι η μερική διάταξη στην G είναι τετριμμένη, αν και μόνον αν, το P αποτελείται μόνο από το e.

Θα περάσουμε σε έναν άλλο χαρακτηρισμό των θετικών κώνων. Στο θεώρημα 1.4.1, το σύνολο P, θεωρήθηκε ότι μπορεί να εμβαπτιστεί σε μία ομάδα G. Μπορούμε να απαλλαγούμε από αυτήν την υπόθεση, με το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 1.4.2 (*Birkhoff [1]*)

Μία τυχαία ημιομάδα P είναι ο θετικός κώνος κάποιας μερικώς διατεταγμένης ομάδας G, αν και μόνον αν,

(I) Ισχύει ο νόμος διαγραφής στο P ·

(II) Το P περιέχει ένα ουδέτερο στοιχείο e ·

(III) $ab = e$, για $a, b \in P$, συνεπάγεται $a = b = e$ ·

(IV) $Pa = aP$, για κάθε $a \in P$.

(Σημειώνουμε ότι για δικτυωτές ομάδες, το αποτέλεσμα αυτό οφείλεται στον G. Von Neumann).

Απόδειξη

Θα περιοριστούμε στην απόδειξη της ικανής συνθήκης. Εμβαπτίζουμε μία ημιομάδα P με τις ιδιότητες (I)-(IV) σε μία ομάδα G ως εξής:

Δοθέντων $a, x \in P$, από τις (IV) και (I) υπάρχει ακριβώς ένα $x_a \in P$ τέτοιο ώστε $xa = ax_a$. Η αντιστοιχία $x \mapsto x_a$ (με ένα σταθερό a) είναι "ένα προς ένα" και ικανοποιεί τις

A) $a_a = a$, B) $(xy)_a = x_a y_a$, C) $(x_a)_b = x_{ab}$.

Ορίζουμε την G ως το σύνολο όλων των ζευγών (a,b) με $a,b \in P$ να υπόκεινται στους κανόνες:

(α) <u>Ισότητα</u>: $(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow ad_b = cb$.

(β) <u>Πολλαπλασιασμός</u>: $(a,b)(c,d) = (ac_b, db)$

Λόγω του A) η ισότητα είναι αυτοπαθής. Είναι συμμετρική, αφού $ad_b = cb$ συνεπάγεται $ad_b d = cbd$. Τώρα από τις A) , B) , C) έχουμε

$$d_b d = dd_{bd} \quad \text{και} \quad bd = (bd)_{bd} = b_{bd} d_{bd} = b_d d_{bd} ,$$

έτσι απλοποιώντας με d_{bd} , βρίσκουμε $ad = cb_d$, $(c,d) = (a,b)$. Για την απόδειξη της μεταβατικότητας, έστω $(a,b) = (c,d)$ και $(a,b) = (g,h)$. Τότε $ah_b = gb$ συνεπάγεται $ah_b d_b = gbd_b$, όπου το αριστερό μέλος ισούται με $ad_b h_{db} = cbh_{db} = ch_d b$ και το δεξί μέλος ισούται με gdb. Απλοποιώντας με b, παίρνουμε $ch_d = gd$, $(c,d) = (g,h)$. Ίσα στοιχεία (a,b) και (c,d) πολλαπλασιασμένα με (g,h) δίνουν πάλι ίσα στοιχεία. Από $iad_b = cb$, παίρνουμε αφενός ότι $ad_b g_{db} h_b = cbg_{db} h_b$, $ag_b (hd)_{hb} = cg_d hb$, δηλαδή, $(a,b)(g,h) = (c,d)(g,h)$ και αφετέρου $g(ad_b)_h h_{bh} = g(cb)_h h_{bh}$, $ga_h (dh)_{bh} = gc_h bh$, δηλαδή $(g,h)(a,b) = (g,h)(c,d)$. Ο προσεταιριστικός νόμος του πολλαπλασιασμού είναι μία απλή συνεπαγωγή των B) και C). Προκύπτει ότι το (a,a) είναι το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού, ενώ το (b,a), το αντίστροφο στοιχείο του (a,b). Συνεπώς το G είναι μία ομάδα στην οποία η απεικόνιση $a \mapsto (a,e)$ εμβαπτίζει το P ισόμορφα και τότε το (a,b) μπορεί να παρασταθεί ως ab^{-1}. Επομένως το θεώρημα απεδείχθη.

Ορισμός 1.4.1 Το στοιχείο $a \in G$ καλείται *γενικευμένο περιοδικό,* αν υπάρχουν συζυγή στοιχεία $a_i = x_i^{-1} a x_i$ του a, τέτοια ώστε $a_1,...,a_n = e.$ Αν το a ανήκει στο κέντρο της G, τότε η γενικευμένη περιοδικότητα είναι ισοδύναμη με το να είναι πεπερασμένης τάξης.

Πρόταση 1.4.2 Ο θετικός κώνος P δεν περιέχει κανένα γενικευμένο περιοδικό στοιχείο διάφορο του e.

Απόδειξη

Αν $a \in P$ είναι ένα γενικευμένο περιοδικό στοιχείο, έστω $a_1...a_n = e$, όπου $a_i = x_i^{-1} a x_i \in P$, τότε το e είναι το γινόμενο στοιχείων του P. Αυτό είναι πιθανόν μόνον στην περίπτωση που οι παράγοντες είναι όλοι ίσοι με το e και έτσι προκύπτει ότι $a = e$.

Ορισμός 1.4.2 Θα καλούμε τη μερική διάταξη στην G *μεμονωμένη* , αν $a^n \geq e$ για κάποιον φυσικό n συνεπάγεται $a \geq e$ και *ισχυρά μεμονωμένη* , αν $a_1...a_n \geq e$ συνεπάγεται $a \geq e$, όπου πάλι τα a_i συμβολίζουν τα συζυγή του a.

Μία ολική διάταξη είναι ισχυρά μεμονωμένη.

Παραθέτουμε τα ακόλουθα πορίσματα:

- Μία ομάδα, της οποίας κάθε στοιχείο είναι γενικευμένο περιοδικό (ιδιαίτερα μία ομάδα με στρέψη) δέχεται μόνο την τετριμμένη διάταξη. Μία ομάδα που δέχεται μία (ισχυρά) μεμονωμένη μερική διάταξη, δεν περιέχει κανένα (γενικευμένο) περιοδικό στοιχείο.
- Αν $\leq_1$ και $\leq_2$ είναι δύο μερικές διατάξεις πάνω στην ίδια ομάδα G και η δεύτερη είναι μία επέκταση της πρώτης, τότε οι αντίστοιχοι θετικοί κώνοι P_1 και P_2 ικανοποιούν τη σχέση $P_1 \subseteq P_2$. Το αντίστροφο επίσης ισχύει.

Σημειώνουμε ότι μία ικανή και αναγκαία συνθήκη, ώστε μία μερική διάταξη P της G να είναι μία μερική διάταξη μιας ομάδας H που περιέχει την G είναι ότι το P παραμένει αμετάβλητο ως προς όλους τους εσωτερικούς αυτομορφισμούς της H.

Παραδείγματα

Τώρα θα αναδείξουμε τις μερικώς διατεταγμένες ομάδες G, με κάποια παραδείγματα σε μερικά εκ των οποίων θα αναφερθούμε αρκετές φορές αργότερα. Το P θα συμβολίζει εις το εξής το θετικό κώνο της G.

1. Έστω G η προσθετική ομάδα των ακεραίων ή των ρητών ή των πραγματικών αριθμών κι έστω $\leq$ η συνήθης διάταξη. Η G είναι μία ολικώς διατεταγμένη ομάδα με αρχιμήδεια διάταξη.

2. Έστω G η προσθετική ομάδα των μιγαδικών αριθμών κι έστω $x+yi \in P$ αν είτε $x>0$ είτε $x=0$ και $y \geq 0$. Τότε η G είναι μία ολικώς διατεταγμένη ομάδα με αρχιμήδεια σχέση διάταξης.

3. Έστω G πάλι η προσθετική ομάδα των μιγαδικών αριθμών, αλλά το P ορίζεται διαφορετικά:

a) $x+yi \in P$ αν $x \geq 0$ και $y \geq 0$ (η προσθετική ομάδα των διανυσμάτων του ν-διάστατου ευκλειδείου χώρου, μπορεί να διαταχθεί ολικώς με έναν ανάλογο τρόπο προς αυτό με τον οποίο ορίζουμε μία δικτυωτή ομάδα),

b) $x+yi \in P$ αν $x \geq 0$ και $y > 0$ ή $x+yi=0$,

c) $x+yi \in P$ αν $x > 0$ και $y > 0$ ή $x+yi=0$,

d) $z = x+yi \in P$, αν $arcz$ ανήκει στο κλειστό διάστημα $\left[a,b\right]$, όπου a και b είναι σταθερές γωνίες και ικανοποιούν τη σχέση $0 \leq b-a < \pi$.

Όλες αυτές οι ομάδες είναι αρχιμήδειες και κατευθυνόμενες. Η δε πρώτη είναι δικτυωτή.

4. Έστω G η πολλαπλασιαστική ομάδα όλων των θετικών ρητών αριθμών και P το σύνολο των ακεραίων. Τότε $a \leq b$ σημαίνει ότι το b/a είναι ένας ακέραιος, δηλαδή το b διαιρείται από το a. Αυτή η G είναι μία δικτυωτή ομάδα, διότι στο P ο μέγιστος κοινός διαιρέτης και το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο, υπάρχουν. Είναι δε αρχιμήδεια ομάδα.

5. Έστω G η πολλαπλασιαστική ομάδα, όλων των μη μηδενικών κυρίων ιδεωδών (ακεραίων και κλασματικών) σε μία μεταθετική ακεραία περιοχή(domain of integrity) R με μοναδιαίο στοιχείο, κι έστω ότι P αποτελείται από τα ακέραια κύρια ιδεώδη. Η G είναι κατευθυνόμενη, αλλά εν γένει δεν είναι δικτυωτή ομάδα (είναι δικτυωτή αν ισχύει το θεώρημα μονοσήμαντης παραγοντοποίησης). Εάν η G είναι ορισμένη ως η πολλαπλασιαστική ομάδα του σώματος των κλασμάτων της R και το P συνίσταται από τα μη μηδενικά στοιχεία της R, τότε έχουμε μία προδιατεταγμένη ομάδα.

6. Ορίζουμε την G ως την προσθετική ομάδα όλων των πραγματικών συναρτήσεων f στο διάστημα $\left[0,1\right]$, κι έστω $f \in P$ όταν $f\left(x\right) \geq 0$, για όλα τα x στο $\left[0,1\right]$. Ή παίρνουμε μόνο τις συνεχείς συναρτήσεις ή τις φραγμένες συναρτήσεις στο $\left[0,1\right]$. Σε κάθε περίπτωση έχουμε δικτυωτή ομάδα.

Άλλο παράδειγμα είναι η ίδια ομάδα , αλλά με το P να αποτελείται από όλες τις μη φθίνουσες συναρτήσεις f (δηλαδή, $x \leq y$ συνεπάγεται $f\left(x\right) \leq f\left(y\right)$) που ικανοποιούν τη σχέση $f\left(0\right) = 0$.

7. Η G είναι η προσθετική ομάδα όλων των πολυωνυμικών συναρτήσεων με πραγματικούς συντελεστές και πεδίο ορισμού $\left[0,1\right]$ και το P περιέχει εκείνες που δεν είναι αρνητικές στο $\left[0,1\right]$.

Είναι ένα παράδειγμα κατευθυνόμενης , αλλά όχι δικτυωτής ομάδας.

8. Η G είναι η ομάδα των πραγματικών πινάκων της μορφής

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

με πράξη τον πολλαπλασιασμό και το P αποτελείται από τους πίνακες όπου είτε $a > 0$, είτε $a = 0$, $b > 0$, είτε $a = b = 0$, $c \geq 0$.

1.5 Order-Ομομορφισμοί ομάδων

Έστω G και H μερικώς διατεταγμένες ομάδες. Ένας ισότονος ομομορφισμός από την G στην H, καλείται *order-ομομορφισμός.* Η ισοτονία ενός ομομορφισμού φ από την G στην H είναι ισοδύναμη προς το γεγονός ότι ο φ απεικονίζει το θετικό κώνο $P(G)$ εντός του θετικού κώνου $P(H)$, δηλαδή $\varphi(P(G)) \subseteq P(H)$.

Αν επιπλέον $\varphi(G) = H$ και $\varphi(P(G)) = P(H)$, λέγουμε ότι ο φ είναι ένας *order-επιμορφισμός* της G επί της H. Αν ο φ και η αντίστροφη απεικόνιση φ^{-1} είναι και οι δύο order-επιμορφισμοί , τότε ο φ είναι ένας *order-ισομορφισμός* και οι ομάδες G και H είναι *order-ισόμορφες* και συμβολίζουμε $G \cong_0 H$.

Ένας order-ισομορφισμός ανάμεσα στην G και τον εαυτό της είναι ένας *order-αυτομορφισμός* .

Οι order-αυτομορφισμοί μιας μερικώς διατεταγμένης ομάδας G παράγουν μία υποομάδα $A_0(G)$ της ομάδας αυτομορφισμών της G. Επίσης , η $A_0(G)$ μπορεί να είναι μερικώς διατεταγμένη στην περίπτωση που η G είναι κατευθυνόμενη. Θέτουμε $a \geq i$, για έναν order-αυτομορφισμό a και την ταυτοτική απεικόνιση i της G, οποτεδήποτε έχουμε $a^a \geq a$ για κάθε $a \in P(G)$.

Θεώρημα 1.5.1 Μία κανονική υποομάδα N μιας μερικώς διατεταγμένης ομάδας G, είναι ο πυρήνας ενός order-ομομορφισμού (order-επιμορφισμού) αν και μόνον αν, είναι κυρτή. Αν φ είναι ένας order-επιμορφισμός της G επί της G με πυρήνα N, τότε $\overline{G} \cong_0 G/N$.

Απόδειξη

Αν N είναι ο πυρήνας ενός order-ομομορφισμού y της G ,τότε $a \leq x \leq b$ $(a, b \in N)$ συνεπάγεται $y(e) = y(a) \leq y(x) \leq y(b) = y(e)$, δηλαδή $y(x) = y(e)$, όπου $x \in N$ και N είναι μία κυρτή υποομάδα.

Αν η N είναι κυρτή, τότε ο φυσικός ομομορφισμός της G επί της G/N είναι, σύμφωνα με τον ορισμό της μερικής διάταξης της G/N, ένας order-επιμορφισμός. Τελικά, αν η φ είναι ορισμένη όπως στο παραπάνω θεώρημα, τότε η αντιστοιχία $h \mapsto \varphi^{-1}(h)$ είναι ένας order-ισομορφισμός ανάμεσα στη $\overline{G}$ και G/N.

Δεν μπορούν και τα δύο θεωρήματα ισομορφισμού να επεκταθούν στις μερικώς διατεταγμένες ομάδες. Αν B και C είναι υποομάδες της G και C κανονική και κυρτή στο $\{B,C\}$, τότε αν και $B\bigcap C$ είναι κανονική και κυρτή στο B, εν γένει $B/(B\bigcap C)$ και $\{B,C\}/C$ δεν είναι order-ισόμορφες.

[<u>Αντιπαράδειγμα</u>: Αν G είναι η προσθετική ομάδα των μιγαδικών αριθμών κι έστω $x+yi\in P$ αν $x\geq 0$ και $y>0$ ή $x+yi=0$ (βλ. παράδειγμα 3b) , B οι πραγματικοί αριθμοί , C οι φανταστικοί αριθμοί , τότε προφανώς $B/(B\bigcap C)\cong B$ είναι τετριμμένο, ενώ $\{B,C\}/C$ είναι ολικώς διατεταγμένο.]

Παρόλα αυτά, η αντιστοιχία $x\mapsto xC$ $(x\in B)$, από τη $B/(B\bigcap C)$ επί της $\{B,C\}/C$, προφανώς είναι ισότονη.

Η αναλογία του δεύτερου θεωρήματος ισομορφισμού ισχύει . Αν φ είναι ένας order-επιμορφισμός της G επί της $\bar{G}$ και $\bar{C}$ είναι μία κανονική και κυρτή υποομάδα της $\bar{G}$, τότε $\varphi^{-1}(\bar{C})=C$ είναι κανονική και κυρτή στην G και $G/C\cong_0 \bar{G}/\bar{C}$.

Πράγματι, η σύνθεση της φ και της φυσικής απεικόνισης από την $\bar{G}$ επί της $\bar{G}/C$ είναι ένας order-επιμορφισμός και έτσι η συνθήκη προκύπτει από το θεώρημα 1.5.1.

1.6 Ολικώς διατεταγμένες ομάδες

ΑΡΧΙΜΗΔΕΙΕΣ ΟΛΙΚΩΣ ΔΙΑΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΟΜΑΔΕΣ

Θα ξεκινήσουμε αναφέροντας μία σπουδαία κλασικοποίηση των στοιχείων στις ολικώς διατεταγμένες ομάδες.

Έστω G μία ολικώς διατεταγμένη ομάδα. Η *απόλυτη τιμή* $|a|$ ενός στοιχείου $a\in G$, ορίζεται ως $|a|=\max(a,a^{-1})$.

Έστω $a,b\in G$. Το στοιχείο a, θα λέγεται *απείρως μικρό σχετικά* με το b (ή *ασυγκρίτως μικρότερο* του b), αν $|a|^n<|b|$, για κάθε θετικό ακέραιο n. Συμβολίζουμε αυτή τη συνθήκη ως $a\ll b$.

Εξάλλου , τα a και b θα καλούνται *αρχιμήδεια ισοδύναμα,* συμβολικά $a \sim b$, αν υπάρχουν θετικοί ακέραιοι m και n, τέτοιοι ώστε $|a| < |b|^m$ και $|b| < |a|^n$.

Άμεσα προκύπτουν ότι

(I) Για κάθε ζεύγος $a, b \in G$ ισχύει αποκλειστικά μία από τις παρακάτω σχέσεις

$$a \ll b \quad , \quad a \sim b \quad , \quad b \ll a$$

(II) $a \ll b$ συνεπάγεται $x^{-1}ax \ll x^{-1}bx$,για κάθε $x \in G$.

(III) $a \ll b$ και $a \sim c$ συνεπάγεται $c \ll b$.

(IV) $a \ll b$ και $b \sim d$ συνεπάγεται $a \ll d$.

(V) $a \ll b$ και $b \ll c$ συνεπάγεται $a \ll c$.

(VI) $a \sim b$ και $b \sim c$ συνεπάγεται $a \sim c$.

Η αρχιμήδεια ισοδυναμία διαχωρίζει τα στοιχεία της G σε κλάσεις ξένες μεταξύ τους, οι οποίες μπορούν να διαταχθούν ολικά, ορίζοντας $\kappa_1 < \kappa_2$, για τις κλάσεις κ_1, κ_2 , αν και μόνον αν, για κάποιους (και κατά συνέπεια για όλους) αντιπροσώπους $a \in \kappa_1$ και $b \in \kappa_2$, έχουμε $a \ll b$. Το στοιχείο e αποτελεί μία κλάση μόνο του , την ελάχιστη κλάση. Όλες οι άλλες κλάσεις περιέχουν ένα άπειρο σύνολο στοιχείων, διότι $a \sim a^n$ $(n = \pm 1, \pm 2, ...)$. Προφανώς, η G είναι αρχιμήδεια, αν και μόνον αν, η G δεν έχει περισσότερες από δύο αρχιμήδειες κλάσεις.

Αυτή η αρχιμήδεια ταξινόμηση μπορεί να επεκταθεί στα θετικά στοιχεία μιας τυχαίας μερικώς διατεταγμένης ομάδας G (Loonstra[27]). Έστω a, b θετικά στοιχεία της G. Γράφουμε $a \sim b$, αν υπάρχουν φυσικοί αριθμοί m και n, τέτοιοι ώστε $a < b^m$ και $b < a^n$. Αν υπάρχει ένα m τέτοιο ώστε $a < b^m$,αλλά δεν υπάρχει n τέτοιο ώστε $b < a^n$, θέτουμε $a \ll b$. Τότε ο θετικός κώνος της ομάδας διαμερίζεται πάλι σε κλάσεις ισοδυναμίας , μεταξύ των οποίων μία μερική διάταξη μπορεί να οριστεί με φυσικό τρόπο.

Ξεκινάμε τη μελέτη των ολικών διατεταγμένων ομάδων με την αρχιμήδεια περίπτωση. Το ακόλουθο αποτέλεσμα είναι απαραίτητο, για την περαιτέρω ανάπτυξη της θεωρίας.

Θεώρημα 1.6.1 (Hölder)

Μία ολικώς διατεταγμένη ομάδα είναι αρχιμήδεια, αν και μόνον αν, είναι order-ισόμορφη με μία υποομάδα της προσθετικής ομάδας των πραγματικών αριθμών με τη φυσική διάταξη. Άρα όλες οι αρχιμήδειες ολικώς διατεταγμένες ομάδες είναι αντιμεταθετικές (ή αβελιανές).

Απόδειξη

Το ευθύ είναι προφανές, αν υποθέσουμε ότι η G είναι μία ολικώς διατεταγμένη ομάδα με αρχιμήδεια διάταξη.

Κατ'αρχάς, θεωρούμε ότι η ύπαρξη ενός $g \in G$ τέτοιου ώστε $e < g$ και $e \leq x < g$ συνεπάγεται $x = e$. Λόγω της αρχιμήδειας ιδιότητας, υπάρχει για κάθε $a \in G$, ένας ακέραιος n τέτοιος ώστε $g^n \leq a < g^{n+1}$ κι έτσι $e \leq ag^{-n} < g$. Άρα $ag^{-n} = e$ και $a = g^n$. Συνεπώς, η $G = \langle g \rangle$ είναι order-ισόμορφη με την ομάδα των ακεραίων σύμφωνα με την απεικόνιση $g^n \mapsto n$.

Στη συνέχεια θεωρούμε ότι δεν υπάρχει τέτοιο g, άρα για κάθε $x \in G, e < x$ μπορούμε να βρούμε ένα $y \in G$ τέτοιο ώστε $e < y < x$. Εδώ, είτε $y^2 \leq x$, είτε $\left(xy^{-1}\right)^2 \leq x$, άρα για κάθε $x > e$ υπάρχει ένα $z \in G$ με $e < z < x$ και $z^2 \leq x$. Θεωρούμε ότι τα a, b είναι θετικά στοιχεία της G με $ab \neq ba$ και $ba < ab$. Τότε θέτουμε $x = aba^{-1}b^{-1} > e$ και επιλέγουμε ένα z γι'αυτό το x. Από την αρχιμήδεια ιδιότητα, υπάρχουν φυσικοί ακέραιοι m και n που ικανοποιούν τις σχέσεις $z^m \leq a < z^{m+1}$, $z^n \leq b < z^{n+1}$. Άρα το $x = aba^{-1}b^{-1}$ ικανοποιεί τη σχέση $x < z^2$ που έρχεται σε αντίθεση με τη σχέση $z^2 \leq x$. Άρα η G είναι αντιμεταθετική. Προκειμένου να κατασκευάσουμε έναν order-ισομορφισμό από την G εντός της προσθετικής ομάδας των πραγματικών αριθμών, παίρνουμε ένα $a \in G$, με $a > e$ και θέτουμε $f(a) = 1$. Για κάποιο τυχαίο $b \in G$, θεωρούμε τα σύνολα L, U όλων των ρητών αριθμών m/n $(n > 0)$ τέτοιων ώστε $a^m \leq b^n$ και $a^m > b^n$, αντίστοιχα. Από την αρχιμήδεια ιδιότητα, κανένα από τα L και U δεν είναι κενό και εύκολα αποδεικνύεται ότι το ζεύγος (L, U) ορίζει μία τομή Dedekind των ρητών αριθμών (βλ. κεφ.3). Αν ο πραγματικός αριθμός β αντιστοιχεί σε αυτήν την τομή, τότε γράφουμε $f(b) = \beta$. Έχουμε $f(bc) = f(b) + f(c)$, διότι αν m/n και r/s $(n, s > 0)$ ανήκουν στην κατώτερη κλάση που ορίζεται από τα b και c, αντίστοιχα,

τότε $a^m \le b^n$, $a^r \le c^s$. Αυτό συνεπάγεται ότι $a^{ms+nr} \le (bc)^{ns}$, δηλαδή $(m/n)+(r/s)$ ανήκει στην κατώτερη τάξη που ορίζεται από το bc. Ένας παρόμοιος ισχυρισμός ισχύει για τις άνω κλάσεις. Άρα f είναι ένας ομομορφισμός της G εντός των πραγματικών αριθμών. Εφόσον το $f(b)=0$ έρχεται σε αντίθεση με $b>e$ (τότε $a \le b^n$ για κάποιο n κι έτσι το $1/n$ θα μπορούσε να κείται στην κατώτερη τάξη του b) και εφόσον η f είναι προφανώς ισότονη, συμπεραίνουμε ότι η f είναι ένας order-ισομορφισμός από την G εντός των πραγματικών αριθμών.
Το πρόβλημα του να οριστεί order-ισομορφισμός μεταξύ δύο υποομάδων των πραγματικών αριθμών παρουσιάζεται κατά φυσικό τρόπο τώρα. Μία πλήρης απάντηση μπορεί εύκολα να δοθεί.

Πρόταση 1.6.1 (Hion)
Έστω $A \ne \{0\}$ και B υποομάδες της προσθετικής ομάδας των πραγματικών αριθμών, εφοδιασμένες με τη φυσική διάταξη και φ ένας order-ομομορφισμός (ή order-ισομορφισμός) από το A εντός του B. Τότε υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός $r \ge 0$ τέτοιος ώστε

$$\varphi(a) = ra \quad , \text{για κάθε } a \in A.$$

Αν $\varphi(a_0)=0$ για κάποιο $a_0 \in A$, $a_0 > 0$, τότε $\varphi(a)=0$, για κάθε $a \in A$, διότι $0 < a < na_0$ συνεπάγεται $\varphi(a)=0$. Σε αυτήν την περίπτωση $r=0$. Στην εναπομείνασα περίπτωση , $a_i > 0$ $(a_i \in A)$ συνεπάγεται $\varphi(a_i)>0$. Θεωρούμε παραδείγματος χάριν, ότι $\varphi(a_1)/\varphi(a_2) < a_1/a_2$ και παίρνουμε ένα ρητό αριθμό m/n $(m,n>0)$ μεταξύ των $\varphi(a_1)/\varphi(a_2)$ και a_1/a_2. Έχουμε $ma_2 < na_1$, ενώ $m\varphi(a_2) > n\varphi(a_1)$, το οποίο είναι αδύνατο. Άρα το $\varphi(a)/a = r$ είναι μία σταθερά και σαφώς μεγαλύτερη του μηδενός.

Πόρισμα 1.6.1 Οι order-αυτομορφισμοί μιας αρχιμήδειας ολικώς διατεταγμένης ομάδας συνιστούν μία υποομάδα της πολλαπλασιαστικής ομάδας των θετικών πραγματικών αριθμών.

Η ομάδα $A_0(G)$ όλων των order-αυτομορφισμών των ολικώς διατεταγμένων αβελιανών ομάδων G έχει μελετηθεί από τον Conrad . Έθεσε συγκεκριμένες ικανές συνθήκες υπό τις οποίες η $A_0(G)$ μπορεί να διαταχθεί ολικώς (βλ. Cohn[9] , Conrad[12]).
Τέλος, αναφέρουμε δύο εύκολες συνεπαγωγές του κυρίου θεωρήματος.

