ΕΙΔΙΚΕΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ E_1^3 ΜΕ $\Delta^{III}\vec{r} = A\vec{r}$ ΚΑΙ ΔΙΑΡΜΟΝΙΚΕΣ ΥΠΕΡΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ M_2^3 ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ E_2^4

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ Β. ΠΕΤΟΥΜΕΝΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: Β. Ι. ΠΑΠΑΝΤΩΝΙΟΥ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΠΑΤΡΑ 2010

Στους γονείς μου

Ευχαριστίες

Θεωρώ καθήκον, πρώτα από όλα να εκφράσω τις ειλικρινείς και πιο θερμές μου ευχαριστίες στον Καθηγητή κ. Βασίλη Παπαντωνίου. Τον ευχαριστώ για την υπόδειξη του θέματος, για το γεγονός ότι καθ' όλη τη διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών στάθηκε δίπλα μου με υπομονή και κατανόηση και για την αποφασιστική συμβολή του στο σχεδιασμό και στην ολοκλήρωση αυτής της διατριβής.

Θερμά ευχαριστώ τον Καθηγητή κ. Αθανάσιο Κοτσιώλη και τον Επίκουρο Καθηγητή κ. Ανδρέα Αρβανιτογεώργο, μέλη της Τριμελούς Συμβουλευτικής Επιτροπής, για τη συμβολή τους στην τελειοποίηση αυτής της διατριβής.

Τέλος, θα ήταν παράληψή μου αν δεν ευχαριστούσα τον Καθηγητή κ. F.Defever και τον Επίκουρο Καθηγητή της Σχολής Ευελπίδων του Α.Σ.Ε.Ι. κ. Γεώργιο Καϊμακάμη για τη συνεργασία την οποία είχαμε και το ιδιαίτερο ενδιαφέρον που επέδειξαν καθ' όλη τη διάρκεια της εκπόνησης αυτής της διατριβής.

Κωνσταντίνος Β. Πετούμενος

Ιούνιος 2010

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Ανασκόπηση της Βιβλιογραφίας των Εξεταζομένων Προβλημάτων

Η Γεωμετρία του Riemann σήμερα κατέχει τον κεντρικό πυρήνα της Σύγχρονης Διαφορικής Γεωμετρίας. Όμως τα τελευταία χρόνια δίνεται αξιοσημείωτη έμφαση στην έρευνα που αναφέρεται στην **Γεωμετρία Lorentz** και γενικότερα στην **ψευδο- Riemannian Γεωμετρία**.
Έτσι η Γεωμετρία Lorentz και κατ΄ επέκταση η ψευδο- Riemannian Γεωμετρία αποτελεί πλέον έναν αυτόνομο γεωμετρικό κλάδο της Διαφορικής Γεωμετρίας. Υπενθυμίζεται ότι λέγοντας πολλαπλότητα Riemann, εννοούμε μία διαφορίσιμη πολλαπλότητα εφοδιασμένη με μία θετικά ορισμένη μετρική.
Όταν η μετρική αυτή δεν είναι θετικά ορισμένη (ψευδομετρική Riemann) αναφερόμαστε στην ψευδο- Riemannian Γεωμετρία.

Μία n-διάστατη ψευδο-Riemannian πολλαπλότητα συμβολίζεται με M^n_ν. Ο φυσικός αριθμός ν λέγεται **δείκτης** της μετρικής ή της πολλαπλότητας και ισχύει ότι : $0 \leq \nu \leq \dim M$. Αν $\nu = 0$, τότε η M είναι μια **πολλαπλότητα Riemann**. Αν $\nu = 1$, τότε η M λέγεται **πολλαπλότητα Lorentz** ενώ αν $\nu \geq 2$ τότε η M λέγεται **ψευδο-Riemannian πολλαπλότητα**. Ειδικότερα αν ο χώρος $\mathbb{R}^n$ εφοδιασθεί με τη μετρική

$$g(u,v) = -\sum_{i=1}^{\nu} u^i v^i + \sum_{j=\nu+1}^{n} u^j v^j,$$

γιά κάθε u, v του $\mathbb{R}^n$, τότε ο $\mathbb{R}^n$ λέγεται **ψευδο-Ευκλείδεια πολλαπλότητα** και συμβολίζεται με $\mathbf{E}^n_\nu$.

Πρώτα αποτελέσματα σχετικά με την εργασία μας αναφέρονται στη μελέτη των καμπυλών, επιφανειών και υπερεπιφανειών των χώρων E^3_1 και E^4_1 και παρ' ότι η αντιμετώπιση των προβλημάτων που προέκυπταν στην ψευδο- Riemannian Γεωμετρία ήταν αρκετά δύσκολη, τα αποτελέσματα ήταν πλούσια σε συμπεράσματα.

Ειδικότερα στο πρόβλημα της ταξινόμησης των διαφόρων επιφανειών του E^3, κάτω από διάφορες συνθήκες, υπήρξε μεγάλη δραστηριότητα. Πιό συγκεκριμένα:

Ο T.Takahashi ([49]) στην εργασία του, με τίτλο «Minimal immersions of Riemannian manifolds» το 1966, απέδειξε ότι οι ελαχιστικές επιφάνειες και οι σφαίρες είναι οι μόνες επιφάνειες του E^3, που ικανοποιούν τη σχέση $\triangle\vec{r} = \lambda\vec{r}$ όπου $\lambda \in R$ και $\triangle$ ο τελεστής του Laplace.

Ο O.J.Garay ([26]) το 1988 στην εργασία του, με τίτλο «On a certain class of finite type surfaces of revolution», ταξινόμησε τις επιφάνειες εκ περιστροφής του χώρου E^3, των οποίων οι συντεταγμένες συναρτήσεις είναι ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή του Laplace με διακεκριμένες ιδιοτιμές.

Συνεχίζοντας ο O.J.Garay ([27]) το 1990, στην εργασία του, με τίτλο «An extension of Takahashi's theorem», απέδειξε ότι οι μόνες υπερεπιφάνειες του E^n των οποίων οι συντεταγμένες συναρτήσεις αποτελούν ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή του Laplace, είναι ανοικτά τμήματα είτε ελαχιστικών υπερεπιφανειών, είτε υπερσφαιρών, είτε γενικευμένων κυκλικών κυλίνδρων.

Από την άλλη μεριά, στο χώρο της ψευδο-Riemannian γεωμετρίας

Οι A.Ferrandez και P.Lucas ([25]) το 1992, στην εργασία τους, με τίτλο «On surfaces in the 3-dimensional Lorentz-Minkowski space», ταξινόμησαν τις επιφάνειες του E^3_s, $s = 0, 1$ που ικανοποιούν τη σχέση $\triangle H = \lambda H$, όπου H το διανυσματικό πεδίο της μέσης καμπυλότητας των επιφανειών και $\lambda \in R$.

Οι L.Alias, A.Ferrandez και P.Lucas ([2]) το 1992, δημοσίευσαν την εργασία, με τίτλο «Surfaces in the 3-dimensional Lorentz-Minkowski space satisfying $\triangle x = Ax + B$», στην οποία μελέτησαν τις επιφάνειες του E^3_s, $s = 0, 1$ που ικανοποιούν σχέση της μορφής $\triangle x = Ax+B$, όπου A είναι ένας ενδομορφισμός του E^3_s και B ένα σταθερό διάνυσμα.

Οι L.Alias, A.Ferrandez και P.Lucas ([3]), το 1995, στην εργασία τους, με τίτλο «Hypersurfaces in space forms satisfying the condition $\triangle x = Ax + B$», απέδειξαν ότι οι μόνες υπερεπιφάνειες που ικανοποιούν μία τέτοια σχέση είναι ανοικτά τμήματα είτε ελαχιστικών είτε ολικά ομφαλικών υπερεπιφανειών, είτε γινόμενο μιας ολικά ομφαλικής και μιας ολικά γεωδαισιακής υποπολλαπλότητας, είτε μία άλλη ειδική κατηγορία υπερεπιφανειών.

Το πρόβλημα του καθορισμού διαφόρων ειδών επιφανειών (εκ περιστροφής, ευθειογενών, ελικοειδών, κ.λπ.) του ψευδο-Ευκλείδειου χώρου E^3_s $(s = 0, 1)$ ή υπερεπιφανειών του E^4_s $(s = 1, 2)$, που πληρούν συγκεκριμένες ιδιότητες, έχει μελετηθεί κατά καιρούς από αρκετούς ερευνητές και πιο πρόσφατα από τους (B.-Y.Chen ([14]), Chr.Baikoussis, D.Blair, B.-Y.Chen, F.Defever ([7]), S.P.Jung και J.S.Pak ([32]), A.Takiyama και S.Izumiya ([50]), R.Lopez ([39]), ([40]), S.Lin ([38]), Y.H.Kim και D.W.Yoon ([36]), Y.Ge ([29])).

Επίσης, αρκετοί ερευνητές έχουν ασχοληθεί με τη μελέτη των υπερεπιφανειών σε Lorentz-Minkowski χώρους, όπως για παράδειγμα οι R.Aiyama και Q.M.Cheng ([1]), J.Alias και A.J.Pastor ([4]), J.Alias και A.J.Aledo ([5]), L.Ximin ([51]), C.Gerhardt ([30]).

Στην παρούσα διατριβή και συγκεκριμμένα στο τρίτο κεφάλαιο αυτής γίνεται

η μελέτη και η ταξινόμηση των επιφανειών εκ περιστροφής του 3-διάστατου Lorentz-Minkowski χώρου E_1^3 κάτω από τη συνθήκη $\Delta^{III}\vec{r} = A\vec{r}$, όπου Δ^{III} είναι ο τελεστής Laplace ως προς την τρίτη θεμελιώδη μορφή των επιφανειών, A είναι ένας 3×3 πραγματικός πίνακας και $\vec{r}$, το διάνυσμα θέσης του τυχαίου σημείου της επιφάνειας, αναφερομένης σε ένα σύστημα τοπικών καμπυλογράμμων συντεταγμένων. Κάθε τέτοια επιφάνεια εξαρτάται από δύο διαφορίσιμες συναρτήσεις, $f = f(u)$, $g = g(u)$ όπου u μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι το μήκος τόξου της γενέτειρας καμπύλης. Είναι αξιοσημείωτο ότι σε κάθε περίπτωση (ανάλογα δηλαδή με τη μορφή της επιφάνειας) η επίλυση του προβλήματος, είναι ισχυρά εξαρτώμενη από μία συνάρτηση $t = t(u)$ τέτοια ώστε είτε $f'(u) = cost(u)$ και $g'(u) = sint(u)$ γιά κάθε $u \in I$, είτε (ανάλογα με την μορφή της επιφάνειας) $f'(u) = sinht(u)$ και $g'(u) = cosht(u)$.
Τα αποτελέσματα αυτής της ταξινόμησης αναφέρονται στα Θεωρήματα 3.1 και 3.2 και έχουν δημοσιευθεί στην εργασία ([34]).

Οι ελαχιστικές υποπολλαπλότητες των ψευδο-Ευκλείδειων χώρων περιέχονται σε μία μεγαλύτερη κλάση υποπολλαπλοτήτων, π.χ. την κλάση των υποπολλαπλοτήτων πεπερασμένου τύπου, αλλά επίσης και στην κλάση των υποπολλαπλοτήτων με αρμονικό διανυσματικό πεδίο μέσης καμπυλότητας.

Η μελέτη των υποπολλαπλοτήτων με αρμονικό διανυσματικό πεδίο μέσης καμπυλότητας, είχε εισαχθεί από τον B.-Y. Chen το 1985.

Μια επισκόπιση των πρόσφατων αποτελεσμάτων, επί των υποπολλαπλοτήτων πεπερασμένου τύπου και ποικίλων σχετικών θεμάτων, περιγράφεται στην εργασία ([13]) του B.-Y. Chen με τίτλο «Submanifolds of finite type and applications» και στην εργασία ([15]) με τίτλο «A report on submanifolds of finite type».

Έστω M^n μία n-διάστατη συνεκτική υποπολλαπλότητα του Ευκλείδειου χώρου E^m. Συμβολίζουμε με $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{H}$ και Δ αντίστοιχα, το διανυσματικό πεδίο θέσης της M^n, το διανυσματικό πεδίο μέσης καμπυλότητας της M^n και τον τελεστή Laplace της M^n, ως προς την επαγόμενη μετρική Riemann g επί της M^n, από την Ευκλείδεια μετρική του περιβάλλοντος χώρου E^m. Τότε, σύμφωνα με τον B.-Y. Chen στην εργασία ([9]), με τίτλο «Total mean curvature and submanifolds of finite type» ισχύει η σχέση,

$$\Delta \overrightarrow{x} = -n\overrightarrow{H}. \tag{1.1.1}$$

Όμως κάθε ελαχιστική υποπολλαπλότητα του E^m, ικανοποιεί τη σχέση

$$\Delta \overrightarrow{H} = \overrightarrow{0}. \tag{1.1.2}$$

Μία υποπολλαπλότητα M^n του E^m που ικανοποιεί τη σχέση (1.1.2), λέμε ότι έχει αρμονικό διανυσματικό πεδίο μέσης καμπυλότητας.
Κατά συνέπεια οι υποπολλαπλότητες με αρμονικό διανυσματικό πεδίο μέσης καμπυλότητας, χαρακτηρίζονται ισοδύναμα από τη σχέση

$$\Delta^2 \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}. \tag{1.1.3}$$

Για το λόγο αυτό, οι υποπολλαπλότητες που ικανοποιούν τη σχέση (1.1.2) λέγονται επίσης, και **Διαρμονικές υποπολλαπλότητες**.
Από τα παραπάνω λοιπόν συνάγεται ότι, οι ελαχιστικές υποπολλαπλότητες είναι διαρμονικές. Αντίστροφα, εγείρεται το ερώτημα αν η κλάση των υποπολλαπλοτήτων με αρμονικό διανυσματικό πεδίο μέσης καμπυλότητας, είναι ουσιωδώς μεγαλύτερη από την κλάση των ελαχιστικών υποπολλαπλοτήτων. Με άλλα λόγια, τίθεται το πρόβλημα του προσδιορισμού, αν υπάρχουν, διαρμονικές υποπολλαπλότητες του E^m, άλλες εκτός από εκείνες των ελαχιστικών υποπολλαπλοτήτων.
Προς την κατεύθυνση αυτή έχουν ασχοληθεί διάφοροι ερευνητές. Ειδικότερα αναφέρονται οι: B.-Y. Chen το 1991 στην εργασία ([11]) με τίτλο «Some open problems and conjectures on submanifolds of finite type» και οι O. J. Garay,

L. Vestraelen, στην εργασία ([28]).

Ο B.-Y. Chen στην εργασία ([11]) διατύπωσε την ακόλουθη εικασία: **Οι μόνες διαρμονικές υποπολλαπλότητες των Ευκλείδειων χώρων, είναι οι ελαχιστικές υποπολλαπλότητες**.

Πράγματι, στους Ευκλείδειους χώρους, έχουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα, τα οποία όντως υποστηρίζουν την παραπάνω αναφερθείσα εικασία.

Ο ίδιος ο B.-Y. Chen απέδειξε το 1984 στην εργασία ([9]) ότι κάθε διαρμονική επιφάνεια στον E^3 είναι ελαχιστική.

Στη συνέχεια, ο I. Dimitric γενίκευσε αυτό το αποτέλεσμα το 1989 στην εργασία ([20]) με τίτλο, «Quadratic representation and submanifolds of finite type», και το 1992 στην εργασία ([21]) με τίτλο, «Submanifolds of E^m with harmonic mean curvature vector» και απέδειξε ότι μία διαρμονική υποπολλαπλότητα M^n του Ευκλείδειου χώρου E^m είναι ελαχιστική, αν είναι: (α) Μία καμπύλη του. (β) Μία υποπολλαπλότητα με σταθερή μέση καμπυλότητα. (γ) Μία υπερεπιφάνεια, με δύο το πολύ διαφορετικές κύριες καμπυλότητες. (δ) Μία ψευδο-ομφαλική υποπολλαπλότητα διάστασης $n \neq 4$. (ε) Μία υποπολλαπλότητα πεπερασμένου τύπου.

Οι Th. Hasanis - Th. Vlachos το 1995 στην εργασία τους ([31]) με τίτλο, «Hypersurfaces in E^4 with harmonic mean curvature vector field», απέδειξαν ότι κάθε διαρμονική υπερεπιφάνεια στον E^4 είναι ελαχιστική.

Ο F. Defever το 1998 στην εργασία του ([17]) με τίτλο, «Hypersurfaces of E^4 with harmonic mean curvature vector», έδωσε μία εναλλακτική απόδειξη για το ίδιο θεώρημα, με έναν ετελώς ανεξάρτητο τρόπο, κάνοντας την απόδειξη περισσότερο σύντομη.

Γνωρίζουμε από εμπειρία, ότι η λύση σε ένα πρόβλημα διατυπωμένο πρώτα σε Ευκλείδειους χώρους, ενδέχεται μερικές φορές να φαίνεται ουσιωδώς διαφορετικό, από ότι όταν θεωρείται σε ψευδο-Ευκλείδειους χώρους. Ειδικότερα, μία αντίστοιχη εικασία δεν ισχύει πάντοτε για τους ψευδο-Ευκλείδειους χώρους.

Πράγματι, οι B.-Y. Chen και S. Ishikawa το 1991 στην εργασία τους ([12]) με τίτλο, «Biharmonic surfaces in pseudo-Euclidean spaces», έδωσαν παραδείγματα μη ελαχιστικών διαρμονικών χωροειδών (space-like) υπερεπιφανειών, με **σταθερή** μέση καμπυλότητα.

Στη συνέχεια οι ίδιοι συγγραφείς B.-Y. Chen και S. Ishikawa το 1998, έθεσαν το θέμα της ταξινόμησης αυτών των επιφανειών και στην εργασία τους ([16]) με τίτλο, «Biharmonic pseudo-Riemannian submanifolds in pseudo-Euclidean spaces», ταξινόμησαν τις ψευδο-Riemannian διαρμονικές επιφάνειες τύπου $(1,1)$ με σταθερή μη μηδενική μέση καμπυλότητα και επίπεδες κάθετες τομές στον E_s^4.

Ωστόσο, η διαρμονικότητα ψευδο-Riemannian υποπολλαπλοτήτων συνεπάγεται την ελαχιστικότητα αυτών σε άλλες περιπτώσεις.

Πράγματι, οι B.-Y. Chen και S. Ishikawa το 1998 στην εργασία τους ([16]), απέδειξαν ότι κάθε διαρμονική επιφάνεια στον E_s^3 $(s = 1, 2)$ είναι ελαχιστική, αποτέλεσμα το οποίο συμφωνεί με την αντίστοιχη Ευκλείδια περίπτωση.

