ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

"ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ MITTAG-LEFFLER"

Διπλωματική Εργασία για την απόκτηση Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

Επιβλέπουσα: Χρυσή Κοκολογιαννάκη

Ρίζος Δημήτριος

Πάτρα 2010

Αισθάνομαι την ανάγκη να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στην επιβλέπουσα καθηγήτρια κ. Χρυσή Κοκολογιαννάκη για τη μεγάλη προθυμία καθώς επίσης και την υποδειγματική της καθοδήγηση στην εκπόνηση της παρούσης διπλωματικής εργασίας. Την ευχαριστώ ακόμα για την υπομονή και την εμπιστοσύνη που μου έδειξε κατά τη διάρκεια της άκρως εποικοδομητικής συνεργασίας μας.

Ευχαριστώ επίσης τον καθηγητή κ. Βασίλη Παπαγεωργίου όχι μόνο για τις γνώσεις που μου μετέφερε ως διδάσκων, αλλά και γιατί ήταν πάντα πρόθυμος να με βοηθήσει καθ’ όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.

Ακόμη ευχαριστώ τον καθηγητή κ. Ιάκωβο Βαν ντερ Βέιλε ο οποίος συνέβαλε καταλυτικά στην πρόοδο των σπουδών μου προπτυχιακά με την πολύτιμη διδασκαλία του.

Κυρίως όμως οφείλω να ευχαριστήσω την οικογένεια μου για τη στήριξη που μου παρείχε όλα αυτά τα χρόνια των σπουδών μου. Σε αυτήν οφείλεται ότι έχω μέχρι σήμερα επιτύχει και σε αυτήν αφιερώνεται η παρακάτω εργασία.

Ρίζος Π. Δημήτριος

Περίληψη

Οι συναρτήσεις Mittag-Leffler ορίζονται υπό μορφή σειράς ως εξής:

$$E_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + 1)}, \quad E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)}, \quad z \in C, \quad \alpha, \beta \in C, \quad \text{με}$$

$\Re(\alpha) > 0$, $\Re(\beta) > 0$.

Αποτελούν δε γενίκευση της εκθετικής σειράς, για $z \in C$ και της γεωμετρικής σειράς για $|z| < 1$. Χρησιμοποιούνται στις κλασματικές διαφορικές εξισώσεις, διότι η λύση τους εκφράζεται με τις συναρτήσεις Mittag-Leffler και γενικεύσεις αυτών.

Η εργασία αυτή αποτελεί ανασκόπηση για τις συναρτήσεις Mittag-Leffler και περιλαμβάνει εκτός από τους ορισμούς αυτών και των γενικεύσεών τους, ιδιότητες και αναδρομικές σχέσεις που ικανοποιούν. Εκφράζουμε γνωστές συναρτήσεις με τη βοήθεια των συναρτήσεων Mittag-Leffler. Βρίσκουμε το μετασχηματισμό Laplace αυτών και των γενικεύσεών τους, διότι ο μετασχηματισμός Laplace είναι μια μέθοδος επίλυσης των κλασματικών διαφορικών εξισώσεων. Τέλος, αναφέρουμε εφαρμογές και προβλήματα, που εκφράζονται μέσω κλασματικών διαφορικών εξισώσεων και δίνουμε τη λύση τους με μορφή συναρτήσεων Mittag-Leffler.

Abstract

The Mittag-Leffler functions are defined by series with the following form:

$E_\alpha(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+1)}$, $E_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+\beta)}$, $z\in C$, $\alpha,\beta\in C$ with $\Re(\alpha)>0$, $\Re(\beta)>0$.

They are a generalization of the exponential series, for $z\in C$ and geometric series for $|z|<1$. Moreover, they are used in fractional differential equations, because their solution is expressed with the Mittag-Leffler functions and generalizations of them.

This diploma thesis constitutes a review of the Mittag-Leffler functions and includes besides the definitions of them and their generalizations, some properties and recurrence relations that they satisfy. We express some acquaintances functions with the Mittag-Leffler functions. In addition, we calculate the Laplace transform of these functions and their generalizations, which is useful in deriving the solution of fractional differential equations. Finally, we present some applications and problems, which are expressed through fractional differential equations and we give their solution with terms of the Mittag-Leffler functions.

1. Ορισμοί

Οι βασικές συναρτήσεις Mittag-Leffler με μία και δύο παραμέτρους ορίζονται αντίστοιχα ως εξής:

<u>**Ορισμός 1.**</u> [3,26]
Η συνάρτηση

$$E_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + 1)}, \quad z \in C, \alpha \in C, \Re(\alpha) > 0 \qquad (1.1)$$

ονομάζεται **συνάρτηση Mittag-Leffler,** όπου $\Gamma(z)$ είναι η συνάρτηση Γάμμα:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \Re(z) > 0.$$

Η συνάρτηση (1.1) εισήχθη από το Σουηδό μαθηματικό G.M. Mittag-Leffler σε μια εργασία του, που αφορούσε στις σειρές το 1903 [Mittag-Leffler,1903]. Οι ιδιότητες της συνάρτησης $E_\alpha(z)$ μελετήθηκαν στις εργασίες του ιδίου, το 1904 και 1905 [14,15,16,17,18] και από τον Wiman το 1905 [28,29].

Η συνάρτηση (1.1) είναι ακέραια συνάρτηση και αποτελεί επέκταση της γεωμετρικής σειράς και της εκθετικής συνάρτησης, αφού από τον ορισμό 1 για $\alpha = 0$ και $\alpha = 1$, έχουμε:

$$E_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, \quad |z| < 1 \qquad (1.2)$$

και

$$E_1(z) = \sum_{n-0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z, \quad z \in C \qquad (1.3)$$

αντίστοιχα.

<u>**Ορισμός 2.**</u> [3,26]
Η συνάρτηση

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)}, \quad z \in C,\ \alpha, \beta \in C,\ \Re(\alpha) > 0,\ \Re(\beta) > 0 \qquad (1.4)$$

είναι μια πρώτη γενίκευση της (1.1) αφού

$$E_{\alpha,1}(z) = E_\alpha(z)\,. \tag{1.5}$$

Η συνάρτηση αυτή εισήχθη από τον Wiman 1905 [Wiman 1905] και βασικές της ιδιότητες μελετήθηκαν πρώτα από τους Agarwal και Humbert το 1953.

Η συνάρτηση $E_{\alpha,\beta}(z)$ θεωρείται επέκταση της γεωμετρικής σειράς, αφού για $\alpha = 0$ η (1.4) δίνει:

$$E_{0,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\beta)} = \frac{1}{\Gamma(\beta)(1-z)},\ |z| < 1\,. \tag{1.6}$$

Οι συναρτήσεις (1.1) και (1.4) εμφανίζονται στη λύση ορισμένων προβλημάτων συνοριακών τιμών και κλασματικών ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων τύπου Volterra. Πρώτοι οι Hille και Tamarkin (1930) είχαν παρουσιάσει μια λύση της εξίσωσης Abel-Volterra με όρους της συνάρτησης Mittag-Leffler.

Τα τελευταία χρόνια υπάρχει αυξημένο ενδιαφέρον για τις συναρτήσεις Mittag-Leffler εξαιτίας της χρησιμότητάς τους σε αρκετά εφαρμοσμένα προβλήματα όπως είναι στη ρεολογία, στα ηλεκτρικά δίκτυα, στη θεωρία στατιστικών κατανομών, στην περιγραφή φαινομένων εκτόνωσης, στα μιγαδικά φυσικά και βιοφυσικά συστήματα, στις κλασματικές κινητικές εξισώσεις και αλλού.

2. Ειδικές περιπτώσεις των συναρτήσεων Mittag-Leffler

Οι ορισμοί (1.1) και (1.4) για συγκεκριμένες τιμές των α και α, β αντίστοιχα δίνουν εκτός από τις σχέσεις (1.2), (1.3) και (1.5) και τις παρακάτω[3]:

i. $E_2(z^2) = \cosh z, \quad z \in C$

διότι: $E_2(z^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{\Gamma(2n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$, και $\cosh z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2} = \dfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n + (-z)^n}{n!} = \dfrac{1}{2}2\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^{2n}}{(2n)!}$.

ii. $E_2(-z^2) = \cos z, \quad z \in C$

διότι: $E_2(-z^2) = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n z^{2n}}{\Gamma(2n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = \cos z$

iii. $E_3(z) = \dfrac{1}{3}\left[e^{z^{1/3}} + 2e^{-\frac{z^{1/3}}{2}}\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}z^{1/3}\right)\right], \quad z \in C$

διότι: $2e^{-\frac{z^{1/3}}{2}}\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}z^{1/3}\right) = e^{-\frac{z^{1/3}}{2}}\left[e^{i\frac{\sqrt{3}}{2}z^{1/3}} + e^{-i\frac{\sqrt{3}}{2}z^{1/3}}\right]$

$$= e^{\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z^{1/3}} + e^{\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z^{1/3}}$$

Όμως, $e^{\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z^{1/3}} = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n z^{n/3}}{n!}$

$$e^{\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z^{1/3}} = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n z^{n/3}}{n!}$$

Οπότε, $2e^{-\frac{z^{1/3}}{2}}\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}z^{1/3}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n + \left(-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\right]\dfrac{z^{n/3}}{n!}$

Αν θέσουμε $\alpha = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ τότε $\overline{\alpha} = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ και $|\alpha| = \sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}} = 1$.

Έχουμε $\cos\vartheta = -\dfrac{1}{2}$ και $\sin\vartheta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ όποτε $\vartheta = \dfrac{2\pi}{3}$.

Τότε $\alpha = \cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3} \qquad \Rightarrow$

$\alpha^n = \cos\dfrac{2n\pi}{3} + i\sin\dfrac{2n\pi}{3}$ και $\overline{\alpha}^n = \cos\dfrac{2n\pi}{3} - i\sin\dfrac{2n\pi}{3} \Rightarrow$

$$\alpha^n + \overline{\alpha}^n = 2\cos\frac{2n\pi}{3}.$$

Οπότε, έχουμε ότι:

$$e^{z^{1/3}} + 2e^{-\frac{z^{1/3}}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}z^{1/3}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n/3}}{n!} + 2\sum_{n=0}^{\infty}\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\frac{z^{n/3}}{n!} =$$

$$= 1 + \frac{z^{1/3}}{1!} + \frac{z^{2/3}}{2!} + \frac{z^{3/3}}{3!} + \ldots +$$

$$+ 2\left[1 - \frac{1}{2}\frac{z^{1/3}}{1!} - \frac{1}{2}\frac{z^{2/3}}{2!} + \frac{1}{2}\frac{z^{3/3}}{3!} - \frac{1}{2}\frac{z^{4/3}}{4!} - \frac{1}{2}\frac{z^{5/3}}{5!} + \frac{1}{2}\frac{z^{6/3}}{6!} + \ldots\right] =$$

$$= 1 + \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{6!} + \frac{z^3}{9!} + \ldots + 2\left[1 + \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{6!} + \frac{z^3}{9!} + \ldots\right]$$

$$= 3\left[1 + \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{(3\cdot 2)!} + \frac{z^3}{(3\cdot 3)!} + \ldots\right] = 3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(3n)!} = 3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(3n+1)} = 3E_3(z).\square$$

iv. $E_4(z) = \frac{1}{2}\left[\cos(z^{1/4}) + \cosh(z^{1/4})\right], \quad z \in C$

διότι: από την (i), (ii) και την σχέση (3.1)

$\cos(z^{1/4}) = E_2(-\sqrt{z})$ και $\cosh(z^{1/4}) = E_2(\sqrt{z})$

v. $E_{1/2}(\pm z^{1/2}) = e^z\left[1 + erf(\pm z^{1/2})\right] = e^z erfc(\mp z^{1/2}), \quad z \in C$

όπου η *erfc* είναι η συμπληρωματική συνάρτηση σφάλματος. Υπενθυμίζουμε ότι η συνάρτηση σφάλματος ορίζεται ως εξής:

$$erf(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z \exp(-t^2)dt$$

και ισχύει

$$erfc(z) = 1 - erf(z),\; z \in C.$$

vi. $E_{\frac{n}{2}}(z) = {}_0F_{n-1}\left(0; \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}; \frac{z^2}{n^n}\right)$

$$+\frac{2^{(n+1)/2}z}{n!\sqrt{\pi}}\,{}_1F_{2n-1}\left(1; \frac{n+2}{2n}, \frac{n+3}{2n}, \ldots, \frac{3n}{2n}; \frac{z^2}{2n}\right)$$

όπου ${}_pF_q$ είναι η υπεργεωμετρική συνάρτηση, που ορίζεται :

$${}_pF_q\left(\alpha_1,\ldots,\alpha_p;\beta_1,\ldots,\beta_q;z\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_k\cdots(\alpha_p)_k}{(\beta_1)_k\cdots(\beta_q)_k}\frac{z^k}{k!}, \quad z,\alpha_i,\beta_j\in C,$$

όπου

$$(\alpha)_k=\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k-1)=\frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)},$$

είναι το σύμβολο του Pochhammer. Η συνάρτηση ${}_pF_q$ είναι γενίκευση της γνωστής υπεργεωμετρικής συνάρτησης:

$${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n}\frac{z^n}{n!}.$$

vii. $E_{1,2}(z)=\dfrac{e^z-1}{z}, \quad z\in C$

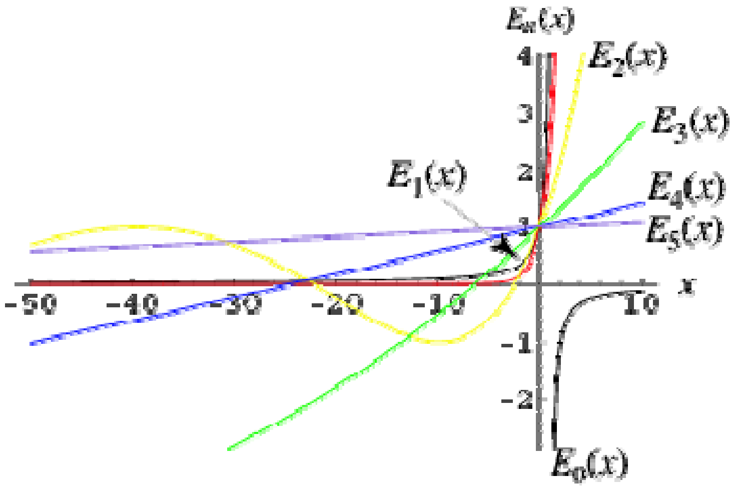
διότι: $E_{1,2}(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(n+2)}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{\Gamma(n+2)}=\frac{1}{z}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(n+1)}=\frac{1}{z}(e^z-1).$

viii. $E_{2,2}(z)=\dfrac{\sinh\left(\sqrt{z}\right)}{\sqrt{z}}$

διότι:

$$\frac{\sinh\left(\sqrt{z}\right)}{\sqrt{z}}=\frac{e^{\sqrt{z}}-e^{-\sqrt{z}}}{2\sqrt{z}}=\frac{1}{2\sqrt{z}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\sqrt{z})^n-(-\sqrt{z})^n}{n!}=\frac{1}{2\sqrt{z}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(\sqrt{z})^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\sqrt{z})^{2n}}{\Gamma(2n+2)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(2n+2)}=E_{2,2}(z).$$



Σχήμα 1: Διάγραμμα της συνάρτησης Mittag-Leffler $E_\alpha(x)$ *για* $\alpha = 0,1,2,3,4,5$.

3. Ιδιότητες και αναδρομικές σχέσεις των συναρτήσεων Mittag-Leffler

Οι συναρτήσεις Mittag-Leffler ικανοποιούν τις ακόλουθες σχέσεις[1,3]:

1) $$E_{2\alpha}(z^2) = \frac{1}{2}\left[E_\alpha(z) + E_\alpha(-z)\right] \qquad (3.1)$$

διότι $$E_{2\alpha}(z^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z^2)^n}{\Gamma(2\alpha n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2\alpha n)!} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n + (-z)^n}{(\alpha n)!}$$
$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+1)} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^n}{\Gamma(\alpha n+1)}\right] = \frac{1}{2}\left[E_\alpha(z) + E_\alpha(-z)\right].$$

2) $$E_\alpha(-z) = E_{2\alpha}(z^2) - zE_{2\alpha,1+\alpha}(z^2) \qquad (3.2)$$

διότι: $$E_{2\alpha}(z^2) - zE_{2\alpha,1+\alpha}(z^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z^2)^n}{\Gamma(2\alpha n+1)} - z\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z^2)^n}{\Gamma(2\alpha n+\alpha+1)}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z^2)^n}{\Gamma(2\alpha n+1)} - z\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z^2)^n}{\Gamma(2\alpha n+\alpha+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2\alpha n)!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{[\alpha(2n+1)]!}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n+(-z)^n}{(\alpha n)!}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n-(-z)^n}{(\alpha n)!}$$

$$=\frac{1}{2}\left[E_\alpha(z)+E_\alpha(-z)\right]-\frac{1}{2}\left[E_\alpha(z)-E_\alpha(-z)\right]=E_\alpha(-z).$$

3) $E_\alpha(-iz)=E_{2\alpha}(-z^2)-izE_{2\alpha,1+\alpha}(-z^2),\quad i=\sqrt{-1}$ (3.3)

η οποία προκύπτει από την (3.2) αν θέσουμε όπου z το (iz) με $i=\sqrt{-1}$.