Πόρισμα 1.6.2 (Loonstra[25])
Μία συνεχής ολικώς διατεταγμένη ομάδα $G \neq \{e\}$ (δηλαδή, κάθε τομή Dedekind καθορίζει ένα και μοναδικό στοιχείο) είναι order-ισόμορφη με την ολικώς διατεταγμένη προσθετική ομάδα των πραγματικών αριθμών.
Απόδειξη
Θεωρούμε $a^n \leq b$ για κάποιο $a \geq e$ και για $n = 0,1,2,...$. Η υπόθεση συνεπάγεται ότι το $\limsup a^n = x$ υπάρχει, δηλαδή $U\left(e,a,...,a^n,...\right) = U(x)$. Από την παράγραφο 1.3(β) , αυτό το x ικανοποιεί τη σχέση $ax = x$, από όπου $a = e$ και η ομάδα έχει αρχιμήδεια διάταξη. Από το παραπάνω θεώρημα η G είναι order-ισόμορφη με μία υποομάδα των πραγματικών αριθμών και αυτή πρέπει να είναι πάλι συνεχής.

Πόρισμα 1.6.3 (Fan , Fuchs , Michiura)
Αν η μερική διάταξη της G είναι μεμονωμένη και η G δεν έχει καμία κυρτή υποομάδα εκτός από την G και την $\{e\}$, τότε η G είναι order-ισόμορφη με μία υποομάδα των πραγματικών αριθμών και άρα ολικώς διατεταγμένη.
Απόδειξη
Έστω $a \in G$, $a // e$. Τότε από την υπόθεση ότι η ομάδα είναι μεμονωμένη το a είναι άπειρης διάστασης και συνεπώς $a^n // e$. Άρα $\left\{a^2\right\}$ είναι μία μη-τετριμμένη κυρτή υποομάδα. Επομένως η G είναι ολικώς διατεταγμένη. Αν $a^n < b$ για $n = 0, \pm 1, \pm 2,...$, τότε το b δεν ανήκει στο $\{a\}$, άρα $a = e$ και η διάταξη είναι αρχιμήδεια.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΕΙΣ ΔΙΑΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ ΣΥΝΟΛΩΝ

Ο Dedekind (1831-1916) μελετώντας τα απειροσύνολα, αναρωτήθηκε για τη διαφορά που έχει ένα συνεχές γεωμετρικό μέγεθος με το σύνολο των ρητών αριθμών και προσπάθησε να δώσει απάντηση στο ερώτημα αυτό. Επίσης, ασχολήθηκε με τη θεμελίωση των φυσικών αριθμών καθώς και των πραγματικών αριθμών. Το 1963 ο καθηγητής Ντόκας γενίκευσε την έννοια του συμπληρώματος Kurepa πραγματοποιώντας ανάλογη πλήρωση μερικώς διατεταγμένου συνόλου. Επίσης εισήγαγε ένα εντελώς νέο συμπλήρωμα για μερικώς διατεταγμένα σύνολα, το οποίο ονόμασε συμπλήρωμα Krasner και στη συνέχεια απεδείχθη ότι είναι έννοια ευρύτερη διαφόρων κλασσικών μαθηματικών εννοιών (Αριθμοί Prüffer, επαγωγικό και προβολικό όριο κ.α.). Η προς την κατεύθυνση αυτή προσπάθεια απαίτησε έρευνα του συμπληρώματος Kurepa υπό τη γενική του μορφή, η οποία κατέληξε στο βασικό αποτέλεσμα ότι το συμπλήρωμα Kurepa είναι πλήρες δικτυωτό.

2.1 Εισαγωγικά στοιχεία

Έστω $(\mathrm{E}, \leq)$ μία δομή διάταξης. Τα υποσύνολα του $\mathrm{E}\times\mathrm{E}$ που αντιστοιχούν στις σχέσεις $\leq$ και $<$ (αντίστοιχα $\geq$, $>$) θα τα συμβολίζουμε με S και S' (αντίστοιχα I , I'). Συνεπώς

(1) Αν $x \in \mathrm{E}$, τότε S_x είναι το σύνολο των $y \in \mathrm{E}$, για τα οποία $x \leq y$.

Αντίστοιχα, αν $x \in \mathrm{E}$, τότε S'_x είναι το σύνολο των $y \in \mathrm{E}$ για τα οποία $x < y$, ενώ I_x είναι το σύνολο των $y \in \mathrm{E}$, για τα οποία $y \le x$. Αντίστοιχα, I'_x είναι το σύνολο των $y \in \mathrm{E}$, για τα οποία $y < x$.

Η σχέση $S'_x = \varnothing$ σημαίνει ότι το x είναι maximal στοιχείο του E. Ενώ η σχέση $I'_x = \varnothing$ σημαίνει ότι το x είναι minimal στοιχείο του E.

(2) Έστω $F \subseteq \mathrm{E}$. Αν υπάρχει το ελάχιστο (αντίστοιχα μέγιστο) στοιχείο του F, αυτό θα συμβολίζεται με $\min F$ (αντίστοιχα $\max F$). Το $\min \mathrm{E}$, αν υπάρχει, θα παρίσταται με 0, ενώ το $\max \mathrm{E}$, εφόσον υπάρχει, θα παρίσταται με ∞. Επομένως, $\mathrm{E} = S_0, \varnothing = I'_0$, αντίστοιχα, $\mathrm{E} = I_\infty, \varnothing = S'_\infty$.

(3) Για κάθε $F \subseteq \mathrm{E}$, ορίζονται αναλόγως τα σύνολα S_F, S'_F, I_F και I'_F. Από τους παραπάνω ορισμούς ισχύουν τα εξής:

$$F \subseteq I_F = \bigcup_{x \in F} I_x \quad \text{και} \quad F \subseteq S_x = \bigcup_{x \in F} S_x .$$

(4) Για τα στοιχεία $x, y \in \mathrm{E}$ που δεν είναι συγκρίσιμα, χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $x // y$.

Ορισμός 2.1.1 Έστω η δομή διάταξης $(\mathrm{E}, \le)$. Καλούμε *τομή* του E κάθε ζεύγος (A, B) υποσυνόλων του E, για τα οποία πληρούνται οι συνθήκες:

(1) $(\forall\ a \in A)(\forall\ b \in B)[a < b]$.

(2) $(\forall\ a \in A)\ [b > a \Rightarrow b \in B]$.

(3) $(\forall\ b \in B)\ [a < b \Rightarrow\ a \in A]$.

Τα σύνολα A και B της τομής καλούνται αντίστοιχα *κάτω* και *άνω τάξη* αυτής.

Παρατηρήσεις 2.1.1 Έστω (A, B) και (A', B') τομές στο E.

1. Αν $A = A'$ τότε θα είναι και $B = B'$, δηλαδή $(A, B) = (A', B')$. Επομένως, μία τομή είναι ορισμένη αν δοθεί μία τάξη αυτής.
2. $A \subset A' \Leftrightarrow B \supset B'$.
3. Αν $x \in A$ τότε κάθε $y \in \mathrm{E}$, τέτοιο ώστε $y \le x$, ανήκει στην τάξη A. Άρα $A = I_A$ και $B = S_B$.

4. Αν η τάξη A έχει μέγιστο στοιχείο x, τότε η τομή είναι $\left(I_x, S'_x\right)$. Αλλά δοθέντος $x \in \mathrm{E}$, το ζεύγος $\left(I_x, S'_x\right)$ δεν είναι εν γένει τομή στο E, διότι δεν πληρούται πάντα η συνθήκη **(3)** του ορισμού. Πράγματι, είναι δυνατό να υπάρχει $y \in \mathrm{E}$ τέτοιο ώστε $y \,//\, x$ και $y < z$, για κάθε $z \in S'_x$.

Ορισμός 2.1.2 Έστω $c = (A, B)$ μία τομή στο E. Το μέγιστο (αντίστοιχα ελάχιστο) στοιχείο της τάξης A (αντίστοιχα B), αν υπάρχει , καλείται *άκρο στοιχείο* της τομής. Αν υπάρχουν και τα δύο άκρα στοιχεία x και y των τάξεων A και B, τότε η τομή καλείται *άλμα*. Αν δεν υπάρχει κανένα από τα δύο, τότε η τομή καλείται *χάσμα*.

2.2 Συμπλήρωμα Dedekind

Θεωρούμε τη δομή διάταξης $(\mathrm{E}, \leq)$. Το σύνολο των τομών στο $\mathrm{E} \neq \varnothing$, οι οποίες δεν είναι άλματα, θα συμβολίζεται με $C(\mathrm{E})$, ενώ το σύνολο των χασμάτων στο E, με $L(\mathrm{E})$.

Στο σύνολο $C^*(\mathrm{E}) = \mathrm{E} \cup C(\mathrm{E})$ ορίζουμε μία διμελή σχέση R ως εξής:

Αν x, y στοιχεία του E και (A, B) , (A', B') τομές του $C(\mathrm{E})$, τότε:

(α) $xRy \Leftrightarrow x \leq y$.

(β) $xR(A, B) \Leftrightarrow x \in A$ ή $x = \min B$.

(γ) $(A, B)Rx \Leftrightarrow x \in B$ ή $x = \max A$.

(δ) $(A, B)R(A', B') \Leftrightarrow A \subseteq A'$ ή υπάρχει $x \in \mathrm{E}$: $\max A = x = \min B$.

Πρόταση 2.2.1 Η ανωτέρω οριζόμενη σχέση R είναι μία προδιάταξη στο σύνολο $C^*(\mathrm{E}) = \mathrm{E} \cup C(\mathrm{E})$.

Πρόταση 2.2.2 Έστω $\sim$ η υπό της προδιάταξης R οριζόμενη σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο $C^*(\mathrm{E}) = \mathrm{E} \cup C(\mathrm{E})$. Τότε ισχύουν τα εξής:

α. Αν $e \in \mathrm{E}$ και $e' \in C(\mathrm{E})$, τότε $e \sim e' \Leftrightarrow e$ είναι άκρο στοιχείο μιας τάξης του e' .

β. Αν $e \in C(\mathrm{E})$ και $e' \in C(\mathrm{E})$, τότε $e \sim e' \Leftrightarrow e = e'$, δηλαδή μία τάξη του e και μία τάξη του e' έχουν κοινό άκρο στοιχείο.

γ. Αν $e \in \mathrm{E}$ και $e' \in \mathrm{E}$, τότε $e \sim e' \Leftrightarrow e = e'$.

Παρατηρήσεις 2.2.1

1) Η $\sim$ είναι η λεπτοτέρα σχέση ισοδυναμίας από όσες μπορούν να οριστούν στο σύνολο $C^*(\mathrm{E}) = \mathrm{E} \bigcup C(\mathrm{E})$ και έχουν την ιδιότητα α. της πρότασης 2.2.2.

2) Αν l και l' είναι χάσματα στο E, τότε $l \sim l' \Leftrightarrow l = l'$.

3) Η προδιάταξη R περιοριζόμενη στο σύνολο $\mathrm{E} \bigcup L(\mathrm{E})$ είναι διάταξη.

Έστω E^* το σύνολο πηλίκο $\mathrm{E} \bigcup C(\mathrm{E}) \big/ \sim$. Τότε για κάθε κλάση ισοδυναμίας $e^* \in \mathrm{E}^*$ ισχύουν:

α. Αν η e^* περιέχει ένα $x \in \mathrm{E}$, τότε θα περιέχει και κάθε τομή στο E με άκρο στοιχείο x, δηλαδή τα ζεύγη (I_x, S'_x) και (I'_x, S_x) είναι στοιχεία του $C(\mathrm{E})$. Από την πρόταση 2.2.2 προκύπτει ότι η κλάση e^* δεν μπορεί να περιέχει κανένα άλλο στοιχείο. Άρα είναι της μορφής $\{x, (I_x, S'_x), (I'_x, S_x)\}$ ή $\{x, (I_x, S'_x)\}$ ή $\{x, (I'_x, S_x)\}$ ή $\{x\}$, αντίστοιχα αν υπάρχουν και οι δύο τομές (I_x, S'_x), (I'_x, S_x) ή μόνον η (I'_x, S_x) ή καμία από τις δύο.

β. Αν η κλάση e^* δεν περιέχει κανένα $x \in \mathrm{E}$, τότε κάθε τομή $l \in e^*$ είναι χάσμα και από την παρατήρηση 2.2.1,2) προκύπτει ότι $l^* = \{l\}$.

Θεώρημα 2.2.1 Έστω $\leq$ η υπό της προδιάταξης R επαγόμενη διάταξη επί του E^*. Τότε ο περιορισμός στο $\mathrm{E} \bigcup L(\mathrm{E})$ της κανονικής απεικόνισης του $C^*(\mathrm{E}) = \mathrm{E} \bigcup C(\mathrm{E})$ επί του E^* συνιστά ισομορφισμό της δομής $(\mathrm{E} \bigcup L(\mathrm{E}), R)$ επί της δομής $(\mathrm{E}^*, \leq)$.

Συνεπώς, το σύνολο E^* μπορεί να θεωρηθεί ότι ταυτίζεται με το σύνολο $\mathrm{E} \bigcup L(\mathrm{E})$ και η διάταξη αυτού μπορεί να θεωρηθεί επέκταση της διάταξης του υποσυνόλου του E.

Ορισμός 2.2.1 Η κατά τα ανωτέρω οριζόμενη δομή διάταξης $\mathcal{E}_D = \left(\mathrm{E}^*, \leq\right)$ καλείται *συμπλήρωμα Dedekind* της δομής $\left(\mathrm{E}, \leq\right)$.

2.3 Συμπλήρωμα Kurepa

Θεωρούμε τη δομή διάταξης $\left(\mathrm{E}, \leq\right)$ που ορίσαμε σε προηγούμενη παράγραφο. Με $C^-\left(\mathrm{E}\right)$ και $C^+\left(\mathrm{E}\right)$ θα συμβολίζονται τα σύνολα των κάτω και άνω τάξεων, αντίστοιχα, των τομών του $C\left(\mathrm{E}\right)$. Στο σύνολο $\mathrm{E} \cup C^-\left(\mathrm{E}\right) \cup C^+\left(\mathrm{E}\right)$ ορίζουμε μία διμελή σχέση R ως εξής:

Αν x, y στοιχεία του Ε και $\left(A, B\right)$, $\left(A', B'\right)$ τομές του $C\left(\mathrm{E}\right)$ τότε

(α) $xRy \Leftrightarrow x \leq y$

(β) $xRA \Leftrightarrow x \in A$

(γ) $ARx \Leftrightarrow x \in B$ ή $x = \max A$

(δ) $xRB \Leftrightarrow x \in A$ ή $x = \min B$

(ε) $BRx \Leftrightarrow x \in B$

(στ) $ARA' \Leftrightarrow A \subseteq A'$

(ζ) $ARB' \Leftrightarrow A \subseteq A'$ ή υπάρχει $x \in E$: $\max A = x = \min B'$

(η) $BRA' \Leftrightarrow B \supset B'$

(θ) $BRB' \Leftrightarrow B \supseteq B'$

Πρόταση 2.3.1 Η σχέση R είναι μία προδιάταξη στο σύνολο $\mathrm{E} \cup C^-\left(\mathrm{E}\right) \cup C^+\left(\mathrm{E}\right)$.

Πρόταση 2.3.2 Έστω $\sim$ η σχέση ισοδυναμίας που αντιστοιχεί στην προδιάταξη R. Τότε για οποιαδήποτε στοιχεία e_1 και e_2 του συνόλου $\mathrm{E} \cup C^-\left(\mathrm{E}\right) \cup C^+\left(\mathrm{E}\right)$ ισχύουν

α. Αν $e_1 \in \mathrm{E}$ και $e_2 \in C^-\left(\mathrm{E}\right) \cup C^+\left(\mathrm{E}\right)$, τότε $e_1 \sim e_2 \Leftrightarrow e_1$ είναι άκρο στοιχείο της e_2.

β. Αν e_1 και e_2 τάξεις του $C^-\left(\mathrm{E}\right)$ (αντίστοιχα $C^+\left(\mathrm{E}\right)$), τότε $e_1 \sim e_2 \Leftrightarrow e_1 = e_2$.

γ. Αν $e_1 \in C^-\left(\mathrm{E}\right)$ και $e_2 \in C^+\left(\mathrm{E}\right)$, τότε $e_1 \sim e_2 \Leftrightarrow$ υπάρχει $x \in \mathrm{E}$ τέτοιο ώστε $\max e_1 = x = \min e_2$.

δ. Αν $e_1 \in \mathrm{E}$ και $e_2 \in \mathrm{E}$, τότε $e_1 \sim e_2 \Leftrightarrow e_1 = e_2$.

Παρατηρήσεις 2.3.1

1. Η $\sim$ είναι η λεπτοτέρα σχέση ισοδυναμίας από αυτές που μπορούν να οριστούν στο σύνολο $\mathrm{E} \bigcup C^{-}(\mathrm{E}) \bigcup C^{+}(\mathrm{E})$ και που έχουν την ιδιότητα (α) της πρότασης 2.3.2.

2. Αν l και l' είναι τάξεις χωρίς άκρα , τότε $l \sim l' \Leftrightarrow l = l'$.

3. Έστω $L(\mathrm{E})$ το σύνολο των τομών του Ε που δεν έχουν άκρα στοιχεία. Η προδιάταξη R περιοριζόμενη στο σύνολο $\mathrm{E} \bigcup L(\mathrm{E})$ είναι διάταξη.

Έστω $\tilde{\mathrm{E}}$ το σύνολο $\mathrm{E} \bigcup C^{-}(\mathrm{E}) \bigcup C^{+}(\mathrm{E}) \big/ \sim$. Για κάθε κλάση ισοδυναμίας $\tilde{e} \in \tilde{\mathrm{E}}$ ισχύουν:

α. Αν η $\tilde{e}$ περιέχει ένα $x \in \mathrm{E}$, τότε θα περιέχει και κάθε τάξη τομής με άκρο στοιχείο x, δηλαδή τα σύνολα I_x και S_x που είναι στοιχεία του συνόλου $C^{-}(\mathrm{E}) \bigcup C^{+}(\mathrm{E})$. Από την πρόταση 2.3.2, προκύπτει ότι η κλάση $\tilde{e}$ δεν μπορεί να έχει κανένα άλλο στοιχείο, εκτός από τα παραπάνω. Συνεπώς είναι της μορφής $\{x, I_x, S_x\}$ ή $\{x, I_x\}$ ή $\{x, S_x\}$ ή $\{x\}$.

β. Αν η $\tilde{e}$ δεν περιέχει κανένα στοιχείο του Ε κι έστω l μία τάξη τομής της κλάσης $\tilde{e}$, τότε από την πρόταση 2.3.2 , προκύπτει ότι η τάξη l δεν έχει ακρότατο, δηλαδή $l \in L(\mathrm{E})$ και από την παρατήρηση 2.3.1,2 προκύπτει ότι $\tilde{e} = \{l\}$.

Θεώρημα 2.3.1 Έστω $\leq$ η υπό της προδιάταξης R επαγόμενη διάταξη επί του $\tilde{\mathrm{E}}$. Τότε ο περιορισμός στο σύνολο $\mathrm{E} \bigcup L(\mathrm{E})$ της απεικόνισης του $\mathrm{E} \bigcup C^{-}(\mathrm{E}) \bigcup C^{+}(\mathrm{E})$ επί του $\tilde{\mathrm{E}}$ συνιστά ισομορφισμό της δομής $(\mathrm{E} \bigcup L(\mathrm{E}), R)$ επί της δομής $(\tilde{\mathrm{E}}, \leq)$.

Επομένως το σύνολο $\tilde{\mathrm{E}}$ μπορεί να θεωρηθεί ότι ταυτίζεται με το σύνολο $\mathrm{E} \bigcup L(\mathrm{E})$ και η διάταξη αυτού να θεωρηθεί ως επέκταση της διάταξης του υποσυνόλου του Ε.

Ορισμός 2.3.1 Η κατά τα ανωτέρω οριζόμενη δομή $(\tilde{\mathrm{E}}, \leq)$ καλείται *συμπλήρωμα Kurepa* της δομής $(\mathrm{E}, \leq)$.

Σύμφωνα με τα όσα αναφέρθηκαν, κάθε στοιχείο $\tilde{e} \in \tilde{\mathrm{E}}$ μπορεί να θεωρηθεί ή στοιχείο του E ή τάξη τομής χωρίς άκρο στοιχείο, δηλαδή στοιχείο του $L(\mathrm{E})$. Έστω $l \in L(\mathrm{E})$. Τότε η τάξη l ή θα είναι κάτω τάξη χάσματος $l \in L(\mathrm{E})$ και θα σημειώνεται με l^-, αντίστοιχα άνω τάξη χάσματος και θα σημειώνεται με l^+ ή θα είναι της μορφής I'_x οπότε θα σημειώνεται με x^-, αντίστοιχα της μορφής S'_x οπότε θα σημειώνεται με x^+. Αν για κάθε $x \in \mathrm{E}$, θέσουμε $x = x^0$, τότε κάθε στοιχείο $\tilde{e} \in \tilde{\mathrm{E}}$ μπορεί να θεωρηθεί με τη μορφή e^{ξ}, όπου e είναι στοιχείο του συνόλου E^*, που είναι φορέας του συμπληρώματος Dedekind της δομής $(\mathrm{E}, \leq)$. Το e καλείται *τιμή Dedekind* του στοιχείου $\tilde{e}$ και ξ ένα από τα σύμβολα $\{-, 0, +\}$, το οποίο καλούμε *είδος* του $\tilde{e}$. Αν θεωρήσουμε ότι τα σύμβολα $\{-, 0, +\}$ διατάσσονται κατά φυσικό τρόπο, δηλαδή $- < 0 < +$, τότε ισχύει η παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 2.3.3 Έστω τα στοιχεία $\tilde{e}_1$ και $\tilde{e}_2$ του E, των οποίων οι τιμές Dedekind είναι e_1 , e_2 και το είδος ξ_1 , ξ_2 αντίστοιχα, τότε ισχύει

$$\tilde{e}_1 < \tilde{e}_2 \Leftrightarrow e_1 < e_2$$

$$\text{ή} \qquad e_1 = e_2 \text{ και } \xi_1 < \xi_2 .$$

Παρατηρήσεις 2.3.2

1. Έστω (A, B) τομή του $C(\mathrm{E})$. Τότε

α) Οι τάξεις A και B της τομής έχουν κοινή τιμή Dedekind.

β) Ισχύει $A < B$ και δεν υπάρχει $\tilde{e} \in \tilde{\mathrm{E}}$ τέτοιο ώστε $A < \tilde{e} < B$.

2. Υπάρχουν δύο στοιχεία του $\tilde{\mathrm{E}}$, τα οποία έχουν τιμή Dedekind 0^* (αντίστοιχα ∞^*). Είναι τα στοιχεία που αντιστοιχούν στην τομή $(\varnothing, \mathrm{E})$ (αντίστοιχα $(\mathrm{E}, \varnothing)$). Αυτά μπορεί να θεωρηθούν ότι ταυτίζονται με το ελάχιστο (αντίστοιχα μέγιστο) στοιχείο του $\tilde{\mathrm{E}}$, το οποίο θα συμβολίζουμε με $\tilde{0}$ (αντίστοιχα $\tilde{\infty}$). Αν υπάρχει το $0 \in \mathrm{E}$ (αντίστοιχα $\infty \in \mathrm{E}$) τότε προφανώς έχουμε $\tilde{0} = 0$ (αντίστοιχα $\tilde{\infty} = \infty$).

2.4 Ιδιότητες του συμπληρώματος Kurepa

Λήμμα 2.4.1 Έστω $\left(\tilde{A},\tilde{B}\right)$ μία τομή στο $\tilde{\mathrm{E}}$, A το ίχνος επί του E του συνόλου $\tilde{A}$ (αντίστοιχα B το ίχνος επί του E του $\tilde{B}$) και $\tilde{e}$ στοιχείο του $\tilde{A}$(αντίστοιχα $\tilde{B}$) είδους $\xi \neq 0$. Αν $\left(A_1,B_1\right)$ είναι η υπό του $\tilde{e}$ οριζόμενη τομή του $C\left(\mathrm{E}\right)$, τότε ισχύουν

α) $A_1 \leq \tilde{e}$ και $B_1 \geq \tilde{e}$.

β) $A_1 \subseteq A$ (αντίστοιχα $B_1 \subseteq B$).

Απόδειξη

α) Προκύπτει άμεσα από την παρατήρηση 2.3.2,1β).

β) $A_1 \leq \tilde{e} \Rightarrow A_1 \in \tilde{A}$. Επιπλέον, για κάθε $a_1 \in A_1$ ισχύει $a_1 \leq A_1$, άρα $a_1 \in \tilde{A}$ και επειδή $a_1 \in \mathrm{E}$, θα έχουμε τελικά $a_1 \in A$. Συνεπώς $A_1 \subseteq A$.

Λήμμα 2.4.2 Έστω $\left(\tilde{A},\tilde{B}\right)$ τομή στο $\tilde{\mathrm{E}}$. Αν A,B είναι τα ίχνη στο E των τάξεων $\tilde{A},\tilde{B}$ αντίστοιχα, τότε το ζεύγος $\left(A,B\right)$ είναι τομή στο E.

Απόδειξη

Θα δείξουμε ότι ισχύουν οι συνθήκες του ορισμού 2.1.1

(1) Για κάθε $a \in A$ και για κάθε $b \in B$ ισχύει $a \in \tilde{A}$ και $b \in \tilde{B}$. Επομένως, εφόσον το ζεύγος $\left(\tilde{A},\tilde{B}\right)$ είναι τομή, θα έχουμε $a < b$.

(2) Έστω $a \in A$ τέτοιο ώστε να ισχύει $b > a$. Θα δείξουμε ότι $b \in B$. Θεωρούμε στοιχείο $\tilde{e}$ του $\tilde{A}$, είδους $\xi \neq 0$ και την υπό του $\tilde{e}$ οριζόμενη τομή $\left(A_1,B_1\right)$. Επειδή $A_1 \subseteq A$, για κάθε $a_1 \in A_1$ ισχύει $b > a_1$, άρα $b \in B_1$, δηλαδή $b \geq B_1$. Επίσης επειδή $B_1 \geq \tilde{e}$ θα είναι τελικά $b \geq \tilde{e}$. Αλλά δεν μπορεί να είναι $b = \tilde{e}$, γιατί $\xi \neq 0$. Άρα $b > \tilde{e}$. Το ίδιο ισχύει και για τα στοιχεία $\tilde{e}$ του $\tilde{A}$ είδους 0. Δηλαδή, για κάθε $\tilde{e} \in \tilde{A}$ είναι $b > \tilde{e}$, συνεπώς $b \in \tilde{B}$ και επειδή $b \in \mathrm{E}$, έχουμε τελικά $b \in B$.

(3) Αντίστοιχα αποδεικνύεται ότι πληρούται και η συνθήκη **(3)**, δηλαδή

$$\left(\forall b \in B\right)\ \left[a < b\right] \Rightarrow a \in A.$$

Λήμμα 2.4.3 Αν το ίχνος (A,B) επί του Ε τομής $(\tilde{A},\tilde{B})$ στο $\tilde{\mathrm{E}}$ είναι άλμα, τότε και η τομή $(\tilde{A},\tilde{B})$ είναι άλμα με τα ίδια άκρα στοιχεία.

Απόδειξη

Έστω $x=\max A$. Το x ανήκει και στο $\tilde{A}$. Θα δείξουμε ότι για κάθε $\tilde{e}\in\tilde{A}$ είναι $x\geq\tilde{e}$, το οποίο ισχύει από υπόθεση, αν το είδος ξ του $\tilde{e}$ είναι 0. Έστω $\xi\neq 0$ και (A_1,B_1) η υπό του $\tilde{e}$ οριζόμενη τομή του $C(\mathrm{E})$. Επειδή $A_1\subseteq A$ συνεπάγεται ότι για κάθε $a_1\in A$ είναι $x\geq a_1$. Έστω ότι υπάρχει $a_1^*\in A_1$ τέτοιο ώστε $a_1^*=x$. Τότε θα ήταν $A_1=I_x=A$ και άρα $(A_1,B_1)=(A,B)$, πράγμα άτοπο , γιατί η τομή (A_1,B_1) δεν είναι άλμα. Άρα για κάθε $a_1\in A_1$ είναι $x>a_1$, επομένως $x\in B_1$, δηλαδή $x\geq B_1$. Επιπλέον, επειδή $B_1\geq\tilde{e}$, θα είναι $x\geq\tilde{e}$, δηλαδή $x=\max\tilde{A}$. Αντίστοιχα αποδεικνύεται ότι αν $y=\min B$, τότε $y=\min\tilde{B}$ και επομένως η τομή $(\tilde{A},\tilde{B})$ είναι άλμα.