Επίσης, το 2006 οι F. Defever-G. Kaimakamis και V. Papantoniou στην εργασία τους ([18]) με τίτλο, «Biharmonic hypersurfaces of the four-dimensional semi-Euclidean space E_s^4», έδειξαν ότι, κάθε μη εκφυλισμένη διαρμονική υπερεπιφάνεια του 4-διάστατου ψευδο-Ευκλείδειου χώρου, ο τελεστής σχήματος της οποίας είναι διαγωνοποιήσιμος, είναι ελαχιστική.

Τελικά, το 2007 οι A. Arvanitoyeorgos - F. Defever - G. Kaimakamis και V. Papantoniou στην εργασία τους ([6]) με τίτλο, «Biharmonic Lorentz hypersurfaces in E_1^4», απέδειξαν ότι κάθε μη εκφυλισμένη διαρμονική Lorentz υπερεπιφάνεια του 4-διάστατου ψευδο-Ευκλείδειου χώρου E_1^4, είναι ελαχιστική.

Στα κεφάλαια 4 και 5 της παρούσας διατριβής, μελετούμε διαρμονικές υπερεπιφάνειες M_2^3 του ψευδο-Ευκλείδειου χώρου E_2^4, με μη διαγωνοποιήσιμο τελεστή

σχήματος. Το πρόβλημα αντιμετωπίσθηκε σε δύο επίπεδα. Πρώτα έπρεπε να βρεθούν οι κανονικές μορφές του τελεστή σχήματος και του μετρικού τανυστή των M_2^3, ως προς κατάλληλες βάσεις και στη συνέχεια να γίνει η μελέτη για την ισχύ ή όχι της εικασίας.
Έτσι, στην εργασία ([35]), των G. Kaimakamis, V. Papantoniou και K. Petoumenos με τίτλο, «On the shape operator of the hypersurfaces M_2^3 of E_2^4», βρέθηκαν όλες οι κανονικές μορφές του τελεστή σχήματος (Βλέπε Θεώρημα 4.1), των υπερεπιφανειών τύπου M_2^3 του ψευδο-Ευκλείδειου χώρου E_2^4 και οι αντίστοιχες μορφές του μετρικού τανυστή.
Στη συνέχεια οι V. Papantoniou, K. Petoumenos στην εργασία τους [46] με τίτλο, «Biharmonic hypersurfaces of type M_2^3 in E_2^4», χρησιμοποιούντες τα αποτελέσματα της ([35]) απέδειξαν ότι, κάθε διαρμονική υπερεπιφάνεια M_2^3 του E_2^4, με μη διαγωνοποιήσιμο τελεστή σχήματος είναι ελαχιστική (Βλέπε Προτάσεις 5.1, 5.2, 5.3, και 5.4 του πέμπτου κεφαλαίου). Ακριβέστερα στην εργασία αυτή αποδεικνύεται το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα *Κάθε μη εκφυλισμένη διαρμονική υπερεπιφάνεια M_2^3, του 4-διάστατου ψευδο-Ευκλείδειου χώρου E_2^4, ο τελεστής σχήματος της οποίας είναι μη διαγωνοποιήσιμος, είναι ελαχιστική.*

Αυτό το Θεώρημα, γενικεύει το αποτέλεσμα των ([6]) [A. Arvanitoyeorgos et al.] και βεβαιώνει την εικασία του Chen, για τον ψευδο-Ευκλείδειο χώρο E_2^4.

1.2 Συνοπτική Παρουσίαση της Διατριβής

Τα προβλήματα με τα οποία διαπραγματεύεται η παρούσα διατριβή είναι τα ακόλουθα:

Πρώτο: Μελέτη των επιφανειών εκ περιστροφής του 3-διάστατου Lorentz-Minkowski χώρου E_1^3 που ικανοποιούν τη συνθήκη, $\triangle^{III}\vec{r} = A\vec{r}$, όπου $\triangle^{III}$ είναι ο τελεστής Laplace, ως προς την τρίτη θεμελιώδη μορφή και A είναι ένας πραγματικός 3×3 πίνακας.

Δεύτερο: Εύρεση όλων των κανονικών μορφών, του τελεστή σχήματος των υπερεπιφανειών τύπου M_2^3 του E_2^4.

Τρίτο: Μελέτη των διαρμονικών υπερεπιφανειών τύπου M_2^3 στον E_2^4, με τη βοήθεια του τελεστή σχήματος αυτών, με την προϋπόθεση ότι ο τελεστής σχήματος, δεν είναι διαγωνοποιήσιμος.

Στο *Κεφάλαιο 1* αναφέρεται η πορεία που ακολούθησαν διάφοροι ερευνητές, για τη μελέτη των υποπολλαπλοτήτων με αρμονικό διανυσματικό πεδίο μέσης καμπυλότητας και στην προσπάθεια του προσδιορισμού, διαρμονικών υποπολλαπλοτήτων του E^m, άλλων εκτός από εκείνων των ελαχιστικών υποπολλαπλοτήτων. Στη συνέχεια διατυπώνουμε την Εικασία του Chen και αναφέρουμε τους ερευνητές οι οποίοι έδωσαν απάντηση στο ερώτημα, σε ποιές περιπτώσεις η διαρμονικότητα των πολλαπλοτήτων συνεπάγεται και την ελαχιστικότητα αυτών.
Στη συνέχεια, παραθέτουμε τις κυριότερες εργασίες που εκπονήθηκαν, για να μελετήσουν την αλήθεια ή όχι της εικασίας του Chen, για υποπολλαπλότητες αρχικά του Lorentz-Minkowski χώρου E_1^3 και στη συνέχεια του ψευδο-Ευκλείδειου χώρου E_s^3 $(s = 1, 2)$. Τέλος, αναφέρεται η προσπάθεια που γίνεται σ' αυτή τη διατριβή, προκειμένου να εξετασθεί η σχέση του συνόλου των διαρμονικών και του συνόλου των ελαχιστικών υπερεπιφανειών τύπου M_2^3 του ψευδο-Ευκλείδειου χώρου E_2^4.

Στο *Κεφάλαιο 2* αναφέρονται ορισμένες βασικές έννοιες της Σύγχρονης Διαφορικής Γεωμετρίας, όπως: Διαφορίσιμες πολλαπλότητες, εφαπτόμενος χώρος, διανυσματικά πεδία, διαφορικές μορφές πρώτης τάξης, διαφορικό απεικόνισης μεταξύ δύο πολλαπλοτήτων, υποπολλαπλότητες και συνοχές, πολλαπλότητες Riemann, γραμμική συνοχή, τανυστικό πεδίο στρέψης, μετρική Riemann, ψευδο-Ευκλείδειοι διανυσματικοί χώροι, ψευδο-Riemannian πολλαπλότητες, μορφές συνοχής της ψευδο-Riemannian πολλαπλότητας, και ψευδο-Riemannian υποπολλαπλότητες. Τέλος αναφέρονται οι έννοιες του τελεστή σχήματος, οι εξισώσεις Codazzi και Gauss για υπερεπιφάνειες και τέλος η έννοια των διαρμονικών υπερεπιφανειών.

Στο *Κεφάλαιο 3* περιγράφονται οι επιφάνειες εκ περιστροφής στον 3-διάστατο Lorentz-Minkowski χώρο και ταξινομούνται κάτω από τη συνθήκη $\triangle^{III}\vec{r} = A\vec{r}$, όπου $\triangle^{III}$ είναι ο τελεστής Laplace ως προς την τρίτη θεμελιώδη μορφή και A είναι ένας πραγματικός 3×3 πίνακας. Ακριβέστερα, αποδεικνύουμε ότι, τέτοιες επιφάνειες είναι, είτε ελαχιστικές, είτε υπερβολικοί κύλινδροι Lorentz, είτε ψευδοσφαίρες πραγματικής ή φανταστικής ακτίνας.

Αυτά τα αποτελέσματα είναι δημοσιευμένα στην εργασία ([34]) με τον τίτλο: «Surfaces of revolution in the 3-dimensional Lorentz-Minkowski space E^3_1 satisfying $\triangle^{III}\vec{r} = A\vec{r}$».

Στο *Κεφάλαιο 4* αναφερόμαστε στην έννοια του τελεστή σχήματος S μιάς υπερεπιφάνειας και ειδικότερα της M^3_2 του E^4_2 και βρίσκουμε όλες τις κανονικές μορφές αυτού, όπως επίσης και του μη θετικά ορισμένου εσωτερικού γινομένου του επαγωμένου επ΄ αυτής από τον E^4_2, ως προς κατάλληλα ορθοκανονικά ή ψευδο-ορθοκανονικά πλαίσια πεδίων (βλ. Θ. 4.1). Η διαδικασία εύρεσης των ως άνω κανονικών μορφών εκτίθεται αναλυτικά στο κεφάλαιο αυτό, το δε ενδιαφέρον μέρος του και ταυτόχρονα η δυσκολία του εντοπίζεται στις διάφορες μορφές που κάθε φορά έχουν τα διανύσματα των εφαπτόμενων χώρων και οι αντίστοιχες συνέπειές τους.

Αυτά τα αποτελέσματα έχουν δημοσιευθεί στην εργασία ([35]), με τον τίτλο: «On the shape operator of the hypersurfaces M^3_2 of E^4_2».

Στο *Κεφάλαιο 5* αποδεικνύουμε, ότι για κάθε κανονική μορφή $[S]$, του τελεστή σχήματος S (μη διαγωνοποιήσιμου) της διαρμονικής υπερεπιφάνειας M^3_2 στον E^4_2, που βρήκαμε στο κεφάλαιο τέσσερα, η μέση καμπυλότητά της είναι μηδέν.

Η διαδικασία της απόδειξης στηρίζεται στην υπόθεση ότι η μέση καμπυλότητα H της M_2^3 είναι είτε σταθερή ή όχι σταθερή.

Στην πρώτη περίπτωση, αποδεικνύουμε εύκολα ότι η H πρέπει αναγκαστικά να είναι μηδέν.

Στη δεύτερη περίπτωση, στην περίπτωση δηλαδή που η H δεν είναι σταθερή, ορίζεται το διάνυσμα ∇H και αποδεικνύουμε ότι αυτό μπορεί να είναι είτε χρονοειδές (time-like) είτε φωτοειδές (light-like). Το πρόβλημα το μελετάμε σε κάθε περίπτωση χωριστά.

Αυτά τα αποτελέσματα, είναι υπό δημοσίευση στην εργασία [46] με τίτλο, «Biharmonic hypersurfaces of type M_2^3 in E_2^4».

Κεφάλαιο 2

Βασικές Έννοιες

2.1 Διαφορίσιμες Πολλαπλότητες

Στην κλασική Διαφορική Γεωμετρία η επιφάνεια δεν είναι τίποτα άλλο, παρά μία εμβύθιση στον τρισδιάστατο Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^3$, ενός ανοικτού υποσυνόλου του $\mathbb{R}^2$, του οποίου η μετρική εισάγει τη μετρική στην επιφάνεια.

Ορισμός 2.1. Ένας συνεκτικός (ή συναφής) τοπολογικός χώρος Hausdorff M που σε κάθε σημείο του υπάρχει περιοχή ομοιόμορφη προς ένα ανοικτό υποσύνολο της $\mathbb{R}^n$, λέγεται τοπολογική πολλαπλότητα ή απλώς πολλαπλότητα διάστασης n.

Η έννοια της συνεκτικότητας ενός χώρου είναι τοπολογική ιδιότητα και απαιτείται, για να εξασφαλίσουμε την ύπαρξη συνεχών καμπυλών, που συνδέουν τυχόντα σημεία του. Υπάρχουν πολλαπλότητες συνεκτικές, για παράδειγμα η σφαίρα S^n και μη συνεκτικές για παράδειγμα, η γενική γραμμική ομάδα όλων των $n \times n$ αντιστρέψιμων πινάκων $GL(n, \mathbb{R})$ διάστασης n^2. Η πολλαπλότητα αυτή, είναι μια μη συνεκτική πολλαπλότητα με δύο συνεκτικές συνιστώσες, τις $GL^+(n, \mathbb{R})$ και $GL^-(n, \mathbb{R})$.

Ορισμός 2.2. Τοπικός χάρτης ή χάρτης πάνω σε μια n-διάστατη τοπολογική πολλαπλότητα M (ή M^n) λέγεται κάθε δυάδα (U, ϕ), όπου ϕ είναι η ομοιομορφική απεικόνιση $\phi : U \subseteq M \to V \subseteq \mathbb{R}^n$, όπου U είναι ένα ανοικτό υποσύνολο της M και V είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^n$(ή $\mathbb{E}^n$). Το σύνολο U, που είναι το πεδίο ορισμού της ϕ, λέγεται πεδίο ορισμού του χάρτη και η ϕ, απεικόνιση του χάρτη. Ο αριθμός n λέγεται διάσταση του χάρτη.

Ας θεωρήσουμε τώρα, ένα χάρτη $C = (U, \phi)$ μιάς τοπολογικής πολλαπλότητας M^n. Τότε κάθε σημείο $P \in U$ καθορίζεται από τις συντεταγμένες $\{x_1(P), \ldots, x_n(P)\}$ του σημείου $\phi(P) \in \mathbb{R}^n$. Δηλαδή, $x_i(P) = x_i(\phi(P)) = (x_i \circ \phi)(P), i = 1, \ldots, n$. Αν το ανοικτό σύνολο U είναι συνεκτικό, τότε οι αριθμοί $x_i(P)$ λέγονται τοπικές συντεταγμένες του σημείου P ως προς το χάρτη (U, ϕ), ενώ η n-άδα των συναρτήσεων $x_1, \ldots x_n$ τέτοιων ώστε $x_i : U \subseteq M \to \mathbb{R}; x_i : P \mapsto x_i(P) = [\phi(P)]_i$, $i = 1, \ldots, n$, όπου δηλαδή η i-συντεταγμένη του P είναι η i-συντεταγμένη του $\phi(P)$, λέγεται **σύστημα τοπικών συντεταγμένων** (ή **τοπικό σύστημα συντεταγμένων**) στο U, ως προς το χάρτη (U, ϕ). Έτσι κάθε τοπικός χάρτης της M, ορίζει ένα τοπικό σύστημα συντεταγμένων αυτής.

Ορισμός 2.3. Διαφορίσιμη δομή (ή άτλαντας) διάστασης n, τάξης διαφορισιμότητας r (ή κλάσης C^r) πάνω σε μια n-διάστατη τοπολογική πολλαπλότητα M λέγεται μια οικογένεια τοπικών χαρτών $U = (U_\alpha, \phi_\alpha)_{\alpha \in I}$ (I είναι ένα σύνολο δεικτών), όπου $\phi_\alpha(U_\alpha)$ είναι ένα ανοικτό υποσύνολο της $\mathbb{R}^n$, που ικανοποιεί τα ακόλουθα αξιώματα.

1. $M = \bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha$,
2. Αν $(U_\alpha \cap U_\beta) \neq \emptyset$, οι ομοιομορφισμοί ϕ_α και ϕ_β για κάθε ζεύγος $\alpha, \beta \in I$ είναι τέτοιοι ώστε ο ομοιομορφισμός

$\phi_{\beta\alpha} = \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subseteq \mathbb{R}^n \to \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subseteq \mathbb{R}^n$ να είναι διαφορίσιμος τάξης r (ή κλάσης C^r).

Από το δεύτερο αξίωμα του ορισμού συνάγεται ότι ο ομοιομορφισμός $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ έχει αντίστροφο, επομένως η συναρτησιακή ορίζουσά του θα είναι διάφορη του μηδενός σε όλα τα σημεία του $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$.

Ορισμός 2.4. Έστω $C_1 = (U_\alpha, \phi_\alpha)$, $C_2 = (U_\beta, \phi_\beta)$ με $\alpha, \beta \in I$, δύο χάρτες κλάσης C^r πάνω σε μια n-διάστατη τοπολογική πολλαπλότητα M. Οι χάρτες αυτοί λέγονται C^r**-συμβιβαστοί** ή C^r**-διαφορίσιμα συσχετισμένοι**, αν $(U_\alpha \cap U_\beta) = \emptyset$ ή εφόσον $(U_\alpha \cap U_\beta) \neq \emptyset$, η απεικόνιση (αλλαγή συντεταγμένων) $\phi_{\beta\alpha} = \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subseteq \mathbb{R}^n \to \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subseteq \mathbb{R}^n$, (οπότε και η $\phi_{\alpha\beta} = \phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subseteq \mathbb{R}^n \to \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subseteq \mathbb{R}^n$) είναι διαφορίσιμη τάξης r (ή κλάσης C^r), (οπότε η $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} = (\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1})^{-1}$ είναι μία αμφιδιαφόριση).
Αν $r = 0$ οι χάρτες λέγονται τοπολογικά συμβιβαστοί.
Αν $r = \infty$ οι χάρτες λέγονται διαφορίσιμα συμβιβαστοί.

Ορισμός 2.5. Δύο C^r-άτλαντες U_1 και U_2 διάστασης n μιάς τοπολογικής πολλαπλότητας λέγονται C^r-συμβιβαστοί αν,

1. $U_1 \bigcup U_2$ είναι πάλι ένας C^r-άτλαντας της τοπολογικής πολλαπλότητας και
2. $C_1 \in U_1$ και $C_2 \in U_2$ είναι δύο τυχαίοι χάρτες, τότε οι χάρτες αυτοί είναι C^r-συμβιβαστοί χάρτες.

Πρόταση 2.6. *Η C^r-συμβιβαστότητα των ατλάντων, μέσα στο σύνολο των ατλάντων που ορίζονται επάνω σε μία τοπολογική πολλαπλότητα M είναι μία σχέση ισοδυναμίας.*

Από την Πρόταση αυτή, έπεται ότι η ένωση όλων των ατλάντων κάθε κλάσης ισοδυναμίας πάνω στην M, ορίζει ένα **μέγιστο άτλαντα** U. Ο U λοιπόν είναι μέγιστος C^r-άτλαντας επί της M, αν για κάθε τοπικό χάρτη (U, ϕ) της M ο οποίος είναι C^r-συμβιβαστός με κάθε χάρτη του U, προκύπτει ότι ο χάρτης (U, ϕ) είναι επίσης στοιχείο του U.

Ορισμός 2.7. Διαφορίσιμη πολλαπλότητα διάστασης n και κλάσης C^r, λέγεται η δυάδα (M^n, U), όπου M^n είναι μία n-διάστατη τοπολογική πολλαπλότητα με αριθμήσιμη βάση και U είναι ένας μέγιστος C^r-άτλαντας πάνω στην M^n.