4) $E_{\alpha,\beta}(z)=zE_{\alpha,\alpha+\beta}(z)+\dfrac{1}{\Gamma(\beta)}$ (3.4)

διότι: $$zE_{\alpha,\alpha+\beta}(z)+\frac{1}{\Gamma(\beta)}=z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+\alpha+\beta)}+\frac{1}{\Gamma(\beta)}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{\Gamma\left[\alpha(n+1)+\beta\right]}+\frac{1}{\Gamma(\beta)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+\beta)}+\frac{1}{\Gamma(\beta)}$$

$$=E_{\alpha,\beta}(z)-\frac{1}{\Gamma(\beta)}+\frac{1}{\Gamma(\beta)}=E_{\alpha,\beta}(z).$$

5) $E_{\alpha,\beta}(z)=\beta E_{\alpha,\beta+1}(z)+\alpha z\dfrac{d}{dz}E_{\alpha,\beta+1}(z)$

(3.5)

διότι:

$$\beta E_{\alpha,\beta+1}(z)+\alpha z\frac{d}{dz}E_{\alpha,\beta+1}(z)=\beta\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+\beta+1)}+\alpha z\frac{d}{dz}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+\beta+1)}\right]$$

$$=\beta\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+\beta+1)}+\alpha z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{nz^{n-1}}{\Gamma(\alpha n+\beta+1)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\beta z^n+\alpha nz^n}{\Gamma(\alpha n+\beta+1)}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha n+\beta)z^n}{(\alpha n+\beta)\Gamma(\alpha n+\beta)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+\beta)}=E_{\alpha,\beta}(z).$$

Αντίστοιχα, για την συνάρτηση $E_{-\alpha,\beta}(z)$ για την οποία έχει αποδειχθεί [2] ο τύπος:

6) $E_{-\alpha,\beta}(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/z)^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)}$, $z \in C^*$, $\alpha, \beta \in C$, $\Re(\alpha) > 0$, (3.6)

$\Re(\beta) > 0$, ισχύουν οι σχέσεις:

7) $E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} - E_{-\alpha,\beta}\left(\frac{1}{z}\right)$ (3.7)

8) $E_{-\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} - E_{\alpha,\beta}\left(\frac{1}{z}\right)$ (3.8)

9) $E_{-\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{z} E_{-\alpha,\alpha+\beta}(z) - \frac{1}{z\Gamma(\alpha+\beta)}$ (3.9)

διότι $\frac{1}{z} E_{-\alpha,\alpha+\beta}(z) - \frac{1}{z\Gamma(\alpha+\beta)} = -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/z)^n}{\Gamma(\alpha n + \alpha + \beta)} - \frac{1}{z\Gamma(\alpha+\beta)}$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/z)^{n+1}}{\Gamma[\alpha(n+1)+\beta]} - \frac{1}{z\Gamma(\alpha+\beta)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1/z)^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)} - \frac{1}{z\Gamma(\alpha+\beta)}$$

$$= E_{-\alpha,\beta}(z) - \left(-\frac{1}{z\Gamma(\alpha+\beta)}\right) - \frac{1}{z\Gamma(\alpha+\beta)} = E_{-\alpha,\beta}(z).$$

10) $E_{-\alpha,\beta}(z) = \beta E_{-\alpha,\beta+1}(z) + \alpha z \frac{d}{dz} E_{-\alpha,\beta+1}(z)$ (3.10)

διότι:

$$\beta E_{-\alpha,\beta+1}(z) + \alpha z \frac{d}{dz} E_{-\alpha,\beta+1}(z) =$$

$$= -\beta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/z)^n}{\Gamma(\alpha n + \beta + 1)} + \alpha z \frac{d}{dz} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/z)^n}{\Gamma(\alpha n + \beta + 1)}$$

$$= -\beta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/z)^n}{\Gamma(\alpha n + \beta + 1)} + \alpha z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(1/z)^{n-1}(-1/z)^2}{\Gamma(\alpha n + \beta + 1)}$$

$$= -\beta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/z)^n}{\Gamma(\alpha n + \beta + 1)} - \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(1/z)^n}{\Gamma(\alpha n + \beta + 1)}$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha n+\beta)(1/z)^n}{\Gamma(\alpha n+\beta+1)} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha n+\beta)(1/z)^n}{(\alpha n+\beta)\Gamma(\alpha n+\beta)} = E_{-\alpha,\beta}(z).$$

11) $$z^r E_{\alpha,\beta+r\alpha}(z) = E_{\alpha,\beta}(z) - \sum_{n=0}^{r-1} \frac{z^n}{\Gamma(\beta+n\alpha)}, \qquad (3.11)$$

με $\Re(\alpha)>0, \Re(\beta)>0$ και $r \in N$.

Πράγματι, το δεύτερο μέλος της (3.11), γράφεται:

$$E_{\alpha,\beta}(z) - \sum_{n=0}^{r-1} \frac{z^n}{\Gamma(\beta+n\alpha)} = \sum_{n=r}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\beta+\alpha n)}$$

Για $n-r=k$ ή $n=k+r$ τότε

$$\sum_{n=r}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\beta+n\alpha)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+r}}{\Gamma(\beta+r\alpha+k\alpha)} = z^r E_{\alpha,\beta+r\alpha}(z).\square$$

Παρατήρηση 3.1. Θέτοντας $r=1$ στην (3.11) προκύπτει η (3.4).

Παρατήρηση 3.2. Θέτοντας $r=2,3,4$ στην (3.11) προκύπτουν αντίστοιχα:

$$z^2 E_{\alpha,\beta+2\alpha}(z) = E_{\alpha,\beta}(z) - \frac{1}{\Gamma(\beta)} - \frac{z}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

$$z^3 E_{\alpha,\beta+3\alpha}(z) = E_{\alpha,\beta}(z) - \frac{1}{\Gamma(\beta)} - \frac{z}{\Gamma(\alpha+\beta)} - \frac{z^2}{\Gamma(2\alpha+\beta)}$$

$$z^4 E_{\alpha,\beta+4\alpha}(z) = E_{\alpha,\beta}(z) - \frac{1}{\Gamma(\beta)} - \frac{z}{\Gamma(\alpha+\beta)} - \frac{z^2}{\Gamma(2\alpha+\beta)} - \frac{z^3}{\Gamma(3\alpha+\beta)}.$$

12) $$\frac{d^m}{dz^m} E_m(z^m) = E_m(z^m), \; m \in N \qquad (3.12)$$

13) $$\frac{d^m}{dz^m} E_{m/n}(z^{m/n}) = E_{m/n}(z^{m/n}) + \sum_{r=1}^{n-1} \frac{z^{-rm/n}}{\Gamma(1-rm/n)}, \; m \in N, \; n = 2,3,...$$

(3.13)

14) $\left(-1\right)^{n}\dfrac{d^{n}E_{\alpha}\left(-z\right)}{dx^{n}}\geq 0,\quad z\geq 0,\quad 0\leq\alpha\leq 1$(πλήρως μονότονη) (3.14)

[1]

15) $\left(-1\right)^{n}\dfrac{d^{n}E_{\alpha,\beta}\left(-z\right)}{dx^{n}}\geq 0$, $z\geq 0$, $0<\alpha\leq 1$, $\beta\geq\alpha$ (πλήρως μονότονη)

[12,23] (3.15)

16) $\left(-1\right)^{n}\dfrac{d^{n}E_{\alpha,\beta}\left(1/z\right)}{dx^{n}}\geq 0$, $z\geq 0$, $\alpha>0$, $\beta>0$ (πλήρως μονότονη) (3.16)

[13]

4. Γενικεύσεις των συναρτήσεων Mittag-Leffler

Οι γενικεύσεις των συναρτήσεων Mittag-Leffler, αναφέρονται ως προς τις παραμέτρους και ως προς τις μεταβλητές. Οι κυριότερες είναι[3]:

(1) Η συνάρτηση $E_{\alpha,\beta}^{\gamma}(z)$, που ορίζεται ως εξής [7]:

$$E_{\alpha,\beta}^{\gamma}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\gamma)_{n}}{\Gamma(\beta+\alpha n)}\frac{z^{n}}{n!},\quad \alpha,\beta,\gamma,z\in C,\Re(\alpha)>0,\Re(\beta)>0,\tag{4.1}$$

όπου $(\gamma)_{n}$ το σύμβολο του Pochhammer. Είναι μια συνάρτηση τάξης $\rho=\left[\Re(\alpha)\right]^{-1}$ και τύπου $\sigma=\dfrac{1}{\rho}\left[\left\{\Re(\alpha)\right\}^{\Re(\alpha)}\right]^{-\rho}$.

(2) Η συνάρτηση $E_{\alpha,\beta}^{\gamma,\kappa}(z)$, η οποία ορίζεται ως εξής [26]:

$$E_{\alpha,\beta}^{\gamma,\kappa}(z)=\sum_{n=o}^{\infty}\frac{\left(\gamma\right)_{\kappa n}}{\Gamma\left(\alpha n+\beta\right)}\frac{z^{n}}{n!}\tag{4.2}$$

$z,\beta,\gamma\in C$, $\Re(\alpha)>\max\left\{0,\Re(\kappa)-1\right\},\Re(\kappa)>0$.

Παρατήρηση 4.1. Οι συναρτήσεις (4.1), (1.4) και (1.1) προκύπτουν από την (4.2) για $\kappa=1$, ($\kappa=1,\ \gamma=1$) και ($\kappa=1,\ \gamma=1,\ \beta=1$) αντίστοιχα.

(3) Η συνάρτηση $E_{\rho}((\alpha_{j},\beta_{j})_{1,m};(z))$, που ορίζεται από την ακόλουθη σειρά

$$E_\rho((\alpha_j,\beta_j)_{1,m};(z)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho)_k}{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(\alpha_j k+\beta_j)} \frac{z^k}{k!} \qquad (4.3)$$

όπου $z,\rho,\beta_j \in C$, $\Re(\alpha_j)>0$, $\Re(\beta_j)>0$ $j=1,\ldots,m$ και $m\in N$.

(4) Η συνάρτηση $E_{\alpha,m,\beta}(z)$, που ορίζεται από την σειρά:

$$E_{\alpha,m,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k,\ c_0=1,\ c_k = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\Gamma(\alpha(im+\beta)+1)}{\Gamma(\alpha(im+\beta+1)+1)}, \qquad (4.4)$$

$k\in N_0=\{0,1,2,\ldots\}$ όπου $\alpha,\beta\in C$ και $m\in\Re$, $\Re(\alpha)>0$, $m>0$, $\alpha(im+\beta)\notin Z^-=\{0,-1,-2,\ldots\}$, $i=0,1,2,\ldots$. Πρόκειται για μια συνάρτηση τάξης $[\Re(\alpha)]^{-1}$ και τύπου $\sigma=\frac{1}{m}$.

(5) Η συνάρτηση Mittag-Leffler $E^{(m)}_{(\frac{1}{\rho_i}),(\mu_i)}(z)$ που ορίζεται ως εξής:

$$E^{(m)}_{(\frac{1}{\rho_i}),(\mu_i)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\mu_1+k/\rho_1)\cdots\Gamma(\mu_m+k/\rho_m)} =$$

$$= {}_1\psi_m\left[\begin{matrix}(1,1) \\ (\mu_i,\frac{1}{\rho_i})_1^m\end{matrix};z\right] \qquad (4.5)$$

με $m>1$ ακέραιος, $\rho_1,\ldots,\rho_m>0$ και $\mu_1,\ldots,\mu_m\in C$ με $\Re(\mu_i)>0$.

(6) Η συνάρτηση Mittag-Leffler που αποτελείται από n μιγαδικές μεταβλητές $z_1,\ldots,z_n$, με μιγαδικές παραμέτρους $\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta\in C$ ορίζεται ως εξής

$$E_{(\alpha_1,\ldots,a_n),\beta}(z_1,\ldots,z_n) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{L_1,\ldots,L_n\geq 0}^{L_1+\ldots+L_n=k} \binom{k}{L_1,\ldots,L_n} \frac{\prod_{j=1}^{n} z_j^{L_j}}{\Gamma(\beta\pm\sum_{j=1}^{n}\alpha_j L_j)}, \qquad (4.6)$$

όπου $\begin{pmatrix} k \\ L_1,\ldots,L_n \end{pmatrix} = \dfrac{k!}{L_1!\ldots L_n!}$, $k,\ L_j \in N_0,\ j = 1,\ldots,m.$

Το παρακάτω θεώρημα ισχύει για την συνάρτηση Mittag-Leffler $E_{\alpha,\beta}^{\gamma,\kappa}(z)$, όπως ορίζεται απ' την (4.2).

Θεώρημα 4.1. Αν $\alpha,\beta,\gamma,a \in C, \Re(\alpha) > 0, \Re(\beta) > n, \Re(\gamma) > 0$ τότε για $n \in N$ ισχύει η εξής σχέση:

$$\frac{d^n}{dz^n}\left[z^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}^{\gamma,\kappa}(az^\alpha)\right] = z^{\beta-n-1}E_{\alpha,\beta-n}^{\gamma,\kappa}(az^\alpha) \tag{4.7}$$

Απόδειξη.
Θα δείξουμε τη σχέση αυτή με επαγωγή.
Για $n = 1$ ισχύει:

$$\frac{d}{dz}\left[z^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}^{\gamma,\kappa}(az^\alpha)\right] = z^{\beta-2}E_{\alpha,\beta-1}^{\gamma,\kappa}(az^\alpha)$$

$$\frac{d}{dz}\left[z^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}^{\gamma,\kappa}(az^\alpha)\right] = \frac{d}{dz}\left[z^{\beta-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\gamma)_{\kappa n}}{\Gamma(\alpha n+\beta)}a^n\frac{z^{\alpha n}}{n!}\right]$$

$$= \frac{d}{dz}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\gamma)_{\kappa n}}{\Gamma(\alpha n+\beta)}a^n\frac{z^{\alpha n+\beta-1}}{n!}\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\gamma)_{\kappa n}}{\Gamma(\alpha n+\beta)}a^n(\alpha n+\beta-1)\frac{z^{\alpha n+\beta-2}}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\gamma)_{\kappa n}}{(\alpha n+\beta-1)\Gamma(\alpha n+\beta-1)}a^n(\alpha n+\beta-1)\frac{z^{\alpha n+\beta-2}}{n!}$$

$$= z^{\beta-2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\gamma)_{\kappa n}}{\Gamma(\alpha n+\beta-1)}a^n\frac{z^{\alpha n}}{n!} = z^{\beta-2}E_{\alpha,\beta-1}^{\gamma,\kappa}(az^\alpha).$$

Έστω ότι ισχύει για n, δηλαδή η εξής σχέση

$$\frac{d^n}{dz^n}\left[z^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}^{\gamma,\kappa}(az^\alpha)\right] = z^{\beta-n-1}E_{\alpha,\beta-n}^{\gamma,\kappa}(az^\alpha). \tag{*}$$