Θεώρημα 2.4.1 Το σύνολο $\tilde{\mathrm{E}}$ δεν έχει χάσματα.

Απόδειξη

Έστω $(\tilde{A},\tilde{B})$ τομή στο $\tilde{\mathrm{E}}$, η οποία έχει ίχνος επί του Ε την τομή (A,B). Αν η τομή (A,B) είναι άλμα τότε, σύμφωνα με το λήμμα 2.4.3, και η τομή $(\tilde{A},\tilde{B})$ είναι άλμα. Υποθέτουμε ότι η τομή $(\tilde{A},\tilde{B})$ δεν είναι άλμα, οπότε $(A,B)\in C(\mathrm{E})$. Θα δείξουμε ότι ή η τάξη B είναι το μέγιστο στοιχείο της τάξης $\tilde{A}$ ή η τάξη A είναι το ελάχιστο στοιχείο της τάξης $\tilde{B}$. Πράγματι, έστω τυχαίο σημείο $\tilde{e}\in\tilde{A}$ είδους ξ. Τότε

- Αν $\xi=0$, θα είναι $\tilde{e}\in A$, δηλαδή $\tilde{e}\leq A$. Άρα $\tilde{e}\leq A<B$ (1).
- Αν $\xi\neq 0$ και (A_1,B_1) η υπό του $\tilde{e}$ οριζόμενη τομή, τότε σύμφωνα με το λήμμα 2.4.1,β είναι $A_1\subseteq A$, συνεπώς $B_1\supseteq B$ δηλαδή $B\geq B_1$. Επίσης, από το λήμμα 2.4.1,α έχουμε $B_1\geq\tilde{e}$ και τελικά $B\geq\tilde{e}$ (2).

Αντίστοιχα συμπεραίνουμε ότι για κάθε $\tilde{e}'\in\tilde{B}$ είδους ξ' ισχύουν

- Αν $\xi'=0$, τότε $A<B\leq\tilde{e}'$ (3).
- Αν $\xi'\neq 0$, τότε $A\leq\tilde{e}'$ (4).

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι για κάθε $\tilde{e} \in \tilde{A}$ ισχύει $B \geq \tilde{e}$. Άρα έχουμε ή $B = \max \tilde{A}$ ή $B \in \tilde{B}$. Τότε, αν e^* η τιμή Dedekind ενός $\tilde{e} \in \tilde{A}$ και d^* η κοινή τομή Dedekind των A και B, θα έχουμε $e^* \leq d^*$ και $\tilde{e} \leq A$ για κάθε $\tilde{e} \in \tilde{A}$. Επομένως, ή $A = \max \tilde{A}$ και $B = \min \tilde{B}$, το οποίο έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση ότι η τομή $\left(\tilde{A}, \tilde{B}\right)$ δεν είναι άλμα ή $A \in \tilde{B}$ οπότε από τις σχέσεις (3) και (4) θα είναι $A = \min \tilde{B}$.

2.5 Συμπλήρωμα Krasner

Ορισμός 2.5.1 Έστω $(\mathrm{E}, <)$ ένα σύνολο μερικώς διατεταγμένο, A ένα υποσύνολο του Ε και $\prec$ μία ολική διάταξη επί του A.

1) Αν $a \in A$, τότε το σύνολο $A_a = \{x \in A : a \preceq x\}$ καλείται *τελικό απόκομμα* της δομής ολικής διάταξης $(A, \prec)$.

2) Η δομή ολικής διάταξης $(A, \prec)$ καλείται *μονότονη*, αν η διάταξη $\prec$ είναι ο περιορισμός στο A της διάταξης $<$ ή της διάταξης $>$ και ειδικότερα, αν η $\prec$ ταυτίζεται με τον περιορισμό στο A της $<$, καλείται *συντελική* της $(\mathrm{E}, <)$, ενώ αν η $\prec$ ταυτίζεται με τον περιορισμό στο A της $>$, καλείται *αντιτελική* της $(\mathrm{E}, <)$.

Παρατήρηση 2.5.1 Είναι προφανές ότι η δομή $(A, \prec)$ δεν μπορεί να είναι συγχρόνως συντελική και αντιτελική, εκτός αν το A είναι το μονοσύνολο $\{a\}$, όπου $a \in \mathrm{E}$.

Ορισμός 2.5.2 Η δομή ολικής διάταξης $(A, \prec)$ καλείται *ασυμπτωτικώς μονότονη*, αν υπάρχει ένα τελικό απόκομμα A_a της $(A, \prec)$ τέτοιο ώστε η δομή ολικής διάταξης $(A_a, \prec)$ να είναι μονότονη. Στην περίπτωση αυτή το a καλείται *αρχή της μονοτονίας*.

Ορισμός 2.5.3 Αν η μονότονη δομή ολικής διάταξης $(A_a, \prec)$ έχει τελευταίο στοιχείο, έστω το a^*, τότε η δομή $(A_{a^*}, \prec) = (\{a^*\}, \prec)$ είναι συγχρόνως συντελική και αντιτελική. Στην περίπτωση αυτή η δομή ολικής διάταξης $(A_a, \prec)$ καλείται *ασυμπτωτικώς σταθερά* (αυτό δε σημαίνει ότι έχει πεπερασμένο πλήθος στοιχείων).

Ορισμός 2.5.4 Αν η μονότονος δομή $(A_a, \prec)$ δεν είναι ασυμπτωτικώς σταθερά, δηλαδή δεν έχει τελευταίο στοιχείο, τότε, για κάθε $a \in A$, οι δομές $(A, \prec)$ είναι όλες συντελικές ή αντιτελικές. Στην περίπτωση αυτή η δομή ολικής διάταξης $(A, \prec)$ καλείται αντίστοιχα *ασυμπτωτικώς συντελική* ή *ασυμπτωτικώς αντιτελική*.

Ορισμός 2.5.5 Δύο δομές ασυμπτωτικώς μονότονες $(A, \prec_1)$ και $(B, \prec_2)$ καλούνται *ισοδύναμες* και γράφουμε $(A, \prec_1) \equiv (B, \prec_2)$, αν για κάθε αρχή μονοτονίας a της $(A, \prec_1)$ και για κάθε αρχή μονοτονίας b της $(B, \prec_2)$ υπάρχουν $x \in A_a$, $y \in B_b$ και $z \in A_a$ τέτοια ώστε $x \preceq_1 z$ και $y \in [x, z]$, όπου $[x, z]$ διάστημα εντός του διατεταγμένου συνόλου $(\mathrm{E}, <)$.

Πρόταση 2.5.1 Η σχέση $\equiv$ εντός του συνόλου των δομών ολικής διάταξης της δομής $(\mathrm{E}, <)$ είναι σχέση ισοδυναμίας.

Απόδειξη

Εξ'ορισμού, η σχέση $\equiv$ είναι αυτοπαθής . Έστω $(A, \prec_1)$ και $(B, \prec_2)$ δύο δομές ολικής διάταξης της δομής $(\mathrm{E}, <)$ που πληρούν τη σχέση $\equiv$.

(α) Έστω ότι η $(A, \prec_1)$ έχει τελευταίο στοιχείο το a^*, τότε από τον ορισμό της σχέσης $\equiv$ έπεται ότι το a^* είναι υποχρεωτικά τελευταίο στοιχείο της $(B, \prec_2)$ και η συνθήκη ορισμού της $\equiv$ πληρούται ως εξής: $y = z = a^*$.

(β) Αν οι δομές $(A, \prec_1)$ και $(B, \prec_2)$ δεν έχουν τελευταίο στοιχείο, τότε αυτές είναι συγχρόνως ασυμπτωτικώς συντελικές ή συγχρόνως ασυμπτωτικώς αντιτελικές. Πράγματι, έστω ότι η $(A, \prec_1)$ είναι ασυμπτωτικώς συντελική χωρίς τελευταίο στοιχείο και ότι η $(B, \prec_2)$ είναι ασυμπτωτικώς αντιτελική. Αν a, b είναι δύο αρχές μονοτονίας των $(A, \prec_1)$ και $(B, \prec_2)$ αντίστοιχα, τότε από τον ορισμό της σχέσης $\equiv$ υπάρχουν x και z στοιχεία του A και στοιχείο y του B τέτοια ώστε $a \preceq_1 x \preceq z$,

$b \preceq_2 y$ και $x \le y \le z$. Συνεπώς, $\left(\forall y' \in B_y\right)\left[\, y' \le y \le z \,\right]$(1). Επειδή υποθέσαμε ότι η συγκεκριμένη δομή $\left(A, \prec_1\right)$ δεν έχει τελευταίο στοιχείο και ότι αυτή είναι συντελική, έπεται άμεσα ότι $\left(\exists a' \in A\right)\left[z \prec_1 a'\right] \Rightarrow \left(\exists a' \in A\right)\left[z < a'\right]$ (2). Από τις σχέσεις (1) και (2) μπορούμε να πάρουμε $\left(\forall x' \in A_{a'}\right)\left(\forall y' \in B_y\right)\left[y' < x'\right]$ από όπου προκύπτει ότι δεν υπάρχουν $y' \in B_y$ και $z' \in A_{a'}$ τέτοια ώστε $y' \in \left[x', z'\right]$. Άρα $\left(A, \prec_1\right) \not\equiv \left(B, \prec_2\right)$.

(γ) Θα δείξουμε ότι η σχέση $\equiv$ είναι σχέση ισοδυναμίας.

γ1) Αν η $\left(A, \prec_1\right)$ έχει ως τελευταίο στοιχείο το a^*, τότε , όπως έχουμε δει στην περίπτωση (α) , η ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι $\left(A, \prec_1\right) \equiv \left(B, \prec_2\right)$, είναι το a^* να είναι τελευταίο στοιχείο της δομής $\left(B, \prec_2\right)$, όπου για τη συγκεκριμένη περίπτωση είναι προφανής η συμμετρικότητα και η μεταβατικότητα της σχέσης $\equiv$.

γ2) Αν η $\left(A, \prec_1\right)$ δεν έχει τελευταίο στοιχείο και $\left(A, \prec_1\right) \equiv \left(B, \prec_2\right)$, τότε σύμφωνα με τα (α) και (β), η δομή $\left(B, \prec_2\right)$ επίσης δεν έχει τελευταίο στοιχείο και έτσι οι δομές είναι συντελικές ή αντιτελικές. Έστω ότι είναι συντελικές. Αν a, b είναι δύο αρχές μονοτονίας των $\left(A, \prec_1\right)$ και $\left(B, \prec_2\right)$ αντίστοιχα και $x \in B_b$, τότε υπάρχει ένα $y \in A_a$ τέτοιο ώστε $x \le y$, δηλαδή $\left(\forall x \in B_b\right)\left(\exists y \in A_a\right)\left[x \le y\right]$ (3). Πράγματι, από τον ορισμό της σχέσης $\left(A, \prec_1\right) \equiv \left(B, \prec_2\right)$ υπάρχουν $u \in A_a$, $v \in B_x$ και $y \in A_a$ τέτοια ώστε $u \le v \le y$ (4) και επειδή $v \in B_x \Rightarrow x \le v$, από την (4) έχουμε $x \le v \le y$, δηλαδή $x \le y$. Θεωρούμε τα αποκόμματα A_y, B_x με $x \le y$. Τότε, από τον ορισμό της σχέσης $\left(A, \prec_1\right) \equiv \left(B, \prec_2\right)$, έπεται ότι υπάρχουν $w \in A_y$, $w' \in A_y$ και $z \in B_x$ τέτοια ώστε ($w \le z \le w' \Rightarrow z \ge w \ge y$) και ($y \ge x \Rightarrow x \le y \le z$). Άρα $\left(B, \prec_2\right) \equiv \left(A, \prec_1\right)$.

(δ) Έστω ότι η δομή $\left(B, \prec_2\right)$ πληροί τη σχέση $\equiv$ με τη $\left(\Gamma, \prec_3\right)$, δηλαδή $\left(B, \prec_2\right) \equiv \left(\Gamma, \prec_3\right)$ (5). Θα δείξουμε ότι $\left(A, \prec_1\right) \equiv \left(\Gamma, \prec_3\right)$. Από την (5) προκύπτει ότι η δομή $\left(\Gamma, \prec_3\right)$ δεν έχει τελευταίο στοιχείο και είναι συντελική, όπως και η $\left(B, \prec_2\right)$. Έστω a, b, c τρεις τυχαίες αρχές μονοτονίας των δομών $\left(A, \prec_1\right)$, $\left(B, \prec_2\right)$ και $\left(\Gamma, \prec_3\right)$ αντίστοιχα. Αν $x \in A_a$, τότε από τη σχέση $\left(A, \prec_1\right) \equiv \left(B, \prec_2\right)$ έπεται ότι υπάρχει ένα $y' \in B_b$ τέτοιο ώστε $x \le y'$ (6). Ομοίως, από τη σχέση $(B, \prec_2) \equiv (\Gamma, \prec_3)$ έπεται ότι υπάρχουν $y \in \Gamma_c$ και $z' \in B_b$ τέτοια ώστε $y' \le y \le z'$ (7). Εξάλλου η σχέση $(B, \prec_2) \equiv (A, \prec_1)$ συνεπάγεται την ύπαρξη ενός $z \in A_a$ τέτοιου ώστε $z' \le z$ (8). Από τις (6), (7), (8) έχουμε ($x \le y' \le y \le z' \le z \Rightarrow x \le y \le z$). Άρα $(A, \prec_1) \equiv (\Gamma, \prec_3)$. Αντίστοιχα γίνεται η απόδειξη της μεταβατικότητας στην περίπτωση που η δομή $(A, \prec_1)$ είναι αντιτελική.

Πρόταση 2.5.2 Σε κάθε ασυμπτωτικώς μονότονη δομή ολικής διάταξης $\mathrm{a} = (A, \prec)$ του $(\mathrm{E}, <)$ μπορούμε να αντιστοιχίσουμε ένα ορισμένο στοιχείο $\overline{\mathrm{a}}$ του συμπληρώματος Kurepa του $(\mathrm{E}, <)$.

Απόδειξη

α) Αν υποθέσουμε ότι η δομή a έχει τελευταίο στοιχείο έστω a^*, τότε παίρνουμε ως $\overline{\mathrm{a}}$ την τάξη ισοδυναμίας του a^* mod $\sim$.

β) Υποθέτουμε ότι η δομή a δεν έχει τελευταίο στοιχείο και ότι είναι συντελική. Έστω a μία αρχή μονοτονίας της a και $\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2$ δύο υποσύνολα του E, τα οποία ορίζονται ως εξής $\mathrm{E}_1 = \{u : u \in \mathrm{E} \wedge (\forall v \in \mathrm{E}_2)[u < v]\}$ και

$\mathrm{E}_2 = \{v : v \in \mathrm{E} \wedge (\forall x \in A_a)[v > x]\}$. Το ζεύγος $(\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2)$ είναι μία τομή του $(\mathrm{E}, <)$, η οποία δεν είναι άλμα. Πράγματι, αν το E_1 έχει μεγαλύτερο στοιχείο, έστω e^* και επειδή από τον ορισμό του E_2 είναι $A_a \subset \mathrm{E}_1$, τότε έχουμε $(\forall x \in A_a)[x \le e^*]$ (1). Επειδή το A_a δεν έχει μεγαλύτερο (τελευταίο) στοιχείο, έπεται ότι $e^* \not\in A_a$. Συνεπώς, από τη σχέση (1) έχουμε $(\forall x \in A_a)[x < e^*]$ (2). Από τη σχέση (2) έπεται ότι $e^* \in \mathrm{E}_2$, το οποίο είναι άτοπο. Άρα το E_1 είναι ένα στοιχείο του συμπληρώματος Kurepa, του οποίου το είδος είναι $-$. Σε αυτήν την περίπτωση θέτουμε $\overline{\mathrm{a}} = \mathrm{E}_1$.

γ) Υποθέτουμε ότι η δομή a δεν έχει τελευταίο στοιχείο και ότι είναι αντιτελική. Έστω a μία αρχή μονοτονίας της a και $\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2$ δύο υποσύνολα του E, τα οποία ορίζονται ως εξής $\mathrm{E}_1 = \{v : v \in \mathrm{E} \wedge (\forall x \in A_a)[v < x]\}$ και

$\mathrm{E}_2 = \{u : u \in \mathrm{E} \wedge (\forall v \in \mathrm{E}_1)[u > v]\}$. Προφανώς, το ζεύγος $(\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2)$ είναι μία τομή του $(\mathrm{E}, <)$, η οποία δεν είναι άλμα, διότι το E_2 δεν έχει τελευταίο στοιχείο. Σε αυτήν την περίπτωση θέτουμε $\overline{\mathrm{a}} = \mathrm{E}_2$, το οποίο είναι στοιχείο του συμπληρώματος Kurepa είδους $+$.

Ορισμός 2.5.6 Έστω $M(\mathrm{E})$ το σύνολο των ασυμπτωτικώς μονότονων δομών ολικής διάταξης του $(\mathrm{E}, <)$ εφοδιασμένο με την ήδη ορισμένη σχέση ισοδυναμίας $\equiv$.

1) Επί του συνόλου $M(\mathrm{E})$ ορίζουμε μία προδιάταξη $\leq$, ως εξής:

$\mathrm{a} = (A, \prec_1) \leq (B, \prec_2) = \mathrm{ß} \Leftrightarrow \mathrm{a} \equiv \mathrm{ß}$ ή υπάρχουν δύο αρχές μονοτονίας a, b των $\mathrm{a}, \mathrm{ß}$ αντίστοιχα, τέτοια ώστε $(\forall x \in A_a)(\forall y \in B_b)[x < y]$.

2) Το σύνολο $\mathrm{E}_{Kr} = M(\mathrm{E})/\equiv$, διατεταγμένο με τη διάταξη η οποία προκύπτει από την προδιάταξη του $M(\mathrm{E})$, καλείται *συμπλήρωμα Krasner* και συμβολίζεται με E_{Kr} ή $(\mathrm{E}, <)_{Kr}$.

Παρατηρήσεις 2.5.2

1) Ένα στοιχείο e του E ταυτίζεται με την τάξη ισοδυναμίας $\mathrm{mod} \equiv$ των δομών a, οι οποίες είναι ασυμπτωτικώς σταθερές με το τελευταίο στοιχείο e.

2) Επειδή από τον ορισμό του στοιχείου $\overline{\mathrm{a}}$ του Kurepa έχουμε $(\forall \mathrm{a} \in M(\mathrm{E}))(\forall \mathrm{ß} \in M(\mathrm{E}))[a \equiv \mathrm{ß} \rightarrow \overline{\mathrm{a}} = \overline{\mathrm{ß}}]$, το $\overline{\mathrm{a}}$ εξαρτάται μόνο από την τάξη C_{a} του a $\mathrm{mod} \equiv$ και καλείται *τιμή Kurepa* της τάξης $C_{\mathrm{a}} \in \mathrm{E}_{Kr}$ και σημειώνεται με $\overline{C}_{\mathrm{a}}$.

3) Αν $\overline{C}_{\mathrm{a}}$ είναι η τιμή του Kurepa του στοιχείου C_{a} του E_{Kr}, τότε η τιμή $d(\overline{C}_{\mathrm{a}})$ του Dedekind του $\overline{C}_{\mathrm{a}}$ καλείται *τιμή Dedekind* του $C_{\mathrm{a}} \in \mathrm{E}_{Kr}$.

4) Το είδος $\xi(\overline{C}_{\mathrm{a}})$ του $\overline{C}_{\mathrm{a}}$ καλείται είδος του $C_{\mathrm{a}} \in \mathrm{E}_{Kr}$.

5) Αν C και C^* είναι δύο στοιχεία του E_{Kr}, τότε προφανώς έχουμε $C \leq C^* \Rightarrow \overline{C} \leq \overline{C}^*$.

2.6 Επέκταση ενός εσωτερικού νόμου σύνθεσης στο συμπλήρωμα του Krasner

Έστω $(\mathrm{E},<)$ και $(\mathrm{E}',<)$ δύο σύνολα μερικώς διατεταγμένα, f μία συνάρτηση του E στο E' και $\mathrm{E}_{Kr}=\left(\hat{\mathrm{E}},<\right)$, $\mathrm{E}'_{Kr}=\left(\hat{\mathrm{E}}',<\right)$ τα συμπληρώματα Krasner των $(\mathrm{E},<)$ και $(\mathrm{E}',<)$, αντίστοιχα.

Ορισμός 2.6.1 Έστω $\hat{e}\in\hat{\mathrm{E}}$ και $\mathrm{a}=(\mathrm{A},\prec)\in\hat{e}$. Λέμε ότι η συνάρτηση f είναι *ασυμπτωτικώς ορισμένη* επί του a, αν υπάρχει $a\in A$ τέτοιο ώστε οι αντίστροφες εικόνες των στοιχείων $e'\in f(A_a)$ να είναι διαστήματα της δομής $(A_a,\prec)$, δηλαδή $(\exists a\in A)(\forall e'\in f(A_a))\left[f^{-1}(e')=I\right]$, όπου I είναι διάστημα της δομής ολικής διάταξης $(A_a,\prec)$.

Ορισμός 2.6.2 Αν η f είναι ασυμπτωτικώς ορισμένη επί του $\mathrm{a}\in M(\mathrm{E})$, τότε από τη διάταξη $\prec$ του a ορίζεται μία διάταξη $\prec_f$ επί του $f(\mathrm{a})$ ως εξής: $(\forall x\in A_a)(\forall y\in A_a)\left[f(x)\prec_f f(y)\sim x\prec y\right]$, διότι το σύνολο $f^{-1}\left(f(x)\right)\cap A_a$ είναι ένα διάστημα εντός του A_a. Το ζεύγος $\left(f(A_a),\prec_f\right)=f(\mathrm{a})$ καλείται *ασυμπτωτική εικόνα* της a.

Ορισμός 2.6.3 Αν $\mathrm{a}=(A,\prec)$ είναι μία δομή ολικής διάταξης και $B\subset A$, τότε με τον περιορισμό της διάταξης $\prec$ στο υποσύνολο B ορίζεται μία δομή ολικής διάταξης $(B,\prec)$, η οποία καλείται *συμπερατωμένη* της δομής a, αν $(\forall a\in A)\left[A_a\cap B\neq\varnothing\right]$.

Θεώρημα 2.6.1 Έστω E_{Kr}, E'_{Kr} τα συμπληρώματα Krasner των $(\mathrm{E},<)$ και $(\mathrm{E}',<)$ αντίστοιχα και f μία συνάρτηση του E εντός του E'.

1) Αν κάθε $\mathrm{a}\in\hat{e}\in\mathrm{E}_{Kr}$ δέχεται μία ασυμπτωτική εικόνα $f(\mathrm{a}_a)$, η οποία είναι ασυμπτωτικώς μονότονη, τότε οι ασυμπτωτικές εικόνες όλων των $\mathrm{a}\in\hat{e}$ είναι ισοδύναμες $\mathrm{mod}\equiv$.

2) Η συνάρτηση f επεκτείνεται μόνο στα $\hat{e} \in \mathrm{E}_{Kr}$, για τα οποία πληρούται η συνθήκη (1) και το $f(\hat{e})$ είναι εξ'ορισμού η τάξη ισοδυναμίας $\bmod \equiv$ των $f(\mathrm{a}_a)$, όπου $\mathrm{a} \in \hat{e}$ και a είναι μία αρχή μονοτονίας της a.

Απόδειξη

1) Εάν $f(\mathrm{a}_a)$ είναι μία ασυμπτωτική εικόνα μιας δομής $\mathrm{a} \in \hat{e} \in \mathrm{E}_{Kr}$ τότε, σύμφωνα με την υπόθεση, υπάρχει $b \in A$ τέτοιο ώστε η δομή $f(\mathrm{a}_b)$ να υπάρχει και να είναι ασυμπτωτικώς μονότονη. Συνεπώς, υπάρχει ένα $c \geq b$ τέτοιο ώστε το τελικό απόκομμα $f(\mathrm{a}_c)$ της $f(\mathrm{a}_b)$ να είναι μονότονο. Εάν $c' = \max\{a, c\}$ ως προς τη διάταξη $\prec$, τότε η δομή $f(\mathrm{a}_{c'})$ είναι τελικό απόκομμα μονοτονίας της $f(\mathrm{a}_a)$. Έστω $B \subset A$. Εάν $(\forall a \in A)[A_a \cap B \neq \varnothing]$ και $ß = (B, \prec)$ είναι η συμπερατωμένη της $(A, \prec)$, τότε προφανώς $\mathrm{a} \equiv ß$. Αν η $f(\mathrm{a}_a)$ είναι ορισμένη και η $ß$ είναι συμπερατωμένη της a, τότε υπάρχει $b \in B$ τέτοιο ώστε $a \prec b$, $f(B_b)$ ορισμένη και $f(B_b)$ συμπερατωμένη της $f(\mathrm{a}_a)$. Άρα $f(ß_b) \equiv f(\mathrm{a}_a)$.

2) Υποθέτουμε ότι οι $\mathrm{a} = (A, \prec)$, $ß = (B, \prec)$ είναι ασυμπτωτικώς μονότονες και ισοδύναμες $\bmod \equiv$. Θα αποδείξουμε τα εξής:

α) Υπάρχουν δύο μονότονες δομές $\mathrm{a}^* = (A^*, \prec)$, $ß^* = (B^*, \prec)$ συμπερατωμένες των a και $ß$ αντίστοιχα, τέτοιες ώστε $A^* \subseteq A$ και $B^* \subseteq B$.

β) Υπάρχει μία διάταξη $\prec^*$ επί του συνόλου $C^* = A^* \cup B^*$, εκ της οποίας προκύπτουν οι διατάξεις $\prec$ επί των A^*, B^* και τέτοια ώστε η δομή $\Delta = (C^*, \prec^*)$ να είναι αφ'ενός μεν μονότονη, αφ'ετέρου δε συμπερατωμένη των $\mathrm{a}^*, ß^*$. Πράγματι, αν η δομή a έχει μεγαλύτερο στοιχείο, έστω a, τότε προφανώς το a είναι επίσης μεγαλύτερο στοιχείο της δομής $ß$ και μπορούμε να θέσουμε $A^* = B^* = C^* = \{a\}$. Αν δεν υπάρχει μεγαλύτερο στοιχείο των δομών a, $ß$, τότε υποθέτουμε ότι αυτές είναι συντελικές και ότι a, b είναι δύο αρχές μονοτονίας των a, $ß$ αντίστοιχα. Είναι προφανές ότι για κάθε $x \in A_a$, υπάρχουν στοιχεία $y \in B_b$, τα οποία είναι αυστηρώς μεγαλύτερα του x, όπως και ότι για κάθε $x \in B_b$, υπάρχουν στοιχεία $y \in A_a$, τα οποία είναι αυστηρώς μεγαλύτερα του x. Θεωρούμε την υπερπεπερασμένη ακολουθία (c_λ), με το λ να διαγράφει τους διατακτικούς αριθμούς, η οποία κατασκευάζεται ως εξής:

Υποθέτουμε ότι έχουμε κατασκευάσει όλα τα στοιχεία c_τ, τέτοια ώστε $\tau < \lambda$. Στη συνέχεια θέτουμε $C_\lambda = \{c_\tau : \tau < \lambda\}$. Αν $(C_\lambda \bigcap A_a, \prec)$ είναι συμπερατωμένη της $(A_a, \prec)$, τότε θέτουμε $C_\lambda = C^*$, $A^* = C_\lambda \bigcap A_a$ και $B^* = C_\lambda \bigcap B_b$. Αν $(C_\lambda \bigcap A_a, \prec)$ δεν είναι συμπερατωμένη της $(A_a, \prec)$, τότε διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

I) Αν ο λ είναι δευτέρου είδους, δηλαδή δεν υπάρχει διατακτικός αριθμός, ο οποίος να είναι προηγούμενός του, ορίζουμε ως c_λ ένα στοιχείο του A_a τέτοιο ώστε $(\forall x \in C_\lambda \bigcap A_a)[x \prec c_\lambda]$.