Ας θεωρήσουμε τώρα τις διαφορίσιμες πολλαπλότητες

$$[M^m, U_1 = (U_\alpha, \phi_\alpha)_{\alpha \in I}] \;\text{ και }\; [N^n, U_2 = (U_\beta, \phi_\beta)_{\beta \in J}]$$

και έστω $M^m \times N^n$ το καρτεσιανό τους γινόμενο. Το γινόμενο αυτό είναι επίσης ένας χώρος του Hausdorff, και έχει αριθμήσιμη βάση για την τοπολογία του. Θεωρούμε πάνω σ' αυτό το χώρο τη συλλογή

$$U = U_1 \times U_2 = \{(U_\alpha \times U_\beta, \phi_\alpha \times \phi_\beta) | (U_\alpha, \phi_\alpha) \in U_1 \text{ και } (U_\beta, \phi_\beta) \in U_2\}$$

όπου $\phi_\alpha \times \phi_\beta$ παριστάνει την απεικόνιση

$$\phi_\alpha \times \phi_\beta : U_\alpha \times U_\beta \to (\phi_\alpha \times \phi_\beta)(U_\alpha \times U_\beta) = \phi_\alpha(U_\alpha) \times \phi_\beta(U_\beta) \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$$

με τιμή

$$(\phi_\alpha \times \phi_\beta)(x, y) = (\phi_\alpha(x), \phi_\beta(y)) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = R^{m+n}$$

Πρόταση 2.8. *Το ζεύγος $(M^m \times N^n, U)$ ορίζει μία $(m+n)$-διάστατη διαφορίσιμη πολλαπλότητα, η οποία λέγεται καρτεσιανό γινόμενο των διαφορίσιμων πολλαπλοτήτων M^m και N^n.*

Ένα παράδειγμα τέτοιας διαφορίσιμης πολλαπλότητας αποτελεί ο διδιάστατος τόρος $T^2 = S^1 \times S^1$.

Ας υποθέσουμε ότι μας δίνεται και μία C^r n-διάστατη διαφορίσιμη πολλαπλότητα M και ότι A είναι ένα ανοικτό υποσύνολο της M.

Ορισμός 2.9. Η συνάρτηση $f : A \subseteq M \to \mathbb{R}$ λέγεται διαφορίσιμη τάξης r (ή κλάσης C^r) πάνω στο A αν και μόνο αν η συνάρτηση,

$$f \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap A) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

είναι διαφορίσιμη, για κάθε τοπικό χάρτη (U_α, ϕ_α) πάνω στην M.

Το σύνολο των διαφορίσιμων συναρτήσεων κλάσης C^r, που ορίζονται στην n-διάστατη πολλαπλότητα M κλάσης C^r, συμβολίζεται με $D^r(M)$, ενώ το σύνολο των διαφορίσιμων συναρτήσεων που ορίζονται στην πολλαπλότητα M, κλάσης C^∞, συμβολίζεται με $D^0(M)$.

Έστω οι διαφορίσιμες πολλαπλότητες M^m και N^n κλάσης C^r και έστω,

$$f : A \subseteq M^m \to N^n$$

μια συνεχής απεικόνιση, ορισμένη σε ένα ανοικτό σύνολο A της M^m.
Ας θεωρήσουμε επιπλέον τους χάρτες (U, ϕ) και (V, ψ) των πολλαπλοτήτων M^m και N^n αντίστοιχα έτσι ώστε, $P \in U$ και $f(P) \in V$.

Ορισμός 2.10. Η απεικόνιση $f : A \subseteq M^m \to N^n$ λέγεται **διαφορίσιμη απεικόνιση** κλάσης C^r στο σημείο $P \in A$, αν υπάρχουν χάρτες (U, ϕ), (V, ψ) όπως προηγουμένως έχουν περιγραφεί, ώστε η απεικόνιση

$$F = \psi \circ f \circ \phi^{-1} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$

να είναι διαφορίσιμη κλάσης C^r στο σημείο $\phi(P) \in \mathbb{R}^m$.

Ορισμός 2.11. Λέμε ότι η απεικόνιση

$$f : A \subseteq M^m \to N^n$$

είναι διαφορίσιμη κλάσης C^r στο σύνολο A, αν είναι διαφορίσιμη απεικόνιση κλάσης C^r σε κάθε σημείο του A.

Πρόταση 2.12. *Η απεικόνιση $f : M^m \to N^n$ είναι διαφορίσιμη κλάσης C^r αν και μόνο αν οι συναρτήσεις συντεταγμένων της $\{y_i\} = \{y_1, \ldots, y_n\}$ του σημείου $f(P) \in N$, είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις κλάσης C^r των τοπικών συντεταγμένων του τυχαίου σημείου $P \in M$. Δηλαδή αν θέσουμε*

$$y_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m),\ i = 1, 2, \ldots, n$$

τότε οι f_i να είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις κλάσης C^r.

Ορισμός 2.13. Η απεικόνιση $f : M \to N$ λέγεται **αμφιδιαφόριση** (diffeomorphism) αν είναι αμφιμονοσήμαντη (1-1), επί ($f(M) = N$), διαφορίσιμη και η αντίστροφή της f^{-1} είναι επίσης διαφορίσιμη. Στη περίπτωση αυτή οι πολλαπλότητες M και N, λέγονται αμφιδιαφορίσιμες ή αμφιδιαφορικές.

Αξίζει να σημειωθεί, πως η αμφιδιαφορισιμότητα στο σύνολο των πολλαπλοτήτων είναι μία σχέση ισοδυναμίας.

Ορισμός 2.14. Μία 1-1 και επί απεικόνιση $f : M \to N$ είναι μία **αμφιδιαφόριση** αν και μόνο αν, για κάθε χάρτη (V_β, ψ_β) επάνω στην N η απεικόνιση $\psi_\beta \circ f$ είναι τοπική απεικόνιση συντεταγμένων της M.

Έστω $f : M \to N$ διαφορίσιμη απεικόνιση και έστω $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ και $(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)$ τα αντίστοιχα συστήματα (τοπικών) συντεταγμένων των σημείων $P \in M$ και $f(P) \in N$. Τότε ο βαθμός (rank) του Ιακωβιανού πίνακα

$$A = \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x_j}\right)_{f(P)} = \left(\frac{\partial(\psi_i \circ f)}{\partial x_j}\right)_P$$

λέγεται **βαθμός** της f, στο σημείο $P \in M$. Ο βαθμός της f, είναι ανεξάρτητος από την εκλογή των συστημάτων συντεταγμένων γύρω από τα σημεία $P \in M$

και $f(P) \in N$.

Ένα σημείο $P \in M$ λέγεται **κρίσιμο σημείο** (ή **σημείο στάσης**) της απεικόνισης $f : M \to N$, αν ο βαθμός ρ της f στο σημείο $P \in M$ είναι μικρότερος από τη διάσταση n της πολλαπλότητας N, δηλαδή

$$\rho = \mathrm{rank} f < n = \dim N.$$

Η τιμή $f(P)$ της απεικόνισης f, όπου P είναι κρίσιμο σημείο, λέγεται **κρίσιμη τιμή** της f.

Αν το σημείο P δεν είναι κρίσιμο, θα το λέμε **κανονικό σημείο** της f και την αντίστοιχη τιμή $f(P)$ θα τη λέμε **κανονική τιμή**.

Η απεικόνιση $f : M \to N$ λέγεται **κανονική απεικόνιση** στο $P \in M$, αν ο βαθμός της f είναι ίσος με τη διάσταση της πολλαπλότητας M, στο σημείο P δηλαδή,

$$(\mathrm{rank} f)_P = \dim M.$$

Ορισμός 2.15. Μία διαφορίσιμη απεικόνιση $f : M^m \to N^n$ λέγεται **εμβύθιση** (immersion) της M^m στην N^n $(m \leqq n)$ αν

$$\mathrm{rank} f = \dim M, \quad \text{για κάθε } \; P \in M.$$

Ορισμός 2.16. Μία διαφορίσιμη απεικόνιση $f : M^m \to N^n$ λέγεται **εμφύτευση** (imbedding) της M^m στην N^n αν

1. Είναι εμβύθιση και

2. η απεικόνιση $f : M \to f(M)$ είναι ένας ομοιομορφισμός, όπου το $f(M)$ έχει την σχετική τοπολογία της N.

2.2 Εφαπτόμενος Χώρος - Διανυσματικά Πεδία - Διαφορικές Μορφές Πρώτης Τάξης

Έστω $D^r(M,P)$ το σύνολο όλων των διαφορίσιμων συναρτήσεων κλάσης C^r στο σημείο $P \in M$. Το σύνολο $D^r(M,P)$ αποτελεί διανυσματικό χώρο[52, σελ. 366], ο οποίος γίνεται άλγεβρα, αν ορίσουμε ως δεύτερο νόμο εσωτερικής σύνθεσης τον πολλαπλασιασμό των συναρτήσεων.

Ορισμός 2.17. **Διαφόριση** της άλγεβρας $D^r(M,P)$ στο σημείο P, λέγεται μια πραγματική συνάρτηση $\mathcal{D} : D^r(M,P) \to \mathbb{R}$ με τις εξής δύο ιδιότητες.

1. Η $\mathcal{D}$ είναι γραμμική, δηλαδή ισχύει

$$\mathcal{D}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathcal{D}(f) + \mu \mathcal{D}(g),\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ και } f, g \in D^r(M,P).$$

2. Η $\mathcal{D}$ ικανοποιεί τον κανόνα του Leibniz, δηλαδή έχουμε,

$$\mathcal{D}(fg) = f(P)\mathcal{D}(g) + g(P)\mathcal{D}(f),\ \forall f, g \in D^r(M,P).$$

Ορισμός 2.18. **Εφαπτόμενο διάνυσμα** στο σημείο P της n-διάστατης πολλαπλότητας M, λέγεται η απεικόνιση $X_P : D^r(M,P) \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες

1. $X_P(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 X_P(f_1) + \lambda_2 X_P(f_2)$

2. $X_P(f_1 f_2) = f_1(P) X_P(f_2) + f_2(P) X_P(f_1)$, για κάθε $f_1, f_2 \in D^r(M,P)$ και $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Η γραμμική απεικόνιση X_P, ικανοποιεί τον κανόνα του Leibniz και κατά συνέπεια είναι μια διαφόριση της άλγεβρας $D^r(M,P)$. Το σύνολο των εφαπτόμενων διανυσμάτων στο σημείο P μιας διαφορίσιμης πολλαπλότητας M, αποτελεί διανυσματικό χώρο. Τον διανυσματικό αυτό χώρο, τον λέμε **εφαπτόμενο χώρο** της M στο σημείο P και θα τον συμβολίζουμε με $T_P(M)$.

Όπως είδαμε προηγουμένως σε κάθε σημείο P μιάς διαφορίσιμης πολλαπλότητας M, ορίζεται ο εφαπτόμενος χώρος αυτής $T_P(M)$, ο οποίος έχει τη δομή διανυσματικού χώρου με διάσταση n, όση και η διάσταση της M.

Αν $X_P = \sum_{i=1}^{n} v_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_P$, είναι ένα τυχαίο διάνυσμα του $T_P(M)$, τότε η απεικόνιση

$$(v_1, v_2, ..., v_n) \to \sum_{i=1}^{n} v_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_P,$$

ορίζει έναν **ισομορφισμό** μεταξύ των χώρων $\mathbb{R}^n$ και $T_P(M)$ και για αυτό αυτούς τους χώρους τους λέμε **ισομορφικούς**.

Η συλλογή όλων των εφαπτόμενων χώρων της M συμβολίζεται με $T(M)$ και λέγεται **εφαπτόμενη δέσμη** αυτής (tangent bundle), δηλαδή είναι

$$T(M) = \bigcup_{P \in M} T_P(M) = \{(P, X_P) \,|\, P \in M, X_P \in T_P(M)\}.$$

Το σύνολο $T(M)$ μπορεί να γίνει μία διαφορίσιμη πολλαπλότητα διάστασης $2n$, αν $\dim M = n$.

Ορισμός 2.19. Έστω M μια διαφορίσιμη πολλαπλότητα και $D^0(M)$ η αντίστοιχη (πραγματική) άλγεβρα των (πραγματικών) διαφορίσιμων συναρτήσεων επί της M. Μια απεικόνιση $\mathcal{D} : D^0(M) \to D^0(M)$ λέγεται **διαφόριση** της άλγεβρας $D^0(M)$ αν έχει τις εξής δύο ιδιότητες

1. $\mathcal{D}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathcal{D}(f) + \mu \mathcal{D}(g)$,

2. $\mathcal{D}(fg) = f\mathcal{D}(g) + \mathcal{D}(f)g$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $f, g \in D^0(M)$.

Ορισμός 2.20. Ονομάζουμε **διανυσματικό πεδίο** και σημειώνουμε με X, πάνω σε μία n-διάστατη διαφορίσιμη πολλαπλότητα M, τη διαφορίσιμη απεικόνιση

$$X : M \to T(M) = \bigcup_{P \in M} T_P(M)$$

η οποία σε κάθε σημείο $P \in M$ αντιστοιχεί το διάνυσμα $X_P \in T_P(M)$.

Ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες $\forall \quad f, g \in D^0(M)$ και $X \in D^1(M)$, όπου $D^1(M)$ είναι το σύνολο των διανυσματικών πεδίων επί της M,

1. $X(f+g) = X(f) + X(g)$
2. $X(fg) = X(f)g + fX(g)$.

Ας θεωρήσουμε τώρα, μία διαφορίσιμη συνάρτηση f κλάσης C^r ορισμένη σε ένα ανοικτό σύνολο U μιάς n-διάστατης πολλαπλότητας M. Έστω P τυχαίο σημείο του U και X_P τυχαίο διάνυσμα του χώρου $T_P(M)$. Θέτουμε

$$(df)_P(X_P) = X_P[f].$$

Αποδεικνύεται ότι $\forall\ \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$ και $\forall\ X_P,\ Y_P \in T_P(M)$ ότι,

$$(df)_P(\lambda X_P + \mu Y_p) = \lambda(df)_P X_P + \mu(df)_P Y_P$$

οπότε το $(df)_P$ είναι μία γραμμική απεικόνιση του $T_P(M)$ στο $\mathbb{R}$ δηλαδή,

$$(df)_P : T_P(M) \to \mathbb{R},$$

επομένως το $(df)_P$ είναι στοιχείο του δυϊκού χώρου του $T_P(M)$ δηλαδή,

$$(df)_P \in T_P^*(M).$$

Ο χώρος αυτός είναι ισομορφικός με τον $T_P(M)$. Αυτή η γραμμική απεικόνιση λέγεται διαφορικό της f στο σημείο P και ο χώρος $T_P^*(M)$ λέγεται **συνεφαπτόμενος** χώρος της M στο σημείο P.

Έστω M μια διαφορίσιμη πολλαπλότητα διάστασης n και P τυχαίο σημείο της. Από τον εφαπτόμενο χώρο $T_P(M)$ παίρνουμε τον δυϊκό του $T_P^*(M)$, δηλαδή τον συνεφαπτόμενο χώρο της M στο σημείο P.

Η συλλογή όλων των συνεφαπτόμενων χώρων της M συμβολίζεται με $T^*(M)$

και λέγεται **συνεφαπτόμενη δέσμη** της M (cotangent bundle), δηλαδή είναι

$$T^*(M) = \bigcup_{P \in M} T_P^*(M).$$

Ορισμός 2.21. Διαφορική μορφή ω πρώτης τάξης (ή διαφορική 1-μορφή) πάνω στη διαφορίσιμη πολλαπλότητα M, λέγεται η απεικόνιση

$$\omega : M \to \bigcup_{P \in M} T_P^*(M)$$

η οποία σε κάθε σημείο $P \in M$, αντιστοιχεί το συνεφαπτόμενο διάνυσμα $\omega(P)$ (ή ω_P) του συνεφαπτόμενου χώρου $T_P^*(M)$, δηλαδή $\omega(P) \in T_P^*(M)$.

Από τον ορισμό (2.21), συμπεραίνουμε πως για κάθε $P \in M$ η αντίστοιχη διαφορική 1-μορφή είναι μία γραμμική μορφή πάνω στον $T_P(M)$, δηλαδή

$$\omega(P) : T_P(M) \to \mathbb{R}.$$

Με άλλα λόγια, αν $D^1(M)$ είναι το σύνολο των διανυσματικών πεδίων επί της M και $D_1(M)$ το δυϊκό του σύνολο, τότε ως διαφορικές 1-μορφές ορίζονται τα στοιχεία του $D_1(M)$, όπου

$$D_1(M) = \{\omega | \, \omega : D^1(M) \to D^0(M), \, \omega : D^0 - \text{γραμμική απεικόνιση}\}.$$

Από τα παραπάνω λοιπόν συνεπάγεται ότι, το διαφορικό $(df)_P$ της συνάρτησης $f \in D^0(M)$ είναι μία διαφορική μορφή πρώτης τάξης.

Επίσης, αφού το $\omega(P) \in T_P^*(M)$ θα είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\{dx_i\}_P$ της βάσης. Θα είναι λοιπόν,

$$\omega(P) = f_i(P)(dx_i)_P.$$

Αν οι συναρτήσεις f_i είναι διαφορίσιμες κλάσης C^r, τότε και η διαφορική 1-μορφή ω, λέγεται διαφορίσιμη κλάσης C^r.

Υπενθυμίζεται ότι οι γραμμικές απεικονίσεις (διανύσματα) $\{dx_i\}_P \quad i = 1, 2, ..., n$ αποτελούν βάση του $T_P^*(M)$ και λέγεται **δυϊκή** βάση, της βάσης $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right\}_p$, του εφαπτόμενου χώρου $T_P(M)$.

2.3 Διαφορικό Απεικόνισης μεταξύ Πολλαπλοτήτων

Οι πολλαπλότητες που θα θεωρήσουμε στην παράγραφο αυτή θεωρούνται ότι είναι διαφορίσιμες κλάσης C^∞.
Ας θεωρήσουμε λοιπόν τις διαφορίσιμες πολλαπλότητες M και N διαστάσεων m και n αντίστοιχα και έστω

$$f : M \to N$$

μία διαφορίσιμη απεικόνιση αυτών. Έστω P ένα τυχαίο σημείο της M και $T_P(M)$, $T_{f(P)}(N)$ οι αντίστοιχοι εφαπτόμενοι χώροι των M και N.

