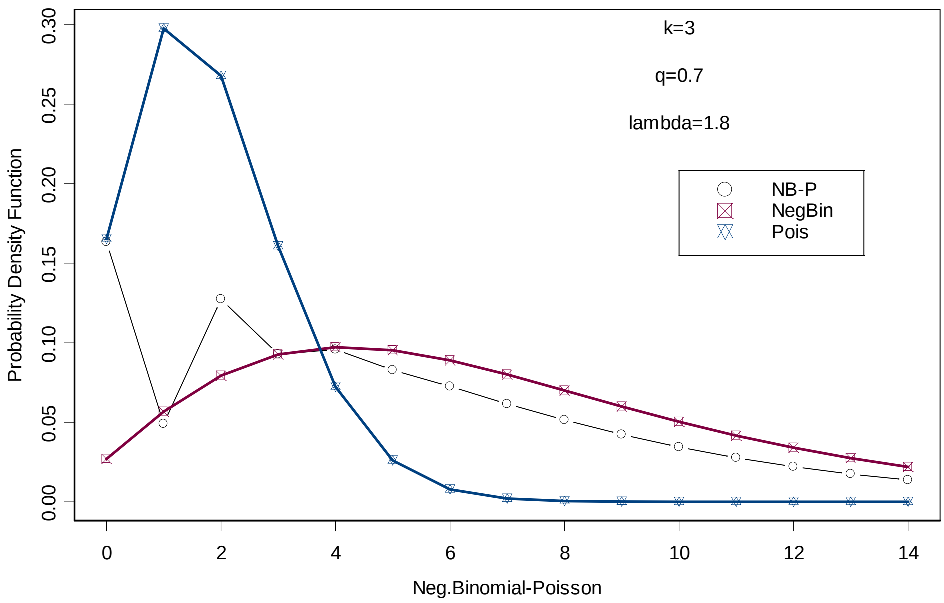
ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ
Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
«Μαθηματικά των Υπολογιστών και των Αποφάσεων»

ΔΙΑΚΡΙΤΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΜΕ ΓΕΝΝΗΤΡΙΕΣ ΠΗΛΙΚΑ ΓΕΝΝΗΤΡΙΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΑΥΤΩΝ ΣΕ ΚΛΑΔΩΤΕΣ ΑΝΕΛΙΞΕΙΣ



ΝΙΚΟΛΑΪΔΟΥ ΧΡΥΣΟΥΛΑ
Α.Μ. : 149

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Πατρών
Ιούνιος 2010

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εκπονήθηκε στα πλαίσια του
Διατμηματικού Πρόγραμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών
«Μαθηματικά των Υπολογιστών και των Αποφάσεων»
με μέλη της τριμελούς εξεταστικής επιτροπής τους:

Σ. Κουρούκλη	Καθηγητή	Τμήμα Μαθηματικών Πανεπιστήμιο Πατρών
Ν. Τσάντας	Αναπληρωτή Καθηγητή	Τμήμα Μαθηματικών Πανεπιστήμιο Πατρών
Β. Πιπερίγκου (*Επιβλέπουσα*)	Λέκτορα	Τμήμα Μαθηματικών Πανεπιστήμιο Πατρών

τους οποίους και ιδιαιτέρως ευχαριστώ.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ 1

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 ^{Ο} 4

ΒΑΣΙΚΕΣ ΈΝΝΟΙΕΣ ΚΑΙ ΓΝΩΣΤΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ 4

1.1 ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ 4
1.1.1 Κατανομές της οικογένειας δυναμοσειράς 4
1.1.2 Οικογένειες που προκύπτουν από εξισώσεις διαφορών 6
Κατανομές της διευρυμένης οικογένειας Katz 6
Κατανομές της οικογένειας Katz 6
Κατανομές της οικογένειας Sundt and Jewell 7
1.1.3 Απείρως Διαιρετές Κατανομές 7
1.2 ΨΕΥΔΟ – ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ ΤΗΣ KEMP 8
1.2.1 Ορισμοί και Εισαγωγικές Έννοιες 8
1.2.2 Συνελίξεις διωνυμικών μεταβλητών ή ψευδο - μεταβλητών 9
Εφαρμογές 11
1.3 ΟΙ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΤΩΝ JAYASREE AND SWAMY 12
1.3.1 Εισαγωγικά 12
1.3.2 Πηλίκο πιθανογεννητριών : Γεωμετρική (q) με Poisson (λ) 16
Αναγωγικές σχέσεις για τις πιθανότητες 19
1.3.3 Πηλίκο πιθανογεννητριών : Αρνητική Διωνυμική (q,r) με Γεωμετρική (q) 20

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 ^{Ο} 23

ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΜΕ ΠΙΘΑΝΟΓΕΝΝΗΤΡΙΑ ΤΟ ΠΗΛΙΚΟ ΔΥΟ ΠΙΘΑΝΟΓΕΝΝΗΤΡΙΩΝ 23

2.1 ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ 23
2.1.1 Πηλίκο: Γεωμετρική (q) με Γεωμετρική (q) 23*
2.1.2 Πηλίκο: Αρνητική Διωνυμική (q,r) με Γεωμετρική (q) 26*
Το σχήμα της συνάρτησης πιθανότητας 27
2.1.3 Πηλίκο: Αρνητική Διωνυμική (q,r) με Poisson (λ) 29
Αναγωγικές σχέσεις για τις πιθανότητες 29
Αναλυτικές σχέσεις για τις πιθανότητες 30
Εκτίμηση παραμέτρων 31
Το σχήμα της συνάρτησης πιθανότητας 34
2.2 ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΚΕΣ ΡΟΠΕΣ 37
2.3 ΔΕΔΟΜΕΝΑ – ΈΛΕΓΧΟΙ ΚΑΛΗΣ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗΣ 37
2.4 ΓΕΝΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ 41
2.4.1 Το πρόβλημα στις διακριτές τυχαίες μεταβλητές 41
2.4.2 Η Περίπτωση της Γεωμετρικής Κατανομής 42
Για κατανομές Δυναμοσειράς 43
Για κατανομές της οικογένειας Katz 45
Για κατανομές της διευρυμένης οικογένειας Katz 45
Για κατανομές της οικογένειας Sundt and Jewell 46
2.4.3 Η Περίπτωση της Κατανομής Poisson 48
Απείρως Διαιρετές Κατανομές 50

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 ^{Ο} 53

ΔΙΔΙΑΣΤΑΤΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΜΕ ΠΙΘΑΝΟΓΕΝΝΗΤΡΙΑ ΤΟ ΠΗΛΙΚΟ ΔΥΟ ΠΙΘΑΝΟΓΕΝΝΗΤΡΙΩΝ 53

3.1 ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΣΤΙΣ ΔΥΟ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ 53
3.2 ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ 53
Αναγωγικές σχέσεις για τις πιθανότητες 55
3.3 ΠΕΡΙΘΩΡΙΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ 55
3.4 ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ 55
Αναγωγικές σχέσεις για τις πιθανογεννήτριες των δεσμευμένων κατανομών 55
Αναλυτικές σχέσεις για τις πιθανογεννήτριες των δεσμευμένων κατανομών 57
3.5 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΝΕΩΝ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ 59

3.5.1 Πηλίκο Διδ. Αρνητική Διωνυμική (q_1,q_2,k) με Διδ. Poisson (λ_1,λ_2,λ_3) ... *59*
Προσδιορισμός των περιορισμών ... 59
Αναγωγικές σχέσεις για τις πιθανότητες ... 61
Αναλυτικές σχέσεις για τις πιθανότητες ... 61
Περιθώριες Κατανομές ... 62
Αναλυτικές σχέσεις για τις πιθανογεννήτριες των δεσμευμένων κατανομών ... 62
Αναλυτικές σχέσεις για παραγοντικές ροπές ... 63
Εκτίμηση Παραμέτρων ... 64
3.5.2 Πηλίκο Διδ. Αρνητική Διωνυμική (q_1,q_2,k) με ... *67*
Διδ. Γεωμετρική (q_1^*,q_2^*) ... *67*
Προσδιορισμός των περιορισμών ... 67
Αναγωγικές σχέσεις για τις πιθανότητες ... 68
Περιθώριες Κατανομές ... 70
Δεσμευμένες κατανομές ... 70
Αναλυτικές σχέσεις για τις παραγοντικές ροπές ... 72
3.5.3 Πηλίκο Διδ. Γεωμετρική (q_1,q_2) με Διδ. Γεωμετρική (q_1^*,q_2^*) ... *73*
Προσδιορισμός των περιορισμών ... 73

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^{Ο} ... 74

ΔΙΑΚΡΙΤΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΣΤΙΣ ΚΛΑΔΩΤΕΣ ΑΝΕΛΙΞΕΙΣ ... 74

4.1 ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΗ ΚΛΑΔΩΤΗ ΑΝΕΛΙΞΗ ... 74
4.1.1 Ορισμός της ανέλιξης ... *74*
4.1.2 Η Πιθανογεννήτρια των ατόμων της $\nu^{οστής}$ γενιάς ... *74*
4.1.3 Η μορφή της πιθανογεννήτριας ... *75*
4.2 ΔΙΔΙΑΣΤΑΤΗ ΚΛΑΔΩΤΗ ΑΝΕΛΙΞΗ ... 76
4.2.1 Ο Ορισμός της ανέλιξης ... *76*
4.2.2 Πιθανογεννήτρια των ατόμων τύπου Α και Β της $\nu^{οστής}$ γενιάς ... *77*
4.2.3 Η μορφή της πιθανογεννήτριας ... *79*
4.2.4 Μια ειδική περίπτωση ... *81*

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ... 83

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ ... 91

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η απαρίθμηση είναι ίσως η πρώτη μαθηματική διαδικασία που μπορεί να φέρει εις πέρας ένα παιδί. Η σπουδαιότητα αυτής όμως της απλής διαδικασία αναδεικνύεται ακόμα και στη διατύπωση βασικών μαθηματικών αρχών, όπως η αρχή του περιστερώνα, ή σε πολύπλοκα μαθηματικά προβλήματα, όπως τα διαφορετικά συνδετικά δέντρα σε ένα πλήρες γράφημα.

Στην πειραματική δουλειά, ο ερευνητής εξίσου συχνά με τις φορές που μετρά κάποιο χαρακτηριστικό, απαριθμεί την εμφάνιση κάποιου γεγονότος. Πιστεύεται δε, ότι η ανάπτυξη της έννοιας της πιθανότητας προέκυψε από την διαδικασία της απαρίθμησης. Κυρίως στα πειράματα τύχης, παρατηρήθηκε η ευστάθεια στη συχνότητα εμφάνισης κάποιων επαναλαμβανόμενων γεγονότων και έγινε κατανοητό ότι μας οδηγούν σε προβλέψιμα αποτελέσματα μετά από μεγάλο αριθμό επαναλήψεων.

Σταδιακά αναπτύχθηκε η έννοια της τυχαίας μεταβλητής και των οικογενειών συναρτήσεων συχνότητας που αυτές ακολουθούν, αρχικά στο τέλος του 19^{ου} αιώνα που κλείνει με ένα αυξημένο ενδιαφέρον για προσαρμογή καμπυλών σε δεδομένα. Ανάμεσα στις διακριτές οικογένειες που αναπτύχθηκαν είναι αυτή της οικογένειας δυναμοσειράς, στην οποία ανήκουν οι πιο γνωστές διακριτές κατανομές: Poisson, διωνυμική, αρνητική διωνυμική, λογαριθμική. Άλλες οικογένειες έχουν προκύψει από την κατάστρωση και επίλυση εξισώσεων διαφορών, όπως η οικογένεια Katz, η Sundt and Jewell και η οικογένεια του Ord.

Η συνεχής ενασχόληση των ερευνητών με τις διακριτές κατανομές αποτυπώνεται στην βιβλιογραφία με πληθώρα άρθρων και μια σειρά βιβλίων όπως αυτά των Ord (1972), Douglas (1980), Johnson et al (1992) και Johnson et al (2005).

Στη δημιουργία μαθηματικών μοντέλων, για την ερμηνεία των φαινομένων που εξετάζουμε, είναι βολικό να ξεκινήσουμε από τις απλές γνωστές κατανομές και από αυτές να δημιουργήσουμε πιο πολύπλοκες κατανομές για να περιγράψουμε ικανοποιητικά αυτά τα φαινόμενα. Ένας πολύ απλός και προφανής τρόπος για να συνδυάσουμε μεταξύ τους τυχαίες μεταβλητές είναι η συνέλιξη (το άθροισμα). Για παράδειγμα, ο συνολικός αριθμός των ατυχημάτων προκύπτει από το άθροισμα των θανατηφόρων και των μη θανατηφόρων ατυχημάτων, ή το πλήθος των ελαττωμάτων σε ένα φύλλο φωτογραφικού χαρτιού είναι το πλήθος από τις οπές και το πλήθος από τις χαρακιές πάνω στην επιφάνειά του. Κατανομές όπως η Delaporte ή η Charlier καθώς και οι δεσμευμένες κατανομές που αντιστοιχούν στην διδιάστατη Poisson, διωνυμική, αρνητική διωνυμική (βλέπε Kocherlakota and Kocherlakota, 1992) είναι συνελίξεις δύο απλών γνωστών κατανομών. Στις πρώτες δύο κατανομές εμπλέκεται η Poisson ενώ στις υπόλοιπες η διωνυμική.

Η μελέτη των διακριτών τυχαίων μεταβλητών (τ.μ.) γίνεται συνήθως με τη χρήση της γεννήτριας συνάρτησης των πιθανοτήτων (γ.σ.π.) ή, αλλιώς, της πιθανογεννήτριας $\Pi(u)=\sum_{x=0}^{\infty}P(X=x)u^{x}$, η οποία συγκλίνει απολύτως $\forall\ |u|\le 1$, και η γ.σ.π. της συνέλιξης δύο ανεξαρτήτων τ.μ. είναι το γινόμενο των αντιστοίχων γεννητριών. Ως γνωστόν, η γ.σ.π. της διωνυμικής κατανομής έχει τη μορφή $\Pi(u)=(1-p+pu)^{m}=\left(\frac{1-Qu}{1-Q}\right)^{m}$, όπου $Q=\frac{p}{p-1}$, $0<p<1$, $m \in$ □, και άρα Q<0. Για 0<Q<1 και $m \in$ □ αυτή είναι η γ.σ.π. της αρνητικής διωνυμικής.

Η Kemp (1979) εισάγει τον όρο διωνυμική ψευδο-μεταβλητή για να ορίσει τη μαθηματική οντότητα που έχει γ.σ.π. της παραπάνω μορφής, για εκείνες όμως τις τιμές των παραμέτρων που δεν αντιστοιχούν σε κάποια κατανομή. Έτσι οδηγείται σε τρία είδη διωνυμικών ψευδο–μεταβλητών:

- όταν $m = 1$ και $0 < Q < 1$ διωνυμική ψευδο–μεταβλητή πρώτου είδους
- όταν $m = 1$ και $Q \geq 1$ διωνυμική ψευδο–μεταβλητή δευτέρου είδους
- όταν $m = -1$ και $-1 < Q < 0$ διωνυμική ψευδο–μεταβλητή τρίτου είδους

και εξετάζει τις συνθήκες κάτω από τις οποίες η «συνέλιξη» μιας διωνυμικής (ή μιας αρνητικής διωνυμικής) τ.μ. με μια διωνυμική ψευδο–μεταβλητή οδηγεί σε μια μη αρνητική διακριτή τ.μ.. Αποδεικνύει, ότι η «συνέλιξη» μιας διωνυμικής τ.μ. με μια οποιαδήποτε διωνυμική ψευδο–μεταβλητή δεν οδηγεί σε τ.μ., όπως και η συνέλιξη μιας αρνητικής διωνυμικής τ.μ. με μια διωνυμική ψευδο–μεταβλητή δεύτερου είδους. Δίνει επίσης τους περιορισμούς για τις παραμέτρους, ώστε η «συνέλιξη» μιας αρνητικής διωνυμικής τ.μ. με μια διωνυμική ψευδο-μεταβλητή του πρώτου ή του τρίτου είδους να οδηγεί σε τ.μ.. Παρουσιάζει και περιπτώσεις εφαρμογών, όπως η κλαδωτή ανέλιξη των Galton–Watson και η μη ομογενής ανέλιξη γεννήσεως-θανάτου με ένα αρχικό άτομο, στις οποίες οι κατανομές που εμφανίζονται έχουν γ.σ.π. της μορφής αυτών των «συνελίξεων». Να επισημάνουμε ότι η «συνέλιξη» μιας αρνητικής διωνυμικής τ.μ. με μια διωνυμική ψευδο-μεταβλητή του πρώτου είδους έχει ως γ.σ.π. το πηλίκο της γ.σ.π. μιας αρνητικής διωνυμικής με τη γ.σ.π. μιας γεωμετρικής.

Οι Jayasree and Swamy (2006) εξετάζουν υπό ποιες προϋποθέσεις το πηλίκο δύο πιθανογεννητριών από την οικογένεια των κατανομών δειναμοσειράς είναι η πιθανογεννήτρια μιας κατανομής. Επικέντρωσαν την προσοχή τους σε δύο παραδείγματα κατανομών, η γ.σ.π. των οποίων προκύπτει από το πηλίκο

- της γ.σ.π. μιας γεωμετρικής προς τη γ.σ.π. μιας Poisson κατανομής (GP)
- της γ.σ.π. μιας αρνητικής διωνυμικής προς τη γ.σ.π. μιας γεωμετρικής κατανομής (με την ίδια παράμετρο p!)

και έκαναν συγκριτικό έλεγχο καλής προσαρμογής, σε δεδομένα που αφορούσαν τις προνύμφες ανά φυτό καλαμποκιού του εντόμου Pyrausta Nubilalis, της Poisson, της γεωμετρικής και της GP που μελέτησαν.

Στην παρούσα διπλωματική, με αφορμή αυτές τις δύο εργασίες, αφενός γενικεύονται τα αποτελέσματά τους για κάποιες οικογένειες μονοδιάστατων κατανομών και αφετέρου επεκτείνονται και στις αντίστοιχες διδιάστατες κατανομές.

Ειδικότερα, στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάζονται οι συνθήκες εκείνες που επιτρέπουν στο πηλίκο δύο πιθανογεννητριών να είναι η πιθανογεννήτρια μιας μη αρνητικής διακριτής τ.μ. όταν η γ.σ.π. του παρανομαστή είναι αυτή της γεωμετρικής και όταν είναι αυτή της Poisson κατανομής. Στην πρώτη περίπτωση, που αποτελεί γενίκευση της «συνέλιξης» με την ψευδο-μεταβλητή πρώτου είδους της Kemp(1976), παρουσιάζονται αναλυτικά οι ικανές και αναγκαίες συνθήκες για κατανομές από την διευρυμένη οικογένεια Katz και την οικογένεια Sundt and Jewell και δίνονται πίνακες σχετικών παραδειγμάτων. Δίνονται επίσης οι ροπές, εξετάζεται η μορφή των συναρτήσεων πιθανότητας που προκύπτουν και γίνεται αναλυτικά η εκτίμηση των παραμέτρων για την περίπτωση της αρνητικής διωνυμικής προς γεωμετρική. Στην δεύτερη περίπτωση, που αφενός αποτελεί γενίκευση της GP των Jayasree and Swamy (2006) και εφετέρου είναι το ισοδύναμο της «συνέλιξης» με μια Poisson ψευδο-μεταβλητή, παρουσιάζονται αναλυτικά οι ικανές και αναγκαίες συνθήκες για απείρως διαιρετές κατανομές και

δίνονται πίνακες σχετικών παραδειγμάτων από την οικογένεια των κατανομών δυναμοσειράς και εκτός αυτής. Δίνονται επίσης αναγωγικές σχέσεις για τις πιθανότητες και για τις ροπές.
Στο Κεφάλαιο 3 μελετούμε το αντίστοιχο πρόβλημα για διδιάστατες τ.μ. και εξετάζουμε τις ικανές συνθήκες στις περιπτώσεις

- της διδιάστατης αρνητικής διωνυμικής προς την διδιάστατη γεωμετρική
- της διδιάστατης αρνητικής διωνυμικής προς την διδιάστατη Poisson.

Παρουσιάζονται αναγωγικές και αναλυτικές σχέσεις για τις πιθανότητες και τις παραγοντικές ροπές και μελετάται η μορφή των πιθανογεννητριών τόσο των περιθωρίων όσο και των δεσμευμένων κατανομών που προκύπτουν.
Τέλος, στο Κεφάλαιο 4 παρουσιάζεται το μοντέλο μιας κλαδωτής ανέλιξης με απογόνους δύο διαφορετικών τύπων όπως αυτό έχει οριστεί στο βιβλίο των Kimmel and Axelrod (2002). Ενώ αυτό το μοντέλο έχει μελετηθεί διεξοδικά, κυρίως όμως με αλγεβρικές μεθόδους (βλέπε π.χ. Pollak, 1974 ή Joffe and Letac, 2006), δεν φαίνεται να έχει δοθεί πουθενά αναλυτικά η πιθανογεννήτρια των δύο τύπων ατόμων της $\nu^{\text{οστής}}$ γενιάς. Εδώ την βρίσκουμε, όταν ένας γεννήτορας δίνει απογόνους με γ.σ.π. την $P(u,v)=\dfrac{1-c_1-c_2+c_1u+c_2v}{1+c_1+c_2-c_1u-c_2v}$, με c_1, $c_2 > 0$ και $c_1 + c_2 < 1$. Αποδεικνύεται δε, ότι μπορεί να γραφεί ως το πηλίκο των γ.σ.π. δύο διδιάστατων γεωμετρικών τ.μ. που μελετήσαμε στο κεφάλαιο 3.

Τα αποτελέσματα του Κεφαλαίου 2 καθώς και ο τύπος για την πιθανογεννήτρια των δύο τύπων ατόμων της ν-οστής γενιάς του Κεφάλαιου 4 παρουσιάστηκαν σε ομιλία στο $23^{\text{ο}}$ Πανελλήνιο Συνέδριο Στατιστικής που οργανώθηκε από το Ελληνικό Στατιστικό Ινστιτούτο, στη Βέροια, από 7-11 Απριλίου 2010.

Κεφάλαιο 1ο

Βασικές Έννοιες και Γνωστά Αποτελέσματα

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται γνωστές οικογένειες κατανομών, όπως η οικογένειας δυναμοσειράς και οικογένειες που προέρχονται από επίλυση εξισώσεων διαφορών, όπως η οικογένεια Katz, η διευρυμένη οικογένεια Katz και η οικογένεια των Sundt and Jewell.
Παρουσιάζονται επίσης τα αποτελέσματα από τις εργασίες της Kemp (1979) και των Jayasree and Swamy (2006).

1.1 Οικογένειες Κατανομών

1.1.1 Κατανομές της οικογένειας δυναμοσειράς

Ορισμός : Μια διακριτή τυχαία μεταβλητή X λέμε ότι ακολουθεί κατανομή από τη οικογένεια δυναμοσειράς αν η συνάρτηση πιθανότητάς της δίνεται από τύπο της μορφής :

$$P(X=x)=\begin{cases}\dfrac{\alpha(x)\theta^x}{A(\theta)}, \text{για } x=0,1,2,\ldots\\ 0, \text{οπουδήποτε αλλού}\end{cases}$$

όπου α(x) ≥ 0 και $A(\theta)=\sum_{x=0}^{\infty}\alpha(x)\theta^x$ με $\theta>0$.

Η <u>πιθανογεννήτριά</u> της δίνεται από τον τύπο (για λόγους ευκολίας θα συμβολίζουμε με p_x την πιθανότητα P[X = x]) :

$$\Pi_X(u)=E(u^x)=\sum_{x=0}^{\infty}u^xP[X=x]=\sum_{x=0}^{\infty}u^xp_x=\sum_{x=0}^{\infty}u^x\frac{\alpha(x)\theta^x}{A(\theta)}=\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\alpha(x)(\theta u)^x}{A(\theta)}=$$

$$=\frac{A(\theta u)}{A(\theta)} \qquad \text{με } |u|\le 1.$$

Η <u>μέση τιμή</u> αυτής της μεταβλητής είναι :

$$\mu=\sum_{x=0}^{\infty}P(X=x)\cdot x=\sum_{x=0}^{\infty}x\frac{\alpha(x)\theta^x}{A(\theta)}=\frac{\theta}{A(\theta)}\sum_{x=0}^{\infty}x\,\alpha(x)\theta^{x-1}=\theta\frac{A'(\theta)}{A(\theta)}$$

και η <u>διασπορά</u> της είναι :

$$\sigma^2=E(X^2)-(E(X))^2=\sum_{x=0}^{\infty}x^2\frac{\alpha(x)\theta^x}{A(\theta)}-\left(\theta\frac{A'(\theta)}{A(\theta)}\right)^2$$

$$=\frac{1}{A(\theta)}\sum_{x=0}^{\infty}x\left(x-1\right)\alpha(x)\theta^{x}-\theta^{2}\frac{\left(A'(\theta)\right)^{2}}{A^{2}(\theta)}$$

$$=\frac{1}{A(\theta)}\left(\sum_{x=0}^{\infty}x\alpha(x)\theta^{x}(x-1)+\sum_{x=0}^{\infty}x\,\alpha(x)\theta^{x}\right)-\theta^{2}\frac{\left(A'(\theta)\right)^{2}}{A^{2}(\theta)}$$

$$=\frac{1}{A(\theta)}\left(\theta^{2}\sum_{x=0}^{\infty}x(x-1)\alpha(x)\theta^{x-2}+\theta\sum_{x=0}^{\infty}x\,\alpha(x)\theta^{x-1}\right)-\theta^{2}\frac{\left(A'(\theta)\right)^{2}}{A^{2}(\theta)}$$

$$=\frac{1}{A(\theta)}\left(\theta^{2}A''(\theta)+\theta A'(\theta)\right)-\theta^{2}\frac{\left(A'(\theta)\right)^{2}}{A^{2}(\theta)}=\theta^{2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\frac{A'(\theta)}{A(\theta)}\right\}+\theta\frac{A'(\theta)}{A(\theta)}$$

όπου $A'(\theta)=\dfrac{\partial A(\theta)}{\partial\theta}$.

Παραδείγματα κατανομών της οικογένειας δυναμοσειράς

Κατανομή Poisson

Η συνάρτηση πιθανότητας της κατανομής Poisson δίνεται από τον τύπο:

$$P[X=x]=\begin{cases}\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}, & x=0,1,2,\ldots\\ 0, & \text{οπουδήποτε αλλού}\end{cases}\qquad(1.1)$$

όπου $\lambda>0$.
Η κατανομή αυτή είναι μέλος της οικογένειας δυναμοσειράς με :

$$\theta=\lambda,\ \theta>0,\ A(\theta)=e^{\theta}\ \text{ και }\ \alpha_{x}=\frac{1}{x!}.$$

Αρνητική Διωνυμική Κατανομή

Η συνάρτηση πιθανότητας της αρνητικής διωνυμικής κατανομής δίνεται από τον τύπο:

$$P[X=x]=\begin{cases}\dbinom{r+x-1}{x}p^{r}q^{x}=\dbinom{-r}{x}p^{r}(-q)^{x}, & x=0,1,2,\ldots,\\ 0, & \text{οπουδήποτε αλλού}\end{cases}\qquad(1.2)$$

με $r>0$, $0<p<1$ και $p+q=1$.
Η κατανομή αυτή είναι μέλος της οικογένειας δυναμοσειράς με :

$$\theta=q,\ 0<\theta<1,\ r>0,\ A(\theta)=(1-\theta)^{-r}=(1-q)^{-r}=p^{-r}\ \text{και}\ \alpha_{x}=(-1)^{x}\binom{-r}{x}.$$

Γεωμετρική Κατανομή

Η συνάρτηση πιθανότητας της γεωμετρικής κατανομής δίνεται από τον τύπο:

$$P\left[X=x\right]=\begin{cases} q^{x}p, & x=0,1,2,\ldots \\ 0, \text{οπουδήποτε αλλού} & \end{cases} \qquad (1.3)$$

με $0 < p < 1$ και $p + q = 1$.

Η κατανομή αυτή είναι ειδική περίπτωση της αρνητικής διωνυμικής κατανομής με $r = 1$ και μπορούμε να τη δούμε σαν μέλος της οικογένειας δυναμοσειράς με :

$$\theta = q\,,\ \ 0<\theta<1,\ \ A(\theta)=(1-\theta)^{-1}=(1-q)^{-1}=p^{-1} \text{ και } \ \alpha_x=(-1)^{x}\binom{-1}{x}=1\,.$$

1.1.2 Οικογένειες που προκύπτουν από εξισώσεις διαφορών

Κατανομές της διευρυμένης οικογένειας Katz

Ορισμός : Μια τυχαία μεταβλητή X_1 λέμε ότι ακολουθεί μια κατανομή από την διευρυμένη οικογένεια Katz εάν :

$$\frac{p_1(x+1)}{p_1(x)}=\frac{a+bx}{\gamma+x}, \quad x=0,1,\ldots, \quad a>0,\ b<1,\ \gamma>0 \ \text{ή} \ a \geq 1 \quad = \quad \gamma > \quad + \quad .$$

Κατανομές της οικογένειας Katz

Ορισμός : Μια τυχαία μεταβλητή X_1 λέμε ότι ακολουθεί μια κατανομή από την οικογένεια Katz εάν :

$$\frac{p_1(x+1)}{p_1(x)}=\frac{a+bx}{1+x}, \quad x=0,1,\ldots, \quad a>0,\ b<1,$$

ενώ αν $a+bn<0$ τότε $p_{n+j}=0,\ \forall j>0$.

Για	Κατανομή της X_1	με Παραμέτρους
$b < 0, \gamma = 1$	Διωνυμική (n, p_1)	$n=-\frac{a}{b},\ p_1=\frac{b}{b-1}$
$b = 0, \gamma = 1$	Poisson (λ)	$\lambda = \alpha$
$0 < b < 1, \gamma = 1$	Αρνητική Διωνυμική (k, q_1)	$k=\frac{a}{b},\ q_1=b$
$a = b = 1, \gamma > 2$	Yule (ρ) $p_1(x)=\frac{\rho(\rho!)x!}{(x+\rho+1)!},\ x=0,1,\ldots$	$\rho = \gamma - 2$

Κατανομές της οικογένειας Sundt and Jewell

Ορισμός : Μια τυχαία μεταβλητή X_1 λέμε ότι ακολουθεί μια κατανομή από την οικογένεια Sundt and Jewell εάν :

$$\frac{p_1(x+1)}{p_1(x)} = \frac{a+b+ax}{1+x}, \quad x = 1,2,\dots, \quad a<1, b>-1.$$

Η <u>πιθανογεννήτρια</u> της X_1 είναι η

$$\Pi_1(u) = c + (1-c)\left(\frac{1-au}{1-a}\right)^{-\frac{(a+b)}{a}} = c + (1-c)H(u),$$

όπου η H(u) είναι η πιθανογεννήτρια μιας κατανομής της οικογένειας Katz. Άρα πρέπει επιπλέον :

$$c + (1-c)H(0) \geq 0,$$

οπότε ένας απαραίτητος περιορισμός για το c είναι : $1 \geq c \geq -\frac{H(0)}{1-H(0)}$.

Λογαριθμική Κατανομή

Η συνάρτηση πιθανότητας της λογαριθμικής κατανομής δίνεται από τον τύπο:

$$P[X=x] = \begin{cases} -\dfrac{\theta^x}{x \cdot \ln(1-\theta)}, & x = 1,2,\dots \\ 0, \text{οπουδήποτε αλλού} & \end{cases} \qquad (1.4)$$

όπου $0 < \theta < 1$.

Την κατανομή αυτή μπορούμε να τη δούμε σαν μέλος της οικογένειας Sundt and Jewell με :

$a = \theta$, $b = -\theta$ και c = 0.

1.1.3 Απείρως Διαιρετές Κατανομές

Ορισμός : Έστω Χ μια μη-αρνητική διακριτή τυχαία μεταβλητή. Η Χ λέγεται απείρως διαιρετή αν η ν-οστή ρίζα της πιθανογεννήτριάς της είναι πιθανογεννήτρια μιας μη-αρνητικής τυχαίας μεταβλητής για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$.

Θεώρημα 1 : Μια διακριτή τυχαία μεταβλητή X_1 είναι απείρως διαιρετή αν και μόνο αν η πιθανογεννήτριά της μπορεί να πάρει τη μορφή μιας επιγενούς Poisson, δηλαδή αν μπορεί να γραφτεί στη μορφή :

$$\Pi_1(u) = \exp\left\{\theta\left(\sum_{x=1}^{\infty} p_x u^x - 1\right)\right\} \text{ με } \theta > 0, \; p_x \geq 0 \text{ και } \sum_{x=1}^{\infty} p_x = 1.$$

1.2 Ψευδο – μεταβλητές της Kemp

1.2.1 Ορισμοί και Εισαγωγικές Έννοιες

Θεωρούμε την πιθανογεννήτρια $\Pi(u) = (1 - p + pu)^m$ μιας τυχαίας μεταβλητής που παίρνει μη αρνητικές ακέραιες τιμές. Η Π(u) είναι :

- πιθανογεννήτρια μιας διωνυμικής μεταβλητής αν και μόνο αν $0 < p < 1$ και m είναι ένας θετικός ακέραιος,
- ενώ είναι πιθανογεννήτρια μιας αρνητικής διωνυμικής μεταβλητής αν και μόνο αν $p < 0$ και $m < 0$.

Η Π(u) παίρνει τη μορφή $\Pi(u) = \sum_{r\geq 0} p_r u^r$.

- Για $m \in \mathbb{N}$ από το διώνυμο του Νεύτωνα έχουμε :
  $$\Pi(u) = (1-p+p\ u)^m = \sum_{r=0}^{m} \binom{m}{r} (1-p)^{m-r} p^r u^r .$$
- Για $m < 0$ το ανάπτυγμα Taylor στο 0 είναι :
  $$\Pi(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Pi^{(n)}(0)}{n!} u^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} p^n (1-p)^{m-n} u^n .$$

Σε κάθε περίπτωση έχουμε : $$p_r = \binom{m}{r} p^r (1-p)^{m-r} \qquad (1.5).$$

Οπότε : $$\frac{p_r}{p_{r-1}} = \frac{\binom{m}{r} p^r (1-p)^{m-r}}{\binom{m}{r-1} p^{r-1} (1-p)^{m-r+1}} = \frac{\frac{m!}{r!(m-r)!} p}{\frac{m!}{(r-1)!(m-r+1)!}(1-p)} = \frac{(m-r+1)p}{r(1-p)} .$$

Επομένως η Π(u) για $m > 0$ είναι μια σειρά πεπερασμένου πλήθους όρων και για $m < 0$ συγκλίνει για $|u| \leq 1$ όταν έχουμε $\left|\frac{p}{1-p}\right| < 1$ αφού
$$\left|\frac{p_r u^r}{p_{r-1} u^{r-1}}\right| = \left|\frac{p_r}{p_{r-1}}\right| |u| = \left|\frac{m-r+1}{r}\right| \left|\frac{p}{1-p}\right| |u| \xrightarrow{r\to\infty} \left|\frac{p}{1-p}\right| |u| \overset{|u|\leq 1}{\leq} \left|\frac{p}{1-p}\right| .$$

Σε μια μη – εκφυλισμένη κατανομή πρέπει $\frac{p_1}{p_0} = \frac{mp}{(1-p)} > 0$.

- Προφανώς δε μπορούμε να έχουμε $m > 0$, $p < 0$ και $1 - p < 0$ αφού $p + (1 - p) = 1 > 0$,
- ή $m < 0$ και $p > 0 > 1 - p$ αφού
  - ♦ για $p < 1 \Leftrightarrow 1 - p > 0$ και
  - ♦ για $p > 1 \Leftrightarrow 1 - p < 0$ αλλά $|1-p| = |p-1| \overset{p>1}{<} |p| \Rightarrow \left|\frac{p}{1-p}\right| > 1$.

Οι περιπτώσεις που απομένουν είναι :

- m > 0, p > 0 και 1 – p > 0 (δηλ. 0 < p < 1) όπου οι όροι κάποια στιγμή θ' αλλάξουν πρόσημο όταν το m δεν είναι ακέραιος και θα έχουμε τη διωνυμική κατανομή και
- m < 0, p < 0 < 1 – p (δηλ. απλά p < 0) όπου θα έχουμε την αρνητική διωνυμική κατανομή.

Με νέα παραμετροποίηση την $Q = \dfrac{p}{p-1}$ έχουμε :

- για μια διωνυμική μεταβλητή m > 0, Q < 0
- ενώ για μια αρνητική διωνυμική μεταβλητή m < 0, 0 < Q < 1.

Ορισμός : Ο όρος « διωνυμική ψευδο – μεταβλητή » εισάγεται για να ορίσει τη μαθηματική οντότητα που έχει μια πιθανογεννήτρια της μορφής $\Pi(u) = (1 - p + pu)^m$ με τέτοιες όμως τιμές των παραμέτρων που δεν αντιστοιχεί σε κάποια κατανομή.

Θα ασχοληθούμε με τις συνθήκες κάτω από τις οποίες οι συνελίξεις δύο διωνυμικών μεταβλητών ή ψευδο – μεταβλητών οδηγούν σε κατανομές.