II) Αν ο λ είναι πρώτου είδους, δηλαδή υπάρχει προηγούμενός του διατακτικός αριθμός, τότε ο $c_{\lambda-1}$ ή κείται στο A_a ή κείται στο B_b. Αν ο $c_{\lambda-1}$ κείται στο A_a, τότε υπάρχουν $x \in B_b$ τέτοια ώστε $c_{\lambda-1} < x$, διότι οι δομές a,ß είναι συντελικές. Στην περίπτωση αυτή θέτουμε c_λ να είναι ίσο με ένα από τα στοιχεία x. Αν ο $c_{\lambda-1}$ κείται στο B_b, τότε υπάρχουν $x \in A_a$ τέτοια ώστε $c_{\lambda-1} < x$ και στην περίπτωση αυτή θέτουμε c_λ να είναι ίσο με ένα από τα στοιχεία x. Είναι προφανές από την κατασκευή της υπερπεπερασμένης ακολουθίας (c_λ) ότι για κάποιο λ αρκετά μεγάλο, η δομή $(C_\lambda \bigcap A_a, \prec)$ καθίσταται συμπερατωμένη της $(A_a, \prec)$, ενώ η $(C_\lambda \bigcap B_b, \prec)$ καθίσταται συμπερατωμένη της $(B_b, \prec)$. Αν λ είναι διατακτικός αριθμός αρκετά μεγάλος, ώστε να ισχύει το τελευταίο συμπέρασμα, τότε ορίζουμε τη σχέση διάταξης $\prec^*$ εντός του C_λ, ως εξής:

Αν σ και τ είναι διατακτικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $\tau < \sigma$, τότε έχουμε $c_\sigma \prec^* c_\tau$. Είναι προφανές ότι από τη διάταξη $\prec^*$ προκύπτουν οι $\prec$ επί των A_a, B_b ως αντίστοιχοι περιορισμοί της $\prec^*$ στα A_a, B_b και επιπλέον ότι η δομή $(C^*, \prec^*)$ είναι μονότονος. Αν οι δομές a,ß είναι αντιτελικές, τότε πραγματοποιούμε την προηγούμενη κατασκευή, αντικαθιστώντας την $<$ με την $>$. Έστω τα a,ß, a^*, ß^*, C^*, A, B, ορισμένα όπως προηγουμένως και $a^* \in A$, $b^* \in B$ δύο αρχές μονοτονίας των a,ß αντίστοιχα, τέτοιες ώστε αφ'ενός μεν να υπάρχουν οι ασυμπτωτικές εικόνες $f(\mathrm{a}_{a^*})$, $f(\text{ß}_{b^*})$, αφ'ετέρου δε η $f(\mathrm{a}^*_{a^*})$ να είναι συμπερατωμένη των $f(\mathrm{a}_a)$ και

$f\left(C_a^*\right)$, ενώ η $f\left(\mathrm{ß}_{b^*}^*\right)$ να είναι συμπερατωμένη της $f\left(\mathrm{ß}_b\right)$ και της $f\left(C_b^*\right)$, δηλαδή $f\left(\mathrm{a}_a\right) \equiv f\left(\mathrm{a}_{a^*}^*\right) \equiv f\left(\mathrm{ß}_{b^*}^*\right) \equiv f\left(\mathrm{ß}_b\right) = f\left(C_a^*\right)$.

3) Λόγω της 2) αναγόμαστε στον εξής ορισμό:

Αν $\hat{e} \in \mathrm{E}_{Kr}$, τότε ορίζουμε ως $f\left(\hat{e}\right)$ την τάξη ισοδυναμίας $\left(\mathrm{mod} \equiv\right)$ των ασυμπτωτικών εικόνων $f\left(\mathrm{a}_a\right)$, όπου $\mathrm{a} \in \hat{e}$.

Παρατήρηση 2.6.1 Έστω $\left(\mathrm{E}_1, <_1\right)$, $\left(\mathrm{E}_2, <_2\right)$, … , $\left(\mathrm{E}_n, <_n\right)$, $\left(\mathrm{E}', <'\right)$ $\left(n+1\right)$-δομές μερικής διάταξης και f μία συνάρτηση του $\mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2 \times \ldots \times \mathrm{E}_n$ εντός του E'. Θεωρούμε τη μερική δομή διάταξης $\epsilon = \left(\mathrm{E}, <\right)$, όπου $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2 \times \ldots \times \mathrm{E}_n$ και η διάταξη $<$ ορίζεται ως εξής:

$$\left(e_1, e_2, \ldots, e_n\right) < \left(e_1', e_2', \ldots, e_n'\right) \Leftrightarrow e_1 < e_1' \text{ και }, \ldots, \; e_n < e_n'.$$

1) Αν η συνάρτηση f πληροί τις συνθήκες του προηγούμενου θεωρήματος, τότε επεκτείνεται στο E_{Kr}.

2) Αν $\mathrm{E}_1 = \mathrm{E}_2 = \ldots = \mathrm{E}_n = \mathrm{E}' = \mathrm{E}$, τότε η συνάρτηση f μπορεί να θεωρηθεί ως μία n-μελής πράξη εντός του E και οι συνθήκες του προηγούμενου θεωρήματος είναι οι αναγκαίες και ικανές συνθήκες ώστε η εν λόγω πράξη να επεκτείνεται στο E_{Kr}.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΩΝ ΔΟΜΩΝ $(\mathbb{R},+,\cdot,\leq)$ *ΚΑΙ* $(\mathbb{R}^2,+,\cdot,\leq)$ *ΚΑΤΑ DEDEKIND*

«Ο Θεός κατασκεύασε τους φυσικούς αριθμούς και ο άνθρωπος όλους τους άλλους» είπε κάποτε ο Kronecker (1823-1891) και εμείς θα το κάνουμε πράξη σε αυτό το κεφάλαιο, θεωρώντας δεδομένη την αξιωματική θεμελίωση των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$ ως ένα σύνολο που πληροί τις ιδιότητες:

1) Το σύνολο $(\mathbb{N},\leq)$ είναι διατεταγμένο.
2) Κάθε μη κενό υποσύνολό του έχει μικρότερο στοιχείο (καλώς διατεταγμένο).
3) Το $\mathbb{N}$ δεν έχει μεγαλύτερο στοιχείο.
4) Κάθε φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{N}$ έχει μεγαλύτερο στοιχείο.

Εξ'αυτών κατασκευάζουμε αλγεβρικά τους ακέραιους και ρητούς αριθμούς. Στη συνέχεια κατασκευάζουμε τους πραγματικούς αριθμούς με τη βοήθεια των τομών Dedekind, επεκτείνουμε τη διάταξη των φυσικών στο $\mathbb{R}$ και συνεπώς θεμελιώνουμε το $\mathbb{R}$ ως ένα διατεταγμένο σώμα.

3.1 Οι ακέραιοι αριθμοί

Έστω $\mathbb{N}=\{0,1,2,...\}$ οι φυσικοί αριθμοί. Ορίζουμε μία σχέση R στο $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ ως εξής

$(m,n)R(x,y)\Leftrightarrow m+y=x+n$

Λήμμα 3.1.1 Η σχέση R είναι σχέση ισοδυναμίας.

Απόδειξη

(1) Αυτοπαθής, $(m,n)R(m,n) \Leftrightarrow m+n=m+n$.

(2) Αντισυμμετρική, $(m,n)R(x,y) \Leftrightarrow m+y=x+n \Leftrightarrow x+n=m+y \Leftrightarrow (x,y)R(m,n)$

(3) Μεταβατική, $\left.\begin{matrix}(m,n)R(x,y) \Leftrightarrow m+y=x+n \\ (x,y)R(k,z) \Leftrightarrow x+z=k+y\end{matrix}\right\}$συνεπάγεται, προσθέτοντας κατά μέλη, ότι

$m+y+x+z=x+n+k+y \Leftrightarrow m+z+x+y=k+n+x+y \Leftrightarrow m+z=k+n \Leftrightarrow$ $(m,n)R(k,z)$.

Ας εξετάσουμε τώρα τις τάξεις ισοδυναμίας της R.

$(1,0)=\{(1,0),(2,1),(3,2),...\}=\{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}/n=m+1\}$. Θεωρούμε ότι μία τάξη ισοδυναμίας περιγράφει τον αριθμό που πρέπει να προστεθεί στο δεύτερο μέλος κάθε ζεύγους της για να πάρουμε το πρώτο. Με αυτό ως διαισθητικό βοήθημα, η τάξη $(1,0)$ περιγράφει τον ακέραιο αριθμό που αντιστοιχεί στον φυσικό αριθμό 1. Παρόμοια η τάξη $(0,1)=\{(0,1),(1,2),(2,3),..\}$ περιγράφει τον ακέραιο αριθμό που θα συμβολίζουμε με -1, η τάξη $(3,5)$ τον -2 κ.τ.λ.

Ορισμός 3.1.1 Το σύνολο $\mathbb{Z}=\mathbb{N}\times\mathbb{N}/R$ των τάξεων ισοδυναμίας της R ονομάζεται *σύνολο των ακεραίων αριθμών*.

Οι ορισμοί των πράξεων της αριθμητικής του $\mathbb{Z}$ που ακολουθούν θα φανούν πολύ πιο φυσικοί αν έχουμε στο νου μας ότι, διαισθητικά, ένα ζεύγος (m,n) ακεραίων είναι αντιπρόσωπος του ακεραίου που αντιστοιχεί στη διαφορά $m-n$.

Ορισμός 3.1.2 Ορίζουμε δύο συναρτήσεις $\oplus$ και $\odot$ από το $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ στο $\mathbb{Z}$ ως εξής $(m,n)\oplus(x,y)=(m+x,n+y)$ και $(m,n)\odot(x,y)=(mx+ny,my+nx)$.

Χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\oplus$ για την πράξη της πρόσθεσης που ορίζουμε στο $\mathbb{Z}$ για να τονίσουμε ότι ως σύνολο είναι διαφορετική από την πράξη $+$ στους φυσικούς. Όπως συνήθως, θα παραλείπουμε τη συμβολική αυτή διάκριση χρησιμοποιώντας το ίδιο σύμβολο $+$ και για τις δύο πράξεις όταν δεν υπάρχει κίνδυνος για σύγχυση. Πρέπει τώρα, κάθε φορά που δίνουμε έναν ορισμό χρησιμοποιώντας τάξεις ισοδυναμίας, να αποδεικνύουμε ότι ο ορισμός αυτός είναι ανεξάρτητος από την επιλογή των αντιπροσώπων.

Λήμμα 3.1.2 Έστω $(m_1,n_1)R(m_2,n_2)$ και $(x_1,y_1)R(x_2,y_2)$, τότε

(1) $(m_1+x_1,n_1+y_1)R(m_2+x_2,n_2+y_2)$ και

(2) $(m_1x_1+n_1y_1,m_1y_1+n_1x_1)R(m_2x_2+n_2y_2,m_2y_2+n_2x_2)$

Απόδειξη

Αποδεικνύουμε το (1) και αναλόγως αποδεικνύεται το (2). Έστω $m_1+n_2=m_2+n_1$ και $x_1+y_2=x_2+y_1$. Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε

$(m_1+x_1)+(n_2+y_2)=(m_2+x_2)+(n_1+y_1)$. Το συμπέρασμα του (1) προκύπτει από τον ορισμό της σχέσης. Όλες οι αποδείξεις ανεξαρτησίας των αντιπροσώπων είναι αυτού του τύπου.

Έχοντας ορίσει τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού των ακεραίων μπορούμε να αποδείξουμε ως θεωρήματα όλους τους γνωστούς νόμους της αριθμητικής τους.

Θεώρημα 3.1.1 Έστω u,v,w ακέραιοι και $+,\cdot$ οι πράξεις που ορίσαμε στο $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

(1) $u+v=v+u$

(2) $u+(v+w)=(u+v)+w$

(3) $u+0_{\mathbb{Z}}=u$, όπου $0_{\mathbb{Z}}=(0,0)$

(4) $u\cdot v=v\cdot u$

(5) $u\cdot(v\cdot w)=(u\cdot v)\cdot w$

(6) $u\cdot 1_{\mathbb{Z}}=u$, όπου $1_{\mathbb{Z}}=(1,0)$

(7) $u\cdot(v+w)=u\cdot v+u\cdot w$

(8) $u\cdot v=0_{\mathbb{Z}}\Rightarrow(u=0_{\mathbb{Z}})\vee(v=0_{\mathbb{Z}})$

Απόδειξη

Αποδεικνύουμε το (1) και αναλόγως αποδεικνύονται οι υπόλοιπες σχέσεις.

Έστω $u=(m,n)$ και $v=(x,y)$. Τότε $u+v=(m,n)+(x,y)=(m+x,n+y)$ $=(x+m,y+n)=(x,y)+(m,n)=v+u$.

Ορισμός 3.1.3 Για κάθε ακέραιο $u=(m,n)$ συμβολίζουμε με $-u$ τον ακέραιο (n,m) τον οποίο ονομάζουμε τον *αντίθετο* του (m,n).

Ορισμός 3.1.4 Ορίζουμε μία νέα πράξη, την οποία ονομάζουμε *αφαίρεση* τέτοια ώστε, αν $u=(m,n)$ και $v=(x+y)$ τότε $u-v=u+(-v)=(m,n)+(y,x)$.

Η διάταξη του $\mathbb{Z}$.

Συμπληρώνουμε την περιγραφή της δομής του $\mathbb{Z}$ με τον ορισμό μιας ολικής διάταξης σε αυτό. Έχουμε ήδη αξιωματικά τη σχέση $\leq$ ολικής διάταξης στους φυσικούς.

Ορισμός 3.1.5 Ορίζουμε μία σχέση $\leq' \subseteq \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ ως εξής:

$$(m,n)\leq'(x,y)\Leftrightarrow m+y\leq x+n.$$

Έχοντας τονίσει τη διαφορά της σχέσης που ορίσαμε στο $\mathbb{Z}$ από τη σχέση $\leq\subseteq\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ χρησιμοποιώντας το συμβολισμό $\leq'$, θα χρησιμοποιούμε και πάλι το ίδιο σύμβολο $\leq$ και για τις δύο σχέσεις όταν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης.

Λήμμα 3.1.3 Ο ορισμός 3.1.5 είναι ανεξάρτητος από την επιλογή των αντιπροσώπων.

Λήμμα 3.1.4 Το $(\mathbb{Z},\leq)$ είναι ολικώς διατεταγμένο.

Απόδειξη

Έστω $u=(m,n)$, $v=(x,y)$ και $w=(k,l)$

(1) Αυτοπαθής, $u\leq u$ αφού $m+n\leq n+m$.

(2) Αντισυμμετρική, $\left.\begin{array}{r} u\leq v\Rightarrow m+y\leq x+n \\ v\leq u\Rightarrow x+n\leq m+y \end{array}\right\}\Rightarrow m+y=x+n\Rightarrow u=v$.

(3) Μεταβατική,

$$\left.\begin{array}{l} u\leq v\Rightarrow m+y\leq x+n \\ v\leq w\Rightarrow x+l\leq k+y \end{array}\right\}\Rightarrow m+y+x+l\leq x+n+k+y\Rightarrow m+l\leq n+k\Rightarrow u\leq w.$$

(4) Τριχοτομία, έπεται από την ολική διάταξη του $\mathbb{N}$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $u \neq v \Rightarrow m+y \neq x+n \Rightarrow \left[(m+y) \leq (x+n)\right] \vee \left[(x+n) \leq (m+y)\right] \Rightarrow (u \leq v) \vee (v \leq u)$.

Ορισμός 3.1.6 Έστω $u \in \mathbb{Z}$. Αν $(u \neq 0_{\mathbb{Z}}) \wedge u \geq 0_{\mathbb{Z}}$, ο u θα καλείται *θετικός ακέραιος*, ενώ αν $(u \neq 0_{\mathbb{Z}}) \wedge u \leq 0_{\mathbb{Z}}$, ο u θα καλείται *αρνητικός ακέραιος*. Έχουμε λοιπόν τριών ειδών ακεραίους, τους θετικούς, τους αρνητικούς και το (μηδέν) $0_{\mathbb{Z}} = (0,0)$. Από εδώ και στο εξής θα γράφουμε 0 αντί για $0_{\mathbb{Z}}$.

Μέχρι τώρα κατασκευάσαμε τους ακεραίους ως τάξεις ισοδυναμίας των φυσικών και ορίσαμε τη δομή τους. Μπορούμε να εμφυτεύσουμε τους φυσικούς στους ακεραίους, έτσι ώστε να θεμελιώσουμε επίσημα τη διαισθητική εικόνα όπου οι φυσικοί αποτελούν υποσύνολο των ακεραίων. Ορίζουμε τη συνάρτηση $f:\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ με τύπο $f(n) = (n,0)$.

Θεώρημα 3.1.2 (1) Η f είναι αμφιμονοσήμαντη.

(2) $f(m+n) = f(m) + f(n)$, για κάθε $m,n \in \mathbb{N}$.

(3) $f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n)$, για κάθε $m,n \in \mathbb{N}$.

(4) $m \leq n \Leftrightarrow f(m) \leq f(n)$, για κάθε $m,n \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη

(1) $f(m) = f(n) \Rightarrow (m,0) = (n,0) \Rightarrow (m,0) R (n,0) \Rightarrow m = n$.

(2) $f(m+n) = (m+n,0) = (m,0) + (n,0) = f(m) + f(n)$.

(3) $f(m) \cdot f(n) = (m,0) \cdot (n,0) = (m \cdot n + 0, m \cdot 0 + n \cdot 0) = (m \cdot n, 0) = f(m \cdot n)$.

(4) $m \leq n \Leftrightarrow (m,0) \leq (n,0) \Leftrightarrow f(m) \leq f(n)$.

Ορισμός 3.1.7 Μία συνάρτηση ορισμένη όπως η f ονομάζεται *ισομορφική εμφύτευση*.

Αν τώρα ταυτίσουμε κάθε φυσικό με την εικόνα του $f(n)$, μπορούμε αντί για το $\mathbb{N}$ να χρησιμοποιήσουμε την εικόνα του $f(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{Z}$, η οποία έχει ακριβώς την ίδια δομή με το $\mathbb{N}$.

3.2 Οι ρητοί αριθμοί

Όπως κατασκευάσαμε τους ακεραίους από τους φυσικούς, μπορούμε να κατασκευάσουμε τους ρητούς $\mathbb{Q}$ από τους ακεραίους ως τάξεις ισοδυναμίας. Με βάση την κατασκευή αυτή ορίζουμε την υπόλοιπη δομή και αποδεικνύουμε τους νόμους της. Διαισθητικά θέλουμε να περιγράψουμε κάθε ρητό q ως το σύνολο όλων των ζευγών $(u,v)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}-\{0\}$ έτσι ώστε $q=u/v$. Επίσημα το επιτυγχάνουμε με τον ακόλουθο τρόπο. Ορίζουμε μία σχέση S στο $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}-\{0\}$ ως εξής:

$$(u,v)S(w,z)\Leftrightarrow u\cdot z=w\cdot v$$

Λήμμα 3.2.1 Η σχέση S είναι σχέση ισοδυναμίας.

Ορισμός 3.2.1 Το σύνολο $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}-\{0\})\big/S=\mathbb{Q}$ των τάξεων ισοδυναμίας της S ονομάζεται *σύνολο των ρητών αριθμών*.

Ορισμός 3.2.2 Ορίζουμε δύο συναρτήσεις $\oplus$ και $\odot$ από το $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ στο $\mathbb{Q}$, με τιμή

(1) $(u,v)\oplus(w,z)=(uz+wv,vz)$,

(2) $(u,v)\odot(w,z)=(uw,vz)$.

Χωρίς να δημιουργείται σύγχυση θα γράφουμε $+$ και $\cdot$ αντί για $\oplus$ και $\odot$, αντίστοιχα.

Λήμμα 3.2.2 Ο ορισμός 3.2.2 είναι ανεξάρτητος της επιλογής αντιπροσώπων.

Θεώρημα 3.2.1 Έστω q,r,s ρητοί αριθμοί. Τότε

(1) $q+r=r+q$

(2) $q+(r+s)=(q+r)+s$

(3) $q+0_{\mathbb{Q}}=q$, όπου $0_{\mathbb{Q}}=(0,1)$

(4) $q\cdot r=r\cdot q$

(5) $q\cdot(r\cdot s)=(q\cdot r)\cdot s$

(6) $q\cdot 1_{\mathbb{Q}}=q$, όπου $1_{\mathbb{Q}}=(1,1)$

(7) $q\cdot(r+s)=q\cdot r+q\cdot s$

Η διάταξη του $\mathbb{Q}$

Ορίζουμε μία σχέση $\leq''$ στο $\mathbb{Q}$ μέσω της σχέσης $\leq$ του $\mathbb{Z}$ ως εξής:

$$(u,\,v)\leq''(w,\,z)\Leftrightarrow uz\leq wv$$

και αμέσως μετά καταργούμε τη συμβολική διάκριση.

Λήμμα 3.2.3 Ο ορισμός της $\leq''$ είναι ανεξάρτητος της επιλογής αντιπροσώπων.

Θεώρημα 3.2.2 Το $(\mathbb{Q},\leq)$ είναι ολικώς διατεταγμένο.

Ορίζουμε τώρα μία ισομορφική εμφύτευση του $\mathbb{Z}$ στο $\mathbb{Q}$, $h:\mathbb{Z}\to\mathbb{Q}$ με τιμή $h(u)=(u,1)$.

Θεώρημα 3.2.3 (1) Η h είναι αμφιμονοσήμαντη.

(2) $h(u+v)=h(u)+h(v)$.

(3) $h(u\cdot v)=h(u)\cdot h(v)$.

(4) $u\leq v\Rightarrow h(u)\leq h(v)$.

Με την εμφύτευση αυτή έχουμε $\mathbb{N}\xrightarrow{f}\mathbb{Z}\xrightarrow{h}\mathbb{Q}$. Ταυτίζοντας τους φυσικούς $\mathbb{N}$ με $h(f(\mathbb{N}))$ και τους ακεραίους $\mathbb{Z}$ με $h(\mathbb{Z})$ έχουμε $h(f(\mathbb{N}))\subseteq h(\mathbb{Z})\subseteq\mathbb{Q}$, που συμφωνεί με τη διαισθητική μας εικόνα, όπου οι φυσικοί είναι υποσύνολο των ακεραίων και οι ακέραιοι υποσύνολο των ρητών.

3.3 Οι πραγματικοί αριθμοί κατά Dedekind

Η κατασκευή των πραγματικών αριθμών από τους ρητούς είναι διαφορετική και μεγαλύτερου μαθηματικού βάρους από τις προηγούμενες. Η θεμελιακή διαίσθηση για τους πραγματικούς αριθμούς είναι ότι από τη μια μεριά αποτελούν διατεταγμένο σώμα, έτσι που η αριθμητική τους να υπακούει στους ίδιους νόμους με την αριθμητική των ρητών αριθμών, και από την άλλη βρίσκονται σε ένα-προς-ένα αντιστοιχία με τα σημεία της «πλήρους» γεωμετρικής ευθείας, έτσι που να μην υπάρχουν «κενά» ανάμεσά τους. Στη συνολοθεωρητική διατύπωση της πληρότητας ακολουθούμε τον Dedekind. Η βασική ιδέα του Dedekind ήταν ότι ένας πραγματικός αριθμός καθορίζεται πλήρως από το σύνολο των μικροτέρων του ρητών αριθμών κι επομένως μπορεί να ταυτιστεί με αυτό το σύνολο.

Ορισμός 3.3.1 Η ολική διάταξη $\leq$ σε ένα σύνολο A είναι *πλήρης* αν κάθε μη κενό, άνω φραγμένο υποσύνολο του A έχει ελάχιστο άνω φράγμα.
Σύστημα πραγματικών αριθμών είναι ένα πλήρες διατεταγμένο σώμα, δηλαδή διατεταγμένο σώμα του οποίου η διάταξη είναι πλήρης.

Παρατήρηση 3.3.1 Η διάταξη των ρητών αριθμών δεν είναι πλήρης, επειδή κάθε υποσύνολο άνω φραγμένο δεν έχει πάντα ελάχιστο άνω φράγμα.
Π.χ. Το σύνολο $X = \{ r / r^2 < 2 \}$ είναι άνω φραγμένο, αλλά δεν έχει ελάχιστο άνω φράγμα.

Ορισμός 3.3.2 *Τομή Dedekind ρητών* καλείται ένα υποσύνολο A του $\mathbb{Q}$ τέτοιο ώστε

1) $A \neq \varnothing$, $A \neq \mathbb{Q}$.

2) $(\forall x \in A)(\forall y \in \mathbb{Q})[y < x \Rightarrow y \in A]$.

3) Το σύνολο A δεν έχει μέγιστο στοιχείο. Δηλαδή, αν $x \in A$, τότε υπάρχει $y \in A$ τέτοιο ώστε $x < y$.

Ορισμός 3.3.3 Μία τομή Dedekind χωρίζει το σύνολο των ρητών $\mathbb{Q}$ σε δύο ξένα μεταξύ τους τμήματα, το A και το $\mathbb{Q} - A$. Αν το σύνολο $\mathbb{Q} - A$ δεν έχει ελάχιστο στοιχείο, τότε η τομή Dedekind καλείται χάσμα.

Ορισμός 3.3.4 Πραγματικός αριθμός ορίζεται ως μία τομή Dedekind. Οι ρητοί θα ταυτίζονται με τις τομές που δεν είναι χάσματα και οι άρρητοι με τις τομές που είναι χάσματα.

Πρόταση 3.3.1 Έστω $y\in\mathbb{Q}$. Το σύνολο $A_y=\{x\in\mathbb{Q}: x<y\}$ είναι τομή Dedekind και δεν είναι χάσμα.

Απόδειξη

Το A_y είναι τομή Dedekind διότι

1) $A\neq\varnothing$ και $A\neq\mathbb{Q}$.

2) Έστω $x_1\in A_y$ και $y_1\in\mathbb{Q}$ τέτοια ώστε $y_1<x_1$. Τότε $x_1<y$, οπότε $y_1<y$ και άρα $y_1\in A_y$.

3) Προφανώς το A_y δεν έχει μέγιστο στοιχείο. Επειδή το y είναι ελάχιστο στοιχείο του $\mathbb{Q}-A_y$, το A_y δεν είναι χάσμα.

Πρόταση 3.3.2 Για κάθε τομή Dedekind A το σύνολο $\mathbb{Q}-A$ έχει ελάχιστο στοιχείο, αν και μόνον αν, υπάρχει $y\in\mathbb{Q}$ τέτοιο ώστε $A=A_y=\{x\in\mathbb{Q}: x<y\}$.

Απόδειξη

Έστω ότι το σύνολο $\mathbb{Q}-A$ έχει ελάχιστο στοιχείο, έστω το $y\in\mathbb{Q}$. Αποδεικνύουμε ότι $A=A_y$. Πράγματι, έστω $x\in A$. Αν $y<x$ τότε, από τον ορισμό της τομής Dedekind, $y\in A$, το οποίο είναι άτοπο διότι $y\in\mathbb{Q}-A$. Άρα $x<y$ και συνεπώς $x\in A_y$.