Ορισμός 2.22. **Διαφορικό** της απεικόνισης $f : M \to N$ στό σημείο $P \in M$, λέγεται η γραμμική απεικόνιση

$$f_{*_P} : T_P(M) \to T_{f(P)}(N)$$

με τιμή

$$(f_{*_P} X_P)(\phi) = X_P(\phi \circ f),$$

όπου $\phi \in D^\infty(N, f(P))$. Η f_{*_P} συμβολίζεται επίσης και με $(df)_P$.

Ορισμός 2.23. Η απεικόνιση $f : M \to N$ λέγεται **κανονική** στο σημείο $P \in M$ αν,

1. Η f είναι διαφορίσιμη στο σημείο $P \in M$ και

2. Η f_{*_P} είναι αμφιμονότιμη απεικόνιση, του $T_P(M)$ στον $T_{f(P)}(N)$.

Έστω τα διανυσματικά πεδία $X, Y \in D^1(M)$. Ορίζουμε το διανυσματικό πεδίο

$$[\ ,\ ] : D^1(M) \times D^1(M) \to D^1(M)$$

ως εξής

$$[\ ,\ ] : (X, Y) \mapsto [X, Y] = XY - YX$$

και στη συνέχεια ορίζουμε την απεικόνιση

$$[X, Y] : D^0(M) \to D^0(M)$$

με τιμή

$$[X, Y] : f \to [X, Y] (f) = X(Y(f)) - Y(X(f)), \; \forall f \in D^0(M).$$

Το διανυσματικό πεδίο $[X, Y]$ λέγεται **παρένθεση του Lie** (Lie bracket) των διανυσματικών πεδίων X, Y και ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες.

1. Είναι αντισυμμετρική $[X, Y] = -[Y, X]$
2. Είναι γραμμική πάνω στο σύνολο των διαφορισίμων συναρτήσεων
3. $[X, Y] (fg) = f([X, Y] (g)) + ([X, Y] (f))g$ **(κανόνας Leibniz)**
4. Είναι διγραμμική
$$[\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2, Y] = \lambda_1 [X_1, Y] + \lambda_2 [X_2, Y]$$
$$[X, \lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2] = \lambda_1 [X, Y_1] + \lambda_2 [X, Y_2]$$
$\forall\, X, Y, X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in D^1(M)$.
5. $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \;\; \forall\, X, Y, Z \in D^1(M)$ **(Ταυτότητα Jacobi)**.
6. $[fX, gY] = fg [X, Y] + f [X(g)] Y - g [Y(f)] X \quad \forall\, f,\; g \in D^0(M)$.

2.4 Υποπολλαπλότητες και Συνοχές. Πολλαπλότητες Riemann

Ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι πολλαπλότητες, που ως σύνολα είναι υποσύνολα της πολλαπλότητας $\mathbb{R}^3$ (ή $\mathbb{R}^n$), όπως για παράδειγμα η σφαίρα S^2 (ή S^{n-1}) και ο τόρος T^2 (ή T^{n-1}).

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον σε αυτή την περίπτωση, παρουσιάζουν οι υποπολλαπλότητες με διάσταση ένα (καμπύλες) και εκείνες με διάσταση $n-1$ (υπερεπιφάνειες) ή επιφάνειες όταν $n = 3$.

Ορισμός 2.24. Μία διαφορίσιμη απεικόνιση f της πολλαπλότητας M^m στην πολλαπλότητα N^n ($m \leqq n$) λέγεται **εμβύθιση (ή εμβάπτιση)** της M^m στην N^n αν και μόνο αν η απεικόνιση f_{*_P} για κάθε $P \in M^m$ είναι αμφιμονότιμη ($\text{rank} f_{*_P} = m$).
Στην περίπτωση αυτή, λέμε ότι η πολλαπλότητα M^m είναι εμβυθισμένη μέσα στην πολλαπλότητα N^n διαμέσου της f, ή ότι η M^m είναι μία βυθισμένη υποπολλαπλότητα της N^n, ή απλά μία υποπολλαπλότητα της N^n.

Ορισμός 2.25. Όταν μία εμβύθιση $f : M^m \to N^n$ είναι αμφιμονότιμη, τότε η f λέγεται **εμφύτευση** της M^m στην N^n, όπου η M^m θεωρείται συμπαγής. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η πολλαπλότητα M^m είναι εμφυτευμένη μέσα στην N^n δια μέσου της f, ή ότι η M^m είναι μία εμφυτευμένη υποπολλαπλότητα της N^n.

Παρατήρηση 2.26. Ένα ανοικτό υποσύνολο M μιας πολλαπλότητας N είναι και αυτό πολλαπλότητα, την πολλαπλότητα αυτή τη λέμε ανοικτή υποπολλαπλότητα της N.

Θεώρημα 2.27. *Θεωρούμε τη διαφορίσιμη απεικόνιση $f : M \to N$ όπου $\dim M = \dim N = \kappa$. Αν η απεικόνιση $f_{*_P} : T_P(M) \to T_{f(P)}(N)$ είναι αμφιμονότιμη (rank$f_{*_P} = \kappa$), τότε υπάρχει ανοικτή περιοχή $U \subseteq M$ με $P \in U$, έτσι ώστε ο περιορισμός της $f|U$ να είναι μία αμφιδιαφόριση του U πάνω σε μία περιοχή V του $f(P)$.*

Παρατήρηση 2.28. Αν η f_{*_P} είναι 1-1 σε κάθε $P \in M$ δεν συνεπάγεται ότι η $f : M \to N$ είναι αμφιδιαφόριση σε ολόκληρη την M.

Θεώρημα 2.29. *Η διαφορίσιμη απεικόνιση $f : M \to N$ όπου M και N είναι πολλαπλότητες της ίδιας διάστασης κ είναι αμφιδιαφόριση αν και μόνο αν είναι εμφύτευση και επί.*

Ορισμός 2.30. Η m-διάστατη πολλαπλότητα M, λέγεται υποπολλαπλότητα της n-διάστατης πολλαπλότητας N ($m \leqq n$) όταν

1. $M \subseteq N$ (ως σύνολα)
2. Η ταυτοτική απεικόνιση $i : M \to N$ με $i(P) = P$ είναι μία εμφύτευση της πολλαπλότητας M στην πολλαπλότητα N.

Αν $\dim N - \dim M = 1$, τότε η M λέγεται **υπερεπιφάνεια** της N.

Στον ορισμό αυτό, υπονοούμε ότι η M ως τοπολογικός χώρος έχει τη σχετική τοπολογία της N.

Παρατήρηση 2.31. Κάθε m-διάστατη πολλαπλότητα M εμφυτεύεται στην πολλαπλότητα $\mathbb{R}^{2m+1}$.

Έστω M μία m-διάστατη πολλαπλότητα, $D^1(M)$ ο διανυσματικός χώρος των διανυσματικών πεδίων πάνω στην M και $D^0(M)$ η άλγεβρα των διαφορισίμων συναρτήσεων πάνω στην M.

Ορισμός 2.32. Γραμμική Συνοχή (ή Σύνδεση) πάνω στην M λέγεται μια απεικόνιση που θα την συμβολίζουμε με ∇, όπου

$$\nabla : D^1(M) \times D^1(M) \to D^1(M)$$

$$\nabla : (X, Y) \mapsto \nabla(X, Y) = \nabla_X Y,$$

που ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. $\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$

2. $\nabla_{fX}Y = f\nabla_X Y$

3. $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$

4. $\nabla_X(fY) = (Xf)Y + f\nabla_X Y$

5. $\nabla_X(\alpha Y + \beta Z) = \alpha\nabla_X Y + \beta\nabla_X Z$

όπου $X, Y, Z \in D^1(M)$ και $f \in D^0(M)$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Ο τελεστής ∇_X λέγεται **συναλλοίωτη παραγώγιση** ως προς X, ενώ το διανυσματικό πεδίο $\nabla_X Y$ λέγεται **συναλλοίωτη παράγωγος** του Y ως προς X (ως προς τη γραμμική συνοχή ∇).

Η διαφορά των διανυσματικών πεδίων $\nabla_X Y$ και $\nabla_Y X$ ορίζει την αγκύλη του Lie:

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]\,.$$

Το τανυστικό πεδίο T με τιμή

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$

λέγεται **τανυστικό πεδίο στρέψης** της γραμμικής συνοχής ∇.

Παρατήρηση 2.33. Έστω M μία πολλαπλότητα εφοδιασμένη με μία γραμμική συνοχή $X \mapsto \nabla_X$ και έστω U μία ανοικτή υποπολλαπλότητα της M. Έστω $X, Y \in D^1(M)$ με $X = 0$ ή $Y = 0$. Τότε $\nabla_X Y = 0$.

Έστω (U, ϕ) ένας χάρτης μιας m-διάστατης πολλαπλότητας M, ∇ μία γραμμική συνοχή πάνω στην M και $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right\}$ τα βασικά διανυσματικά πεδία του U.

Ορισμός 2.34. Σύμβολα του Christoffel της συνοχής ∇ πάνω στο U, λέγονται οι m^3 συναρτήσεις Γ_{ij}^k που ορίζονται μονοσήμαντα από τη σχέση

$$\nabla_{\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \sum_{k=1}^{m} \Gamma_{ij}^k \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right).$$

Ορισμός 2.35. Αν ω είναι μία 1-μορφή τότε, $\nabla_X \omega$ είναι μία 1-μορφή, της οποίας η τιμή πάνω σε τυχαίο διανυσματικό πεδίο Y, δίνεται από τη σχέση

$$(\nabla_X \omega)(Y) = \nabla_X (\omega(Y)) - \omega (\nabla_X Y).$$

Ορισμός 2.36. Μετρική Riemann πάνω σε μία πολλαπλότητα M, είναι ένα συναλλοίωτο τανυστικό πεδίο τύπου (0,2), τέτοιο ώστε σε κάθε σημείο $P \in M$ αντιστοιχεί την απεικόνιση $g_P : T_P(M) \times T_P(M) \to \mathbb{R}$, με τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. $g_P(X_P + Y_P, Z_P) = g_P(X_P, Z_P) + g_P(Y_P, Z_P)$ και
   $g_P(\lambda X_P, Y_P) = \lambda g_P(X_P, Y_P)$
2. $g_P(X_P, Y_P) = g_P(Y_P, X_P)$
3. $g_P(X_P, X_P) \geqq 0$ με $g_P(X_P, X_P) = 0$ αν και μόνο αν $X_P = 0$.

Οι συνθήκες (1) και (2), ισχύουν και με την εξής μορφή
$g_P(X_P, Y_P + Z_P) = g_P(X_P, Y_P) + g_P(X_P, Z_P)$
και
$g_P(X_P, \lambda Y_P) = \lambda g_P(X_P, Y_P)$.

Παρατήρηση 2.37. Παρατηρούμε ότι η g_P, είναι ένα εσωτερικό γινόμενο στον χώρο $T_P(M)$, αφού είναι μία απεικόνιση συμμετρική (από την 2), διγραμμική (από την 1) και θετικά ορισμένη.

Αν g, είναι μία μετρική Riemann πάνω σε μία πολλαπλότητα και X, Y είναι δύο διανυσματικά πεδία τότε, $g(X, Y)$ είναι μία πραγματική συνάρτηση πάνω στην M, με τιμή $g_P(X_P, Y_P)$ στο τυχαίο σημείο $P \in M$.

Κάθε παρασυμπαγής πολλαπλότητα, δέχεται μία μετρική Riemann. Επίσης τονίζουμε, ότι στη Διαφορική Γεωμετρία ο όρος μετρική, δεν αναφέρεται στη συνάρτηση απόστασης, αλλά κύρια σε εσωτερικό γινόμενο.

Παρατήρηση 2.38. Κάθε πολλαπλότητα M, εφοδιασμένη με μία μετρική Riemann g, η οποία μερικές φορές συμβολίζεται και με $<,>$, λέγεται **πολλαπλότητα Riemann**.

Παρατήρηση 2.39. Αν (U,ϕ) είναι ένας χάρτης μιας πολλαπλότητας Riemann (M,g), τότε ορίζονται οι n^2 πραγματικές συναρτήσεις g_{ij}, έτσι ώστε

$$g_{ij}(P) = g_P\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_P, \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_P\right), P \in U, \quad 1 \leq i,j \leq n.$$

Παρατήρηση 2.40. Έστω M μία υποπολλαπλότητα της πολλαπλότητας Riemann (N, g^N), έτσι ώστε ο $T_P(M)$ να ταυτίζεται με κάποιον υπόχωρο του $T_P(N)$.
Αν $X_P, Y_P \in T_P(M) \subset T_P(N)$, τότε ο αριθμός $g_P^N(X_P, Y_P)$ έχει έννοια και επιπλέον ορίζουμε,

$$g_P^M(X_P, Y_P) = g_P^N(X_P, Y_P).$$

Η μετρική Riemann g_P^M που ορίζεται με αυτό τον τρόπο, λέγεται μετρική Riemann, που εισάγεται από την g^N.

Ορισμός 2.41. Συνοχή Riemann πάνω σε μία πολλαπλότητα Riemann (M,g) λέγεται η απεικόνιση ∇, που ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$, δηλαδή η ∇ είναι συμμετρική (ή $T=0$) και

2. $Xg(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ όπου X, Y και Z είναι τυχαία διανυσματικά πεδία πάνω στην M.

Ορισμός 2.42. Τανυστικό πεδίο καμπυλότητας της συνοχής ∇ λέγεται το αντισυμμετρικό τανυστικό πεδίο R τύπου $(1,3)$ με τιμή

$$R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z,$$

όπου $[\,,\,]$ είναι η παρένθεση του Lie.

Αν θεωρήσουμε ότι η M, είναι μία πολλαπλότητα Riemann, τότε χρησιμοποιώντας τη μετρική $<,>$, ορίζουμε μία διαφορίσιμη πολυγραμμική (τετραγραμμική) απεικόνιση $R(X,Y,Z,W)$ έτσι ώστε

$$R(X,Y,Z,W) =< R(X,Y)Z,W > .$$

Η απεικόνιση R, που ορίζεται από την προηγούμενη σχέση, είναι ένα διαφορίσιμο, συναλλοίωτο τανυστικό πεδίο τύπου (0,4) και λέγεται, **συναλλοίωτο τανυστικό πεδίο** των Christofell-Riemann όπου,
$X,\ Y,\ Z,\ W \in D^1(M)$. Το πεδίο αυτό ικανοποιεί τις ακόλουθες σχέσεις

1. $R(X,Y,Z,W) = -R(Y,X,Z,W) = -R(X,Y,W,Z) = R(Y,X,W,Z)$
2. $R(X,Y,Z,W) + R(X,Z,W,Y) + R(X,W,Y,Z) = 0.$

Η δεύτερη ιδιότητα λέγεται και $1^η$ **ταυτότητα του Bianchi**, όπου, $X,\ Y,\ Z,\ W \in D^1(M)$.
Σε τοπικές συντεταγμένες το πλήθος των μη μηδενικών συνιστωσών του $R = \{R_{i\,j\,k\,l}\}$ είναι $\dfrac{n^2(n^2-1)}{12}$.
Έναν ακόμα σπουδαίο τανυστή, που θέλουμε στην προκείμενη περίπτωση να αναφέρουμε, είναι ο συναλλοίωτος συμμετρικός τανυστής δεύτερης τάξης, τύπου $(0,2)$, τον οποίο παίρνουμε από τον τανυστή καμπυλότητας τύπου $(1,3)$, με συστολή των δεικτών. Ειδικότερα ορίζουμε αυτόν τον τανυστή, ο οποίος λέγεται **τανυστής του Ricci** ως εξής:

$$Ric(X,Y) = \text{ίχνος της απεικόνισης } Z \to R(Z,X)Y$$

του $T_P(M)$, όπου $X,\ Y,\ Z \in T_P(M)$ και συμβολίζεται και με $S(X,Y)$.

Αν M είναι μία πολλαπλότητα Riemann και $e_i = \left\{\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right\}$, $i = 1,2,...,n$, μία ορθοκανονική βάση του $T_P(M)$, τότε από τον ορισμό της απεικόνισης της συστολής έχουμε:

$$S(X,Y) = Ric(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} < R(e_i,X)Y, e_i >= \sum_{i=1}^{n} R\left(e_i, X, Y, e_i\right),$$

$\forall\, X,\ Y \in T_P(M)$. Το πλήθος των συνιστωσών $\{S_{ij}\}$ του τανυστή Ricci είναι $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Αν X είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα του $T_P(M)$ τότε, **καμπυλότητα Ricci**, της πολλαπλότητας (M, g) ως προς τη διεύθυνση X λέγεται η συνάρτηση $S(X, X)$, με τιμή

$$S(X, X) = \sum_{i=1}^{n} g(R(X, e_i)e_i, X).$$

Βαθμωτή καμπυλότητα της M, λέγεται η συνάρτηση τ που ορίζεται από τη συστολή των δεικτών του πεδίου Ricci και δύνεται από τη σχέση $\tau = \sum\limits_{i=1}^{n} S\left(e_i, e_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} g^{ij} S_{ij}$.

Ορισμός 2.43. Καμπυλότητα τομής της πολλαπλότητας Riemann (M, g) στο σημείο P και για το επίπεδο $\pi \subset T_P(M)$, που ορίζεται από τα διανύσματα $X, Y \in T_P(M)$ λέγεται ο αριθμός:

$$K(\pi, P) = \frac{g(R(X, Y)Y, X)}{A(X, Y)} \ \ \forall\, X, Y \in T_P(M)$$

όπου $A(X, Y)$ είναι η συμμετρική διγραμμική μορφή,

$$A(X, Y) =< X, X >< Y, Y > - < X, Y >^2 \ \text{ και } A(X, Y) \neq 0.$$

Αν τα X και Y είναι ορθοκανονικά τότε:

$$K(\pi, P) = g(R(X, Y)Y, X).$$

Αν $\dim M = 2$, τότε η $K(\pi, P)$ γίνεται η καμπυλότητα Gauss της M στο P. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι πολλαπλότητες με σταθερή καμπυλότητα τομής. Τέτοιες πολλαπλότητες είναι ο $\mathbb{R}^n$ που έχει $K(\pi, P) = 0$, η σφαίρα S^n που έχει $K(\pi, P) = 1$ και ο n-διάστατος υπερβολικός χώρος $\mathbb{H}^n$ που έχει καμπυλότητα τομής $K(\pi, P) = -1$. Ο τελευταίος είναι γενίκευση του υπερβολικού επιπέδου του Poincare'.

Παρατήρηση 2.44. Μία ισομετρία $f : M \to M'$, διατηρεί την καμπυλότητα τομής, δηλαδή, αν K και K' είναι οι καμπυλότητες τομής των M και M' αντίστοιχα και $\pi = \{X, Y\}$, $\pi' = \{f_*X, f_*Y\}$ είναι 2-διάστατοι υπόχωροι των $T_P(M)$ και $T_{f(P)}(M')$ αντίστοιχα, τότε $K(\pi) = K'(\pi')$.