1.2.2 Συνελίξεις διωνυμικών μεταβλητών ή ψευδο - μεταβλητών

Στην παράγραφο αυτή θα συζητήσουμε τις συνελίξεις διωνυμικών μεταβλητών ή ψευδο – μεταβλητών με m = ±1. Για συντομία τη διωνυμική και την αρνητική διωνυμική κατανομή θα τις συμβολίζουμε +B και –B αντίστοιχα. Επίσης οι παρακάτω τρεις περιπτώσεις για τις παραμέτρους :

- m = +1, $0 < Q < 1$ $\left(\Pi(u) = 1 - p + pu = \dfrac{1-Qu}{1-Q}\right)$
- m = +1, $Q \geq 1$ $\left(\Pi(u) = 1 - p + pu = \dfrac{1-Qu}{1-Q}\right)$
- m = –1, $-1 < Q < 0$ $\left(\Pi(u) = (1 - p + pu)^{-1} = \dfrac{1-Q}{1-Qu}\right)$

θα λέμε ότι οδηγούν στα τρία είδη ψευδο – μεταβλητών ${}^{P}B_1$, ${}^{P}B_2$ και ${}^{P}B_3$ αντίστοιχα (έχουμε $\dfrac{p_1}{p_0} < 0$ αλλά οι σειρές συγκλίνουν). Ο λόγος $\dfrac{1-Q}{1-Qu} = (1-p+pu)^{-1}$ σαν δυναμοσειρά της μεταβλητής u δε συγκλίνει για $|u| = 1$ όταν $|Q| \geq 1$, οπότε οι συνθήκες m = –1 και $|Q| \geq 1$ δεν οδηγούν σε ψευδο – μεταβλητή.

+B	$\Pi(u) = 1 - p + pu = \frac{1-Qu}{1-Q}$	$0 < p < 1$ $Q < 0$	m = 1
–B	$\Pi(u) = (1 - p + pu)^{-1} = \frac{1-Q}{1-Qu}$	$p < 0$ $0 < Q < 1$	m = –1
${}^{P}B_1$	$\Pi(u) = 1 - p + pu = \frac{1-Qu}{1-Q}$	$0 < Q < 1$	m = 1
${}^{P}B_2$	$\Pi(u) = 1 - p + pu = \frac{1-Qu}{1-Q}$	$Q \geq 1$	m = 1
${}^{P}B_3$	$\Pi(u) = (1 - p + pu)^{-1} = \frac{1-Q}{1-Qu}$	$-1 < Q < 0$	m = –1

Προφανώς οι συνελίξεις (+B)*(+B), (+B)*(–B) και (–B)*(–B) οδηγούν σε κατανομές.

Θα ασχοληθούμε τώρα με τις συνελίξεις (+B)*(${}^{P}B_1$), (+B)*(${}^{P}B_2$) και (+B)*(${}^{P}B_3$). Οι πιθανογεννήτριες που προκύπτουν είναι αντίστοιχα :

$$(1-p+pu)\frac{1-Q_1u}{1-Q_1} = \frac{(1-p)+(p-Q_1+pQ_1)u-pQ_1u^2}{1-Q_1}, \ 0 < Q_1 < 1$$

$$(1-p+pu)\frac{1-Q_1u}{1-Q_1} = \frac{(1-p)+(p-Q_1+pQ_1)u-pQ_1u^2}{1-Q_1}, \ Q_1 \geq 1 \qquad \text{και}$$

$$(1-p+pu)\frac{1-Q_1}{1-Q_1u} = (1-Q_1)(1-p+pu)\sum_{i=0}^{\infty}(Q_1u)^i =$$
$$= (1-Q_1)\left[(1-p)+(p+Q_1-pQ_1)u+Q_1(p+Q_1-pQ_1)u^2+\ldots\right], -1 < Q_1 < 0.$$

Καμιά από αυτές δε μπορεί να είναι πιθανογεννήτρια κατανομής αφού στην πρώτη ο συντελεστής του u^2 είναι αρνητικός ($-pQ_1 < 0$), στη δεύτερη ο συντελεστής του u^0 είναι είτε άπειρος είτε αρνητικός ($\frac{1-p}{1-Q_1} = \begin{cases} \infty, \text{αν } Q_1 = 1 \\ < 0, \text{αν } Q_1 > 1 \end{cases}$) και στην τρίτη οι συντελεστές του u ($p + Q_1 - pQ_1$) και του u^2 ($Q_1(p + Q_1 - pQ_1)$) είναι ετερόσημοι (αφού $Q_1 < 0$).

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με τις συνελίξεις (–B)*(${}^{P}B_1$), (–B)*(${}^{P}B_2$) και (–B)*(${}^{P}B_3$).

- Παρατηρούμε ότι η συνέλιξη (–B)*(${}^{P}B_1$) έχει πιθανογεννήτρια $\frac{1-Q}{1-Qu}\cdot\frac{1-Q_1u}{1-Q_1} = \frac{1-Q}{1-Q_1}\frac{1-Q_1u}{1-Qu}, \ Q_1 \geq 1$

δηλαδή το πηλίκο των πιθανογεννητριών δύο γεωμετρικών κατανομών με παραμέτρους Q και Q_1 αντίστοιχα. Η συνέλιξη αυτή οδηγεί σε πιθανογεννήτρια τυχαίας μεταβλητής αν $0 < Q_1 \leq Q < 1$, όπως θα αποδείξουμε στην παράγραφο 2.1.1.

Η πιθανογεννήτρια της (–Β) · ($^{P}B_1$) μπορεί να γραφτεί

$$\frac{(1-Q)(1-Q_1u)}{(1-Q_1)(1-Qu)}=\frac{(1-Q)(1-Qu+Qu-Q_1u)}{(1-Q_1)(1-Qu)}=\frac{(1-Q)}{(1-Q_1)}+\frac{(1-Q)(Qu-Q_1u)}{(1-Q_1)(1-Qu)}=$$

$$=\frac{(1-Q)}{(1-Q_1)}+\frac{(Q-Q_1)}{(1-Q_1)}\frac{(1-Q)u}{(1-Qu)}=\frac{(1-Q)}{(1-Q_1)}+\frac{(Q-Q_1)}{(1-Q_1)}\frac{(1-Q)}{Q}\frac{Qu}{(1-Qu)}=$$

$$=\frac{(1-Q)}{(1-Q_1)}-\frac{(Q-Q_1)}{(1-Q_1)}\frac{(1-Q)}{Q}\frac{1-Qu-1}{(1-Qu)}=$$

$$=\frac{(1-Q)}{(1-Q_1)}-\frac{(Q-Q_1)}{(1-Q_1)}\left[\frac{(1-Q)}{Q}-\frac{1}{Q}\frac{(1-Q)}{(1-Qu)}\right]=$$

$$=\frac{(1-Q)}{(1-Q_1)}-\frac{(Q-Q_1)(1-Q)}{(1-Q_1)Q}+\frac{(Q-Q_1)}{(1-Q_1)Q}\frac{(1-Q)}{(1-Qu)}=$$

$$=\frac{(1-Q)}{(1-Q_1)}\left[1-\frac{(Q-Q_1)}{Q}\right]+\frac{(Q-Q_1)}{(1-Q_1)Q}\frac{(1-Q)}{(1-Qu)}=\frac{(1-Q)}{(1-Q_1)}\frac{Q_1}{Q}+\frac{(Q-Q_1)}{(1-Q_1)Q}\frac{(1-Q)}{(1-Qu)}=$$

$$=\frac{(1-Q)Q_1}{(1-Q_1)Q}+\frac{(1-Q)(Q-Q_1)}{(1-Q_1)(1-Qu)Q}$$

που είναι η πιθανογεννήτρια της γεωμετρικής-με μηδενικά κατανομής και μπορεί να θεωρηθεί ως μίξη γεωμετρικών κατανομών.

- Η συνέλιξη (–Β)*($^{P}B_2$) έχει πιθανογεννήτρια :

  $\frac{1-Q}{1-Qu}\cdot\frac{1-Q_1u}{1-Q_1}=\frac{1-Q}{1-Q_1}\frac{1-Q_1u}{1-Qu}$, $Q_1 \geq 1$,

  η οποία δεν μπορεί να είναι πιθανογεννήτρια κατανομής αφού ο συντελεστής του u^0 είναι είτε άπειρος είτε αρνητικός $\left(\frac{1-Q}{1-Q_1}=\begin{cases}\infty, \text{αν } Q_1 = 1\\ <0, \text{αν } Q_1 > 1\end{cases}\right)$.

- Η πιθανογεννήτρια της (–Β)*($^{P}B_3$) είναι

  $\frac{1-Q}{1-Qu}\cdot\frac{1-Q_1}{1-Q_1u}$, $-1 < Q_1 < 0$,

η οποία θα είναι πιθανογεννήτρια κατανομής αν $-1 < -Q_1 < Q < 0$.

Εφαρμογές

- Μια πιθανογεννήτρια της μορφής (–Β)*($^{P}B_1$) εμφανίζεται στην διακριτή κλαδωτή ανέλιξη με ένα αρχικό άτομο όπου κάθε άτομο γεννά την επόμενη γενιά ατόμων σύμφωνα με την πιθανογεννήτρια $\Pi(u)=\frac{c+(1-c)u}{1+c-cu}$, $0 < c < 1$ (δείτε τον αναλυτικό ορισμό στην παράγραφο 4.1). Ο αριθμός ατόμων στην

$\nu^{οστή}$ γενιά έχει πιθανογεννήτρια $\Pi_\nu(u)=\dfrac{\nu c+(1-\nu c)u}{1+\nu c-\nu c u}$ που έχει την κατάλληλη μορφή με $Q=\dfrac{\nu c}{1+\nu c}$ και $Q_1=\dfrac{\nu c-1}{\nu c}$ αν νc > 1.

- Η πιο γενική Galton – Watson κλαδωτή ανέλιξη με πιθανογεννήτρια $\Pi(u)=\dfrac{a-bu}{a-b+c-cu}$, a > b > 0, c > 0, είναι επίσης αυτής της μορφής. Η πιθανογεννήτρια της προηγούμενης περίπτωσης έχει την παραπάνω μορφή με b = c – 1 και a = b + 1 = c.
- Ένα ακόμα παράδειγμα για αυτή την περίπτωση είναι και η μη-ομογενής ανέλιξη γεννήσεως-και-θανάτου με ένα αρχικό άτομο. Αυτή έχει την πιθανογεννήτρια $\Pi(u)=\dfrac{\zeta+(1-\eta)(u-1)}{\zeta-\eta(u-1)}$ όπου $\zeta=e^{\rho(t)}$, $\eta=\int_0^t\lambda(x)e^{\rho(x)}dx$ και $\rho(t)=\int_0^t\mu(x)-\lambda(x)dx$ που αν $\eta<1$ έχει τη μορφή (+B)*(–B) αλλά αν η > 1 έχει τη μορφή (–B) · ($^P B_1$).

1.3 Οι κατανομές των Jayasree and Swamy

1.3.1 Εισαγωγικά

Πρόταση 1.1 : Ο λόγος δύο δυναμοσειρών της μεταβλητής u είναι επίσης δυναμοσειρά στη μεταβλητή u , δηλαδή :

$$\frac{1+\sum_{i=1}^{+\infty}\alpha_i u^i}{1+\sum_{i=1}^{+\infty}b_i u^i}=\sum_{i=0}^{+\infty}d_i u^i \qquad (1.6)$$

όπου οι συντελεστές d_i λαμβάνονται αναδρομικά από τον τύπο :

$$d_i=\begin{cases}\alpha_i-\sum_{j=1}^{i}b_j d_{i-j}, & i=1,2,\ldots\\ 1, & i=0\end{cases} \qquad (1.7)$$

Απόδειξη :

$$1+\sum_{i=1}^{+\infty}\alpha_i u^i=\sum_{i=0}^{+\infty}d_i u^i\left(1+\sum_{i=1}^{+\infty}b_i u^i\right)=$$

$$=\sum_{i=0}^{+\infty}d_i u^i+\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=0}^{i-1}d_j b_{i-j}u^i$$

άρα $d_0=1$ και $\alpha_i=d_i+\sum_{j=0}^{i-1}d_j b_{i-j}$ δηλαδή $d_i=\alpha_i-\sum_{j=0}^{i-1}d_j b_{i-j}$.

◈

Ας υποθέσουμε ότι οι μεταβλητές Z και Y ακολουθούν κάποια από τις κατανομές της οικογένειας δυναμοσειράς με συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας :

$P[Z=z]=\dfrac{\alpha(z)\theta_1^{\,z}}{A(\theta_1)}$, $\alpha_z \geq 0$, $z = 0, 1, 2, \ldots$, $\theta_1 \geq 0$

και

$P[Y=y]=\dfrac{b(y)\theta_2^{\,y}}{B(\theta_2)}$, $b_y \geq 0$, $y = 0, 1, 2, \ldots$, $\theta_2 \geq 0$.

Οι πιθανογεννήτριες των Z και Y είναι οι

$$\Pi_1(u)=\frac{\sum_{i=0}^{+\infty}\alpha_i\theta_1^{\,i}u^i}{A(\theta_1)}, \quad |u|\leq 1 \qquad (1.8)$$

και

$$\Pi_2(u)=\frac{\sum_{i=0}^{+\infty}b_i\theta_2^{\,i}u^i}{A(\theta_2)}, \quad |u|\leq 1 \qquad (1.9)$$

αντίστοιχα.

Οι Π_i (u) είναι δυναμοσειρές και συγκλίνουν για $|u|\leq 1$, οπότε λαμβάνουμε το λόγο τους και έχουμε

$$\frac{\Pi_1(u)}{\Pi_2(u)}=\left[\frac{\alpha_0+\sum_{i=1}^{+\infty}\alpha_i\theta_1^{\,i}u^i}{A(\theta_1)}\right]\left[\frac{b_0+\sum_{i=1}^{+\infty}b_i\theta_2^{\,i}u^i}{B(\theta_2)}\right]^{-1}$$

$$=\left[\frac{\alpha_0\left(1+\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{\alpha_i}{\alpha_0}\theta_1^{\,i}u^i\right)}{A(\theta_1)}\right]\left[\frac{b_0\left(1+\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{b_i}{b_0}\theta_2^{\,i}u^i\right)}{B(\theta_2)}\right]^{-1}$$

θέτουμε $\alpha_i^1=\dfrac{\alpha_i}{\alpha_0}\theta_1^{\,i}$ και $b_j^1=\dfrac{b_j}{b_0}\theta_2^{\,i}$ οπότε

$$\frac{\Pi_1(u)}{\Pi_2(u)}=\left[\frac{\alpha_0B(\theta_2)}{b_0A(\theta_1)}\right]\left(\frac{1+\sum_{i=1}^{+\infty}\alpha_i^1u^i}{1+\sum_{i=1}^{+\infty}b_i^1u^i}\right)\overset{(3.1)}{=}\left[\frac{\alpha_0B(\theta_2)}{b_0A(\theta_1)}\right]\sum_{i=0}^{+\infty}d_iu^i=\sum_{i=0}^{+\infty}p_iu^i \quad (1.10)$$

όπου $d_i=\begin{cases}\alpha_i^1-\sum_{j=1}^{i}b_j^1d_{i-j}, & i=1,2,\ldots\\ 1, & i=0\end{cases}$

και θέσαμε $p_i=\left[\dfrac{\alpha_0B(\theta_2)}{b_0A(\theta_1)}\right]d_i$ (1.11).

Από την (1.10) ο λόγος $\frac{\Pi_1(u)}{\Pi_2(u)}$ είναι δυναμοσειρά της μεταβλητής u και συγκλίνει για $|u| \leq 1$. Υπό κατάλληλες προϋποθέσεις για τους συντελεστές d_i ώστε να είναι μη-αρνητικοί μπορούμε να θεωρήσουμε το λόγο αυτό σαν πιθανογεννήτρια μιας τυχαίας μεταβλητής.

Πρόταση 1.2 : Το διάνυσμα $P = (p_0, p_1, p_2, \ldots)$ όπου τα p_i δίνονται από τη σχέση (1.11) ορίζει μία συνάρτηση πιθανότητας αν $d_i > 0$ με $i = 1, 2, 3, \ldots$.

Απόδειξη : Έστω $d_i > 0$ με $i = 1, 2, 3, \ldots$ και $d_0 = 1$. Το διάνυσμα ορίζει μία συνάρτηση πιθανότητας αν υπάρχει μία διακριτή τυχαία μεταβλητή X τέτοια ώστε $P[X = n] = p_n$. Από τη σχέση (1.10) έχουμε ότι

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = \sum_{n=0}^{+\infty} P[X=n] = \left.\frac{\Pi_1(u)}{\Pi_2(u)}\right|_{u=1} = \frac{\Pi_1(u)|_{u=1}}{\Pi_2(u)|_{u=1}} = \frac{\dfrac{\sum_{i=0}^{+\infty}\alpha_i\theta_1^{\,i}}{A(\theta_1)}}{\dfrac{\sum_{i=0}^{+\infty} b_i\theta_2^{\,i}}{B(\theta_2)}} = \frac{\dfrac{\sum_{i=0}^{+\infty}\alpha_i\theta_1^{\,i}}{\sum_{x=0}^{+\infty}\alpha_x\theta_1^{\,x}}}{\dfrac{\sum_{i=0}^{+\infty} b_i\theta_2^{\,i}}{\sum_{x=0}^{+\infty}\alpha_x\theta_2^{\,x}}} = \frac{1}{1} = 1$$

◆

Η <u>πιθανογεννήτρια</u> της μεταβλητής X δίνεται από τον τύπο

$$\Pi_X(u) = E\left(u^X\right) = \sum_{x=0}^{+\infty} u^x p_x = \frac{\alpha_0 B(\theta_2)}{b_0 A(\theta_1)} \sum_{x=0}^{+\infty} u^x d_x \,.$$

Θέτοντας $\frac{\alpha_0 B(\theta_2)}{b_0 A(\theta_1)} = L$ έχουμε

$$\frac{\Pi_X(u)}{L} = \sum_{x=0}^{+\infty} u^x d_x = u^0 d_0 + u^1 d_1 + u^2 d_2 + \ldots$$

$$= u^0 1 + u^1\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_0}\theta_1 - \frac{b_1}{b_0}\theta_2\right) + u^2\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_0}\theta_1^{\,2} - \frac{b_1}{b_0}\theta_2 d_1 - \frac{b_2}{b_0}\theta_2^{\,2}\right) + \ldots$$

δηλ.

$$\Pi_X(u) = \frac{\Pi_1(u)}{\Pi_2(u)} \qquad (1.12)$$

όπου οι $\Pi_1(u)$ και $\Pi_2(u)$ δίνονται από τις σχέσεις (1.8) και (1.9).

Από την (1.12) παίρνουμε τη <u>μέση τιμή</u> μ της μεταβλητής X :

$$\mu = \left.\frac{\partial \Pi_X(u)}{\partial u}\right|_{u=1} = \left.\sum_{x=0}^{+\infty} p_x\, x\, u^{x-1}\right|_{u=1} = \sum_{x=0}^{+\infty} p_x\, x$$

ή

$$\mu=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\Pi_1(u)}{\Pi_2(u)}\right)\Bigg|_{u=1}=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\dfrac{\sum\limits_{x=0}^{+\infty}\alpha_x\theta_1^{\,x}u^x}{A(\theta_1)}}{\dfrac{\sum\limits_{x=0}^{+\infty}b_x\theta_2^{\,x}u^x}{B(\theta_2)}}\right)\Bigg|_{u=1}$$

$$=\left[\frac{B(\theta_2)}{A(\theta_1)}\frac{\left(\sum\limits_{x=0}^{+\infty}\alpha_x\theta_1^{\,x}x\,u^{x-1}\right)\left(\sum\limits_{x=0}^{+\infty}b_x\theta_2^{\,x}u^x\right)-\left(\sum\limits_{x=0}^{+\infty}\alpha_x\theta_1^{\,x}u^x\right)\left(\sum\limits_{x=0}^{+\infty}b_x\theta_2^{\,x}x\,u^{x-1}\right)}{\left(\sum\limits_{x=0}^{+\infty}b_x\theta_2^{\,x}u^x\right)^2}\right]\Bigg|_{u=1}$$

$$=\frac{B(\theta_2)}{A(\theta_1)}\frac{\theta_1\left(\sum\limits_{x=0}^{+\infty}\alpha_x\theta_1^{\,x-1}x\right)\left(\sum\limits_{x=0}^{+\infty}b_x\theta_2^{\,x}\right)-\left(\sum\limits_{x=0}^{+\infty}\alpha_x\theta_1^{\,x}\right)\theta_2\left(\sum\limits_{x=0}^{+\infty}b_x\theta_2^{\,x-1}x\right)}{\left(\sum\limits_{x=0}^{+\infty}b_x\theta_2^{\,x}\right)^2}$$

$$=\frac{B(\theta_2)}{A(\theta_1)}\frac{\theta_1A'(\theta_1)B(\theta_2)-A(\theta_1)\theta_2B'(\theta_2)}{\left(B(\theta_2)\right)^2}=\theta_1\frac{A'(\theta_1)}{A(\theta_1)}-\theta_2\frac{B'(\theta_2)}{B(\theta_2)}=\mu_1-\mu_2 \qquad (1.13)$$

όπου μ_1 είναι η μέση τιμή της μεταβλητής Ζ και μ_2 η μέση τιμή της μεταβλητής Υ.

Παρατηρούμε ότι το μ πρέπει να είναι θετικό γιατί είναι η μέση τιμή μιας μη-αρνητικής διακριτής τυχαίας μεταβλητής, μη-εκφυλισμένης στο 0. Αυτό επιβάλει κάποιους περιορισμούς για τις παραμέτρους των κατανομών που συμμετέχουν.

Η <u>διασπορά</u> της υπολογίζεται ως εξής :

$$\sigma^2=\left[\frac{\partial^2}{\partial u^2}\left(\frac{\Pi_1(u)}{\Pi_2(u)}\right)\right]\Bigg|_{u=1}+\mu-\mu^2$$

$$=\frac{B(\theta_2)}{A(\theta_1)}\frac{\partial^2}{\partial u^2}\left(\frac{A(\theta_1u)}{B(\theta_2u)}\right)\Bigg|_{u=1}+\mu-\mu^2$$

$$=\frac{B(\theta_2)}{A(\theta_1)}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{A'(\theta_1u)B(\theta_2u)-A(\theta_1u)B'(\theta_2u)}{B^2(\theta_2u)}\right)\Bigg|_{u=1}+\mu-\mu^2$$

$$=\frac{B(\theta_2)}{A(\theta_1)}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{A'(\theta_1u)}{B(\theta_2u)}-\frac{A(\theta_1u)B'(\theta_2u)}{B^2(\theta_2u)}\right)\Bigg|_{u=1}+\mu-\mu^2$$

$$
=\frac{B(\theta_2)}{A(\theta_1)}\left(\frac{A''(\theta_1u)B(\theta_2u)-A'(\theta_1u)B'(\theta_2u)}{B^2(\theta_2u)}\right)\Bigg|_{u=1}-
$$

$$
-\frac{B(\theta_2)}{A(\theta_1)}\left[\frac{\left(A'(\theta_1u)B'(\theta_2u)+A(\theta_1u)B''(\theta_2u)\right)B^2(\theta_2u)-A(\theta_1u)B'(\theta_2u)2B(\theta_2u)B'(\theta_2u)}{B^4(\theta_2u)}\right]\Bigg|_{u=1}+
$$

$$
+\mu-\mu^2
$$

$$
=\frac{B(\theta_2)}{A(\theta_1)}\left(\frac{\theta_1^{\,2}A''(\theta_1)}{B(\theta_2)}-\frac{\theta_1A'(\theta_1)\theta_2B'(\theta_2)}{B^2(\theta_2)}-\frac{\theta_1A'(\theta_1)\theta_2B'(\theta_2)+A(\theta_1)\theta_2^{\,2}B''(\theta_2)}{B^2(\theta_2)}+\frac{2A(\theta_1)\left(\theta_2B'(\theta_2)\right)^2}{B^3(\theta_2)}\right)+
$$

$$
+\mu-\mu^2
$$

$$
=\frac{\theta_1^{\,2}A''(\theta_1)}{A(\theta_1)}-2\frac{\theta_1A'(\theta_1)}{A(\theta_1)}\frac{\theta_2B'(\theta_2)}{B(\theta_2)}-\frac{\theta_2^{\,2}B''(\theta_2)}{B(\theta_2)}+\frac{2\theta_2^{\,2}\left(B'(\theta_2)\right)^2}{B^2(\theta_2)}+\mu_1-\mu_2-(\mu_1+\mu_2)^2
$$

$$
=\frac{\theta_1^{\,2}A''(\theta_1)}{A(\theta_1)}-2\mu_1\mu_2-\frac{\theta_2^{\,2}B''(\theta_2)}{B(\theta_2)}+2\mu_2^{\,2}+\mu_1-\mu_2-\mu_1^{\,2}+2\mu_1\mu_2-\mu_2^{\,2}
$$

$$
=\frac{\theta_1^{\,2}A''(\theta_1)}{A(\theta_1)}-\mu_1^{\,2}+\mu_1-\frac{\theta_2^{\,2}B''(\theta_2)}{B(\theta_2)}+\mu_2^{\,2}-\mu_2
$$

$$
=\sigma_1^{\,2}-\sigma_2^{\,2}
$$

όπου σ_1^2 είναι η διασπορά της μεταβλητής Z και σ_2^2 η διασπορά της μεταβλητής Y, υπό τις κατάλληλες προϋποθέσεις για τις παραμέτρους των κατανομών των μεταβλητών Z και Y ώστε $\sigma^2 > 0$.

1.3.2 Πηλίκο πιθανογεννητριών : Γεωμετρική (q) με Poisson (λ)

Η πιθανογεννήτρια της γεωμετρικής κατανομής με συνάρτηση πιθανότητας τη (1.3) δίνεται από τον τύπο

$$
\Pi_X(u)=\sum_{x=0}^{+\infty}pq^xu^x\,,\qquad |u|\le 1
$$

και της κατανομής Poisson με συνάρτηση πιθανότητας τη (1.1) από τον τύπο

$$
\Pi_Y(u)=\sum_{y=0}^{+\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^y}{y!}u^y\,,\qquad |u|\le 1.
$$

Παίρνουμε το λόγο των παραπάνω πιθανογεννητριών και όπως περιγράψαμε στην προηγούμενη παράγραφο :

$$
\frac{\Pi_X(u)}{\Pi_Y(u)}=pe^{\lambda}\sum_{i=0}^{+\infty}d_iu^i=\sum_{i=0}^{+\infty}p_iu^i=\Pi(u)
$$

όπου $p_i = pe^{\lambda}d_i$,

$$
d_i=\begin{cases}\alpha_i-\sum_{j=1}^{i}b_jd_{i-j}, & i=1,2,\ldots\\ 1, & i=0\end{cases}
$$

με $\alpha_i = q^i$ και $b_j = \frac{\lambda^j}{j!}$.

Πρόταση 1.3 : Οι τιμές των d_i δίνονται από το γενικό τύπο: $d_i = q^i \cdot \sum_{k=0}^{i} \frac{1}{k!}\left(-\frac{\lambda}{q}\right)^k = q^i \cdot \sum_{k=0}^{i} \frac{1}{k!}(-\theta)^k$ όπου θέσαμε $\theta = \frac{\lambda}{q}$.

Απόδειξη:

Έστω ότι ισχύει $d_i = q^i \cdot \sum_{k=0}^{i} \frac{1}{k!}(-\theta)^k$ για κάθε i με $1 \leq i \leq m$. Τότε:

$$d_{m+1} = \alpha_{m+1} - \sum_{k=1}^{m+1} b_k d_{m+1-k}$$

$$= q^{m+1} - b_1 d_m - b_2 d_{m-1} - \ldots - b_m d_1 - b_{m+1} d_0$$

$$= q^{m+1} - \lambda q^m \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}\left(-\frac{\lambda}{q}\right)^k - \frac{\lambda^2}{2!} q^{m-1} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!}\left(-\frac{\lambda}{q}\right)^k - \ldots - \frac{\lambda^m}{m!} q \left(1 - \frac{\lambda}{q}\right) - \frac{\lambda^{m+1}}{(m+1)!}.$$

$$= -q^{m+1}\left[-1 + \frac{\lambda}{q}\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}\left(-\frac{\lambda}{q}\right)^k + \frac{1}{2!}\left(\frac{\lambda}{q}\right)^2 \sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{k!}\left(-\frac{\lambda}{q}\right)^k + \ldots + \frac{1}{m!}\left(\frac{\lambda}{q}\right)^m\left(1 - \frac{\lambda}{q}\right) + \frac{1}{(m+1)!}\left(\frac{\lambda}{q}\right)^{m+1}\right]$$

$$= -q^{m+1}\left[-1 + \sum_{k=0}^{m}\frac{\theta^{k+1}}{k!}(-1)^k + \sum_{k=0}^{m-1}\frac{\theta^{k+2}}{2!k!}(-1)^k + \ldots + \frac{\theta^m}{m!} - \frac{\theta^{m+1}}{m!} + \frac{\theta^{m+1}}{(m+1)!}\right]$$

$$= -q^{m+1}\left[-1 + \theta - \frac{\theta^2}{2!} + \theta^3\left(\cancel{\frac{(-1)^2}{2!}} + \cancel{\frac{(-1)^1}{2!\cdot 1!}} + \frac{(-1)^0}{3!0!}\right) + \ldots + \theta^m\left(\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!} + \frac{(-1)^{m-2}}{2!(m-2)!} + \ldots + \frac{1}{m!}\right) + \right.$$

$$\left. + \theta^{m+1}\left(\frac{(-1)^m}{m!} + \frac{(-1)^{m-1}}{2!(m-1)!} + \ldots + \frac{(-1)^1}{m!} + \frac{1}{(m+1)!}\right)\right]$$

$$= -q^{m+1}\left(-1 + \theta - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^3}{3!} + \ldots + \frac{\theta^m}{m!}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{(-1)^i m!}{i!(m-i)!} + \frac{\theta^{m+1}}{(m+1)!}\sum_{i=0}^{m}\frac{(-1)^{i+1}(m+1)!}{i!(m+1-i)!}\right)$$

$$= -q^{m+1}\left[-1 + \theta - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^3}{3!} + \ldots + \frac{\theta^m}{m!}\left(\sum_{i=0}^{m}\frac{(-1)^i m!}{i!(m-i)!} - \frac{(-1)^m \cancel{m!}}{\cancel{m!}}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\theta^{m+1}}{(m+1)!}\left(\sum_{i=0}^{m+1}\frac{(-1)^{i+1}(m+1)!}{i!(m+1-i)!} - \frac{(-1)^{m+1}\cancel{(m+1)!}}{\cancel{(m+1)!}}\right)\right]$$

$$= -q^{m+1}\left\{-1 + \theta - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^3}{3!} + \ldots + \frac{\theta^m}{m!}\left[\cancel{(-1+1)^m} - (-1)^m\right] + \frac{\theta^{m+1}}{(m+1)!}\left[\cancel{(-1+1)^{m+1}} - (-1)^{m+1}\right]\right\}$$

$$= q^{m+1}\left(1 - \theta + \frac{\theta^2}{2!} - \frac{\theta^3}{3!} + \ldots + \frac{\theta^m(-1)^m}{m!} + \frac{\theta^{m+1}(-1)^{m+1}}{(m+1)!}\right)$$

$$= q^{m+1}\sum_{i=0}^{m+1}\frac{\theta^i(-1)^i}{i!} = q^{m+1}\sum_{i=0}^{m+1}\frac{(-\theta)^i}{i!}$$

Οπότε η συνάρτηση πιθανότητας της νέας κατανομής δίνεται από τον τύπο :

$$p_x = P\left[X=x\right] = e^{\lambda}\left(1-\frac{\lambda}{\theta}\right)\left(\frac{\lambda}{\theta}\right)^x \sum_{i=0}^{x}\frac{(-\theta)^i}{i!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, \quad 0<\lambda<\theta<1$$

ή $$p_x = P\left[X=x\right] = e^{\lambda}(1-q)q^x \sum_{i=0}^{x}\frac{1}{i!}\left(-\frac{\lambda}{q}\right)^i, \quad x = 0, 1, 2, \dots, \quad 0<\lambda<q<1$$

και η κατανομή αυτή ονομάστηκε από τους Jayasree and Swamy (2006) Geometrico-Poisson (GP).

Πρόταση 1.4 : Το διάνυσμα P = (p_0, p_1, p_2, …) όπου τα p_x δίνονται από την παραπάνω σχέση ορίζει μία συνάρτηση πιθανότητας για θ<1 $\left(\Leftrightarrow \frac{\lambda}{q} < 1 \Leftrightarrow \lambda < q\right)$.

Απόδειξη : Το διάνυσμα P ορίζει συνάρτηση πιθανότητας αν $p_x \geq 0$ και $\sum_{x=0}^{+\infty} p_x = 1$.

Παρατηρούμε ότι

$$\sum_{i=0}^{x}\frac{(-\theta)^i}{i!} = \left(1+\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^4}{4!}+\dots\right) - \frac{\theta}{1!}\left(1+\frac{\theta^2}{3!}+\frac{\theta^4}{5!}+\dots\right) \overset{0<\theta<1}{\geq}$$

$$\geq \left(1+\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^4}{4!}+\dots\right) - \left(1+\frac{\theta^2}{3!}+\frac{\theta^4}{5!}+\dots\right) > 0$$

Επομένως $p_x > 0$ για x = 0, 1, 2, … . Επιπλέον

$$\sum_{x=0}^{+\infty} p_x = \sum_{x=0}^{+\infty} e^{\lambda}\left(1-\frac{\lambda}{\theta}\right)\frac{\lambda}{\theta}^x \sum_{i=0}^{x}\frac{(-\theta)^i}{i!} = e^{\lambda}\left(1-\frac{\lambda}{\theta}\right)\sum_{x=0}^{+\infty}\left\{\left(\frac{\lambda}{\theta}\right)^x \sum_{i=0}^{x}\frac{(-\theta)^i}{i!}\right\}$$

$$= e^{\lambda}\left(1-\frac{\lambda}{\theta}\right)\left[1+\frac{\lambda}{\theta}\left(1-\frac{\theta}{1}\right)+\left(\frac{\lambda}{\theta}\right)^2\left(1-\frac{\theta}{1}+\frac{\theta^2}{2!}\right)+\left(\frac{\lambda}{\theta}\right)^3\left(1-\frac{\theta}{1}+\frac{\theta^2}{2!}-\frac{\theta^3}{3!}\right)+\cdots\right]$$

$$= e^{\lambda}\left(1-\frac{\lambda}{\theta}\right)\left[1+\frac{\lambda}{\theta}+\left(\frac{\lambda}{\theta}\right)^2+\dots-\frac{\theta}{1}\left(\frac{\lambda}{\theta}+\left(\frac{\lambda}{\theta}\right)^2+\dots\right)+\frac{\theta^2}{2!}\left(\left(\frac{\lambda}{\theta}\right)^2+\left(\frac{\lambda}{\theta}\right)^3+\dots\right)+\cdots\right]$$

$$= e^{\lambda}\left(1-\frac{\lambda}{\theta}\right)\left[\left(1+\frac{\lambda}{\theta}+\left(\frac{\lambda}{\theta}\right)^2+\dots\right)-\frac{\cancel{\theta}}{1}\frac{\lambda}{\cancel{\theta}}\left(1+\frac{\lambda}{\theta}+\left(\frac{\lambda}{\theta}\right)^2+\dots\right)+\frac{\theta^2}{2!}\left(\frac{\lambda}{\theta}\right)^2\left(1+\frac{\lambda}{\theta}+\left(\frac{\lambda}{\theta}\right)^2+\dots\right)+\cdots\right]$$

$$= e^{\lambda}\left(1-\frac{\lambda}{\theta}\right)\left[\left(1+\frac{\lambda}{\theta}+\left(\frac{\lambda}{\theta}\right)^2+\dots\right)-\lambda\left(1+\frac{\lambda}{\theta}+\left(\frac{\lambda}{\theta}\right)^2+\dots\right)+\frac{\lambda^2}{2!}\left(1+\frac{\lambda}{\theta}+\left(\frac{\lambda}{\theta}\right)^2+\dots\right)+\cdots\right]$$

$$= e^{\lambda}\left(1-\frac{\lambda}{\theta}\right)\left(1+\frac{\lambda}{\theta}+\left(\frac{\lambda}{\theta}\right)^2+\dots\right)\left(1-\lambda+\frac{\lambda^2}{2!}+\dots\right)$$

$$= e^{\lambda}\left(1-\frac{\lambda}{\theta}\right)\left\{\sum_{x=0}^{+\infty}\left(\frac{\lambda}{\theta}\right)^x\right\}\left\{\sum_{x=0}^{+\infty}\frac{(-\lambda)^x}{x!}\right\} \overset{\frac{\lambda}{\theta}<1}{=} e^{\lambda}\left(1-\frac{\lambda}{\theta}\right)\frac{1}{1-\frac{\lambda}{\theta}}\cdot e^{-\lambda} = 1$$

Η <u>πιθανογεννήτρια</u> της Geometrico-Poisson δίνεται από τον τύπο

$$\Pi_X(u) = E\left[u^X\right]$$

$$= e^{\lambda}\left(1-\frac{\lambda}{\theta}\right)\sum_{x=0}^{+\infty}\left\{\left(\frac{\lambda u}{\theta}\right)^{x}\sum_{i=0}^{x}\frac{(-\theta)^{i}}{i!}\right\}$$

$$= e^{\lambda}\left(1-\frac{\lambda}{\theta}\right)\frac{1}{\left(1-\frac{\lambda u}{\theta}\right)}e^{-\lambda u} = e^{\lambda-\lambda u}\left(1-\frac{\lambda}{\theta}\right)\left(1-\frac{\lambda}{\theta}u\right)^{-1} = e^{\lambda-\lambda u}(1-q)(1-q\ u)^{-1}$$

Από όπου παίρνουμε τη <u>μέση τιμή</u> της :

$$\mu = \left.\frac{\partial \Pi_X(u)}{\partial u\theta}\right|_{u=1} = \lambda\cancel{\left(1-\frac{\lambda}{}\right)}\cancel{\left(1-\frac{\lambda}{\theta}\right)^{-1}}\left(\frac{1}{\theta}\frac{\lambda 1}{1-\frac{\lambda}{\theta}}-1\right)\lambda = \frac{\lambda}{\theta} - q\left(1-\frac{\lambda}{\theta}\right)^{-1} - \ = \ -$$

Η <u>διασπορά</u> της είναι

$$\sigma^2 = \left.\frac{\partial^2 \Pi_X(u)}{\partial u\theta^2}\right|_{u=1}\theta + \mu - \mu^2 = \frac{\lambda}{}\left(1-\frac{\lambda}{}\right)^{-2} - \lambda = \frac{q}{(1-q)^2} - \lambda$$

με παραμετρικό χώρο Θ,

$\Theta = \{ (\theta, \lambda) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \lambda < \theta < 1 \} = \{ (q, \lambda) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \lambda < q < 1 \}$.