Αντιστρόφως, έστω $x\in A_y$, τότε $x<y$. Αν $x\not\in A$, τότε $x\in\mathbb{Q}-A$ και άρα $y\leq x$, άτοπο. Επομένως $x\in A$. Έστω ότι υπάρχει $y\in\mathbb{Q}$ τέτοιο ώστε $A=A_y$. Τότε $\mathbb{Q}-A=\mathbb{Q}-\{x\in\mathbb{Q}: x<y\}=\{z\in\mathbb{Q}: y\leq z\}$. Συνεπώς ο ρητός αριθμός y είναι το ελάχιστο στοιχείο του $\mathbb{Q}-A$.

Πρόταση 3.3.3 Αν A και B τομές Dedekind, τότε και το σύνολο $A+B=\{x+y : x\in A \ \ \textit{και} \ \ y\in B\}$ είναι τομή Dedekind.

Απόδειξη

Η πράξη είναι καλώς ορισμένη διότι

1) $A\neq\varnothing$ και $B\neq\varnothing$, οπότε υπάρχουν $x\in A$ και $y\in B$. Συνεπώς, $x+y\in A+B$ και άρα $A+B\neq\varnothing$. Επίσης, $A\neq\mathbb{Q}$ και $B\neq\mathbb{Q}$, από όπου προκύπτει $A+B\neq\mathbb{Q}$.

2) Έστω ότι $x+y\in A+B$, με $x\in A$ και $y\in B$ κι έστω επίσης, $z\in\mathbb{Q}$ με $z<x+y$. Τότε $z+(-y)<(x+y)+(-y)=x+(y+(-y))=x$. Επειδή $x\in A$ και $z+(-y)<x$, έχουμε $z+(-y)\in A$. Άρα $z=z+0=z+((-y)+y)=(z+(-y))+y\in A+B$.

3) Έστω $x+y\in A+B$ με $x\in A$ και $y\in B$. Επειδή τα σύνολα A και B δεν έχουν μέγιστο στοιχείο, υπάρχουν $x_1\in A$ και $y_1\in B$ τέτοια ώστε $x<x_1$ και $y<y_1$. Θεωρούμε το στοιχείο $x_1+y_1\in A+B$, τότε $x+y<x_1+y_1$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το $A+B$ δεν έχει μέγιστο στοιχείο.

Ορισμός 3.3.5 Ορίζουμε την πράξη $+$ στους πραγματικούς αριθμούς A , B ως εξής:

$$A+B=\{x+y : x\in A \ \ \kappa\alpha\iota \ \ y\in B\}$$

και το καλούμε *άθροισμα* αυτών.

Πρόταση 3.3.4 Για κάθε τριάδα πραγματικών A,B,C ισχύουν:

(1) $(A+B)+C=A+(B+C)$, προσεταιριστικότητα.

(2) $A+B=B+A$, αντιμεταθετικότητα.

Απόδειξη

(1) Αρκεί να δείξουμε ότι $(A+B)+C\subseteq A+(B+C)$ και $A+(B+C)\subseteq(A+B)+C$. Πράγματι, αν $(x+y)+z\in(A+B)+C$, με $x\in A$, $y\in B$ και $z\in C$ ρητοί, τότε $(x+y)+z=x+(y+z)\in A+(B+C)$ και αντιστρόφως.

(2) Αρκεί να δείξο ψιε ό **τ** $A+B\subseteq B+A$ και $B+A\subseteq A+B$. Πράγματι, αν $x+y\in A+B$, με $x\in A$ και $y\in B$ ρητοί, τότε $x+y=y+x\in B+A$ και αντιστρόφως.

Ορισμοί 3.3.6 (1) Η τομή $A_0=\{x\in\mathbb{Q} : x<0\}$ ορίζει το *μηδέν*.

(2) Αν A τομή Dedekind, θέτουμε:

$$-A=\{-x\in\mathbb{Q} : x\in\mathbb{Q}-A\}-\{a\} \ ,$$

όπου a το ελάχιστο στοιχείο του $\mathbb{Q}-A$ ή $\{a\}=\varnothing$ αν το $\mathbb{Q}-A$ δεν έχει ελάχιστο στοιχείο.

(3) Η τομή $A_1=\{x\in\mathbb{Q} : x<1\}$ ορίζει τη *μονάδα*.

Απόδειξη

(1) Αποδεικνύουμε ότι το σύνολο $-A=\{-x\in\mathbb{Q}: x\in\mathbb{Q}-A\}-\{a\}$ είναι τομή Dedekind. Πράγματι,

1) $A\neq\mathbb{Q}$, άρα $\{-x\in\mathbb{Q}: x\in\mathbb{Q}-A\}-\{a\}\neq\varnothing$. Επίσης, αν το $\mathbb{Q}-A$ έχει ελάχιστο το a, τότε θα έχουμε $\{-x\in\mathbb{Q}: x\in\mathbb{Q}-A\}-\{a\}\neq\{a\}$ γιατί ισχύει $a+1\in\mathbb{Q}-A$ και έτσι $-(a+1)\in\{-x\in\mathbb{Q}: x\in\mathbb{Q}-A\}-\{a\}$, άρα εφόσον $a\neq a+1$ ισχύει. Επομένως, $-A\neq\varnothing$ και αφού $A\neq\varnothing$, έχουμε $\mathbb{Q}-A\neq\mathbb{Q}$. Καταλήγουμε λοιπόν ότι $-A\neq\mathbb{Q}$.

2) Έστω $-x\in -A$ και $-y\in\mathbb{Q}$ τέτοια ώστε $-y<-x$. Τότε $y>x$. Επίσης $x\in\mathbb{Q}-A$ και το x δεν είναι ελάχιστο στοιχείο του $\mathbb{Q}-A$, εφόσον $-x\in -A$. Επιπλέον, $y\in\mathbb{Q}-A$, διότι αν ίσχυε $y\in A$, τότε θα ίσχυε και $x\in A$, καθόσον το A είναι τομή Dedekind, πράγμα άτοπο. Άρα $-y\in\{-x\in\mathbb{Q}: x\in\mathbb{Q}-A\}$. Έχουμε ακόμα ότι το y δεν είναι ελάχιστο στοιχείο του $\mathbb{Q}-A$, διότι το x είναι μικρότερο από το y. Συνεπώς, $-y\in -A$.

3) Το $-A$ είναι το σύνολο των $-x\in\mathbb{Q}$, με $x\in\mathbb{Q}-A$, χωρίς να είναι ελάχιστο στοιχείο του $\mathbb{Q}-A$. Αφού λοιπόν δεν έχουμε ελάχιστη τιμή για το x, δεν έχουμε και μέγιστη τιμή για το $-x$. Άρα το $-A$ δεν έχει μέγιστο στοιχείο.

Πρόταση 3.3.5 Αν A πραγματικός αριθμός, τότε $A+(-A)=A_0$.

Προκειμένου να αποδείξουμε την πρόταση, παρεμβάλλουμε το εξής λήμμα:

Λήμμα 3.3.1 Ισχύει η κάτωθι πρόταση:

$$(\forall A\in\mathbb{R})(\forall r\in\mathbb{Q}^+)(\exists x\in A)(\exists y\in\mathbb{Q}-A, y\, \text{όχι ελάχιστο στοιχείο του}\, \mathbb{Q}-\mathrm{A})[r=y+(-x)]$$

Απόδειξη Λήμματος

Έστω $x_1\in A$ τέτοιο ώστε , αν το $\mathbb{Q}-A$ έχει ελάχιστο στοιχείο y_0, να ισχύει $y_0-r<x_1$. Ένα τέτοιο x_1 υπάρχει πάντα, διότι λόγω της πυκνής διάταξης του $\mathbb{Q}$, υπάρχει x_1 τέτοιο ώστε $y_0-r<x_1<y_0$ και αυτό το $x_1\in A$. Θεωρούμε $y_1\in\mathbb{Q}$. Αφού $x_1<y_1$, ισχύει $y_1+(-x_1)\in\mathbb{Q}^+$. Έστω τώρα $r=\dfrac{m}{n}$ και $y_1+(-x_1)=\dfrac{\kappa}{\lambda}$, για m , n , κ , $\lambda\in\mathbb{Z}^+$ και έστω $\nu=n\cdot(\kappa+1)$ ένας θετικός ακέραιος. Ισχύει:

$\frac{\kappa}{\lambda} \leq \kappa < \kappa + 1 < (\kappa+1)\cdot m = \nu \cdot \frac{m}{n}$. Άρα ισχύει $y_1 + (-x_1) < \nu \cdot r$, από όπου προκύπτει ότι $y_1 < x_1 + \nu \cdot r$. Επομένως , $x_1 + \nu \cdot r \in \mathbb{Q} - A$ και επιπλέον έχουμε ότι το σύνολο $\{\nu \in \mathbb{Z}^+ : x_1 + \nu \cdot r \in \mathbb{Q} - A\} \neq \varnothing$. Λόγω της καλής διάταξης του $\mathbb{Z}^+$, το παραπάνω σύνολο έχει πρώτο στοιχείο, το οποίο γράφεται ως $\nu_0 + 1$. Θέτουμε $x = x_1 + \nu_0 \cdot r$ και $y = x_1 + (\nu_0 + 1)\cdot r$. Προφανώς , για $y \in \mathbb{Q} - A$ και $x \in A$, ισχύει $y + (-x) = r$. Επίσης το y δεν είναι ελάχιστο στοιχείο του $\mathbb{Q} - A$, διότι αν ίσχυε $y = y_0$, θα προέκυπτε $y_0 \leq y_0 + \nu_0 \cdot r = (y_0 - r) + (\nu_0 + 1)\cdot r < x_1 + (\nu_0 + 1)\cdot r = y_0$, άτοπο.

Απόδειξη πρότασης 3.3.5

Αρκεί να δείξουμε ότι $A + (-A) \subseteq A_0$ και $A_0 \subseteq A + (-A)$. Έστω $x + y \in A + (-A)$ με $x \in A$ και $y \in -A$. Εφόσον $y \in -A$, συνεπάγεται $-y \in \mathbb{Q} - A$, δηλαδή $-y \not\in A$. Άρα $-y > x$ συνεπάγεται $x + y < 0$ και επομένως $x + y \in A_0$. Έστω τώρα $r \in A_0$, τότε $r < 0$ από όπου έχουμε $-r > 0$. Από το λήμμα 3.3.1 , υπάρχουν $x \in A$ και $y \in \mathbb{Q} - A$ με το y να μην είναι ελάχιστο στοιχείο του $\mathbb{Q} - A$, τέτοια ώστε η σχέση $-r = y + (-x)$ συνεπάγεται $r = x + (-y) \in A + (-A)$, δηλαδή $r \in A + (-A)$. Όθεν απεδείχθη η πρόταση.

Ορισμός 3.3.7 Ο αριθμός $-A$ καλείται *αντίθετος* του A.

Συνεπώς, η δομή $(\mathbb{R}, +)$ των πραγματικών αριθμών με πράξη την πρόσθεση, είναι αντιμεταθετική ομάδα.

Ορισμός 3.3.8 Καλούμε φυσική διάταξη του $\mathbb{R}$, τη σχέση $\leq$ στο $\mathbb{R}$, η οποία ορίζεται ως εξής:

$$(\forall A \in \mathbb{R})(\forall B \in \mathbb{R})[A \leq B \Leftrightarrow A \subseteq B]$$

Προφανώς η διάταξη αυτή είναι επέκταση της διάταξης των ρητών.

Θεώρημα 3.3.1 Το σύνολο $(\mathbb{R}\ , \leq)$ είναι ολικώς διατεταγμένο σύνολο.

Απόδειξη

Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε ζεύγος πραγματικών A, B με $A \not\subset B$, ισχύει $B \subseteq A$. Αν $A \not\subset B$, τότε υπάρχει $r \in A - B$. Θεωρούμε τον τυχαίο ρητό $q \in B$. Αν ίσχυε $r < q$, τότε θα είχαμε $r \in B$, άτοπο. Επομένως, λόγω της αρχής της τριχοτομίας για τους ρητούς, ισχύει $q \leq r$. Από τις σχέσεις $r \in A$ και $q \leq r$ προκύπτει $q \in A$. Συνεπώς $B \subseteq A$.

Έχουμε ήδη ορίσει το σύνολο A_0 ως το μηδέν. Κάθε πραγματικός αριθμός A, τέτοιος ώστε $A_0 < A$ καλείται *θετικός* , ενώ κάθε πραγματικός αριθμός A, τέτοιος ώστε $A < A_0$ καλείται *αρνητικός*.

Από το θεώρημα 3.3.1 προκύπτει ότι για τους πραγματικούς αριθμούς , ισχύει η ακόλουθη αρχή της τριχοτομίας: Για κάθε ζεύγος πραγματικών A, B ισχύει ακριβώς μία από τις σχέσεις:

$$A < B \text{ είτε } A = B \text{ είτε } B < A.$$

Επομένως, κάθε πραγματικός αριθμός A είναι θετικός ή αρνητικός ή μηδέν.

Πρόταση 3.3.6 Για κάθε τριάδα A, B, C πραγματικών αριθμών ισχύουν:

α) $A < B \Leftrightarrow A + C < B + C$.

β) $A < B \Leftrightarrow -B < -A$.

γ) $A_0 < A \Leftrightarrow -A < A_0$.

δ) $A < B \Leftrightarrow$ υπάρχει $C \in \mathbb{R}$, με $A_0 < C$ τέτοιο ώστε $B = A + C$.

Απόδειξη

α) Έστω $A < B$ και $x + y \in A + C$, με $x \in A$ και $y \in C$. Τότε $x \in B$ αφού $A < B$, δηλαδή $A \subset B$. Επομένως, $x + y \in B + C$, δηλαδή $A + C \subseteq B + C$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $A + C \neq B + C$. Αν είχαμε $A + C = B + C$, τότε προκύπτει $A = B$, άτοπο. Αντιστρόφως , έστω $A + C < B + C \Rightarrow (A + C) + (-C) < (B + C) + (-C) \Rightarrow A + (C + (-C)) < B + (C + (-C)) \Rightarrow A + A_0 < B + A_0 \Rightarrow A < B$.

β) Έστω $A < B$, δηλαδή $A \subset B$. Επιπλέον, έστω $-x \in -B$, τότε $x \in \mathbb{Q} - B$, δηλαδή $x \notin B$. Άρα $x \notin A$ κι επομένως $x \in \mathbb{Q} - A$. Το x δεν είναι το ελάχιστο στοιχείο του $\mathbb{Q} - A$, διότι αν ήταν, δε θα υπήρχε μικρότερος αριθμός από το x που να ανήκε στο

$\mathbb{Q}-A$. Δηλαδή, αν $y\in\mathbb{Q}$ και $y<x$, τότε $y\notin\mathbb{Q}-A\Rightarrow y\in A$. Όμως $A\subset B$, άρα $y\in B\Rightarrow y\notin\mathbb{Q}-B$, που σημαίνει ότι κάθε ρητός, μικρότερος του y, δεν ανήκει στο $\mathbb{Q}-B$. Επομένως, ο x είναι ελάχιστο στοιχείο του $\mathbb{Q}-B$. Άτοπο, αφού $-x\in -B$. Εφόσον λοιπόν $x\in\mathbb{Q}-A$ και x δεν είναι ελάχιστο στοιχείο του $\mathbb{Q}-A$, θα έχουμε $-x\in -A$. Άρα $-B\subseteq -A$. Αν είχαμε $-B=-A$, τότε $-B+A=-A+A\Rightarrow -B+A=A_0$ $\Rightarrow B+\left(\left(-B\right)+A\right)=B+A_0\Rightarrow\left(B+\left(-B\right)\right)+A=B+A_0\Rightarrow A_0+A=B\Rightarrow A=B$, άτοπο. Άρα $-B\neq -A$. Αντιστρόφως, έστω $-B<-A$, τότε $-\left(-A\right)<-\left(-B\right)\Rightarrow A<B$.

γ) Άμεση συνέπεια του β).

δ) Έστω $A<B$, δηλαδή $A\subset B$ και θεωρούμε $C=B+\left(-A\right)$. Το $C\in\mathbb{R}$, διότι B, $\left(-A\right)\in\mathbb{R}$ και ισχύει ότι $A_0<C$ διότι $A<B\Rightarrow A+\left(-A\right)<B+\left(-A\right)\Rightarrow$
$\Rightarrow A_0<B+\left(-A\right)$. Επομένως $B=B+A_0=B+\left(A+\left(-A\right)\right)=A+\left(B+\left(-A\right)\right)=A+C$. Αντιστρόφως, έστω $B=A+C$, για κάποιο $C\in\mathbb{R}$, με $A_0<C$. Τότε θα έχουμε $C=B+\left(-A\right)$, άρα $A_0<B+\left(-A\right)\Rightarrow A_0+A<\left(B+\left(-A\right)\right)+A\Rightarrow A<B+\left(\left(-A\right)+A\right)$ $\Rightarrow A<B$.

Ορισμός 3.3.9 Καλούμε *πολλαπλασιασμό* πραγματικών αριθμών την πράξη $\cdot$ που ορίζεται επί του $\mathbb{R}$ ως εξής:

Αν A,B τομές Dedekind, τότε $A\cdot B$ είναι

(α) Αν $A_0<A$ και $A_0<B$, τότε

$$A\cdot B=\left\{x\in\mathbb{Q}:x\leq 0\right\}\cup\left\{x\cdot y\in\mathbb{Q}:0<x\in A\wedge 0<y\in B\right\}$$

(β) Αν $A<A_0$ και $B<A_0$, τότε $A\cdot B=\left(-A\right)\cdot\left(-B\right)$

(γ) Αν $A<A_0$ και $A_0<B$, τότε $A\cdot B=-\left(\left(-A\right)\cdot B\right)$

(δ) Αν $A_0<A$ και $B<A_0$, τότε $A\cdot B=-\left(A\cdot\left(-B\right)\right)$

(ε) Αν $A=A_0$ ή $B=A_0$, τότε $A\cdot B=A_0$.

Απόδειξη

Η πράξη θα είναι καλώς ορισμένη στο $\mathbb{R}$ αν $\left(\forall A\in\mathbb{R}\right)\left(\forall B\in\mathbb{R}\right)\left[A\cdot B\in\mathbb{R}\right]$. Αρκεί να αποδείξουμε την πρόταση αυτή για $A_0<A$ και $A_0<B$. Από τον ορισμό ισχύει το εξής: $A\cdot B=\left\{x\in\mathbb{Q}:x\leq 0\right\}\cup\left\{x\cdot y\in\mathbb{Q}:0<x\in A\wedge 0<y\in B\right\}$.

1) $A\cdot B\neq\varnothing$, διότι $0\in A\cdot B$. Υπάρχουν $x'\in\mathbb{Q}-A$ και $y'\in\mathbb{Q}-B$. Αυτοί είναι θετικοί και $(\forall x\in A)(\forall y\in B)[x<x'\,\kappa\alpha\iota\,y<y']$. Άρα ο $x'\cdot y'$ είναι θετικός και μεγαλύτερος από τον $x\cdot y$, για κάθε $0<x\in A$ και $0<y\in B$. Επομένως, $x'\cdot y'\not\in A\cdot B$ και ισχύει $A\cdot B\neq\varnothing$.

2) Έστω $r\in A\cdot B$ και $s<r$. Αν $s<0$, τότε $s\in A\cdot B$. Ενώ αν $0<s$, τότε $0<r$, άρα υπάρχουν $0<x\in A$ και $0<y\in B$ ώστε $r=x\cdot y$. Τότε ισχύει $s\cdot r^{-1}<1$, άρα προκύπτει ότι $s\cdot r^{-1}\cdot x<x$ και $s\cdot r^{-1}\cdot x\in A$. Τελικά έχουμε $s=\left(s\cdot r^{-1}\cdot x\right)\cdot y$ και ότι $s\in A\cdot B$.

3) Έστω $r\in A\cdot B$. Αν $r<0$, τότε $(\exists r'\in A\cdot B)[r<r']$. Αν $0<r$ τότε υπάρχουν $0<x\in A$ και $0<y\in B$, ώστε $r=x\cdot y$. Αφού το A δεν έχει μέγιστο, προκύπτει ότι $(\exists x'\in A)[x<x']$. Άρα $(\exists x'\cdot y\in A\cdot B)[r<x'\cdot y]$. Δείξαμε ότι $(\forall r\in A\cdot B)(\exists r'\in A'\cdot B')[r<r']$, άρα το $A-B$ δεν έχει μέγιστο.

Άμεση συνέπεια του ορισμού 3.3.9 αποτελεί η ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 3.3.7 Για κάθε ζεύγος πραγματικών A,B ισχύουν:

α) $A_0<A$ και $A_0<B\ \Rightarrow\ A_0<A\cdot B$,

β) $A<A_0$ και $B<A_0\ \Rightarrow\ A_0<A\cdot B$,

γ) $A_0<A$ και $B<A_0\ \Rightarrow\ A\cdot B<A_0$,

δ) $A<A_0$ και $A_0<B\ \Rightarrow\ A\cdot B<A_0$.

Έχουμε ήδη αποδείξει ότι το $(\mathbb{R},+)$ είναι αντιμεταθετική ομάδα. Με την επόμενη πρόταση αποδεικνύουμε ότι το $(\mathbb{R},+,\cdot)$ είναι αντιμεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο.

Πρόταση 3.3.8 Για κάθε τριάδα πραγματικών A,B,C ισχύουν:

1) $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$,

2) $A\cdot B=B\cdot A$,

3) $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$,

4) $A \cdot A_1 = A$.

Απόδειξη

Οι αποδείξεις των 1) , 2) , 3) γίνονται με ανάλυση σε περιπτώσεις. Αποδεικνύουμε την 4). Έστω $A < A_0$, τότε $\{x \in \mathbb{Q} : x \leq 0\} \subset A$. Αν $0 < x \in A$ και $0 < y < 1$, δηλαδή $y \in A_1$, τότε ισχύει ότι $x \cdot y \in A \cdot A_1$ και $x \cdot y < x$ άρα $x \cdot y \in A$. Επομένως $A \cdot A_1 \subseteq A$. Αν πάρουμε $0 < x$, θεωρούμε στοιχείο $y \in A$ τέτοιο ώστε $x > y$. Τότε έχουμε $y = x\frac{y}{x}$ και $\frac{y}{x} < 1$, δηλαδή $\frac{y}{x} \in A_1$. Άρα $y \in A$ και $y = x\frac{y}{x} \in A \cdot A_1$, δηλαδή $A \cdot A_1 \supseteq A$. Συνεπώς $A \cdot A_1 = A$.

Αν $A_0 = A$, τότε προφανώς ισχύει.

Αν $A < A_0$, τότε $A_0 < -A$, άρα $(-A) \cdot A_1 = (-A)$, από όπου έχουμε $-A \cdot A_1 = -A \Rightarrow A \cdot A_1 = A$.

Πρόταση 3.3.9 Για κάθε μη μηδενικό πραγματικό αριθμό A, συμβολίζουμε με A^{-1} το ακόλουθο σύνολο ρητών:

$A^{-1} = \{x \in \mathbb{Q} : x < 0\} \bigcup \{x^{-1} : x \in \mathbb{Q} - A \ \textit{και}\ x\ \textit{όχι ελάχιστο του}\ \mathbb{Q} - A\}$, αν $A_0 < A$

και $A^{-1} = -\left((-A)^{-1}\right)$, αν $A < A_0$. Το A^{-1} είναι πραγματικός αριθμός .

Απόδειξη

Θα αποδείξουμε ότι ο A^{-1} είναι πραγματικός αριθμός. Αρκεί να εξετάσουμε για $A_0 < A$.

1) Προφανώς $A^{-1} \neq \varnothing$. Αφού $A_0 < A$, υπάρχει θετικός ρητός $x \in A$ και $x \notin \mathbb{Q} - A$. Τότε το $\frac{1}{x} \notin A^{-1}$ κι επομένως $A^{-1} \neq \mathbb{Q}$.

2) Έστω $x \in A^{-1}$ και $y \in \mathbb{Q}$ τέτοιο ώστε $y < x$.

Αν $y \leq 0$, τότε $y \in A^{-1}$.

Αν $y > 0$, τότε $x > 0$, άρα $\frac{1}{x} \notin A$. Επίσης $y < x \Rightarrow \frac{1}{y} > \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{y} \notin A \Rightarrow \frac{1}{y} \in \mathbb{Q} - A$. Το $\frac{1}{y}$ δεν είναι ελάχιστο στοιχείο του $\mathbb{Q} - A$, άρα τελικά $y \in A^{-1}$.

3) Έστω $x \in A^{-1}$ το μέγιστο στοιχείο του. Αν $x \leq 0$ τότε υπάρχει $y \in A^{-1}$ τέτοιο ώστε $y > x$ διότι $A_0 < A$, άρα το A^{-1} περιέχει κάποιους θετικούς ρητούς. Αν $x > 0$, τότε $\frac{1}{x} \in \mathbb{Q} - A$. Αφού $x \in A^{-1}$, το $\frac{1}{x}$ δεν είναι το ελάχιστο του $\mathbb{Q} - A$, άρα υπάρχει ρητός $y \in \mathbb{Q} - A$ με $y < \frac{1}{x}$. Θεωρούμε ένα ρητό r με $y < r < \frac{1}{x}$. Τότε $\frac{1}{r} \in A^{-1}$ και $\frac{1}{r} > x$. Επομένως το x δεν είναι μέγιστο στοιχείο.

Πρόταση 3.3.10 Για κάθε πραγματικό αριθμό A, με $A \neq A_0$, ισχύει: $A \cdot A^{-1} = A_1$.

Απόδειξη

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις, για $A_0 < A$ και για $A < A_0$.

Έστω $A_0 < A$. Από τον ορισμό του A^{-1} προκύπτει ότι $A_0 < A^{-1}$, άρα

$$A \cdot A^{-1} = \{x \in \mathbb{Q} : x < 0\} \cup \{x \cdot y^{-1} : 0 < x \in A \ \textit{και}\ y \in \mathbb{Q} - A \ \textit{και}\ y \ \textit{όχι ελάχιστο του}\ \mathbb{Q} - A\}$$

Θεωρούμε $r \in A \cdot A^{-1}$. Αν $r < 0$, τότε $r \in A_1$. Αν $r = x \cdot y^{-1}$, με $0 < x \in A$ και $y \in \mathbb{Q} - A$, τότε ισχύει $x < y$, άρα $r < 1$ και $r \in A_1$. Επομένως, $A \cdot A^{-1} \subset A_1$ (1).

Θεωρούμε $r \in A_1$. Αν $r < 0$, τότε $r \in A \cdot A^{-1}$. Αν $0 < r < 1$, τότε θεωρούμε x τέτοιο ώστε $0 < x \in A$. Ισχύει $0 < x \cdot (1 - r)$, άρα από το λήμμα 3.3.1 έχουμε ότι

$$(\exists y \in A)(\exists y' \in \mathbb{Q} - A,\ y' \ \textit{όχι ελάχιστο του}\ \mathbb{Q} - A)\left[y' + (-y) = x \cdot (1 - r)\right].$$

Επομένως, $y' + (-y) < y' \cdot (1 - r)$, άρα $y' \cdot r < y$. Ισχύει $y' = y' \cdot r \cdot r^{-1} < y \cdot r^{-1}$, άρα το $y \cdot r^{-1}$ είναι στοιχείο του $\mathbb{Q} - A$, που δεν είναι ελάχιστο. Συνεπώς προκύπτει ότι $r = y \cdot \left(y \cdot r^{-1}\right)^{-1} \in A \cdot A^{-1}$, δηλαδή $A_1 \subset A \cdot A^{-1}$ (2).

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε ότι $A \cdot A^{-1} = A_1$.

Έστω τώρα $A < A_0$. Τότε $A_0 < -A$, άρα $(-A)(-A)^{-1} = A_1$. Επομένως,

$$A \cdot A^{-1} = (-A) \cdot \left(-\left(A^{-1}\right)\right) = (-A) \cdot \left(-\left(-(-A)^{-1}\right)\right) = (-A) \cdot (-A)^{-1} = A_1.$$

Ορισμός 3.3.10 Για κάθε τομή A, η τομή A^{-1} καλείται *αντίστροφος* του A.