Θα δείξουμε ότι η σχέση αυτή ισχύει και για $n+1$, δηλαδή

$$\frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}}\left[z^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}^{\gamma,\kappa}(az^\alpha)\right] = z^{\beta-n-2}E_{\alpha,\beta-n-1}^{\gamma,\kappa}(az^\alpha)$$

$$\frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}}\left[z^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}^{\gamma,\kappa}(az^{\alpha})\right]=\frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}}\left[z^{\beta-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\gamma)_{\kappa n}}{\Gamma(\alpha n+\beta)}a^{n}\,\frac{z^{\alpha n}}{n!}\right]$$

$$=\frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\gamma)_{\kappa n}}{\Gamma(\alpha n+\beta)}a^{n}\,\frac{z^{\alpha n+\beta-1}}{n!}\right]$$

$$=\frac{d^{n}}{dz^{n}}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\gamma)_{\kappa n}}{(\alpha n+\beta-1)\Gamma(\alpha n+\beta-1)}(\alpha n+\beta-1)a^{n}\,\frac{z^{\alpha n+\beta-2}}{n!}\right]$$

$$=\frac{d^{n}}{dz^{n}}\left[z^{\beta-2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\gamma)_{\kappa n}}{\Gamma(\alpha n+\beta-1)}\frac{(az^{\alpha})^{n}}{n!}\right]=\frac{d^{n}}{dz^{n}}\left[z^{\beta-2}E_{\alpha,\beta-1}^{\gamma,\kappa}(az^{\alpha})\right]$$

$$=z^{\beta-n-2}E_{\alpha,\beta-n-1}^{\gamma,\kappa}(az^{\alpha}).$$

Η τελευταία ισότητα προκύπτει από την σχέση (*) θέτοντας όπου β το $\beta-1$.□

Ένας άλλος τρόπος απόδειξης είναι ο εξής:

$$\frac{d^{n}}{dz^{n}}\left[z^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}^{\gamma,\kappa}(az^{\alpha})\right]=\frac{d^{n}}{dz^{n}}\left[z^{\beta-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\gamma)_{\kappa n}}{\Gamma(\alpha n+\beta)}a^{n}\,\frac{z^{\alpha n}}{n!}\right]$$

$$=\frac{d^{n}}{dz^{n}}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\gamma)_{\kappa n}}{\Gamma(\alpha n+\beta)}a^{n}\,\frac{z^{\alpha n+\beta-1}}{n!}\right]$$

$$=\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\gamma)_{\kappa n}}{\Gamma(\alpha n+\beta)}(\alpha n+\beta-1)a^{n}\,\frac{z^{\alpha n+\beta-2}}{n!}\right]$$

$$=\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\gamma)_{\kappa n}}{(\alpha n+\beta-1)\Gamma(\alpha n+\beta-1)}(\alpha n+\beta-1)a^{n}\,\frac{z^{\alpha n+\beta-2}}{n!}\right]$$

$$=\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[z^{\beta-2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\gamma)_{\kappa n}}{\Gamma(\alpha n+\beta-1)}\frac{(az^{\alpha})^{n}}{n!}\right]=\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[z^{\beta-1-1}E_{\alpha,\beta-1}^{\gamma,\kappa}(az^{\alpha})\right]$$

$$=\frac{d^{n-2}}{dz^{n-2}}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\gamma)_{\kappa n}}{\Gamma(\alpha n+\beta-1)}(\alpha n+\beta-2)a^{n}\,\frac{z^{\alpha n+\beta-3}}{n!}\right]$$

$$=\frac{d^{n-2}}{dz^{n-2}}\left[z^{\beta-3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\gamma)_{\kappa n}}{(\alpha n+\beta-2)\Gamma(\alpha n+\beta-2)}(\alpha n+\beta-2)\frac{(az^{\alpha})^{n}}{n!}\right]$$

$$= \frac{d^{n-2}}{dz^{n-2}}\left[z^{\beta-3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_{\kappa n}}{\Gamma(\alpha n + \beta - 2)} \frac{(az^{\alpha})^n}{n!} \right] = \frac{d^{n-2}}{dz^{n-2}}\left[z^{\beta-2-1} E^{\gamma,\kappa}_{\alpha,\beta-2}(az^{\alpha}) \right]$$

$= \ldots = z^{\beta-n-1} E^{\gamma,\kappa}_{\alpha,\beta-n}(az^{\alpha})$ (μετά από $n-$παραγωγίσεις).□

Παρατήρηση 4.2. Το θεώρημα 4.1 ισχύει και για τις συναρτήσεις Mittag-Leffler (4.1), (1.4) και (1.1), σύμφωνα με την παρατήρηση 4.1.

Πρόταση 4.1. Μια βασική ιδιότητα για την συνάρτηση Mittag-Leffler $E^{\gamma}_{\alpha,\beta}(z)$ είναι η κάτωθι:

$$\alpha\gamma E^{\gamma+1}_{\alpha,\beta}(z) = (1 + \alpha\gamma - \beta) E^{\gamma}_{\alpha,\beta}(z) + E^{\gamma}_{\alpha,\beta-1}(z) \tag{4.8}$$

Απόδειξη.

Πράγματι:

$(1 + \alpha\gamma - \beta) E^{\gamma}_{\alpha,\beta}(z) + E^{\gamma}_{\alpha,\beta-1}(z) =$

$$= (1 + \alpha\gamma - \beta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_n}{\Gamma(\beta + \alpha n)} \frac{z^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_n}{\Gamma(\beta - 1 + \alpha n)} \frac{z^n}{n!}$$

$$= (1 + \alpha\gamma - \beta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_n}{\Gamma(\beta + \alpha n)} \frac{z^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta - 1 + \alpha n)(\gamma)_n}{(\beta - 1 + \alpha n)\Gamma(\beta + \alpha n)} \frac{z^n}{n!}$$

$$= (1 + \alpha\gamma - \beta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_n}{\Gamma(\beta + \alpha n)} \frac{z^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta - 1 + \alpha n)(\gamma)_n}{\Gamma(\beta + \alpha n)} \frac{z^n}{n!}$$

$$= (1 - \beta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_n}{\Gamma(\beta + \alpha n)} \frac{z^n}{n!} + \alpha\gamma \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_n}{\Gamma(\beta + \alpha n)} \frac{z^n}{n!}$$

$$+ (\beta - 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_n}{\Gamma(\beta + \alpha n)} \frac{z^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha n(\gamma)_n}{\Gamma(\beta + \alpha n)} \frac{z^n}{n!}$$

$$= \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma + n)(\gamma)_n}{\Gamma(\beta + \alpha n)} \frac{z^n}{n!} = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma + n)\dfrac{\Gamma(\gamma + n)}{\Gamma(\gamma)}}{\Gamma(\beta + \alpha n)} \frac{z^n}{n!} = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\dfrac{\Gamma(\gamma + 1 + n)}{\Gamma(\gamma)}}{\Gamma(\beta + \alpha n)} \frac{z^n}{n!}$$

$$= \alpha\gamma \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\dfrac{\Gamma(\gamma + 1 + n)}{\gamma\Gamma(\gamma)}}{\Gamma(\beta + \alpha n)} \frac{z^n}{n!} = \alpha\gamma \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\dfrac{\Gamma(\gamma + 1 + n)}{\Gamma(\gamma + 1)}}{\Gamma(\beta + \alpha n)} \frac{z^n}{n!} = \alpha\gamma \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma + 1)_n}{\Gamma(\beta + \alpha n)} \frac{z^n}{n!}$$

$= \alpha\gamma E^{\gamma+1}_{\alpha,\beta}(z)$.

Κάποιες βασικές ιδιότητες της συνάρτησης $E_{\alpha,\beta}^{\gamma,\kappa}(z)$ είναι [24]:

i) $E_{\alpha,\beta}^{\gamma,\kappa}(z) = \beta E_{\alpha,\beta+1}^{\gamma,\kappa}(z) + \alpha z \frac{d}{dz} E_{\alpha,\beta+1}^{\gamma,\kappa}(z)$, (4.9)

όπου $\alpha, \beta, \gamma \in C$, $\Re(\alpha) > 0$ και $\kappa \in N$.

ii) $E_{\alpha,\beta-\alpha}^{\gamma,\kappa}(z) - E_{\alpha,\beta-\alpha}^{\gamma-1,\kappa}(z) = \kappa z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_{\kappa n+\kappa-1}}{\Gamma(\alpha n+\beta)} \frac{z^n}{n!}$ (4.10)

όπου $\alpha, \beta, \gamma \in C$, $\Re(\alpha) > 0$ και $\kappa \in N$.

Ειδικότερα, για $\kappa = 1$ η (4.10) γίνεται:
$E_{\alpha,\beta-\alpha}^{\gamma}(z) - E_{\alpha,\beta-\alpha}^{\gamma-1}(z) = z E_{\alpha,\beta}^{\gamma}(z)$. (4.11)

iii) $\left(\frac{d}{dz}\right)^m E_{\alpha,\beta}^{\gamma,\kappa}(z) = (\gamma)_{\kappa m} E_{\alpha,\beta+m\alpha}^{\gamma+\kappa m,\kappa}(z)$ (4.12)
όπου $\alpha, \beta, \gamma \in C$, $\Re(\alpha), \Re(\beta), \Re(\gamma) > 0$ και $\kappa, m \in N$.

iv) $\left(\frac{d}{dz}\right)^m \left[z^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}^{\gamma,\kappa}(z^{\alpha})\right] = z^{\beta-m-1} E_{\alpha,\beta-m}^{\gamma,\kappa}(z)$ (4.13)

όπου $\alpha, \beta, \gamma \in C$, $\Re(\alpha), \Re(\beta - m), \Re(\gamma) > 0$ και $\kappa, m \in N$.

5. Ειδικές περιπτώσεις των γενικευμένων συναρτήσεων Mittag-Leffler

Από τους ορισμούς της προηγούμενης παραγράφου, προκύπτουν [3,9]:

(1) $E_{\alpha,\beta}^{1}(z) = E_{\alpha,\beta}(z)$ (5.1)

Πράγματι:
$$E_{\alpha,\beta}^{1}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1)_n}{\Gamma(\alpha n+\beta)} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{\Gamma(\alpha n+\beta)} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+\beta)} =$$

$$= E_{\alpha,\beta}(z)$$

(2) $E^{1}_{\alpha,1}(z) = E_{\alpha}(z)$ (5.2)

(3) $E^{\gamma}_{1,\beta}(z) = \dfrac{1}{\Gamma(\beta)}\phi(\gamma,\beta;z)$ (5.3)

διότι

$$E^{\gamma}_{1,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\gamma)_n}{\Gamma(n+\beta)}\frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\gamma)_n}{\Gamma(\beta)(\beta)_n}\frac{z^n}{n!} = \frac{1}{\Gamma(\beta)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\gamma)_n}{(\beta)_n}\frac{z^n}{n!} =$$
$$= \frac{1}{\Gamma(\beta)}\phi(\gamma,\beta;z)$$

όπου $\phi(\alpha,\beta;z)$ είναι η συρρέουσα υπεργεωμετρική συνάρτηση του Kummer, η οποία ορίζεται ως εξής:

$$\phi(\alpha,\beta;z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_k}{(\beta)_k}\frac{z^k}{k!},\ z,\alpha \in C,\ \beta \in C - Z_0^{\ -}.$$

(4) $E^{\gamma}_{\alpha,\beta}(z) = \dfrac{1}{\Gamma(\gamma)}\,{}_1\psi_1\left[\begin{matrix}(\gamma,1) \\ (\beta,\alpha)\end{matrix}\ ;z\right]$ (5.4)

διότι: $$E^{\gamma}_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\gamma)_n}{\Gamma(\beta+\alpha n)}\frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\gamma+n)/\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta+\alpha n)}\frac{z^n}{n!}$$
$$= \frac{1}{\Gamma(\gamma)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\gamma+n)}{\Gamma(\beta+\alpha n)}\frac{z^n}{n!} = \frac{1}{\Gamma(\gamma)}\,{}_1\psi_1\left[\begin{matrix}(\gamma,1) \\ (\beta,\alpha)\end{matrix}\ ;z\right]$$

Σημείωση 5.1: Η συνάρτηση ${}_1\psi_1$ αποτελεί μια ειδική περίπτωση της συνάρτησης ${}_p\psi_q$ η οποία ορίζεται ως εξής:

$${}_p\psi_q\left[\begin{matrix}(a_1,\mathrm{A}_1),\ldots,(a_p,\mathrm{A}_p) \\ (b_1,\mathrm{B}_1),\ldots,(b_q,\mathrm{B}_q)\end{matrix}\ ;z\right] := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a_1+\mathrm{A}_1 n)\cdots\Gamma(a_p+\mathrm{A}_p n)}{\Gamma(b_1+\mathrm{B}_1 n)\cdots\Gamma(b_q+\mathrm{B}_q n)}\frac{z^n}{n!}$$

(5.5)

$$\left(\Re(\mathrm{A}_j) > 0\ (j=1,\ldots,p); \Re(\mathrm{B}_j) > 0\ (j=1,\ldots,q); 1+\Re\left(\sum_{j=1}^{q}\mathrm{B}_j - \sum_{j=1}^{p}\mathrm{A}_j\right) \geq 0\right)$$

και γενικά $a_j, \mathrm{A}_j \in C\ (j=1,\ldots,p)$ και $b_j, \mathrm{B}_j \in C\ (j=1,\ldots,q)$.

Σημείωση 5.2: Η γενικευμένη συνάρτηση ${}_p\psi_q$ και η γενικευμένη υπεργεωμετρική συνάρτηση ${}_pF_q$ συνδέονται μέσω της σχέσης:

$${}_p\psi_q\left[\begin{matrix}(a_1,1),\ldots,(a_p,1) \\ (b_1,1),\ldots,(b_q,1)\end{matrix} ;z\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a_1)\cdots\Gamma(a_p)}{\Gamma(b_1)\cdots\Gamma(b_q)}\,{}_pF_q\left[\begin{matrix}a_1,\ldots,a_p \\ b_1,\ldots,b_p\end{matrix} ;z\right].$$

(5) $E_{m,\beta}^{\gamma}(z) = \dfrac{1}{\Gamma(\beta)}\,{}_1F_m\left(\gamma; \dfrac{\beta}{m}, \dfrac{\beta+1}{m}, \ldots, \dfrac{\beta+m-1}{m}; \dfrac{z}{m^m}\right)$ (5.6)

όπου $m \in N$ και ${}_1F_m\left(\gamma; \dfrac{\beta}{m}, \dfrac{\beta+1}{m}, \ldots, \dfrac{\beta+m-1}{m}; \dfrac{z}{m^m}\right)$ είναι η γενικευμένη υπεργεωμετρική συνάρτηση με $p=1$ και $q=m$.

(6) $E_{m,\beta}^{\gamma,\kappa}(z) = \dfrac{1}{\Gamma(\beta)}\,{}_\kappa F_m\left[\begin{matrix}\dfrac{\gamma}{\kappa}, \dfrac{\gamma+1}{\kappa}, \ldots, \dfrac{\gamma+\kappa-1}{\kappa}; & \dfrac{\kappa^\kappa z}{m^m} \\ \dfrac{\beta}{m}, \dfrac{\beta+1}{m}, \ldots, \dfrac{\beta+m-1}{m}; & \end{matrix}\right],\quad m,\kappa \in N.$

(7) $E_{\frac{1}{\rho},\mu}(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\mu + k/\rho)}$

(8) $E_{(\frac{1}{\rho_1},\frac{1}{\rho_2}),(\mu_1,\mu_2)}^{(2)}(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\mu_1 + k/\rho_1)\Gamma(\mu_2 + k/\rho_2)}$

(9) $E_{(\alpha,1),(\beta,1)}^{(2)}(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(\alpha k+\beta)}\frac{z^k}{k!} = \phi(\alpha,\beta;z) = {}_0\psi_1\left[\begin{matrix}- \\ (\beta,\alpha)\end{matrix}; z\right]$

(10) $E_{(0,0,\ldots,0),(1,1,\ldots,1)}(z) = \displaystyle\sum_{k=o}^{\infty}z^k = \frac{1}{1-z}$

για $m \geq 2$: $\forall \rho_i = \infty (1/\rho_i = 0)$ και $\forall \mu_i = 1$, $i = 1,\dots,m$.

(11) $$E^{(m)}_{(1,1,\dots,1),(\mu_i)}(z) = {}_1\psi_m \left[\begin{matrix} (1,1) \\ (\mu_i,1)_1^m \end{matrix} ;\ z \right]$$
$$= \left[\prod_{i=1}^{m} \Gamma(\mu_i) \right]^{-1} {}_1F_m(1;\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_m;z)$$

για $m \geq 2 : \forall \rho_i = 1$, $i = 1,\dots,m$.