Αναγωγικές σχέσεις για τις πιθανότητες

Πρόταση 1.5 : Εάν η τ.μ. X_1 ακολουθεί τη Γεωμετρική (q) κατανομή και η τ.μ. X_2 την Poisson (λ) τότε οι πιθανότητες της κατανομής της οποίας η πιθανογεννήτρια προκύπτει ως το πηλίκο των δύο προηγούμενων δίνονται από τις αναγωγικές σχέσεις :

$$p_i = pe^{\lambda}\frac{(-\lambda)^i}{i!} + qp_{i-1} \quad \text{για } i \geq 1$$

$$\text{με } p_0 = pe^{\lambda}.$$

Απόδειξη :

Στη σχέση (1.12) αντικαθιστούμε τις πιθανογεννήτριες των κατανομών των X_1, X_2 που είναι γνωστές και έχουμε :

$$\frac{p(1-qu)^{-1}}{e^{\lambda(u-1)}} = \Pi(u)$$

$$pe^{-\lambda(u-1)} = (1-qu)\Pi(u)$$

Αναπτύσσουμε σε σειρές και παίρνουμε :

$$pe^{\lambda}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{(-\lambda)^i}{i!}u^i=(1-qu)\sum_{i=0}^{+\infty}p_iu^i \Rightarrow$$

$$pe^{\lambda}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{(-\lambda)^i}{i!}u^i=\sum_{i=0}^{+\infty}p_iu^i-q\sum_{i=0}^{+\infty}p_iu^{i+1} \Rightarrow$$

$$pe^{\lambda}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{(-\lambda)^i}{i!}u^i=\sum_{i=0}^{+\infty}p_iu^i-q\sum_{i=1}^{+\infty}p_iu^i$$

Για να είναι οι σειρές ίσες για κάθε u (με $|u|\leq 1$) πρέπει οι αντίστοιχοι συντελεστές να είναι ίσοι και άρα :

$$pe^{\lambda}\frac{(-\lambda)^i}{i!}=p_i-qp_{i-1}$$

Δηλαδή : $p_i=pe^{\lambda}\frac{(-\lambda)^i}{i!}+qp_{i-1}$

με $p_0=pe^{\lambda}$.

◈

1.3.3 Πηλίκο πιθανογεννητριών : Αρνητική Διωνυμική (q,r) με Γεωμετρική (q)

Αυτό προκύπτει ως ειδική περίπτωση της παραγράφου 2.1.2 για $q_* = q$. Αυτή την ανάπτυξη του θέματος την παρουσιάζουν οι Jayasree and Swamy (2006). Είναι προφανές ότι το αποτέλεσμα για $r\geq 1$ είναι μια Αρνητική Διωνυμική (q,r–1)!

Η πιθανογεννήτρια της αρνητικής διωνυμικής κατανομής με συνάρτηση πιθανότητας τη (1.2) δίνεται από τον τύπο

$$\Pi_X(u)=\sum_{x=0}^{+\infty}\binom{r+x-1}{r-1}p^rq^xu^x \qquad |u|\leq 1$$

και της γεωμετρικής κατανομής με συνάρτηση πιθανότητας τη (1.3) δίνεται από τον τύπο

$$\Pi_Y(u)=\sum_{y=0}^{+\infty}pq^yu^y, \qquad |u|\leq 1$$

Παίρνοντας το λόγο των προηγούμενων σχέσεων έχουμε

$$\frac{\Pi_X(u)}{\Pi_Y(u)}=\frac{\sum_{x=0}^{+\infty}\binom{r+x-1}{r-1}p^rq^xu^x}{\sum_{y=0}^{\infty}pq^yu^y}=p^{r-1}\frac{\sum_{x=0}^{+\infty}\binom{r+x-1}{r-1}q^xu^x}{\sum_{y=0}^{\infty}q^yu^y}=p^{r-1}\sum_{i=0}^{+\infty}d_iu^i=$$

$$=\sum_{i=0}^{+\infty}p_iu^i=\Pi(u)$$

όπου

$p_i = p^{r-1}d_i$ (1.14)

$$d_i = \begin{cases} \alpha_i^1 - \sum_{j=1}^{i} b_j^1 d_{i-j} = \binom{r+i-2}{i} q^i, & i = 1, 2, \ldots \\ 1, & i = 0 \end{cases}$$

με $\quad \alpha_i^1 = \binom{r+i-1}{r-1} q^i \quad$ και $\quad b_j^1 = q^j$

Πρόταση 1.6 : Το διάνυσμα P = (p_0, p_1, p_2, …) όπου τα p_x δίνονται από τη σχέση (1.14) ορίζει μία κατάλληλη συνάρτηση πιθανότητας.

Απόδειξη : Έστω $d_i > 0$ με i = 1, 2, 3, … που ισχύει για όλα τα $r \geq 2$ και $d_0 = 1$. Το διάνυσμα P ορίζει μία συνάρτηση πιθανότητας αν υπάρχει μία διακριτή τυχαία μεταβλητή X τέτοια ώστε $P[X = n] = p_n$ και

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = p^{r-1} \sum_{n=0}^{+\infty} d_n = p^{r-1} \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{r+n-2}{n} q^n =$$

$$= p^{r-1} \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{-r+1}{n} (-q)^n = p^{r-1} (1-q)^{-r+1} = p^{r-1} p^{-r+1} = 1$$

◈

Η <u>πιθανογεννήτρια</u> της κατανομής αυτής δίνεται από τον τύπο :

$$\Pi_X(u) = E\left[u^X\right] = p^{r-1} \sum_{x=0}^{+\infty} u^x d_x =$$

$$= p^{r-1} \sum_{x=0}^{\infty} \binom{r+x-2}{x} (qu)^x = p^{r-1} \sum_{x=0}^{\infty} \binom{-r+1}{x} (-qu)^x =$$

$$= p^{r-1} (1-qu)^{-r+1} = p^{r-1} (1-qu)^{-(r-1)} =$$

$$= \left(\frac{p}{1-qu} \right)^{r-1}$$

Από την προηγούμενη σχέση παίρνουμε τη <u>μέση τιμή</u> της παραπάνω κατανομής:

$$\mu = \left. \frac{\partial \Pi_X(u)}{\partial u} \right|_{u=1} = p^{r-1} (-r+1)(1-qu)^{-r} (-q) \Big|_{u=1} =$$

$$= p^{r-1} (r-1) q\, p^{-r} = (r-1) p^{-1} q = \frac{(r-1)q}{p}$$

Η <u>διασπορά</u> της είναι :

$$\sigma^2 = \left.\frac{\partial^2 \Pi_X(u)}{\partial u^2}\right|_{u=1} + \mu - \mu^2 =$$

$$= p^{r-1}(r-1)q(-r)(1-qu)^{-r-1}(-q)\Big|_{u=1} + \mu - \mu^2 =$$

$$= p^{r-1}(r-1)q^2 r\, p^{-r-1} + \frac{(r-1)q}{p} - \frac{(r-1)^2 q^2}{p^2} =$$

$$= \frac{r(r-1)q^2}{p^2} + \frac{(r-1)q\,p}{p^2} - \frac{(r-1)^2 q^2}{p^2} =$$

$$= \frac{(r-1)q}{p^2}\left[rq + p - (r-1)q\right] =$$

$$= \frac{(r-1)q}{p^2}(p+q) =$$

$$= \frac{(r-1)q}{p^2} = (r-1)q\,p^{-2}$$

Κεφάλαιο 2ο

Μονοδιάστατες κατανομές με πιθανογεννήτρια το πηλίκο δύο πιθανογεννητριών

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται οι συνθήκες εκείνες που επιτρέπουν στο πηλίκο δύο πιθανογεννητριών να είναι η πιθανογεννήτρια μιας μη αρνητικής διακριτής τ.μ. όταν η γ.σ.π. του παρανομαστή είναι αυτή της γεωμετρικής και όταν είναι αυτή της Poisson κατανομής. Αρχικά θα μελετήσουμε κάποιες ειδικές περιπτώσεις τέτοιων κατανομών, κατ' αναλογία με τη μεθοδολογία των Jayasree and Swamy (2006), και στη συνέχεια θα δοθεί η γενική θεωρία που αναπτύξαμε με διαφορετικό τρόπο.

2.1 Ειδικές Περιπτώσεις

2.1.1 Πηλίκο: Γεωμετρική (q) με Γεωμετρική (q_*)

Η πιθανογεννήτρια μιας γεωμετρικής κατανομής με συνάρτηση πιθανότητας τη (1.3) δίνεται από τον τύπο

$$\Pi_X(u)=\sum_{x=0}^{+\infty} pq^x u^x, \qquad |u|\le 1$$

Και μιας δεύτερης γεωμετρικής κατανομής από τον τύπο

$$\Pi_X(u)=\sum_{x=0}^{+\infty} p_* q_*^{\,x} u^x, \qquad |u|\le 1$$

Παίρνοντας το λόγο τους έχουμε

$$\frac{\Pi_X(u)}{\Pi_Y(u)}=\frac{\sum_{x=0}^{+\infty} pq^x u^x}{\sum_{x=0}^{+\infty} p_* q_*^{\,x} u^x}=\frac{p}{p_*}\frac{1+\sum_{x=1}^{+\infty} q^x u^x}{1+\sum_{x=1}^{+\infty} q_*^{\,x} u^x}=\frac{p}{p_*}\sum_{i=0}^{+\infty} d_i u^i=\Pi(u)$$

όπου $p_i=P(X=i)=\dfrac{p}{p_*}d_i \qquad (2.1)$

$$d_i=\begin{cases}\alpha_i-\sum_{j=1}^{i} b_j d_{i-j}, & i=1,2,\dots\\ 1, & i=0\end{cases}$$

με $\alpha_i = q^i$ και $b_i = q_*^{\,i}$.

Πρόταση 2.1 : Οι τιμές των d_i δίνονται από το γενικό τύπο:

$$d_i = q^{i-1}(q-q_*).$$

Απόδειξη:

Έστω ότι ισχύει $d_i = q^{i-1}(q-q_*)$ για κάθε i με $1\le i\le m$. Τότε:

$$
\begin{aligned}
d_{m+1} &= q^{m+1} - \sum_{j=1}^{m+1} b_j d_{m+1-j} \\
&= q^{m+1} - b_1 d_m - b_2 d_{m-1} - \ldots - b_{m+1} d_0 \\
&= q^{m+1} - q_* q^{m-1}\left(q - q_*\right) - {q_*}^2 q^{m-2}\left(q - q_*\right) - \ldots - {q_*}^{m+1}\cdot 1 \\
&= q^{m+1} - q^m q_* + \cancel{q^{m-1} {q_*}^2} - \cancel{q^{m-1} {q_*}^2} + \cancel{q^{m-2} {q_*}^3} - \ldots - \cancel{{q_*}^{m+1}} \\
&= q^m\left(q - q_*\right)
\end{aligned}
$$

◈

Πρόταση 2.2 : Το διάνυσμα P = (p_0, p_1, p_2, …) όπου τα p_x δίνονται από τη σχέση (2.1) ορίζει μία συνάρτηση πιθανότητας.

Απόδειξη :
Το διάνυσμα P = (p_0, p_1, p_2, …) όπου τα p_x δίνονται από τη σχέση (2.1) ορίζει μία συνάρτηση πιθανότητας αν $p_x \geq 0$ και $\sum_{x=0}^{+\infty} p_x = 1$.

Παρατηρούμε ότι :

$p_x \geq 0 \Leftrightarrow$

$\frac{p}{p_*} q^{x-1}\left(q - q_*\right) \geq 0 \Leftrightarrow$ (αφού p > 0, p_* > 0 και q > 0)

$q - q_* \geq 0 \Leftrightarrow$

$q \geq q_*$

και

$$
\begin{aligned}
\sum_{x=0}^{+\infty} p_x &= \frac{p}{p_*} + \frac{p}{p_*}\left(q - q_*\right)\sum_{x=1}^{+\infty} q^{x-1} = \frac{p}{p_*} + \frac{p}{p_*}\left(q - q_*\right)\frac{1}{1-q} \\
&= \frac{p}{p_*} + \frac{\cancel{p}}{p_*}\left(q - q_*\right)\frac{1}{\cancel{p}} = \frac{p}{p_*} + \frac{\left(\cancel{1} - p \cancel{-1} + p_*\right)}{p_*} \\
&= \frac{p}{p_*} + \frac{\left(p_* - p\right)}{p_*} = \frac{p_*}{p_*} = 1
\end{aligned}
$$

◈

Οπότε παίρνουμε τη συνάρτηση πιθανότητας μιας νέας κατανομής :

$$p_x = P\left(X = x\right) = \frac{1-q}{1-q_*} q^{x-1}\left(q - q_*\right), \quad x = 1, 2, \ldots$$

και $p_0 = \frac{p}{p_*}$, με $0 < q_* \leq q < 1$.

Η <u>πιθανογεννήτριά</u> της δίνεται εναλλακτικά και από τον τύπο:

$$\Pi\left(u\right) = \frac{1-q}{1-q_*} u^0 + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1-q}{1-q_*} q^{i-1}\left(q - q_*\right) u^i$$

$$=\frac{1-q}{1-q_*}+\frac{1-q}{1-q_*}\left(q-q_*\right)\frac{1}{q}\sum_{i=1}^{\infty}q^i u^i$$

$$=\frac{1-q}{1-q_*}+\frac{1-q}{1-q_*}\left(q-q_*\right)\frac{1}{\cancel{q}}\frac{\cancel{q}u}{1-qu}$$

$$=\frac{1-q}{1-q_*}\left[1+\frac{\left(q-q_*\right)u}{1-q\ \ u}\right]$$

Από όπου παίρνουμε τη <u>μέση τιμή</u> της κατανομής :

$$\mu=\left.\frac{\partial\Pi_X(u)}{\partial u}\right|_{u=1}=\left.\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{1-q}{1-q_*}+\frac{1-q}{1-q_*}\frac{\left(q-q_*\right)u}{1-q\ \ u}\right]\right|_{u=1}$$

$$=\left.\left[\frac{1-q}{1-q_*}\left(q-q_*\right)\frac{1-qu-u(-q)}{\left(1-qu\right)^2}\right]\right|_{u=1}=\left.\left[\frac{1-q}{1-q_*}\left(q-q_*\right)\frac{1}{\left(1-qu\right)^2}\right]\right|_{u=1}$$

$$=\frac{1-q}{1-q_*}\left(q-q_*\right)\frac{1}{\left(1-q\right)^2}=\frac{q-q_*}{\left(1-q_*\right)\left(1-q\right)}$$

Αντίστοιχα η <u>διασπορά</u> της είναι :

$$\sigma^2=\left.\frac{\partial^2\Pi_X(u)}{\partial u^2}\right|_{u=1}+\mu-\mu^2$$

$$=\left.\left[\frac{1-q}{1-q_*}\left(q-q_*\right)\frac{2q}{\left(1-qu\right)^3}\right]\right|_{u=1}+\frac{q-q_*}{\left(1-q_*\right)\left(1-q\right)}-\left(\frac{q-q_*}{\left(1-q_*\right)\left(1-q\right)}\right)^2$$

$$=\frac{2q\left(q-q_*\right)}{\left(1-q\right)^2\left(1-q_*\right)}+\frac{q-q_*}{\left(1-q_*\right)\left(1-q\right)}-\frac{\left(q-q_*\right)^2}{\left(1-q_*\right)^2\left(1-q\right)^2}$$

$$=\frac{2q\left(q-q_*\right)\left(1-q_*\right)+\left(q-q_*\right)\left(1-q_*\right)\left(1-q\right)-\left(q-q_*\right)^2}{\left(1-q_*\right)^2\left(1-q\right)^2}$$

$$=\frac{\cancel{2q^2}-2q^2q_*-\cancel{2qq_*}+2qq_*^2+q-q_*-\cancel{qq_*}+\cancel{q_*^2}-\cancel{q^2}+\cancel{qq_*}+q^2q_*-qq_*^2-\cancel{q^2}+\cancel{2qq_*}-\cancel{q_*^2}}{\left(1-q_*\right)^2\left(1-q\right)^2}$$

$$=\frac{-2q^2q_*+2qq_*^2+q-q_*+q^2q_*-qq_*^2}{\left(1-q_*\right)^2\left(1-q\right)^2}$$

$$=\frac{q-q_*+qq_*^2-q^2q_*}{\left(1-q_*\right)^2\left(1-q\right)^2}$$

$$=\frac{q-q_*-q_*q\left(q-q_*\right)}{\left(1-q_*\right)^2\left(1-q\right)^2}$$

$$=\frac{\left(q-q_*\right)\left(1-qq_*\right)}{\left(1-q_*\right)^2\left(1-q\right)^2}$$

με παραμετρικό χώρο παραμέτρων Θ, $\Theta=\{\,(q, q_*)\in\mathbb{R}^2 : 0<q\leq q_*<1\,\}$.

2.1.2 Πηλίκο: Αρνητική Διωνυμική (q,r) με Γεωμετρική (q_*)

Η πιθανογεννήτρια της αρνητικής διωνυμικής κατανομής με συνάρτηση πιθανότητας τη (1.2) δίνεται από τον τύπο

$$\Pi_X(u) = \sum_{x=0}^{+\infty} \binom{r+x-1}{r-1} p^r q^x u^x = p^r (1-qu)^{-r} \qquad |u| \le 1$$

και της γεωμετρικής κατανομής με συνάρτηση πιθανότητας τη (1.3) δίνεται από τον τύπο

$$\Pi_Y(u) = \sum_{y=0}^{+\infty} p_* q_*^y u^y = p_* (1-q_* u)^{-1}, \qquad |u| \le 1$$

Πρόταση 2.3 : Εάν η τ.μ. X_1 ακολουθεί τη Αρνητική Διωνυμική (q,r) κατανομή και η τ.μ. X_2 την Γεωμετρική (q) τότε οι πιθανότητες της κατανομής της οποίας η πιθανογεννήτρια προκύπτει ως το πηλίκο των δύο προηγούμενων δίνονται από τον τύπο :

$$p_x = \begin{cases} \dfrac{p^r}{p_*} q^{x-1} \dfrac{(r+x-2)!}{(r-1)!(x-1)!} \left(\dfrac{(r+x-1)q - q_* x}{x} \right), & x = 1,2,\ldots \\ p_0 = \dfrac{p^r}{p_*}, & x = 0 \end{cases} \quad , \min\{rq, q\} \ge q_* \qquad (2.2)$$

Απόδειξη :
Παίρνοντας το λόγο των παραπάνω πιθανογεννητριών έχουμε :

$$\frac{\Pi_X(u)}{\Pi_Y(u)} = \Pi(u) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{p^r (1-qu)^{-r}}{p_* (1-q_* u)^{-1}} = \Pi(u) \quad \Rightarrow$$

$$p^r (1-qu)^{-r} \frac{(1-q_* u)}{p_*} = \Pi(u) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{p^r (1-qu)^{-r}}{p_*} - \frac{q_* p^r u (1-qu)^{-r}}{p_*} = \Pi(u) \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{x=0}^{+\infty} \binom{r+x-1}{r-1} \frac{p^r}{p_*} q^x u^x - \sum_{x=0}^{+\infty} \binom{r+x-1}{r-1} \frac{q_*}{p_*} p^r q^x u^{x+1} = \sum_{x=0}^{+\infty} p_x u^x \Rightarrow$$

$$\sum_{x=0}^{+\infty} \binom{r+x-1}{r-1} \frac{p^r}{p_*} q^x u^x - \sum_{x=1}^{+\infty} \binom{r+x-2}{r-1} \frac{q_*}{p_*} p^r q^{x-1} u^x = \sum_{x=0}^{+\infty} p_x u^x$$

Οπότε έχουμε ότι :

$$p_0 = \frac{p^r}{p_*} \text{ και}$$

$$p_x = \binom{r+x-1}{r-1}\frac{p^r}{p_*}q^x - \binom{r+x-2}{r-1}\frac{q_*}{p_*}p^r q^{x-1} \Rightarrow \qquad x = 1, 2, \ldots$$

$$p_x = \frac{p^r}{p_*}q^{x-1}\left[\binom{r+x-1}{r-1}q - \binom{r+x-2}{r-1}q_*\right] \Rightarrow$$

$$p_x = \frac{p^r}{p_*}q^{x-1}\left[\frac{(r+x-1)!}{(r-1)!x!}q - \frac{(r+x-2)!}{(r-1)!(x-1)!}q_*\right] \Rightarrow$$

$$p_x = \frac{p^r}{p_*}q^{x-1}\frac{(r+x-2)!}{(r-1)!(x-1)!}\left(\frac{r+x-1}{x}q - q_*\right) \Rightarrow$$

$$p_x = \frac{p^r}{p_*}q^{x-1}\frac{(r+x-2)!}{(r-1)!(x-1)!}\left(\frac{(r+x-1)q - q_* x}{x}\right)$$

Το διάνυσμα P = (p_0, p_1, p_2, …) όπου τα p_x δίνονται από τη σχέση (2.2) ορίζει μία συνάρτηση πιθανότητας αν $p_x \geq 0$ και $\sum_{x=0}^{+\infty} p_x = 1$.

Παρατηρούμε ότι :

$$p_x \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{p^r}{p_*}q^{x-1}\frac{(r+x-2)!}{(r-1)!(x-1)!}\left(\frac{(r+x-1)q - q_* x}{x}\right) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(r+x-1)q - q_* x \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(r-1)q + x(q - q_*) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$rq - q_* + (x-1)(q - q_*) \geq 0 \qquad \text{για } x \geq 1$$

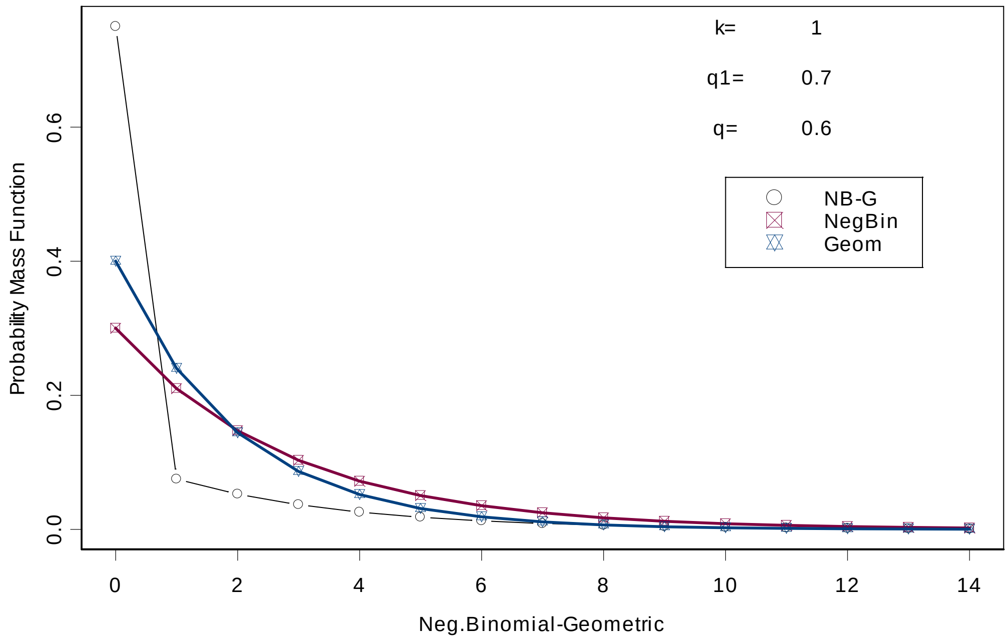
- Αν $r \geq 1$ τότε αρκεί : $q \geq q_*$
- Αν $r < 1$ τότε αρκεί : $q \geq q_*$ και $rq \geq q_*$

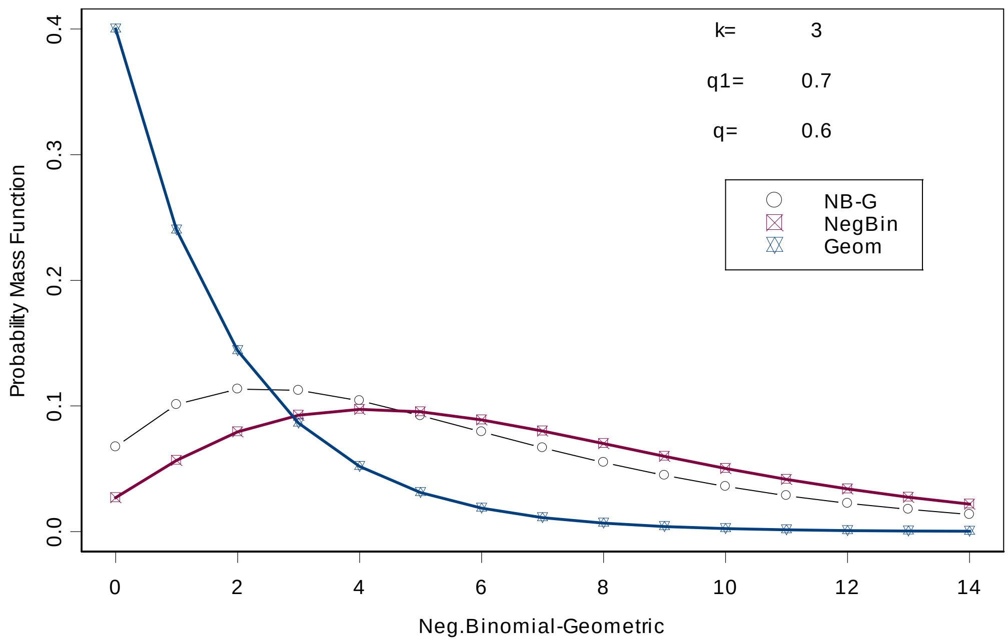
Επομένως ικανή συνθήκη ώστε το παραπάνω γινόμενο να αποτελεί πιθανογεννήτρια τυχαίας μεταβλητής είναι:

- Αν $r \geq 1$: $q \geq q_*$
- Αν $r < 1$: $rq \geq q_*$ $\Rightarrow \min\{ rq, q \} \geq q_*$

Το σχήμα της συνάρτησης πιθανότητας

Στα επόμενα σχήματα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων πιθανότητας της Αρνητικής διωνυμικής, της γεωμετρικής και της κατανομής που προκύπτει από αυτές τις δύο. Παρατηρούμε ότι οι αρχικές πιθανότητες της νέας κατανομής βρίσκονται πιο κοντά σε αυτές της κατανομής του παρανομαστή, ενώ στη συνέχεια ακολουθούν το σχήμα της συνάρτησης πιθανοτήτων της κατανομής του αριθμητή.


k= 1
q1= 0.7
q= 0.6
NB-G
NegBin
Geom
Probability Mass Function
0.0
0.2
0.4
0.6
0 2 4 6 8 10 12 14
Neg.Binomial-Geometric


k= 3
q1= 0.7
q= 0.6
NB-G
NegBin
Geom
Probability Mass Function
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0 2 4 6 8 10 12 14
Neg.Binomial-Geometric

2.1.3 Πηλίκο: Αρνητική Διωνυμική (q,r) με Poisson (λ)

Η πιθανογεννήτρια της αρνητικής διωνυμικής κατανομής με συνάρτηση πιθανότητας τη (1.2) δίνεται από τον τύπο

$$\Pi_X(u) = \sum_{x=0}^{+\infty} \binom{r+x-1}{r-1} p^r q^x u^x = p^r (1-qu)^{-r}, \qquad |u| \le 1$$

και της κατανομής Poisson με συνάρτηση πιθανότητας τη (1.1) από τον τύπο

$$\Pi_Y(u) = \sum_{y=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^y}{y!} u^y = e^{\lambda(u-1)}, \qquad |u| \le 1$$

Παίρνοντας το λόγο των παραπάνω πιθανογεννητριών έχουμε

$$\frac{\Pi_X(u)}{\Pi_Y(u)} = \Pi(u) \Rightarrow$$

$$\frac{p^r (1-qu)^{-r}}{e^{\lambda(u-1)}} = \Pi(u)$$

Ο παραπάνω λόγος γράφεται :

$$\frac{p^r (1-qu)^{-r}}{p_* (1-q_* u)^{-1}} \cdot \frac{p_* (1-q_* u)^{-1}}{e^{\lambda(u-1)}} = \Pi(u)$$

Οι δύο αυτοί λόγοι γνωρίζουμε ότι ορίζουν πιθανογεννήτριες διακριτών μη αρνητικών τ.μ., ο πρώτος όταν min{rq,q}≥ q_* και αυτή είναι η Αρνητ.Διωνυμική : Geometric της παραγράφου 2.1.2 και ο δεύτερος όταν $q_* \ge \lambda$ και αυτή είναι η Geometrico-Poisson της παραγράφου 1.3.2 . Επομένως ικανή συνθήκη ώστε το παραπάνω γινόμενο να αποτελεί πιθανογεννήτρια τυχαίας μεταβλητής είναι :

- αν $r \ge 1$ και $q \ge \lambda$ και
- αν $r < 1$ και $rq \ge \lambda$

Δηλαδή όταν min{rq,q}≥ λ.

Αναγωγικές σχέσεις για τις πιθανότητες

Πρόταση 2.4 : Εάν η τ.μ. X_1 ακολουθεί την Αρνητική Διωνυμική (q,r) κατανομή και η τ.μ X_2 την Poisson (λ) τότε οι πιθανότητες της κατανομής της οποίας η πιθανογεννήτρια προκύπτει ως το πηλίκο των δύο προηγούμενων δίνονται από τις αναγωγικές σχέσεις :

$$(i+1)p_{i+1} = \left[(\lambda + rq + qi) - \dots\right] p_i \ \dots \ p_{i-1}, \quad \text{για } i \ge 1$$
$$\text{με } p_0 = p^r e^{\lambda} \quad \text{και} \quad p_1 = (rq-\lambda)p_0 \tag{2.3}$$

Απόδειξη :
Στη σχέση (1.12) αντικαθιστούμε τις πιθανογεννήτριες των κατανομών των X_1, X_2 που είναι γνωστές και έχουμε :

$$\frac{p^r(1-qu)^{-r}}{e^{\lambda(u-1)}} = \Pi(u) \qquad \Rightarrow$$

$$p^r(1-qu)^{-r} = e^{\lambda(u-1)}\Pi(u) \qquad \Rightarrow$$

$$rqp^r(1-qu)^{-r-1} = \lambda e^{\lambda(u-1)}\Pi(u) + e^{\lambda(u-1)}\frac{d}{du}\Pi(u) \qquad \Rightarrow$$

$$rq\frac{p^r(1-qu)^{-r}}{e^{\lambda(u-1)}} = \lambda(1-qu)\Pi(u) + (1-qu)\frac{d}{du}\Pi(u) \qquad \Rightarrow$$

$$rq\Pi(u) - \lambda(1-qu)\Pi(u) = (1-qu)\frac{d}{du}\Pi(u) \qquad \Rightarrow$$

$$\left[(rq-\lambda)+\lambda qu\right]\sum_{i=0}^{+\infty} p_i u^i = (1-qu)\sum_{i=1}^{+\infty} i p_i u^{i-1} \qquad \Rightarrow$$

$$\left[(rq-\lambda)+\lambda qu\right]\sum_{i=0}^{+\infty} p_i u^i = (1-qu)\sum_{i=0}^{+\infty}(i+1)p_{i+1}u^i$$

Για να είναι οι σειρές ίσες για κάθε u (με $|u| \le 1$) πρέπει οι αντίστοιχοι συντελεστές να είναι ίσοι και άρα :

$$(rq-\lambda)p_i + \lambda q p_{i-1} = (i+1)p_{i+1} - qip_i$$

Άρα τελικά :

$$(i+1)p_{i+1} = \left[(r+i)q-\lambda\right]p_i + \lambda q p_{i-1}$$

με $p_0 = p^r e^{\lambda}$ και $p_1 = (rq-\lambda)p_0$.

Αναλυτικές σχέσεις για τις πιθανότητες

Πρόταση 2.5 : Εάν η τ.μ. X_1 ακολουθεί την αρνητική διωνυμική (q,r) κατανομή και η τ. μ X_2 την Poisson (λ) τότε οι πιθανότητες της τ.μ. X δίνονται από τον τύπο:

$$p_i = \frac{e^{\lambda}p^r}{\Gamma(r)}\frac{(-\lambda)^i}{i!}\sum_{x=0}^{i}\Gamma(r+x)\left(\frac{q}{-\lambda}\right)^x\binom{i}{x}. \qquad (2.4)$$

Απόδειξη :
Στη σχέση (1.12) αντικαθιστούμε τις πιθανογεννήτριες των κατανομών των X_1, X_2 που είναι γνωστές και έχουμε :

$$\frac{p^r(1-qu)^{-r}}{e^{\lambda(u-1)}} = \Pi(u) \Rightarrow$$

$$p^r(1-qu)^{-r}e^{-\lambda(u-1)} = \Pi(u) \Rightarrow$$

$$\sum_{i=0}^{+\infty}\binom{r+i-1}{i}q^i p^r u^i \cdot \sum_{i=0}^{+\infty} e^{-\lambda(-1)}\frac{(-\lambda)^i}{i!}u^i = \sum_{i=0}^{+\infty}p_i u^i$$

Για να είναι οι σειρές ίσες για κάθε u (με $|u| \le 1$) πρέπει οι αντίστοιχοι συντελεστές να είναι ίσοι και άρα :

$$p_i = \sum_{x=0}^{i} e^{\lambda}\frac{(-\lambda)^{i-x}}{(i-x)!}\binom{r+x-1}{x} q^x p^r \Rightarrow$$

$$p_i = e^{\lambda}p^r\sum_{x=0}^{i}\frac{(-\lambda)^{i-x}}{(i-x)!}\frac{(r+x-1)!}{x!(r-1)!} q^x \Rightarrow$$

$$p_i = e^{\lambda}p^r q^i\sum_{x=0}^{i}\frac{(-\lambda)^{i-x}}{i!\,\Gamma(r)} q^{x-i}\frac{\Gamma(r+x)}{x!\,(i-x)!}\, i! \Rightarrow$$

$$p_i = \frac{e^{\lambda}p^r q^i}{\Gamma(r)\, i!}\sum_{x=0}^{i}\Gamma(r+x)\binom{i}{x}\left(\frac{-\lambda}{q}\right)^{i-x} \Rightarrow$$

$$p_i = e^{\lambda}p^r\frac{(-\lambda)^i}{i!\,\Gamma(r)}\sum_{x=0}^{i}\Gamma(r+x)\left(\frac{q}{-\lambda}\right)^{x}\binom{i}{x}$$

Αλλιώς : $p_i = \frac{e^{\lambda}p^r}{\Gamma(r)}\frac{(-\lambda)^i}{i!}\sum_{x=0}^{i}\Gamma(r+x)\left(\frac{q}{-\lambda}\right)^{x}\binom{i}{x}$.

Εκτίμηση παραμέτρων

Θα προσπαθήσουμε να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους της κατανομής της τ.μ. X με τη μέθοδο των ροπών. Εξισώνουμε, δηλαδή, τις θεωρητικές με τις δειγματικές παραγοντικές ροπές, τις οποίες αναφέρουμε στην παράγραφο 2.2. Η παραγοντική ροπή r τάξης της κατανομής Poisson (λ) είναι $\mu'_{[r]} = \lambda^r$ και της Αρνητικής Διωνυμικής (k, q) είναι $\mu'_{[r]} = k(k+1)\ldots(k+r-1)\left(\frac{q}{p}\right)^r$.

Η γνωστή σχέση (2.6) για r = 1, 2, 3 γίνεται αντίστοιχα :

$$E(X)+\lambda = k\frac{q}{p}$$

$$E(X(X-1)) + 2\lambda E(X) + \lambda^2 = k(k+1)\frac{q^2}{p^2}$$

$$E(X(X-1)(X-2)) + 3\lambda E(X(X-1)) + 3\lambda^2 E(X) + \lambda^3 = k(k+1)(k+2)\frac{q^3}{p^3}$$

Από την πρώτη σχέση έχουμε ότι : $E(X) = k\frac{q}{p} - \lambda$.

Από τη δεύτερη σχέση έχουμε :

$$E(X(X-1)) + 2\lambda\left(k\frac{q}{p} - \lambda\right) + \lambda^2 = k(k+1)\frac{q^2}{p^2}$$

$$E\left(X\left(X-1\right)\right)\lambda = k\lambda\left(k+1\right)\frac{q^2}{p^2}-2k\frac{q}{p}\quad + \quad {}^2$$

$$=\left(k\lambda\frac{q}{p}-\quad k\right)^2+\quad\frac{q^2}{p^2}$$

$$=\left(E\left(X\right)\right)^2+k\frac{q^2}{p^2}$$

Άρα : $E\left(X\left(X-1\right)\right)-\left(E\left(X\right)\right)^2=k\frac{q^2}{p^2}$ ή $m'_{[2]}-\left(m'_{[1]}\right)^2=k\frac{q^2}{p^2}$.