Από την πρόταση 3.3.10 προκύπτει ότι ο δακτύλιος $(\mathbb{R},+,\cdot)$ είναι σώμα.

Πρόταση 3.3.11 Για κάθε A, B, C πραγματικούς ισχύουν:

1) $A \cdot B = A_0 \Leftrightarrow A = A_0$ ή $B = A_0$,

2) $C \neq A_0 \Rightarrow \left(A = B \Leftrightarrow A \cdot C = B \cdot C\right)$,

3) $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$,

4) $\left(A \cdot B\right)^{-1} = A^{-1} \cdot B^{-1}$,

5) $A \cdot \left(-B\right) = \left(-A\right) \cdot B = -A \cdot B$,

6) $A_0 < A$ και $A_0 < B \Rightarrow A_0 < A \cdot B$,

7) $A < A_0$ και $B < A_0 \Rightarrow A_0 < A \cdot B$,

8) $A_0 < A$ και $B < A_0 \Rightarrow A \cdot B < A_0$,

9) $A_0 < C \Rightarrow \left(A < B \Leftrightarrow A \cdot C < B \cdot C\right)$,

10) $C < A_0 \Rightarrow \left(A < B \Leftrightarrow B \cdot C < A \cdot C\right)$,

11) $C \neq A_0 \Rightarrow \left(A = B \Leftrightarrow A \cdot C = B \cdot C\right)$.

Θεώρημα 3.3.2 Το σώμα $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών με τη φυσική του διάταξη, είναι ολικώς διατεταγμένο σώμα.

Απόδειξη

Έχουμε δείξει ότι η σχέση $\leq$ είναι σχέση ολικής διάταξης στο σώμα $\left(\mathbb{R}, +, \cdot\right)$ και ότι για κάθε $A, B, C \in \mathbb{R}$ ισχύουν: $A \leq B \Rightarrow A + C \leq B + C$

$$\left(A \leq B\right) \wedge \left(A_0 \leq C\right) \Rightarrow A \cdot C \leq B \cdot C .$$

Άρα το $\left(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq\right)$ είναι διατεταγμένο σώμα. Θα είναι ολικώς διατεταγμένο, αν δεν έχει χάσματα, δηλαδή αν για κάθε τομή X πραγματικών, το σύνολο $\mathbb{R} - X$ έχει ελάχιστο. Έστω $X \subset \mathbb{R}$ τομή του συνόλου των πραγματικών. Για το σύνολο X ισχύουν:

1) $X \neq \varnothing$ και $X \neq \mathbb{R}$.

2) $\left(\forall A \in X\right)\left(\forall B < A\right)\left[B \in X\right]$

3) το X δεν έχει μέγιστο στοιχείο.

Αποδεικνύουμε ότι το $\mathbb{R} - X$ έχει ελάχιστο στοιχείο το $\bigcup X$:

(α) Αφού $X \neq \varnothing$, υπάρχει $A \in X$ και εφόσον $A \neq \varnothing$, υπάρχει $y \in A$. Άρα $y \in \bigcup X$ και $\bigcup X \neq \varnothing$. Επίσης $X \neq \mathbb{R}$, άρα υπάρχει $A \in \mathbb{R} - X$. Λόγω της **2)** για το X, ισχύουν: $(\forall B\in X)[B<A]$, άρα $(\forall B\in X)[B\subset A]$, επομένως $\bigcup X\subset A$. Αν ίσχυε $\bigcup X=\mathbb{Q}$, θα είχαμε άτοπο $A=\mathbb{Q}$. Άρα $\bigcup X\neq\mathbb{Q}$.

(β) Έστω $x\in\bigcup X$ και $y<x$. Τότε $(\exists A\in X)[x\in A]$. Λόγω της **2)** για το A ισχύει $y\in A\in X$, άρα $y\in\bigcup X$. Δείξαμε ότι $(\forall x\in\bigcup X)(\forall y<x)[y\in\bigcup X]$.

(γ) Έστω $x\in\bigcup X$. Τότε $(\exists A\in X)[x\in A]$. Αφού το A δεν έχει μέγιστο, $(\exists y\in A)[x<y]$. Συνεπώς $(\exists y\in\bigcup X)[x<y]$. Άρα το $\bigcup X$ δεν έχει μέγιστο στοιχείο.

Από τα (α), (β), (γ) προκύπτει ότι το $\bigcup X\in\mathbb{R}$. Ισχύει ότι $\bigcup X\in\mathbb{R}-X$, διότι αν $\bigcup X\in X$ συνεπάγεται ότι το $\bigcup X$ είναι μέγιστο της τομής X, άτοπο. Επίσης, αν $A\in\mathbb{R}-X$, έχουμε

$y\in\bigcup X\Rightarrow(\exists B\in X)[y\in B]\Rightarrow(\exists B)[y\in B\wedge B<A]\Rightarrow(\exists B)[y\in B\wedge B\subset A]\Rightarrow y\in A$.

Άρα ισχύει $\bigcup X\subset A$ και $\bigcup X<A$. Επομένως το $\bigcup X$ είναι ελάχιστο του $\mathbb{R}-X$ και η τομή X δεν είναι χάσμα του $\mathbb{R}$.

Θεώρημα 3.3.3 Αν A,B πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $A<B$, τότε υπάρχει ρητός q τέτοιος ώστε $A<q<B$.

Απόδειξη

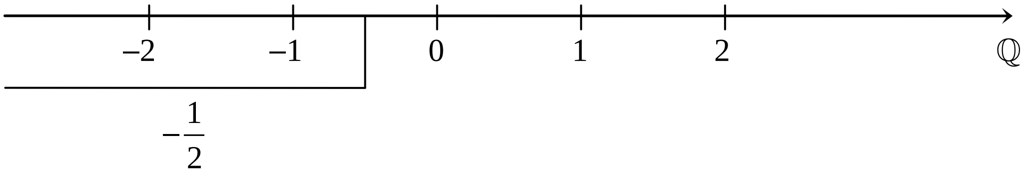
Ισχύει $A\subset B$, άρα υπάρχει $x\in B-A$. Αφού το B δεν έχει μέγιστο, υπάρχει $q\in B$ τέτοιο ώστε $x<q$. Θεωρούμε τον πραγματικό $q_{\mathbb{R}}$. Ισχύει $A<q_{\mathbb{R}}$, διότι $q\in\mathbb{Q}-A$ και άρα $(\forall r\in A)[r<q]$, επομένως $A\subset q_{\mathbb{R}}$. Αφού $x\in q_{\mathbb{R}}-A$, έχουμε $A<q_{\mathbb{R}}$. Επίσης $q_{\mathbb{R}}<B$, διότι $q\in B$ συνεπάγεται $q_{\mathbb{R}}\subset B$ και αφού $q\in B-q_{\mathbb{R}}$, έχουμε $q_{\mathbb{R}}<B$.

Συνέπεια του θεωρήματος 3.3.3 είναι το ακόλουθο.

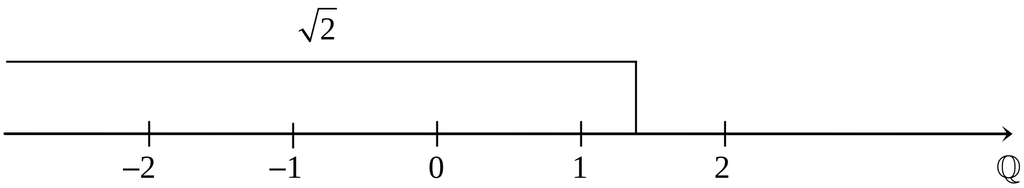
Θεώρημα 3.3.4 Το $(\mathbb{Q},\leq)$ είναι πυκνό μέσα στο $(\mathbb{R},\leq)$.

Παραδείγματα:

1) Ο πραγματικός αριθμός $-\frac{1}{2}$ ορίζεται ως η τομή $A_{1/2} = \left\{ x \in \mathbb{Q} : x < -\frac{1}{2} \right\}$, που δεν είναι χάσμα και άρα είναι ρητός.



2) Ο πραγματικός αριθμός $\sqrt{2}$ ορίζεται ως η τομή $A_{\sqrt{2}} = \left\{ x \in \mathbb{Q} : x < 0 \text{ ή } x \cdot x < 2 \right\}$, που είναι χάσμα και άρα άρρητος.



3.4 Μετάβαση από το $\mathbb{Q}^2$ στο $\mathbb{R}^2$, μέσω του συμπληρώματος του Dedekind.

Θεωρούμε σκόπιμο εδώ να αναφέρουμε δύο γνωστές διατάξεις επί του καρτεσιανού γινομένου, που χρησιμοποιούνται ευρέως.

Έστω $(E, \leq)$ ολικώς διατεταγμένο σύνολο κι έστω το καρτεσιανό γινόμενο n-φορές του E, $E \times E \times ... \times E$. Ορίζουμε:

(1) Την λεξικογραφική διάταξη (lexicographic order) ως εξής:

$(x_1, x_2, ..., x_n) = (y_1, y_2, ..., y_n)$ αν και μόνον αν $x_i = y_i$, για κάθε $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

$(x_1, x_2, ..., x_n) < (y_1, y_2, ..., y_n)$ αν και μόνον αν $x_1 < y_1$ ή ($x_1 = y_1, ..., x_k = y_k$ και $x_{k+1} < y_{k+1}$).

Προφανώς η ως άνω διάταξη είναι ολική.

(2) Την διάταξη ανά συντεταγμένη (component wise order) επί του E^n ως εξής:

$(x_1, x_2, ..., x_n) = (y_1, y_2, ..., y_n)$ αν και μόνον αν $x_i = y_i$, για κάθε $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

$(x_1, x_2, ..., x_n) < (y_1, y_2, ..., y_n)$ αν και μόνον αν $x_i \leq y_i$, για κάθε $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

Παρατηρούμε εδώ ότι η ως άνω διάταξη είναι μερική. Π.χ. Έστω $(\mathbb{R},\leq)$, όπου $\leq$ η συνήθης διάταξη. Θεωρούμε τα σημεία $(1,2)$, $(3,1)\in\mathbb{R}^2$. Προφανώς ισχύει $(1,2)//(3,1)$.

Εντός του $\mathbb{Q}^2$ ορίζουμε μία σχέση μερικής διάταξης , ως εξής:

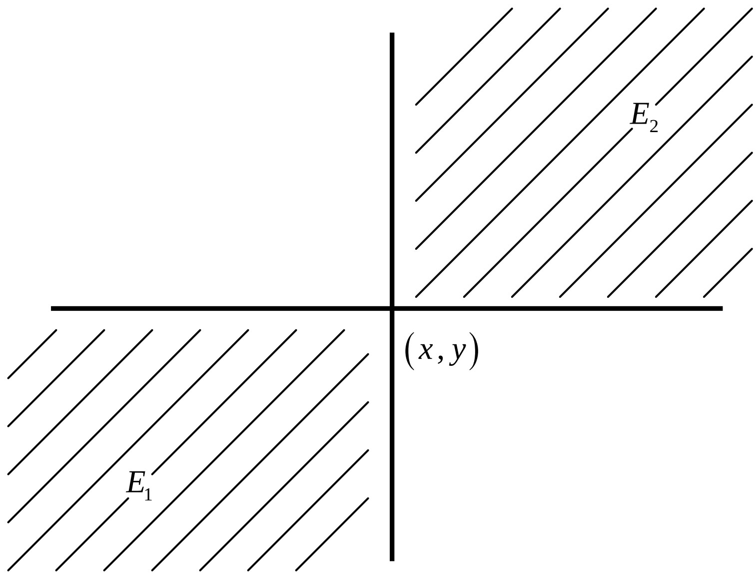
$$(a,b)\leq(a',b')\Leftrightarrow a\leq a'\wedge b\leq b'$$

Προφανώς μιλάμε για την component wise διάταξη στο $\mathbb{Q}^2$. Εδώ πληρούνται οι ιδιότητες αυτοπαθητικότητας , αντισυμμετρικότητας και μεταβατικότητας, η δε ισότητα ισχύει για $a=a'$ και $b=b'$.

Διακρίνουμε περιπτώσεις :

1) Έστω το ζεύγος (x,y), όπου $x,y\notin\mathbb{Q}$. Θεωρούμε μία τομή του $\mathbb{Q}^2$, την $C=(E_1,E_2)$, όπου

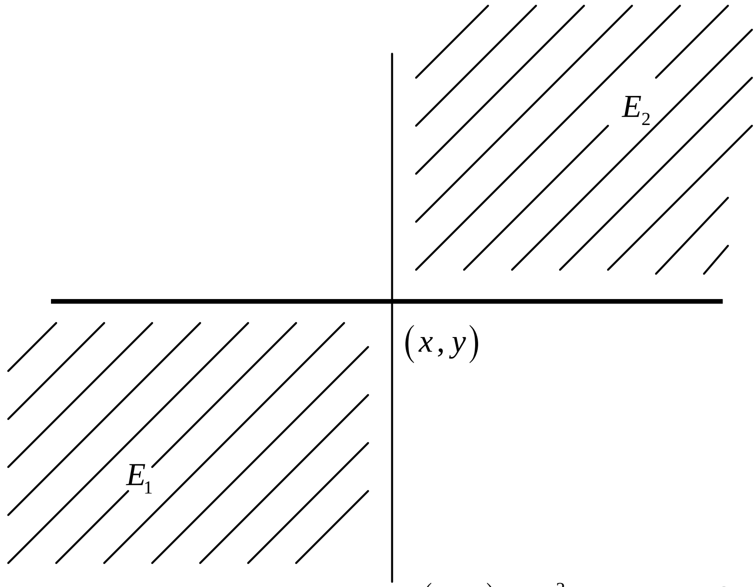
$E_1=\left\{(a,b)\Big/ a<x\wedge b<y\right\}\subset\mathbb{Q}^2$ και $E_2=\left\{(a',b')\Big/ x<a'\wedge y<b'\right\}\subset\mathbb{Q}^2$.



Προφανώς, η τομή $C=(E_1,E_2)$ είναι ένα χάσμα και ορίζει τον $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

2) Έστω το ζεύγος (x,y) με $x\in\mathbb{Q}\wedge y\notin\mathbb{Q}$. Θεωρούμε την τομή του $\mathbb{Q}^2$, την $C=(E_1,E_2)$, όπου

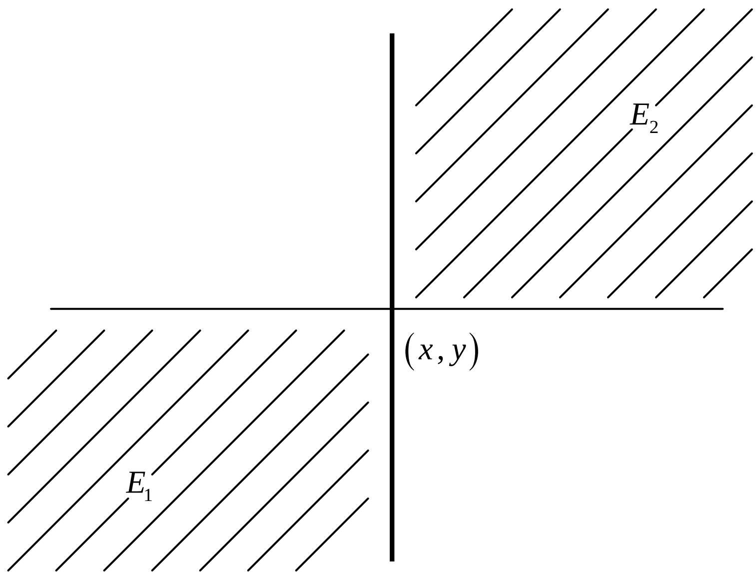
$E_1=\left\{(a,b)\Big/ a\leq x\wedge b<y\right\}\subset\mathbb{Q}^2$ και $E_2=\left\{(a',b')\Big/ x\leq a'\wedge y<b'\right\}\subset\mathbb{Q}^2$



Αυτή η τομή είναι ένα χάσμα και ορίζει τον $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, όπου $x\in\mathbb{Q}\wedge y\notin\mathbb{Q}$.

3) Έστω τώρα το ζεύγος (x,y) με $x\notin\mathbb{Q}\wedge y\in\mathbb{Q}$. Θεωρούμε την τομή του $\mathbb{Q}^2$, την $C=(E_1,E_2)$, όπου

$E_1=\left\{(a,b)\middle/ a<x\wedge b\leq y\right\}\subset\mathbb{Q}^2$ και $E_2=\left\{(a',b')\middle/ x<a'\wedge y\leq b'\right\}\subset\mathbb{Q}^2$.

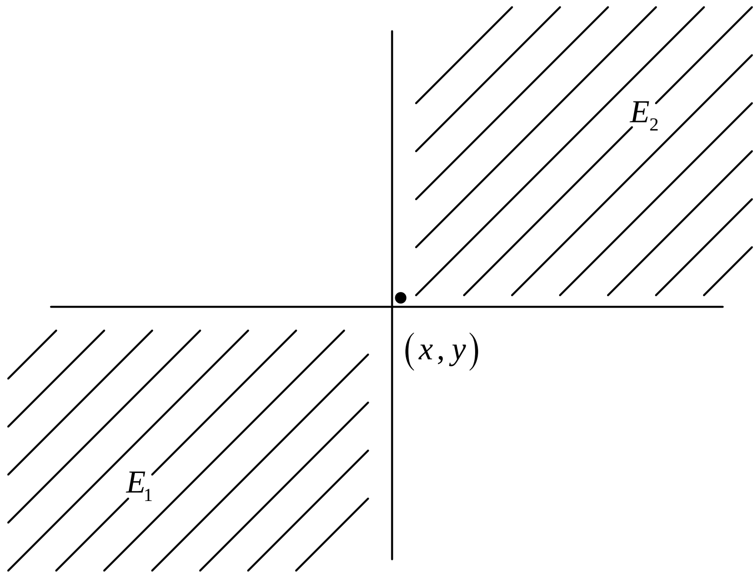


Η τομή αυτή είναι χάσμα και ορίζει τον $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ με $x\notin\mathbb{Q}\wedge y\in\mathbb{Q}$.

4) Τέλος έστω $(x,y)\in\mathbb{Q}^2$. Θεωρούμε την τομή του $\mathbb{Q}^2$, την $C=(E_1,E_2)$, όπου

$E_1=\left\{(a,b)\middle/ a\leq x\wedge b\leq y\right\}\subset\mathbb{Q}^2$ και

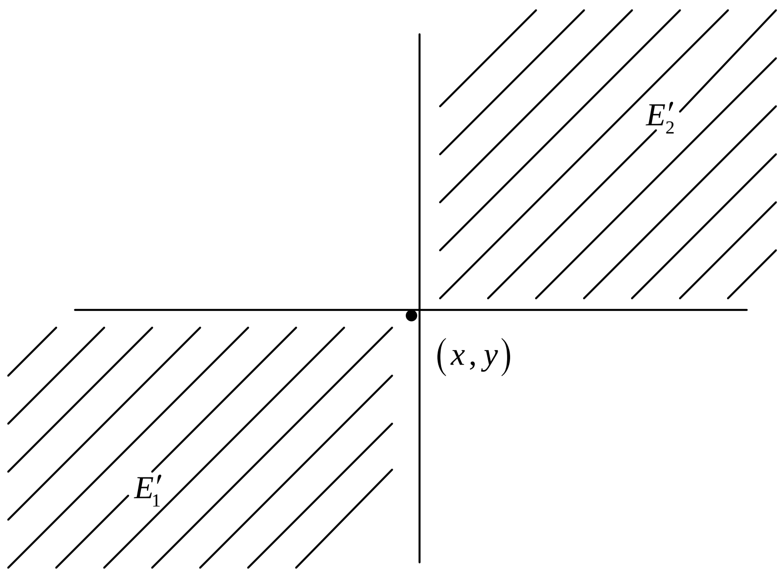
$E_2 = \left\{(a',b') \diagup x < a' \wedge y \leq b' \wedge (x,y) \neq (a',b')\right\} \subset \mathbb{Q}^2$.



Η τομή αυτή δεν είναι ούτε χάσμα, ούτε άλμα και το (x,y) είναι το μεγαλύτερο στοιχείο της τάξεως E_1. Εάν θεωρήσουμε και την τομή $C_2 = \left(E_1', E_2'\right)$, όπου

$E_1' = \left\{(a,b) \diagup a \leq x \wedge b \leq y \wedge (a,b) \neq (x,y)\right\} \subset \mathbb{Q}^2$ και

$E_2' = \left\{(a',b') \diagup x \leq a' \wedge y \leq b'\right\} \subset \mathbb{Q}^2$, δηλαδή



τότε και αυτή η τομή δεν είναι ούτε χάσμα, ούτε άλμα και το (x,y) είναι το μικρότερο στοιχείο της τάξεως E_2'. Οι τομές C_1, C_2 ορίζουν το $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, όπου $x, y \in \mathbb{Q}$. Παρατηρούμε ότι αν $(x,y) \sim C_1 \wedge (x,y) \sim C_2 \Rightarrow C_1 \sim C_2$. Καταυτόν τον τρόπο ταυτίζουμε τις τομές C_1, C_2 και ορίζουμε πλήρως το $\mathbb{R}^2$ εκ του $\mathbb{Q}^2$ με τη βοήθεια του συμπληρώματος του Dedekind.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ ΜΕ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ CAUCHY

Η κατηγορία των πραγματικών σωμάτων είναι μία κατηγορία σωμάτων στα οποία είναι ορισμένη διάταξη, συμβιβαστή με τις πράξεις, η δε ονομασία τους οφείλεται στο ότι ένας αντιπρόσωπος αυτών είναι οι πραγματικοί αριθμοί.

4.1 Διατεταγμένοι δακτύλιοι

Ορισμός 4.1.1 Με τον όρο *διατεταγμένος δακτύλιος* εννοούμε έναν μη τετριμμένο δακτύλιο $(R,+,\cdot)$ με μία ολική διάταξη $>$, η οποία διατηρεί τις πράξεις του δακτυλίου, υπό την έννοια ότι οι ακόλουθοι κανόνες ισχύουν:

(1) $x > x', y > y' \Rightarrow x + y > x' + y'$

(2) $x > 0, y > 0 \Rightarrow x \cdot y > 0$.

Αν στην (2) αντικαταστήσουμε τα x, y με $x - x', y - y'$ και αναδιατάξουμε το αποτέλεσμα χρησιμοποιώντας την (1), επιτυγχάνουμε τον πιο συνεπτυγμένο κανόνα:

(2′) $x > x', y > y' \Rightarrow xy + x'y' > xy' + x'y$.

Μελετώντας την διάταξη πάνω στο R θα γράφουμε $x \geq y$ για να εννοούμε $x > y$ ή $x = y$ και χρησιμοποιούμε $<, \leq$ για την αντίθετη διάταξη.

Θα ονομάζουμε το x θετικό ή αρνητικό αν $x > 0$ ή $x < 0$,αντίστοιχα.

Ορισμός 4.1.2 Σε ένα διατεταγμένο δακτύλιο R ορίζουμε *απόλυτη τιμή* ως εξής:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{αν } a \geq 0 \\ -a, & \text{αν } a < 0 \end{cases}, \text{ όπου } a \in R.$$

Σαφώς $|a| \geq 0$, με ισότητα αν και μόνον αν $a = 0$. Εύκολα αποδεικνύεται η τριγωνική ανισότητα: $|a+b| \leq |a| + |b|$ και η ιδιότητα: $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.

Ένας διατεταγμένος δακτύλιος μπορεί να περιγραφεί από τον θετικό του κώνο.

Ορισμός 4.1.3 Σε τυχαίο δακτύλιο R, *κώνος* είναι ένα υποσύνολο P του R, που περιέχει το 1 αλλά όχι το 0 και για τυχαία στοιχεία x, y του P, τα $x+y, xy$ ανήκουν επίσης στο P.

Παράδειγμα 4.1.1 Αν R είναι ένας διατεταγμένος δακτύλιος, το σύνολο των θετικών στοιχείων $P = \{x \in R / x > 0\}$ είναι ένας κώνος του R. Επιπλέον, επειδή το R είναι ολικά διατεταγμένο έχει την ιδιότητα:

Κάθε $x \in R$ ανήκει σε ένα μόνο από τα σύνολα $\{0\}, P, -P = \{-x / x \in P\}$ **(**1**)**.

Αντιστρόφως, κάθε κώνος που ικανοποιεί την **(**1**)** ορίζει μία διάταξη στο R:

$$x > y \text{ αν και μόνον αν } (x-y) \in P.$$

Παρατήρηση 4.1.1 Παρατηρούμε ότι κάθε διατεταγμένος δακτύλιος και γενικότερα ένας οποιοσδήποτε δακτύλιος με κώνο είναι μη τετριμμένος $(1 \neq 0)$.

Πρόταση 4.1.1 Κάθε διατεταγμένος δακτύλιος είναι ακέραια περιοχή και το τετράγωνο κάθε μη μηδενικού στοιχείου του είναι θετικό.

Απόδειξη

Έστω R τυχαίος διατεταγμένος δακτύλιος, τότε $1 \neq 0$ εξ'ορισμού.

Δεδομένων $x, y \in R,$ με $x, y \neq 0$

- αν $x, y > 0$, τότε $xy > 0$
- αν $x, y < 0$, τότε $-x, -y > 0$, οπότε $xy = (-x)(-y) > 0$
- αν $y < 0 < x,$ τότε $x, -y > 0$, οπότε $-xy = x(-y) > 0$, άρα $xy < 0$

- αν $x<0<y,$ τότε $-x,y>0,$ οπότε $-xy=(-x)y>0$, άρα $xy<0$.

Σε κάθε περίπτωση, $xy\neq 0,$ άρα R είναι ακεραία περιοχή. Ειδικά όταν $x=y,$ οι δύο τελευταίες περιπτώσεις δεν μπορεί να ισχύουν και επομένως $x^2>0$.

Θεώρημα 4.1.1 Κάθε διατεταγμένος αντιμεταθετικός δακτύλιος είναι μία ακεραία περιοχή, χαρακτηριστικής μηδέν. Η διάταξη μπορεί να επεκταθεί σε μία διάταξη στο σώμα των κλασμάτων κατά έναν και μοναδικό τρόπο.

Απόδειξη

Επειδή R είναι διατεταγμένος αντιμεταθετικός δακτύλιος, βάσει της πρότασης 1, είναι ακεραία περιοχή, έστω δε Κ το σώμα των κλασμάτων του. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει μοναδικός τρόπος διάταξης του Κ ,επέκτασης της διάταξης στο R ως εξής:

Για κάθε $a,b\in R$, $b\neq 0$, $\frac{a}{b}>0$ στο Κ αν και μόνον αν $ab>0$ (1).

Κατ'αρχάς, επειδή $\frac{a}{b}\cdot b^2=a\cdot b$ και $b^2>0,$ οποιαδήποτε διάταξη στο Κ πρέπει να ικανοποιεί την (1). Απομένει να δείξουμε ότι η (1) ορίζει μία διάταξη. Αρχικά θα δείξουμε ότι είναι καλώς ορισμένη. Πράγματι, αν $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$ $(b,b'\neq 0),$ τότε $ab'=a'b$ και πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με $bb',$ έχουμε $abb'^2=a'b'b^2,$ επομένως $ab>0\Leftrightarrow abb'^2>0\Leftrightarrow a'b'b^2>0\Leftrightarrow a'b'>0.$

Επιπλέον η (1) ορίζει μία τριχοτόμηση στο Κ και αν $\frac{a}{b}>0$, $\frac{a'}{b'}>0$, δηλαδή $ab>0$ και $a'b'>0$, τότε

- $(ab'+a'b)bb'=abb'^2+a'b'b^2>0$ άρα $\frac{a}{b}+\frac{a'}{b'}>0$
- $(aa')(bb')>0$, άρα $\frac{a}{b}\cdot\frac{a'}{b'}>0$.