Θεώρημα 2.45. *Αν (M, g) είναι μία πολλαπλότητα Riemann, τότε ορίζεται ακριβώς μία γραμμική συνοχή πάνω στην M, που ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:*

1. *Το τανυστικό πεδίο στρέψης T ισούται με το μηδέν ($T = 0$).*
2. *Η παράλληλη μετατόπιση, διατηρεί το εσωτερικό γινόμενο στους εφαπτόμενους χώρους.*

Οι δύο προηγούμενες σχέσεις, ισοδύναμα γράφονται ως εξής:

1. $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]\,, \ \forall\, X, Y \in D^1(M)$.
2. $\nabla_Z(g) = 0,\ Z \in D^1(M)$ *ή* $Zg(X, Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y)$.

Ορισμός 2.46. Μία πολλαπλότητα Riemann (M, g) λέγεται **πολλαπλότητα Einstein**, αν ο τανυστής Ricci S_{ij} είναι πολλαπλάσιο του μετρικού τανυστικού πεδίου, δηλαδή

$$S_{ij} = \frac{\tau}{n} g_{ij},$$

όπου τ είναι η βαθμωτή (αριθμητική) καμπυλότητα.

Παρατήρηση 2.47. Κάθε 2-διάστατη πολλαπλότητα Riemann είναι πολλαπλότητα Einstein.

2.5 Ψευδο-Ευκλείδειοι Διανυσματικοί Χώροι

Ορισμός 2.48. Έστω V ένας n-διάστατος πραγματικός διανυσματικός χώρος και $g : V \times V \to \mathbb{R}$ μία απεικόνιση που να ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. Να είναι διγραμμική, δηλαδή

$$g(\lambda u + \mu v, w) = \lambda g(u, w) + \mu g(v, w), \ \ \forall \lambda, \mu \in R, \ \ \forall u, v, w \in V,$$

$$g(u, \lambda v + \mu w) = \lambda g(u, v) + \mu g(u, w), \ \ \forall \lambda, \mu \in R, \ \ \forall u, v, w \in V.$$

2. Να είναι συμμετρική, δηλαδή

$$g(u, v) = g(v, u), \ \ \forall u, v \in V.$$

3. Να είναι μη εκφυλισμένη, δηλαδή αν $g(u, v) = 0 \ \forall u \in V$, τότε να είναι $v = 0$. Η απεικόνιση g ονομάζεται **μετρικός τανυστής** πάνω στον V.

Από τον τρόπο που ορίσθηκε η g είναι φανερό ότι η $g \in \overset{2}{\otimes} V^*$, δηλαδή είναι ένα συναλλοίωτο τανυστικό πεδίο τύπου $(0, 2)$.
Λέμε ότι ο τανυστής g είναι **θετικά** ορισμένος στον V αν $g(u, u) > 0$, για κάθε μη μηδενικό $u \in V$. Αντίστοιχα αν έχουμε $g(u, u) < 0$, για κάθε μη μηδενικό $u \in V$, τότε ο μετρικός τανυστής λέγεται **αρνητικά** ορισμένος. Αν τέλος ο g δεν είναι ούτε θετικά ούτε αρνητικά ορισμένος τότε τον χαρακτηρίζουμε ως **αόριστο** (indefinite).
Αν δεν ισχύει η ιδιότητα τρία (3), του ως άνω ορισμού, δηλαδή αν υπάρχει $u \neq 0$ του V τέτοιο ώστε $g(u, v) = 0, \ \forall \ v \in V$, τότε ο μετρικός τανυστής λέγεται **εκφυλισμένος**.

Θεωρούμε έναν υπόχωρο W του V που είναι εφοδιασμένος με τον μετρικό τανυστή g. Τότε ο περιορισμός του μετρικού τανυστή g στο $W \times W$ είναι επίσης μία συμμετρική διγραμμική μορφή πάνω στον W, την οποία συμβολίζουμε με $g_{|W}$. Ο W ονομάζεται μη εκφυλισμένος υπόχωρος του V, αν ο $g_{|W}$ είναι μη εκφυλισμένος. Η διάσταση ν του μεγαλύτερου υπόχωρου W, στον οποίο ο $g_{|W}$ είναι αρνητικά ορισμένος ονομάζεται **δείκτης** (index) του g στον V και γράφουμε $IndV = \nu$. Η αντίστοιχη τετραγωνική μορφή του g, ορίζεται ως η απεικόνιση $h : V \to \mathbb{R}$ με τιμή $h(u) = g(u, u)$, $\forall u \in V$. Ο μετρικός τανυστής g μπορεί να γραφεί και στην ακόλουθη μορφή

$$g(u, v) = \frac{1}{2}\{h(u + v) - h(u) - h(v)\} \ \forall u, v \in V.$$

Έστω $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ μία τυχαία βάση του V. Τότε ο μετρικός τανυστής g, μπορεί να παρασταθεί από έναν $n \times n$ πίνακα $G = [g_{ij}]$, όπου

$$g_{ij} = g(e_i, e_j), \quad (1 \leq i, j \leq n).$$

Ο G ονομάζεται **πίνακας** του μετρικού τανυστή g ως προς την βάση B και είναι συμμετρικός, αφού η g είναι συμμετρική απεικόνιση. Αν θεωρήσουμε δύο διανύσματα u, v του V τότε έχουμε

$$g(u, v) = g\left(u^i e_i, \ v^j e_j\right) = g_{ij} u^i v^j = u^i v^j g_{ij},$$

όπου χρησιμοποιείται ο συμβολισμός του Einstein για το άθροισμα.

Πρόταση 2.49. *Μία συμμετρική διγραμμική μορφή επί του χώρου V είναι μη εκφυλισμένη αν και μόνο αν ο πίνακάς της, ως προς μια βάση του, είναι αντιστρέψιμος.*

Απόδειξη. Έστω $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ μία βάση του V και $u \in V$. Τότε $g(u, v) = 0 \ \forall v \in V$ αν και μόνο αν $g(u, e_i) = 0, \ i = 1, 2, \ldots, n$. Έχουμε

$$g(u, e_i) = g\left(u^j e_j, e_i\right) = g_{ij} u^j, \quad g_{ij} = g(e_i, e_j).$$

Η g όμως, είναι εκφυλισμένη αν και μόνο αν υπάρχουν αριθμοί $u^1, u^2, ..., u^n$ όχι όλοι μηδέν, τέτοιοι ώστε $g_{ij} u^j = 0$. Αλλά αυτό έχει ως αποτέλεσμα τη γραμμική εξάρτηση των στηλών του πίνακα $G = (g_{ij})$, δηλαδή ο πίνακας G δεν είναι αντιστρέψιμος. □

Αν η διγραμμική μορφή g είναι θετικά ορισμένη τότε ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο επί του V, ο οποίος τότε λέγεται **Ευκλείδειος χώρος**.

Κάθε μη εκφυλισμένη συμμετρική διγραμμική μορφή g επί του V, καλείται **ψευδο-Ευκλείδεια** μετρική και ο χώρος V **ψευδο-Ευκλείδειος χώρος**.

Αν ο δείκτης ν του g είναι 1, τότε το g λέγεται **μετρική Lorentz** και ο ψευδο-Ευκλείδειος χώρος V ονομάζεται **χώρος Lorentz-Minkowski**.

Έστω V ένας ψευδο-Ευκλείδειος χώρος εφοδιασμένος με μία ψευδο-Ευκλείδεια μετρική g. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$\|\cdot\| : V \to R\,;\ \|u\| = |g(u,u)|^{\frac{1}{2}}\ ,\ \forall u \in V$$

την οποία καλούμε μέτρο (norm) του διανύσματος u.

Ορισμός 2.50. Ένα διάνυσμα u ονομάζεται

1. **Χωροειδές** (spacelike), αν $g(u,u) > 0$ ή $u = 0$.
2. **Φωτοειδές (ή Ισοτροπικό)** (lightlike), αν $g(u,u) = 0$ και $u \neq 0$.
3. **Χρονοειδές** (timelike), αν $g(u,u) < 0$.

Φωτοειδής (ή Ισοτροπικός) κώνος του V λέγεται το σύνολο Λ όλων των φωτοειδών διανυσμάτων του, δηλαδή το σύνολο

$$\Lambda = \{u \in (V - \{0\}) \mid \quad g(u,u) = 0\}.$$

Μοναδιαίο διάνυσμα του χώρου V είναι ένα διάνυσμα u με μέτρο 1, αλλά $g(u,u) = \pm 1$.

Δύο διανύσματα u και v είναι **ορθογώνια** (γράφουμε $u \perp v$) αν και μόνο αν $g(u,v) = 0$. Αξίζει να σημειωθεί ότι, κάθε φωτοειδές διάνυσμα του V είναι ορθογώνιο με τον εαυτό του (αυτο ορθογώνια διάνυσματα).

Έστω W ένας υπόχωρος του V. Ορίζουμε τον **κάθετο χώρο** του W ως το σύνολο, $W^{\perp} = \{u \in V : u \perp W\} = \{u \in V : g(u,w) = 0,\ \forall w \in W\}$.

Είναι σημαντικό το γεγονός ότι στους ψευδο-Ευκλείδιους χώρους, γενικά, δεν ισχύει η σχέση $W \bigcap W^{\perp} = \{0\}$.
Δύο υπόχωροι U, W του V είναι **ορθογώνιοι** αν $g(u,w) = 0$, για κάθε $u \in U$ και $w \in W$.
Ορίζουμε ως **ισοτροπικό υπόχωρο** (radical ή null space) του V, ως προς τον μετρικό τανυστή g, τον χώρο RadV που ορίζεται ως εξής:

$$RadV = \{u \in V \mid g(u,v) = 0, \ \ \forall v \in V\}.$$

Πρόταση 2.51. *[45, O'Neil σελ. 49] Έστω (V,g) ένας n-διάστατος ψευδο-Ευκλείδειος χώρος και W ένας k-διάστατος υπόχωρός του. Τότε ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:*

$$\begin{aligned} &(1) \quad dimW + dimW^{\perp} = n \\ &(2) \quad \left(W^{\perp}\right)^{\perp} = W \\ &(3) \quad RadW = RadW^{\perp} = W \bigcap W^{\perp}. \end{aligned}$$

Πρόταση 2.52. *[45, O'Neil σελ. 49] Ένας υπόχωρος W του V είναι μη εκφυλισμένος, αν και μόνο αν, ο V είναι ευθύ άθροισμα των W και $W^{\perp}$.*

Έστω V ένας Lorentz-Minkowski χώρος και W ένας υπόχωρός του. Υπάρχουν τρεις περιπτώσεις για τον W:

1. Αν ο $g_{|W}$ είναι θετικά ορισμένος, τότε ο W λέγεται χωροειδής (spacelike) υπόχωρος.

2. Αν ο $g_{|W}$ είναι μη εκφυλισμένος, δείκτου 1 τότε ο W λέγεται χρονοειδής (timelike) υπόχωρος.

3. Αν ο $g_{|W}$ είναι εκφυλισμένος τότε ο W λέγεται φωτοειδής (ή ισοτροπικός) (lightlike) υπόχωρος.

Πρόταση 2.53. *[45, σελ. 141] Αν u είναι ένα χρονοειδές διάνυσμα του Lorentz-Minkowski διανυσματικού χώρου (V,g), τότε ο υπόχωρος $u^{\perp}$ του V είναι χωροειδής και ο V είναι το ευθύ άθροισμα $\lambda u \oplus u^{\perp}$, $\lambda \in R$.*

Πρόταση 2.54. *[45, σελ. 141] Έστω W ένας υπόχωρος με $\dim W \geq 2$, ενός διανυσματικού χώρου Lorentz. Τότε, τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

1. Ο W είναι χρονοειδής (timelike), εφόσον από μόνος του, είναι ένας διανυσματικός χώρος Lorentz.

2. Ο W περιέχει δύο γραμμικά ανεξάρτητα, φωτοειδή (null) διανύσματα.

3. Ο W περιέχει ένα χρονοειδές (timelike) διάνυσμα.

Πρόταση 2.55. *[45, σελ. 142] Γιά έναν υπόχωρο W, ενός διανυσματικού χώρου Lorentz V, τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

1. Ο W είναι φωτοειδής (lightlike), δηλαδή, είναι εκφυλισμένος.

2. Ο W περιέχει ένα φωτοειδές (null) διάνυσμα, αλλά δεν περιέχει ένα χρονοειδές (timelike) διάνυσμα.

3. $W \bigcap \Lambda = L - \{0\}$, όπου L είναι ένας μονο-διάστατος υπόχωρος και Λ είναι ο ισοτροπικός κώνος του V.

Γενικά μπορούμε να πούμε ότι ένας υπόχωρος W ενός χώρου V είναι χρονοειδής αν και μόνο αν ο $W^{\perp}$ είναι χωροειδής.

Έστω V ένας n-διάστατος ψευδο-Ευκλείδειος χώρος. Ένα σύνολο B, διακεκριμένων ορθογωνίων μοναδιαίων διανυσμάτων του, ονομάζεται, ορθοκανονικό σύνολο. Κάθε σύνολο n ορθοκανονικών διανυσμάτων του V αποτελεί μία ορθοκανονική βάση του. Ο πίνακας της g ως προς μία ορθοκανονική βάση $\{e_1, e_2, ...e_n\}$ του V είναι διαγώνιος και ισχύει ότι

$$g(e_i, e_j) = 0, \ \forall i \neq j, \quad g(e_j, e_j) = \varepsilon_j = \pm 1 \ , \ i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Το τυχαίο στοιχείο $u \in V$ γράφεται στη μορφή

$$u = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \ g(u, e_i) e_i.$$

Όταν έχουμε ένα n-διάστατο χώρο Lorentz (V, g), μπορούμε να ορίσουμε ως **ψευδο-ορθοκανονική βάση** του, ([22]), το σύνολο $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, τα στοιχεία του οποίου ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} g(e_1, e_1) &= g(e_2, e_2) = 0, \;\; g(e_1, e_2) = 1 \\ g(e_1, e_i) &= g(e_2, e_i) = 0, \;\; g(e_i, e_j) = \delta_{ij}, \;\; 3 \leq i, j \leq n. \end{aligned}$$

Ο πίνακας της g ως προς μία ψευδο-ορθοκανονική βάση δεν είναι τότε, προφανώς, διαγώνιος.
Γνωρίζοντας μία ορθοκανονική βάση του V μπορούμε πάντα να κατασκευάσουμε μία ψευδο-ορθοκανονική βάση του χώρου ([22]).

2.6 Ψευδο-Riemannian Πολλαπλότητες

Ορισμός 2.56. Ψευδομετρική Riemann πάνω σε μια πολλαπλότητα M, είναι ένα μη εκφυλισμένο (nondegenerate) συναλλοίωτο συμμετρικό τανυστικό πεδίο g (ή $\langle\, , \rangle$) τύπου $(0, 2)$, με την ιδιότητα: « Η διάσταση της αρνητικά ορισμένης υποδέσμης, της εφαπτόμενης δέσμης $T(M)$ της M (ως προς την ψευδομετρική Riemann), να είναι σταθερή ».

Κάθε πολλαπλότητα M εφοδιασμένη με μια ψευδομετρική Riemann, λέγεται **ψευδο-Riemannian πολλαπλότητα**.
Η διάσταση της αρνητικά ορισμένης υποδέσμης, αναφέρεται και ως **δείκτης** (index) της πολλαπλότητας M και συμβολίζεται με ν. Ισχύει ότι: $0 \leq \nu \leq n = \dim M$. Αν $\nu = 0$, τότε η M είναι μια πολλαπλότητα Riemann και σ′ αυτή την περίπτωση, για κάθε $P \in M$ το $g_P : T_P(M) \times T_P(M) \to \mathbb{R}$ είναι ένα (θετικά ορισμένο) εσωτερικό γινόμενο στον $T_P(M)$. Αν $\nu = 1$ και $n \geq 2$, η πολλαπλότητα M λέγεται **πολλαπλότητα Lorentz**.
Αν $(x_1, \ldots, x_n)$ είναι ένα σύστημα συντεταγμένων της M, οι συνιστώσες του μετρικού τανυστικού πεδίου g είναι

$$g_{ij}(P) = g_P\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_P, \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_P\right), \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Οι συντεταγμένες $(x_1, \ldots, x_n)$ λέγονται **ψευδο-Ευκλείδειες** συντεταγμένες τύπου (μ, ν), όπου $\mu = n - \nu$.

Στον χώρο $\mathbb{R}^n$, ορίζουμε τον ακόλουθο μετρικό τανυστή

$$g_P(u_P, v_P) = -\sum_{i=1}^{\nu} u_i v_i + \sum_{j=\nu+1}^{n} u_j v_j,$$

όπου $u_P = (u_1, \ldots, u_n)$, $v_P = (v_1, \ldots, v_n)$ και $P \in \mathbb{R}^n$.

Ο χώρος R^n εφοδιασμένος με αυτόν τον μετρικό τανυστή αποτελεί μια n-διάστατη ψευδο-Ευκλείδεια πολλαπλότητα και σημειώνεται με $\mathbb{E}^n_\nu$.

Αν $\nu = 0$, τότε ο $\mathbb{E}^n_0$ είναι ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{E}^n$.

Αν $\nu = 1$ και $n \geq 2$, έχουμε την $\mathbb{E}^n_1$ η οποία λέγεται **ψευδο-Ευκλείδεια πολλαπλότητα** ή **πολλαπλότητα Lorentz -Minkowski**.

Ο μετρικός τανυστής μιας n-διάστατης πολλαπλότητας Riemann καθιστά κάθε εφαπτόμενο χώρο της, χώρο εσωτερικού γινομένου, γραμμικά ισόμορφο με τον E^n. Κάθε εφαπτόμενος χώρος μιας n-διάστατης πολλαπλότητας Lorentz-Minkowski M είναι γραμμικά ισόμορφος με τον E^n_1 και η γεωμετρία Lorentz μελετά τον χαρακτήρα και τις ιδιότητες των διανυσμάτων σε ένα τέτοιο χώρο.