Έστω $J_\nu(z)$ είναι η γνωστή συνάρτηση Bessel πρώτου είδους και τάξης ν, που ορίζεται υπό μορφή σειράς ως εξής :

$$J_\nu(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{z}{2} \right)^{2r+\nu}}{r!\Gamma(\nu + r + 1)}$$

και οι γενικεύσεις αυτής , όπως ορίζονται :

α) $J^\mu_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z)^k}{\Gamma(\nu + k\mu + 1)k!}$, $\nu \in \Re$ και $\mu > -1$

β) $J^\mu_{\nu,\lambda}(z) = (z/2)^{\nu+2\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k}}{\Gamma(\nu + k\mu + \lambda + 1)\Gamma(\lambda + k + 1)}$, $\nu,\lambda \in \Re$ και $\mu > 0$

γ) $J^{r,n}_{\nu,\lambda}(z) = (z/2)^{\nu+2\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^k}{\Gamma(\nu + kr + \lambda + 1)\Gamma(\lambda + k + 1)^n}$, $\nu,\lambda \in \Re$, $n \in N$, $r > 0$

Παρατηρούμε ότι τις ανωτέρω συναρτήσεις μπορούμε να τις εκφράσουμε με μορφή γενικευμένων συναρτήσεων Mittag-Leffler ως εξής[9]:

(12) $J_\nu(z) = (z/2)^\nu E_{(1,1),(\nu+1,1)}(-z^2/4)$, $\nu \in \Re$,

(13) $J^\mu_\nu(z) = E^{(2)}_{(\mu,1),(\nu+1,1)}(-z)$, $\nu \in \Re$ και $\mu > -1$.

(14) $J_{\nu,\lambda}^{\mu}(z)=(z/2)^{\nu+2\lambda}\, E_{(\mu,1),(\nu+\lambda+1,\lambda+1)}^{(2)}\left(-(z/2)^2\right),\ \nu,\lambda\in\Re$ και $\mu>0$
και

(15) $J_{\nu,\lambda}^{r,n}(z)=(z/2)^{\nu+2\lambda}\, E_{(r,1,\ldots,1),(\nu+\lambda+1,\lambda+1,\ldots,\lambda+1)}^{(n+1)}\left(-(z/2)^2\right),\ \nu,\lambda\in\Re$, $n\in N, r>0$.

6. Μετασχηματισμός Laplace των συναρτήσεων Mittag-Leffler

Ο μετασχηματισμός Laplace είναι μια χρήσιμη μέθοδος επίλυσης διαφορικών εξισώσεων και ολοκληρο-διαφορικών εξισώσεων. Επειδή οι συναρτήσεις Mittag-Leffler προκύπτουν στη λύση διαφορικών εξισώσεων κλασματικής τάξης θα υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό Laplace κάποιων συγκεκριμένων μορφών αυτών.

Ως γνωστόν αν $N(t)$ είναι μια συνάρτηση τέτοια ώστε το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^\infty e^{-st}N(t)dt$ να συγκλίνει, τότε ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $N(t)$ ως προς τη μεταβλητή t, ορίζεται ως εξής:

$$L\{N(t)\}=\widetilde{N}(s)=\int_0^\infty e^{-st}N(t)dt,\ t>0 \tag{6.1}$$

όπου $\Re(s)>0$.

Πρόταση 6.1. Κάποιες χρήσιμες ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace είναι οι εξής:

1) $$L\{t^x\}=\frac{\Gamma(x+1)}{s^{x+1}} \tag{6.2}$$

2) $$L\{f*g\}(t)=L\left\{\int_0^t f(u)g(t-u)du\right\}=F(s)G(s) \tag{6.3}$$

3) $$L\left\{f^{(n)}(t)\right\}=s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\ldots-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0) \tag{6.4}$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace ως προς s δίνεται από τη σχέση

$$L^{-1}\{\widetilde{N}(s)\} = L^{-1}\{\widetilde{N}(s);t\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st}\widetilde{N}(s)ds. \tag{6.5}$$

Γενικεύοντας τον ορισμό για μια συνάρτηση $N(x,t)$ έχουμε:

$$L\{N(x,t)\} = \widetilde{N}(x,s) = \int_0^\infty e^{-st}N(x,t)dt,\ t>0,\ x\in\Re \tag{6.6}$$

όπου $\Re(s)>0$.

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace ως προς s δίνεται από τη σχέση

$$L^{-1}\{\widetilde{N}(x,s)\} = L^{-1}\{\widetilde{N}(x,s);t\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st}\widetilde{N}(x,s)ds. \quad [3] \tag{6.7}$$

Πρόταση 6.2. Ο μετασχηματισμός Laplace των συναρτήσεων $E_\alpha(t)$ και $E_{\alpha,\beta}(t)$ είναι:

$$L\{E_\alpha(t)\}(s) = \frac{1}{s}\,{}_2\psi_1\left[\begin{matrix}(1,1),(1,1) \\ (1,\alpha)\end{matrix}\ ;\frac{1}{s}\right] \quad (\Re(s)>0) \tag{6.8}$$

και

$$L\{E_{\alpha,\beta}(t)\}(s) = \frac{1}{s}\,{}_2\psi_1\left[\begin{matrix}(1,1),(1,1) \\ (\beta,\alpha)\end{matrix}\ ;\frac{1}{s}\right] \quad (\Re(s)>0) \tag{6.9}$$

αντίστοιχα, όπου ${}_2\psi_1$ είναι η συνάρτηση (5.5) για $p=2$ και $q=1$.

Απόδειξη.

$$L\{E_\alpha(t)\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}E_\alpha(t)dt = \int_0^\infty e^{-st}\sum_{n=0}^\infty \frac{t^n}{\Gamma(1+\alpha n)}dt$$

$$= \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{\Gamma(1+\alpha n)}\int_0^\infty e^{-st}t^n dt = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{\Gamma(1+\alpha n)}\frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{s}\sum_{n=0}^\infty \frac{\Gamma(1+n)\Gamma(1+n)}{\Gamma(1+\alpha n)}\frac{(1/s)^n}{n!}$$

$$=\frac{1}{s}{}_2\psi_1\left[\begin{matrix}(1,1),(1,1)\\(1,\alpha)\end{matrix};\frac{1}{s}\right],$$

λαμβάνοντας υπ' όψιν μας ότι $\Gamma(1+n)=n!$. Επίσης:

$$L\{E_{\alpha,\beta}(t)\}(s)=\int_0^\infty e^{-st}E_{\alpha,\beta}(t)dt=\int_0^\infty e^{-st}\sum_{n=0}^\infty\frac{t^n}{\Gamma(\beta+\alpha n)}dt$$

$$=\sum_{n=0}^\infty\frac{1}{\Gamma(\beta+\alpha n)}\int_0^\infty e^{-st}t^n dt=\sum_{n=0}^\infty\frac{1}{\Gamma(\beta+\alpha n)}\frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$=\frac{1}{s}\sum_{n=0}^\infty\frac{\Gamma(1+n)\Gamma(1+n)}{\Gamma(\beta+\alpha n)}\frac{(1/s)^n}{n!}$$

$$=\frac{1}{s}{}_2\psi_1\left[\begin{matrix}(1,1),(1,1)\\(1,\alpha)\end{matrix};\frac{1}{s}\right]$$ [8].□

Πρόταση 6.3. Ο μετασχηματισμός Laplace της γενικευμένης συνάρτησης Mittag-Leffler $E_{\alpha,\beta}^{\gamma}(t)$ δίνεται από τη σχέση

$$L\{E_{\alpha,\beta}^{\gamma}(t)\}(s)=\frac{1}{\Gamma(\gamma)s}{}_2\psi_1\left[\begin{matrix}(\gamma,1),(1,1)\\(\beta,\alpha)\end{matrix};\frac{1}{s}\right]\ (\Re(s)>0). \tag{6.10}$$

Απόδειξη.

$$L\{E_{\alpha,\beta}^{\gamma}(t)\}(s)=\int_0^\infty e^{-st}E_{\alpha,\beta}^{\gamma}(t)dt=\int_0^\infty e^{-st}\sum_{n=0}^\infty\frac{(\gamma)_n}{\Gamma(\beta+\alpha n)}\frac{t^n}{n!}dt$$

$$=\sum_{n=0}^\infty\frac{(\gamma)_n}{\Gamma(\beta+\alpha n)n!}\int_0^\infty e^{-st}t^n dt=\sum_{n=0}^\infty\frac{(\gamma)_n}{\Gamma(\beta+\alpha n)n!}\frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$=\frac{1}{s}\sum_{n=0}^\infty\frac{\Gamma(\gamma+n)\Gamma(1+n)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta+\alpha n)}\frac{(1/s)^n}{n!}=\frac{1}{\Gamma(\gamma)s}\sum_{n=0}^\infty\frac{\Gamma(\gamma+n)\Gamma(1+n)}{\Gamma(\beta+\alpha n)}\frac{(1/s)^n}{n!}=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\gamma)s}{}_2\psi_1\left[\begin{matrix}(\gamma,1),(1,1)\\(\beta,\alpha)\end{matrix};\frac{1}{s}\right],$$

όπου $(\gamma)_n=\dfrac{\Gamma(\gamma+n)}{\Gamma(\gamma)}$ [8].□

Παρατήρηση 6.1: Οι σχέσεις (6.9) και (6.8) προκύπτουν απ' την (6.10) για $\gamma = 1$ και $\beta = 1, \gamma = 1$ αντίστοιχα.

Πρόταση 6.4. Ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $E_\rho((\alpha_j, \beta_j)_{1,m}; (t))$ δίνεται από τη σχέση

$$L\{E_\rho((\alpha_j, \beta_j)_{1,m}; -t)\}(s) = \frac{1}{s\Gamma(\rho)} {}_2\psi_m \left[\begin{matrix} (\rho,1), (1,1) \\ (\alpha_j, \beta_j)_{1,m} \end{matrix} ; \frac{1}{s} \right], \tag{6.11}$$

όπου $\Re(s) > 0$.

Οι παρακάτω μορφές μετασχηματισμού Laplace χρησιμοποιούνται ευρέως στις εφαρμογές για την λύση κλασματικών διαφορικών εξισώσεων.

1) $$L\{t^{\beta-1} E^\gamma_{\alpha,\beta}(\lambda t^\alpha)\}(s) = \frac{s^{\alpha\gamma - \beta}}{(s^\alpha - \lambda)^\gamma} \tag{6.12}$$

όπου $\Re(s) > 0,\ \Re(\beta) > 0,\ \lambda \in C,$ και $\left|\lambda s^{-\alpha}\right| < 1$.

Πράγματι:

$$\begin{aligned} L\{t^{\beta-1} E^\gamma_{\alpha,\beta}(\lambda t^\alpha)\}(s) &= \int_0^\infty e^{-st} t^{\beta-1} \sum_{n=0}^\infty \frac{(\gamma)_n}{\Gamma(\alpha n + \beta)} \frac{\lambda^n t^{\alpha n}}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^\infty \frac{(\gamma)_n}{\Gamma(\alpha n + \beta)} \frac{\lambda^n}{n!} \int_0^\infty e^{-st} t^{\alpha n + \beta - 1} dt \\ &= \sum_{n=0}^\infty \frac{(\gamma)_n}{\Gamma(\alpha n + \beta)} \frac{\lambda^n}{n!} L\{t^{\alpha n + \beta - 1}\} \\ &= \sum_{n=0}^\infty \frac{(\gamma)_n}{\Gamma(\alpha n + \beta)} \frac{\lambda^n}{n!} \frac{\Gamma(\alpha n + \beta)}{s^{\alpha n + \beta}} \\ &= s^{-\beta} \sum_{n=0}^\infty \frac{(\gamma)_n}{n!} (\lambda s^{-\alpha})^n = s^{-\beta} \left(\frac{1}{1 - \lambda s^{-\alpha}} \right)^\gamma \\ &= \frac{s^{\alpha\gamma - \beta}}{(s^\alpha - \lambda)^\gamma}. \square \end{aligned}$$

Στις ειδικές περιπτώσεις όπου $\gamma = 1$ και $\beta = \gamma = 1$ έχουμε τις σχέσεις,

2) $L\left\{t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(\lambda t^{\alpha})\right\}(s)=\dfrac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha}-\lambda} \quad (\Re(s)>0,\ \lambda\in C,\ \left|\lambda s^{-\alpha}\right|<1) \quad (6.13)$

και

3) $L\left\{E_{\alpha}(\lambda t^{\alpha})\right\}(s)=\dfrac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}-\lambda} \quad (\Re(s)>0,\ \lambda\in C,\ \left|\lambda s^{-\alpha}\right|<1) \quad (6.14)$

αντίστοιχα.

4) $L\left\{t^{\alpha n+\beta-1}\left(\dfrac{\partial}{\partial\lambda}\right)^{n}E_{\alpha,\beta}(\lambda t^{\alpha})\right\}(s)=\dfrac{n!s^{\alpha-\beta}}{(s^{\alpha}-\lambda)^{n+1}},\ \left|\lambda s^{-\alpha}\right|<1. \quad (6.15)$

Στην περίπτωση όπου $\beta=1$,

5) $L\left\{t^{\alpha n}\left(\dfrac{\partial}{\partial\lambda}\right)^{n}E_{\alpha}(\lambda t^{\alpha})\right\}(s)=\dfrac{n!s^{\alpha-1}}{(s^{\alpha}-\lambda)^{n+1}},\ \left|\lambda s^{-\alpha}\right|<1\ \ (n\in N) \quad (6.16)$

6) $L\left\{t^{\mu-1}E_{\alpha,\beta}^{\gamma,\kappa}(\lambda t^{\sigma})\right\}(s)=\dfrac{s^{-\mu}}{\Gamma(\gamma)}{}_{2}\psi_{1}\left[\begin{matrix}(\gamma,\kappa),(\mu,\sigma)\\(\beta,\alpha)\end{matrix};\dfrac{\lambda}{s^{\sigma}}\right] \quad (6.17)$

όπου $\alpha,\beta,\gamma,\mu,\sigma\in C;\Re(\alpha),\Re(\beta),\Re(\gamma),\Re(\mu),\Re(\sigma),\Re(s)>0$; $\kappa\in N$ και

$\left|\dfrac{\lambda}{s^{\sigma}}\right|<1$ [8].

7. Κλασματικά ολοκληρώματα και κλασματικές παράγωγοι Riemann- Liouville

Σ' αυτή την παράγραφο θα δώσουμε τους ορισμούς του κλασματικού ολοκληρώματος και της κλασματικής παραγώγου Riemann-Liouville και Caputo και θα αναφέρουμε βασικές ιδιότητες που ικανοποιούν.

Ορισμός 7.1. Έστω $\Omega=[\alpha,b]$ $(-\infty<\alpha<b<\infty)$ ένα πεπερασμένο διάστημα πάνω στον πραγματικό άξονα $\Re$. Τα **κλασματικά ολοκληρώματα Riemann-Liouville** $I_{\alpha+}^{\nu}f$ και $I_{b-}^{\nu}f$ τάξης $\nu\in C$ $(\Re(\nu)>0)$ ορίζονται ως εξής:

$$(I_{\alpha+}^{\nu} f)(x) := \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_{\alpha}^{x} (x-t)^{\nu-1} f(t)dt \quad (x > \alpha; \Re(\nu) > 0) \tag{7.1}$$

και

$$(I_{b-}^{\nu} f)(x) := \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_{x}^{b} (t-x)^{\nu-1} f(t)dt \quad (x < b; \Re(\nu) > 0) \tag{7.2}$$

αντίστοιχα, όπου $\Gamma(\nu)$ είναι η συνάρτηση Γάμμα. Τα ολοκληρώματα αυτά ονομάζονται **αριστερό και δεξί κλασματικό ολοκλήρωμα**.

Σημείωση 7.1. Στην περίπτωση όπου $\nu = n \in N$, οι ορισμοί (7.1) και (7.2) μετατρέπονται ως εξής:

$$(I_{\alpha+}^{n} f)(x) = \int_{\alpha}^{x} dt_1 \int_{\alpha}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{\alpha}^{t_{n-1}} f(t_n)dt_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_{\alpha}^{x} (x-t)^{n-1} f(t)dt \tag{7.3}$$

$$(I_{b-}^{n} f)(x) = \int_{x}^{b} dt_1 \int_{t_1}^{b} dt_2 \cdots \int_{t_{n-1}}^{b} f(t_n)dt_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x}^{b} (t-x)^{n-1} f(t)dt \tag{7.4}$$

Ορισμός 7.2. Οι **κλασματικές παράγωγοι Riemann-Liouville** $D_{\alpha+}^{\nu} y$ και $D_{b-}^{\nu} y$ τάξης $\nu \in C, (\Re(\nu) \geq 0)$ ορίζονται ως εξής:

$$(D_{\alpha+}^{\nu} y)(x) := \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I_{\alpha+}^{n-\nu} y)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\nu)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_{\alpha}^{x} (x-t)^{n-\nu-1} y(t)dt \tag{7.5}$$

$$(x > \alpha)$$

και

$$(D_{b-}^{\nu} y)(x) := \left(-\frac{d}{dx}\right)^n (I_{b-}^{n-\nu} y)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\nu)} \left(-\frac{d}{dx}\right)^n \int_{x}^{b} (t-x)^{n-\nu-1} y(t)dt$$

$$(x < b) \tag{7.6}$$

αντίστοιχα, όπου $n = [\Re(\nu)] + 1$ και $[\Re(\nu)]$ είναι το ακέραιο μέρος του $\Re(\nu)$.