Επιπλέον, επειδή 1 , $1+1$, $1+1+1$,.. είναι όλα μεγαλύτερα του μηδενός, τότε το $\mathbb{R}$ (άρα και το Κ) έχει χαρακτηριστική μηδέν, για κάθε $n\in\mathbb{N}$.

Ας θεωρήσουμε τους ακεραίους $\mathbb{Z}$. Σε οποιαδήποτε διάταξη, οι 1 , $1+1$, $1+1+1$,.. πρέπει να είναι όλοι θετικοί και επειδή αυτοί οι αριθμοί, καθώς και οι αρνητικοί μαζί με το μηδέν, καλύπτουν το $\mathbb{Z}$, υπάρχει ένας μόνο τρόπος ολικής διάταξης του $\mathbb{Z}$, δηλαδή η γνωστή ¨φυσική¨ διάταξη των ακεραίων. Από το θεώρημα 4.1.1, το ίδιο ισχύει στο $\mathbb{Q}$ και έτσι έχουμε το ακόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 4.1.1 Υπάρχει μόνο ένας τρόπος να εμφανίσουμε το $\mathbb{Q}$ ως διατεταγμένο σώμα, δηλαδή με τη συνήθη ολική διάταξη, συμβιβαστή με τις πράξεις.

Οι πραγματικοί αριθμοί $\mathbb{R}$ επίσης δέχονται μία μόνο διάταξη, αλλά για διαφορετικό λόγο. Κάθε τετράγωνο πραγματικού αριθμού είναι θετικό, κι επειδή τα τετράγωνα, τα αντίθετά τους και το μηδέν καλύπτουν το $\mathbb{R}$, καμία άλλη διάταξη δεν υπάρχει, εκτός από τη συνήθη, συμβιβαστή με τις πράξεις.

Παράδειγμα 4.1.2 *Σώμα με διαφορετικές διατάξεις*

Ένα παράδειγμα σώματος με διαφορετικές διατάξεις είναι το $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$. Υπάρχουν δύο τρόποι να εμβαπτίσουμε αυτό το σώμα μέσα στο $\mathbb{R}$ και αντίστοιχα δύο τρόποι να το διατάξουμε.

1^{ος} τρόπος Η συνήθης διάταξη του συνόλου των πραγματικών αριθμών , έστω

$$\leq_1 \longrightarrow \leq_{\mathbb{R}} .$$

2^{ος} τρόπος Έστω $a+b\sqrt{2} \leq_2 c+d\sqrt{2} \Leftrightarrow a-b\sqrt{2} \leq_{\mathbb{R}} c-d\sqrt{2}$ με $a , b , c , d \in \mathbb{Q}$.

Η σχέση $\leq_2$ είναι σχέση διάταξης διότι είναι:

- αυτοπαθής: $a+b\sqrt{2} \leq_2 a+b\sqrt{2} \Leftrightarrow a-b\sqrt{2} \leq_{\mathbb{R}} a-b\sqrt{2}$, που προφανώς ισχύει.
- αντισυμμετρική: $a+b\sqrt{2} \leq_2 c+d\sqrt{2}$ και $c+d\sqrt{2} \leq_2 a+b\sqrt{2}$ τότε $a-b\sqrt{2} \leq_{\mathbb{R}} c-d\sqrt{2}$ και $c-d\sqrt{2} \leq_{\mathbb{R}} a-b\sqrt{2}$.

Επομένως $a-b\sqrt{2}=c-d\sqrt{2} \Rightarrow a-c+\left(d-b\right)\sqrt{2}=0 \Rightarrow a=c$ και $b=d$, αφού $a , b , c , d \in \mathbb{Q}$ και $\sqrt{2} \not\in \mathbb{Q}$.

- μεταβατική: Έστω $a , b , c , d , e , f \in \mathbb{Q}$ με $a+b\sqrt{2} \leq_2 c+d\sqrt{2}$ και $c+d\sqrt{2} \leq_2 e+f\sqrt{2}$ τότε $a-b\sqrt{2} \leq_{\mathbb{R}} c-d\sqrt{2}$ και $c-d\sqrt{2} \leq_{\mathbb{R}} e-f\sqrt{2}$ επομένως $a-b\sqrt{2} \leq_{\mathbb{R}} e-f\sqrt{2}$, άρα $a+b\sqrt{2} \leq_2 e+f\sqrt{2}$.

Θα δείξουμε ότι η $\leq_2$ διατηρεί την αλγεβρική δομή, δηλαδή ότι, αν $0 \leq_2 x$, $0 \leq_2 y$, τότε $0 \leq_2 x+y$ και $0 \leq_2 xy$, όπου $x , y \in \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$.

- Έστω $0 \leq_2 x = a + b\sqrt{2}$ και $0 \leq_2 y = c + d\sqrt{2}$ με $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$. Τότε $0 \leq_{\mathbb{R}} a - b\sqrt{2}$ **(1)** και $0 \leq_{\mathbb{R}} c - d\sqrt{2}$ **(2)**. Με πρόθεση των **(1)** και **(2)** έχουμε: $0 \leq_{\mathbb{R}} (a+c) - (b+d)\sqrt{2} \Rightarrow 0 \leq_2 (a+c) + (b+d)\sqrt{2} \Rightarrow 0 \leq_2 x + y$.
- Έστω $0 \leq_2 x = a + b\sqrt{2}$ και $0 \leq_2 y = c + d\sqrt{2}$ με $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$. Τότε $0 \leq_{\mathbb{R}} a - b\sqrt{2}$ **(1)** και $0 \leq_{\mathbb{R}} c - d\sqrt{2}$ **(2)**. Με πολλαπλασιασμό των **(1)** και **(2)** έχουμε: $0 \leq_{\mathbb{R}} \left(a - b\sqrt{2}\right)\left(c - d\sqrt{2}\right) \Rightarrow 0 \leq_{\mathbb{R}} (ac + 2bd) - (ad + bc)\sqrt{2} \Rightarrow$ $0 \leq_2 (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2} \Rightarrow 0 \leq_2 \left(a + b\sqrt{2}\right)\left(c + d\sqrt{2}\right) \Rightarrow 0 \leq_2 xy$.

Η ιδέα να αντιστοιχίσουμε τον $a + b\sqrt{2}$ στον $a - b\sqrt{2}$ είναι ότι η απεικόνιση $a + b\sqrt{2} \to a - b\sqrt{2}$ είναι το δεύτερο στοιχείο της ομάδας Gal $\left(\mathbb{Q}\sqrt{2} \big/ \mathbb{Q}\right)$ που είναι διαφορετικό του ουδετέρου, δηλαδή της ταυτοτικής συνάρτησης. Έτσι γενικότερα, αν $\mathbb{Q} \subset K \subset \mathbb{R}$ και η διάσταση $|K : \mathbb{Q}|$ είναι πεπερασμένη, τότε το σώμα K δέχεται $|K : \mathbb{Q}|$ τουλάχιστον διατάξεις, αρκεί να συνθέσουμε τα στοιχεία της ομάδας Gal $(K / \mathbb{Q})$ με την $\leq_{\mathbb{R}}$.

Ορισμός 4.1.4 Δύο διατεταγμένοι δακτύλιοι R και R' λέγονται *order-ισόμορφοι* εάν υπάρχει ένας ισομορφισμός δακτυλίων $x \to x'$ από το R στο R', ο οποίος διατηρεί τη διάταξη, δηλαδή $x > 0 \Leftrightarrow x' > 0$. Προφανώς, αρκεί να ισχύει: $x > 0 \Rightarrow x' > 0$.

Για παράδειγμα, το πρώτο υπόσωμα ενός διατεταγμένου σώματος K είναι order-ισόμορφο με το $\mathbb{Q}$. Επίσης μπορούμε να πούμε ότι υπάρχει μία order-εμβάπτιση του $\mathbb{Q}$ στο K. (Υπενθυμίζουμε ότι τα σώματα $\mathbb{Z}_p$ και $\mathbb{Q}$ λέγονται πρώτα σώματα και κάθε σώμα περιέχει είτε ένα υπόσωμα ισόμορφο με το $\mathbb{Z}_p$ για κάποιον πρώτο p είτε ένα υπόσωμα ισόμορφο με το $\mathbb{Q}$. Αυτά τα σώματα $\mathbb{Z}_p$ και $\mathbb{Q}$ είναι οι θεμέλιοι λίθοι πάνω στους οποίους στηρίζονται όλα τα σώματα.)

4.2 Το διατεταγμένο σώμα των πραγματικών αριθμών κατά Cantor

Υπάρχουν δύο διακεκριμένοι τρόποι να κατασκευάσουμε τους πραγματικούς αριθμούς: (α) η μέθοδος του Dedekind της συμπλήρωσης με τομές που είδαμε αναλυτικά στο κεφάλαιο 3.3 και (β) η μέθοδος του Cantor της συμπλήρωσης με ακολουθίες. Από αυτές η (α) είναι λογικά η απλούστερη, ενώ η (β) αντιστοιχεί περισσότερο στον πρακτικό τρόπο προσέγγισης των πραγματικών αριθμών. Η (β) έχει το πλεονέκτημα να διευκολύνει τον ορισμό των αλγεβρικών πράξεων. Για το λόγο αυτό θα παρουσιάσουμε και την κατασκευή (β). Μελετώντας διατιμήσεις, χρησιμοποιούμε την ίδια κατασκευή για να ορίσουμε p-αδικούς αριθμούς.

Έστω K ένα διατεταγμένο σώμα. Με τον όρο *μηδενική ακολουθία* ορίζουμε μία ακολουθία $\{\alpha_n\}$, $\alpha_n \in K$, τέτοια ώστε για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιος ώστε $|\alpha_n| < \varepsilon$, για κάθε $n > n_0$. Στην ανάλυση λέμε «α_n συγκλίνει στο 0, όταν n τείνει στο ∞». Μία ακολουθία $\{\alpha_n\}$ συγκλίνει στο $\alpha \in K$, όταν $\alpha_n - a \xrightarrow{n\to\infty} 0$ και ονομάζουμε το α, όριο της ακολουθίας. Η παραπάνω ιδιότητα είναι μία απαραίτητη προϋπόθεση για τη σύγκλιση μίας ακολουθίας.

Η συνθήκη του Cauchy: αν μία ακολουθία $\{\alpha_n\}$ συγκλίνει στο α, τότε η διπλή ακολουθία $\{C_{mn}\}$, όπου $C_{mn} = \alpha_m - \alpha_n$, συγκλίνει στο μηδέν. Λεπτομερώς αυτό σημαίνει ότι δοθέντος $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $|a_m - a_n| < \varepsilon$, για κάθε m , $n > n_0$. Θα ονομάζουμε την $\{\alpha_n\}$ ακολουθία Cauchy, αν $|a_m - a_n| \to 0$. Άρα, εκ του ορισμού, κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι ακολουθία Cauchy.

Το αντίστροφο εν γένει δεν ισχύει. π.χ. οι ρητοί αριθμοί $1, 1.4, 1.41, 1.414...$ που έχουν βρεθεί με διαδοχικές προσεγγίσεις του $\sqrt{2}$ σχηματίζουν μία ακολουθία Cauchy, αλλά η ακολουθία αυτή δε συγκλίνει στο $\mathbb{Q}$. Στην περίπτωση που το αντίθετο συμβαίνει, έχουμε μία σημαντική ιδιότητα των διατεταγμένων σωμάτων.

Ορισμός 4.2.1 Ένα διατεταγμένο σώμα λέγεται *πλήρες*, αν κάθε ακολουθία Cauchy αυτού είναι συγκλίνουσα.

Πρόταση 4.2.1 Αν $\{a_n\}$ είναι μη μηδενική ακολουθία Cauchy του K, τότε η ακολουθία $\{\beta_n\}$ με $\beta_n = \begin{cases} 1 & \text{για } n \le n_0 \\ \dfrac{1}{a_n} & \text{για } n > n_0 \end{cases}$, είναι επίσης ακολουθία Cauchy του K.

Απόδειξη

Επειδή η $\{a_n\}$ είναι ακολουθία Cauchy του K, αλλά όχι μηδενική, τότε εξ'ορισμού, υπάρχει $\rho \in K$, $\rho > 0$, τέτοιο ώστε σε κάθε n αντιστοιχεί $n' > n$, για το οποίο $|a_n'| > \rho$. Επειδή η $\{a_n\}$ είναι Cauchy, υπάρχει n_0, έτσι ώστε $|a_n' - a_n| < \dfrac{\rho}{2}$ για κάθε $n', n > n_0$. Επιλέγουμε $n > n_0$ και παίρνουμε $n' > n$, οπότε

$|a_n| = |a_n - a_n' + a_n'| \ge |a_n'| - |a_n - a_n'| > \rho - \dfrac{\rho}{2} = \dfrac{\rho}{2}$, δηλαδή $|a_n| > \dfrac{\rho}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{|a_n|} < \dfrac{2}{\rho}$ για $n > n_0$. Άρα για την $\{\beta_n\}$ έχουμε ότι για κάθε $m, n > n_0$ ισχύει:

$|\beta_n - \beta_m| = \left|\dfrac{1}{a_n} - \dfrac{1}{a_m}\right| = \left|\dfrac{a_m - a_n}{a_n a_m}\right| = \dfrac{a_m - a_n}{|a_m||a_n|} < \varepsilon \cdot \dfrac{2}{\rho} \cdot \dfrac{2}{\rho} = \dfrac{4\varepsilon}{\rho^2}$, άρα η $\{\beta_n\}$ είναι Cauchy στο K.

Θεώρημα 4.2.1 Έστω K ένα διατεταγμένο σώμα. Τότε υπάρχει ένα πλήρες διατεταγμένο σώμα $\tilde{K}$ και μία order-εμβάπτιση $\lambda : K \to \tilde{K}$, τέτοια ώστε, σε κάθε order-εμβάπτιση $f : K \to L$ σε ένα πλήρες διατεταγμένο σώμα L αντιστοιχεί, μοναδική order-εμβάπτιση $f' : \tilde{K} \to L$, τέτοια ώστε $f = \lambda f'$.

Απόδειξη

Έστω R το σύνολο των ακολουθιών Cauchy στο K, το R είναι ένα υποσύνολο του K^N του συνόλου όλων των ακολουθιών στο K. Το K^N είναι δακτύλιος και το R είναι υποδακτύλιος. Το σύνολο n των μηδενικών ακολουθιών είναι ιδεώδες στο R. Θα δείξουμε ότι αν $\{a_n\}$ και $\{\beta_n\} \in n$, τότε $\{a_n\ \beta_n\} \in n$. Επειδή $\{a_n\}$ είναι ακολουθία Cauchy, υπάρχει n_0, έτσι ώστε $|a_m - a_n| < 1$ για κάθε $m, n > n_0$, άρα $|a_m| < |a_{n_0}| + 1$ για $m > n_0$. Επομένως $|a_m| \le M$, όπου $M = \max\left\{|a_1|, \ldots, |a_{n_0 - 1}|, |a_{n_0}| + 1\right\}$.

Έτσι κάθε ακολουθία Cauchy είναι φραγμένη. Επειδή $\beta_n \to 0$, για κάθε $\varepsilon > 0$ είναι $|\beta_n| < \dfrac{\varepsilon}{M}$ για $n > n_1$, επομένως $|a_n\ \beta_n| < \varepsilon$ για $n > n_1$, άρα $a_n\, \beta_n \to 0$. Αποδείξαμε ότι $\{a_n \beta_n\} \in \mathfrak{n}$. Ισχυριζόμαστε ότι $\mathfrak{n}$ είναι maximal ιδεώδες στο R. Πράγματι $\mathfrak{n} \neq R$, διότι η ακολουθία 1, 1,... δεν είναι μηδενική και αν $\{a_n\}$ είναι οποιαδήποτε ακολουθία Cauchy, αλλά όχι μηδενική, τότε η ακολουθία

$$\beta_n = \begin{cases} 1 & \gamma\iota\alpha\ n \le n_0 \\ a_n^{-1} & \gamma\iota\alpha\ n > n_0 \end{cases},$$

βάσει της προηγούμενης πρότασης , είναι ακολουθία Cauchy. Τότε η $\{a_n \beta_n\}$ συγκλίνει στο 1 $\left(\{a_n\}\{\beta_n\} \equiv 1(\bmod \mathfrak{n})\right)$. Αυτό δείχνει ότι $\mathfrak{n}$ είναι maximal και συνεπώς το $R/\mathfrak{n}$ είναι σώμα. Συμβολίζουμε με $\tilde{K}$ αυτό το σώμα και με λ τον φυσικό ομομορφισμό $K \to R \to R/\mathfrak{n}$ που έχει επιτευχθεί, απεικονίζοντας το $a \in K$ στο σώμα των υπολοίπων της σταθερής ακολουθίας $a, a, \ldots$. Όπως κάθε ομομορφισμός σωμάτων, αυτή είναι μία εμβάπτιση και θα ταυτίσουμε το K με την εικόνα του στο $\tilde{K}$. Επεκτείνουμε τη διάταξη στο $\tilde{K}$ ως εξής:

Δοθέντος $\gamma \in \tilde{K}$ που αντιπροσωπεύεται από μία ακολουθία Cauchy $\{a_n\}$,

ή αυτή είναι μία μηδενική ακολουθία,

ή υπάρχουν $\varepsilon > 0$ και n_0, τέτοια ώστε $a_n > \varepsilon$ για $n > n_0$,

ή υπάρχει n_1, έτσι ώστε $a_n < -\varepsilon$ για $n > n_1$.

Επιπλέον, όλες οι ακολουθίες Cauchy που αντιπροσωπεύουν το γ έχουν την ίδια ιδιότητα και αναλόγως θέτουμε $\gamma = 0$, $\gamma > 0$, $\gamma < 0$. (στην πρόταση που ακολουθεί το θεώρημα αποδεικνύουμε ότι ανάμεσα σε δύο στοιχεία του $\tilde{K}$ υπάρχει ένα στοιχείο του K, δηλαδή το K είναι πυκνό στο $\tilde{K}$). Δοθείσης μίας ακολουθίας Cauchy $\{\gamma_n\}$ στο $\tilde{K}$, ή το γ_n είναι σταθερό από κάποιο n και πάνω, οπότε είναι όριο ακολουθίας Cauchy στο K, συνεπώς, συγκλίνει ή περιέχει άπειρους διακεκριμένους όρους. Σε αυτή την τελευταία περίπτωση, παραλείποντας τις επαναλήψεις μπορούμε να υποθέσουμε ότι όλα τα γ_n είναι διακεκριμένα. Επιλέγουμε για κάθε n, $a_n \in K$ να βρίσκεται ανάμεσα στα γ_n και γ_{n+1} (λόγω του ότι το K είναι πυκνό στο $\tilde{K}$), τότε η $\{a_n\}$ είναι ακολουθία Cauchy στο K, η οποία έχει όριο γ στο $\tilde{K}$, προφανώς $\lim \gamma_n = \lim a_n = \gamma$ και αυτό αποδεικνύει ότι το $\tilde{K}$ είναι πλήρες.

Έστω $f : K \to L$ είναι μία order-εμβάπτιση σε ένα πλήρες σώμα L. Κάθε στοιχείο γ του $\tilde{K}$ είναι όριο ακολουθίας Cauchy $\{a_n\}$ του K. Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι η $f(a_n)$ είναι ακολουθία Cauchy του L, επομένως έχει όριο, έστω b. Κάθε άλλη ακολουθία Cauchy, η οποία συγκλίνει στο γ, διαφέρει από την a_n κατά μηδενική ακολουθία άρα η εικόνα της τείνει στο b, έτσι το b εξαρτάται μόνο από το γ και μπορούμε να θέσουμε $f'(\gamma) = b$.

Χωρίς δυσκολία επαληθεύεται ότι f' είναι μία order-εμβάπτιση τέτοια ώστε $f = \lambda f'$ και είναι η μοναδική που ικανοποιεί αυτή την ισότητα.

Το σώμα $\tilde{K}$, του οποίου η ύπαρξη αποδείχθηκε στο θεώρημα 4.2.1 , ονομάζεται *πλήρωση* του K. Εάν για παράδειγμα, πάρουμε $K = \mathbb{Q}$, τότε $\tilde{K} = \mathbb{R}$.

Πρόταση 4.2.2 (Συμπλήρωση στο θεώρημα 4.2.1)

Το διατεταγμένο σώμα K είναι πυκνό στο $\tilde{K}$, όπου $\tilde{K}$ είναι το πλήρες σώμα στο οποίο εμφυτεύουμε το K.

Απόδειξη

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1) $a > 0$ και $\beta > 0$ με $a < \beta$.

Έστω $\{a_n\}$, $\{\beta_n\}$ εκπρόσωποι των κλάσεων a και β αντίστοιχα, τότε υπάρχουν $n_1 \in N$ και $\varepsilon_1 > 0$ τέτοια ώστε $a_n > \varepsilon_1$, για κάθε $n > n_1$ και υπάρχουν $n_2 \in N$ και $\varepsilon_2 > 0$ τέτοια ώστε $\beta_n > \varepsilon_2$, για κάθε $n > n_2$.

Επειδή κάθε ακολουθία Cauchy είναι φραγμένη, θα ισχύει $a_n < M_1$, $\beta_n < M_2$. Ισχυριζόμαστε ότι υπάρχει $N_1 \in N$ τέτοιο ώστε η διάταξη των ε_1 , M_1 , ε_2 , M_2 να είναι $\varepsilon_1 < M_1 < \varepsilon_2 < M_2$, δηλαδή το M_1 να είναι άνω φράγμα της $\{a_n\}$, για $n > N_1$ και αντίστοιχα το M_2 να είναι άνω φράγμα της $\{\beta_n\}$, για $n > N_2$. (Προκύπτει άμεσα διότι $\{a_n\}$, $\{\beta_n\}$ είναι ακολουθίες Cauchy). Θέτουμε $\gamma_n = \frac{\varepsilon_2 + M_1}{2}$, για κάθε n (όπου $\{\gamma_n\}$ σταθερή ακολουθία). Για $n > N_2 = \max\{n_1, n_2, N_1\}$ έχουμε

$$\gamma_n - a_n = \frac{\varepsilon_2 + M_1}{2} - a_n > \frac{\varepsilon_2 + M_1}{2} - M_1 > \frac{\varepsilon_2 - M_1}{2} > 0 \quad \text{και}$$

$\beta_n-\gamma_n=\beta_n-\frac{\varepsilon_2+M_1}{2}>\varepsilon_2-\frac{\varepsilon_2}{2}-\frac{M_1}{2}=\frac{\varepsilon_2-M_1}{2}>0$, άρα το $\{\gamma_n\}\in K$ είναι ενδιάμεσο των a, $\beta\in\tilde{K}$.

2) Έστω $a<0$ και $\beta<0$ με $a<\beta$.

Υπάρχουν $\varepsilon_1>0$ και $n_1\in N$ τέτοια ώστε $a_n<-\varepsilon_1$, για κάθε $n>n_1$ και υπάρχουν $\varepsilon_2>0$ και $n_2\in N$ τέτοια ώστε $\beta_n<-\varepsilon_2$, για κάθε $n>n_2$. Με συλλογισμό όμοιο με της προηγούμενης περίπτωσης έχουμε $\beta_n>-\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{2}$, για κάθε $n>\max\{n_1,n_2,N_1\}$.

Θέτουμε $\gamma_n=\frac{-\varepsilon_1-\varepsilon_2}{2}$, για κάθε $n\in N$ (όπου $\{\gamma_n\}$ σταθερή ακολουθία).

Για $n>\max\{n_1,n_2,N_1\}$ είναι:

$\gamma_n-a_n=-\frac{\varepsilon_1}{2}-\frac{\varepsilon_2}{2}-a_n>-\frac{\varepsilon_1}{2}-\frac{\varepsilon_2}{2}+\varepsilon_1=\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{2}>0$ και

$\beta_n-\gamma_n=\beta_n+\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}>\frac{-\varepsilon_1-\varepsilon_2}{2}+\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}=0$. Επομένως υπάρχει στοιχείο του K ανάμεσα σε δύο διαφορετικά στοιχεία του $\tilde{K}$.

3) Έστω $a<0$ και $\beta>0$ με $a<\beta$.

Υπάρχουν $\varepsilon_1>0$ και $n_1\in N$ τέτοια ώστε $a_n<-\varepsilon_1$, για κάθε $n>n_1$ και υπάρχουν $\varepsilon_2>0$ και $n_2\in N$ τέτοια ώστε $\beta_n>\varepsilon_2$, για κάθε $n>n_2$. Θέτουμε $\gamma_n=0$ για κάθε $n\in N$ (δηλαδή, $\{\gamma_n\}$ σταθερά μηδενική ακολουθία). Άρα για $n>N_1=\max\{n_1,n_2\}$ έχουμε $\beta_n-\gamma_n=\beta_n-0=\beta_n>\varepsilon_2>0$ και $\gamma_n-a_n=-a_n>\varepsilon_1>0$.

4) Έστω $a=0$, $\beta>0$.

Επομένως $a_n<\frac{\varepsilon}{4}$, για κάθε $n>n_1$ και $\beta_n>\varepsilon$, για κάθε $n>n_2$. Θέτουμε $\gamma_n=\frac{\varepsilon}{2}$, για κάθε $n\in N$, επομένως για $n>N_1=\max\{n_1,n_2\}$ είναι

$\beta_n-\gamma_n=\beta_n-\frac{\varepsilon}{2}>\varepsilon-\frac{\varepsilon}{2}=\frac{\varepsilon}{2}>0$ και $\gamma_n-a_n=\frac{\varepsilon}{2}-a_n>\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon}{4}=\frac{\varepsilon}{4}>0$.

5) Έστω $a<0$, $\beta=0$.

Άρα $a_n<-\varepsilon_1$, για κάθε $n>n_1$ και $\beta_n>-\dfrac{\varepsilon}{2}$, για κάθε $n>n_2$. Επομένως για $n>N_1=\max\{n_1,n_2\}$ και $\gamma_n=\dfrac{\varepsilon}{2}$ για κάθε $n\in N$ έχουμε

$\gamma_n-a_n=-\dfrac{\varepsilon}{2}-a_n>-\dfrac{\varepsilon}{2}+\varepsilon=\dfrac{\varepsilon}{2}>0$ και $\beta_n-\gamma_n>-\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2}=0$. Συνεπώς υπάρχει στοιχείο του K ανάμεσα σε δύο διαφορετικά στοιχεία του $\tilde{K}$.

Συνοψίζοντας όλες τις περιπτώσεις, έχουμε ότι το K είναι πυκνό στο $\tilde{K}$.

Πρόταση 4.2.3 (Συμπλήρωση στο θεώρημα 4.2.1)

Έστω $\{a_n\}$ ακολουθία Cauchy στο σώμα K και f: order-ισομορφισμός από το σώμα K στο σώμα L. Τότε η $\{f(a_n)\}$ είναι ακολουθία Cauchy στο L.

Απόδειξη

Επειδή $\{a_n\}$ Cauchy στο K, εξ'ορισμού για κάθε $\varepsilon>0$, υπάρχει $n_0\in N$, ώστε για κάθε $m,n>n_0$ να ισχύει:

$$|a_n-a_m|<\varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon<a_n-a_m<\varepsilon \Rightarrow f(-\varepsilon)<f(a_n-a_m)<f(\varepsilon) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -f(\varepsilon)<f(a_n)-f(a_m)<f(\varepsilon)\Rightarrow |f(a_n)-f(a_m)|<f(\varepsilon) \text{ και } f(\varepsilon)>0.$$

Άρα η $\{f(a_n)\}$ είναι Cauchy στο L.

Οι πραγματικοί αριθμοί, ως διατεταγμένο σώμα, έχουν σημαντικές ιδιότητες, οι οποίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να τους χαρακτηρίσουν. Παραθέτουμε δύο από αυτές.

Ορισμός 4.2.2 Ένα διατεταγμένο σώμα K λέγεται *αρχιμήδειο* εάν έχει την ακόλουθη ιδιότητα: Δοθέντων $a, b\in K$, $a>0$, υπάρχει $n\in N$, τέτοιο ώστε $na>b$.