Και επιπλέον :

$$E\left(X\left(X-\lambda 1\right)\right)2\lambda 2k\lambda\frac{q}{p}\quad -k\quad k^2+1^2=\left(\quad+\quad\right)\frac{q^2}{p^2}\Rightarrow$$

$$E\left(X\left(X\lambda-1\right)\right)2k\,k^2\lambda\frac{q^2}{p^2}k\quad {}^2-\quad\frac{q}{p}\quad+\quad\frac{q^2}{p^2}\Rightarrow$$

$$E\left(X\left(X\lambda-1\right)\right)k\left(k\frac{q}{p}-\quad\right)^2+\quad\frac{q^2}{p^2}\Rightarrow$$

$$E\left(X\left(X-1\right)\right)=\left(E\left(X\right)\right)^2+k\frac{q^2}{p^2}.$$

Από την τρίτη σχέση έχουμε :

$$E\left(X\left(X\lambda-1\right)k\left(X\lambda-2\right)\right)3\lambda 3k\left(3k+1\right)\lambda\frac{q^2}{p^2}3\lambda-\quad\lambda\frac{q}{p}\quad{}^2k+k\quad{}^3 1+\quad k\frac{q}{p}2^2-\quad{}^3+\quad{}^3=\left(\quad+\quad\right)\left(\quad+\quad\right)\frac{q^3}{p^3}\Rightarrow$$

$$E\left(X\left(X-1\right)\left(X-2\lambda\right)\right)=3\left(k^2\lambda+k\right)\left(\lambda k+2\right)\frac{q^3}{p^3}-3\left(k^2+k\right)\frac{q^2}{p^2}\quad+\quad\frac{q}{p}\quad{}^2-\quad{}^3\Rightarrow$$

$$E\left(X\left(X-1\right)\left(X-2\right)\lambda\right)=kk^2\frac{q^3}{p^3}\lambda 2k3k^2\frac{q^3}{p^3}\lambda+k^2\lambda\frac{q^3}{p^3}+2k\frac{q^3}{p^3}-3k^2\frac{q^2}{p^2}\quad-\quad\frac{q^2}{p^2}\quad+\quad\frac{q}{p}\quad{}^2-\quad{}^3\Rightarrow$$

$$E\left(X\left(X-1\right)\left(X-3k\right)\right)=\lambda k^3\lambda\frac{q^3}{p^3}-3k^2\frac{q^2}{p^2}\quad 3k\quad\frac{q}{p}\lambda^2\,2k^3+\quad{}^2\frac{q^3}{p^3}-\quad\frac{q^2}{p^2}\quad+\quad\frac{q^3}{p^3}\Rightarrow$$

$$E\left(X\left(X-1\lambda\right)\left(X-3k\right)\right)=\left(k\frac{q}{p}-\lambda\right)^3 2k\quad\frac{q^2}{p^2}\left(\quad\frac{q}{p}-\quad\right)+\quad\frac{q^2}{p^2}\frac{q}{p}\Rightarrow$$

$$E\left(X\left(X-1\right)\left(X-2\right)\right)=\left(E\left(X\right)\right)^3+3\left[E\left(X\left(X-1\right)\right)-\left(E\left(X\right)\right)^2\right]\left(E\left(X\right)\right)+2\left[E\left(X\left(X-1\right)\right)-\left(E\left(X\right)\right)^2\right]\frac{q}{p}\Rightarrow$$

$$\frac{q}{p}=\frac{-\left(E\left(X\right)\right)^3-3\left[E\left(X\left(X-1\right)\right)-\left(E\left(X\right)\right)^2\right]E\left(X\right)+E\left(X\left(X-1\right)\left(X-2\right)\right)}{2\left[E\left(X\left(X-1\right)\right)-\left(E\left(X\right)\right)^2\right]}$$

Εξισώνοντας τώρα τις θεωρητικές με τις αντίστοιχες δειγματικές παραγοντικές ροπές, δηλαδή $\mu'_{[r]} = m'_{[r]}$, έχουμε για το λόγο $\frac{q}{p}$:

$$\frac{q}{p}=\frac{-m_{[1]}'^{3}-3\left(m_{[2]}'-m_{[1]}'^{2}\right)m_{[1]}'+m_{[3]}'}{2\left(m_{[2]}'-m_{[1]}'^{2}\right)}\Rightarrow$$

$$\frac{q}{p}=\frac{-m_{[1]}'^{3}-3m_{[2]}'m_{[1]}'+3m_{[1]}'^{3}+m_{[3]}'}{2\left(m_{[2]}'-m_{[1]}'^{2}\right)}\Rightarrow$$

$$\frac{q}{p}=\frac{m_{[3]}'+2m_{[1]}'^{3}-3m_{[2]}'m_{[1]}'}{2\left(m_{[2]}'-m_{[1]}'^{2}\right)}$$

Από τη σχέση $E\left(X\left(X-1\right)\right)=\left(E\left(X\right)\right)^{2}+k\frac{q^{2}}{p^{2}}$ έχουμε ότι :

$$k\frac{q^{2}}{p^{2}}=E\left(X\left(X-1\right)\right)-\left(E\left(X\right)\right)^{2}\Rightarrow$$

$$k=\frac{E\left(X\left(X-1\right)\right)-\left(E\left(X\right)\right)^{2}}{\frac{q^{2}}{p^{2}}}$$

Επομένως ο εκτιμητής για το k είναι :

$$\hat{k}=\frac{m_{[2]}'-m_{[1]}'^{2}}{\left[\frac{m_{[3]}'+2m_{[1]}'^{3}-3m_{[2]}'m_{[1]}'}{2\left(m_{[2]}'-m_{[1]}'^{2}\right)}\right]^{2}}\Rightarrow$$

$$\hat{k}=\frac{4\left(m_{[2]}'-m_{[1]}'^{2}\right)^{3}}{\left(m_{[3]}'+2m_{[1]}'^{3}-3m_{[2]}'m_{[1]}'\right)^{2}}$$

Από τη σχέση $E\left(X\left(X-1\right)\right)=\left(E\left(X\right)\right)^{2}+k\frac{q^{2}}{p^{2}}$ παίρνουμε για το λόγο $\frac{q}{p}$:

$$\frac{E\left(X\left(X-1\right)\right)-\left(E\left(X\right)\right)^{2}}{k}=\frac{q^{2}}{p^{2}}\Rightarrow$$

$$\sqrt{\frac{E\left(X\left(X-1\right)\right)-\left(E\left(X\right)\right)^{2}}{k}}=\frac{q}{1-q}\Rightarrow$$

$$q=\frac{\sqrt{\frac{E\left(X\left(X-1\right)\right)-\left(E\left(X\right)\right)^{2}}{k}}}{1+\sqrt{\frac{E\left(X\left(X-1\right)\right)-\left(E\left(X\right)\right)^{2}}{k}}}$$

Άρα ο εκτιμητής για το q είναι :

$$\hat{q}=\frac{\sqrt{\frac{m_{[2]}'-m_{[1]}'^{2}}{k}}}{1+\sqrt{\frac{m_{[2]}'-m_{[1]}'^{2}}{k}}}.$$

Από την πρώτη σχέση παίρνουμε τον εκτιμητή για το λ ως εξής :

$$\hat{\lambda}=\hat{k}\frac{\hat{q}}{\hat{p}}-m'_{[1]}\Rightarrow\hat{\lambda}=\sqrt{\hat{k}(m'_{[2]}-m'^{\,2}_{[1]})}-m'_{[1]}\Rightarrow\hat{\lambda}=\frac{2\left(m'_{[2]}-m'^{\,2}_{[1]}\right)^2}{\left|m'_{[3]}+2m'^{\,3}_{[1]}-3m'_{[2]}m'_{[1]}\right|}-m'_{[1]}$$

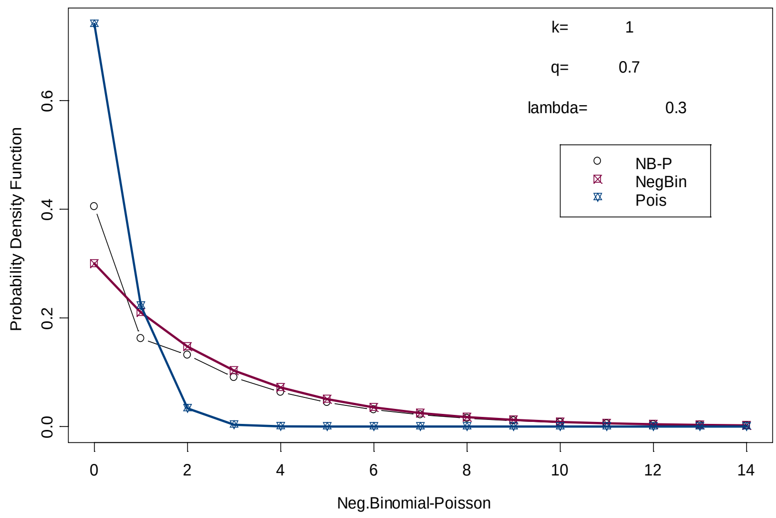
Δηλαδή οι εκτιμητές με τη μέθοδο των ροπών των παραμέτρων k, q, λ δίνονται από τους τύπους:

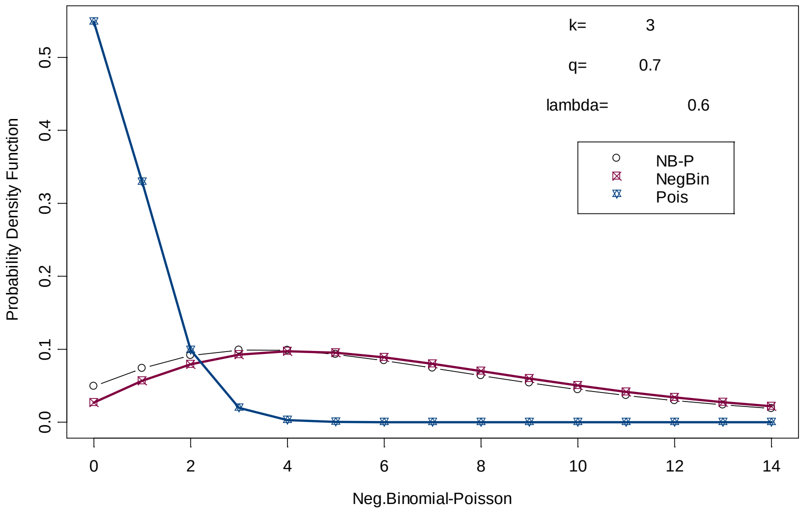
$$\hat{k}=\frac{4\left(m'_{[2]}-m'^{\,2}_{[1]}\right)^3}{\left(m'_{[3]}+2m'^{\,3}_{[1]}-3m'_{[2]}m'_{[1]}\right)^2}\ ,\qquad \hat{q}=\frac{\sqrt{\dfrac{m'_{[2]}-m'^{\,2}_{[1]}}{k}}}{1+\sqrt{\dfrac{m'_{[2]}-m'^{\,2}_{[1]}}{k}}}$$

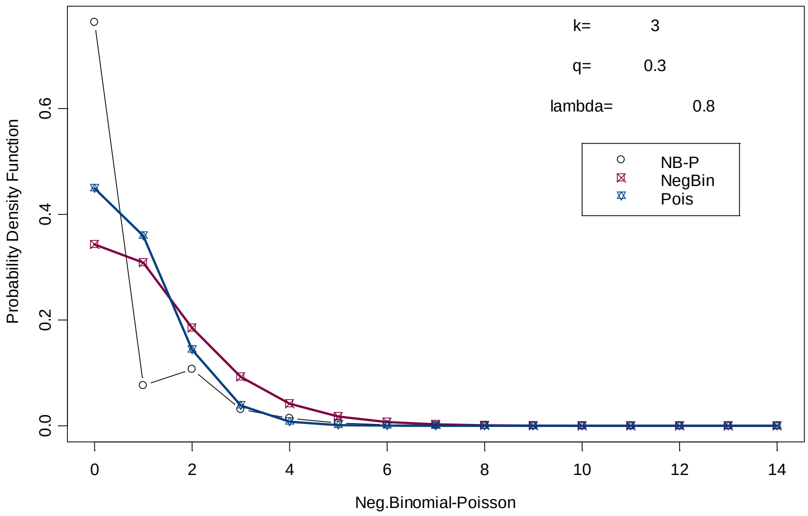
$$\hat{\lambda}=\frac{2\left(m'_{[2]}-m'^{\,2}_{[1]}\right)^2}{\left|m'_{[3]}+2m'^{\,3}_{[1]}-3m'_{[2]}m'_{[1]}\right|}-m'_{[1]}$$

Το σχήμα της συνάρτησης πιθανότητας

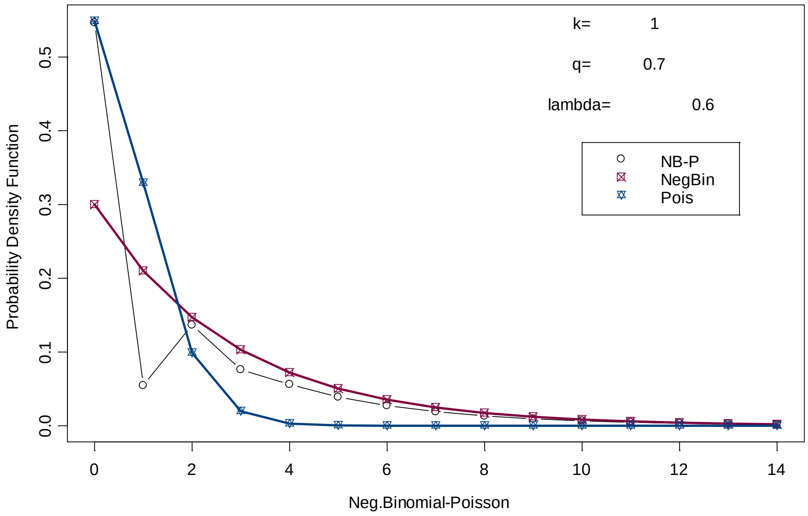
Στα επόμενα σχήματα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων πιθανότητας της Αρνητικής διωνυμικής, της Poisson και της κατανομής που προκύπτει από αυτές τις δύο. Παρατηρούμε ότι οι αρχικές πιθανότητες της νέας κατανομής βρίσκονται πιο κοντά σε αυτές της κατανομής του παρανομαστή, ενώ στη συνέχεια ακολουθούν το σχήμα της συνάρτησης πιθανοτήτων της κατανομής του αριθμητή.

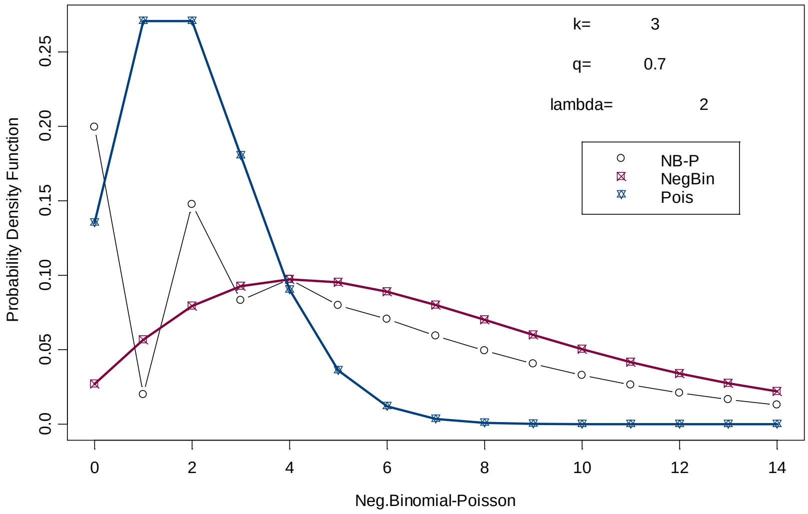






Παρατηρούμε επίσης, ότι όταν η παράμετρος της Poisson, λ, είναι πολύ κοντά στο άνω δυνατό της όριο, το kq (βλέπε και τη σχέση (2.5)), τότε η νέα κατανομή παρουσιάζει, εκτός από την κορυφή στο 0 και άλλες κορυφές στις αρχικές της τιμές, είναι δηλαδή πολύκορφη.


k= 1
q= 0.7
lambda= 0.6
NB-P
NegBin
Pois
Probability Density Function
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0
2
4
6
8
10
12
14
Neg.Binomial-Poisson


k= 3
q= 0.7
lambda= 2
NB-P
NegBin
Pois
Probability Density Function
0.0
0.05
0.10
0.15
0.20
0.25
0
2
4
6
8
10
12
14
Neg.Binomial-Poisson

2.2 Παραγοντικές Ροπές

Για τις παραγοντικές ροπές r τάξης $\mu'_{[r]} = E(X(X-1)\ldots(X-r+1))$ μιας κατανομής γνωρίζουμε ότι ισχύει η σχέση $\mu'_{[r]} = \left.\frac{\partial^r}{\partial u^r}\Pi(u)\right|_{u=1}$. Στην περίπτωση που μελετάμε έχουμε :

$$\Pi(u) = \frac{\Pi_1(u)}{\Pi_2(u)}$$

δηλαδή $\Pi_1(u) = \Pi(u)\Pi_2(u)$.

Επομένως :

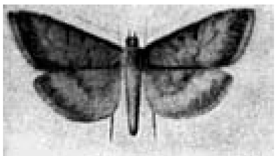
$$\frac{\partial^r}{\partial u^r}\Pi_1(u) = \sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}\frac{\partial^i}{\partial u^i}\Pi(u)\cdot\frac{\partial^{r-i}}{\partial u^{r-i}}\Pi_2(u) \qquad (2.6).$$

$$\mu'^{\,1}_{[r]} = \sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}\mu'_{[i]}\cdot\mu'^{\,2}_{[r-i]}.$$

όπου $\mu'^{\,i}_{[r]}$ είναι η r τάξης παραγοντική ροπή που αντιστοιχεί στην γ.σ.π. i=1,2.

2.3 Δεδομένα – Έλεγχοι καλής προσαρμογής

Παράδειγμα 1



Το έντομο Pyrausta Nubilalis σκάβει και καταστρέφει τον μίσχο και την κορώνα του καλαμποκιού. Σε αυτό το παράδειγμα, τα δεδομένα αφορούν τον αριθμό προνυμφών του Ευρωπαϊκού Pyrausta Nubilalis (HBN) που βρέθηκαν σε ένα φυτό καλαμποκιού (Mc Guire J. V., Brindley T. A., Bancroft T. A. (1957)) . Η μέση τιμή και η διασπορά του δείγματος είναι $\bar{x} = 0.1925$ και $s^2 = 0.1636$.

Αριθμός προνυμφών ανά φυτό	0	1	2	3	Σύνολο
Παρατηρούμενη συχνότητα	1117	149	27	3	1296
Εκτιμώμενη συχνότητα από γεωμετρική κατανομή	1101.15	165.55	24.89	4.41	1296
Εκτιμώμενη συχνότητα από κατανομή Poisson	1100.43	180.01	14.72	0.84	1296
Εκτιμώμενη συχνότητα από κατανομή που προέκυψε από πηλίκο Αρν. Διων. με Poisson	1114.85	154.79	22.53	3.83	1296

Για να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους της κάθε κατανομής θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο των ροπών. Εξισώνουμε λοιπόν τις θεωρητικές με τις εμπειρικές μέσες τιμές, όπου χρειάζεται και τις διασπορές, και λύνουμε το σύστημα που προκύπτει.

Για να εξετάσουμε εάν τα δεδομένα προέρχονται από τη γεωμετρική κατανομή εκτιμούμε τις παραμέτρους με τη μέθοδο των ροπών

$$E(X) = \bar{x} \text{ και } Var(X) = s^2$$

$$\frac{1-p}{p} = \bar{x} \text{ και } \frac{1-p}{p^2} = s^2$$

$$\text{δηλαδή } \hat{p} = \frac{s^2}{\bar{x}}.$$

Άρα $\hat{p} = \dfrac{0.1635802}{0.1925259} = 0.8496$ και $\hat{q} = 1 - \hat{p} = 0.1504$.

Η τελευταία αναμενόμενη συχνότητα είναι μικρότερη του 5 και για να κάνουμε X^2 έλεγχο για την κατανομή ομαδοποιούμε τα τελευταία κελιά και οι νέες αναμενόμενες τιμές είναι : 1101.15, 165.55, 29.3.

Ο X^2 έλεγχος δίνει Chi-square = 1.9, df = 1 και p-value = 0.168 άρα η γεωμετρική κατανομή προσεγγίζει ικανοποιητικά την κατανομή των δεδομένων.

Για να εξετάσουμε εάν τα δεδομένα προέρχονται από τη κατανομή Poisson εκτιμούμε τις παραμέτρους με τη μέθοδο των ροπών

$$E(X) = \bar{x}$$

$$\hat{\lambda} = \bar{x}$$

Άρα $\hat{\lambda}$ = 0.1636.

Η τελευταία αναμενόμενη συχνότητα είναι μικρότερη του 5 και για να κάνουμε X^2 έλεγχο για την κατανομή ομαδοποιούμε τα τελευταία κελιά και οι νέες αναμενόμενες τιμές είναι : 1100.43, 180.01, 15.56.

Ο X^2 έλεγχος δίνει Chi-square = 18.9926, df = 1 και p-value = 0 άρα η κατανομή Poisson δεν είναι καλή κατανομή για τα δεδομένα.

Για να εξετάσουμε εάν τα δεδομένα προέρχονται από τη την κατανομή που προέκυψε από τη διαίρεση μιας γεωμετρικής κατανομής με μια κατανομή Poisson εκτιμούμε τις παραμέτρους με τη μέθοδο των ροπών

$$E(X) = \bar{x} \text{ και } Var(X) = s^2$$

$$\frac{q}{p} - \lambda = \bar{x} \text{ και } \frac{q}{p^2} - \lambda = s^2$$

$$\frac{q}{p^2} - \frac{q}{p} = s^2 - \bar{x}$$

$$\frac{q}{p}\left(\frac{1}{p} - 1\right) = \frac{q}{p}\left(\frac{1-p}{p}\right) = \left(\frac{q}{p}\right)^2 = s^2 - \bar{x}$$

$$\frac{q}{p} = \frac{1-p}{p} = \sqrt{s^2 - \bar{x}}$$

$$\boxed{\hat{p} = \frac{1}{1 + \sqrt{s^2 - \bar{x}}}}$$

$$\text{και } \lambda = \frac{1-p}{p} - \bar{x}$$

$$\text{δηλαδή } \hat{\lambda} = \sqrt{s^2 - \overline{x}} - \overline{x} \text{ ή } \hat{\lambda} = \frac{\sqrt{s^2 - \overline{x}}}{1 + \sqrt{s^2 - \overline{x}}} - s^2$$

Άρα p = 0.8546 και λ = 0.0066.

Χρησιμοποιούμε την αναγωγική σχέση για τις πιθανότητες που είδαμε στην παράγραφο 1.3.2, η οποία μας δίνει τις αναμενόμενες τιμές που εμφανίζονται στον παραπάνω πίνακα.
Ο X^2 έλεγχος δίνει Chi-square = 1.29, df = 1 και p-value = 0.2563 άρα η κατανομή αυτή προσεγγίζει πολύ καλά τα δεδομένα.

Παράδειγμα 2

Σε κάποια άλλη έρευνα για την κατανομή που ακολουθεί ο αριθμός προνυμφών ανά φυτό του εντόμου Pyrausta Nubilalis (HBN) τα δεδομένα είναι τα εξής :

Αριθμός προνυμφών ανά φυτό	0	1	2	3	4	Σύνολο
Παρατηρούμενη συχνότητα	907	275	88	23	3	1296
Εκτιμώμενη συχνότητα από γεωμετρική κατανομή	1038.16	206.54	41.09	8.18	2.03	1296
Εκτιμώμενη συχνότητα από αρνητική διωνυμική κατανομή	898.20	295.35	77.94	18.88	5.63	1296
Εκτιμώμενη συχνότητα από κατανομή που προέκυψε από πηλίκο Αρν. Διων. και Poisson	900.21	290.54	80.93	19.13	5.18	1296

Για να εξετάσουμε εάν τα δεδομένα προέρχονται από τη γεωμετρική κατανομή εκτιμούμε τις παραμέτρους με τη μέθοδο των ροπών

$$E(X) = \overline{x} \text{ και } Var(X) = s^2$$

$$\hat{p} = \frac{s^2}{\overline{x}}$$

Επομένως $\hat{p} = \frac{0.4104938}{0.5124458} = 0.801$ και $\hat{q} = 1 - \hat{p} = 0.199$.

Η τελευταία αναμενόμενη συχνότητα είναι μικρότερη του 5 και για να κάνουμε X^2 έλεγχο για την κατανομή ομαδοποιούμε τα τελευταία κελιά και οι νέες αναμενόμενες τιμές είναι : 1038.16, 206.54, 41.09, 10.21.

Ο X^2 έλεγχος δίνει Chi-square = 117.25, df = 2, p-value = 0 άρα η γεωμετρική κατανομή δεν προσεγγίζει την κατανομή των δεδομένων.

Για να εξετάσουμε εάν τα δεδομένα προέρχονται από την αρνητική διωνυμική κατανομή εκτιμούμε τις παραμέτρους με τη μέθοδο των ροπών

$$E(X) = \overline{x} \text{ και } Var(X) = s^2$$

$$\frac{r(1-p)}{p} = \overline{x} \text{ και } \frac{r(1-p)}{p^2} = s^2$$

$$\hat{p} = \frac{s^2}{\overline{x}} \text{ και } \hat{r} = \frac{\overline{x} \cdot p}{1-p}$$

Επομένως $\hat{p} = \frac{0.4104938}{0.5124458} = 0.801$, $\hat{q} = 1 - \hat{p} = 0.199$ και $\hat{r} = 1.6528$.

Η τελευταία αναμενόμενη συχνότητα είναι μικρότερη του 5 και για να κάνουμε X^2 έλεγχο για την κατανομή ομαδοποιούμε τα τελευταία κελιά και οι νέες αναμενόμενες τιμές είναι : 898.2, 295.35, 77.94, 24.51.

Ο X^2 έλεγχος δίνει Chi-square = 2.88, df = 1, p-value = 0.0898 άρα η αρνητική διωνυμική κατανομή προσεγγίζει ικανοποιητικά την κατανομή των δεδομένων.

Για να εξετάσουμε εάν τα δεδομένα προέρχονται από την κατανομή που προέκυψε από τη διαίρεση μιας γεωμετρικής κατανομής με μια κατανομή Poisson εκτιμούμε τις παραμέτρους με τη μέθοδο των ροπών

$$\hat{p} = 0.758 \text{ και } \hat{\lambda} = -0.0912$$

όπου $\hat{\lambda} < 0$, άρα αυτή η κατανομή δεν είναι κατάλληλη για τα δεδομένα αυτά. Αφού $\hat{\lambda} < 0$ η καλύτερη προσέγγιση που θα μπορούσαμε να πάρουμε είναι για $\hat{\lambda} = 0$, δηλαδή να καταργήσουμε την κατανομή Poisson από τον παρονομαστή του πηλίκου και να έχουμε μόνο τη γεωμετρική κατανομή που είδαμε ήδη ότι δεν προσεγγίζει ικανοποιητικά τα δεδομένα.

Για να εξετάσουμε εάν τα δεδομένα προέρχονται από την κατανομή που προέκυψε από τη διαίρεση μιας αρνητικής διωνυμικής κατανομής με μια κατανομή Poisson έχουμε (για τους εκτιμητές δείτε στην παράγραφο 2.1.3):

$$\hat{q} = 0.1368,\ \hat{r} = 4.0413 \text{ και } \hat{\lambda} = 0.2301$$

Ο X^2 έλεγχος δίνει Chi-square =3.20, df = 1, p-value = 0.0735 άρα η κατανομή που προκύπτει από τη διαίρεση μιας αρνητικής διωνυμικής κατανομής με μια Poisson προσεγγίζει επίσης ικανοποιητικά την κατανομή των δεδομένων.

2.4 Γενική Θεωρία

Οι νέες κατανομές των παραγράφων 2.1.1, 2.1.2 και 2.1.3 που δημιουργήθηκαν με τον τρόπο που αναφέραμε είναι ουσιαστικά μερική απάντηση στο παρακάτω πρόβλημα.

2.4.1 Το πρόβλημα στις διακριτές τυχαίες μεταβλητές

Στις διακριτές μας ενδιαφέρει το εξής μοντέλο

$$X_1 = X + X_2$$

όπου X_1, X_2 γνωστές τ.μ. με πιθανογεννήτριες $\Pi_1(u) = \sum_{x=0}^{\infty} p_1(x) u^x$ και $\Pi_2(u) = \sum_{x=0}^{\infty} p_2(x) u^x$ αντίστοιχα, με $p_1(x) = P(X_1 = x)$ και $p_2(x) = P(X_2 = x)$.

Εφαρμογή αυτού του μοντέλου έχουμε σε προβλήματα όπου ο συνολικός πληθυσμός που εξετάζουμε χωρίζεται σε δύο κατηγορίες. Εμείς γνωρίζουμε τη συνολική συμπεριφορά και την συμπεριφορά της μιας κατηγορίας και θέλουμε να μελετήσουμε τη συμπεριφορά της άλλης κατηγορίας

Αναζητούμε εάν υπάρχει μη αρνητική διακριτή τυχαία μεταβλητή X με πιθανογεννήτρια $\Pi(u)=\sum_{x=0}^{\infty}p(x)u^x$ όπου $p(x)=P(X=x)$ η οποία να είναι ανεξάρτητη από την τυχαία μεταβλητή X_2. Τότε :

$$\Pi_1(u)=E\left(u^{X+X_2}\right)\overset{\text{ανεξ.}}{=}\Pi(u)\cdot\Pi_2(u)$$

$$\Pi(u)=\frac{\Pi_1(u)}{\Pi_2(u)} \qquad (2.7)$$

Άρα αναζητούμε τις συνθήκες εκείνες που επιτρέπουν το πηλίκο δύο πιθανογεννητριών να είναι πιθανογεννήτρια μιας μη αρνητικής διακριτής τυχαίας μεταβλητής.

Αν πράγματι υπάρχει, τότε ισχύει ότι :

$$E(X_1) = E(X) + E(X_2) \Rightarrow$$
$$E(X) = E(X_1) - E(X_2)$$

και

$$Var(X_1)\overset{\text{ανεξ.}}{=}Var(X)+Var(X_2)\Rightarrow$$
$$Var(X) = Var(X_1) - Var(X_2).$$

Το πρόβλημα αυτό μοιάζει με το πρόβλημα που αντιμετωπίζουν σε συνεχείς τ.μ. με τεχνικές «deconvolution» (Scheinok, 1964), όπου

$$X = X_1 - X_2$$

Εδώ όμως οι τ.μ. X_1 , X_2 είναι ανεξάρτητες.
Εφαρμογή αυτού είναι σε δεδομένα περιπτώσεων ασθενειών όπως το AIDS (βλέπε Rao and Kakehashi, 2005), όπου X_1 ο χρόνος μέχρι να εκδηλωθεί το AIDS (από τη στιγμή της μόλυνσης), X_2 ο χρόνος πρώτης επίσκεψης στο Νοσοκομείο μετά από τη μόλυνση (τότε γίνεται η διάγνωση) και το X ονομάζεται χρόνος επώασης.

2.4.2 Η Περίπτωση της Γεωμετρικής Κατανομής

Θεώρημα 2 : Εάν η τ.μ. X_2 ακολουθεί γεωμετρική κατανομή, Γεωμετρική (q), τότε ικανή και αναγκαία συνθήκη για τον καλό ορισμό της τ.μ. X είναι να ισχύει για τις τιμές της παραμέτρου q ο περιορισμός :

$$\min_{x=0,1,\ldots}\left\{\frac{p_1(x+1)}{p_1(x)}\right\}\geq q\,. \qquad (2.8)$$

Απόδειξη:
Εφόσον η τ.μ. X_2 ακολουθεί γεωμετρική κατανομή με $p_2(x)=q^x p,\quad x=0,1,\ldots$ τότε $\Pi_2(u)=\left(\frac{1-qu}{1-q}\right)^{-1}$ όπου p = 1 – q. Σε αυτή την περίπτωση η (2.7) γίνεται :

$$\Pi(u) = \frac{\Pi_1(u)}{\left(\frac{1-qu}{1-q}\right)^{-1}} = \Pi_1(u)\frac{1-qu}{1-q} = \sum_{x=0}^{\infty} p_1(x)u^x\left(\frac{1-qu}{1-q}\right)$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty}\frac{p_1(x)}{1-q}u^x - \sum_{x=0}^{\infty}\frac{q}{1-q}p_1(x)u^{x+1} \qquad \Rightarrow$$

$$\sum_{x=0}^{\infty} p(x)u^x = \frac{p_1(0)}{1-q} + \sum_{x=1}^{\infty}\frac{p_1(x) - q\,p_1(x-1)}{1-q}u^x$$

Για να είναι οι σειρές ίσες για κάθε u (με $|u| \le 1$) πρέπει οι αντίστοιχοι συντελεστές να είναι ίσοι και άρα :

$$p(0) = \frac{p_1(0)}{1-q}$$

$$p(1) = \frac{p_1(1) - q\,p_1(0)}{1-q} = \frac{p_1(0)}{1-q}\left(\frac{p_1(1)}{p_1(0)} - q\right)$$

γενικά $p(x) = \frac{p_1(x-1)}{1-q}\left(\frac{p_1(x)}{p_1(x-1)} - q\right)$, για $x = 1,2,\ldots$

και επειδή οι $\Pi_1(u)$ και $\Pi_2(u)$ είναι πιθανογεννήτριες, ισχύει ότι : $\sum_{x=0}^{\infty} p(x) = \Pi(1) = \frac{\Pi_1(1)}{\Pi_2(1)} = \frac{1}{1} = 1$.

Ως εκ τούτου ικανή και αναγκαία συνθήκη για τον καλό ορισμό της τυχαίας μεταβλητής X είναι ο ακόλουθος περιορισμός για τιμές της παραμέτρου q :

$$\frac{p_1(x)}{p_1(x-1)} - q \ge 0, \quad x = 1,2,\ldots$$

ή ισοδύναμα $\frac{p_1(x+1)}{p_1(x)} - q \ge 0, \quad x = 0,1,\ldots$

Δηλαδή : $\min_{x=0,1,\ldots}\left\{\frac{p_1(x+1)}{p_1(x)}\right\} \ge q$.

Για κατανομές Δυναμοσειράς

Εάν η X_1 ακολουθεί μια κατανομή από την οικογένεια δυναμοσειράς με

$p_1(x) = P(X_1 = x) = \frac{\alpha(x)\theta^x}{A(\theta)}$, για $x = 0,1,2,\ldots$, $\theta > 0$

τότε $\frac{p_1(x+1)}{p_1(x)} = \frac{\alpha(x+1)}{\alpha(x)}\theta$

και η ικανή και αναγκαία συνθήκη (2.8) γίνεται :

$$\min_{x=0,1,\ldots} \theta \left\{ \frac{\alpha(x+1)}{\alpha(x)} \right\} \geq q$$

δηλαδή ισοδύναμα ο περιορισμός για τις παραμέτρους είναι:

$$\min_{x=0,1,\ldots} \left\{ \frac{\alpha(x+1)}{\alpha(x)} \right\} \geq \frac{q}{\theta}.$$

Ειδικές περιπτώσεις

1. Εάν η X_1 ακολουθεί την κατανομή Poisson (θ) : $\alpha(x) = \frac{1}{x!}$, $A(\theta) = e^{\theta}$ άρα

   $$\frac{\alpha(x+1)}{\alpha(x)} = \frac{1}{x+1}.$$

   Όμως η $\frac{1}{x+1}$ είναι φθίνουσα συνάρτηση με $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\alpha(x+1)}{\alpha(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x+1} = 0$ και άρα $\min\limits_{x=0,1,\ldots} \left\{ \frac{\alpha(x+1)}{\alpha(x)} \right\} = 0 \geq \frac{q}{\theta}$ δηλαδή q = 0. Επομένως δε μπορώ να έχω αυτό το πηλίκο.

2. Εάν η X_1 ακολουθεί τη Γεωμετρική κατανομή (θ) : $\alpha(x) = 1$, $A(\theta) = (1-\theta)^{-1} = \left(\frac{1}{1+p} \right)^{-1}$ άρα $\frac{\alpha(x+1)}{\alpha(x)} = 1$.

   Συνεπώς $\min\limits_{x=0,1,\ldots} \left\{ \frac{\alpha(x+1)}{\alpha(x)} \right\} = 1 \geq \frac{q}{\theta}$ και $1 \geq \theta \geq q \geq 0$.