Θεώρημα 2.57. *[45, σελ. 61] Έστω M μία ψευδο-Riemannian πολλαπλότητα. Τότε υπάρχει μοναδική συνοχή ∇ τέτοια ώστε*

$$(1) \quad [X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$$

$$(2) \quad X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$$

για όλα τα $X, Y, Z \in D^1(M)$. Η συνοχή αυτή ονομάζεται Levi-Civita συνοχή και χαρακτηρίζεται από τον τύπο του Koszul:

$$\begin{aligned} 2 \langle \nabla_Y Z, X \rangle &= Y \langle Z, X \rangle + Z \langle X, Y \rangle - X \langle Y, Z \rangle - \\ &\quad - \langle Y, [Z, X] \rangle + \langle Z, [X, Y] \rangle + \langle X, [Y, Z] \rangle . \end{aligned}$$

Θα ορίσουμε τώρα τις μορφές συνοχής (connection forms) μιας n-διάστατης ψευδο-Riemannian πολλαπλότητας $(M, <, >)$. Έστω μια ορθοκανονική βάση $G = \{e_i\}_{i=1}^n$ του εφαπτόμενου χώρου $T_P(M), P \in M$ της M.

Ορισμός 2.58. Οι 1-μορφές ω_i^k που ορίζονται από τη σχέση

$$\varepsilon_k \omega_i^k(e_j) = \langle \nabla_{e_i} e_j, e_k \rangle\,,\ \varepsilon_k = \langle e_k, e_k \rangle = \pm 1 \tag{2.6.1}$$

λέγονται **μορφές συνοχής** της ψευδο-πολλαπλότητας Riemann M, ως προς τη βάση $G = \{e_i\}_{i=1}^n$, όπου ο δείκτης k δεν είναι αθροιστικός.

Θα χρησιμοποιούμε, στη συνέχεια, τον συμβολισμό $\omega_i^k(e_j) = \omega_{ij}^k$, οπότε θα έχουμε ότι $\nabla_{e_i} e_j = \omega_{ij}^k e_k$.Έχουμε την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 2.59. *Οι μορφές συνοχής της ψευδο-Riemannian πολλαπλότητας M, ως προς μία ορθοκανονική βάση, ικανοποιούν τη σχέση*

$$\omega_{ij}^k = -\varepsilon_j \varepsilon_k \omega_{ik}^j$$

όπου ο δείκτης j δεν είναι αθροιστικός.

Απόδειξη. Έχουμε

$$\begin{aligned}
\nabla_{e_i} \langle e_j, e_k \rangle &= \langle \nabla_{e_i} e_j, e_k \rangle + \langle e_j, \nabla_{e_i} e_k \rangle = 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow \left\langle \omega_i^k(e_j) e_k, e_k \right\rangle + \left\langle e_j, \omega_i^j(e_k) e_j \right\rangle = 0 \\
&\Rightarrow \omega_{ij}^k \varepsilon_k + \omega_{ik}^j \varepsilon_j = 0 \\
&\Rightarrow \omega_{ij}^k = -\varepsilon_j \varepsilon_k \omega_{ik}^j.
\end{aligned}$$

□

Έστω M μία ψευδο-Riemannian πολλαπλότητα και ∇ η συνοχή Levi-Civita. Για το τανυστικό πεδίο καμπυλότητας ισχύει η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 2.60. *[45, σελ. 75] Αν M μία ψευδο-πολλαπλότητα Riemann και $X, Y, Z, W \in D^1(M)$ τότε*

(1) $R(X,Y) = -R(Y,X)$

(2) $\langle R(X,Y)Z, W\rangle = -\langle R(X,Y)W, Z\rangle$

(3) $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$

(4) $(\nabla_X R)(Y,Z,W) + (\nabla_Y R)(Z,X,W) + (\nabla_Z R)(X,Y,W) = 0.$

Οι σχέσεις (3) και (4) της προηγούμενης πρότασης είναι γνωστές ως **πρώτη** και **δεύτερη ταυτότητα του Bianchi**.

Παρατήρηση 2.61. Αν X και Y είναι βασικά διανυσματικά πεδία, τότε, επειδή $[X,Y] = 0$ από τη σχέση

$$R(X,Y)Z = \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X,Y]}Z,$$

έχουμε

$$R(X,Y)Z = \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z).$$

Επομένως, αν $R(X,Y) = 0$ τότε $\nabla_X(\nabla_Y Z) = \nabla_Y(\nabla_X Z)$ δηλαδή, οι συναλλοίωτες παράγωγοι $\nabla_{\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)}$ και $\nabla_{\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)}$ αντιμετατίθενται, για κάθε διανυσματικό πεδίο Z.

Αντίστροφα, αν οι παράγωγοι αυτοί αντιμετατίθενται $\forall\ Z \in D^1(M)$, τότε ο $R(X,Y)$ πρέπει να είναι ο μηδενικός τελεστής.

2.7 Ψευδο-Riemannian Υποπολλαπλότητες

Έστω M μία υποπολλαπλότητα της πολλαπλότητας Riemann $(N, \tilde{g})$. Κάθε εφαπτόμενος χώρος $T_P(M)$ μπορεί να θεωρηθεί υπόχωρος του $T_P(N)$. Επομένως αν δράσουμε με το μετρικό τανυστή $\tilde{g}$ σε κάθε ζεύγος εφαπτόμενων διανυσμάτων της M, σε κάποιο σημείο της P, θα επάγουμε έναν μετρικό τανυστή

g_P στην M ως εξής $g_P(X,Y) = \tilde{g}_P(f_*X, f_*Y)$. Άρα ο g_P είναι η απεικόνιση επιστροφής (pullback) $f^*(\tilde{g}_P)$, όπου f είναι η απεικόνιση έγκλισης (inclusion map) $f : M \to N$. Όταν ο μετρικός τανυστής $\tilde{g}$ δεν είναι θετικά ή αρνητικά ορισμένος, δηλαδή είναι αόριστος, η $f^*(\tilde{g})$ ορίζει μια μετρική στην M αν και μόνο αν κάθε $T_P(M)$ είναι μη-εκφυλισμένος υπόχωρος του $T_P(N)$ και ο δείκτης του $T_P(M)$ είναι ίδιος για όλα τα $P \in M$.

Ορισμός 2.62. [45, σελ. 57] Έστω M μία υποπολλαπλότητα της ψευδο-Riemannian πολλαπλότητας N. Αν η pullback $f^*(\tilde{g})$ ορίζει μετρική στην M τότε η M ονομάζεται ψευδο-Riemannian υποπολλαπλότητα της N.

Αν dim$N$-dim$M$=1 τότε η M λέγεται **υπερεπιφάνεια** της N. Έστω M μια m-διάστατη υποπολλαπλότητα της n-διάστατης ψευδο-Riemannian πολλαπλότητας N $(m < n)$. Αν $\overline{\langle\, ,\, \rangle}$ είναι η μετρική της N, τότε την επαγόμενη μετρική της M θα τη συμβολίζουμε με $\langle\, ,\, \rangle$.
Σε ότι ακολουθεί θα ταυτίζουμε διανυσματικά πεδία της M με τις εικόνες τους διαμέσου του διαφορικού της απεικόνισης έγκλισης (inclusion map) $f : M \to N$, δηλαδή: $f_*X = X$, $\forall\ X \in D^1(M)$ και αν $X, Y \in T_P(M)$, $P \in M$, το εσωτερικό γινόμενο στην M θα ορίζεται ως εξής:

$$\langle X, Y\rangle = \overline{\langle f_*X,\ f_*Y\rangle}.$$

Κάθε χώρος $T_P(M)$ είναι μη εκφυλισμένος υπόχωρος του $T_P(N)$, οπότε από την Πρόταση (2.52) έχουμε ότι $T_P(N) = T_P(M) \oplus T_P(M)^\perp$.
Έστω τώρα X, Y δύο διανυσματικά πεδία της M και $\overline{X}$, $\overline{Y}$ οι επεκτάσεις αυτών στην πολλαπλότητα N, δηλαδή τα διανυσματικά πεδία της N τα οποία όταν περιοριστούν στην πολλαπλότητα M είναι τα διανυσματικά X, Y, αντίστοιχα. Έστω επίσης $\overline{\nabla}$ η συνοχή της ψευδο-Riemannian πολλαπλότητας N. Τότε η τιμή της $\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}$ στο σημείο $P \in M$, δεν εξαρτάται από τις επεκτάσεις $\overline{X}$, $\overline{Y}$ των X, Y αντίστοιχα και το διανυσματικό πεδίο $[\overline{X}, \overline{Y}]$ της N είναι επέκταση

του διανυσματικού πεδίου $[X,Y]$ της M. Έτσι γράφουμε $\overline{\nabla}_X Y$ αντί $\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}$ και αναλύουμε αυτό το διανυσματικό πεδίο της N σε δύο συνιστώσες, μια εφαπτομενική της M, $\nabla_X Y$ και μια κάθετη της M, $\alpha(X,Y)$. Επομένως, θα έχουμε

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X,Y) \text{ (τύπος του } \mathbf{Gauss}\text{)}.$$

Η απεικόνιση

$$\nabla : D^1(M) \times D^1(M) \to D^1(M)$$

$$\nabla : (X,Y) \mapsto \nabla(X,Y) = \nabla_X Y$$

ορίζει μια συνοχή στην M, που λέγεται **επαγόμενη συνοχή** στην υποπολλαπλότητα M.

Επίσης η απεικόνιση

$$\alpha : D^1(M) \times D^1(M) \to [D^1(M)]^{\perp}$$

$$\alpha : (X,Y) \to \alpha(X,Y)$$

είναι συμμετρική, διγραμμική και λέγεται **δεύτερη θεμελιώδης μορφή** της υποπολλαπλότητας M.

Έστω ξ ένα διανυσματικό πεδίο της N κάθετο στην M. Το $\overline{\nabla}_X \xi$ αναλύεται σε μια εφαπτομενική συνιστώσα την $-A_\xi X$ και σε μια κάθετη την $\nabla^{\perp}_X \xi$, οπότε έχουμε τον ακόλουθο **τύπο του Weingarten**

$$\overline{\nabla}_X \xi = -A_\xi X + \nabla^{\perp}_X \xi.$$

Η απεικόνιση

$$\nabla^{\perp} : D^1(M) \times [D^1(M)]^{\perp} \to [D^1(M)]^{\perp}$$

$$\nabla^{\perp} : (X,\xi) \mapsto \nabla^{\perp}_X \xi$$

έχει τις ιδιότητες μιας συνοχής και λέγεται **κάθετη συνοχή** (normal connection) της υποπολλαπλότητας M.

Η απεικόνιση

$$A : D^1(M) \times [D^1(M)]^{\perp} \to D^1(M)$$

$$A : (X, \xi) \mapsto A_\xi X$$

είναι γραμμική και ως προς X και ως προς ξ.

Η απεικόνιση $A_\xi : T_P(M) \to T_P(M)$ λέγεται **απεικόνιση Weingarten** (**shape operator**) της M στο $P \in M$ ως προς τη διεύθυνση $\xi \in T_P^{\perp}(M)$.

Για κάθε διανυσματικό πεδίο ξ της N κάθετο της M έχουμε

$$\langle A_\xi X, Y\rangle = \overline{\langle h(X, Y), \xi\rangle}, \quad \forall X, Y \in D^1(M),$$

όπου η h είναι μία διγραμμική συμμετρική συνάρτηση πάνω στο $T_P(M) \times T_P(M)$ και ονομάζεται **δεύτερη θεμελιώδης μορφή της M ως προς τη διεύθυνση ξ**.

Όταν η M είναι μια ψευδο-Riemannian υπερεπιφάνεια της N, τότε υπάρχει μοναδικό (κατά προσέγγιση φοράς) μοναδιαίο διάνυσμα $\xi \in T_P^{\perp}(M)$. Επομένως, για διανυσματικά πεδία $X, Y \in D^1(M)$ μπορούμε να γράψουμε

$$\alpha : (X, Y) = h(X, Y)\xi. \tag{2.7.1}$$

Επεκτείνοντας το διάνυσμα ξ τοπικά σε ένα μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο ξ κοντά στο P, έχουμε $\overline{\langle \xi, \xi\rangle} = \pm 1$. Αν παραγωγίσουμε αυτή τη σχέση παίρνουμε $\overline{\langle \overline{\nabla}_X \xi, \xi\rangle} = 0$ και χρησιμοποιώντας τον τύπο του Weingarten, έχουμε

$$\overline{\langle -A_\xi X + \nabla_X^{\perp} \xi, \xi\rangle} = 0$$

και άρα $\overline{\langle \nabla_X^{\perp} \xi, \xi\rangle} = 0$. Αφού όμως το ξ είναι το **μοναδικό** κάθετο διανυσματικό πεδίο της M, το $\nabla_X^{\perp}\xi$ θα είναι πολλαπλάσιο του ξ και άρα $\nabla_X^{\perp}\xi = 0$ [37, σελ. 15, Τόμος ΙΙ]. Κατά συνέπεια, ο τύπος του Weingarten, στην περίπτωση των υπερεπιφανειών, παίρνει την ακόλουθη μορφή

$$\overline{\nabla}_X \xi = -A_\xi X.$$

Αν τώρα, θέσουμε $A_\xi = S$, έχουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 2.63. Έστω ξ μοναδιαίο και κάθετο διανυσματικό πεδίο μιας υπερεπιφάνειας $M \subset N$. Το τανυστικό πεδίο S, τύπου $(1,1)$, που δίνεται από τη σχέση

$$\langle S(X), Y\rangle = \langle \alpha(X,Y), \xi\rangle, \ \forall X, Y \in D^1(M)$$

λέγεται τελεστής του Weingarten ή **τελεστής σχήματος** (shape operator) της M ως προς τη διεύθυνση ξ.

Από την σχέση (2.7.1) και τον προηγούμενο ορισμό έχουμε ότι

$$\langle S(X), Y\rangle = \langle h(X,Y)\xi, \xi\rangle = \varepsilon h(X,Y), \ \ \forall X, Y \in D^1(M) \tag{2.7.2}$$

όπου $\varepsilon = \langle \xi, \xi\rangle = \pm 1$.

Λήμμα 2.64. *[45, σελ. 107] Αν S είναι ο τελεστής σχήματος της υπερεπιφάνειας $M \subset N$ ως προς τη διεύθυνση ξ, τότε ισχύει $S(X) = -\overline{\nabla}_X \xi$, $X \in D^1(M)$ και σε κάθε σημείο ο γραμμικός τελεστής $S : T_P(M) \to T_P(M)$ είναι αυτοσυζυγής.*

Ο τελεστής σχήματος S μετράει την ταχύτητα μεταβολής της διεύθυνσης του $\vec{\xi}$ στην πολλαπλότητα N (δηλαδή το 'στρίψιμο' του $\vec{\xi}$) ως προς όλες τις εφαπτόμενες διευθύνσεις της M και επειδή ο κάθετος χώρος του $\vec{\xi}$ στο σημείο $P \in M$ είναι ακριβώς ο εφαπτόμενος χώρος της M στο σημείο P, εκφράζει την στροφή του $T_P(M)$ στην πολλαπλότητα N. Συνεπώς, ο S μας δίνει πληροφορίες γύρω από το σχήμα της M και για το λόγο αυτό λέγεται και τελεστής σχήματος της M.

Έστω M^n_r μια μη εκφυλισμένη υπερεπιφάνεια της ψευδο-Ευκλείδειας πολλαπλότητας E^m_s.

Θα λέμε ότι η M^n_r είναι εφοδιασμένη με δομή Riemann, αν η μετρική g, η

οποία επάγεται στην M_r^n από την ψευδο-Ευκλείδεια μετρική του χώρου E_s^m, είναι θετικά ορισμένη. Σε αυτή την περίπτωση, το κάθετο διάνυσμα $\vec{\xi}$ σε κάθε σημείο $P \in T_P(M_r^n)$ είναι ένα **χρονοειδές** (time-like) διάνυσμα, δηλαδή, $< \vec{\xi}, \vec{\xi} >= -1$ και η υπερεπιφάνεια M_r^n ονομάζεται υπερεπιφάνεια Riemann.
Αντίθετα η υπερεπιφάνεια M_r^n είναι εφοδιασμένη με ψευδο- Riemannian δομή, αν η μετρική g η οποία επάγεται στην M_r^n από την ψευδο-Ευκλείδεια μετρική του χώρου E_s^m, είναι αόριστη. Στην περίπτωση αυτή, το κάθετο διάνυσμα $\vec{\xi}$ σε κάθε σημείο $P \in T_P(M_r^n)$ δύναται να είναι είτε ένα **χρονοειδές** (time-like) διάνυσμα, οπότε $< \vec{\xi}, \vec{\xi} >= -1$, είτε **χωροειδές** (space-like) διάνυσμα, οπότε $< \vec{\xi}, \vec{\xi} >= +1$.
Ειδικώτερα αν M_2^3 είναι μια μη εκφυλισμένη υπερεπιφάνεια, της ψευδο-Ευκλείδειας πολλαπλότητας E_2^4 τότε, η M_2^3 είναι εφοδιασμένη με ψευδο- Riemannian δομή και το κάθετο διάνυσμα $\vec{\xi} \in T_P(M_2^3)^{\perp}$ είναι **χωροειδές** (space-like).
Έστω η μη εκφυλισμένη υπερεπιφάνεια M_1^n της πολλαπλότητας Lorentz E_1^m. Μπορούμε να ορίσουμε μία ορθοκανονική ή ψευδο-ορθοκανονική βάση του $T_P(M_1^n)$ ως εξής ([41], [42], [43]).
Το σύνολο $\{e_1, \ldots, e_n\}$ αποτελεί μία ορθοκανονική βάση του $T_P(M_1^n)$, αν τα στοιχεία του ικανοποιούν τις συνθήκες:

$$< e_1, e_1 >= -1, \ < e_i, e_j >= \delta_{ij}, \ < e_1, e_i >= 0, \ \text{γιά} \ 2 \leq i, j \leq n.$$

Μία ψευδο-ορθοκανονική βάση του $T_P(M_1^n)$ είναι το σύνολο $\{X, Y, e_1, \ldots, e_{n-2}\}$, τα στοιχεία του οποίου ικανοποιούν τις συνθήκες:

$$< X, X >=< Y, Y >=< X, e_i >=< Y, e_i >= 0, \ \ < X, Y >= -1,$$

$$\text{και} \ \ < e_i, e_j >= \delta_{ij}, \ \text{για} \ 2 \leq i, j \leq n-2.$$

Όπως έχουμε αναφέρει, ο τελεστής σχήματος S, σε κάθε σημείο P της M_1^n, είναι ένας αυτοσυζυγής ενδομορφισμός του εφαπτόμενου χώρου $T_P(M_1^n)$.