Σημείωση 7.2. Ειδικότερα, όταν $\nu = n \in N_0$, τότε

$$(D_{\alpha+}^{n} y)(x) = y^{(n)}(x), \quad (D_{b-}^{n} y)(x) = (-1)^n y^{(n)}(x) \tag{7.7}$$

όπου $y^{(n)}(x)$ είναι η συνήθης παράγωγος της $y(x)$ τάξης n
και για $n=0$,

$$(D_{\alpha+}^{0}y)(x)=(D_{b-}^{0}y)(x)=y(x).$$

(Στη βιβλιογραφία το κλασματικό ολοκλήρωμα μπορούμε να το δούμε γραμμένο και ως $\left({}_{\alpha}D_{x}^{-\nu}f\right)(x)$).

Για $\alpha=0$ οι ορισμοί (7.1) και (7.5) για $x>0$, παίρνουν τη μορφή:

$$(I_{0+}^{\nu}f)(x)=\frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_{0}^{x}(x-t)^{\nu-1}f(t)dt \quad (x>0;\Re(\nu)>0) \tag{7.8}$$

και

$$\left(D_{0+}^{\nu}f\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(n-\nu)}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n}\int_{0}^{x}(x-t)^{n-\nu-1}f(t)dt \tag{7.9}$$

Παρατήρηση 7.1. Εφαρμόζοντας τους ορισμούς (7.8) και (7.9) για $f(t)=t^{\rho}$ παίρνουμε αντίστοιχα:

$$I_{0+}^{\nu}t^{\rho}=\frac{\Gamma(\rho+1)}{\Gamma(\rho+\nu+1)}t^{\rho+\nu},\ \Re(\nu)>0,\ \Re(\rho)>-1;\ t>0 \tag{7.10}$$

και

$$D_{0+}^{\nu}t^{\rho}=\frac{\Gamma(\rho+1)}{\Gamma(\rho-\nu+1)}t^{\rho-\nu},\ \Re(\nu)<0,\ \Re(\rho)>-1;\ t>0 \tag{7.11}$$

Για $\rho=0$ η σχέση (7.11) δίνει:

$$D_{0+}^{\nu}[1]=\frac{1}{\Gamma(1-\nu)}t^{-\nu},\ t>0,\ \Re(\nu)<1, \tag{7.12}$$

οπότε αποδεικνύεται ότι η παράγωγος Riemann-Liouville της μονάδας είναι διάφορη του μηδενός.

Έστω $L_p(a,b)$ είναι ο χώρος στον οποίο ανήκουν οι συναρτήσεις $f(t)$, $t\in(a,b)$ για τις οποίες ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

1) $\|f\|_p<\infty$

2) $\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p \, dt \right)^{1/p}$, $1 \le p \le \infty$

3) $\|f\|_\infty = \sup_{a \le x \le b} |f(x)|$ [3,8].

Πρόταση 7.1. Έστω $\Re(\nu) > 0$ και $f(x) \in L_p(a,b)$ ($1 \le p \le \infty$), τότε ισχύουν οι παρακάτω ισότητες:

$$\left(D_{a+}^{\nu} I_{a+}^{\nu} f\right)(x) = f(x) \text{ και } \left(D_{b-}^{\nu} I_{b-}^{\nu} f\right)(x) = f(x). \qquad (7.13)$$

Πρόταση 7.2. Έστω $\Re(\nu) > 0$, $n = [\Re(\nu)] + 1$ και $f_{n-\nu}(x) = \left(I_{a+}^{n-\nu} f\right)(x)$ το κλασματικό ολοκλήρωμα τάξης $n - \nu$.

α) Αν $1 \le p \le \infty$ και $f(x) \in I_{a+}^{\nu}(L_p)$, τότε

$$\left(I_{a+}^{\nu} D_{a+}^{\nu} f\right)(x) = f(x). \qquad (7.14)$$

β) Αν $f(x) \in L_1(a,b)$ και $f_{n-\nu}(x) \in AC^n[a,b]$, τότε ισχύει η ισότητα

$$\left(I_{a+}^{\nu} D_{a+}^{\nu} f\right)(x) = f(x) - \sum_{j=1}^{n} \frac{f_{n-\nu}^{(n-j)}(a)}{\Gamma(\nu - j + 1)} (x-a)^{\nu - j}. \qquad (7.15)$$

Ειδικότερα, αν $0 < \Re(\nu) < 1$, τότε

$$\left(I_{a+}^{\nu} D_{a+}^{\nu} f\right)(x) = f(x) - \frac{f_{1-\nu}(a)}{\Gamma(\nu)} (x-a)^{\nu-1}, \qquad (7.16)$$

όπου $f_{1-\nu}(x) = \left(I_{a+}^{1-\nu} f\right)(x)$, ενώ για $\nu = n \in N$ ισχύει:

$$\left(I_{a+}^{n} D_{a+}^{n} f\right)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^{k}. \qquad (7.17)$$

Κλασματικές παράγωγοι Caputo

Ορισμός 7.3. Έστω $[\alpha, b]$ ένα πεπερασμένο διάστημα στο $\Re$, και έστω $D_{\alpha+}^{\nu}[y(t)](x) \equiv \left(D_{\alpha+}^{\nu} y\right)(x)$, $D_{b-}^{\nu}[y(t)](x) \equiv \left(D_{b-}^{\nu} y\right)(x)$ είναι οι κλασματικές παράγωγοι Riemann-Liouville τάξης $\nu \in C$ ($\Re(\nu) \ge 0$).

Οι κλασματικές παράγωγοι Caputo $\left({}^{C}D_{\alpha+}^{\nu} y\right)(x)$ και $\left({}^{C}D_{b-}^{\nu} y\right)(x)$ αριστερή και δεξιά αντίστοιχα, τάξης $\nu \in C$ ($\Re(\nu) \ge 0$) στο διάστημα $[\alpha, b]$ ορίζονται μέσω των κλασματικών παραγώγων Riemann-Liouville ως εξής:

$$\left({}^{C}D^{\nu}_{\alpha+}y\right)(x):=\left(D^{\nu}_{\alpha+}\left[y(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{y^{(k)}(\alpha)}{k!}(t-\alpha)^{k}\right]\right)(x) \tag{7.18}$$

και

$$\left({}^{C}D^{\nu}_{b-}y\right)(x):=\left(D^{\nu}_{b-}\left[y(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{y^{(k)}(b)}{k!}(b-t)^{k}\right]\right)(x), \tag{7.19}$$

αντίστοιχα, όπου $n=[\Re(\nu)]+1$ για $\nu\notin N_0$; $n=\nu$ για $\nu\in N_0$.

Μια γενίκευση του τελεστή κλασματικών παραγώγων Riemann-Liouville είναι ο δεξιός τελεστής κλασματικών παραγώγων $D^{\mu,\nu}_{a+}$ ως προς x που ορίζεται ως εξής:

$$\left(D^{\mu,\nu}_{a+}f\right)(x)=\left(I^{\nu(1-\mu)}_{a+}\frac{d}{dx}\left(I^{(1-\nu)(1-\mu)}_{a+}f\right)\right)(x),\quad 0<\mu<1,\ 0\le\nu\le 1\ . \tag{7.20}$$

Παρατήρηση 7.2. Θέτοντας $\nu=0$ στην (7.20), παίρνουμε τον τελεστή κλασματικών παραγώγων Riemann-Liouville D^{μ}_{a+}, ενώ αν $\nu=1$ τότε παίρνουμε τον τελεστή κλασματικών παραγώγων Caputo [4,8].

Πρόταση 7.3. Ο μετασχηματισμός Laplace του κλασματικού ολοκληρώματος και της κλασματικής παραγώγου Riemann-Liouville μιας συνάρτησης $f(t)$ δίνεται από τις σχέσεις

$$L\left\{I^{\nu}_{0+}f(t)\right\}=s^{-\nu}F(s) \tag{7.21}$$

και

$$L\left\{D^{\nu}_{0+}f(t)\right\}=s^{\nu}F(s)-\sum_{k=1}^{n}s^{k-1}\,{}_{0}D^{\nu-k}_{t}f(t)\Big|_{t=0},\qquad n-1<\nu<n \tag{7.22}$$

αντίστοιχα, όπου $F(s)$ είναι ο μετασχηματισμός Laplace της $f(t)$ ως προς t, $\Re(s)>0$ και $\Re(\nu)>0$.

Απόδειξη.
Πράγματι, από την (7.8) και λαμβάνοντας υπ' όψιν το μετασχηματισμό Laplace της συνέλιξης $\left(L\{f*g\}=L\{f\}\cdot L\{g\}\right)$ έχουμε:

$$L\left\{I^{\nu}_{0+}f(t)\right\}=\frac{1}{\Gamma(\nu)}L\left\{t^{\nu-1}*f(t)\right\}=\frac{1}{\Gamma(\nu)}\frac{F(s)\Gamma(\nu)}{s^{\nu}}=s^{-\nu}F(s),$$

διότι $L\left\{t^{\nu-1}\right\}=\dfrac{\Gamma(\nu)}{s^{\nu}}$ και $L\{f(t)\}=F(s)$.

Ομοίως, λαμβάνοντας υπ' όψιν το μετασχηματισμό Laplace της παραγώγου και της συνέλιξης έχουμε:

$$L\left\{D_{0+}^{\nu} f(t)\right\} = \frac{1}{\Gamma(n-\nu)}\left[s^n L\left\{t^{n-\nu-1} * f(t)\right\} - s^{n-1}(t^{n-\nu-1} * f(t))(0) - s^{n-2}(t^{n-\nu-1} * f'(t))(0) - \ldots\right]$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\nu)}\left[s^n \frac{\Gamma(n-\nu)}{s^{n-\nu}} F(s) - s^{n-1}(t^{n-\nu-1} * f(t))(0) - \ldots\right]$$

$$= s^{\nu} F(s) - s^{n-1} D_{0+}^{\nu-n} f(t)\big|_{t=0} - s^{n-2} D_{0+}^{\nu-n-1} f(t)\big|_{t=0} - \ldots - D_{0+}^{\nu-1} f(t)\big|_{t=0}$$

$$= s^{\nu} F(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{k-1} D_{0+}^{\nu-k} f(t)\big|_{t=0}$$

Ο μετασχηματισμός Laplace για τον τελεστή $D_{0+}^{\mu,\nu}$ για μια συνάρτηση $f(t)$ δίνεται από τον τύπο:

$$L[D_{0+}^{\mu,\nu} f(t)](s) = s^{\mu} L[f(t)](s) - s^{\nu(1-\mu)}\left(I_{0+}^{(1-\nu)(1-\mu)} f\right)(0+),\ 0 < \mu < 1 \quad (7.23)$$

όπου $\left(I_{0+}^{(1-\nu)(1-\mu)} f\right)(0+)$ είναι το κλασματικό ολοκλήρωμα τάξης $(1-\nu)(1-\mu)$ καθώς $t \to 0+$.

Ανάλογα, ο μετασχηματισμός Laplace του κλασματικού ολοκληρώματος μιας συνάρτησης $f(x,t)$ δίνεται από τη σχέση

$$L\left\{I_{0+}^{\nu} f(x,t)\right\} = s^{-\nu} F(x,s) \quad (7.24)$$

όπου $F(x,s)$ είναι ο μετασχηματισμός Laplace της $f(x,t)$ ως προς t, $\Re(s) > 0$ και $\Re(\nu) > 0$. Αντίστοιχα, ο μετασχηματισμός Laplace για την κλασματική παράγωγο ορίζεται ως εξής:

$$L\left\{D_{0+}^{\nu} f(x,t)\right\} = s^{\nu} F(x,s) - \sum_{k=1}^{n} s^{k-1} D_{0+}^{\nu-k} f(x,t)\big|_{t=0},\ n-1 < \nu < n \quad (7.25)$$

Σε συγκεκριμένα προβλήματα συνοριακών τιμών που προκύπτουν στη θεωρία της βισκο-ελαστικότητας εισάγεται ο ορισμός της κλασματικής παραγώγου τάξης $\nu > 0$ με τύπο

$$D_t^{\nu} f(x,t) = \frac{1}{\Gamma(m-\nu)} \int_0^t (t-\tau)^{m-\nu-1} f^{(m)}(x,\tau)d\tau,\ m-1<\nu\le m,\ \Re(\nu)>0,$$

$m \in N$ (7.26)

ή

$$D_t^{\nu} f(x,t) = \frac{\partial^m}{\partial t^m} f(x,t), \text{ αν } \nu = m, \tag{7.27}$$

όπου $\frac{\partial^m}{\partial t^m} f$ είναι η $m-$στή μερική παράγωγος της συνάρτησης $f(x,t)$ ως προς t. Ο μετασχηματισμός Laplace αυτής της παραγώγου δίνεται από τη σχέση

$$L\left\{D_{0+}^{\nu} f(t);s\right\} = s^{\nu}F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\nu-k-1} f^{(k)}(0_+),\ m-1<\nu\le m \tag{7.28}$$

(μετασχηματισμός Laplace παραγώγου Caputo) [7,17].

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι σχέσεις μεταξύ της γενικευμένης συνάρτησης Mittag-Leffler και των κλασματικών ολοκληρωμάτων και παραγώγων Riemann-Liouville.

Έστω $\alpha>0, \beta>0, \gamma>0$ και $\lambda \in \Re$. Έστω επίσης ότι I_{0+}^{ν} και I_{-}^{ν} είναι οι τελεστές κλασματικών ολοκληρωμάτων Riemann-Liouville αριστερός και δεξιός, αντίστοιχα, και ότι D_{0+}^{ν} και D_{-}^{ν} είναι οι τελεστές κλασματικών παραγώγων Riemann-Liouville αριστερός και δεξιός, αντίστοιχα, τότε ισχύουν οι εξής σχέσεις [3]:

Πρόταση 7.4.

1) $(I_{0+}^{\nu}[t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}^{\gamma}(\lambda t^{\alpha})])(x) = x^{\nu+\beta-1}E_{\alpha,\nu+\beta}^{\gamma}(\lambda x^{\alpha})$ (7.29)

Απόδειξη.