3. Εάν η X_1 ακολουθεί τη Λογαριθμική κατανομή (θ) : $\alpha(x) = \frac{1}{x}$, $A(\theta) = -\ln(1-\theta), \quad x = 1, 2, \ldots, \quad 0 \leq \theta \leq 1$ άρα $\frac{\alpha(x+1)}{\alpha(x)} = \frac{x}{x+1}$

   Όμως η $\frac{x}{x+1}$ είναι αύξουσα συνάρτηση αφού

   $$\frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{x+1} = \frac{1 \cdot (x+1) - x \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$$

   και άρα

   $$\min_{x=1,2,\ldots} \left\{ \frac{\alpha(x+1)}{\alpha(x)} \right\} = \frac{\alpha(1+1)}{\alpha(1)} = \frac{1}{2} \geq \frac{q}{\theta}, \text{ δηλαδή } \frac{1\theta}{2} \geq \frac{}{2} \geq q.$$

Για κατανομές της οικογένειας Katz

Εάν η X_1 ακολουθεί μια κατανομή της οικογένειας Katz η ικανή και αναγκαία συνθήκη (2.8) γίνεται :

$$\min_{x=0,1,\ldots}\left\{\frac{a+bx}{1+x}\right\}\geq q$$

Για τη συνάρτηση $\frac{a+bx}{1+x}$ έχουμε :

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{a+bx}{1+x}=\frac{b\cdot(1+x)-(a+bx)\cdot 1}{(1+x)^2}=\frac{b+bx-a-bx}{(1+x)^2}=\frac{b-a}{(1+x)^2}.$$

- Εάν $b \geq a$ τότε είναι αύξουσα οπότε $\min_{x=0,1,\ldots}\left\{\frac{a+b}{1+x}x\right\}=\frac{a+b\cdot 0}{1+0}=a\geq q$.
- Εάν $b < a$ τότε είναι φθίνουσα οπότε $\min_{x=0,1,\ldots}\left\{\frac{a+bx}{1+x}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{a+bx}{1+x}=b\geq q$.

Δηλαδή $\min\{a,b\}\geq q>0$.

Ειδικές Περιπτώσεις

1. Εάν $b < 0$ με $a=\frac{np_1}{q_1}$, $b=-\frac{p_1}{q_1}$ τότε η X_1 ακολουθεί τη Διωνυμική κατανομή $\left(n=-\frac{a}{b}, p_1=\frac{b}{b-1}\right)$.
   Αφού $b < 0$ δεν προκύπτει μη αρνητική διακριτή τυχαία μεταβλητή.
2. Εάν $b = 0$ τότε η X_1 ακολουθεί την κατανομή Poisson $(\theta=a)$.
   Αφού $b = 0$ δεν προκύπτει μη αρνητική διακριτή τυχαία μεταβλητή.
3. Εάν $0 < b < 1$ με $a=kq_1$, $b=q_1$ τότε η X_1 ακολουθεί την Αρνητική Διωνυμική κατανομή $\left(k=\frac{a}{b}, q_1=b\right)$, που μετράει πλήθος αποτυχιών μέχρι k επιτυχίες.
   Προκύπτει μη αρνητική διακριτή τ.μ. :
   - εάν $b \geq a$ δηλαδή $k \leq 1$ τότε $kq_1 \geq q$
   - εάν $b < a$ δηλαδή $k > 1$ τότε $q_1 \geq q$

   Δηλαδή αν ισχύει : $\min\{kq_1,q_1\} \geq q$.

Για κατανομές της διευρυμένης οικογένειας Katz

Εάν η X_1 ακολουθεί μια κατανομή της διευρυμένης οικογένειας Katz η ικανή και αναγκαία συνθήκη (2.8) γίνεται :

$$\min_{x=0,1,\ldots}\left\{\frac{a+bx}{\gamma+x}\right\}\geq q$$

Για τη συνάρτηση $\frac{a+bx}{\gamma+x}$ έχουμε :

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{a+bx}{\gamma+x}=\frac{b\cdot(\gamma+x)-(a+bx)\cdot 1}{(\gamma+x)^2}=\frac{b\gamma+bx-a-bx}{(\gamma+x)^2}=\frac{b\gamma-a}{(\gamma+x)^2}.$$

- Εάν bγ ≥ a τότε είναι αύξουσα οπότε : $\min\limits_{x=0,1,\ldots}\left\{\frac{a+b}{\gamma+x}\right\}x=\frac{a+b\cdot 0}{\gamma+0}=\frac{a}{\gamma}\geq q$.
- Εάν b < a τότε είναι φθίνουσα οπότε : $\min\limits_{x=0,1,\ldots}\left\{\frac{a+bx}{\gamma+x}\right\}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a+bx}{\gamma+x}=b\geq q$.

Δηλαδή $\min\left\{\frac{a}{\gamma},b\right\}\geq q>0$.

Ειδική Περίπτωση

Αν a = b = 1, γ = ρ + 2 έχω την κατανομή Yule με

$$p_1(x)=\frac{\rho(\rho!)x!}{(x+\rho+1)!},\quad x=0,1,\ldots,\quad \rho>0.$$

Οπότε προκύπτει μη αρνητική διακριτή τ.μ. αν $\frac{1}{\rho+2}\geq q$.

Για κατανομές της οικογένειας Sundt and Jewell

Εάν η X_1 ακολουθεί μια κατανομή της οικογένειας Sundt and Jewell η ικανή και αναγκαία συνθήκη (2.8) γίνεται :

$$\min_{x=1,2,\ldots}\left\{\frac{a+b+ax}{1+x},\frac{p_1(1)}{p_1(0)}\right\}\geq q,$$

όπου γνωρίζουμε ότι $p_1(1)=(1-c)H'(0)$ και $p_1(0)=c+(1-c)H(0)$.

Για τη συνάρτηση $\frac{a+b+ax}{1+x}$ έχουμε :

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{a+b+ax}{1+x}=\frac{a\cdot(1+x)-(a+b+ax)\cdot 1}{(1+x)^2}=\frac{a+ax-a-b-ax}{(1+x)^2}=\frac{-b}{(1+x)^2}.$$

- Εάν b > 0 τότε είναι φθίνουσα οπότε :
  $$\min_{x=1,2,\ldots}\left\{\frac{a+b+ax}{1+x}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{a+b+ax}{1+x}=a\geq q.$$
- Εάν b < 0 τότε είναι αύξουσα οπότε :
  $$\min_{x=1,2,\ldots}\left\{\frac{a+b+ax}{1+x}\right\}=\frac{a+b+a\cdot 1}{1+1}=\frac{2a+b}{2}=a+\frac{b}{2}\geq q.$$

Τελικά η ικανή και αναγκαία συνθήκη γίνεται :
$$\min\left\{a, a+\frac{b}{2}, \frac{(1-c)H'(0)}{c+(1-c)H(0)}\right\} \geq q .$$

Ειδικές Περιπτώσεις

1. Εάν c = 0, H(0) = 0 και $H'(0) = -\frac{\theta}{\log(1-\theta)}$, $a=0$, $b=\theta$ τότε η X_1 ακολουθεί τη Λογαριθμική κατανομή (θ), 0 < θ < 1 με
$$p_1(x) = -\frac{\theta^x}{x\log(1-\theta)}, \quad x=1,2,\ldots .$$
Προκύπτει μη αρνητική διακριτή τ.μ αν $\frac{1}{2} > \frac{\theta}{2} \geq q$.
2. Η πιθανογεννήτρια της κλαδωτής ανέλιξης που θα αναπτυχθεί στην παράγραφο 4.1 μπορεί να πάρει τη μορφή
$$\frac{c^* + (1-c^*)u}{1+c^* - c^* u} = \left(1-\frac{1}{c^*}\right) + \frac{1}{c^*}\frac{1-\frac{c^*}{1+c^*}}{1-\frac{c^*}{1+c^*}u}, \quad c^* > 1 .$$
Οπότε είναι μια κατανομή της οικογένειας Sundt and Jewell για $c = 1-\frac{1}{c^*}$,
$H(0) = \frac{1}{1+c^*}$, $H'(0) = \frac{c^*}{\left(1+c^*\right)^2}$, $a = b = \frac{c^*}{1+c^*}$ και b = 0.
Προκύπτει μη αρνητική διακριτή τ.μ. αν $\min\left\{\frac{1}{c^*\left(1+c^*\right)}, \frac{c^*}{1+c^*}\right\} \geq q$,
δηλαδή αν $\frac{1}{c^*\left(1+c^*\right)} \geq q$.
3. Η πιθανογεννήτρια των απογόνων της $\nu^{\text{οστής}}$ γενιάς της παραπάνω κλαδωτής ανέλιξης είναι της ίδιας μορφής
$$\frac{\nu c^* + (1-\nu c^*)u}{1+\nu c^* - \nu c^* u} = \left(1-\frac{1}{\nu c^*}\right) + \frac{1}{\nu c^*}\frac{1-\frac{\nu c^*}{1+\nu c^*}}{1-\frac{\nu c^*}{1+\nu c^*}u}, \quad \nu c^* > 1 .$$
Οπότε είναι μια κατανομή της οικογένειας Sundt and Jewell για $c = 1-\frac{1}{\nu c^*}$, $H(0) = \frac{1}{1+\nu c^*}$, $H'(0) = \frac{\nu c^*}{\left(1+\nu c^*\right)^2}$, $a = b = \frac{\nu c^*}{1+\nu c^*}$ και b = 0.

Προκύπτει μη αρνητική διακριτή τ.μ. αν $\min\left\{\frac{1}{\nu c^{*}\left(1+\nu c^{*}\right)},\frac{\nu c^{*}}{1+\nu c^{*}}\right\}\geq q$,

δηλαδή αν $\frac{1}{\nu c^{*}\left(1+\nu c^{*}\right)}\geq q$.

2.4.3 Η Περίπτωση της Κατανομής Poisson

Πρόταση 2.6 : Εάν η τ. μ X_2 ακολουθεί κατανομή Poisson (λ), τότε ικανή συνθήκη για το ν καλό ορισμό της τ. μ Χ είναι να ισχύει για τις τιμές της παραμέτρου λ ο περιορισμός :

$$\min_{x=0,1,\dots}\left\{\frac{p_1(x+1)}{p_1(x)}\right\}\geq \lambda . \qquad (2.9)$$

Απόδειξη:
Εφόσον η τ.μ. X_2 ακολουθεί την κατανομή Poisson (λ) με $p_2(x)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^{x}}{x!}, \quad x=0,1,\dots, \quad \lambda>0$ τότε $\Pi_2(u)=\exp\{\lambda(u-1)\}$. Σε αυτή την περίπτωση η (2.7) γίνεται :

$$\Pi(u)=\frac{\Pi_1(u)}{\exp\{\lambda(u-1)\}}=\Pi_1(u)\exp\{-\lambda u\}=e^{\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}p_1(x)u^{x}\prod_{x=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^{x}}{x!}u^{x}$$

$$\sum_{x=0}^{\infty}p(x)u^{x\lambda}= e\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{x}p_1(i)\frac{(-\lambda)^{x-i}_{x}}{(x-i)!}u$$

Άρα : $p(x)=e^{\lambda}\sum_{i=0}^{x}p_1(i)\frac{(-\lambda)^{x-i}}{(x-i)!}=e^{\lambda}\frac{(-\lambda)^{x}}{x!}\sum_{i=0}^{x}\binom{x}{i}p_1(i)\frac{i!}{(-\lambda)^{i}}$.

- Αν x περιττός :

$$p(x)=e^{\lambda}\frac{\lambda^{x}}{x!}\left\{-\sum_{i=0}^{\frac{x-1}{2}}\binom{x}{2i}p_1(2i)\frac{(2i)!}{\lambda^{2i}}+\sum_{i=0}^{\frac{x-1}{2}}\binom{x}{2i+1}p_1(2i+1)\frac{(2i+1)!}{\lambda^{2i+1}}\right\}=$$

$$=e^{\lambda}\frac{\lambda^{x}}{x!}\left\{\sum_{i=0}^{\frac{x-1}{2}}\left[\binom{x}{2i+1}p_1(2i+1)\frac{(2i+1)!}{\lambda^{2i+1}}-\binom{x}{2i}p_1(2i)\frac{(2i)!}{\lambda^{2i}}\right]\right\}=$$

$$=e^{\lambda}\frac{\lambda^{x}}{x!}\left\{\sum_{i=0}^{\frac{x-1}{2}}\left[(x-2i)\frac{p_1(2i+1)}{p_1(2i)}-\lambda\right]\binom{x}{2i}\frac{(2i)!}{\lambda^{2i+1}}p_1(2i)\right\}$$

άρα μια ικανή συνθήκη είναι :

$(x-2i)\frac{p_1(2i+1)}{p_1(2i)}-\lambda\geq 0, \quad \forall i=0,1,\dots,\frac{x-1}{2},\forall x$ περιττό όμως $\left(x-2i\right)\frac{p_1\left(2i+1\right)}{p_1\left(2i\right)} \geq \frac{p_1\left(2i+1\right)}{p_1\left(2i\right)}, \quad \forall i = 0,1,\ldots,\frac{x-1}{2}.$

- Αν x άρτιος :

$$p\left(x\right)=e^{\lambda}\frac{\lambda^{x}}{x!}\left\{\sum_{i=0}^{\frac{x}{2}}\binom{x}{2i}p_1\left(2i\right)\frac{\left(2i\right)!}{\lambda^{2i}}-\sum_{i=0}^{\frac{x}{2}-1}\binom{x}{2i+1}p_1\left(2i+1\right)\frac{\left(2i+1\right)!}{\lambda^{2i+1}}\right\}=$$

$$=e^{\lambda}\frac{\lambda^{x}}{x!}\left\{\binom{x}{0}p_1\left(0\right)+\sum_{i=1}^{\frac{x}{2}}\binom{x}{2i}p_1\left(2i\right)\frac{\left(2i\right)!}{\lambda^{2i}}-\sum_{i=1}^{\frac{x}{2}}\binom{x}{2i-1}p_1\left(2i-1\right)\frac{\left(2i-1\right)!}{\lambda^{2i-1}}\right\}=$$

$$=e^{\lambda}\frac{\lambda^{x}}{x!}\left\{p_1\left(0\right)+\sum_{i=1}^{\frac{x}{2}}\left[\binom{x}{2i}p_1\left(2i\right)\frac{\left(2i\right)!}{\lambda^{2i}}-\binom{x}{2i-1}p_1\left(2i-1\right)\frac{\left(2i-1\right)!}{\lambda^{2i-1}}\right]\right\}=$$

$$=e^{\lambda}\frac{\lambda^{x}}{x!}\left\{p_1\left(0\right)+\sum_{i=1}^{\frac{x}{2}}\left[\left(x-2i+1\right)\frac{p_1\left(2i\right)}{p_1\left(2i-1\right)}-\lambda\right]\binom{x}{2i-1}\frac{\left(2i-1\right)!}{\lambda^{2i}}p_1\left(2i-1\right)\right\}$$

άρα μια ικανή συνθήκη είναι :

$\left(x+1-2i\right)\frac{p_1\left(2i\right)}{p_1\left(2i-1\right)}$ άρτιο $\lambda \geq 0, \quad \forall i = 0,1,\ldots,\frac{x}{2}, \forall x$,

όμως $\left(x+1-2i\right)\frac{p_1\left(2i\right)}{p_1\left(2i-1\right)} \geq \frac{p_1\left(2i\right)}{p_1\left(2i-1\right)}, \quad \forall i = 1,2,\ldots,\frac{x}{2}.$

Επομένως η ικανή συνθήκη είναι : $\frac{p_1\left(x\right)}{p_1\left(x-1\right)} \geq \lambda, \quad \forall x$ περιττό .

και $\frac{p_1\left(x\right)}{p_1\left(x-1\right)} \geq \lambda, \quad \forall x$ άρτιο(2)≥ .

Άρα οι ικανές και αναγκαίες συνθήκες είναι ισοδύναμες με :

$$\frac{p_1\left(x+1\right)}{p_1\left(x\right)} \geq \lambda, \quad \forall x = 0,1,\ldots,$$

◈

Αυτή η Πρόταση δεν μας προσφέρει τίποτα περισσότερο από το Θεώρημα 1 και τον περιορισμό για τον ορισμό της Geometrico-Poisson αφού, στην πραγματικότητα, μπορούμε να γράψουμε την γ.σ.π. της νέας τ.μ. ως

$$\Pi\left(u\right)=\frac{\Pi_1\left(u\right)}{\left(\frac{1-q_{*}u}{1-q_{*}}\right)^{-1}}\frac{\left(\frac{1-q_{*}u}{1-q_{*}}\right)^{-1}}{\exp\left\{\lambda\left(u-1\right)\right\}}.$$

Αναμένεται δε, να δώσει ένα αρκετά περιορισμένο παραμετρικό χώρο.

Ειδικές Περιπτώσεις

1. Η παραπάνω ικανή συνθήκη είναι αντίστοιχα αυτής που βρήκαμε στην περίπτωση της Γεωμετρικής Κατανομής και μας εξασφαλίζει τις αντίστοιχες κατανομές με ανάλογους περιορισμούς για το λ.
2. Στην περίπτωση που η μεταβλητή X_1 ακολουθεί την κατανομή Poisson(θ), δηλαδή $p_1(x) = e^{-\theta}\frac{\theta^x}{x!}, \quad x = 0,1,..., \quad \theta > 0$, η ικανή συνθήκη μας δίνει :

   $\frac{\theta}{(x+1)} \geq \lambda, \quad \forall x = 0,1,\ldots,$

   δηλαδή : $\min\limits_{x=0,1,\ldots}\left\{\frac{\theta}{x+1}\right\} \geq \lambda \quad \Rightarrow \quad 0 \geq \lambda$

   Επομένως δεν ορίζεται το μοντέλο : Poisson(θ) = X + Poisson(λ) που είναι γνωστό ότι αν θ > λ ισχύει : Poisson(θ – λ) + Poisson(λ)~ Poisson(θ). Αυτό σημαίνει ότι η ικανή συνθήκη είναι πολύ περιοριστική οδηγώντας στο να χαθούν περιπτώσεις στις οποίες ορίζεται καλώς η τ.μ. X.

Για να ξεπεραστεί η δυσκολία θα περιοριστούμε στην οικογένεια των απείρως διαιρετών κατανομών, στην οποία ανήκει και η Poisson.

Απείρως Διαιρετές Κατανομές

Θεώρημα 3 : Εάν η διακριτή τ.μ. X_1 ακολουθεί μια απείρως διαιρετή κατανομή και η τ.μ. X_2 ακολουθεί κατανομή Poisson (λ), τότε ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι η τ.μ. X απείρως διαιρετή και καλά ορισμένη είναι να ισχύει για τις τιμές της παραμέτρου λ ο περιορισμός :

$$\frac{p_1(1)}{p_1(0)} \geq \lambda \qquad (2.10).$$

Απόδειξη:

Εάν η X_1 ακολουθεί μια απείρως διαιρετή κατανομή έχουμε :

$$\Pi(u) = \frac{\exp\left\{\theta\left(\sum_{x=1}^{\infty} p_x u^x - 1\right)\right\}}{\exp\left\{\lambda(u-1)\right\}} = \exp\left\{\theta\left(\sum_{x=1}^{\infty} p_x u^x - \frac{\lambda}{\theta}u + \frac{\lambda}{\theta} - 1\right)\right\}$$

$$= \exp\left\{\theta\left[\sum_{x=2}^{\infty} p_x u^x + \left(p_1 - \frac{\lambda}{\theta}\right)u - \left(1 - \frac{\lambda}{\theta}\right)\right]\right\}$$

$$= \exp\left\{\theta\left(1 - \frac{\lambda}{\theta}\right)\left[\sum_{x=2}^{\infty} \frac{p_x}{1 - \frac{\lambda}{\theta}} u^x + \frac{p_1 - \frac{\lambda}{\theta}}{1 - \frac{\lambda}{\theta}} u - 1\right]\right\}$$

$$= \exp\left\{(\theta-\lambda)\left[\sum_{x=2}^{\infty}\frac{\theta p_x}{\theta-\lambda}u^x + \frac{\theta p_1-\lambda}{\theta-\lambda}u - 1\right]\right\}$$

Για να είναι η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής X απείρως διαιρετή, ικανή και αναγκαία συνθήκη είναι :

$$\left.\begin{array}{l}\theta-\lambda>0\\ \theta p_1-\lambda\geq 0\end{array}\right\}\Rightarrow \theta p_1 \geq \lambda \ .$$

Όμως γνωρίζουμε ότι :

$$\left.\begin{array}{l}\Pi_1(0)=p_1(0)=e^{-\theta}\\ \Pi_1'(0)=p_1(1)=\theta p_1 e^{-\theta}\end{array}\right\}\Rightarrow \theta p_1 = \frac{p_1(1)}{p_1(0)}$$

Επομένως η ικανή και αναγκαία συνθήκη γίνεται :

$$\frac{p_1(1)}{p_1(0)} \geq \lambda \ .$$

◈

Ειδικές Περιπτώσεις

1. Εάν η X_1 προέρχεται από κατανομή δυναμοσειράς και είναι απείρως διαιρετή τότε η ικανή και αναγκαία συνθήκη (2.10) παίρνει τη μορφή :

$$\frac{\alpha(1)}{\alpha(0)}\theta \geq \lambda \qquad (2.11).$$

   i) Εάν η X_1 ακολουθεί την κατανομή Poisson(θ_1) άρα $\alpha_x = \frac{1}{x!}$ και $\theta = \theta_1$, η ικανή και αναγκαία συνθήκη (2.11) γίνεται : $\theta_1 \geq \lambda$.

   ii) Εάν η X_1 ακολουθεί την κατανομή Αρνητική Διωνυμική(q,r) άρα $\alpha_x = (-1)^x\binom{-r}{x}$ και $\theta = q$, η ικανή και αναγκαία συνθήκη (2.11) γίνεται: $rq \geq \lambda$.

2. Η Αρνητική Διωνυμική κατανομή ως απείρως διαιρετή γράφεται κατ’ αυτόν τον τρόπο :

$$\left(\frac{1-q_1u}{1-q_1}\right)^{-k} = \exp\left\{-k\left[\ln(1-q_1u)-\ln(1-q_1)\right]\right\} =$$

$$= \exp\left\{k\left(-\ln(1-q_1)\right)\left[\frac{\ln(1-q_1u)}{\ln(1-q_1)}-1\right]\right\}$$

$$= \exp\left\{k\left(-\ln(1-q_1)\right)\left[\frac{-\sum_{x=1}^{\infty}\frac{q_1^{\,x}}{x}u^x}{\ln(1-q_1)}-1\right]\right\}$$

Οπότε για το πηλίκο με Poisson η ικανή και αναγκαία συνθήκη (2.10) γίνεται :

$$\frac{k\left(-\ln\left(1-q_1\right)\right)}{-\ln\left(1-q_1\right)}\frac{q_1}{1} \ge \lambda \qquad \text{ή} \qquad \frac{p_1(1)}{p_1(0)} = \frac{\binom{k+1-1}{k-1}{p_1}^k q_1}{\binom{k+0-1}{k-1}{p_1}^k} = kq_1 \ge \lambda$$

Δηλαδή τελικά : $kq_1 \ge \lambda$.

Το οποίο δίνει μεγαλύτερο δυνατό εύρος στην παράμετρο της Poisson όταν $k > 1$.

3. Μια τ.μ. X ακολουθεί την κατανομή Neyman Type A (θ_1,λ_1) εάν $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_N$, όπου η τ.μ. N ακολουθεί Poisson(θ_1) και οι τ.μ. X_i είναι ανεξάρτητες και ισόνομες Poisson(λ_1) και είναι ανεξάρτητες από την τ.μ. N.
Η πιθανογεννήτρια αυτής της κατανομής είναι η $\Pi(u) = \exp\left\{\theta_1\left(e^{\lambda_1(u-1)}-1\right)\right\}$ και η κατανομή είναι απείρως διαιρετή. Ο λόγος των πρώτων πιθανοτήτων είναι :
$$\frac{p_1(1)}{p_1(0)} = \frac{\theta_1\lambda_1 e^{-\lambda_1}\exp\left\{\theta_1\left(e^{-\lambda_1}-1\right)\right\}}{\exp\left\{\theta_1\left(e^{-\lambda_1}-1\right)\right\}} = \theta_1\lambda_1 e^{-\lambda_1}$$
Κι επομένως η ικανή και αναγκαία συνθήκη (2.10) γίνεται : $\theta_1\lambda_1 e^{-\lambda_1} \ge \lambda$.

4. Μια τ.μ. X ακολουθεί την κατανομή Short $(\theta_1,\lambda_1,\varphi)$ εάν μπορεί να γραφεί $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_{N_1} + N_2$, όπου η τ.μ. N_1 ακολουθεί την κατανομή Poisson(θ_1), οι τ.μ. X_i είναι ισόνομες και ακολουθούν την κατανομή Poisson(λ_1) και η τ.μ. N_2 ακολουθεί την κατανομή Poisson(φ).
Η πιθανογεννήτρια αυτής της κατανομής είναι η $\Pi(u) = \exp\left\{\theta_1\left(e^{\lambda_1(u-1)}-1\right)+\varphi(u-1)\right\}$ και η κατανομή είναι απείρως διαιρετή. Ο λόγος των πρώτων πιθανοτήτων είναι :
$$\frac{p_1(1)}{p_1(0)} = \frac{\left(\theta_1\lambda_1 e^{-\lambda_1}+\varphi\right)\exp\left\{\theta_1\left(e^{-\lambda_1}-1\right)-\varphi\right\}}{\exp\left\{\theta_1\left(e^{-\lambda_1}-1\right)-\varphi\right\}} = \theta_1\lambda_1 e^{-\lambda_1}+\varphi$$
Κι επομένως η ικανή και αναγκαία συνθήκη (2.10) γίνεται : $\theta_1\lambda_1 e^{-\lambda_1}+\varphi \ge \lambda$.

Κεφάλαιο 3ο

Διδιάστατες κατανομές με πιθανογεννήτρια το πηλίκο δύο πιθανογεννητριών

Στο κεφάλαιο αυτό βρίσκουμε ικανές συνθήκες για να ορίζονται οι διδιάστατες τ.μ. με γ.σ.π. το πηλίκο της γ.σ.π.

- μιας διδιάστατης αρνητικής διωνυμικής προς μια διδιάστατη γεωμετρική
- μιας διδιάστατης αρνητικής διωνυμικής προς μια διδιάστατη Poisson

και εξετάζουμε διάφορα χαρακτηριστικά και ιδιότητες αυτών των τ.μ..

3.1 Το πρόβλημα στις δύο διαστάσεις

Έστω (X_1, Y_1) και (X_2, Y_2) δύο γνωστές διδιάστατες τυχαίες μεταβλητές με πιθανογεννήτριες $\Pi_1(u,v)$ και $\Pi_2(u,v)$ αντίστοιχα. Εξετάζουμε αν και υπό ποιες συνθήκες το πηλίκο των δύο πιθανογεννητριών είναι πιθανογεννήτρια μιας διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής.

$$\frac{\Pi_1(u,v)}{\Pi_2(u,v)} = \Pi(u,v) \Leftrightarrow \qquad (3.1)$$

$$\Pi_1(u,v) = \Pi(u,v)\Pi_2(u,v)$$

Δηλαδή, ελέγχουμε αν υπάρχει διδιάστατη τυχαία μεταβλητή (X, Y), ανεξάρτητη της (X_2, Y_2), τέτοια ώστε :

$$X_1 = X + X_2$$
$$Y_1 = Y + Y_2$$

Αν πράγματι υπάρχει, τότε προφανώς:

$$E(Z_1) = E(Z) + E(Z_2) \Leftrightarrow$$
$$E(Z) = E(Z_1) - E(Z_2)$$

και

$$Var(Z_1) = Var(Z) + Var(Z_2) \Leftrightarrow$$
$$Var(Z) = Var(Z_1) - Var(Z_2)$$

για $Z = X, Y$.

3.2 Προσδιορισμός της συνάρτησης πιθανότητας

Αν $\Pi_1(u,v) = \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} a_{ij}u^i v^j$, $\Pi_2(u,v) = \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} b_{ij}u^i v^j$ και $\Pi(u,v) = \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} d_{ij}u^i v^j$

τότε :

$$\frac{\Pi_1(u,v)}{\Pi_2(u,v)} = \Pi(u,v) \Leftrightarrow \qquad (3.1)$$

$$\Pi_1(u,v) = \Pi_2(u,v)\Pi(u,v) \Leftrightarrow$$

$$\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} a_{ij}u^i v^j = \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} b_{ij}u^i v^j \cdot \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} d_{ij}u^i v^j \Leftrightarrow$$

$$\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} a_{ij}u^i v^j = \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{x=0}^{i}\sum_{y=0}^{j} d_{ij}b_{i-x,j-y}u^i v^j \Leftrightarrow$$

Από όπου συμπεραίνουμε ότι :

$$a_{ij} = \sum_{x=0}^{i}\sum_{y=0}^{j} d_{ij}b_{i-x,j-y} \Leftrightarrow$$

$$a_{ij} = d_{ij}b_{00} + \sum_{y=0}^{j-1} d_{iy}b_{0,j-y} + \sum_{x=0}^{i-1} d_{xj}b_{i-x,0} + \sum_{x=0}^{i-1}\sum_{y=0}^{j-1} d_{ij}b_{i-x,j-y} \Leftrightarrow$$

$$d_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{y=0}^{j-1} d_{iy}b_{0,j-y} - \sum_{x=0}^{i-1} d_{xj}b_{i-x,0} - \sum_{x=0}^{i-1}\sum_{y=0}^{j-1} d_{ij}b_{i-x,j-y}}{b_{00}}$$

κι επειδή $b_{00} = 1$ τα d_{ij} δίνονται τελικά από τον αναγωγικό τύπο :

$$d_{ij} = a_{ij} - \sum_{y=0}^{j-1} d_{iy}b_{0,j-y} - \sum_{x=0}^{i-1} d_{xj}b_{i-x,0} - \sum_{x=0}^{i-1}\sum_{y=0}^{j-1} d_{ij}b_{i-x,j-y}\,.$$

Στην περίπτωση που οι μεταβλητές X_2 και Y_2 είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους έχουμε ότι :

$$\Pi_2(u,v) = \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} b_{ij}u^i v^j = \sum_{i=0}^{+\infty} {b^X}_i u^i \cdot \sum_{j=0}^{+\infty} {b^Y}_j v^j = \left(1 + \sum_{i=1}^{+\infty} {b^X}_i u^i\right)\left(1 + \sum_{j=1}^{+\infty} {b^Y}_j v^j\right)$$

Οπότε ο τύπος (3.1) γίνεται :

$$\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} a_{ij}u^i v^j = \left(1 + \sum_{i=1}^{+\infty} {b^X}_i u^i\right)\left(1 + \sum_{j=1}^{+\infty} {b^Y}_j v^j\right) \cdot \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} d_{ij}u^i v^j$$

$$1 + \sum_{i=1}^{+\infty} a_{i0}u^i + \sum_{j=1}^{+\infty} a_{0j}v^j + \sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty} a_{ij}u^i v^j = \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} d_{ij}u^i v^j + \sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{i} {b^X}_k d_{i-k,j}u^i v^j +$$

$$+ \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{j} {b^Y}_k d_{i,j-k}u^i v^j + \sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty}\sum_{k_1=1}^{i}\sum_{k_2=1}^{j} {b^X}_{k_1}{b^Y}_{k_2} d_{i-k_1,j-k_2}u^i v^j$$

Για να είναι οι δυναμοσειρές ίσες για κάθε u και v, πρέπει οι αντίστοιχοι συντελεστές να είναι ίσοι, άρα :

- $d_{oo} = 1$
- $a_{i0} = d_{i0} + \sum_{k=1}^{i} {b^X}_k d_{i-k,0} \Leftrightarrow d_{i0} = a_{i0} - \sum_{k=1}^{i} {b^X}_k d_{i-k,0}$
- $a_{0j} = d_{0j} + \sum_{k=1}^{j} {b^Y}_k d_{0,j-k} \Leftrightarrow d_{0j} = a_{0j} - \sum_{k=1}^{j} {b^Y}_k d_{0,j-k}$
- $a_{ij} = d_{ij} + \sum_{k=1}^{i} {b^X}_k d_{i-k,j} + \sum_{k=1}^{j} {b^Y}_k d_{i,j-k} + \sum_{k_1=1}^{i}\sum_{k_2=1}^{j} {b^X}_{k_1}{b^Y}_{k_2} d_{i-k_1,j-k_2} \Leftrightarrow$

  $d_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i} {b^X}_k d_{i-k,j} - \sum_{k=1}^{j} {b^Y}_k d_{i,j-k} - \sum_{k_1=1}^{i}\sum_{k_2=1}^{j} {b^X}_{k_1}{b^Y}_{k_2} d_{i-k_1,j-k_2}$

Φυσικά θέλουμε τα $d_{ij} \geq 0$ για κάθε i, j = 1, 2, 3, … απ' όπου προκύπτουν και οι περιορισμοί μας.

Αναγωγικές σχέσεις για τις πιθανότητες

Αρχικά πήραμε τη σχέση $\frac{\Pi_1(u,v)}{\Pi_2(u,v)} = \Pi(u,v)$ (3.3) από την οποία έχουμε :

$$\Pi_1(u,v) = \Pi(u,v) \cdot \Pi_2(u,v)$$

Παραγωγίζοντας τη σχέση αυτή ως προς u παίρνουμε

$$\frac{\partial}{\partial u}\Pi_1(u,v) = \frac{\partial}{\partial u}\left[\Pi(u,v) \cdot \Pi_2(u,v)\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\Pi_1(u,v) = \frac{\partial}{\partial u}\Pi(u,v) \cdot \Pi_2(u,v) + \frac{\partial}{\partial u}\Pi_2(u,v) \cdot \Pi(u,v)$$

Από τη σχέση αυτή παίρνουμε τις αναγωγικές σχέσεις για τις πιθανότητες αφού η $p_{x,y}$ είναι ο συντελεστής του όρου $u^x v^y$ στο ανάπτυγμα της γ.σ.π. Π(u , v).

3.3 Περιθώριες Κατανομές

Για τις πιθανογεννήτριες των περιθώριων κατανομών μιας διδιάστατης κατανομής γνωρίζουμε ότι :

$$\Pi_X(u) = \Pi(u,1) = \frac{\Pi_1(u,1)}{\Pi_2(u,1)} = \frac{\Pi_X^1(u)}{\Pi_X^2(u)}.$$

Άρα οι περιθώριες στα διδιάστατα μοντέλα είναι τα ανάλογα μονοδιάστατα μοντέλα που έχουν γ.σ.π. πηλίκο από γνωστές γ.σ.π..

3.4 Δεσμευμένες κατανομές

Αναγωγικές σχέσεις για τις πιθανογεννήτριες των δεσμευμένων κατανομών

Από τη γνωστή σχέση $\frac{\Pi_1(u,v)}{\Pi_2(u,v)} = \Pi(u,v)$ έχουμε $\Pi_1(u,v) = \Pi(u,v) \cdot \Pi_2(u,v)$.

Παραγωγίζουμε τη σχέση αυτή y φορές ως προς v και έχουμε

$\frac{\partial^y}{\partial v^y}\Pi_1(u,v) = \frac{\partial^y}{\partial v^y}\left[\Pi(u,v) \cdot \Pi_2(u,v)\right]$ και από τον τύπο του Leibniz παίρνουμε

$$\frac{\partial^y}{\partial v^y}\Pi_1(u,v)=\sum_{i=0}^{y}\binom{y}{i}\frac{\partial^i}{\partial v^i}\Pi(u,v)\frac{\partial^{y-i}}{\partial v^{y-i}}\Pi_2(u,v)$$

Η σχέση αυτή για v = 0 γίνεται :

$$\frac{\partial^y}{\partial v^y}\Pi_1(u,0)=\sum_{i=0}^{y}\binom{y}{i}\frac{\partial^i}{\partial v^i}\Pi(u,0)\frac{\partial^{y-i}}{\partial v^{y-i}}\Pi_2(u,0)$$

Και για v = 0 και u = 1 είναι :

$$\frac{\partial^y}{\partial v^y}\Pi_1(1,0)=\sum_{i=0}^{y}\binom{y}{i}\frac{\partial^i}{\partial v^i}\Pi(1,0)\frac{\partial^{y-i}}{\partial v^{y-i}}\Pi_2(1,0).$$

Διαιρώντας τις παραπάνω σχέσεις κατά μέλη :

$$\frac{\frac{\partial^y}{\partial v^y}\Pi_1(u,0)}{\frac{\partial^y}{\partial v^y}\Pi_1(1,0)}=\frac{\sum_{i=0}^{y}\binom{y}{i}\frac{\partial^i}{\partial v^i}\Pi(u,0)\frac{\partial^{y-i}}{\partial v^{y-i}}\Pi_2(u,0)}{\sum_{i=0}^{y}\binom{y}{i}\frac{\partial^i}{\partial v^i}\Pi(1,0)\frac{\partial^{y-i}}{\partial v^{y-i}}\Pi_2(1,0)}$$

$$\Pi^1_{X|Y=y}(u)=\frac{\sum_{i=0}^{y}\binom{y}{i}\frac{\partial^i}{\partial v^i}\Pi(1,0)\Pi_{X|Y=i}(u)\frac{\partial^{y-i}}{\partial v^{y-i}}\Pi_2(1,0)\Pi^2_{X|Y=y-i}(u)}{\sum_{i=0}^{y}\binom{y}{i}\frac{\partial^i}{\partial v^i}\Pi(1,0)\frac{\partial^{y-i}}{\partial v^{y-i}}\Pi_2(1,0)}$$

Η σχέση αυτή για y = 0 γίνεται :

$$\Pi^1_{X|Y=0}(u)=\Pi_{X|Y=0}(u)\Pi^2_{X|Y=0}(u)$$

δηλαδή $\Pi_{X|Y=0}(u)=\dfrac{\Pi^1_{X|Y=0}(u)}{\Pi^2_{X|Y=0}(u)}$.