Ο Petrov ([47]), ομαδοποίησε τις κανονικές μορφές του S, ως προς κατάλληλη βάση ορθοκανονική ή ψευδο-ορθοκανονική του εφαπτόμενου χώρου.
Στη συνέχεια, παρουσιάζουμε ορισμένες ακόμα έννοιες:

Έστω M_r^n μια n-διάστατη υπερεπιφάνεια της ψευδο-Ευκλείδειας πολλαπλότητας E_s^m. Τότε το διάνυσμα $\vec{H} = H\vec{\xi}$, όπου $H = \dfrac{1}{\varepsilon n} trS$ και $\varepsilon =< \vec{\xi}, \vec{\xi} >= \pm 1$, λέγεται **διάνυσμα μέσης καμπυλότητας** της M_r^n ([10]). Η υπερεπιφάνεια M_r^n λέγεται ελαχιστική αν $H = 0$.
Αν $f \in D^o(M)$ είναι μια βαθμωτή συνάρτηση, τότε η κλίση (gradient) της δίνεται από τη σχέση ([45])

$$< \nabla f, X >= X(f) \ \ , \ \ \forall \ X \in D^1(M),$$

η δε δράση του τελεστή Laplace, επί της f δίνεται από τη σχέση ([16])

$$\Delta f = -\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i (e_i e_i f - \nabla_{e_i} e_i f) \, ,$$

όπου $< e_i, e_i >= \varepsilon_i = \pm 1$ και $\{e_i\}_{i=1}^n$ είναι ένα τοπικό **ορθοκανονικό πλαίσιο** του $T_P(M_r^n)$.
Οι εξισώσεις των **Gauss** και **Codazzi** για υπερεπιφάνειες είναι ([37] σελ. 23-25)

$$R(X,Y)Z = S(X) < S(Y), Z > -S(Y) < S(X), Z >$$

και

$$(\nabla_X S)Y = (\nabla_Y S)X$$

αντίστοιχα, $\forall \ X, \ Y, \ Z \in D^1(M)$.
Μία υπερεπιφάνεια M_r^3 της E_s^4 λέμε ότι έχει **αρμονικό διανυσματικό πεδίο μέσης καμπυλότητας** αν ικανοποιεί τη σχέση

$$\Delta \vec{H} = \vec{0}. \tag{2.7.3}$$

Προφανώς, κάθε ελαχιστική υπερεπιφάνεια, έχει αρμονικό διανυσματικό πεδίο μέσης καμπυλότητας. Γνωρίζουμε ότι η δράση του τελεστή Laplace, επί του διανυσματικού πεδίου μέσης καμπυλότητας παίρνει τη μορφή ([12]),

$$\Delta \vec{H} = \{2S\,(\nabla H) + 3\ \varepsilon H \nabla H\} + \{\Delta H + \varepsilon H tr S^2\}\vec{\xi}.$$

Επομένως, έχουμε τις ακόλουθες αναγκαίες και ικανές συνθήκες ώστε, μία υπερεπιφάνεια M^3_r στην E^4_s, να έχει αρμονικό διανυσματικό πεδίο μέσης καμπυλότητας,

$$S(\nabla H) = -\varepsilon \frac{3H}{2}(\nabla H)$$

$$\Delta H + \varepsilon H tr S^2 = 0.$$

Συμβολίζουμε με $\vec{r}$, το διανυσματικό πεδίο θέσης του τυχαίου σημείου της υπερεπιφάνειας και με Δ τον τελεστή του Laplace, τότε όπως είναι γνωστό, ισχύει η σχέση ([9])

$$\Delta \vec{r} = -n\vec{H}. \tag{2.7.4}$$

Αν λάβουμε τώρα υπόψη μας και την σχέση (2.7.3), οι υπερεπιφάνειες με αρμονικό διάνυσματικό πεδίο μέσης καμπυλότητας πληρούν την σχέση,

$$\Delta^2 \vec{r} = \vec{0}. \tag{2.7.5}$$

Επομένως οι υπερεπιφάνειες που ικανοποιούν την (2.7.3) μπορούν να χαρακτηριστούν ως **διαρμονικές υπερεπιφάνειες**. Είναι προφανές ότι οι ελαχιστικές υπερεπιφάνειες είναι διαρμονικές.

Για περισσότερες πληροφορίες στη θεωρία της ψευδο-Riemannian γεωμετρίας βλέπε ([22], [23], [44], [48]).

Κεφάλαιο 3

Επιφάνειες εκ Περιστροφής στον Χώρο Lorentz $\mathbf{E}_1^3$

3.1 Εισαγωγή

Έστω $\vec{r} : M^2 \longrightarrow E_1^3$ μία ισομετρική εμβύθιση μιας επιφάνειας εκ περιστροφής κλάσης C^3, στον 3-διάστατο Lorentz-Minkowski χώρο εφοδιασμένη με την επαγώμενη μετρική. Λέγοντας Lorentz-Minkowski χώρο E_1^3, εννοούμε τον χώρο R^3 εφοδιασμένο με την μετρική g η οποία δίνεται από την σχέση,

$$g = ds^2 = -dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2$$

όπου (x_0, x_1, x_2) είναι ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων του E_1^3. Έστω $\triangle$ ο τελεστής Laplace ως προς την επαγώμενη μετρική και $\vec{H}$ το διάνυσμα μέσης καμπυλότητας της M^2. Τότε ([9]):

$$\Delta\vec{r} = -2\vec{H} \tag{3.1.1}$$

Ένα γνωστό αποτέλεσμα, οφειλόμενο στον Takahashi ([49]), αναφέρει ότι οι ελαχιστικές επιφάνειες και οι σφαίρες, είναι οι μόνες επιφάνειες του E^3, που ικανοποιούν την συνθήκη

$$\Delta\vec{r} = \lambda\vec{r} \ , \ \ \lambda \in R.$$

Από την άλλη μεριά ο Garay ([26]), καθόρισε πλήρως τις επιφάνειες εκ περιστροφής στον E^3, των οποίων οι συντεταγμένες συναρτήσεις είναι ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή Laplace αυτών, δηλαδή

$$\Delta r^i = \lambda^i r^i.$$

Αργότερα, ο ίδιος συγγραφέας στην εργασία ([27]), μελέτησε τις υπερεπιφάνειες στον E^{n+1} για τις οποίες

$$\Delta \vec{r} = A\vec{r}\ ,\ \ A \in R^{n+1 \times n+1}. \tag{3.1.2}$$

Οι Dillen, Pas και Vestraelen στην εργασία ([19]), μελέτησαν και ταξινόμησαν τις επιφάνειες στον E^3, οι οποίες ικανοποιούν την σχέση

$$\Delta \vec{r} = A\vec{r} + B$$

όπου $A \in R^{3\times 3}$ και $B \in R^3$. Χρησιμοποιώντας τον τύπο (3.1.1), εύκολα συμπεραίνουμε, ότι οι ελαχιστικές επιφάνειες και οι σφαίρες του E^3, επαληθεύουν επίσης την συνθήκη

$$\Delta \vec{H} = A\vec{H}. \tag{3.1.3}$$

Οι Ferrandez, Garay και Lucas μελετώντας το αντίστροφο πρόβλημα στην εργασία ([24]), έδειξαν ότι οι επιφάνειες του E^3 που ικανοποιούν την (3.1.3) είναι ή ελαχιστικές, ή ένα ανοικτό τμήμα σφαίρας, ή ένας ορθός κυκλικός κύλινδρος. Οι Ferrandez και Lucas στην εργασία ([25]), ταξινόμησαν τις επιφάνειες M_s^2 του χώρου Lorentz E_1^3, με δείκτη $s = 0, 1$ οι οποίες ικανοποιούν την συνθήκη (3.1.3). Το βασικό συμπέρασμα είναι ότι η M_s^2 είναι μία επιφάνεια με μηδενική μέση καμπυλότητα παντού, είτε ένα ανοικτό τμήμα επιφάνειας ενός B-scroll ή ένα ανοικτό τμήμα των επιφανειών $S^1(r)\times R$, $H^1(r)\times R$, $S_1^1(r)\times R$, $H^2(r)$, $S_1^1(r)$.

Ακολουθώντας την συνθήκη του Garay (3.1.2), οι Kaimakamis G. και Papantoniou V. στην εργασία ([33]), μελέτησαν τις επιφάνειες εκ περιστροφής στον

3-διάστατο Lorentz-Minkowski χώρο, ικανοποιώντας την εξίσωση $\Delta^{II}\vec{r} = A\vec{r}$, όπου Δ^{II} είναι ο τελεστής Laplace ως προς την δεύτερη θεμελιώδη μορφή και A είναι ένας πραγματικός πίνακας 3×3.

Στην παρούσα διατριβή, γίνεται η ταξινόμηση όλων των επιφανειών εκ περιστροφής στον 3-διάστατο Lorentz-Minkowski χώρο E_1^3, οι οποίες ικανοποιούν την συνθήκη

$$\Delta^{III}\vec{r} = A\vec{r} \tag{3.1.4}$$

όπου Δ^{III} είναι ο τελεστής Laplace, ως προς την τρίτη θεμελιώδη μορφή αυτών των επιφανειών.

Αξίζει να σημειωθεί, ότι όταν ο περιβάλλων χώρος είναι ο 3-διάστατος Lorentz-Minkowski E_1^3, τότε κάθε επιφάνεια M_s^2 αυτού, μπορεί να εφοδιάζεται είτε με μία Riemannian μετρική (χωροειδή ή space-like επιφάνεια) είτε με μία Lorentzian μετρική (χρονοειδή ή time-like επιφάνεια) και ως εκ τούτου, μία πλουσιώτερη ταξινόμηση αυτών των επιφανειών είναι αναμενόμενη.

3.2 Προκαταρκτικά

Έστω $\gamma : I = (a, b) \subset R \to \Pi$ μία καμπύλη ενός επιπέδου Π του E_1^3 και έστω ε μία ευθεία γραμμή του Π, η οποία δεν τέμνει την καμπύλη γ. Μία επιφάνεια εκ περιστροφής M_s^2 στον E_1^3 είναι μία μη εκφυλισμένη επιφάνεια, που παράγεται από την περιστροφή της καμπύλης γ γύρω από τον άξονα ε.

Η επιφάνεια εκ περιστροφής M_s^2, με άξονα ε στον E_1^3, είναι αναλλοίωτη από την ομάδα των στερεών κινήσεων στον E_1^3, η οποία αφήνει αμετάβλητο κάθε σημείο του ε.

Αν ο άξονας ε είναι χωροειδής (space-like) (αντοίστοιχα χρονοειδής ή time-like), τότε υπάρχει ένας μετασχηματισμός Lorentz, υπό την επίδραση του οποίου ο άξονας ε μετασχηματίζεται στον x_1-άξονα ή x_2-άξονα (αντίστοιχα x_0-άξονα).

Ως εκ τούτου, χωρίς απώλεια της γενικότητας, δυνάμεθα να θεωρήσουμε ως άξονα περιστροφής τον x_2-άξονα (αντίστοιχα τον x_0-άξονα). Αν ο άξονας είναι φωτοειδής (light-like ή null), τότε μπορούμε να υποθέσουμε, ότι αυτός ο άξονας, είναι η ευθεία γραμμή η παραγόμενη από το διάνυσμα $(1,1,0)$ του επιπέδου Ox_0x_1.

Υποθέτουμε ότι ο άξονας περιστροφής, είναι ο x_2-άξονας (χωροειδής ή space-like) και η καμπύλη γ βρίσκεται, είτε στο x_1x_2-επίπεδο ή στο x_0x_2-επίπεδο. Τότε, μία παραμετρικοποίηση της γ είναι, είτε η $\gamma(u) = (0, f(u), g(u))$ ή η $\gamma(u) = (f(u), 0, g(u))$ $, u \in I$, αντίστοιχα. Οι συναρτήσεις f, g είναι διαφορίσιμες και η f είναι μία θετική συνάρτηση. Χωρίς απώλεια της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι u, είναι το μήκος τόξου της καμπύλης. Οι επιφάνειες εκ περιστροφής M_s^2 στον E_1^3, ως προς ένα σύστημα τοπικών καμπυλόγραμμων συντεταγμένων (u,v), θα δίνονται από τις σχέσεις ([8]):

$$\vec{r}(u,v) = \{f(u)sinhv, f(u)coshv, g(u)\} \tag{3.2.1}$$

ή

$$\vec{r}(u,v) = \{f(u)coshv, f(u)sinhv, g(u)\} \tag{3.2.2}$$

αντίστοιχα.

Στην περίπτωση, που ο άξονας περιστροφής είναι ο Ox_0-άξονας (χρονοειδής ή time-like) και η καμπύλη γ δίνεται από τη μορφή $\gamma(u) = (g(u), f(u), 0)$ και βρίσκεται στο x_0x_1-επίπεδο, η επιφάνεια εκ περιστροφής M_s^2 δίνεται από ([8]):

$$\vec{r}(u,v) = \{g(u), f(u)cosv, f(u)sinv\}, \ \ 0 \le v \le 2\pi. \tag{3.2.3}$$

Τέλος, αν ο άξονας περιστροφής είναι η ευθεία, η παραγόμενη από το διάνυσμα $(1,1,0)$ και η καμπύλη γ βρίσκεται στο x_0x_1-επίπεδο, τότε η επιφάνεια εκ περιστροφής M_s^2, μπορεί να παραμετρικοποιηθεί ως εξής:

$$\vec{r}(u,v) = \{f(u) + \frac{v^2}{2}h(u), g(u) + \frac{v^2}{2}h(u), h(u)v\}$$

όπου $h(u) = f(u) - g(u) \neq 0$, επειδή $f(u) \neq g(u), \forall u \in I$. Σημειώνουμε με $E, F, G,\ L, M, N$ τα θεμελιώδη ποσά πρώτης και δεύτερης τάξης, αυτών των επιφανειών. Αν $\phi = \phi(u, v)$ είναι μία διαφορίσιμη συνάρτηση κλάσης C^2 και Δ^{III} ο τελεστής Laplace, ως προς την τρίτη θεμελιώδη μορφή της M_s^2, τότε ([45]), ισχύει:

$$\begin{aligned}\triangle^{III}\phi \;=\; & -\frac{\sqrt{EG-F^2}}{LN-M^2}\Bigg[\Bigg(\frac{(GM^2-2FNM+EN^2)\,\phi_u}{(LN-M^2)\sqrt{EG-F^2}}- \\ & -\frac{(EMN-FLN+GLM-FM^2)\,\phi_v}{(LN-M^2)\sqrt{EG-F^2}}\Bigg)_u - \\ & -\Bigg(\frac{(EMN-FLN+GLM-FM^2)\,\phi_u}{(LN-M^2)\sqrt{EG-F^2}}-\frac{(EM^2-2FLM+GL^2)\,\phi_v}{(LN-M^2)\sqrt{EG-F^2}}\Bigg)_v\Bigg].\end{aligned} \tag{3.2.4}$$

Σημειώνουμε ότι, αν $\vec{F} = (f_1, f_2, f_3)$ είναι μία διανυσματική συνάρτηση κλάσης C^2, τότε

$$\Delta^{III}\vec{F} = (\Delta^{III}f_1, \Delta^{III}f_2, \Delta^{III}f_3). \tag{3.2.5}$$

3.3 Τα Κύρια Αποτελέσματα

Σ′ αυτή την παράγραφο, κάνουμε την ταξινόμηση των επιφανειών εκ περιστροφής M_s^2, οι οποίες ικανοποιούν την σχέση (3.1.4). Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις, ανάλογα με το εάν, οι επιφάνειες αυτές καθορίζονται από την (3.2.1) ή (3.2.3) εξίσωση, αντίστοιχα.

Πρώτη περίπτωση. Υποθέτουμε ότι η M_s^2 δίνεται από την (3.2.1) και ότι το u είναι η φυσική παράμετρος της καμπύλης περιστροφής. Τότε

$$f'^2(u) + g'^2(u) = 1\ ,\ \ \forall u \in I \tag{3.3.1}$$

$E = f'^2(u)+g'^2(u) = 1,\ \ F = 0,\ \ G = -f^2(u),\ \ EG-F^2 = -f^2(u) < 0\ \ \forall u \in I$

$$L = g'f'' - f'g'' \ , \ M = 0 \ , \ N = fg' \ , \ 2H = g'f'' - f'g'' - \frac{g'}{f}$$

Επομένως, όλες αυτές οι επιφάνειες θα είναι χρονοειδείς και $H = H(u,v)$, είναι η μέση καμπυλότητα αυτών των επιφανειών. Τέλος,

$$\Delta^{III}\vec{r} = \{\Delta^{III}\left(f(u)sinhv\right), \Delta^{III}\left(f(u)coshv\right), \Delta^{III}\left(g(u)\right)\}.$$

Εφόσον η σχέση (3.3.1) ισχύει, υπάρχει μία διαφορίσημη συνάρτηση (γωνία) $t = t(u)$ τέτοια ώστε

$$f'(u) = cost(u) \ , \ g'(u) = sint(u) \ , \forall u \in I.$$

Συνεπώς θα έχουμε

$$L = -t'(u) \ , \ N = f(u)sint(u) \ , \ 2H = -t'(u) - f^{-1}(u)sint(u). \qquad (3.3.2)$$

Υποθέτουμε ότι η επιφάνεια δεν έχει παραβολικά σημεία, δηλαδή

$$t'sint \neq 0 \ , \ \forall u \in I.$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.2.4) και (3.3.2) έχουμε

$$\begin{aligned}
\Delta^{III}\left(f(u)sinhv\right) &= \left(-Rsint + \frac{R'cost}{t'}\right) sinhv \\
\Delta^{III}\left(f(u)coshv\right) &= \left(-Rsint + \frac{R'cost}{t'}\right) coshv \\
\Delta^{III}\left(g(u)\right) &= Rcost + \frac{R'sint}{t'},
\end{aligned}$$

όπου $R = \dfrac{2H}{K} = -\dfrac{1}{t'} - \dfrac{f}{sint}$ και $R' = \dfrac{t''}{t'^2} - \dfrac{cost}{sint} + \dfrac{ft'cost}{sin^2 t}$. Επομένως

$$\begin{aligned}
\Delta^{III}\vec{r} = \Bigg(\left(-Rsint + \frac{R'cost}{t'}\right) sinhv, \left(-Rsint + \frac{R'cost}{t'}\right) coshv, \\
\left(Rcost + \frac{R'sint}{t'}\right)\Bigg). \qquad (3.3.3)
\end{aligned}$$

Έστω $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, 2, 3$ ένας 3×3 πίνακας με στοιχεία από το R. Η εξίσωση (3.1.4) μέσω των (3.2.1) και (3.3.3) δίνει το ακόλουθο σύστημα των διαφορικών εξισώσεων.

$$\left(-Rsint + \frac{R'cost}{t'}\right) sinhv = a_{11}fsinhv + a_{12}fcoshv + a_{13}g \quad (3.3.4)$$

$$\left(-Rsint + \frac{R'cost}{t'}\right) coshv = a_{21}fsinhv + a_{22}fcoshv + a_{23}g \quad (3.3.5)$$

$$Rcost + \frac{R'sint}{t'} = a_{31}fsinhv + a_{32}fcoshv + a_{33}g. \quad (3.3.6)$$

Συνεπώς, το πρόβλημα της ταξινόμησης των επιφανειών M_s^2 εκ περιστροφής, που δίνονται από την (3.2.1) και ικανοποιούν την (3.1.4), ανάγεται στην ολοκλήρωση αυτού του συστήματος των τριών συνήθων διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης.