Πρόταση 4.2.4 Το $\mathbb{Q}$ είναι αρχιμήδειο διατεταγμένο σώμα.

Απόδειξη

Θεωρούμε δύο ρητούς $\frac{m}{n}, \frac{m'}{n'}$ με $\frac{m}{n} > 0$. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει $\kappa' \in N$ τέτοιο ώστε $\kappa' \frac{m}{n} > \frac{m'}{n'}$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Αν} & \frac{m}{n} \geq \frac{m'}{n'} \\ \text{Επειδή} & \frac{m}{n} > 0 \end{array}\right\} \text{ προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο σχέσεις έχουμε } 2\frac{m}{n} > \frac{m'}{n'} \text{ άρα}$$

$\kappa' = 2$ και η πρόταση αποδείχθηκε.

Αν $0 < \frac{m}{n} < \frac{m'}{n'} \xrightarrow{\frac{n'}{m'}} 0 < \frac{m \cdot n'}{n \cdot m'} < 1$.

Όμως $\frac{1}{m'n} \leq \frac{m \cdot n'}{n \cdot m'} < 1 \xrightarrow{\frac{m'^2}{n'}n} \left(\frac{m'^2 n}{n'}\right) \cdot 1 \Rightarrow \frac{m'}{n'} < \frac{m'^2}{n'} n = K\frac{m}{n}$, όπου $K = \frac{m'^2 \cdot n^2}{n' \cdot m} \in \mathbb{Q}$.

Θέτουμε $\kappa' = [\kappa] + 1$ και έχουμε $\kappa' \frac{m}{n} > \frac{m'}{n'}$, $\kappa' \in N$, οπότε έχουμε το ζητούμενο.

Πρόταση 4.2.5 Το $\mathbb{R}$ είναι αρχιμήδειο διατεταγμένο σώμα.

Απόδειξη

Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ με $a > 0$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $n \in N$, τέτοιο ώστε $na > b$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Αν} & a \geq b \\ \text{και} & a > 0 \end{array}\right\} \text{ προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο σχέσεις, έχουμε } 2a > b.$$

Αν $0 < a < b$, τότε $0 < \frac{a}{b}$. Επειδή το $\mathbb{Q}$ είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$, υπάρχει ρητός $\frac{m}{n}$, τέτοιος ώστε $0 < \frac{m}{n} < \frac{a}{b}$ $(m \in N, n \in N)$, τότε όμως $0 < \frac{1}{n} < \frac{m}{n} < \frac{a}{b}$ και από την $\frac{1}{n} < \frac{a}{b}$ έχουμε $na > b$. Επομένως το $\mathbb{R}$ είναι αρχιμήδειο.

Θεώρημα 4.2.2 Κάθε διατεταγμένο υπόσωμα του $\mathbb{R}$ είναι αρχιμήδειο και αντιστρόφως, κάθε αρχιμήδειο διατεταγμένο σώμα είναι order-ισόμορφο με ένα υπόσωμα του $\mathbb{R}$.

Απόδειξη

Επειδή το $\mathbb{Q}$ είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$, είναι πυκνό σε κάθε υπόσωμα του $\mathbb{R}$ και επομένως ένα τέτοιο υπόσωμα είναι αρχιμήδειο.

Αντιστρόφως, θεωρούμε K αρχιμήδειο διατεταγμένο σώμα. Θα αποδείξουμε ότι το $\mathbb{Q}$ είναι πυκνό στο K. Έστω $a,b \in K$, με $a<b$, τότε $b-a>0$ και $\frac{1}{b-a}>0$. Εφαρμόζοντας την αρχιμήδεια ιδιότητα έχουμε ότι υπάρχει $n \in N$, τέτοιο ώστε $n > \frac{1}{b-a}$ (1). Εφαρμόζοντας την αρχιμήδεια ιδιότητα ξανά, βρίσκουμε ότι υπάρχει $m \in N$, τέτοιο ώστε $\frac{m+1}{n} \geq b$ (2). Επιλέγουμε το ελάχιστο m για το οποίο ισχύει η (2), επομένως:

$\frac{m+1}{n} \geq b > \frac{m}{n}$ (3) (αφού το $m-1$ δεν πληροί την (2), $\frac{m-1+1}{n} < b \Rightarrow \frac{m}{n} < b$).

Έτσι έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Από την (1)},\ b-a>\frac{1}{n} \Rightarrow a<b-\frac{1}{n} \\ \text{Από την (2)},\ b-\frac{1}{n} \leq \frac{m}{n} \\ \text{Από την (3)},\ \frac{m}{n}<b \end{array}\right\} \text{ άρα } a<\frac{m}{n}<b.$$

Επομένως το $\mathbb{Q}$ είναι πυκνό στο K.

Επίσης έχουμε ότι για κάθε $a \in K$ και για κάθε $n \in N$ υπάρχει $m = m(n) \in \mathbb{Z}$ έτσι ώστε $\frac{m}{n} < a < \frac{m+1}{n}$. Τα κλάσματα $\frac{m(n)}{n}$, για $n = 1,2,...$ σχηματίζουν μία ακολουθία που συγκλίνει στο $a \in K$, άρα σχηματίζουν μία ακολουθία Cauchy. Έστω a' το όριο αυτής της ακολουθίας στο $\mathbb{R}$, τότε η απεικόνιση $a \to a'$ είναι μία καλώς ορισμένη απεικόνιση του K στο $\mathbb{R}$, οπότε μέσω αυτής το K είναι order-ισόμορφο με ένα υπόσωμα R' του $\mathbb{R}$.

Πόρισμα 4.2.1 Κάθε πλήρες αρχιμήδειο διατεταγμένο σώμα είναι ισόμορφο με το $\mathbb{R}$.

Μία δεύτερη σημαντική χαρακτηριστική ιδιότητα των πραγματικών αριθμών είναι η ιδιότητα του άνω φράγματος. Σε κάθε μερικώς διατεταγμένο σύνολο S το supremum κάθε υποσυνόλου X, εάν υπάρχει, είναι μοναδικό. Μπορεί να ανήκει στο X, για παράδειγμα τα $\{0,-1,-2,...\}$ και $\left\{-1,-\frac{1}{2},-\frac{1}{3},...\right\}$ έχουν και τα δύο supremum το

0, το οποίο ανήκει στο πρώτο σύνολο, αλλά όχι στο δεύτερο. Ένα σύνολο λέγεται φραγμένο άνω αν έχει άνω φράγμα.
Όσον αφορά τα άνω φράγματα μπορούμε να χαρακτηρίσουμε τους πραγματικούς από την *ιδιότητα του φράγματος*: Κάθε μη κενό υποσύνολο, το οποίο είναι άνω φραγμένο, έχει ένα ελάχιστο άνω φράγμα.

Πρόταση 4.2.6 Κάθε διατεταγμένο σώμα που έχει την ιδιότητα του άνω φράγματος είναι αρχιμήδειο.
Απόδειξη
Έστω $a, b \in K$, με $a > 0$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $n \in N$ ισχύει $na \leq b$. Τότε το σύνολο $A = \{a, 2a, 3a, ...\}$ είναι φραγμένο σύνολο (από το b) και επομένως έχει supremum, έστω γ, από την ιδιότητα του άνω φράγματος. Επειδή $a > 0 \Rightarrow -a < 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \gamma - a < \gamma$, οπότε υπάρχει $n \in N$ ώστε $na > \gamma - a \Rightarrow na + a > \gamma \Rightarrow (n+1)a > \gamma$, άτοπο διότι $\gamma = \sup A$.

Θεώρημα 4.2.3 Το σώμα των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα του άνω φράγματος και κάθε διατεταγμένο σώμα με την ιδιότητα του άνω φράγματος είναι order-ισόμορφο με το $\mathbb{R}$.
Απόδειξη
Έστω X οποιοδήποτε υποσύνολο πραγματικών αριθμών, φραγμένο άνω.

Αν το X έχει μέγιστο στοιχείο γ, τότε $\gamma = \sup X$.

Αν το X δεν έχει μέγιστο, τότε θεωρούμε Y το σύνολο των άνω φραγμάτων του και X' το συμπλήρωμα του Y στο $\mathbb{R}$. Τότε $X \subseteq X'$. Κάθε αριθμός του X' είναι μικρότερος από κάθε αριθμό του Y. Επειδή τα X' και Y είναι συμπληρωματικά, μπορούμε για κάθε $n = 1, 2, ...$ να βρούμε $a_{2n-1} \in X'$, $a_{2n} \in Y$ έτσι ώστε

$$|a_{2n-1} - a_{2n}| < \frac{1}{n}, \qquad a_{2n-3} < a_{2n-1} < a_{2n} < a_{2n-2}.$$

Έτσι η $\{a_n\}$ είναι ακολουθία Cauchy και έστω γ το όριό της. Τότε για κάθε $n \in N$, το $\gamma + \frac{1}{n}$ είναι ένα άνω φράγμα του X, γι'αυτό υπερέχει κάποιου a_{2r} και έτσι ανήκει στο Y, οπότε το $\gamma - \frac{1}{n}$ είναι μικρότερο από κάποιο a_{2r-1} και έτσι βρίσκεται στο X'.

Επομένως $\gamma = \sup X$.

Αντιστρόφως, έστω K ένα διατεταγμένο σώμα το οποίο έχει την ιδιότητα του άνω φράγματος . Από την πρόταση που προηγείται του θεωρήματος, το K είναι αρχιμήδειο, επομένως είναι order-ισόμορφο προς ένα υπόσωμα του $\mathbb{R}$, προφανώς το K περιέχει το $\mathbb{Q}$ σαν ένα υπόσωμα. Κάθε στοιχείο γ του $\mathbb{R}$ μπορεί να εκφραστεί ως supremum κάποιου υποσυνόλου A του $\mathbb{Q}$. Το A έχει επίσης ένα supremum γ' στο K, από την ιδιότητα του άνω φράγματος. Προφανώς $\gamma \le \gamma'$. Αν ό μως η ανισότητα είναι αυστηρή, δηλαδή $\gamma < \gamma'$, τότε μπορούμε να βρούμε $a \in \mathbb{Q}$ έτσι ώστε $\gamma < a < \gamma'$ και αυτό αντιβαίνει στο ότι $\gamma' = \sup A$ στο K. Επομένως $\gamma = \gamma'$, άρα $K \approx \mathbb{R}$ (η συνάρτηση $\gamma \mapsto \gamma' \in K$ είναι ισομορφισμός σωμάτων, όπου $\gamma \in \mathbb{R}$).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΕΠΕΚΤΑΣΗ ΔΙΑΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ ΟΜΑΔΩΝ

Θα ολοκληρώσουμε τη μελέτη αυτής της διπλωματικής εργασίας επί των διατεταγμένων αλγεβρικών δομών, παρουσιάζοντας ένα ενδιαφέρον αποτέλεσμα που αφορά στις μερικώς διατεταγμένες ομάδες και στις συνθήκες κάτω από τις οποίες αυτές επεκτείνονται σε ολικώς διατεταγμένες ομάδες (βλ. Κοντολάτου-Σταμπάκης [23]). Το πρόβλημα επέκτασης ενός μερικώς διατεταγμένου συνόλου σε ολικώς διατεταγμένο έχει λυθεί από τον Fuchs. Οι Κοντολάτου και Σταμπάκης χρησιμοποίησαν τα αποτελέσματα του Fuchs προκειμένου να κατασκευάσουν επέκταση μίας μερικώς διατεταγμένης ομάδας.

5.1 Μερικές παρατηρήσεις επί της επέκτασης μιας μερικώς διατεταγμένης ομάδας

Έστω $(G\,,+\,,\leq)$ μία μερικώς διατεταγμένη ομάδα και για κάθε $a \in G$, έστω S'_a το σύνολο $\{x \in G : a \leq x\}$.

Λήμμα 5.1.1 Αν τα στοιχεία p και q είναι μη συγκρίσιμα, η μερική διάταξη $\leq$ της G μπορεί να επεκταθεί σε μία άλλη διάταξη, $\tilde{\leq}$, τέτοια ώστε $p \tilde{\leq} q$, αν και μόνον αν η σχέση $nq \leq np$ είναι ψευδής για κάθε φυσικό αριθμό n.

Απόδειξη

Η αναγκαιότητα της συνθήκης είναι προφανής. Αποδεικνύουμε το ικανό της συνθήκης. Ορίζουμε τη σχέση $\tilde{\leq}$ ως εξής:

$a \tilde{\leq} b$ αν και μόνον αν $a \leq b$ ή $(\exists n \in N_0)\left[b - a \in S'_{n(q-p)}\right]$, $N_0 = N \bigcup \{0\}$.

Έστω $a \tilde{\leq} b$ και $b \tilde{\leq} a$. Θεωρούμε την περίπτωση (οι άλλες περιπτώσεις είναι τετριμμένες) όπου:

$$b - a \in S'_{n(q-p)} \quad \text{και} \quad a - b \in S'_{m(q-p)} \qquad (1)$$

Από την (1) έχουμε: $n(q-p) \leq b - a$ και $m(q-p) \leq a - b$, συνεπώς $(m+n)q \leq (m+n)p$ και λόγω της υπόθεσης $m = n = 0$, επομένως $a = b$.

Τώρα έστω $a \tilde{\leq} b$ και $b \tilde{\leq} c$. Θεωρούμε πάλι την περίπτωση $b - a \in S'_{n(q-p)}$ και $c - b \in S'_{m(q-p)}$. Συνεπώς τότε και η μεταβατικότητα της σχέσης $\tilde{\leq}$ έχει αποδειχθεί. Όθεν η σχέση $\tilde{\leq}$ είναι μία διάταξη και προφανώς είναι μία επέκταση της $\leq$. Μένει να αποδείξουμε τη συμβιβαστότητα σχέσης-πράξης.

Αρκεί να αποδείξουμε: $a \tilde{\leq} b \Leftrightarrow 0 \tilde{\leq} b - a$, αλλά η τελευταία σχέση είναι ισοδύναμη προς $0 \leq b - a$ ή $b - a \in S'_{n(q-p)}$ και η απόδειξη είναι πλήρης.

Παρατήρηση 5.1.1 Είναι εύκολο να δούμε ότι η συνθήκη $nq = np$ $(n \neq 1)$ σημαίνει ότι η ομάδα έχει στρέψη.

Παρατήρηση 5.1.2 Εάν για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, $nx < ny$, τότε για κάποια $m > n$ η σχέση είναι ψευδής. Πράγματι˙ η συνθήκη είναι αληθής για $n = 1$.

Αν n^* είναι ο μικρότερος φυσικός αριθμός τέτοιος ώστε $n^* x < n^* y$ και αν $m^* y < m^* x$, όπου $m^* = n^* k + v$, με $k, v \in \mathbb{N}$ και $0 \leq v < n^*$, τότε πρέπει να έχουμε $vy < vx$, άτοπο.

Το ακόλουθο θεώρημα συμπίπτει με το θεώρημα του Szpilrajn(1930) επί των διατεταγμένων συνόλων. Θα γράψουμε τα βασικά βήματα της απόδειξης.

Θεώρημα 5.1.1 Κάθε ελευθέρα στρέψεως διατεταγμένη αβελιανή ομάδα μπορεί να επεκταθεί σε μία ολικώς διατεταγμένη ομάδα.

Απόδειξη

Έστω $(G\ ,+\ ,\leq)$ η δοθείσα δομή ομάδας και $\mathcal{E}$ το σύνολο όλων των (αυστηρών) επεκτάσεων της $<$. Από το λήμμα 5.1.1, το σύνολο $\mathcal{E}$ είναι μη κενό. Θεωρούμε μία αλυσίδα $\mathfrak{I}^*$ διατάξεων, επεκτάσεων της G και θεωρούμε αυτές τις επεκτάσεις ως υποσύνολα του $G\times G$. Αποδεικνύουμε ότι η $\mathfrak{I}^*$ έχει ένα supremum στο $\mathcal{E}$.

Θέτουμε $\gamma=\bigcup\gamma^*$, με $\gamma\in\mathfrak{I}^*$. Αν a , b ανήκουν στη G, τότε:

$$(a,b)\in\gamma\Leftrightarrow\left(\exists\gamma^*\in\mathfrak{I}^*\right)\left[(a,b)\in\gamma^*\right].$$

Συνεπώς για κάθε $a\in G$ και για κάθε $\gamma\in\mathfrak{I}^*$, $(a,a)\in\gamma^*$ και το γ περιέχει τη διαγώνιο της $G\times G$. Εξάλλου, αν $(a,b)\in\gamma$ και $(b,c)\in\gamma$, τότε υπάρχουν γ^* και γ^{**} τέτοια ώστε $(a,b)\in\gamma^*$, $(b,c)\in\gamma^{**}$ και λόγω του ότι η $\mathfrak{I}^*$ είναι μία αλυσίδα, τότε $\gamma^*\leq\gamma^{**}$ ή $\gamma^{**}<\gamma^*$, έστω $\gamma^*\leq\gamma^{**}$, τότε $(a,b)\in\gamma^{**}$, $(b,c)\in\gamma^{**}$ και τελικά $(a,c)\in\gamma$.

Η απόδειξη για την αντισυμμετρικότητα είναι ανάλογη.

Προφανώς αυτή η διάταξη είναι ολική, επέκταση της $\leq$.

Θεωρούμε εις το εξής ότι κάθε διατεταγμένο σύνολο εμφανίζεται ως μία ένωση άνω-κατευθυνόμενων ή κάτω-κατευθυνόμενων υποσυνόλων, maximal ως προς το περιέχεσθαι και οι επόμενες προτάσεις αφορούν αυτήν την «ανάλυση» των διατεταγμένων συνόλων (σε κάθε περίπτωση λέμε ότι το υποσύνολο είναι ένα maximal άνω-κατευθυνόμενο ή ένα maximal κάτω-κατευθυνόμενο υποσύνολο του συνόλου). Στη συνέχεια αποδεικνύουμε ότι για κάθε στοιχείο, το σύνολο των στοιχείων τα οποία είναι μεγαλύτερα ή μικρότερα από αυτό, θα μπορούσαν να παραχθούν από μία μεταφορά του θετικού ή του αρνητικού κώνου της ομάδας. Εξάλλου, αναλύοντας διατεταγμένα σύνολα κατά αυτόν τον τρόπο έχουμε τη δυνατότητα να ορίσουμε σύγκλιση, παίρνοντας τους όρους της ακολουθίας από ένα maximal κατευθυνόμενο σύνολο.

Θέτουμε για κάθε $a\in G$: $S_a=\{x\in G:a<x\}$, $I_a=\{x\in G:x<a\}$, $I'_a=\{x\in G:x\leq a\}$ και γράφουμε $a\,//\,b$, αν τα στοιχεία a και b είναι μη συγκρίσιμα.

Πρόταση 5.1.1 Αν A_i είναι ένα maximal άνω-κατευθυνόμενο υποσύνολο του I_x, τότε το σύνολο $x+A_i$ αποτελεί ένα maximal άνω-κατευθυνόμενο υποσύνολο του I_{2x}.

Απόδειξη

Αν $\overline{a}$ είναι μία αλυσίδα, υποσυνόλο του A_i, τότε $x+\overline{a}$ είναι μία αλυσίδα, υποσύνολο του I_{2x}. Συνεπώς, αν θεωρήσουμε το A_i ως μία ένωση αλυσίδων $(\overline{a}_k)_{k\in K}$, τότε $x+A_i=\bigcup\limits_{k\in K}(x+\overline{a}_k)$, όπου $x+\overline{a}_k\subset I_{2x}$ και το υποσύνολο $\bigcup\limits_{k\in K}(x+\overline{a}_k)$ είναι άνω-κατευθυνόμενο. Μένει να αποδείξουμε ότι το υποσύνολο $\bigcup\limits_{k\in K}(x+\overline{a}_k)$ είναι ένα maximal άνω-κατευθυνόμενο υποσύνολο του I_{2x}.

Θέτουμε $A_i'=x+A_i$ και υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα maximal άνω-κατευθυνόμενο υποσύνολο A' του I_{2x} τέτοιο ώστε $A_i'\subset A'\subset I_{2x}$. Τότε το σύνολο $-x+A'$ είναι επίσης ένα άνω-κατευθυνόμενο υποσύνολο τέτοιο ώστε $A_i\subset -x+A'\subset I_x$, επομένως $A'\subset x+A_i$.

Παρατήρηση 5.1.3 Τελικά υπάρχει μία ανάλογη πρόταση για ένα ένα maximal άνω-κατευθυνόμενο υποσύνολο του I_x.

Πρόταση 5.1.2 Αν $p//q$, τότε κάθε στοιχείο του $q+I_p$ είναι μικρότερο από κάθε στοιχείο του S_q+p.

Απόδειξη

Αν $(q+I_p)\cap(S_q+p)\neq\varnothing$, τότε υπάρχουν $a\in S_a$ και $b\in I_p$ τέτοια ώστε $q+b=a+p$. Εξάλλου $q<a$ και $b<p$, επομένως $q+b<a+p$, άτοπο.

Αν $b\in I_p$ και $a\in S_q$, τότε $q+b<q+p<a+p$.

Παρατήρηση 5.1.4 Θεωρούμε τις ολικώς διατεταγμένες ομάδες $(E_i,+,\leq_i)$, $i\in\{1,2,...,n\}$ και το ευθύ τους άθροισμα $\left(\prod\limits_i E_i,\oplus\right)$ διατεταγμένο σύμφωνα με μία από τις γνωστές διατάξεις καρτεσιανού γινομένου, για παράδειγμα από τη component wise διάταξη $\tilde{\leq}$ οριζόμενη ως εξής:

$a \tilde{\leq} b \Leftrightarrow \left(\forall i \in \{1,2,...,n\}\right)\left[a_i \leq_i b_i\right]$, όπου $a=\left(a_1,a_2,...,a_n\right)$ και $b=\left(b_1,b_2,...,b_n\right)$.

Θα μπορούσαμε να επεκτείνουμε τη διάταξη $\tilde{\leq}$ σε μία ολική διάταξη $\leq$, διατηρώντας σε όλη τη διαδικασία την επόμενη αρχή:

Αν $a // b$ και i ο πρώτος δείκτης για τον οποίο τα στοιχεία a_i και b_i είναι διαφορετικά, θέτουμε:

$$a \leq b \Leftrightarrow a_i <_i b_i .$$

Αυτή η διαδικασία οδηγεί στη λεξικογραφική διάταξη. Με ανάλογο τρόπο παίρνουμε την αντίστροφη διάταξη της λεξικογραφικής.

Αλλά σύμφωνα με τη δομή που προσδιορίσαμε στο θεώρημα 5.1.1 θα μπορούσαμε να συνδιάσουμε τις δύο παραπάνω επεκτάσεις και έτσι θα μπορούσαμε να έχουμε πολλές product-orders συμβατές με το ευθύ άθροισμα.(Fuchs, 1936).

Παρατήρηση 5.1.5 Ο Fuchs έθεσε το 1936 το ακόλουθο πρόβλημα:

Να βρεθούν συνθήκες μιας γραμμικής διάταξης σε μία διατεταγμένη ομάδα G τέτοιες ώστε μία προκαθορισμένη υποομάδα H της G να είναι κυρτή.

Είναι γεγονός ότι G και H πρέπει να είναι επεκτάσιμες, ενώ κάθε στοιχείο a, που δεν ανήκει στην H, δεν πρέπει να είναι ανάμεσα σε δύο στοιχεία της H. Ένα τέτοιο στοιχείο a, το οποίο επιπροσθέτως είναι ένα θετικό στοιχείο, πρέπει να είναι μεγαλύτερο από όλα τα στοιχεία της H. Τότε επεκτείνουμε το σύνολο $G/H^* \left(H^* = H/\{0\}\right)$ σε μία ολική διάταξη και θέτουμε όλα τα στοιχεία της H^* ανάμεσα στα θετικά και αρνητικά στοιχεία αυτής της επέκτασης.

Το αξιοσημείωτο σημείο του είναι ότι μία τέτοια ομάδα είναι μία μη-Αρχιμήδεια ομάδα, εξαιτίας των στοιχείων της H. Αυτή είναι η περίπτωση που θα μπορούσε να εμφανιστεί σε μία λεξικογραφική ακριβή ακολουθία (Ohm,1969).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] Birkhoff, G. , *Lattice-ordered groups*, Annals Math.,43 298-331,1969.

[2] Birkhoff, G. , *Lattice theory*, 2_{nd} cd.(1948).

[3] Bourbaki, N. , *Algébre*, Chap. VI. Groupes et corps ordonnés (1952).

[4] Bourbaki, N. , *Elements of Mathematics, Commutative Algebra*, Hermann, Publishers in Arts and Science Paris XV (1969).

[5] Borevic-Shafarevic , *Number theory*, Academic Press, New York (1966).

[6] Burgess, D. C. J. , *Generalized intervals in partially ordered*, Proc. Cambridge Philos. Soc., 55 (1959), 165-171.

[7] Βαρουχάκης Ν. , *Υπερμετροειδείς χώροι*, διατριβή επί διδακτορία, 1972.

[8] Clifford, A. H. , *Partially ordered Abelian groups*, Annals Math, 41(1940), 465-473.

[9] Cohn P. M. , *Algebra 1*, John Wiley and Sons, Chichester, New York, Brisbane, 1974.

[10] Cohn P. M. , *Algebra 2*, John Wiley and Sons, New York, Sydney, Toronto, 1977.

[11] Cohn P. M. , *Algebra 3*, John Wiley and Sons, Chichester, New York, Brisbane, 1991.

[12] Conrad, P. F. , *Lattice-ordered groups*, Tuluze University, 1970.

[13] Γεωργίου Δ.- Ηλιάδης Σ. , *Θεωρία συνόλων*, Πάτρα, 2008.

[14] Docas L. , *Complétés de Dedekind et de Kurepa des ensembles partiellement ordonnés*, c.R.Ac.Sc.t. 256, 1963.

[15] Docas L. , *Complété de Krasner*, C.R. Ac. Sc. 256, 1963.

[16] Everett, C. J.-Ulam, S. , *On ordered groups*, Trans. Amer. Math. Soc. 57 (1945), 208-216.

[17] Fan, K. , *Partially ordered additive groups of continious functions*, Annals Math, 51 (1950), 409-427.

[18] Fraleigh, J.B. , *A First Course in Abstract Algebra*, Addison-Wesley Publishing Company, (1989).

[19] Fuchs, L. , *Partially ordered algebraic systems*, Pergamon Press, New York 1963.

[20] Jaffard, P. , *Théorie des filets dans les groupes réticulés*, C. R. Acad. Sci. Paris (1950), 1024-1025.

[21] Jaffard, P. , *Applications de la théorie des filets*, C. R. Acad. Sci. Paris, 230 (1950), 1125-1126.

[22] Κάλφα Κ. , *Αξιωματική θεωρία συνόλων*, Θεσ/νίκη 1990.

[23] Kontolatou A.-Stabakis J. , *Embedding groups into linear or lattice structures*, Bull. Cal. Math. Soc., 82, 290-297 (1990).

[24] Levi, F. W. , *Contributions to the theory of ordered groups*, Proc. Indian Acad. Sci., SectA, 17 (1943), 199-201.

[25] Loonstra, F. , *Ordered groups*, Proc. Nederl. Akad. Wetensch., 49 (1946), 41-46.

[26] Loonstra, F. , *The classes of ordered groups*, Proc. Internat. Congr. Math. 1, 1950.

[27] Loonstra, F. , *The classes of partially ordered groups*, Compositio Math., 9 (1951), 130-140.

[28] Moschovakis, Y. , *Notes on set theory*, New York, 2005.

[29] Μητακίδης Γ. , *Θεωρία συνόλων*, Πάτρα, 1980.

[30] Neumann, B. H.-Shepperd, J. A. H. , *Finite extensions of fully ordered groups*, Proc. RoyalSoc. London, Ser. A, 239 (1957), 230-327.

[31] Rieger, L. S. , *On the ordered and cyclically ordered groups*, 1946.