Θέτουμε $\alpha_i=\dfrac{\binom{y}{i}\frac{\partial^i}{\partial v^i}\Pi(1,0)\frac{\partial^{y-i}}{\partial v^{y-i}}\Pi_2(1,0)}{\sum_{i=0}^{y}\binom{y}{i}\frac{\partial^i}{\partial v^i}\Pi(1,0)\frac{\partial^{y-i}}{\partial v^{y-i}}\Pi_2(1,0)}$ οπότε η παραπάνω σχέση γίνεται :

$$\Pi^1_{X|Y=y}(u)=\sum_{i=0}^{y}\alpha_i\Pi_{X|Y=i}(u)\Pi^2_{X|Y=y-i}(u)$$

$$\Pi^1_{X|Y=y}(u)=\sum_{i=0}^{y-1}\alpha_i\Pi_{X|Y=i}(u)\Pi^2_{X|Y=y-i}(u)+\alpha_y\Pi_{X|Y=y}(u)\Pi^2_{X|Y=0}(u)$$

$$\Pi_{X|Y=y}(u)=\frac{1}{\alpha_y}\frac{\Pi^1_{X|Y=y}(u)}{\Pi^2_{X|Y=0}(u)}-\sum_{i=0}^{y-1}\frac{\alpha_i}{\alpha_y}\Pi_{X|Y=i}(u)\frac{\Pi^2_{X|Y=y-i}(u)}{\Pi^2_{X|Y=0}(u)}$$

Προφανώς $\sum_{i=0}^{y}\alpha_i=1$

$$\sum_{i=0}^{y-1}\alpha_i+\alpha_y=1$$

$$\sum_{i=0}^{y-1}\frac{\alpha_i}{\alpha_y}+1=\frac{1}{\alpha_y}$$

$$\frac{1}{\alpha_y}-\sum_{i=0}^{y-1}\frac{\alpha_i}{\alpha_y}=1$$

Που σημαίνει ότι η $\Pi_{X|Y=y}(u)$ είναι μια αρνητική μίξη κατανομών αν ορίζονται οι κατανομές $\frac{\Pi^1_{X|Y=y}(u)}{\Pi^2_{X|Y=0}(u)}$ και $\frac{\Pi^2_{X|Y=y-i}(u)}{\Pi^2_{X|Y=0}(u)}$ καθώς και η $\frac{\Pi^1_{X|Y=0}(u)}{\Pi^2_{X|Y=0}(u)}$.

Επίσης

$$\alpha_i=\frac{\frac{y!}{\cancel{i!}\,\cancel{(y-i)!}}\cancel{i!}P(Y=i)\cancel{(y-i)!}P(Y_2=y-i)}{\sum_{i=0}^{y}\frac{y!}{\cancel{i!}\,\cancel{(y-i)!}}\cancel{i!}P(Y=i)\cancel{(y-i)!}P(Y_2=y-i)}=\frac{P(Y=i)P(Y_2=y-i)}{\sum_{i=0}^{y}P(Y=i)P(Y_2=y-i)}$$

Λόγω της ανεξαρτησίας των Y και Y_2 η παραπάνω σχέση είναι ισοδύναμη με

$$\alpha_i=\frac{P(Y=i)P(Y_2=y-i)}{P(Y_1=y)}$$

Άρα $\frac{\alpha_i}{\alpha_y}=\frac{P(Y=i)P(Y_2=y-i)}{P(Y=y)P(Y_2=0)}$

Επομένως τελικά ο αναγωγικός τύπος για τις πιθανογεννήτριες των δεσμευμένων κατανομών έχει τη μορφή :

$$\Pi_{X|Y=y}(u)=\frac{P(Y_1=y)}{P(Y=y)P(Y_2=0)}\frac{\Pi^1_{X|Y=y}(u)}{\Pi^2_{X|Y=0}(u)}-\sum_{i=0}^{y-1}\frac{P(Y=i)P(Y_2=y-i)}{P(Y=y)P(Y_2=0)}\Pi_{X|Y=i}(u)\frac{\Pi^2_{X|Y=y-i}(u)}{\Pi^2_{X|Y=0}(u)}$$

Αναλυτικές σχέσεις για τις πιθανογεννήτριες των δεσμευμένων κατανομών

Από το γνωστό τύπο για τις δεσμευμένες κατανομές (Kocherlakota and Kocherlakota, 1992) έχουμε ότι

$$\Pi_{X|Y=y}(u)=\frac{\left.\frac{\partial^y}{\partial v^y}\Pi(u,v)\right|_{v=0}}{\left.\frac{\partial^y}{\partial v^y}\Pi(u,v)\right|_{u=1,v=0}}$$

όπου $\frac{\partial^y}{\partial v^y}\Pi(u,v)=\sum_{r=0}^{+\infty}\sum_{s=y}^{+\infty}s(s-1)\cdots(s-y+1)p_{r,s}u^r v^{s-y}$.

Οπότε $\left.\frac{\partial^y}{\partial v^y}\Pi(u,v)\right|_{v=0}=\sum_{r=0}^{+\infty}y!p_{r,y}u^r=y!\sum_{r=0}^{+\infty}p_{r,y}u^r$

και $\left.\frac{\partial^y}{\partial v^y}\Pi(u,v)\right|_{u=1,v=0} = y!\sum_{r=0}^{+\infty} p_{r,y} = y!P_Y(y)$.

Στην περίπτωσή μας που έχουμε ότι $\frac{\Pi_1(u,v)}{\Pi_2(u,v)} = \Pi(u,v)$ τη σχέση αυτή μπορούμε να τη γράψουμε ως εξής :

$\Pi(u,v) = \Pi_1(u,v)\Pi_2^*(u,v)$,

όπου η $\Pi_2^*(u , v)$ δεν είναι βέβαια πιθανογεννήτρια κάποιας κατανομής αλλά μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι κανόνες παραγώγισης και αντίστοιχα αναπτύγματα τα οποία είναι γνωστά.

Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Leibniz

$$\frac{\partial^y}{\partial v^y}\Pi(u,v) = \sum_{i=0}^{y}\binom{y}{i}\frac{\partial^i}{\partial v^i}\Pi_1(u,v)\frac{\partial^{y-i}}{\partial v^{y-i}}\Pi_2^*(u,v) =$$

$$= \sum_{i=0}^{y}\binom{y}{i}\frac{\partial^i}{\partial v^i}\Pi_1(1,v)\frac{\partial^{y-i}}{\partial v^{y-i}}\Pi_2^*(1,v)\frac{\frac{\partial^i}{\partial v^i}\Pi_1(u,v)}{\frac{\partial^i}{\partial v^i}\Pi_1(1,v)}\frac{\frac{\partial^{y-i}}{\partial v^{y-i}}\Pi_2^*(u,v)}{\frac{\partial^{y-i}}{\partial v^{y-i}}\Pi_2^*(1,v)}$$

Η σχέση αυτή για v = 0 γίνεται :

$$\frac{\partial^y}{\partial v^y}\Pi(u,0) = \sum_{i=0}^{y}\binom{y}{i}\frac{\partial^i}{\partial v^i}\Pi_1(1,0)\frac{\partial^{y-i}}{\partial v^{y-i}}\Pi_2^*(1,0)\frac{\frac{\partial^i}{\partial v^i}\Pi_1(u,0)}{\frac{\partial^i}{\partial v^i}\Pi_1(1,0)}\frac{\frac{\partial^{y-i}}{\partial v^{y-i}}\Pi_2^*(u,0)}{\frac{\partial^{y-i}}{\partial v^{y-i}}\Pi_2^*(1,0)} =$$

$$= \sum_{i=0}^{y}\binom{y}{i}\frac{\partial^i}{\partial v^i}\Pi_1(1,0)\frac{\partial^{y-i}}{\partial v^{y-i}}\Pi_2^*(1,0)\Pi^1_{X|Y=i}(u)\Pi^{2*}_{X|Y=y-i}(u).$$

Και για v = 0 και u = 1 είναι :

$$\frac{\partial^y}{\partial v^y}\Pi(1,0) = \sum_{i=0}^{y}\binom{y}{i}\frac{\partial^i}{\partial v^i}\Pi_1(1,0)\frac{\partial^{y-i}}{\partial v^{y-i}}\Pi_2^*(1,0).$$

Διαιρώντας τις παραπάνω σχέσεις κατά μέλη :

$$\frac{\frac{\partial^y}{\partial v^y}\Pi(u,0)}{\frac{\partial^y}{\partial v^y}\Pi(1,0)} = \frac{\sum_{i=0}^{y}\binom{y}{i}\frac{\partial^i}{\partial v^i}\Pi_1(1,0)\frac{\partial^{y-i}}{\partial v^{y-i}}\Pi_2^*(1,0)\Pi^1_{X|Y=i}(u)\Pi^{2*}_{X|Y=y-i}(u)}{\sum_{i=0}^{y}\binom{y}{i}\frac{\partial^i}{\partial v^i}\Pi_1(1,0)\frac{\partial^{y-i}}{\partial v^{y-i}}\Pi_2^*(1,0)}$$

$$\Pi_{X|Y=y}(u) = \frac{\sum_{i=0}^{y}\binom{y}{i}\frac{\partial^i}{\partial v^i}\Pi_1(1,0)\frac{\partial^{y-i}}{\partial v^{y-i}}\Pi_2^*(1,0)\Pi^1_{X|Y=i}(u)\Pi^{2*}_{X|Y=y-i}(u)}{\sum_{i=0}^{y}\binom{y}{i}\frac{\partial^i}{\partial v^i}\Pi_1(1,0)\frac{\partial^{y-i}}{\partial v^{y-i}}\Pi_2^*(1,0)} =$$

$$= \sum_{i=0}^{y}\alpha_i^y\Pi^1_{X|Y=i}(u)\Pi^{2*}_{X|Y=y-i}(u)$$

όπου έχουμε θέσει $\alpha_i^y = \dfrac{\binom{y}{i}\frac{\partial^i}{\partial v^i}\Pi_1(1,0)\frac{\partial^{y-i}}{\partial v^{y-i}}\Pi_2^*(1,0)}{\sum_{i=0}^{y}\binom{y}{i}\frac{\partial^i}{\partial v^i}\Pi_1(1,0)\frac{\partial^{y-i}}{\partial v^{y-i}}\Pi_2^*(1,0)}$.

3.5 Παραδείγματα Νέων Κατανομών

3.5.1 Πηλίκο Διδ. Αρνητική Διωνυμική (q_1,q_2,k) με Διδ. Poisson (λ_1,λ_2,λ_3)

Προσδιορισμός των περιορισμών

Στην περίπτωση αυτή έχουμε :

$\Pi_1(u,v) = (1-q_1-q_2)^k(1-q_1u-q_2v)^{-k}$ και

$\Pi_2(u,v) = \exp\{\lambda_1(u-1)+\lambda_2(v-1)+\lambda_3(uv-1)\}$,

με δεσμευμένες :

$\Pi^1_{X|Y=y}(u) = (1-q_1)^{k+y}(1-q_1u)^{-(k+y)}$ και

$\Pi^2_{X|Y=y}(u) = \exp\{\lambda_1(u-1)\}\left\{\dfrac{\lambda_2+\lambda_3u}{\lambda_2+\lambda_3}\right\}^y$

και περιθώριες :

$\Pi^1_Y(v) = \left(\dfrac{1-q_1-q_2}{1-q_1}\right)^k\left(1-\dfrac{q_2}{1-q_1}v\right)^{-k}$ και

$\Pi^2_Y(v) = \exp\{(\lambda_2+\lambda_3)(v-1)\}$ αντίστοιχα.

Οπότε $P(Y_1 = y) = \binom{k+y-1}{k-1}\left(\dfrac{1-q_1-q_2}{1-q_1}\right)^k\left(\dfrac{q_2}{1-q_1}\right)^y$ και

$P(Y_2 = y-i) = e^{-(\lambda_2+\lambda_3)}\dfrac{(\lambda_2+\lambda_3)^{y-i}}{(y-i)!}$.

Προφανώς $\Pi^2_{X|Y=0}(u) = \exp\{\lambda_1(u-1)\}$, οπότε έχουμε :

$$\frac{\Pi^2_{X|Y=y-i}(u)}{\Pi^2_{X|Y=0}(u)}=\frac{\exp\{\lambda_1(u-1)\}\left\{\dfrac{\lambda_2+\lambda_3 u}{\lambda_2+\lambda_3}\right\}^{y-i}}{\exp\{\lambda_1(u-1)\}}=\left\{\frac{\lambda_2+\lambda_3 u}{\lambda_2+\lambda_3}\right\}^{y-i}$$

η οποία είναι μια Διωνυμική$\left(y-i,\dfrac{\lambda_3}{\lambda_2+\lambda_3}\right)$,

$$\frac{\Pi^1_{X|Y=y}(u)}{\Pi^2_{X|Y=0}(u)}=\frac{(1-q_1)^{k+y}(1-q_1u)^{-(k+y)}}{\exp\{\lambda_1(u-1)\}}$$

η οποία, όπως είδαμε στην παράγραφο 2.1.3, ορίζεται για (k + y) $q_1 > \lambda_1$ για $y \geq 1$.

$$\frac{\Pi^1_{X|Y=0}(u)}{\Pi^2_{X|Y=0}(u)}=\frac{(1-q_1)^{k}(1-q_1u)^{-k}}{\exp\{\lambda_1(u-1)\}}$$

η οποία, όπως είδαμε, ορίζεται για $kq_1 > \lambda_1$.
Αντίστοιχοι περιορισμοί προκύπτουν και από την προσπάθεια ορισμού της άλλης δεσμευμένης κατανομής.

Επομένως οι περιορισμοί για να ορίζονται οι δεσμευμένες κατανομές είναι :
$kq_1 > \lambda_1$ και $kq_2 > \lambda_2$.

Η μία περιθώρια κατανομή είναι η

$$\Pi_Y(v)=\frac{\left(1-\dfrac{q_2}{1-q_1}\right)^{k}\left(1-\dfrac{q_2}{1-q_1}v\right)^{-k}}{\exp\{(\lambda_2+\lambda_3)(v-1)\}}$$

η οποία, σύμφωνα με αυτά που είδαμε στην παράγραφο 2.1.3, ορίζεται για : $k\dfrac{q_2}{1-q_1} > \lambda_2+\lambda_3$.

Αντίστοιχους περιορισμούς θα έχουμε και από την άλλη περιθώρια.

Συνολικά όλοι οι περιορισμοί είναι :

$kq_1 > \lambda_1$ και $kq_2 > \lambda_2$ και $k\dfrac{q_1}{1-q_2} > \lambda_1+\lambda_3$ και $k\dfrac{q_2}{1-q_1} > \lambda_2+\lambda_3$.

Απ' όπου έχουμε ότι είναι αναγκαίο να ισχύουν οι περιορισμοί :

$kq_1 > \lambda_1$ και $kq_2 > \lambda_2$ και $\lambda_3 < \min\left\{k\dfrac{q_1}{1-q_2}-\lambda_1, k\dfrac{q_2}{1-q_1}-\lambda_2\right\}$.

Δηλαδή, πιο περιοριστικά:

$kq_1 > \lambda_1$ και $kq_2 > \lambda_2$ και $\lambda_3 < \min\left\{k\dfrac{q_1}{1-q_2}-kq_1, k\dfrac{q_2}{1-q_1}-kq_2\right\}$.

και τελικά

$kq_1 > \lambda_1$ και $kq_2 > \lambda_2$ και $\lambda_3 < \min\left\{\dfrac{kq_1q_2}{1-q_2},\dfrac{kq_1q_2}{1-q_1}\right\}=\dfrac{kq_1q_2}{1-\min\{q_1,q_2\}}$.

Αναγωγικές σχέσεις για τις πιθανότητες

Όπως είδαμε στην παράγραφο 3.4 από τη γνωστή σχέση $\frac{\Pi_1(u,v)}{\Pi_2(u,v)}=\Pi(u,v)$

έχουμε $\Pi_1(u,v)=\Pi(u,v)\cdot\Pi_2(u,v)$

όπου φυσικά $\Pi_1(u,v)=\left(1-q_1-q_2\right)^k\left(1-q_1u-q_2v\right)^{-k}$

και $\Pi_2(u,v)=\exp\left\{\lambda_1(u-1)+\lambda_2(v-1)+\lambda_3(uv-1)\right\}$.

Παραγωγίζουμε τη σχέση αυτή ως προς v και παίρνουμε

$$\frac{\partial}{\partial u}\Pi_1(u,v)=\frac{\partial}{\partial u}\Pi(u,v)\cdot\Pi_2(u,v)+\Pi(u,v)\cdot\frac{\partial}{\partial u}\Pi_2(u,v)$$

$$\frac{q_1k}{1-q_1u-q_2v}\Pi_1(u,v)=\frac{\partial}{\partial u}\Pi(u,v)\cdot\Pi_2(u,v)+\Pi(u,v)\cdot\left(\lambda_1+\lambda_3v\right)\Pi_2(u,v)$$

$$\frac{q_1k}{1-q_1u-q_2v}\frac{\Pi_1(u,v)}{\Pi_2(u,v)}=\frac{\partial}{\partial u}\Pi(u,v)+\Pi(u,v)\cdot\left(\lambda_1+\lambda_3v\right)$$

$$\frac{q_1k}{1-q_1u-q_2v}\Pi(u,v)=\frac{\partial}{\partial u}\Pi(u,v)+\Pi(u,v)\cdot\left(\lambda_1+\lambda_3v\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\Pi(u,v)=\Pi(u,v)\cdot\left(\lambda_1+\lambda_3v\right)-\frac{q_1k}{1-q_1u-q_2v}\Pi(u,v)$$

$$\left(1-q_1u-q_2v\right)\frac{\partial}{\partial u}\Pi(u,v)=-\left(\lambda_1+\lambda_3v\right)\cdot\left(1-q_1u-q_2v\right)\Pi(u,v)+q_1k\Pi(u,v)$$

$$\left(1-q_1u-q_2v\right)\frac{\partial}{\partial u}\Pi(u,v)=\left[q_1k-\left(\lambda_1+\lambda_3v\right)\left(1-q_1u-q_2v\right)\right]\Pi(u,v)$$

$$\left(1-q_1u-q_2v\right)\frac{\partial}{\partial u}\Pi(u,v)=\left[\left(q_1k-\lambda_1\right)+\lambda_1q_1u+\left(\lambda_1q_2-\lambda_3\right)v+\lambda_3q_1uv+\lambda_3q_2v^2\right]\Pi(u,v)$$

Απ' όπου έχουμε για τις πιθανότητες :

$$\left(x+1\right)p_{x+1,y}-q_1xp_{x,y}-q_2\left(x+1\right)p_{x+1,y-1}=\left(kq_1-\lambda_1\right)p_{x,y}+\lambda_1q_1p_{x-1,y}+$$
$$+\left(\lambda_1q_2-\lambda_3\right)p_{x,y-1}+\lambda_3q_1p_{x-1,y-1}+\lambda_3q_2p_{x,y-2}$$

Άρα για $x\geq 1$ και $y\geq 2$:

$$\left(x+1\right)p_{x+1,y}=q_2\left(x+1\right)p_{x+1,y-1}+\left[q_1\left(k+x\right)-\lambda_1\right]p_{x,y}+\left(\lambda_1q_2-\lambda_3\right)p_{x,y-1}+$$
$$+\lambda_3q_2p_{x,y-2}+\lambda_1q_1p_{x-1,y}+\lambda_3q_1p_{x-1,y-1}$$

με $\left(x+1\right)p_{x+1,0}=\left[q_1\left(k+x\right)-\lambda_1\right]p_{x,0}+\lambda_1q_1p_{x-1,0}$

και $p_{1,0}=\left(q_1k-\lambda_1\right)p_{0,0}$

$$p_{0,0}=\frac{\left(1-q_1-q_2\right)^k}{\exp\left\{-\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3\right\}}$$

Αναλυτικές σχέσεις για τις πιθανότητες

Από τις σχέσεις της παραγράφου 3.2 έχουμε

$$\Pi(u,v)=\Pi_1(u,v)\Pi_2^*(u,v)$$

Όπου στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι

$$\Pi_1(u,v)=\sum_{x=0}^{+\infty}\sum_{y=0}^{+\infty}q^r\frac{\Gamma(r+x+y)}{\Gamma(r)x!y!}q_1^x q_2^y u^x v^y$$ όπου έχουμε θέσει $q=1-q_1-q_2$ και

$$\Pi_2^*(u,v)=\frac{1}{\Pi_2(u,v)}=\frac{1}{\exp\{\lambda_1(u-1)+\lambda_2(v-1)+\lambda_3(uv-1)\}}=$$

$$=\exp\{-\lambda_1(u-1)-\lambda_2(v-1)-\lambda_3(uv-1)\}=$$

$$=\sum_{x=0}^{+\infty}\sum_{y=0}^{+\infty}e^{-(-\lambda_1)}\frac{(-\lambda_1)^x}{x!}e^{-(-\lambda_2)}\frac{(-\lambda_2)^y}{y!}e^{-(-\lambda_3)}\cdot\sum_{i=0}^{\min(x,y)}\binom{x}{i}\binom{y}{i}i!\left[\frac{-\lambda_3}{(-\lambda_1)(-\lambda_2)}\right]^i\cdot u^x v^y$$

Άρα

$$p_{xy}=\sum_{i=0}^{x}\sum_{j=0}^{y}q^r\frac{\Gamma(r+x-i+y-j)}{\Gamma(r)(x-i)!(y-j)!}p_1^{x-i}p_2^{y-j}e^{\lambda_1}\frac{(-\lambda_1)^i}{i!}e^{\lambda_2}\frac{(-\lambda_2)^i}{i!}e^{\lambda_3}\cdot\sum_{k=0}^{\min\{i,j\}}\binom{i}{k}\binom{j}{k}k!\left(\frac{-\lambda_3}{\lambda_1\lambda_2}\right)^k$$

ή

$$p_{xy}=\frac{q^r e^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}}{\Gamma(r)}\frac{p_1^x}{x!}\frac{p_2^y}{y!}\sum_{i=0}^{x}\sum_{j=0}^{y}\frac{\Gamma(r+x-i+y-j)}{(y-j)!}\binom{x}{i}\binom{y}{j}(-1)^{i+j}\left(\frac{\lambda_1}{p_1}\right)^i\left(\frac{\lambda_2}{p_2}\right)^i\cdot\sum_{k=0}^{\min\{i,j\}}\binom{i}{k}\binom{j}{k}k!(-1)^k\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1\lambda_2}\right)^k$$

Περιθώριες Κατανομές

Η πιθανογεννήτρια της περιθώριας τ.μ. X είναι:

$$\Pi_X(u)=\Pi(u,1)=\frac{\Pi_1(u,1)}{\Pi_2(u,1)}=\frac{\Pi_X^1(u)}{\Pi_X^2(u)}=\frac{(1-q_1-q_2)^k(1-q_2-q_1u)^{-k}}{\exp\{(\lambda_1+\lambda_3)(u-1)\}},$$

η οποία είναι η κατανομή της οποίας η πιθανογεννήτρια προκύπτει από το πηλίκο των γ.σ.π. της Αρνητικής Διωνυμικής $\left(k,\frac{q_1}{1-q_1-q_2}\right)$ με την Poisson $(\lambda_1+\lambda_3)$.

Αναλυτικές σχέσεις για τις πιθανογεννήτριες των δεσμευμένων κατανομών

Στην περίπτωση αυτή έχουμε :

$$\Pi_1(u,v)=(1-q_1-q_2)^k(1-q_1u-q_2v)^{-k}$$

$$\Pi_2(u,v)=\exp\{\lambda_1(u-1)+\lambda_2(v-1)+\lambda_3(uv-1)\}$$

Άρα : $\Pi_2^*(u,v)=\exp\{-\lambda_1(u-1)-\lambda_2(v-1)-\lambda_3(uv-1)\}$.

Οι δεσμευμένες κατανομές είναι :

$$\Pi^{1}_{X|Y=i}\left(u\right)=\left(1-q_1\right)^{k+i}\left(1-q_1u\right)^{-(k+i)}$$

$$\Pi^{2*}_{X|Y=i}\left(u\right)=\exp\left\{\left(-\lambda_1\right)\left(u-1\right)\right\}\left[\frac{\lambda_2+\lambda_3u}{\lambda_2+\lambda_3}\right]^{y-i}$$

Ενώ οι παράγωγοι των πιθανογεννητριών είναι :

$$\frac{\partial^{i}}{\partial v^{i}}\Pi_1\left(1,0\right)=y!\binom{k+i-1}{k-1}\left(\frac{1-q_1-q_2}{1-q_1}\right)^{k}\left(\frac{q_2}{1-q_1}\right)^{i}$$

$$\frac{\partial^{y-i}}{\partial v^{y-i}}\Pi_2^{*}\left(1,0\right)=\left(-\lambda_2-\lambda_3\right)^{y-i}\exp\left\{-\left(-\lambda_2-\lambda_3\right)\right\}$$

Και

$$\alpha_i^y=\frac{\cancel{y!}\binom{k+i-1}{k-1}\left(\frac{q_2}{1-q_1}\right)^{i}\cancel{\left(\frac{1-q_1-q_2}{1-q_1}\right)^{k}}\;\cancel{e^{-(-\lambda_2-\lambda_3)}}\frac{\left(-\lambda_2-\lambda_3\right)^{y-i}}{\cancel{(y-i)!}}\cancel{(y-i)!}}{\sum_{i=0}^{y}\cancel{y!}\binom{k+i-1}{k-1}\left(\frac{q_2}{1-q_1}\right)^{i}\cancel{\left(\frac{1-q_1-q_2}{1-q_1}\right)^{k}}\;\cancel{e^{-(-\lambda_2-\lambda_3)}}\frac{\left(-\lambda_2-\lambda_3\right)^{y-i}}{\cancel{(y-i)!}}\cancel{(y-i)!}}$$

$$\alpha_i^y=\frac{\binom{k+i-1}{k-1}\left(\frac{q_2}{1-q_1}\right)^{i}\frac{\left(\lambda_2+\lambda_3\right)^{y-i}}{(y-i)!}\left(-1\right)^{y-i}}{\sum_{j=0}^{y}\binom{k+j-1}{k-1}\left(\frac{q_2}{1-q_1}\right)^{j}\frac{\left(\lambda_2+\lambda_3\right)^{y-j}}{(y-j)!}\left(-1\right)^{y-j}}$$

Και τελικά :

$$\Pi_{X|Y=y}\left(u\right)=\sum_{i=0}^{y}\frac{\binom{k+i-1}{k-1}\left(\frac{q_2}{1-q_1}\right)^{i}\frac{\left(\lambda_2+\lambda_3\right)^{y-i}}{(y-i)!}\left(-1\right)^{y-i}}{\sum_{j=0}^{y}\binom{k+j-1}{k-1}\left(\frac{q_2}{1-q_1}\right)^{j}\frac{\left(\lambda_2+\lambda_3\right)^{y-j}}{(y-j)!}\left(-1\right)^{y-j}}\frac{\left(1-q_1\right)^{k+i}\left(1-q_1u\right)^{-(k+i)}}{\exp\left\{\lambda_1\left(u-1\right)\right\}}\left[\frac{\lambda_2+\lambda_3u}{\lambda_2+\lambda_3}\right]^{y-i}$$

Δηλαδή είναι μια αρνητική μίξη συνελίξεων από κατανομές των οποίων οι πιθανογεννήτριες έχουν προκύψει από το πηλίκο της Αρνητικής Διωνυμικής$\left(k+i,q_1\right)$ με την Poisson(λ_1), με μια Διωνυμική$\left(y-i,\frac{\lambda_3}{\lambda_2+\lambda_3}\right)$.

Αναλυτικές σχέσεις για παραγοντικές ροπές

$$G\left(u,v\right)=\Pi\left(u+1,v+1\right)=\frac{\Pi_1\left(u+1,v+1\right)}{\Pi_2\left(u+1,v+1\right)}=\frac{G_1\left(u,v\right)}{G_2\left(u,v\right)}$$

$$=G_1\left(u,v\right)\exp\left\{\left(-\lambda_1-\lambda_3\right)u+\left(-\lambda_2-\lambda_3\right)v-\lambda_3 uv\right\}$$

Άρα :

$$G(u,v)=\sum_{r,s} r!s!\left(\frac{p_1}{q}\right)^r\left(\frac{p_2}{q}\right)^s\frac{\Gamma(k+r+s)}{\Gamma(k)r!s!}\frac{u^r}{r!}\frac{v^s}{s!}.$$

$$\sum_{r,s}(-\lambda_1-\lambda_3)^r(-\lambda_2-\lambda_3)^s\sum_{i=0}^{\min\{r,s\}}\binom{r}{i}\binom{s}{j}i!\left(\frac{-\lambda_3}{(\lambda_1+\lambda_3)(\lambda_2+\lambda_3)}\right)^i\frac{u^r}{r!}\frac{v^s}{s!}$$

Επομένως :

$$\mu_{[r,s]}=\sum_{i=0}^{r}\sum_{j=0}^{s}r!s!\left(\frac{p_1}{q}\right)^{r-i}\left(\frac{p_2}{q}\right)^{s-j}\frac{\Gamma(k+r+s-i-j)}{\Gamma(k)(r-i)!(s-j)!}(-1)^{i+j}(\lambda_1+\lambda_3)^i(\lambda_2+\lambda_3)^j$$

$$\times\sum_{i^*=0}^{\min\{i,j\}}\frac{\binom{i}{i^*}\binom{j}{i^*}}{i!j!}i^*!(-1)^{i^*}\left(\frac{\lambda_3}{(\lambda_1+\lambda_3)(\lambda_2+\lambda_3)}\right)^{i^*}$$

$$\mu_{[r,s]}=\frac{p_1^r p_2^s}{\Gamma(k)q^{r+s}}\sum_{i=0}^{r}\sum_{j=0}^{s}\binom{r}{i}\binom{s}{j}\Gamma(k+r+s-i-j)(-1)^{i+j}\left[\frac{q(\lambda_1+\lambda_3)}{p_1}\right]^i\left[\frac{q(\lambda_2+\lambda_3)}{p_2}\right]^j$$

$$\times\sum_{i^*=0}^{\min\{i,j\}}\binom{i}{i^*}\binom{j}{i^*}i^*!(-1)^{i^*}\left(\frac{\lambda_3}{(\lambda_1+\lambda_3)(\lambda_2+\lambda_3)}\right)^{i^*}$$

$$\mu_{[r,0]}=\frac{p_1^r}{\Gamma(k)q^r}\sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}\Gamma(k+r-i)(-1)^i\left[\frac{q(\lambda_1+\lambda_3)}{p_1}\right]^i$$

$$\mu_{[0,s]}=\frac{p_2^s}{\Gamma(k)q^s}\sum_{j=0}^{s}\binom{s}{j}\Gamma(k+s-j)(-1)^j\left[\frac{q(\lambda_2+\lambda_3)}{p_2}\right]^j$$

Έχουμε επίσης ότι :

$$\operatorname{cov}(X,Y)=k\frac{q_1q_2}{(1-q_1-q_1)^2}-\lambda_3$$

$$\operatorname{var}(X)=k\frac{q_1(1-q_2)}{(1-q_1-q_1)^2}-(\lambda_1+\lambda_3)$$

$$E(X)=k\frac{q_1}{(1-q_1-q_1)}-(\lambda_1+\lambda_3).$$

Εκτίμηση Παραμέτρων

Έχουμε τις σχέσεις :

$$E(X)=k\frac{q_1}{(1-q_1-q_2)}-(\lambda_1+\lambda_3)\ (1.4)\qquad \operatorname{var}(X)=k\frac{q_1(1-q_2)}{(1-q_1-q_2)^2}-(\lambda_1+\lambda_3)\ (1.5)$$

$$E(Y)=k\frac{q_2}{(1-q_1-q_2)}-(\lambda_2+\lambda_3)\ (1.6)\qquad \operatorname{var}(Y)=k\frac{q_2(1-q_1)}{(1-q_1-q_2)^2}-(\lambda_2+\lambda_3)\ (1.7)$$

$$\operatorname{cov}(X,Y) = k\frac{q_1 q_2}{(1-q_1-q_2)^2} - \lambda_3 \quad (1.8)$$

Από τις (1.4), (1.5) παίρνουμε :

$$\operatorname{var}(X)-E(X) = \frac{kq_1^{\,2}}{(1-q_1-q_2)^2} \quad (1.9)$$

$$\frac{q_1}{(1-q_1-q_2)} = \sqrt{\frac{\operatorname{var}(X)-E(X)}{k}} \quad (1.10)$$

Αντίστοιχες σχέσεις παίρνουμε από τις (1.6) και (1.7) ας τις ονομάσουμε (1.9)’ και (1.10)’ . Οπότε αν προσθέσουμε τις (1.10), (1.10)’ έχουμε :

$$\frac{q_1}{(1-q_1-q_2)} + \frac{q_2}{(1-q_1-q_2)} = \sqrt{\frac{\operatorname{var}(X)-E(X)}{k}} + \sqrt{\frac{\operatorname{var}(Y)-E(Y)}{k}}$$

$$q_1+q_2 = \frac{\sqrt{\operatorname{var}(X)-E(X)}+\sqrt{\operatorname{var}(Y)-E(Y)}}{\sqrt{k}+\sqrt{\operatorname{var}(X)-E(X)}+\sqrt{\operatorname{var}(Y)-E(Y)}} \quad (1.11)$$

Κι αν διαιρέσουμε τις (1.9), (1.9)’ παίρνουμε:

$$\frac{q_1}{q_2} = \sqrt{\frac{\operatorname{var}(X)-E(X)}{\operatorname{var}(Y)-E(Y)}}$$

$$q_1 = q_2\sqrt{\frac{\operatorname{var}(X)-E(X)}{\operatorname{var}(Y)-E(Y)}} \quad (1.12)$$

Όμως από την (1.11) :

$$q_2\sqrt{\frac{\operatorname{var}(X)-E(X)}{\operatorname{var}(Y)-E(Y)}} + q_2 = \frac{\sqrt{\operatorname{var}(X)-E(X)}+\sqrt{\operatorname{var}(Y)-E(Y)}}{\sqrt{k}+\sqrt{\operatorname{var}(X)-E(X)}+\sqrt{\operatorname{var}(Y)-E(Y)}}$$

$$q_2 = \frac{\dfrac{\sqrt{\operatorname{var}(X)-E(X)}+\sqrt{\operatorname{var}(Y)-E(Y)}}{\sqrt{k}+\sqrt{\operatorname{var}(X)-E(X)}+\sqrt{\operatorname{var}(Y)-E(Y)}}}{1+\sqrt{\dfrac{\operatorname{var}(X)-E(X)}{\operatorname{var}(Y)-E(Y)}}}$$

Δηλαδή ο εκτιμητής για το q_2 είναι:

$$\hat{q}_2 = \frac{\sqrt{s_Y^{\,2}-\bar{y}}}{\sqrt{k}+\sqrt{s_X^{\,2}-\bar{x}}+\sqrt{s_Y^{\,2}-\bar{y}}}$$

Οπότε από την (1.12) παίρνουμε τον εκτιμητή για το q_1 να είναι :

$$\hat{q}_1 = \frac{\sqrt{s_X^{\,2}-\bar{x}}}{\sqrt{k}+\sqrt{s_X^{\,2}-\bar{x}}+\sqrt{s_Y^{\,2}-\bar{y}}}$$

Αν πολλαπλασιάσουμε τις σχέσεις (1.9), (1.9)’ έχουμε :

$$\sqrt{\big(\operatorname{var}(X)-E(X)\big)\big(\operatorname{var}(Y)-E(Y)\big)} = \frac{kq_1q_2}{(1-q_1-q_2)^2}$$

Οπότε σε συνδυασμό με τη σχέση (1.8) παίρνουμε τον εκτιμητή για το λ_3 ο οποίος είναι :

$$\hat{\lambda}_3 = \sqrt{\left(s_x{}^2 - \overline{x}\right)\left(s_y{}^2 - \overline{y}\right)} - s_{xy}$$

Από την (1.4) έχουμε τον εκτιμητή για το λ_1 :

$$\hat{\lambda}_1 = \hat{k}\frac{\hat{q}_1}{\left(1-\hat{q}_1-\hat{q}_2\right)} - \hat{\lambda}_3 - \overline{x}$$

Και αντίστοιχα από την (1.6) παίρνουμε τον εκτιμητή για το λ_2 :

$$\hat{\lambda}_2 = \hat{k}\frac{\hat{q}_2}{\left(1-\hat{q}_1-\hat{q}_2\right)} - \hat{\lambda}_3 - \overline{y}$$

3.5.2 Πηλίκο Διδ. Αρνητική Διωνυμική (q_1,q_2,k) με Διδ. Γεωμετρική (q_1^*,q_2^*)

Προσδιορισμός των περιορισμών

Παίρνουμε το πηλίκο των πιθανογεννητριών μιας διδιάστατης αρνητικής διωνυμικής και μιας διδιάστατης γεωμετρικής κατανομής και αναζητούμε τις προϋποθέσεις κάτω από τις οποίες αυτό το πηλίκο είναι πιθανογεννήτρια τυχαίας διδιάστατης μεταβλητής. Οπότε έχουμε

$$\frac{(1-q_1-q_2)^k(1-q_1u-q_2v)^{-k}}{(1-q_1^*-q_2^*)(1-q_1^*u-q_2^*v)^{-1}}=\Pi(u,v)$$

$$\frac{(1-q_1^*u-q_2^*v)}{(1-q_1^*-q_2^*)}\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k+x+y)}{\Gamma(k)x!y!}v^yu^xq_1^xq_2^y(1-q_1-q_2)^k=\Pi(u,v)$$

$$\frac{(1-q_1-q_2)^k}{(1-q_1^*-q_2^*)}\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k+x+y)}{\Gamma(k)x!y!}v^yu^xq_1^xq_2^y-q_1^*\frac{(1-q_1-q_2)^k}{(1-q_1^*-q_2^*)}\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k+x+y)}{\Gamma(k)x!y!}v^yu^{x+1}q_1^xq_2^y-$$

$$-q_2^*\frac{(1-q_1-q_2)^k}{(1-q_1^*-q_2^*)}\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k+x+y)}{\Gamma(k)x!y!}v^{y+1}u^xq_1^xq_2^y=\Pi(u,v)$$

Άρα

$$p_{xy}=\frac{\Gamma(k+x+y)}{\Gamma(k)x!y!}q_1^xq_2^y\frac{(1-q_1-q_2)^k}{(1-q_1^*-q_2^*)}-\frac{\Gamma(k+x-1+y)}{\Gamma(k)(x-1)!y!}q_1^*q_1^{x-1}q_2^y\frac{(1-q_1-q_2)^k}{(1-q_1^*-q_2^*)}-$$

$$-\frac{\Gamma(k+x+y-1)}{\Gamma(k)x!(y-1)!}q_2^*q_1^xq_2^{y-1}\frac{(1-q_1-q_2)^k}{(1-q_1^*-q_2^*)}$$

Τελικά έχουμε:

$$p_{xy}=\frac{(1-q_1-q_2)^k}{(1-q_1^*-q_2^*)}\frac{\Gamma(k+x+y-1)}{\Gamma(k)x!y!}q_1^{x-1}q_2^{y-1}\left[(k+x+y-1)q_1q_2-q_1^*q_2x-q_1q_2^*y\right]$$

για x , $y \geq 1$

$$p_{x0}=\frac{(1-q_1-q_2)^k}{(1-q_1^*-q_2^*)}\frac{\Gamma(k+x-1+y)}{\Gamma(k)x!y!}q_1^{x-1}q_2^y\left[(k+x+y-1)q_1-q_1^*x\right]\ \text{για } x\geq 1$$

$$p_{0y}=\frac{(1-q_1-q_2)^k}{(1-q_1^*-q_2^*)}\frac{\Gamma(k+x+y-1)}{\Gamma(k)x!y!}q_1^xq_2^{y-1}\left[(k+x+y-1)q_2y-q_2^*\right]\ \text{για } y\geq 1$$

και $p_{00}=\dfrac{(1-q_1-q_2)^k}{(1-q_1^*-q_2^*)}$.