Πράγματι: $(I_{0+}^{\nu}[t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}^{\gamma}(\lambda t^{\alpha})])(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^x (x-t)^{\nu-1} t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}^{\gamma}(\lambda t^{\alpha})dt$

$$= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^x (x-t)^{\nu-1} t^{\beta-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_n}{\Gamma(\alpha n+\beta)} \frac{\lambda^n t^{\alpha n}}{n!} dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_n}{\Gamma(\alpha n+\beta)} \frac{\lambda^n}{n!} \int_0^x (x-t)^{\nu-1} t^{\alpha n+\beta-1} dt \qquad (*)$$

Υπολογίζω το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^x (x-t)^{\nu-1} t^{\alpha n+\beta-1} dt = L^{-1}\left\{L\left[x^{\nu-1}\right]L\left[x^{\alpha n+\beta-1}\right]\right\} = L^{-1}\left[\frac{\Gamma(\nu)}{x^{\nu}}\frac{\Gamma(\alpha n+\beta)}{x^{\alpha n+\beta}}\right]$$

$$= \Gamma(\nu)\Gamma(\alpha n+\beta)L^{-1}[x^{-\alpha n-\beta-\nu}]$$

$$= \Gamma(\nu)\Gamma(\alpha n+\beta)\frac{x^{\alpha n+\nu+\beta-1}}{\Gamma(\alpha n+\nu+\beta)}$$

Αντικαθιστώντας στην (*) έχω:

$$= \frac{1}{\Gamma(\nu)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\gamma)_n}{\Gamma(\alpha n+\beta)}\frac{\lambda^n}{n!}\Gamma(\nu)\Gamma(\alpha n+\beta)\frac{x^{\alpha n+\nu+\beta-1}}{\Gamma(\alpha n+\nu+\beta)}$$

$$= x^{\nu+\beta-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\gamma)_n}{\Gamma(\alpha n+\nu+\beta)}\frac{(\lambda x^{\alpha})^n}{n!} = x^{\nu+\beta-1}E^{\gamma}_{\alpha,\nu+\beta}(\lambda x^{\alpha}).\square$$

Ομοίως αποδεικνύεται ότι:

2) $(I^{\nu}_{-}[t^{-\nu-\beta}E^{\gamma}_{\alpha,\beta}(\lambda t^{-\alpha})])(x) = x^{-\beta}E^{\gamma}_{\alpha,\nu+\beta}(\lambda x^{-\alpha})$ (7.30)

3) $(D^{\nu}_{0+}[t^{\beta-1}E^{\gamma}_{\alpha,\beta}(\lambda t^{\alpha})])(x) = x^{\beta-\nu-1}E^{\gamma}_{\alpha,\beta-\nu}(\lambda x^{\alpha})$ (7.31)

4) $(D^{\nu}_{-}[t^{\nu-\beta}E^{\gamma}_{\alpha,\beta}(\lambda t^{-\alpha})])(x) = x^{-\beta}E^{\gamma}_{\alpha,\beta-\nu}(\lambda x^{-\alpha})$ (7.32)

8. Εφαρμογές των συναρτήσεων Mittag-Leffler

Οι συναρτήσεις Mittag-Leffler E_{α} και $E_{\alpha,\beta}$ όπως έχουν ορισθεί από τις σχέσεις (1.1) και (1.4) αντίστοιχα, αποτελούν επεκτάσεις των εκθετικών και τριγωνομετρικών συναρτήσεων, όπως είναι οι εξής:

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(k+1)}, \quad \cos z = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k}}{\Gamma(2k+1)}$$

οι οποίες ικανοποιούν συνήθεις διαφορικές εξισώσεις πρώτης και δεύτερης τάξης της μορφής:

$$D^n y(\lambda z) = \lambda^n y(\lambda z), \quad n = 1,2.$$

Στην περίπτωση όμως των E_{α} και $E_{\alpha,\beta}$ έχουμε διαφορικές εξισώσεις κλασματικής τάξης. Κλασματικές διαφορικές εξισώσεις είναι οι διαφορικές εξισώσεις που περιέχουν τον κλασματικό διαφορικό τελεστή. Για παράδειγμα η απλή κλασματική διαφορική εξίσωση τάξης ν,

$$D^{\nu} y(z) + c^{\nu} y'(z) = A(\nu) z^{-\nu} \tag{8.1}$$

έχει λύση της μορφής

$$y(z) = a(\nu) E_{\nu}(-c^{\nu} z^{\nu}),$$

για κατάλληλη επιλογή των $\alpha(\nu)$ και $A(\nu)$.

Η εξίσωση (8.1) μας δείχνει ότι η Mittag-Leffler συνάρτηση παίζει ανάλογο ρόλο στον κλασματικό λογισμό, με αυτόν της εκθετικής συνάρτησης στον κανονικό λογισμό. Οι συναρτήσεις Mittag-Leffler και ο κλασματικός λογισμός έχουν γίνει τα τελευταία χρόνια ένα ισχυρό εργαλείο για να ερευνήσουμε ανώμαλα δυναμικά και περίεργες κινήσεις.

Α. Κλασματικές κινητικές εξισώσεις και εξισώσεις διάχυσης.

Στη θεωρία ρυθμού αντίδρασης και στα προβλήματα αντίδρασης-διάχυσης όταν οι ολικές παράγωγοι αντικαθίστανται από τις κλασματικές παραγώγους, οι λύσεις προκύπτουν με όρους των συναρτήσεων Mittag-Leffler και των γενικεύσεων τους. Όταν εισέρχεται ο κλασματικός λογισμός οι λύσεις των προβλημάτων μετασχηματίζονται σε Mittag-Leffler συναρτήσεις και σε γενικεύσεις αυτών [3,11,22].

Θεώρημα 8.1. Αν $\Re(\nu) > 0$ τότε η λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης

$$N(t) - N_0 = -c^{\nu} {}_0I_t^{\nu} N(t) \tag{8.2}$$

δίνεται από την σχέση

$$N(t) = N_0 E_{\nu}(-c^{\nu} t^{\nu}) \tag{8.3}$$

όπου $E_{\nu}(t)$ είναι η συνάρτηση Mittag-Leffler όπως δίνεται από τον ορισμό (1.1).

Απόδειξη.

Απ' τον ορισμό (7.8) ισχύει

$$I_{0+}^{\nu} N(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t N(u)(t-u)^{\nu-1} du$$

οπότε αντικαθιστώντας στην (8.2), έχουμε

$$N(t)-N_0=-\frac{c^{\nu}}{\Gamma(\nu)}\int_0^t N(u)(t-u)^{\nu-1}du$$

και εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Laplace προκύπτει

$$L\{N(t)\}-L\{N_0\}=-\frac{c^{\nu}}{\Gamma(\nu)}L\left\{\int_0^t N(u)(t-u)^{\nu-1}du\right\}\qquad\Rightarrow$$

$$L\{N(t)\}-N_0L\{1\}=-\frac{c^{\nu}}{\Gamma(\nu)}L\{N(t)\}L\{t^{\nu-1}\}\qquad\Rightarrow$$

$$\widetilde{N}(s)-\frac{N_0}{s}=-\frac{c^{\nu}}{\Gamma(\nu)}\widetilde{N}(s)\frac{\Gamma(\nu)}{s^{\nu}}\ \Rightarrow\ \widetilde{N}(s)\left[1+\left(\frac{c}{s}\right)^{\nu}\right]=\frac{N_0}{s}\ \Rightarrow$$

$$\widetilde{N}(s)=\frac{N_0}{s}\frac{1}{1+\left(\frac{c}{s}\right)^{\nu}}$$

Όταν $\left|\frac{c}{s}\right|<1$, τότε ισχύει $\dfrac{1}{1+\left(\frac{c}{s}\right)^{\nu}}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{c}{s}\right)^{\nu k}$,

και εφαρμόζοντας αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace στην τελευταία ισότητα έχουμε:

$$L^{-1}\{\widetilde{N}(s)\}=N_0L^{-1}\left\{s^{-1}\frac{1}{1+\left(\frac{c}{s}\right)^{\nu}}\right\}\qquad\Rightarrow$$

$$L^{-1}\{\widetilde{N}(s)\}=N_0L^{-1}\left\{s^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{c}{s}\right)^{\nu k}\right\}\qquad\Rightarrow$$

$$L^{-1}\{\widetilde{N}(s)\}=N_0\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k c^{\nu k}L^{-1}\{s^{-\nu k-1}\}\qquad\Rightarrow$$

$$N(t)=N_0\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k c^{\nu k}\frac{t^{\nu k+1-1}}{\Gamma(\nu k+1)}\Rightarrow\qquad N(t)=N_0\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(c^{\nu}t^{\nu})^k}{\Gamma(\nu k+1)}$$

$$\Rightarrow\quad N(t)=N_0E_{\nu}(-c^{\nu}t^{\nu})$$

που είναι το ζητούμενο .□

Παρατήρηση 8.1. Εάν εφαρμόσουμε τον τελεστή D_{0+}^{ν} από τα αριστερά στην (8.3) και χρησιμοποιήσουμε την σχέση (7.12) προκύπτει η κλασματική εξίσωση της διάχυσης

$$ {}_0D_t^{\nu} N(t) - N_0 \frac{t^{-\nu}}{\Gamma(1-\nu)} = -c^{\nu} N(t), \quad t>0, \quad \Re(\nu)<1 \tag{8.4}$$

η λύση της οποίας, δίνεται από την σχέση (8.3).

Θεώρημα 8.2. Αν $\min\{\Re(\nu),\Re(\mu)\}>0$ τότε η λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης

$$N(t) - N_0 t^{\mu-1} = -c^{\nu}\, {}_0D_t^{-\nu} N(t) \tag{8.5}$$

δίνεται από τη σχέση

$$N(t) = N_0 \Gamma(\mu) t^{\mu-1} E_{\nu,\mu}(-c^{\nu} t^{\nu}) \tag{8.6}$$

όπου $E_{\nu,\mu}(t)$ είναι η γενικευμένη Mittag-Leffler συνάρτηση.

Απόδειξη.

Σύμφωνα με τον ορισμό (7.8) η (8.5) γίνεται:

$$N(t) - N_0 t^{\mu-1} = -\frac{c^{\nu}}{\Gamma(\nu)} \int_0^t N(u)(t-u)^{\nu-1} du$$

και εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό Laplace έχουμε

$$L\{N(t)\} - L\{N_0 t^{\mu-1}\} = -\frac{c^{\nu}}{\Gamma(\nu)} L\left\{\int_0^t N(u)(t-u)^{\nu-1} du\right\} \qquad \Rightarrow$$

$$L\{N(t)\} - N_0 L\{t^{\mu-1}\} = -\frac{c^{\nu}}{\Gamma(\nu)} L\{N(t)\} L\{t^{\nu-1}\} \qquad \Rightarrow$$

$$\widetilde{N}(s) - N_0 \Gamma(\mu) s^{-\mu} = -\frac{c^{\nu}}{\Gamma(\nu)} \widetilde{N}(s) \frac{\Gamma(\nu)}{s^{\nu}} \qquad \Rightarrow$$

$$\widetilde{N}(s)\left[1 + \left(\frac{c}{s}\right)^{\nu}\right] = N_0 \Gamma(\mu) s^{-\mu} \quad \Rightarrow \quad \widetilde{N}(s) = N_0 \Gamma(\mu) s^{-\mu} \frac{1}{1+\left(\frac{c}{s}\right)^{\nu}}$$

Όταν $\left|\frac{c}{s}\right|<1$, τότε ισχύει $\frac{1}{1+\left(\frac{c}{s}\right)^{\nu}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{c}{s}\right)^{\nu k}$ και εφαρμόζοντας αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace παίρνουμε

$$L^{-1}\left\{\widetilde{N}(s)\right\} = N_0\Gamma(\mu)L^{-1}\left\{s^{-\mu}\frac{1}{1+\left(\frac{c}{s}\right)^{\nu}}\right\} \qquad \Rightarrow$$

$$L^{-1}\left\{\widetilde{N}(s)\right\} = N_0\Gamma(\mu)L^{-1}\left\{s^{-\mu}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{c}{s}\right)^{\nu k}\right\} \qquad \Rightarrow$$

$$L^{-1}\left\{\widetilde{N}(s)\right\} = N_0\Gamma(\mu)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k c^{\nu k}L^{-1}\left\{s^{-\nu k-\mu}\right\} \qquad \Rightarrow$$

$$N(t) = N_0\Gamma(\mu)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k c^{\nu k}\frac{t^{\nu k+\mu-1}}{\Gamma(\nu k+\mu)} \qquad \Rightarrow$$

$$N(t) = N_0\Gamma(\mu)t^{\mu-1}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(c^{\nu}t^{\nu})^k}{\Gamma(\nu k+\mu)} \qquad \Rightarrow$$

$$N(t) = N_0\Gamma(\mu)t^{\mu-1}E_{\nu,\mu}(-c^{\nu}t^{\nu})$$

που είναι το ζητούμενο .□

Β. Στατιστική κατανομή Mittag-Leffler

Μια στατιστική κατανομή που αποτελείται από όρους της συνάρτησης Mittag-Leffler $E_{\alpha}(y)$ έχει οριστεί από τον Pillai [1990] ως εξής [3]:

$$G(y) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}y^{\alpha k}}{\Gamma(1+\alpha k)} & , \quad 0<\alpha\le 1, \quad y>0 \\ 0 & , \quad y\le 0 \end{cases} \qquad (8.7)$$

ή

$$G(y) = \begin{cases} 1-E_{\alpha}(-y^{\alpha}) & , \quad 0<\alpha\le 1, \quad y>0 \\ 0 & , \quad y\le 0 \end{cases}. \qquad (8.8)$$

Παραγωγίζοντας τα δύο μέλη ως προς y παίρνουμε την συνάρτηση πυκνότητας $f(y) = y^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-y^{\alpha})$.

Πράγματι: $f(y)=\frac{d}{dy}G(y)$

$$=\frac{d}{dy}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}y^{\alpha k}}{\Gamma(1+\alpha k)}\right]=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}\alpha k y^{\alpha k-1}}{\Gamma(1+\alpha k)}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k}\alpha(k+1)y^{\alpha(k+1)-1}}{\Gamma(1+\alpha(k+1))}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k}y^{\alpha+\alpha k-1}}{\Gamma(\alpha+\alpha k)}$$

$$=y^{\alpha-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k}y^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha+\alpha k)}$$

$$=y^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-y^{\alpha}),\ 0<\alpha\le 1,\ y>0 \qquad (8.9)$$

όπου $E_{\alpha,\beta}(x)$ είναι η γενικευμένη συνάρτηση Mittag-Leffler.

Παίρνοντας το μετασχηματισμό Laplace της $f(y)$ από την (8.9) λόγω της (6.10) για $\alpha=\beta$ και $\lambda=-1$ προκύπτει:

$$L\{f(y)\}=\frac{1}{1+s^{\alpha}},\ \left|s^{\alpha}\right|<1. \qquad (8.10)$$

Για την γενικευμένη Mittag-Leffler πυκνότητα θεωρούμε την εξής γενικευμένη Mittag-Leffler συνάρτηση

$$g(y)=\frac{1}{\Gamma(\gamma)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k}\Gamma(\gamma+k)}{k!\Gamma(\alpha k+\alpha\gamma)}y^{\alpha\gamma-1+\alpha k}$$

$$=y^{\alpha\gamma-1}E_{\alpha\gamma,\alpha}^{\gamma}(-y^{\alpha}),\ \alpha>0,\ \gamma>0. \qquad (8.11)$$

Οπότε ο μετασχηματισμός Laplace της $g(y)$ δίνεται απ' την (8.11) λόγω της (6.9) για $\beta=\alpha\gamma$ και $\lambda=-1$ ως εξής:

$$L\{g(y)\}=\frac{1}{(1+s^{\alpha})^{\gamma}},\ \left|s^{\alpha}\right|<1. \qquad (8.12)$$

Γ. Στα μη γραμμικά κύματα

Πρόβλημα. Θεωρούμε την κλασματική εξίσωση αντίδρασης-διάχυσης

$$ {}_0D_t^{\alpha}N(x,t)+a\,{}_0D_t^{\beta}N(x,t)=\nu^{2}\,{}_{-\infty}D_x^{\gamma}N(x,t)+\zeta^{2}N(x,t)+\phi(x,t) \qquad (8.13)$$

για $x \in \Re$, $t>0$, $0 \le \alpha \le 1$, $0 \le \beta \le 1$ με αρχικές συνθήκες $N(x,0)=f(x)$, $\lim_{x\to\pm\infty} N(x,t)=0$, για $x \in \Re$, όπου ν^2 είναι μια σταθερά διάχυσης , ζ είναι μια σταθερά που περιγράφει τη μη-γραμμικότητα του συστήματος και $\phi(x,t)$ είναι μια μη-γραμμική συνάρτηση η οποία ανήκει στην περιοχή της αντίδρασης-διάχυσης.Η λύση της (8.13) δίνεται [3]:

$$
\begin{aligned}
N(x,t) &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-a)^r}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} t^{(\alpha-\beta)r} f^*(k) \exp(-kx) \\
&\times \left[E_{\alpha,(\alpha-\beta)r+1}^{r+1}\left(-bt^{\alpha}\right) + t^{\alpha-\beta} E_{\alpha,(\alpha-\beta)(r+1)+1}^{r+1}\left(-bt^{\alpha}\right)\right] dk \\
&+ \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-a)^r}{2\pi} \int_{0}^{t} \zeta^{\alpha+(\alpha-\beta)r-1} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(k,t-\zeta) \exp(-ikx) \\
&\times E_{\alpha,\alpha+(\alpha-\beta)r}^{r+1}\left(-b\zeta^{\alpha}\right) dk d\zeta
\end{aligned}
\tag{8.14}
$$

όπου $\alpha > \beta$, $E_{\beta,\gamma}^{\delta}(\cdot)$ είναι η γενικευμένη συνάρτηση Mittag-Leffler και $b = \nu^2 |k|^{\gamma} - \zeta^2$.