Για να είναι $p_{xy} \geq 0$ ικανή και αναγκαία συνθήκη είναι να ισχύει η σχέση :

$$\left(k+x+y-1\right)q_1q_2 - q_1^*q_2x - q_1q_2^*y \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(k-1\right)q_1q_2 + q_2x\left(q_1-q_1^*\right) + q_1y\left(q_2-q_2^*\right) \geq 0$$

Για $k \geq 1$, αρκεί να ισχύει $q_1 \geq q_1^*$ και $q_2 \geq q_2^*$.
Για $k < 1$ και $x \geq 1$ η παραπάνω σχέση γίνεται :

$$k\, q_1q_2 - q_1^*q_2 + q_2\left(x-1\right)\left(q_1-q_1^*\right) + q_1y\left(q_2-q_2^*\right) \geq 0$$

Δηλαδή για να είναι $p_{xy} \geq 0$ αρκεί $q_2 \geq q_2^*$ και $q_1 \geq q_1^*$ και $kq_1q_2 \geq q_1^*q_2 \Leftrightarrow kq_1 \geq q_1^*$, άρα τελικά αρκεί να ισχύουν οι σχέσεις $q_2 \geq q_2^*$ και $kq_1 \geq q_1^*$.
Για $k < 1$ και $y \geq 1$ η παραπάνω σχέση γίνεται :

$$k\, q_1q_2 - q_1q_2^* + q_2x\left(q_1-q_1^*\right) + q_1\left(y-1\right)\left(q_2-q_2^*\right) \geq 0$$

Δηλαδή τελικά αν $q_1 \geq q_1^*$ και $kq_2 \geq q_2^*$, ισχύει $p_{xy} \geq 0$.

Επομένως ικανή συνθήκη για τον καλό ορισμό της νέας κατανομής είναι η :
- Αν $k \geq 1$ θέλουμε $q_1 \geq q_1^*$ και $q_2 \geq q_2^*$
- Αν $k < 1$ θέλουμε $kq_1 \geq q_1^*$ και $kq_2 \geq q_2^*$.

Δηλαδή : $\min\{ kq_1 , q_1\} \geq q_1^*$ και $\min\{ kq_2 , q_2\} \geq q_2^*$

Αναγωγικές σχέσεις για τις πιθανότητες

Για τις αναγωγικές σχέσεις για τις πιθανότητες έχουμε τη σχέση

$$\frac{\partial}{\partial u}\Pi_1\left(u,v\right) = \frac{\partial}{\partial u}\Pi\left(u,v\right)\cdot\Pi_2\left(u,v\right) + \frac{\partial}{\partial u}\Pi_2\left(u,v\right)\cdot\Pi\left(u,v\right)$$

όπου $\Pi_1\left(u,v\right) = \left(1-q_1-q_2\right)^k\left(1-q_1u-q_2v\right)^{-k}$

και $\Pi_2\left(u,v\right) = \left(1-q_1^*-q_2^*\right)\left(1-q_1^*u-q_2^*v\right)^{-1}$.

Όμως

$$\frac{\partial}{\partial u}\Pi_1\left(u,v\right) = \left(1-q_1-q_2\right)^k\left(1-q_1u-q_2v\right)^{-k-1}\left(-q_1\right) = \left(-q_1\right)\left(1-q_1u-q_2v\right)^{-1}\Pi_1\left(u,v\right)$$

και

$$\frac{\partial}{\partial u}\Pi_2\left(u,v\right) = \left(1-q_1^*-q_2^*\right)\left(1-q_1^*u-q_2^*v\right)^{-2}\left(-q_1^*\right) = \left(-q_1^*\right)\left(1-q_1^*u-q_2^*v\right)^{-1}\Pi_2\left(u,v\right)$$

Οπότε η παραπάνω σχέση γίνεται :

$$\left(-q_1\right)\left(1-q_1u-q_2v\right)^{-1}\Pi_1\left(u,v\right) = \frac{\partial}{\partial u}\Pi\left(u,v\right)\cdot\Pi_2\left(u,v\right) + \left(-q_1^*\right)\left(1-q_1^*u-q_2^*v\right)^{-1}\Pi_2\left(u,v\right)\Pi\left(u,v\right)$$

$$\left(-q_1\right)\left(1-q_1u-q_2v\right)^{-1}\Pi\left(u,v\right) = \frac{\partial}{\partial u}\Pi\left(u,v\right) + \left(-q_1^*\right)\left(1-q_1^*u-q_2^*v\right)^{-1}\Pi\left(u,v\right)$$

$$\frac{-q_1}{1-q_1u-q_2v}\Pi\left(u,v\right) + \frac{q_1^*}{1-q_1^*u-q_2^*v}\Pi\left(u,v\right) = \frac{\partial}{\partial u}\Pi\left(u,v\right)$$

$$\left(\frac{-q_1}{1-q_1u-q_2v} + \frac{q_1^*}{1-q_1^*u-q_2^*v}\right)\Pi\left(u,v\right) = \frac{\partial}{\partial u}\Pi\left(u,v\right)$$

$$\left(-q_1+\cancel{q_1q_1^* u}+q_1q_2^* v+q_1^*-\cancel{q_1q_1^* u}-q_1^*q_2 v\right)\Pi(u,v)=\left(1-q_1u-q_2v\right)\left(1-q_1^*u-q_2^*v\right)\frac{\partial}{\partial u}\Pi(u,v)$$

$$\left[\left(q_1^*-q_1\right)+\left(q_1q_2^*-q_1^*q_2\right)v\right]\Pi(u,v)=$$

$$=\left[1-\left(q_1^*+q_1\right)u-\left(q_2^*+q_2\right)v+\left(q_2q_1^*+q_1q_2^*\right)u\,v+q_1q_1^*u^2+q_2q_2^*v^2\right]\frac{\partial}{\partial u}\Pi(u,v)$$

$$\left[\left(q_1^*-q_1\right)+\left(q_1q_2^*-q_1^*q_2\right)v\right]\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}p_{i,j}u^iv^j=$$

$$=\left[1-\left(q_1^*+q_1\right)u-\left(q_2^*+q_2\right)v+\left(q_2q_1^*+q_1q_2^*\right)u\,v+q_1q_1^*u^2+q_2q_2^*v^2\right]\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}p_{i,j}iu^{i-1}v^j$$

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\left(q_1^*-q_1\right)p_{i,j}u^iv^j+\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\left(q_1q_2^*-q_1^*q_2\right)p_{i,j}u^iv^{j+1}=$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}p_{i,j}iu^{i-1}v^j-\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\left(q_1^*+q_1\right)p_{i,j}iu^iv^j-\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\left(q_2^*+q_2\right)p_{i,j}iu^{i-1}v^{j+1}+$$

$$+\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\left(q_2q_1^*+q_1q_2^*\right)p_{i,j}iu^iv^{j+1}+\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}q_1q_1^*p_{i,j}iu^{i+1}v^j+\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}q_2q_2^*p_{i,j}iu^{i-1}v^{j+2}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\left(q_1^*-q_1\right)p_{i,j}u^iv^j+\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left(q_1q_2^*-q_1^*q_2\right)p_{i,j-1}u^iv^j=$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}p_{i+1,j}\left(i+1\right)u^iv^j-\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\left(q_1^*+q_1\right)p_{i,j}iu^iv^j-\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left(q_2^*+q_2\right)p_{i+1,j-1}\left(i+1\right)u^iv^j+$$

$$+\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left(q_2q_1^*+q_1q_2^*\right)p_{i,j-1}iu^iv^j+\sum_{i=2}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}q_1q_1^*p_{i-1,j}\left(i-1\right)u^iv^j+\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=2}^{\infty}q_2q_2^*p_{i+1,j-2}\left(i+1\right)u^iv^j$$

Απ' όπου έχουμε για τις πιθανότητες

$$\left(q_1^*-q_1\right)p_{x,y}+\left(q_1q_2^*-q_1^*q_2\right)p_{x,y-1}=\left(x+1\right)p_{x+1,y}-\left(q_1^*+q_1\right)x\,p_{x,y}-\left(q_2^*+q_2\right)\left(x+1\right)p_{x+1,y-1}+$$
$$+\left(q_2q_1^*+q_1q_2^*\right)x\,p_{x,y-1}+q_1q_1^*\left(x-1\right)p_{x-1,y}+q_2q_2^*\left(x+1\right)p_{x+1,y-2}$$

Επομένως οι αναγωγικές σχέσεις για τις πιθανότητες είναι οι εξής :

$$\left(x+1\right)p_{x+1,y}=\left(q_2^*+q_2\right)\left(x+1\right)p_{x+1,y-1}+\left[\left(q_1^*-q_1\right)+\left(q_1^*+q_1\right)x\right]p_{x,y}-q_1q_1^*\left(x-1\right)p_{x-1,y}+$$
$$+\left[\left(q_1q_2^*-q_1^*q_2\right)-\left(q_2q_1^*+q_1q_2^*\right)x\right]p_{x,y-1}-q_2q_2^*\left(x+1\right)p_{x+1,y-2}$$

για $x\geq 1$, $y\geq 2$,

$$\left(x+1\right)p_{x+1,0}=\left[\left(q_1^*-q_1\right)+\left(q_1^*+q_1\right)x\right]p_{x,0}-q_1q_1^*\left(x-1\right)p_{x-1,0}\quad \text{για } x\geq 1,$$

$$\left.\begin{aligned}\left(x+1\right)p_{x+1,1}&=\left(q_2^*+q_2\right)\left(x+1\right)p_{x+1,0}+\left[\left(q_1^*-q_1\right)+\left(q_1^*+q_1\right)x\right]p_{x,1}+\\&+\left[\left(q_1q_2^*-q_1^*q_2\right)-\left(q_2q_1^*+q_1q_2^*\right)x\right]p_{x,0}-q_1q_1^*\left(x-1\right)p_{x-1,1}\end{aligned}\right\}\ \text{για } x\geq 1$$

$$p_{00}=\frac{\left(1-q_1-q_2\right)^k}{\left(1-q_1^*-q_2^*\right)}$$

$$p_{01} = \frac{\left(1-q_1-q_2\right)^k}{\left(1-q_1^*-q_2^*\right)}\left[kq_2 - q_2^*\right]$$

$$p_{10} = \frac{\left(1-q_1-q_2\right)^k}{\left(1-q_1^*-q_2^*\right)}\left[kq_1 - q_1^*\right]$$

$$p_1 = \frac{\left(1-q_1-q_2\right)^k}{\left(1-q_1^*-q_2^*\right)}\frac{\Gamma\left(k+1\right)}{\Gamma\left(k\right)}\left[\left(k+1\right)q_1q_2 - q_1^*q_2 - q_1q_2^*\right]$$

Περιθώριες Κατανομές

Η πιθανογεννήτρια της περιθώριας τ.μ. X είναι:

$$\Pi_X\left(u\right) = \Pi\left(u,1\right) = \frac{\Pi_1\left(u,1\right)}{\Pi_2\left(u,1\right)} = \frac{\Pi_X^1\left(u\right)}{\Pi_X^2\left(u\right)} = \frac{\left(1-q_1-q_2\right)^k\left(1-q_2-q_1u\right)^{-k}}{\left(1-q_1^*-q_2^*\right)\left(1-q_2^*-q_1^*u\right)^{-1}},$$

η οποία είναι η κατανομή της οποίας η πιθανογεννήτρια προκύπτει από το πηλίκο των πιθανογεννητριών της Αρνητικής Διωνυμικής $\left(k, \dfrac{q_1}{1-q_1-q_2}\right)$ με τη Γεωμετρική $\left(\dfrac{q_1^*}{1-q_1^*-q_2^*}\right)$.

Δεσμευμένες κατανομές

Θα χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις που είδαμε στην παράγραφο 3.4 . Σ’ αυτή την περίπτωση έχουμε

$$\Pi_1\left(u,v\right) = \left(1-q_1-q_2\right)^k\left(1-q_1u-q_2v\right)^{-k},$$

$$\Pi_2\left(u,v\right) = \left(1-q_1^*-q_2^*\right)\left(1-q_1^*u-q_2^*v\right)^{-1}$$

και επομένως $\Pi_2^*\left(u,v\right) = \left(1-q_1^*-q_2^*\right)^{-1}\left(1-q_1^*u-q_2^*v\right)$.

Γνωρίζουμε ότι $\dfrac{\partial^r}{\partial v^r}\Pi_1\left(1,0\right) = y!\dbinom{k+r-1}{k-1}\left(\dfrac{1-q_1-q_2}{1-q_1}\right)^k\left(\dfrac{q_2}{1-q_1}\right)^r$ καθώς επίσης και ότι $\Pi_{X|Y=i}^1\left(u\right) = \left(1-q_1\right)^{k+i}\left(1-q_1u\right)^{-(k+i)}$. Επίσης παρατηρούμε ότι η $\Pi_2^*(u\ ,\ v)$ είναι ένα πολυώνυμο πρώτου βαθμού άρα οι παράγωγοί της βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου με το δύο είναι μηδέν.

$$\frac{\Pi_2^*\left(u,0\right)}{\Pi_2^*\left(1,0\right)} = \frac{\left(1-q_1^*-q_2^*\right)^{-1}\left(1-q_1^*u\right)}{\left(1-q_1^*-q_2^*\right)^{-1}\left(1-q_1^*\right)} = \left(1-q_1^*\right)^{-1}\left(1-q_1^*u\right) \text{ και}$$

$$\frac{\frac{\partial}{\partial v}\Pi_2^*(u,0)}{\frac{\partial}{\partial v}\Pi_2^*(1,0)}=\frac{\left(1-q_1^*-q_2^*\right)^{-1}\left(-q_2^*\right)}{\left(1-q_1^*-q_2^*\right)^{-1}\left(-q_2^*\right)}=1.$$

Οπότε $\Pi_{X|Y=y}(u)=\alpha_{y-1}^{y}\left(1-q_1\right)^{k+y-1}\left(1-q_1u\right)^{-(k+y-1)}+\alpha_y^y\frac{\left(1-q_1\right)^{k+y}\left(1-q_1u\right)^{-(k+y)}}{\left(1-q_1^*\right)\left(1-q_1^*u\right)^{-1}}$

Ονομάζουμε α_i^{y*} τον αριθμητή του α_i^y και έχουμε

$$\alpha_y^{y*}=\cancel{\binom{y}{y}}y!\binom{k+y-1}{k-1}\left(\frac{1-q_1-q_2}{1-q_1}\right)^k\left(\frac{q_2}{1-q_1}\right)^y\left(1-q_1^*-q_2^*\right)^{-1}\left(1-q_1^*\right)$$

$$\alpha_{y-1}^{y*}=\binom{y}{y-1}(y-1)!\binom{k+y-1-1}{k-1}\left(\frac{1-q_1-q_2}{1-q_1}\right)^k\left(\frac{q_2}{1-q_1}\right)^{y-1}\left(1-q_1^*-q_2^*\right)^{-1}\left(-q_2^*\right)=$$

$$=y!\binom{k+y-1-1}{k-1}\left(\frac{1-q_1-q_2}{1-q_1}\right)^k\left(\frac{q_2}{1-q_1}\right)^{y-1}\left(1-q_1^*-q_2^*\right)^{-1}\left(-q_2^*\right)$$

Που σημαίνει ότι

$$\alpha_y^y=\frac{\alpha_y^{y*}}{\alpha_y^{y*}+\alpha_{y-1}^{y*}}$$

$$=\frac{\cancel{y!}\frac{(k+y-1)!}{\cancel{(k-1)!}\,\cancel{y!}}\left(\frac{1-q_1-q_2}{1-q_1}\right)^k\left(\frac{q_2}{1-q_1}\right)^y\left(1-q_1^*-q_2^*\right)^{-1}\left(1-q_1^*\right)}{\cancel{y!}\frac{(k+y-2)!}{\cancel{(k-1)!}\,\cancel{y!}}\left(1-q_1^*-q_2^*\right)^{-1}\left(\frac{q_2}{1-q_1}\right)^y\left(\frac{1-q_1-q_2}{1-q_1}\right)^k\left[(k+y-1)\left(1-q_1^*\right)-y\frac{1-q_1}{q_2}q_2^*\right]}$$

$$=\frac{(k+y-1)\left(1-q_1^*\right)}{(k+y-1)\left(1-q_1^*\right)-y\frac{q_2^*}{q_2}\left(1-q_1\right)}$$

$$=\frac{(k+y-1)\left(1-q_1^*\right)q_2}{(k+y-1)\left(1-q_1^*\right)q_2-y\left(1-q_1\right)q_2^*}$$

$$\alpha_{y-1}^y=\frac{\alpha_{y-1}^{y*}}{\alpha_y^{y*}+\alpha_{y-1}^{y*}}$$

$$=\frac{\cancel{y!}\frac{\cancel{(k+y-2)!}}{\cancel{(k-1)!}(y-1)!}\left(\frac{1-q_1-q_2}{1-q_1}\right)^k\left(\frac{q_2}{1-q_1}\right)^{y-1}\left(1-q_1^*-q_2^*\right)^{-1}\left(-q_2^*\right)}{\cancel{y!}\frac{\cancel{(k+y-2)!}}{\cancel{(k-1)!}y!}\left(1-q_1^*-q_2^*\right)^{-1}\left(\frac{q_2}{1-q_1}\right)^{y-1}\left(\frac{1-q_1-q_2}{1-q_1}\right)^k\left[(k+y-1)\left(1-q_1^*\right)\frac{q_2}{1-q_1}-yq_2^*\right]}$$

$$=\frac{y\left(-q_2^*\right)\frac{1-q_1}{q_2}}{\left(k+y-1\right)\left(1-q_1^*\right)-\frac{1-q_1}{q_2}yq_2^*}$$

$$=\frac{-y\left(1-q_1\right)q_2^*}{\left(k+y-1\right)\left(1-q_1^*\right)q_2-y\left(1-q_1\right)q_2^*}$$

όπου προφανώς $\alpha_y^y+\alpha_{y-1}^y=1$.

Αναλυτικές σχέσεις για τις παραγοντικές ροπές

Με G(u , v) συμβολίζουμε τη γεννήτρια των παραγοντικών ροπών για την οποία γνωρίζουμε ότι : G(u , v) = Π(u + 1 , v + 1).

Άρα $G\left(u,v\right)=\dfrac{\left(1-q_1-q_2\right)^k\left(1-q_1\left(u+1\right)-q_2\left(v+1\right)\right)^{-k}}{\left(1-q_1^*-q_2^*\right)\left(1-q_1^*\left(u+1\right)-q_2^*\left(v+1\right)\right)^{-1}}$

$$G\left(u,v\right)=\left(1-q_1-q_2\right)^k\left(1-q_1\left(u+1\right)-q_2\left(v+1\right)\right)^{-k}\left(1-q_1^*-q_2^*\right)^{-1}\left(1-q_1^*\left(u+1\right)-q_2^*\left(v+1\right)\right)$$

Αν θέσουμε $p = 1 - q_1 - q_2$ και αντίστοιχα $p^*=1-q_1^*-q_2^*$ η παραπάνω σχέση γίνεται :

$$G\left(u,v\right)=p^k\left(p-q_1u-q_2v\right)^{-k}\left(p^*\right)^{-1}\left(p^*-q_1^*u-q_2^*v\right)$$

$$G\left(u,v\right)=\left(1-\frac{q_1}{p}u-\frac{q_2}{p}v\right)^{-k}\left(1-\frac{q_1^*}{p^*}u-\frac{q_2^*}{p^*}v\right)$$

$$G\left(u,v\right)=\sum_{i,j}\cancel{i!j!}\left(\frac{q_1}{p}\right)^i\left(\frac{q_2}{p}\right)^j\frac{\Gamma\left(k+i+j\right)}{\Gamma\left(k\right)\cancel{i!j!}}\frac{u^i}{i!}\frac{v^j}{j!}\cdot\left(1-\frac{q_1^*}{p^*}u-\frac{q_2^*}{p^*}v\right)$$

Οπότε για τις παραγοντικές ροπές θα έχουμε :

$$\mu_{[r,s]}=r!s!\left(\frac{q_1}{p}\right)^r\left(\frac{q_2}{p}\right)^s\frac{\Gamma\left(k+r+s\right)}{\Gamma\left(k\right)r!s!}-r!s!\left(\frac{q_1}{p}\right)^{r-1}\left(\frac{q_2}{p}\right)^s\frac{q_1^*}{p^*}\frac{\Gamma\left(k+r-1+s\right)}{\Gamma\left(k\right)\left(r-1\right)!s!}-$$

$$-r!s!\left(\frac{q_1}{p}\right)^r\left(\frac{q_2}{p}\right)^{s-1}\frac{q_2^*}{p^*}\frac{\Gamma\left(k+r+s-1\right)}{\Gamma\left(k\right)r!\left(s-1\right)!}$$

$$\mu_{[r,s]}=\frac{\Gamma\left(k+r+s-1\right)}{\Gamma\left(k\right)}\left(\frac{q_1}{p}\right)^{r-1}\left(\frac{q_2}{p}\right)^{s-1}\left[\frac{q_1}{p}\frac{q_2}{p}\left(k+r+s-1\right)-\frac{q_2}{p}\frac{q_1^*}{p^*}r-\frac{q_1}{p}\frac{q_2^*}{p^*}s\right]$$

για r,s≥1

$$\mu_{[r,0]}=\frac{\Gamma\left(k+r-1\right)}{\Gamma\left(k\right)}\left(\frac{q_1}{p}\right)^{r-1}\left[\frac{q_1}{p}\left(k+r-1\right)-r\frac{q_1^*}{p^*}\right]$$

$$\mu_{[0,s]}=\frac{\Gamma\left(k+s-1\right)}{\Gamma\left(k\right)}\left(\frac{q_2}{p}\right)^{s-1}\left[\frac{q_2}{p}\left(k+s-1\right)-s\frac{q_2^*}{p^*}\right]$$

3.5.3 Πηλίκο Διδ. Γεωμετρική (q_1,q_2) με Διδ. Γεωμετρική (q_1^*,q_2^*)

Προσδιορισμός των περιορισμών

Είναι ειδική περίπτωση της προηγούμενης παραγράφου για k = 1. Άρα από την προηγούμενη παράγραφο έχουμε ότι :

$$p_{x\,y} = \frac{\Gamma(x+y)}{x!y!} q_1^{x-1} q_2^{y-1} \frac{(1-q_1-q_2)}{(1-q_1^*-q_2^*)} \left[(x+y) q_1 q_2 - q_1^* q_2 x - q_1 q_2^* y \right]$$

$$p_{xy} = \frac{\Gamma(x+y)}{x!y!} q_1^{x-1} q_2^{y-1} \frac{(1-q_1-q_2)}{(1-q_1^*-q_2^*)} \left[x q_2 \left(q_1 - q_1^*\right) + y q_1 \left(q_2 - q_2^*\right) \right]$$

Και για να έχουμε $p_{xy} \geq 0$ ικανή συνθήκη είναι να ισχύει : $q_1 \geq q_1^*$ και $q_2 \geq q_2^*$.

Κεφάλαιο 4ο

Διακριτές κατανομές στις κλαδωτές ανελίξεις

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται τα μοντέλα των κλαδωτών ανελίξεων στη μία και στις δύο διαστάσεις. Ένα γνωστό αποτελέσματα για την πιθανογεννήτρια των ατόμων της ν-οστής γενιάς, επεκτείνεται και αποδεικνύεται για την πιθανογεννήτρια των ατόμων δύο διαφορετικών τύπων της ν-οστής γενιάς. Το αποτέλεσμα αυτό δεν απαντάται στην υπάρχουσα βιβλιογραφία.

4.1 Μονοδιάστατη κλαδωτή ανέλιξη

4.1.1 Ορισμός της ανέλιξης

<u>Κανόνας της κλαδωτής ανέλιξης</u> : Κάθε γεννήτορας έχει έναν τυχαίο αριθμό απογόνων στην επόμενη γενιά. Αυτές οι τυχαίες μεταβλητές είναι ανεξάρτητα αντίγραφα της X.

Συμβολίζουμε με Z_i τον αριθμό των γεννητόρων της $i^{\text{οστής}}$ γενιάς, με $X_{i\,,\,j}$ τον αριθμό των απογόνων του $j^{\text{οστού}}$ ατόμου της $(i-1)^{\text{οστής}}$ γενιάς και με Π(u) την πιθανογεννήτρια της τυχαίας μεταβλητής X. Υποθέτουμε ότι $Z_0 = 1$ και ότι η μεταβλητή X δεν είναι σταθερά. Οπότε έχουμε ότι :

$Z_0 = 1$
$Z_1 = X_{1\,,\,1}$
$Z_2 = X_{2,1} + X_{2,2} + \ldots + X_{2,Z_1}$
$Z_3 = X_{3,1} + X_{3,2} + \ldots + X_{3,Z_2}$ κ.τ.λ.
γενικά : $Z_\nu = X_{\nu,1} + X_{\nu,2} + \ldots + X_{\nu,Z_{\nu-1}}$

Και

$$\Pi_{Z_\nu}(u) = E\left(u^{X_{\nu,1}+X_{\nu,2}+\ldots+X_{\nu,Z_{\nu-1}}}\right) = \sum_z \left[E\left(u^{X_{\nu,i}}\right)\right]^z P(Z_{\nu-1}=z) = \Pi_{Z_{\nu-1}}\left(E\left(u^{X_{\nu,i}}\right)\right) = \Pi_{Z_{\nu-1}}(\Pi(u))$$

Προκύπτει μια διαφορετική κλαδωτή ανέλιξη αν αλλάξει η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής X.

4.1.2 Η Πιθανογεννήτρια των ατόμων της $\nu^{\text{οστής}}$ γενιάς

Πρόταση 4.1 : Αν $\Pi(u) = \dfrac{c+(1-c)u}{1+c-cu}$ με $0 < c < 1$ τότε η πιθανογεννήτρια που μας δίνει το πλήθος των απογόνων της $\nu^{\text{οστής}}$ γενιάς είναι $\Pi_\nu(u) = \dfrac{\nu c+(1-\nu c)u}{1+\nu c-\nu cu}$ για $\nu \in \mathbb{N}^*$.

Απόδειξη :

Ο τύπος ισχύει για ν = 1 αφού $\Pi_1(u)=\dfrac{c+(1-c)u}{1+c-cu}$.

Έστω ότι ισχύει για το $\nu \in \mathbb{N}$, δηλαδή ότι ισχύει $\Pi_\nu(u)=\dfrac{\nu c+(1-\nu c)u}{1+\nu c-\nu cu}$.

Θέλουμε να δείξουμε ότι ισχύει για ν + 1 , δηλαδή ότι

$$\Pi_{\nu+1}(u)=\frac{(\nu+1)c+\left[1-(\nu+1)c\right]u}{1+(\nu+1)c-(\nu+1)cu}.$$

$$\Pi_{\nu+1}(u)=\Pi_\nu(\Pi(u))=\frac{\nu c+(1-\nu c)\dfrac{c+(1-c)u}{1+c-cu}}{1+\nu c-\nu c\dfrac{c+(1-c)u}{1+c-cu}}=$$

$$=\frac{\nu c+\cancel{\nu c^2}-\cancel{\nu c^2 u}+c+(1-c)u-\cancel{\nu c^2}-\nu cu+\cancel{\nu c^2 u}}{1+c-cu+\nu c+\cancel{\nu c^2}-\cancel{\nu c^2 u}-\cancel{\nu c^2}-\nu cu+\cancel{\nu c^2 u}}=$$

$$=\frac{\nu c+c+(1-c)u-\nu cu}{1+\nu c+c-cu-\nu cu}=\frac{(\nu+1)c+(1-c-\nu c)u}{1+(\nu+1)c-(\nu+1)cu}=$$

$$=\frac{(\nu+1)c+\left[1-(\nu+1)c\right]u}{1+(\nu+1)c-(\nu+1)cu}$$

◈

4.1.3 Η μορφή της πιθανογεννήτριας

Η πιθανογεννήτρια $\Pi_\nu(u)=\dfrac{\nu c+(1-\nu c)u}{1+\nu c-\nu cu}$ μπορεί να γραφτεί :

$$\Pi_\nu(u)=\frac{1+\dfrac{(1-\nu c)}{\nu c}u}{1-\dfrac{\nu c}{1+\nu c}u}\cdot\frac{\nu c}{1+\nu c}=\frac{1-\dfrac{(\nu c-1)}{\nu c}u}{1-\dfrac{\nu c}{1+\nu c}u}\cdot\frac{\nu c}{1+\nu c}=\frac{1-Q_*u}{1-Qu}\cdot\frac{\nu c}{1+\nu c},$$

όπου θέσαμε $Q_*=\dfrac{\nu c-1}{\nu c}$ και $Q=\dfrac{\nu c}{1+\nu c}$. Όμως :

$$\frac{1-Q}{1-Q_*}=\frac{1-\dfrac{\nu c}{1+\nu c}}{1-\dfrac{(\nu c-1)}{\nu c}}=\frac{\dfrac{1+\cancel{\nu c-\nu c}}{1+\nu c}}{\dfrac{\cancel{\nu c-\nu c}+1}{\nu c}}=\frac{\nu c}{1+\nu c}.$$

Άρα τελικά η πιθανογεννήτρια παίρνει τη μορφή $\Pi_\nu(u)=\dfrac{1-Q_*u}{1-Q_*}\cdot\dfrac{1-Q}{1-Qu}$.

Δηλαδή παίρνει τη μορφή πηλίκου των γ.σ.π. δύο γεωμετρικών κατανομών το οποίο ορίζεται καλά εάν και μόνον εάν $0 < Q_* \le Q < 1$.

Όμως, αφού $\nu \in \mathbb{N}$ και $c > 0$, ισχύει ότι $0 < Q < 1$ και $Q_* < 1$.

Επειδή

$$(\nu c)^2 - 1 \le (\nu c)^2 \Rightarrow \frac{\nu c - 1}{\nu c} \le \frac{\nu c}{1+\nu c} \Rightarrow Q^* \le Q \ .$$

Επιπλέον εάν $\frac{1}{2} < c < 1 \Rightarrow \nu c > 1$ για κάθε $\nu \ge 2,\ \nu \in \mathbb{N}$ και άρα $Q_* = \frac{\nu c - 1}{\nu c} > 0$

Οπότε αν $\frac{1}{2} < c < 1$ ισχύει ότι $0 < Q_* \le Q < 1$ και άρα η $\Pi_\nu(u)$ γράφεται ως το πηλίκο των γ.σ.π. δύο γεωμετρικών κατανομών.
Ισοδύναμα γράφεται στη μορφή $(-B)^*({}^{P}B_1)$.

4.2 Διδιάστατη κλαδωτή ανέλιξη

4.2.1 Ο Ορισμός της ανέλιξης

Κανόνας της κλαδωτής ανέλιξης : Κάθε γεννήτορας έχει έναν τυχαίο αριθμό απογόνων των δυο διαφορετικών τύπων στην επόμενη γενιά. Αυτές οι τυχαίες μεταβλητές τύπου Α και τύπου Β είναι ανεξάρτητα αντίγραφα της διδιάστατης τ.μ. (X,Y).

Συμβολίζουμε με Z_i^A και Z_i^B τον αριθμό των γεννητόρων της $i^{\text{οστής}}$ γενιάς τύπου Α και Β αντίστοιχα, με $(X_{i,j}^{T\to A},\ X_{i,j}^{T\to B})$ τον αριθμό των απογόνων τύπου (A,B) του $j^{\text{οστού}}$ ατόμου τύπου T της $(i-1)^{\text{οστής}}$ γενιάς, με $\Pi^{A\to}(u, v)$ και $\Pi^{B\to}(u, v)$ τις πιθανογεννήτριες που μας δίνουν τους απογόνους ενός γεννήτορα τύπου Α και τύπου Β αντίστοιχα και με $\Pi(u, v)$ την πιθανογεννήτρια της τυχαίας μεταβλητής (X, Y). Υποθέτουμε ότι $Z_0^A + Z_0^B = 1$ και ότι η τ.μ. (X,Y) δεν είναι σταθερή.

Οπότε έχουμε ότι

$$Z_0^A + Z_0^B = 1$$

$$Z_1^A = X_{1,Z_0^A}^{A\to A} + X_{1,Z_0^B}^{B\to A}$$

$$Z_1^B = X_{1,Z_0^A}^{A\to B} + X_{1,Z_0^B}^{B\to B}$$

$$Z_2^A = X_{2,1}^{A\to A} + \ldots + X_{2,Z_1^A}^{A\to A} + X_{2,1}^{B\to A} + \ldots + X_{2,Z_1^B}^{B\to A}$$

$$Z_2^B = X_{2,1}^{A\to B} + \ldots + X_{2,Z_1^A}^{A\to B} + X_{2,1}^{B\to B} + \ldots + X_{2,Z_1^B}^{B\to B}$$

$$Z_\nu^A = X_{\nu,1}^{A\to A} + \ldots + X_{\nu,Z_{\nu-1}^A}^{A\to A} + X_{\nu,1}^{B\to A} + \ldots + X_{\nu,Z_{\nu-1}^B}^{B\to A}$$

$$Z_\nu^B = X_{\nu,1}^{A\to B} + \ldots + X_{\nu,Z_{\nu-1}^A}^{A\to B} + X_{\nu,1}^{B\to B} + \ldots + X_{\nu,Z_{\nu-1}^B}^{B\to B}$$

Και

$$\Pi_1(u,v) = \Pi_{Z_1^{AB},Z_1}(u,v) = \Pi^{A\to}(u,v)\cdot P\left(Z_0^A = 1\right) + \Pi^{B\to}(u,v)\cdot\left[1 - P\left(Z_0^A = 1\right)\right]$$

$$\Pi_{\nu+1}(u,v)=E\left(u^{X_{\nu+1,1}^{A\to A}+\ldots+X_{\nu+1,Z_\nu^A}^{A\to A}+X_{\nu+1,1}^{B\to A}+\ldots+X_{\nu+1,Z_\nu^B}^{B\to A}}\,v^{X_{\nu+1,1}^{A\to B}+\ldots+X_{\nu+1,Z_\nu^A}^{A\to B}+X_{\nu+1,1}^{B\to B}+\ldots+X_{\nu+1,Z_\nu^B}^{B\to B}}\right)$$

$$=\sum_{z^A}\sum_{z^B}E\left(u^{X_{\nu+1,1}^{A\to A}+\ldots+X_{\nu+1,Z_\nu^A}^{A\to A}+X_{\nu+1,1}^{B\to A}+\ldots+X_{\nu+1,Z_\nu^B}^{B\to A}}\,v^{X_{\nu+1,1}^{A\to B}+\ldots+X_{\nu+1,Z_\nu^A}^{A\to B}+X_{\nu+1,1}^{B\to B}+\ldots+X_{\nu+1,Z_\nu^B}^{B\to B}}\,\middle|\,Z_\nu^A=z^A,Z_\nu^B=z^B\right)\cdot P\left(Z_\nu^A=z^A,Z_\nu^B=z^B\right)$$

$$=\sum_{z^A}\sum_{z^B}\left[E\left(u^{X_{\nu+1,j}^{A\to A}}v^{X_{\nu+1,j}^{A\to B}}\right)\right]^{z^A}\left[E\left(u^{X_{\nu+1,j}^{B\to A}}v^{X_{\nu+1,j}^{B\to B}}\right)\right]^{z^B}\cdot P\left(Z_\nu^A=z^A,Z_\nu^B=z^B\right)$$

$$=\sum_{z^A}\sum_{z^B}\left[\Pi^{A\to}(u,v)\right]^{z^A}\left[\Pi^{B\to}(u,v)\right]^{z^B}\cdot P\left(Z_\nu^A=z^A,Z_\nu^B=z^B\right)$$

$$=\Pi_{Z_\nu^A,Z_\nu^B}\left(\Pi^{A\to}(u,v),\Pi^{B\to}(u,v)\right)$$

Δηλαδή :

$$\Pi_{\nu+1}(u,v)=\Pi_\nu\left(\Pi^{A\to}(u,v),\Pi^{B\to}(u,v)\right)$$

Προκύπτει μια διαφορετική κλαδωτή ανέλιξη αν αλλάξει η κατανομή του ζεύγους των δύο τυχαίων μεταβλητών (X , Y).

Στην ειδική περίπτωση όπου ισχύει $\Pi^{A\to}(u,v)=\Pi^{B\to}(u,v)=\Pi(u,v)$ τότε :

$$\Pi_{\nu+1}(u,v)=\Pi_\nu\left(\Pi(u,v),\Pi(u,v)\right),\quad \nu\geq 1$$

με $\Pi_1(u,v)=\Pi(u,v)$.

4.2.2 Πιθανογεννήτρια των ατόμων τύπου A και B της $\nu^{\text{οστής}}$ γενιάς

O Harris(1963) προτείνει ως πιθανογεννήτριες τις γραμμικές κλασματικές μορφές $\Pi^A(u,v)=\dfrac{a+bu+cv}{d+eu+fv}$ και $\Pi^B(u,v)=\dfrac{g+hu+iv}{d+eu+fv}$ οι οποίες θα δώσουν πιθανογεννήτρια των ατόμων τύπου A και B της $\nu^{\text{οστής}}$ γενιάς ίδιας μορφής, δηλαδή γραμμική κλασματική. Όμως, απ' όσο γνωρίζουμε, δεν έχει δοθεί στη βιβλιογραφία ο ακριβής τύπος αυτής της πιθανογεννήτριας.

Εάν θεωρήσουμε

$$\Pi^A(u,v)=\Pi^B(u,v)=\Pi(u,v)=\frac{1-c_1-c_2+c_1u+c_2v}{1+c_1+c_2-c_1u-c_2v}$$ με c_1 , $c_2>0$, $c_1+c_2<1$

τότε :

$$\Pi_1(u,v)=\Pi(u,v)=\frac{1-c_1-c_2+c_1u+c_2v}{1+c_1+c_2-c_1u-c_2v}$$

$$\Pi_2(u,v)=\Pi_1\left(\Pi(u,v),\Pi(u,v)\right)=$$

$$=\frac{\dfrac{(1-c_1-c_2)(1+c_1+c_2-c_1u-c_2v)+c_1(1-c_1-c_2+c_1u+c_2v)+c_2(1-c_1-c_2+c_1u+c_2v)}{1+c_1+c_2-c_1u-c_2v}}{\dfrac{(1+c_1+c_2)(1+c_1+c_2-c_1u-c_2v)-c_1(1-c_1-c_2+c_1u+c_2v)-c_2(1-c_1-c_2+c_1u+c_2v)}{1+c_1+c_2-c_1u-c_2v}}=$$

$$=\frac{(1-c_1-c_2)(1+c_1+c_2-c_1u-c_2v)+c_1(1-c_1-c_2+c_1u+c_2v)+c_2(1-c_1-c_2+c_1u+c_2v)}{(1+c_1+c_2)(1+c_1+c_2-c_1u-c_2v)-c_1(1-c_1-c_2+c_1u+c_2v)-c_2(1-c_1-c_2+c_1u+c_2v)}=$$

$$=\frac{1+(c_1+c_2)-2(c_1+c_2)^2-\left[1-2(c_1+c_2)\right](c_1u+c_2v)}{1+(c_1+c_2)+2(c_1+c_2)^2-\left[1+2(c_1+c_2)\right](c_1u+c_2v)}$$

$$\Pi_3(u,v)=\Pi_2\left(\Pi(u,v),\Pi(u,v)\right)=$$

$$=\frac{1+(c_1+c_2)+2(c_1+c_2)^2-4(c_1+c_2)^3-\left[1+2(c_1+c_2)-4(c_1+c_2)^2\right](c_1u+c_2v)}{1+(c_1+c_2)+2(c_1+c_2)^2+4(c_1+c_2)^3-\left[1+2(c_1+c_2)+4(c_1+c_2)^2\right](c_1u+c_2v)}$$

Θεώρημα 4 : Στην παραπάνω κλαδωτή ανέλιξη ο τύπος για την $\nu^{οστή}$ γενιά απογόνων, για $\nu\in\mathbb{N}^*$, είναι :

$$\Pi_\nu(u,v)=\frac{1+\sum_{i=1}^{\nu-1}2^{i-1}(c_1+c_2)^{i}-2^{\nu-1}(c_1+c_2)^{\nu}-\left[\sum_{i=1}^{\nu-1}2^{i-1}(c_1+c_2)^{i-1}-2^{\nu-1}(c_1+c_2)^{\nu-1}\right](c_1u+c_2v)}{1+\sum_{i=1}^{\nu}2^{i-1}(c_1+c_2)^{i}-\left(\sum_{i=1}^{\nu}2^{i-1}(c_1+c_2)^{i-1}\right)(c_1u+c_2v)}$$

$$=\frac{1-c_1-c_2-2^{\nu}(c_1+c_2)^{\nu}(1-c_1-c_2)-\left[1-2^{\nu}(c_1+c_2)^{\nu-1}(1-c_1-c_2)\right](c_1u+c_2v)}{1-c_1-c_2-2^{\nu}(c_1+c_2)^{\nu+1}-\left[1-2^{\nu}(c_1+c_2)^{\nu}\right](c_1u+c_2v)}$$

(4.1)ότι ισχύει για το ν + 1, δηλαδή να αποδείξουμε ότι :

$$\Pi_{\nu+1}(u,v)=\frac{1+\sum_{i=1}^{\nu}2^{i-1}(c_1+c_2)^{i}-2^{\nu}(c_1+c_2)^{\nu+1}-\left[\sum_{i=1}^{\nu}2^{i-1}(c_1+c_2)^{i-1}-2^{\nu}(c_1+c_2)^{\nu}\right](c_1u+c_2v)}{1+\sum_{i=1}^{\nu+1}2^{i-1}(c_1+c_2)^{i}-\left(\sum_{i=1}^{\nu+1}2^{i-1}(c_1+c_2)^{i-1}\right)(c_1u+c_2v)}$$

Έχουμε:

$$\Pi_{\nu+1}(u,v)=\Pi_\nu\left(\Pi(u,v),\Pi(u,v)\right)=$$

$$=\frac{1+\sum_{i=1}^{\nu-1}2^{i-1}(c_1+c_2)^{i}-2^{\nu-1}(c_1+c_2)^{\nu}}{1+\sum_{i=1}^{\nu}2^{i-1}(c_1+c_2)^{i}-\left(\sum_{i=1}^{\nu}2^{i-1}(c_1+c_2)^{i-1}\right)(c_1+c_2)\dfrac{1-c_1-c_2+c_1u+c_2v}{1+c_1+c_2-c_1u-c_2v}}-$$

$$-\frac{\left[\sum_{i=1}^{\nu-1}2^{i-1}(c_1+c_2)^{i-1}-2^{\nu-1}(c_1+c_2)^{\nu-1}\right](c_1+c_2)\dfrac{1-c_1-c_2+c_1u+c_2v}{1+c_1+c_2-c_1u-c_2v}}{1+\sum_{i=1}^{\nu}2^{i-1}(c_1+c_2)^{i}-\left(\sum_{i=1}^{\nu}2^{i-1}(c_1+c_2)^{i-1}\right)(c_1+c_2)\dfrac{1-c_1-c_2+c_1u+c_2v}{1+c_1+c_2-c_1u-c_2v}}=$$

$$=\frac{\left(1+\sum_{i=1}^{\nu-1}2^{i-1}(c_1+c_2)^{i}-2^{\nu-1}(c_1+c_2)^{\nu}\right)\left[1+c_1+c_2-(c_1u+c_2v)\right]}{\left(1+\sum_{i=1}^{\nu}2^{i-1}(c_1+c_2)^{i}\right)\left[1+c_1+c_2-(c_1u+c_2v)\right]-\left(\sum_{i=1}^{\nu}2^{i-1}(c_1+c_2)^{i-1}\right)(c_1+c_2)(1-c_1-c_2+c_1u+c_2v)}-$$

$$-\frac{\left[\sum_{i=1}^{\nu-1}2^{i-1}(c_1+c_2)^{i-1}-2^{\nu-1}(c_1+c_2)^{\nu-1}\right](c_1+c_2)(1-c_1-c_2+c_1u+c_2v)}{\left(1+\sum_{i=1}^{\nu}2^{i-1}(c_1+c_2)^{i}\right)\left[1+c_1+c_2-(c_1u+c_2v)\right]-\left(\sum_{i=1}^{\nu}2^{i-1}(c_1+c_2)^{i-1}\right)(c_1+c_2)(1-c_1-c_2+c_1u+c_2v)}=$$

$$=\frac{1+(c_1+c_2)-(c_1u+c_2v)+\cancel{\sum_{i=1}^{\nu-1}2^{i-1}(c_1+c_2)^{i}}+\sum_{i=1}^{\nu-1}2^{i-1}(c_1+c_2)^{i+1}-\sum_{i=1}^{\nu-1}2^{i-1}(c_1+c_2)^{i}(c_1u+c_2v)-\cancel{2^{\nu-1}(c_1+c_2)^{\nu}}-2^{\nu-1}(c_1+c_2)^{\nu+1}}{1+c_1+c_2-(c_1u+c_2v)+\sum_{i=1}^{\nu}2^{i-1}(c_1+c_2)^{i+1}-\sum_{i=1}^{\nu}2^{i-1}(c_1+c_2)^{i}(c_1u+c_2v)+\sum_{i=1}^{\nu}2^{i-1}(c_1+c_2)^{i+1}-\sum_{i=1}^{\nu}2^{i-1}(c_1+c_2)^{i}(c_1u+c_2v)}+$$

$$+\frac{2^{\nu-1}(c_1+c_2)^{\nu}(c_1u+c_2v)-\cancel{\sum_{i=1}^{\nu-1}2^{i-1}(c_1+c_2)^{i}}+\sum_{i=1}^{\nu-1}2^{i-1}(c_1+c_2)^{i+1}-\sum_{i=1}^{\nu-1}2^{i-1}(c_1+c_2)^{i}(c_1u+c_2v)+\cancel{2^{\nu-1}(c_1+c_2)^{\nu}}-2^{\nu-1}(c_1+c_2)^{\nu+1}}{1+c_1+c_2-(c_1u+c_2v)+\sum_{i=1}^{\nu}2^{i-1}(c_1+c_2)^{i+1}-\sum_{i=1}^{\nu}2^{i-1}(c_1+c_2)^{i}(c_1u+c_2v)+\sum_{i=1}^{\nu}2^{i-1}(c_1+c_2)^{i+1}-\sum_{i=1}^{\nu}2^{i-1}(c_1+c_2)^{i}(c_1u+c_2v)}+$$

$$+\frac{+2^{\nu-1}(c_1+c_2)^{\nu}(c_1u+c_2v)}{1+c_1+c_2-(c_1u+c_2v)+\sum_{i=1}^{\nu}2^{i-1}(c_1+c_2)^{i+1}-\sum_{i=1}^{\nu}2^{i-1}(c_1+c_2)^{i}(c_1u+c_2v)+\sum_{i=1}^{\nu}2^{i-1}(c_1+c_2)^{i+1}-\sum_{i=1}^{\nu}2^{i-1}(c_1+c_2)^{i}(c_1u+c_2v)}=$$

$$=\frac{1+\left[(c_1+c_2)+\sum_{i=1}^{\nu-1}2^{i}(c_1+c_2)^{i+1}\right]-2^{\nu}(c_1+c_2)^{\nu+1}-(c_1u+c_2v)-\sum_{i=1}^{\nu-1}2^{i}(c_1+c_2)^{i}(c_1u+c_2v)+2^{\nu}(c_1+c_2)^{\nu}(c_1u+c_2v)}{1+\left[c_1+c_2+\sum_{i=1}^{\nu}2^{i}(c_1+c_2)^{i+1}\right]-(c_1u+c_2v)-\sum_{i=1}^{\nu}2^{i}(c_1+c_2)^{i}(c_1u+c_2v)}=$$

$$=\frac{1+\left[(c_1+c_2)+\sum_{i=1}^{\nu-1}2^{i}(c_1+c_2)^{i+1}\right]-2^{\nu}(c_1+c_2)^{\nu+1}-\left[1+\sum_{i=1}^{\nu-1}2^{i}(c_1+c_2)^{i}-2^{\nu}(c_1+c_2)^{\nu}\right](c_1u+c_2v)}{1+\left[(c_1+c_2)+\sum_{i=1}^{\nu}2^{i}(c_1+c_2)^{i+1}\right]-\left[1+\sum_{i=1}^{\nu}2^{i}(c_1+c_2)^{i}\right](c_1u+c_2v)}=$$

$$=\frac{1+\sum_{i=1}^{\nu}2^{i-1}(c_1+c_2)^{i}-2^{\nu}(c_1+c_2)^{\nu+1}-\left[\sum_{i=1}^{\nu}2^{i-1}(c_1+c_2)^{i-1}-2^{\nu}(c_1+c_2)^{\nu}\right](c_1u+c_2v)}{1+\sum_{i=1}^{\nu+1}2^{i-1}(c_1+c_2)^{i}-\left(\sum_{i=1}^{\nu+1}2^{i-1}(c_1+c_2)^{i-1}\right)(c_1u+c_2v)}$$

◆

4.2.3 Η μορφή της πιθανογεννήτριας

Η πιθανογεννήτρια

$$\Pi_{\nu}(u,v)=\frac{1+\sum_{i=1}^{\nu-1}2^{i-1}(c_1+c_2)^{i}-2^{\nu-1}(c_1+c_2)^{\nu}-\left[\sum_{i=1}^{\nu-1}2^{i-1}(c_1+c_2)^{i-1}-2^{\nu-1}(c_1+c_2)^{\nu-1}\right](c_1u+c_2v)}{1+\sum_{i=1}^{\nu}2^{i-1}(c_1+c_2)^{i}-\left(\sum_{i=1}^{\nu}2^{i-1}(c_1+c_2)^{i-1}\right)(c_1u+c_2v)}$$

αν θέσουμε

$$\alpha_1=\sum_{i=1}^{\nu-1}2^{i-1}(c_1+c_2)^{i-1}-2^{\nu-1}(c_1+c_2)^{\nu-1},$$

$$\alpha_2 = 1+\sum_{i=1}^{\nu-1} 2^{i-1}\left(c_1+c_2\right)^{i\nu} - 2^{-}\left(c_1+c_2\right) =$$

$$= 1+\left(c_1+c_2\right)\left(\sum_{i=1}^{\nu-1} 2^{i-1}\left(c_1+c_2\right)^{i-1} - 2^{-}\left(c_1+c_2\right)^{-}\right) = ,$$

$$= 1+\left(c_1+c_2\right)\alpha_1$$

$$\beta_1 = \sum_{i=1}^{\nu} 2^{i-1}\left(c_1+c_2\right)^{i-1} > 0 \text{ και } \beta_2 = 1+\sum_{i=1}^{\nu} 2^{i-1}\left(c_1+c_2\right)^{i} = 1+\left(c_1+c_2\right)\beta_1 > 0$$

γράφεται $\Pi_\nu\left(u,v\right) = \dfrac{\alpha_2-\alpha_1\left(c_1u+c_2v\right)}{\beta_2-\beta_1\left(c_1u+c_2v\right)} = \dfrac{1-\dfrac{\alpha_1c_1}{\alpha_2}u-\dfrac{\alpha_1c_2}{\alpha_2}v}{1-\dfrac{\beta_1c_1}{\beta_2}u-\dfrac{\beta_1c_2}{\beta_2}v}\dfrac{\alpha_2}{\beta_2}.$

Αν θέσουμε $Q_1^* = \dfrac{\alpha_1c_1}{\alpha_2}$, $Q_2^* = \dfrac{\alpha_1c_2}{\alpha_2}$, $Q_1 = \dfrac{\beta_1c_1}{\beta_2} > 0$ και $Q_2 = \dfrac{\beta_1c_2}{\beta_2} > 0$

τότε

$Q_1+Q_2 = \dfrac{\beta_1c_1}{\beta_2}+\dfrac{\beta_1c_2}{\beta_2} = \dfrac{\beta_1\left(c_1+c_2\right)}{1+\beta_1\left(c_1+c_2\right)} < 1$ (επειδή $\beta_1 > 0$ για οποιαδήποτε τιμή των c_1, c_2).

Παρατηρούμε ότι

$$\frac{1-Q_1-Q_2}{1-Q_1^*-Q_2^*} = \frac{1-\dfrac{\beta_1c_1}{\beta_2}-\dfrac{\beta_1c_2}{\beta_2}}{1-\dfrac{\alpha_1c_1}{\alpha_2}-\dfrac{\alpha_1c_2}{\alpha_2}} = \frac{\dfrac{\beta_2-\beta_1\left(c_1+c_2\right)}{\beta_2}}{\dfrac{\alpha_2-\alpha_1\left(c_1+c_2\right)}{\alpha_2}} = \frac{\dfrac{1}{\beta_2}}{\dfrac{1}{\alpha_2}} = \frac{\alpha_2}{\beta_2}$$

οπότε γίνεται $\Pi_\nu\left(u,v\right) = \dfrac{1-\dfrac{\alpha_1c_1}{\alpha_2}u-\dfrac{\alpha_1c_2}{\alpha_2}v}{1-\dfrac{\beta_1c_1}{\beta_2}u-\dfrac{\beta_1c_2}{\beta_2}v}\dfrac{\alpha_2}{\beta_2} = \dfrac{1-Q_1^*u-Q_2^*v}{1-Q_1^*-Q_2^*}\dfrac{1-Q_1-Q_2}{1-Q_1u-Q_2v}$

Όταν $c_1+c_2 < \dfrac{1}{2}$ τότε $\alpha_1 > 0$ οπότε :

$$Q_1^* = \frac{\alpha_1c_1}{1+\alpha_1\left(c_1+c_2\right)} > 0 \text{ και } Q_2^* = \frac{\alpha_1c_2}{1+\alpha_1\left(c_1+c_2\right)} > 0.$$

Επίσης $Q_1^*+Q_2^* = \dfrac{\alpha_1c_1}{\alpha_2}+\dfrac{\alpha_1c_2}{\alpha_2} = \dfrac{\alpha_1\left(c_1+c_2\right)}{1+\alpha_1\left(c_1+c_2\right)} < 1$ και $Q_i^* < Q_i$, i = 1, 2, επειδή

$$\alpha_1 < \beta_1 \Rightarrow \alpha_1+\beta_1\alpha_1\left(c_1+c_2\right) < \beta_1+\beta_1\alpha_1\left(c_1+c_2\right) \Rightarrow$$

$$\alpha_1\left[1+\beta_1\left(c_1+c_2\right)\right] < \beta_1\left[1+\alpha_1\left(c_1+c_2\right)\right] \overset{\alpha_1>0}{\Longrightarrow}$$

$$\frac{\alpha_1}{1+\alpha_1\left(c_1+c_2\right)} < \frac{\beta_1}{1+\beta_1\left(c_1+c_2\right)} \Rightarrow$$

$$\frac{\alpha_1c_i}{1+\alpha_1\left(c_1+c_2\right)} < \frac{\beta_1c_i}{1+\beta_1\left(c_1+c_2\right)} \Rightarrow$$

$$Q_i^* < Q_i$$

Οπότε αν $c_1 + c_2 < \dfrac{1}{2}$ ισχύει ότι $0 < Q_i^* < Q_i < 1,\ i = 1, 2,$ και άρα η $\Pi_\nu(u,v)$ γράφεται ως το πηλίκο των γ.σ.π. δύο διδιάστατων γεωμετρικών κατανομών.

4.2.4 Μια ειδική περίπτωση

Αν $c_1 = c_2 = c$ τότε $c_1 + c_2 = 2c$ και η πιθανογεννήτρια γίνεται

$$\Pi(u,v) = \frac{1-2c+cu+cv}{1+2c-cu-cv} = \frac{1-2c+c(u+v)}{1+2c-c(u+v)}$$

Δηλαδή

$$\Pi_1(u,v) = \Pi(u,v) = \frac{1-2c+c(u+v)}{1+2c-c(u+v)}$$

$$\Pi_2(u,v) = \Pi_1(\Pi(u,v),\Pi(u,v)) =$$

$$= \frac{\dfrac{(1-2c)(1+2c-c(u+v)) + c\cdot 2(1-2c+c(u+v))}{1+2c-c(u+v)}}{\dfrac{(1+2c)(1+2c-c(u+v)) - c\cdot 2(1-2c+c(u+v))}{1+2c-c(u+v)}} =$$

$$= \frac{(1-2c)(1+2c-c(u+v)) + c\cdot 2(1-2c+c(u+v))}{(1+2c)(1+2c-c(u+v)) - c\cdot 2(1-2c+c(u+v))} =$$

$$= \frac{1+2c-c(u+v) \cancel{-2c} - 4c^2 + 2c^2(u+v) \cancel{+2c} - 4c^2 + 2c^2(u+v)}{1+2c-c(u+v) \cancel{+2c} + 4c^2 - 2c^2(u+v) \cancel{-2c} + 4c^2 - 2c^2(u+v)} =$$

$$= \frac{1+2c-8c^2 - c(u+v) + 4c^2(u+v)}{1+2c+8c^2 - c(u+v) - 4c^2(u+v)} =$$

$$= \frac{1+2c-8c^2 - (c-4c^2)(u+v)}{1+2c+8c^2 - (c+4c^2)(u+v)}$$

$$\Pi_3(u,v) = \Pi_2(\Pi(u,v),\Pi(u,v)) =$$

$$= \frac{1+2c+8c^2-32c^3 - (c+4c^2-16c^3)(u+v)}{1+2c+8c^2+32c^3 - (c+4c^2+16c^3)(u+v)}$$

Επομένως ο τύπος για την $\nu^{\text{οστή}}$ γενιά απογόνων είναι :

$$\Pi_\nu(u,v) = \frac{1 + \sum_{i=1}^{\nu-1} 2^{i-1}(2c)^{i} - 2^{\nu-1}(2c)^{\nu} - \left[\sum_{i=1}^{\nu-1} 2^{i-1}(2c)^{i-1} - 2^{\nu-1}(2c)^{\nu-1}\right](cu+cv)}{1 + \sum_{i=1}^{\nu} 2^{i-1}(2c)^{i} - \left(\sum_{i=1}^{\nu} 2^{i-1}(2c)^{i-1}\right)(cu+cv)}$$

δηλαδή

$$\Pi_\nu\left(u,v\right)=\frac{1+\sum_{i=1}^{\nu-1}2^{2i-1}c^{i}-2^{2\nu-2}c^{\nu}-\left[\sum_{i=1}^{\nu-1}2^{2i-2}c^{i}-2^{2\nu-2}c^{\nu}\right]\left(u+v\right)}{1+\sum_{i=1}^{\nu}2^{2i-1}c^{i}-\left(\sum_{i=1}^{\nu}2^{2(i-1)}c^{i}\right)\left(u+v\right)}.$$

Παράρτημα

1. x_c(1117,149,27,3)

```
probGP_function(N,p,l){
   x_rep(0,N+1)
   x[1]_p*exp(l)
   for (j in 2:N) {
     x[j]_(1-p)*x[j-1]+(p*exp(l)*((-l)^(j-1)))/gamma(j)
     }
   x[N+1]_1-sum(x[1:N])
return(x)
}

y1_probGP(3,1-(0.0065/0.0447),0.0065)
y2_y1*sum(x)
y2
sum(y2)

(x-y2)^2
(x-y2)^2/y2

sum((x-y2)^2/y2)
1-pchisq(sum((x-y2)^2/y2),1)


x2_function(y,y.anamenomeno,df){
  x2_sum((y-y.anamenomeno)^2/y.anamenomeno)
  pvalue_1-pchisq(x2,df)
  return(x2,pvalue)
  }
```

εκτιμητές :

```
p_1/(1+sqrt(var(x)-mean(x)))
l_((1-p)/p)-mean(x)
```

2. rNegBinPoisson_function(n,k,q,l,m,pplot=T,dplot=T,shist=T) {

```
    p_1-q
    F1_rep(0,m+1)
    F1[1]_(p^k)*exp(l)
    F1[2]_(k*q-l)*F1[1]
    for (i in 1:(m-2)) {
       F1[i+2]_(((k+i)*q-l)*F1[i+1]+l*q*F1[i])/(i+1) }
    if (pplot) {
            mold_m
            m_min(15,m)
            x_c(0:(m-1))
```

```
#            y1_dnbinom(x,k,p)
             y1_rep(0,m)
             y1[1]_p^k
             for (i in 0:(m-2)) {
                y1[i+2]_(k+i)*q*y1[i+1]/(i+1)
             }
             y_dpois(x,l)
             ymax_max(F1[1:m],y1,y)
             plot(c(0:(m-1)),F1[1:m],ylim=c(0,ymax),xlab="Neg.Binomial-
Poisson",ylab="Probability Density Function",type="b")
             points(x,y1,pch=7,col=3)
             lines(x,y1,lwd=3,col=3)
             points(x,y,pch=11,col=2)
             lines(x,y,lwd=3,col=2)
             m1_ymax
             text(m-5,m1,"k=")
             text(m-3.5,m1,k)
             text(m-5,m1*0.9,"q=")
             text(m-3.5,m1*0.9,q)
             text(m-5,m1*0.8,"lambda=")
             text(m-2.5,m1*0.8,l)
             legend(m-5,m1*0.7,  c("NB-P","NegBin","Pois"),marks=c(1,7,11),
col=c(1,3,2))
             m_mold
    }
    p1_F1
    for (i in 2:m) {
       F1[i]_F1[i]+F1[i-1] }
    F1[m+1]_1
    U_runif(n)
    Y_rep(0,n)
    for (i in 1:n) {
       j_1
       while (U[i]>F1[j]) {
             j_j+1 }
       Y[i]_j-1
    }
    if (max(Y[1:n])==m) {
       print("exw kakes times sto deigma")
    }
    if (shist) {
             mold_m
             y_table(category(Y, levels=as.character(0:max(Y)), ordered=F))
             dimnames(y)

    p_barplot(y,space=.2,col=3,names=dimnames(y),axes=F,xlab="Random
Sample NegBin-Poisson",ylab="Observed values")
             lines(p,p1[1:(max(Y)+1)]*n,lwd=4,col=1)
             points(p,p1[1:(max(Y)+1)]*n,pch=1,col=1)
             text(p,y+1*n/100,y)
```

```
        m1_max(table(Y))
        m_max(Y)
        text(m*0.8,m1,"k=")
        text(m*0.9,m1,k)
        text(m*0.8,m1*0.9,"q=")
        text(m*0.9,m1*0.9,q)
        text(m*0.8,m1*0.8,"lambda=")
        text(m*0.95,m1*0.8,l)
        m_mold
    }
    if (dplot) {
        x_c(0:(m-1))
        y1_c(rep(c(0,F1[1:m]),c(rep(2,m+1))))
        x_c(x,x-0.0001)
        x_c(x,-0.5,m-1+0.5)
        x_sort(x)
        plot(x,y1,type="l",xlab="Neg.Binomial-
Poisson",ylab="Cumulative Distribution Function")
        text(m-5,0.9,"k=")
        text(m-3.5,0.9,k)
        text(m-5,0.8,"q=")
        text(m-3.5,0.8,q)
        text(m-5,0.7,"lambda=")
        text(m-2,0.7,l)
    }
    return(Y)
}

set.seed(100)
x_rNegBinPoisson(1000,1,0.7,0.6,40)
x_rNegBinPoisson(1000,1,0.7,0.3,40)
x_rNegBinPoisson(1000,1,0.3,0.2,40)
x_rNegBinPoisson(1000,1,0.5,0.45,40)
x_rNegBinPoisson(1000,3,0.7,2,40)
x_rNegBinPoisson(1000,3,0.7,0.6,40)
x_rNegBinPoisson(1000,3,0.7,0.2,40)
x_rNegBinPoisson(1000,3,0.3,0.2,40)
x_rNegBinPoisson(1000,3,0.3,0.8,40)
x_rNegBinPoisson(1000,0.3,0.7,0.1,40)
x_rNegBinPoisson(1000,0.3,0.3,0.05,40)
```

εκτιμητές :

```
n_length(x)
m1_mean(x)
xmax_max(x)
ax_table(category(x, levels=as.character(0:xmax), ordered=F))
ax
m2_2*ax[3]
m3_0
```

```
for (i in 3:xmax) {
      m2_m2+i*(i-1)*ax[i+1]
      m3_m3+i*(i-1)*(i-2)*ax[i+1]
}
m2_m2/n
m3_m3/n
a_m3-3*m2*m1+2*m1*m1*m1
b_m2-m1*m1
k_4*b^3/(a*a)
k
q_a/(a+2*b)
q
l_-m1+2*b^2/a
l


q_1-1/(1+sqrt((m2-m1*m1)/k))
q
l_sqrt(k*(m2-m1*m1))-m1
l
```

ή εναλλακτικά

```
probNBP_function(N,k,q,l){
      p_1-q
      F1_rep(0,N+1)
      F1[1]_(p^k)*exp(l)
      F1[2]_(k*q-l)*F1[1]
      for (i in 1:(N-2)) {
          F1[i+2]_(((k+i)*q-l)*F1[i+1]+l*q*F1[i])/(i+1) }
        F1[N+1]_1-sum(F1[1:N])
        return(F1)
}

data_c(907,275,88,23,3)
N_length(data)
N_N-1
x_rep(0:N,data)
n_sum(data)

m1_sum(x)/n
m2_sum(x*(x-1))/n
m3_sum(x*(x-1)*(x-2))/n

a_m3-3*m2*m1+2*m1^3
b_m2-m1^2

k_4*b^3/a^2
q_sqrt(b)/(sqrt(b)+sqrt(k))
l_-m1+2*b^2/abs(a)
```

```
y1_probNBP(N,k,q,l)
y2_y1*n
y2
sum(y2)

(data-y2)^2
(data-y2)^2/y2

sum((data-y2)^2/y2)
1-pchisq(sum((data-y2)^2/y2),N+1-1-3)
```

3. rNegBinGeom_function(n,k,q,q1,m,pplot=T,dplot=T,shist=T) {

```
        p_1-q
        p1_1-q1
        F1_rep(0,m)
        F1[1]_(p^k)/p1
        for (i in 1:(m-1)) {
          F1[i+1]_q*(k+i-2)*((k+i-1)*q-q1*i)*F1[i]/(i*((k+i-2)*q-q1*(i-
1))) }
        if (k==1) {
          F1_rep(0,m)
          F1[1]_p/p1
          F1[2]_p/p1*(q-q1)
        for (i in 2:(m-1)) {
          F1[i+1]_q*F1[i] }
        }
        if (pplot) {
                mold_m
                m_min(15,m)
                x_c(0:(m-1))
#               y1_dnbinom(x,k,p)
                y1_rep(0,m)
                y1[1]_p^k
                for (i in 0:(m-2)) {
                   y1[i+2]_(k+i)*q*y1[i+1]/(i+1)
                }
#               y_dpois(x,l)
                y_rep(0,m)
                y[1]_p1
                for (i in 0:(m-2)) {
                   y[i+2]_q1*y[i+1]
                }
                ymax_max(F1[1:m],y1,y)
                plot(c(0:(m-
1)),F1[1:m],ylim=c(0,ymax),xlab="Neg.Binomial-
Geometric",ylab="Probability Mass Function",type="b")
                points(x,y1,pch=7,col=3)
```

```
		lines(x,y1,lwd=3,col=3)
		points(x,y,pch=11,col=2)
		lines(x,y,lwd=3,col=2)
		m1_ymax
		text(m-5,m1,"k=")
		text(m-3.5,m1,k)
		text(m-5,m1*0.9,"q1=")
		text(m-3.5,m1*0.9,q)
		text(m-5,m1*0.8,"q=")
		text(m-3.5,m1*0.8,q1)
		legend(m-5,m1*0.7,                          c("NB-
G","NegBin","Geom"),marks=c(1,7,11), col=c(1,3,2))
		m_mold
	}
	p1_F1
	for (i in 2:m) {
	   F1[i]_F1[i]+F1[i-1] }
	F1[m+1]_1
	U_runif(n)
	Y_rep(0,n)
	for (i in 1:n) {
	   j_1
	   while (U[i]>F1[j]) {
		j_j+1 }
	   Y[i]_j-1
	}
	if (max(Y[1:n])==m) {
	   print("exw kakes times sto deigma")
	}
	if (shist) {
		mold_m
		y_table(category(Y,         levels=as.character(0:max(Y)),
ordered=F))
		dimnames(y)

	p_barplot(y,space=.2,col=3,names=dimnames(y),axes=F,xlab="Ra
ndom Sample NegBin-Poisson",ylab="Observed values")
		lines(p,p1[1:(max(Y)+1)]*n,lwd=4,col=1)
		points(p,p1[1:(max(Y)+1)]*n,pch=1,col=1)
		text(p,y+1*n/100,y)
		m1_max(table(Y))
		m_max(Y)
		text(m*0.8,m1,"k=")
		text(m*0.9,m1,k)
		text(m*0.8,m1*0.9,"q1=")
		text(m*0.9,m1*0.9,q)
		text(m*0.8,m1*0.8,"q=")
		text(m*0.95,m1*0.8,q1)
		m_mold
	}
```

```
        if (dplot) {
                x_c(0:(m-1))
                y1_c(rep(c(0,F1[1:m]),c(rep(2,m+1))))
                x_c(x,x-0.0001)
                x_c(x,-0.5,m-1+0.5)
                x_sort(x)
                plot(x,y1,type="l",xlab="Neg.Binomial-
Geom",ylab="Cumulative Distribution Function")
                text(m-5,0.9,"k=")
                text(m-3.5,0.9,k)
                text(m-5,0.8,"q1=")
                text(m-3.5,0.8,q)
                text(m-5,0.7,"q=")
                text(m-2,0.7,q1)
        }
        return(Y)
}

set.seed(100)
x_rNegBinGeom(1000,1,0.7,0.6,40)
x_rNegBinGeom(1000,1,0.7,0.3,40)
x_rNegBinGeom(1000,1,0.3,0.2,40)
x_rNegBinGeom(1000,1,0.5,0.45,40)
x_rNegBinGeom(1000,3,0.7,0.6,40)
x_rNegBinGeom(1000,3,0.7,0.2,40)
x_rNegBinGeom(1000,3,0.3,0.2,40)
x_rNegBinGeom(1000,0.3,0.7,0.2,40)
x_rNegBinGeom(1000,0.3,0.7,0.15,40)
x_rNegBinGeom(1000,0.3,0.7,0.1,40)
x_rNegBinGeom(1000,0.3,0.3,0.05,40)
```

4.
```
restart;
with(student);
PN :=(1-c)*z+c1*u+c2*v;
AN :=(1-c+c1*u+c2*v);
PD :=(1+c)*z-c1*u-c2*v;
AD :=1+c-c1*u-c2*v;
PN :=unapply(PN,u,v,z);
PD :=unapply(PD,u,v,z);
n :=4;
printlevel:=4;
for i from 1 to n do
    AN :=unapply(AN,u,v);
    AD :=unapply(AD,u,v);
    A :=PN(AN(u,v),AN(u,v),AD(u,v));
    expand(%,u,v);
    simplify(%);
    B :=PD(AN(u,v),AN(u,v),AD(u,v));
    expand(%,u,v);
```

```
        simplify(%);
        AN :=A;
        AD :=B;
    od;
```

Βιβλιογραφία

Douglas, J. B. (1980). *Analysis with standard Contagious Distributions*, International Co-operative House: Bourtonsville, Maryland.

Harris, T.E. (1963). *The Theory of Branching Processes,* Springer-Verlag: Berlin.

Jayasree, G. and Swamy, R. J. R. (2006). Some New Discrete Probability Distributions Derived from Power Series Distributions. *Communications in Statistics—Theory and Methods*, **35**, 1555–1567.

Joffe, A. and Letac, G. (2006). Multitype linear fractional branching processes. Journal of Applied Probabilities, **43**, 1091-1106.

Johnson, N. L. , Kotz, S. and Kemp, A. W. (1992). *Univariate Discrete distributions*, Wiley: New York, 2nd ed.

Johnson, N. L. , Kemp, A. W. and Kotz, S. (2005). *Univariate Discrete distributions*, Wiley: New York, 3nd ed.

Kemp, A. W. (1979). Convolutions involving binomial pseudo-variables. *Sankhyã Series A*, **41**, 232-243.

Kimmel, M. and Axelrod, D. E. (2002). *Branching processes in biology, Interdisciplinary Applied Mathematics*, Vol. **19**, Springer: New York.

Kocherlakota, S. and Kocherlakota, K. (1992). *Bivariate Discrete Distributions,* Marcel Dekker: New York.

Ord, J. K. (1972). *Families of Frequency Distributions*, Griffin: London.

Pollak, E. (1974). Survival probabilities and extinction times for some multitype branching processes. *Advances in Applied Probability*, **6**, 446-462.

Rao A. S. R. S., and Kakehashi, M. (2005). Incubation-time distribution in back-calculation applied to HIV/AIDS data in India. *Mathematical Biosciences and Engineering*, **2**, 263-277.

Scheinok, P. (1964). Estimation of a Component of a Convolution, when the other Component is of Exponential Type. *Technometrics*, **6**, 222-224.

Νικολαΐδου, Χ. Α. και Πιπερίγκου, Β. Ε. (2010). Κλαδωτές ανελίξεις με πιθανογεννήτρια το πηλίκο δύο πιθανογεννητριών και άλλες συναφείς κατανομές. 23ο Πανελλήνιο Συνέδριο Στατιστικής, Βέροια.