Θεώρημα 8.3. Η κλασματική διαφορική εξίσωση:

$$\left(D_{0+}^{\mu,\nu} y\right)(x) = \lambda\left(\varepsilon_{0+;\alpha,\beta}^{\omega;\gamma,\kappa}\right)(x) + f(x) \tag{8.15}$$

$0<\mu<1$, $0 \le \nu \le 1$, $\omega \in C$, $\Re(\alpha) > \max\{0, \Re(\kappa)-1\}$,
$\min\{\Re(\beta), \Re(\gamma) > 0, \Re(\kappa)\} > 0$, με την αρχική συνθήκη:
$\left(I_{0+}^{(1-\nu)(1-\mu)} f\right)(0+) = C$
έχει λύση στο χώρο $L(0,\infty)$ η οποία δίνεται από τον τύπο

$$y(x) = C\frac{x^{\mu-\nu(1-\mu)-1}}{\Gamma(\mu-\nu+\mu\nu)} + \lambda x^{\mu+\beta} E_{\alpha,\beta+\mu+1}^{\gamma,\kappa}(\omega x^{\alpha}) + \frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^x (x-t)^{\mu-1} f(t)dt, \tag{8.16}$$

όπου C είναι μια αυθαίρετη σταθερά και

$$\left(\varepsilon_{0+;\alpha,\beta}^{\omega;\gamma,\kappa}\right)(x) = \int_0^x (x-t)^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}^{\gamma,\kappa}[\omega(x-t)^{\alpha}]dt, \ x>0 \tag{8.17}$$

$\gamma, \omega \in C$, $\Re(\alpha) > \max\{0, \Re(\kappa)-1\}$, $\min\{\Re(\beta), \Re(\kappa)\} > 0$.

Απόδειξη.

Εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Laplace στην (8.15) έχω

$$L\left\{\left(D_{0+}^{\mu,\nu}y\right)(x)\right\}=\lambda L\left\{\left(\varepsilon_{0+;\alpha,\beta}^{\omega;\gamma,\kappa}\right)(x)\right\}+L\{f(x)\}$$

και από τις σχέσεις (7.18) και (8.17) παίρνω

$$s^{\mu}Y(s)-Cs^{\nu(1-\mu)}=\lambda L[x^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}^{\gamma,\kappa}(\omega x^{\alpha})](s)\cdot L[1](s)+F(s) \tag{8.18}$$

Υπολογίζω τον όρο $L[x^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}^{\gamma,\kappa}(\omega x^{\alpha})](s)$

$$L[x^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}^{\gamma,\kappa}(\omega x^{\alpha})](s)=\int_0^{\infty}e^{-sx}x^{\beta-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\gamma)_{\kappa n}}{\Gamma(\alpha n+\beta)}\frac{(\omega x^{\alpha})^n}{n!}dx$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\gamma)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\gamma+\kappa n)}{\Gamma(\alpha n+\beta)}\frac{\omega^n}{n!}\int_0^{\infty}e^{-sx}x^{\alpha n+\beta-1}dx$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\gamma)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\gamma+\kappa n)}{\Gamma(\alpha n+\beta)}\frac{\omega^n}{n!}L[x^{\alpha n+\beta-1}]$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\gamma)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\gamma+\kappa n)}{\Gamma(\alpha n+\beta)}\frac{\omega^n}{n!}\frac{\Gamma(\alpha n+\beta)}{s^{\alpha n+\beta}}$$

$$=\frac{s^{-\beta}}{\Gamma(\gamma)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\gamma+\kappa n)}{n!}\left(\frac{\omega}{s^{\alpha}}\right)^n=\frac{s^{-\beta}}{\Gamma(\gamma)}{}_1\psi_0\left[\begin{matrix}(\gamma,\kappa); & \\ & \dfrac{\omega}{s^{\alpha}}\\ -\ ; & \end{matrix}\right]$$

Από την (8.18) έχω

$$Y(s)=Cs^{\nu(1-\mu)-\mu}+\lambda\frac{s^{-\beta-\mu-1}}{\Gamma(\gamma)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\gamma+\kappa n)}{n!}\left(\frac{\omega}{s^{\alpha}}\right)^n+s^{-\mu}F(s)$$

Οπότε παίρνοντας τώρα αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace έχω

$$y(x)=CL^{-1}[s^{\nu(1-\mu)-\mu}](x)+\frac{\lambda}{\Gamma(\gamma)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\gamma+\kappa n)}{n!}\omega^nL^{-1}[s^{-\alpha n-\beta-\mu-1}](x)$$

$$+L^{-1}L\left[\frac{x^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}*f(x)\right]$$

$$=C\frac{x^{\mu-\nu(1-\mu)-1}}{\Gamma(\mu-\nu+\mu\nu)}+\lambda x^{\mu+\beta}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\gamma)_{\kappa n}}{n!}\frac{(\omega x^{\alpha})^{n}}{\Gamma(\alpha n+\beta+\mu+1)}$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_{0}^{x}(x-t)^{\mu-1}f(t)dt$$

$$=C\frac{x^{\mu-\nu(1-\mu)-1}}{\Gamma(\mu-\nu+\mu\nu)}+\lambda x^{\mu+\beta}E_{\alpha,\beta+\mu+1}^{\gamma,\kappa}(\omega x^{\alpha})+\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_{0}^{x}(x-t)^{\mu-1}f(t)dt\,[21].\square$$

Πόρισμα 8.1. Η κλασματική διαφορική εξίσωση:

$$\left(D_{0+}^{\mu,\nu}y\right)(x)=\lambda\left(\varepsilon_{0+;\alpha,\beta}^{\omega;\gamma,\kappa}\right)(x)+x^{\beta}E_{\alpha,\beta+1}^{\gamma,\kappa}(\omega x^{\alpha}) \quad (8.19)$$

$0<\mu<1,\ 0\leq\nu\leq1,\ \omega\in C$, $\Re(\alpha)>\max\{0,\Re(\kappa)-1\}$,
$\min\{\Re(\beta),\Re(\gamma)>0,\Re(\kappa)\}>0$,με την αρχική συνθήκη:
$\left(I_{0+}^{(1-\nu)(1-\mu)}f\right)(0+)=C$
έχει λύση στο χώρο $L(0,\infty)$ η οποία δίνεται από τον τύπο

$$y(x)=C\frac{x^{\mu-\nu(1-\mu)-1}}{\Gamma(\mu-\nu+\mu\nu)}+\left(\lambda+\frac{1}{\Gamma(\mu)}\right)x^{\mu+\beta}E_{\alpha,\beta+\mu+1}^{\gamma,\kappa}(\omega x^{\alpha}), \quad (8.20)$$

όπου C είναι μια αυθαίρετη σταθερά και
$\left(\varepsilon_{0+;\alpha,\beta}^{\omega;\gamma,\kappa}\right)(x)=\int_{0}^{x}(x-t)^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}^{\gamma,\kappa}[\omega(x-t)^{\alpha}]dt,\ x>0$
$\gamma,\omega\in C$, $\Re(\alpha)>\max\{0,\Re(\kappa)-1\}$, $\min\{\Re(\beta),\Re(\kappa)\}>0$ [26].

Θεώρημα 8.2. Η κλασματική διαφορική εξίσωση:

$$x\left(D_{0+}^{\mu,\nu}y\right)(x)=\lambda\left(\varepsilon_{0+;\alpha,\beta}^{\omega;\gamma,\kappa}\right)(x) \quad (8.21)$$

$0<\mu<1,\ 0\leq\nu\leq1,\ \omega\in C$, $\Re(\alpha)>\max\{0,\Re(\kappa)-1\}$,
$\min\{\Re(\beta),\Re(\gamma)>0,\Re(\kappa)\}>0$, με την αρχική συνθήκη:
$\left(I_{0+}^{(1-\nu)(1-\mu)}f\right)(0+)=C_1$
έχει λύση στο χώρο $L(0,\infty)$ η οποία δίνεται από τον τύπο

$$y(x)=C_2\frac{x^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}+C_1\frac{x^{\mu-\nu(\mu-1)-1}}{\Gamma(\mu-\nu(\mu-1))}$$

$$-\frac{\lambda}{\Gamma(\mu)}\int_0^x t^{\mu-1}(x-t)^{\beta-1}E_{\alpha,\beta+1}^{\gamma,\kappa}[\omega(x-t)^{\alpha}]dt$$

όπου C_1 και C_2 είναι αυθαίρετες σταθερές.

Απόδειξη.

Ισχύει ο εξής τύπος:

$$\frac{\partial^n}{\partial s^n}\left(\left[Ly(x)\right](s)\right)=(-1)^n L\left[x^n y(x)\right](s),\ n\in N_0 \tag{8.22}$$

Στην περίπτωση εδώ για $n=1$ είναι

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\left[Ly(x)\right](s)\right)=-L\left[xy(x)\right](s)$$

Εφαρμόζω μετασχηματισμό Laplace στην (8.21) οπότε έχω

$$\frac{\partial}{\partial s}(s^{\mu}Y(s)-C_1 s^{\nu(\mu-1)})=-\lambda\frac{s^{-\beta-1}}{\Gamma(\gamma)}{}_1\psi_0\begin{bmatrix}(\gamma,\kappa); & \\ & \dfrac{\omega}{s^{\alpha}} \\ -\ ; & \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$Y'(s)+\frac{\mu}{s}Y(s)-C_1\nu(\mu-1)s^{\nu(\mu-1)-1-\mu}+\lambda\frac{s^{-\beta-\mu-1}}{\Gamma(\gamma)}{}_1\psi_0\begin{bmatrix}(\gamma,\kappa); & \\ & \dfrac{\omega}{s^{\alpha}} \\ -\ ; & \end{bmatrix}=0 \tag{8.23}$$

Λύνοντας τη συνήθη διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης έχουμε

$$Y(s)=\exp\left(-\int\frac{\mu}{s}ds\right)\left[C_2+\int\left(C_1\nu(\mu-1)s^{\nu(\mu-1)-1-\mu}-\frac{\lambda}{\Gamma(\gamma)}s^{-\beta-\mu-1}\cdot\right.\right.$$

$$\left.\left.{}_1\psi_0\begin{bmatrix}(\gamma,\kappa); & \\ & \dfrac{\omega}{s^{\alpha}} \\ -\ ; & \end{bmatrix}\right)\exp\left(\int\frac{\mu}{s}ds\right)ds\right]$$

$$=C_2 s^{-\mu} + C_1 s^{\nu(\mu-1)-\mu} - \frac{\lambda s^{-\mu}}{\Gamma(\gamma)} \int s^{-\beta-1} \cdot {}_1\psi_0 \left[\begin{matrix} (\gamma,k); & \\ & \dfrac{\omega}{s^{\alpha}} \\ -\ ; & \end{matrix} \right] ds \qquad \Rightarrow$$

$$Y(s) = C_2 s^{-\mu} + C_1 s^{\nu(\mu-1)-\mu} - \frac{\lambda}{s^{\mu}} \int s^{-\beta-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_{\kappa n}}{n!} \frac{\omega^n}{s^{\alpha n}} ds$$

$$= C_2 s^{-\mu} + C_1 s^{\nu(\mu-1)-\mu} - \frac{\lambda}{s^{\mu}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_{\kappa n}}{n!} \omega^n \int s^{-\alpha n-\beta-1} ds$$

$$= C_2 s^{-\mu} + C_1 s^{\nu(\mu-1)-\mu} - \frac{\lambda}{s^{\mu}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_{\kappa n}}{n!} \omega^n \frac{s^{-\alpha n-\beta}}{-\alpha n-\beta}$$

$$= C_2 s^{-\mu} + C_1 s^{\nu(\mu-1)-\mu} + \frac{\lambda}{s^{\mu}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_{\kappa n}}{n!} \omega^n \frac{s^{-\alpha n-\beta}}{\alpha n+\beta}$$

Παίρνοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace έχουμε

$$y(x) = C_2 \frac{x^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)} + C_1 \frac{x^{\mu-\nu(\mu-1)-1}}{\Gamma[\mu-\nu(\mu-1)]} + L^{-1}\left[\frac{\lambda}{s^{\mu}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_{\kappa n}}{n!} \frac{\omega^n}{\alpha n+\beta} \frac{1}{s^{\alpha n+\beta}} \right] \Rightarrow$$

$$y(x) = C_2 \frac{x^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)} + C_1 \frac{x^{\mu-\nu(\mu-1)-1}}{\Gamma[\mu-\nu(\mu-1)]}$$

$$+ \lambda L^{-1}\left[L\left[\frac{x^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)} \right] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_{\kappa n}}{n!} \frac{\omega^n}{\alpha n+\beta} L\left[\frac{x^{\alpha n+\beta-1}}{\Gamma(\alpha n+\beta)} \right] \right] \qquad \Rightarrow$$

$$y(x) = C_2 \frac{x^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)} + C_1 \frac{x^{\mu-\nu(\mu-1)-1}}{\Gamma[\mu-\nu(\mu-1)]}$$

$$+ \lambda L^{-1}\left[L\left[\frac{x^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)} \right] L\left[x^{\beta-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_{\kappa n}}{n!} \frac{\omega^n x^{\alpha n}}{\Gamma(\alpha n+\beta+1)} \right] \right] \qquad \Rightarrow$$

$$y(x) = C_2 \frac{x^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)} + C_1 \frac{x^{\mu-\nu(\mu-1)-1}}{\Gamma[\mu-\nu(\mu-1)]}$$

$$+ \frac{\lambda}{\Gamma(\mu)} L^{-1}\left[L\left[x^{\mu-1} \right] L\left[x^{\beta-1} E_{\alpha,\beta+1}^{\gamma,\kappa}(\omega x^{\alpha}) \right] \right]$$

$\Rightarrow$

$$y(x)=C_2\frac{x^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}+C_1\frac{x^{\mu-\nu(\mu-1)-1}}{\Gamma[\mu-\nu(\mu-1)]}+\frac{\lambda}{\Gamma(\mu)}L^{-1}\left[L\left[x^{\mu-1}*x^{\beta-1}E^{\gamma,\kappa}_{\alpha,\beta+1}(\omega x^{\alpha})\right]\right]$$

$$\Rightarrow\ y(x)=C_2\frac{x^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}+C_1\frac{x^{\mu-\nu(\mu-1)-1}}{\Gamma[\mu-\nu(\mu-1)]}$$

$$+\frac{\lambda}{\Gamma(\mu)}\int_0^x t^{\mu-1}(x-t)^{\beta-1}E^{\gamma,\kappa}_{\alpha,\beta+1}\left[\omega(x-t)^{\alpha}\right]dt \ [26]$$

Οι κλασματικές διαφορικές εξισώσεις (8.15), (8.19) και (8.21) για κατάλληλη επιλογή των παραμέτρων περιγράφουν τη συμπεριφορά του free electron laser.

Θεώρημα 8.4[27]. Θεωρούμε την κλασματική ολοκληρο-διαφορική εξίσωση τύπου Volterra:

$$D^{\mu}f(x)+\frac{a}{\Gamma(\nu)}\int_0^x (x-t)^{\nu-1}f(t)dt=g(x), \qquad (8.24)$$

η οποία μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$D^{\mu}f(x)+aI^{\nu}f(x)=g(x), \qquad (8.25)$$

όπου $\Re(\mu), \Re(\nu)>0$, $g(x)$ είναι οποιαδήποτε ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο πεπερασμένο διάστημα $[0,b]$ και $a\in C$. Τότε η λύση της (8.25) δίνεται από τη σχέση

$$f(x)=\int_0^x (x-t)^{\mu-1}E_{\mu+\nu,\mu}(-a(x-t)^{\mu+\nu})g(t)dt$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1}c_k x^{\mu-k-1}E_{\mu+\nu,\mu-k}(-ax^{\mu+\nu}). \qquad (8.26)$$

Απόδειξη.

Εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Laplace στην (8.25) έχουμε:

$$L\left\{D^{\mu}f(x)\right\}+aL\left\{I^{\nu}f(x)\right\}=L\{g(x)\}$$

και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (7.21) και (7.22) η παραπάνω εξίσωση γίνεται:

$$s^{\mu}F(s)-\sum_{k=1}^{n}s^{k-1}D^{\mu-k}f(x)\bigg|_{x=0}+as^{-\nu}F(s)=G(s)\,,\quad n-1<\Re(\mu)<n\quad\Rightarrow$$

$$(s^{\mu}+as^{-\nu})F(s)=G(s)+\sum_{k=1}^{n}s^{k-1}D^{\mu-k}f(x)\bigg|_{x=0}\qquad\Rightarrow$$

$$s^{-\nu}(s^{\mu+\nu}+a)F(s)=G(s)+\sum_{k=1}^{n}s^{k-1}D^{\mu-k}f(x)\bigg|_{x=0}\qquad\Rightarrow$$

$$F(s)=\frac{s^{\nu}}{s^{\mu+\nu}+a}\left[G(s)+\sum_{k=1}^{n}s^{k-1}D^{\mu-k}f(x)\bigg|_{x=0}\right]$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (6.13) για $\alpha=\mu+\nu$, $\beta=\mu$ και $\lambda=-a$ έχω:

$L\left\{t^{\mu-1}E_{\mu+\nu,\mu}(-at^{\mu+\nu})\right\}(s)=\dfrac{s^{\nu}}{s^{\mu+\nu}+a}$ και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της συνέλιξης όταν πάρουμε αντίστροφο μετασχηματισμό καταλήγουμε στο εξής:

$$f(x)=x^{\mu-1}E_{\mu+\nu,\mu}(-ax^{\mu+\nu})*g+\sum_{k=1}^{n}c_k\,\frac{s^{\nu+k-1}}{s^{\mu+\nu}+a}$$

Όμοια, χρησιμοποιώντας τη σχέση (6.13) για $\alpha=\mu+\nu$, $\beta=\mu-k$ και $\lambda=-a$ έχω:

$$f(x)=\int_0^x(x-t)^{\mu-1}E_{\mu+\nu,\mu}[-a(x-t)^{\mu+\nu}]g(t)dt$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1}c_kx^{\mu-k-1}E_{\mu+\nu,\mu-k}(-ax^{\mu+\nu})\,.$$

Ένας δεύτερος τρόπος απόδειξης είναι:

Εφαρμόζοντας τον κλασματικό ολοκληρωτικό τελεστή $D^{-\mu}$ και στα δύο μέλη της (8.25) έχουμε,

$$D^{-\mu}D^{\mu}f(x)+aD^{-\mu-\nu}f(x)=D^{-\mu}g(x)\,.\qquad(8.27)$$

Έστω n ακέραιος τέτοιος ώστε $n = [\Re(\mu)] + 1$. Χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$D^{-\mu} D^{\mu} f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{\mu-k-1}}{\Gamma(\mu - k)} f_{n-\mu}^{(n-k-1)}(0),$$

όπου $\qquad f_{n-\mu}^{(n-k-1)}(x) = D^{n-k-1} D^{\mu-n} f(x) = D^{\mu-k-1} f(x)$,

η (8.27) γίνεται

$$f(x) = D^{-\mu} g(x) - aD^{-\mu-\nu} f(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{\mu-k-1}}{\Gamma(\mu - k)} D^{\mu-k-1} f(0) . \quad (8.28)$$

Εφαρμόζοντας και στα δύο μέλη της (8.28) τον τελεστή $(-a)^m D^{-m(\mu+\nu)}$ έχουμε :

$$(-a)^m D^{-m(\mu+\nu)} f(x) = (-a)^m D^{-\mu-m(\mu+\nu)} g(x)$$
$$+ (-a)^{m+1} D^{-(m+1)(\mu+\nu)} f(x) + \sum_{k=0}^{n-1} D^{\mu-k-1} f(0) (-a)^m D^{-m(\mu+\nu)} \frac{x^{\mu-k-1}}{\Gamma(\mu - k)}$$

m=0,1,2,…

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τον όρο $D^{-m(\mu+\nu)} \dfrac{x^{\mu-k-1}}{\Gamma(\mu - k)}$ χρησιμοποιώντας τη σχέση (7.10):

$$D^{-m(\mu+\nu)} \frac{x^{\mu-k-1}}{\Gamma(\mu - k)} = \frac{\Gamma(\mu - k)}{\Gamma[\mu - k + m(\mu + \nu)]} \frac{x^{\mu-k-1+m(\mu+\nu)}}{\Gamma(\mu - k)}$$
$$= \frac{x^{\mu+m(\mu+\nu)-k-1}}{\Gamma[\mu + m(\mu + \nu) - k]}$$

Αντικαθιστώντας αυτό που βρήκαμε θα έχουμε

$$(-a)^m D^{-m(\mu+\nu)} f(x) = (-a)^m D^{-\mu-m(\mu+\nu)} g(x)$$
$$+ (-a)^{m+1} D^{-(m+1)(\mu+\nu)} f(x) + \sum_{k=0}^{n-1} D^{\mu-k-1} f(0) (-a)^m \frac{x^{\mu+m(\mu+\nu)-k-1}}{\Gamma[\mu + m(\mu + \nu) - k]}$$

Αθροίζοντας από $m = 0$ μέχρι ∞, παίρνουμε

$$\sum_{m=0}^{\infty}(-a)^m D^{-m(\mu+\nu)}f(x)=\sum_{m=0}^{\infty}(-a)^m D^{-\mu-m(\mu+\nu)}g(x)+$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}(-a)^{m+1} D^{-(m+1)(\mu+\nu)}f(x)+\sum_{k=0}^{n-1}D^{\mu-k-1}f(0)x^{\mu-k-1}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-ax^{\mu+\nu})^m}{\Gamma[\mu+m(\mu+\nu)-k]}$$

Απαλείφοντας τους όρους και στα δύο μέλη καταλήγω στο εξής

$$f(x)=\sum_{m=0}^{\infty}(-a)^m D^{-\mu-m(\mu+\nu)}g(x)$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1}D^{\mu-k-1}f(0)x^{\mu-k-1}E_{\mu+\nu,\mu-k}(-ax^{\mu+\nu}).$$

Έχουμε

$$\sum_{m=0}^{\infty}(-a)^m D^{-\mu-m(\mu+\nu)}g(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\int_0^x\frac{(x-t)^{\mu+m(\mu+\nu)-1}}{\Gamma[\mu+m(\mu+\nu)]}(-a)^m g(t)dt$$

$$=\int_0^x (x-t)^{\mu-1}E_{\mu+\nu,\mu}[-a(x-t)^{\mu+\nu}]g(t)dt$$

Συνεπώς,

$$f(x)=\int_0^x (x-t)^{\mu-1}E_{\mu+\nu,\mu}[-a(x-t)^{\mu+\nu}]g(t)dt$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1}c_k x^{\mu-k-1}E_{\mu+\nu,\mu-k}(-ax^{\mu+\nu}) \; .$$

Δ. Κλασματικό RLC ηλεκτρικό κύκλωμα [25]

Θεωρούμε την κλασματική ολοκληρο-διαφορική εξίσωση του RLC κυκλώματος:

$$R\frac{d^{\alpha}}{dt^{\alpha}}i_C(t)+\frac{1}{C}i_C(t)+\frac{R/LC}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-\xi)^{\alpha-1}i_C(\xi)d\xi=\frac{d}{dt}\theta(t)$$

όπου $0<\alpha\le 1$ η τάξη της κλασματικής εξίσωσης, R η αντίσταση, L το πηνίο, C ο πυκνωτής του κυκλώματος, i_C το ρεύμα που περνάει από τον πυκνωτή και $\theta(t)$ η συνάρτηση Heaviside, με την αρχική συνθήκη $i_C(0)=0$.

Θα λύσουμε την παραπάνω ολοκληρο-διαφορική εξίσωση χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό Laplace. Εφαρμόζοντας λοιπόν το μετασχηματισμό και στα δύο μέλη έχουμε:

$$RL\{D^\alpha i_C(t)\}+\frac{1}{C}i_C(t)+\frac{R/LC}{\Gamma(\alpha)}L\left\{\int_0^t (t-\xi)^{\alpha-1}i_C(\xi)d\xi\right\}=L\left\{\frac{d}{dt}\theta(t)\right\} \quad \Rightarrow$$

$$Rs^\alpha F(s)+\frac{F(s)}{C}+\frac{R/LC}{\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma(\alpha)}{s^\alpha}F(s)=1$$

όπου $F(s)=L\{i_C(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}i_C(t)dt$ με $\Re(s)>0$.

Οπότε λύνοντας ως προς την $F(s)$ καταλήγουμε:

$$F(s)=\frac{1}{R}\frac{s^\alpha}{s^{2\alpha}+As^\alpha+B}$$

όπου $A=1/RC$ και $B=1/LC$.

Εφαρμόζοντας αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace έχουμε:

$$i_C(t)=\frac{1}{R}L^{-1}\left\{\frac{s^\alpha}{s^{2\alpha}+As^\alpha+B}\right\}$$

και χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$L^{-1}\left\{\frac{s^{\rho-1}}{s^\alpha+As^\beta+B}\right\}=t^{\alpha-\rho}\sum_{k=0}^\infty (-A)^k t^{(\alpha-\beta)k}E^{k+1}_{\alpha,\alpha+1-\rho+(\alpha-\beta)k}(-Bt^\alpha) \qquad (*)$$

για $\left|As^\beta/(s^\alpha+B)\right|<1$ και $\alpha\geq\beta$ καταλήγουμε:

$$i_C(t)=\frac{t^{\alpha-1}}{R}\sum_{k=0}^\infty (-A)^k t^{\alpha k}E^{k+1}_{2\alpha,\alpha+\alpha k}(-Bt^{2\alpha})\theta(t).$$

Σημείωση 8.1. Απόδειξη της σχέσης (*).

$$\frac{s^{\rho-1}}{s^{\alpha}+As^{\beta}+B}=\frac{s^{\rho-1}}{(s^{\alpha}+B)\left[1+\frac{As^{\beta}}{s^{\alpha}+B}\right]}=\frac{s^{\rho-1}}{s^{\alpha}+B}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\left(\frac{As^{\beta}}{s^{\alpha}+B}\right)^{k}$$

$$=\frac{s^{\rho-1}}{s^{\alpha}+B}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\frac{A^{k}s^{\beta k}}{(s^{\alpha}+B)^{k}}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}A^{k}\frac{s^{\beta k+\rho-1}}{(s^{\alpha}+B)^{k+1}}$$

και χρησιμοποιώντας τη σχέση (6.15) έχουμε:

$$\frac{s^{\rho-1}}{s^{\alpha}+As^{\beta}+B}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k}A^{k}}{k!}L\left\{t^{\alpha k+\alpha-\rho-\beta k}\left(\frac{\partial}{\partial(-B)}\right)^{k}E_{\alpha,\alpha-\rho+1-\beta k}(-Bt^{\alpha})\right\}$$

Οπότε παίρνοντας αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace καταλήγουμε στο εξής:

$$L^{-1}\left\{\frac{s^{\rho-1}}{s^{\alpha}+As^{\beta}+B}\right\}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-A)^{k}}{k!}t^{(\alpha-\beta)k+\alpha-\rho}\left(\frac{\partial}{\partial(-B)}\right)^{k}E_{\alpha,\alpha-\beta k-\rho+1}(-Bt^{\alpha})$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-A)^{k}}{k!}k!t^{(\alpha-\beta)k+\alpha-\rho}E_{\alpha,\alpha+1-\rho+(\alpha-\beta)k}^{k+1}(-Bt^{\alpha})$$

$$=t^{\alpha-\rho}\sum_{k=0}^{\infty}(-A)^{k}t^{(\alpha-\beta)k}E_{\alpha,\alpha+1-\rho+(\alpha-\beta)k}^{k+1}(-Bt^{\alpha})$$

διότι ισχύει η ιδιότητα:

$$\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)^{n}\left[z^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(\lambda z^{\alpha})\right]=n!z^{\alpha n+\beta-1}E_{\alpha,\alpha n+\beta}^{n+1}(\lambda z^{\alpha})$$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] M.N. Berberan-Santos, **Properties of the Mittag-Leffler relaxation function**, Journal of Mathematical Chemistry Vol. 38, No. 4, (2005), pp. 629-635.

[2] J.W. Hanneken, B.N.N. Achar, R. Puzio, D.M. Vaught, **Properties of the Mittag-Leffler function for negative alpha**, Phys. Scr. T136, (2009) 014037 pp.1-5.

[3] H.J. Haubold, A.M. Mathai and R.K. Saxena, **Mittag-Leffler functions and their applications**, arxiv.org/abs/0909.0230v2 [math.CA], (2009).

[4] R. Hilfer and H.J. Seybol, **Computation of the generalized Mittag-Leffler function and its inverse in the comlex plane**, Integral Transforms and Special Functions Vol. 17, No. 9, Taylor & Francis, (2006), pp. 637-652.

[5] G. Jumarie, **Laplace's transform of fractional order via the Mittag-Leffler function and Modified Riemann-Liouville derivative**, Applied Mathematics Letters , Elsevier, (2009), pp. 1659-1664.

[6] A.A. Kilbas, M. Saigo and R.K. Saxena, **Solution of volterra integro-differential equations with generalized Mittag-Leffler function in the kernels**, Journal of integral equations and applications, Vol. 14, No. 4, (2002), pp. 377-396.

[7] A.A. Kilbas, M. Saigo and R.K. Saxena, **Generalized Mittag-Leffler function and generalized fractional calculus operators**, Integral Transforms and Special Functions, Taylor & Francis, (2004), pp. 31-49.

[8] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo, **Theory and Applications of Fractional Differential Equations**, Mathematics Studies, (2006).

[9] V. Kiryakova, **The special functions of fractional calculus as generalized fractional calculus operators of some basic functions,** Computers and Mathematics with Applications, Elsevier, (2009).

[10] F. Mainardi, R. Gorenflo, **On Mittag-Leffler-type functions in fractional evolution processes**, Journal of Computational and Applied Mathematics, Elsevier, (2000), pp. 283-289.

[11] A.M. Mathai and H.J. Haubold, **Mittag-Leffler Functions to Pathway Model to Tsallis Statistics**, arxiv.org/abs/0908.3816, (2009)

[12] K.S. Miller and S.G. Samko, **A note on the complete monotonicity of the generalized Mittag-Leffler function**, Real anal. Exchange, (1997), pp. 23:753-755.

[13] K.S. Miller and S.G. Samko, **Completely monotonic functions**, Integr. Transf. and Spec. Funct. Vol. 12, No. 4, (2001), pp. 389-402.

[14] G.M. Mittag-Leffler, **Sur l'integrale de Laplace-Abel**, C.R. Acad. Sci. Paris (Ser. II), 136(1902), pp. 937-939.

[15] G.M. Mittag-Leffler, **Une generalisation de l'integrale de Laplace-Abel**, C.R. Acad. Sci. Paris (Ser. II), 137(1903), pp. 537-539.

[16] G.M. Mittag-Leffler, **Sur la nouvelle function** $E_\alpha(x)$, C.R. Acad. Sci. Paris, 137(1903), pp. 554-558.

[17] G.M. Mittag-Leffler, **Sopra la funzione** $E_\alpha(x)$, Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei (Ser. V), 13(1904), pp. 3-5.

[18] G.M. Mittag-Leffler, **Sur la representation analytiqie d'une fonction monogene (cinquieme note)**, Acta Mathematica, 29(1905), pp. 101-181.

[19] I. Podlubny, **Fractional Differential Equations**, Mathematics in Science and Engineering, Academic Press, (1999).

[20] H. Pollard, **The complete monotonic character of the Mittag-Leffler function** $E_\alpha(-x)$, Bull. Amer. Math. Soc, (1948), pp. 54:1115-1116.

[21] T.O. Salim**, Some Properties Relating to the Generalized Mittag-Leffler Function**, Advances in Applied Mathematical Analysis, Vol. 4, No. 1, (2009), pp. 21-30.

[22] R.K. Saxena, A.M. Mathai and H.J. Haubold, **On fractional kinetic equations**, arxiv.org/abs/math/0206240, (2002), pp. 281-287.

[23] W.R. Schneider, **Completely monotone generalized Mittag-Leffler functions**, Expo. Math., (1996), pp. 14:3-16.

[24] A.K. Shukla, J.C. Prajapati, **On a generalization of Mittag-Leffler function and its properties**, Journal of Mathematical Analysis and Applications 336, Elsevier, (2007), pp. 797-811.

[25] A.L. Soubhia, R.F. Camargo, E.C. de Oliveira and J. Vaz Jr., **Theorem for series in three-parameter Mittag-Leffler function**, Fractional Calculus and Applied Analysis, An international journal for theory and applications Vol. 13, No. 1, (2010), pp. 9-20.

[26] H.M. Srivastava, Ž. Tomovski**, Fractional calculus with an integral operator containing a generalized Mittag-Leffler function in the kernel**, Applied Mathematics and Computation 211, Elsevier, (2009), pp. 198-210.

[27] V.K. Tuan and B.N. Al-Saqabi, **Solution of a fractional differintegral equation**, Integral Transforms and Special Functions 4, (1996), pp. 321-326.

[28] A. Wiman, **Über den Fundamental satz in der Theorie der Funcktionen** $E_\alpha(x)$, Acta Mathematica, 29(1905), pp. 191-201.

[29] A. Wiman, **Über die Nullstellun der Funcktionen** $E_\alpha(x)$**,** Acta Mathematica, 29(1905a), pp. 217-234.