Είναι αξιοσημείωτο, ότι αυτή η ταξινόμηση, εξαρτάται κατά κύριο λόγο από την συνάρτηση $t = t(u)$. Από την τελευταία εξίσωση (3.3.6), εύκολα συμπεραίνουμε ότι $a_{31} = a_{32} = 0$.

Από την άλλη μεριά, από τις (3.3.4) και (3.3.5) εύκολα συμπεραίνουμε ότι, $a_{13} = a_{23} = 0$. Έτσι, το σύστημα ισοδύναμα ανάγεται στο ακόλουθο:

$$\left(-Rsint + \frac{R'cost}{t'}\right) sinhv = a_{11}fsinhv + a_{12}fcoshv \quad (3.3.7)$$

$$\left(-Rsint + \frac{R'cost}{t'}\right) coshv = a_{21}fsinhv + a_{22}fcoshv \quad (3.3.8)$$

$$Rcost + \frac{R'sint}{t'} = a_{33}g. \quad (3.3.9)$$

Συγκρίνοντας τώρα τις εξισώσεις (3.3.7) και (3.3.8), συμπεραίνουμε ότι $a_{12} = a_{21} = 0$ και $a_{11} = a_{22} = \lambda$, $\lambda \in R$. Συνεπώς, αυτό το σύστημα των εξισώσεων, είναι ισοδύναμο ακόμα με το σύστημα

$$-Rsint + \frac{R'cost}{t'} = \lambda f \quad (3.3.10)$$

$$Rcost + \frac{R'sint}{t'} = \mu g \quad (3.3.11)$$

όπου $a_{33} = \mu, \mu \in R$.

Στη συνέχεια, μελετάμε αυτό το σύστημα, για τις διάφορες τιμές των σταθερών λ, μ.

Από την προηγηθείσα μέχρι τώρα μελέτη, φαίνεται πως ο πίνακας A ανάγεται τελικά σε διαγώνιο πίνακα δηλαδή, $A = \mathrm{diag}(\lambda, \lambda, \mu)$.

A. Έστω $\lambda = \mu = 0$, τότε, $A = \mathrm{diag}(0,0,0)$.
Αν πολλαπλασιάσουμε, την εξίσωση (3.3.10) με $sint$, την εξίσωση (3.3.11) με $-cost$ και προσθέσουμε έπειτα τις προκύπτουσες εξισώσεις, εύκολα παίρνουμε $R = 0$ ή ισοδύναμα $H = 0$, δηλαδή η επιφάνεια είναι ελαχιστική. (Ως εκ τούτου, η επιφάνεια εκ περιστροφής του E_1^3, που ικανοποιεί την (3.1.4), γιά την οποία $A = O_{3\times 3}$ είναι η ψευδοαλυσσοειδής επιφάνεια).

B. Έστω $\lambda = \mu \neq 0$, τότε $A = \mathrm{diag}(\lambda, \lambda, \lambda)$.
Το σύστημα των εξισώσεων (3.3.10) και (3.3.11), παίρνει τη μορφή

$$\frac{sint}{t'} + \frac{t''cost}{t'^3} - \frac{cos^2t}{t'sint} + \frac{f}{sin^2t} = \lambda f \tag{3.3.12}$$

$$\frac{-2cost}{t'} + \frac{t''sint}{t'^3} = \lambda g. \tag{3.3.13}$$

Από (3.3.13) έχουμε

$$t'' = \frac{t'^2}{sint}(\lambda g t' + 2cost). \tag{3.3.14}$$

Ως εκ τούτου, η εξίσωση (3.3.12) ανάγεται στην

$$\frac{1}{t'} + \lambda g cost + \frac{f}{sint} - \lambda f sint = 0. \tag{3.3.15}$$

Παραγωγίζοντας την (3.3.15) και χρησιμοποιώντας την (3.3.14), έχουμε την

$$\frac{ft'cost}{sint} + cost + \lambda g t' + \lambda g t' sin^2t + \lambda f t' cost sint = 0. \tag{3.3.16}$$

Αν πολλαπλασιάσουμε την (3.3.15) με $t'cost$ και προσθέσουμε την προκύπτουσα εξίσωση με την (3.3.16), εύκολα παίρνουμε την

$$\frac{ft'cost}{sint} + cost + \lambda g t' = 0. \tag{3.3.17}$$

Η εξίσωση (3.3.16), χρησιμοποιώντας την (3.3.17) δίνει

$$\lambda t'(fcost + gsint)sint = 0$$

από την οποία

$$fcost + gsint = 0$$

αφού από τις υποθέσεις μας

$$\lambda t' sint \neq 0.$$

Άρα, ουσιωδώς έχουμε την ακόλουθη διαφορική εξίσωση:

$$ff' + gg' = 0 \Rightarrow f^2 + g^2 = r^2, r \in R.$$

Συνεπώς, σ' αυτή την περίπτωση, οι επιφάνειες εκ περιστροφής, ικανοποιούν μία εξίσωση της μορφής

$$-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = r^2 \, , r \in R^+,$$

το οποίο σημαίνει ότι αυτές είναι οι ψευδοσφαίρες, $S_1^2(r)$, $r \in R^+$, του E_1^3.

C. Έστω $\lambda \neq 0$, $\mu = 0$, τότε $A = \mathrm{diag}(\lambda, \lambda, 0)$.
Το σύστημα των εξισώσεων (3.3.10) και (3.3.11), σε αυτή την περίπτωση, παίρνει τη μορφή

$$\frac{sint}{t'} + \frac{t''cost}{t'^3} - \frac{cos^2 t}{t'sint} + \frac{f}{sin^2 t} \;=\; \lambda f \tag{3.3.18}$$

$$\frac{-2cost}{t'} + \frac{t''sint}{t'^3} \;=\; 0. \tag{3.3.19}$$

Η εξίσωση (3.3.19) μπορεί να γραφεί ως

$$t'' = 2t'^2 \frac{cost}{sint}. \tag{3.3.20}$$

Από τις εξισώσεις (3.3.18) και (3.3.20) έχουμε

$$\frac{1}{t'} + \frac{f}{sint} - \lambda f sint = 0. \tag{3.3.21}$$

Παραγωγίζοντας τώρα την εξίσωση (3.3.21) και χρησιμοποιώντας την (3.3.20) παίρνουμε

$$\frac{ft'cost}{sin^2 t} + \lambda costsint + \lambda ft'cost + \frac{cost}{sint} = 0. \tag{3.3.22}$$

Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση (3.3.21) με $t'\frac{cost}{sint}$ έχουμε

$$\frac{ft'cost}{sin^2 t} - \lambda ft'cost + \frac{cost}{sint} = 0. \tag{3.3.23}$$

Η εξίσωση (3.3.22), με τη βοήθεια της (3.3.23) δίνει

$$2ft'\frac{cost}{sin^2 t} = -\frac{cost}{sint}. \tag{3.3.24}$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (3.3.23) και (3.3.24) έχουμε

$$ft'cost\left(\frac{1}{sin^2 t} + \lambda\right) = 0.$$

Διακρίνουμε τώρα τις ακόλουθες υποπεριπτώσεις:

(**i**) Αν $cost = 0$, τότε οι προκύπτουσες επιφάνειες εκ περιστροφής δίνονται από την εξίσωση (3.2.1) η οποία εν προκειμένω γίνεται:

$$\vec{r}(u,v) = (c_1 sinhv, c_1 coshv, u + c_2)$$

όπου $c_i \in R^+$, $i = 1, 2$. Αυτές οι επιφάνειες, είναι οι υπερβολικοί κύλινδροι Lorentz $S_1^1(c_1) \times R$.

(**ii**) Αν

$$\frac{1}{sin^2 t} + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda sin^2 t + 1 = 0$$

οπότε παραγωγίζοντας αυτή την εξίσωση, έχουμε ότι $2t'\lambda costsint = 0$, από την οποία συμπεραίνουμε, είτε την προηγούμενη υποπερίπτωση, ή $\lambda = 0$, το οποίο είναι μία αντίφαση.

D. Έστω $\lambda = 0$, $\mu \neq 0$, τότε $A = \mathrm{diag}(0,0,\mu)$.
Το σύστημα των εξισώσεων (3.3.10) και (3.3.11), ανάγεται στο

$$\frac{sint}{t'} + \frac{t''cost}{t'^3} - \frac{cos^2t}{t'sint} + \frac{f}{sin^2t} = 0 \tag{3.3.25}$$

$$\frac{-2cost}{t'} + \frac{t''sint}{t'^3} = \mu g. \tag{3.3.26}$$

Από την εξίσωση (3.3.26) έχουμε

$$t'' = \frac{t'^2}{sint}(\mu g t' + 2cost). \tag{3.3.27}$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (3.3.25) και (3.3.27) έχουμε:

$$ft'cost + costsint + \mu gt'cos^2tsint = 0. \tag{3.3.28}$$

Παραγωγίζοντας αυτή την εξίσωση και χρησιμοποιώντας την εξίσωση (3.3.26) λαμβάνουμε

$$\mu gt'sint + costsint + \mu gt'sin^3t + ft'cost - \mu costsin^3t = 0. \tag{3.3.29}$$

Συνδυάζοντας τώρα τις εξισώσεις (3.3.28) και (3.3.29) έχουμε

$$2gt' = cost. \tag{3.3.30}$$

Αν παραγωγίσουμε την εξίσωση (3.3.30) και χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση (3.3.27), έχουμε

$$3sin^2t + 2\mu g^2t'^2 + 4gt'cost = 0.$$

Από αυτή την εξίσωση και την (3.3.30) συμπεραίνουμε ότι

$$\left(\frac{1}{2}\mu - 1\right)cos^2t = -3.$$

Αυτή η σχέση, ισχύει μόνο για συγκεκριμένες τιμές του μ και της συνάρτησης $t = t(u)$ και όχι γιά κάθε $u \in I$. Κατά συνέπεια, δεν υπάρχουν επιφάνειες εκ περιστροφής, αυτού του τύπου σε αυτή την περίπτωση.

Ε. Έστω $\lambda \neq \mu$, $\lambda\mu \neq 0$, τότε $A = \mathrm{diag}(\lambda, \lambda, \mu)$.
Το σύστημα των εξισώσεων (3.3.10) και (3.3.11) παίρνει τη μορφή

$$\frac{sint}{t'} + \frac{t''cost}{t'^3} - \frac{cos^2t}{t'sint} + \frac{f}{sin^2t} - \lambda f \quad = \quad 0 \tag{3.3.31}$$

$$\frac{-2cost}{t'} + \frac{t''sint}{t'^3} - \mu g \quad = \quad 0. \tag{3.3.32}$$

Από την (3.3.32) έχουμε

$$t'' = \frac{t'^2}{sint}(\mu g t' + 2cost). \tag{3.3.33}$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (3.3.31) και (3.3.33) συμπεραίνουμε ότι:

$$\frac{1}{t'sint} + \frac{\mu g cost}{sint} + \frac{f}{sin^2t} - \lambda f = 0. \tag{3.3.34}$$

Παραγωγίζοντας αυτή την εξίσωση και χρησιμοποιώντας την (3.3.33) αποκτούμε

$$-\frac{2\mu g t'}{sin^2t} - \frac{2cost}{sin^2t} - \frac{2ft'cost}{sin^3t} + (\mu - \lambda)cost = 0. \tag{3.3.35}$$

Αν πολλαπλασιάσουμε την εξίσωση (3.3.34) με $\dfrac{2t'}{sint}$, την εξίσωση (3.3.35) με $-cost$ και αφαιρέσουμε έπειτα τις προκύπτουσες εξισώσεις, παίρνουμε

$$(\lambda - \mu)\frac{cos^2t}{t'} + 2(\lambda - 1)\frac{f}{sint} - \frac{2}{t'} = 0. \tag{3.3.36}$$

Παραγωγίζοντας αυτή την εξίσωση και χρησιμοποιώντας την εξίσωση (3.3.33), έχουμε

$$2(\mu + 1)cost + (\mu - \lambda)\mu g t' cos^2t - 2(\lambda - 1)\frac{ft'cost}{sint} + 2\mu g t' = 0. \tag{3.3.37}$$

Συνδυάζοντας τώρα τις εξισώσεις (3.3.36) και (3.3.37), έχουμε

$$2\mu cost + \{(\mu-\lambda)cos^2t + 2\}\mu g t' - (\mu-\lambda)cos^3t = 0. \qquad (3.3.38)$$

Αν πολλαπλασιάσουμε την (3.3.34) με $t'sint$ και την (3.3.38) με $cost$, έχουμε

$$\mu g t' cost = \lambda f t' sint - \frac{ft'}{sint} - 1$$

και

$$2\mu cos^2t + \{(\mu-\lambda)cos^2t + 2\}\mu g t' cost - (\mu-\lambda)cos^4t = 0$$

αντίστοιχα.

Αυτές οι δύο εξισώσεις, δίνουν ισοδύναμα την ακόλουθη εξίσωση:

$$2\mu cos^2t - (\mu-\lambda)cos^4t - \{2+(\mu-\lambda)cos^2t\}\{1+(1-\lambda sin^2t)\frac{ft'}{sint}\} = 0. \quad (3.3.39)$$

Από την εξίσωση (3.3.36) έχουμε

$$\frac{ft'}{sint} = \frac{1}{2(\lambda-1)}\{2+(\mu-\lambda)cos^2t\}. \qquad (3.3.40)$$

Η παράμετρος λ, δεν μπορεί να ισούται με το 1, διότι αν αυτό ισχύει, η εξίσωση (3.3.36) δίνει

$$(\mu-1)cos^2t + 2 = 0$$

το οποίο ισχύει μόνο για συγκεκριμένες τιμές των συναρτήσεων $t = t(u)$ και μ. Συνδυάζοντας τώρα τις σχέσεις (3.3.39) και (3.3.40) έχουμε τελικά

$$\lambda(\mu-\lambda)^2cos^4t - \{-\lambda^2 - 5\lambda + \lambda\mu - \mu + 2\}(\mu-\lambda)cos^2t + \{2\lambda(\lambda-3\mu) + 2(\lambda+3\mu)\} = 0.$$

Αυτή η εξίσωση όμως, ισχύει μόνο για συγκεκριμένες τιμές της συνάρτησης $t = t(u)$ και των σταθερών μ, λ. Συνεπώς, δεν υπάρχουν επιφάνειες εκ περιστροφής σε αυτή την περίπτωση.

Ύστερα από την παραπάνω ανάλυση μπορούμε να διατυπώσουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 3.1. *Έστω $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, μία διαφορίσιμη επιφάνεια εκ περιστροφής M_s^2 του E_1^3 κλάσσης C^3, η οποία είναι ορισμένη, επί ενός ανοικτού και συνεκτικού υποσυνόλου $D \subset \mathbb{R}^2$, η οποία δίνεται από την σχέση (3.2.1) και είναι ισομετρικά εμβυθισμένη στον E_1^3. Αν, $\Delta^{III}\vec{r} = A\vec{r}$, όπου A πίνακας τύπου 3×3 τότε η M_s^2 είναι είτε ελαχιστική επιφάνεια (ψευδοαλυσσοειδής), είτε ο κύλινδρος Lorentz $S_1^1(r) \times R$ είτε η ψευδόσφαιρα $S_1^2(r)$, θετικής πραγματικής ακτίνας r.*

Δεύτερη περίπτωση. Υποθέτουμε τώρα, ότι η εμβυθισμένη επιφάνεια M_s^2 στον E_1^3, δίνεται από τη σχέση (3.2.3). Το εφαπτόμενο διάνυσμα της περιστρεφόμενης καμπύλης, ικανοποιεί τη σχέση

$$< \gamma'(u), \gamma'(u) >= -g'^2(u) + f'^2 = \pm 1,\ u \in I.$$

Θεωρούμε ότι,

$$f'^2(u) - g'^2(u) = -1 \ ,\ \forall u \in I. \tag{3.3.41}$$

Αντίστοιχα μπορεί να μελετηθεί και η περίπτωση

$$f'^2(u) - g'^2(u) = +1 \ ,\ \forall u \in I.$$

Εύκολα συνάγουμε ότι,

$$L = f'g'' - f''g' \ ,\ M = 0 \ ,\ N = fg' \ ,\ 2H = g'f'' - f'g'' - \frac{g'}{f}.$$

Από την εξίσωση (3.3.41) συμπεραίνουμε ότι, υπάρχει μία διαφορίσημη συνάρτηση $\theta = \theta(u)$, τέτοια ώστε

$$f'(u) = sinh\theta(u) \ ,\ g'(u) = cosh\theta(u) \ ,\ \forall u \in I$$

και εφόσον η επιφάνεια δεν έχει παραβολικά σημεία

$$\theta'(u) \neq 0 \,, \forall u \in I.$$

Εφαρμόζοντας τον τελεστή Δ^{III} επί της σχέσης (3.2.3) έχουμε

$$\Delta^{III}\vec{r} = \left(Rsinh\theta + \frac{R'cosh\theta}{\theta'}, \left(Rcosh\theta + \frac{R'sinh\theta}{\theta'}\right)cosv, \left(Rcosh\theta + \frac{R'sinh\theta}{\theta'}\right)sinv\right) \tag{3.3.42}$$

όπου $R = \dfrac{1}{\theta'} + \dfrac{f}{cosh\theta}$ και $R' = -\dfrac{\theta''}{\theta'^2} + \dfrac{sinh\theta}{cosh\theta} - \dfrac{f\theta' sinh\theta}{cosh^2\theta}$.

Τώρα απαιτούμε ότι $\Delta^{III}\vec{r} = A\vec{r}$. Ως εκ τούτου, εύκολα συνάγεται ότι:

$$\begin{aligned} Rsinh\theta + \frac{R'cosh\theta}{\theta'} &= a_{11}g + a_{12}fcosv + a_{13}fsinv \\ \left(Rcosh\theta + \frac{R'sinh\theta}{\theta'}\right)cosv &= a_{21}g + a_{22}fcosv + a_{23}fsinv \\ \left(Rcosh\theta + \frac{R'sinh\theta}{\theta'}\right)sinv &= a_{31}g + a_{32}fcosv + a_{33}fsinv. \end{aligned}$$

Συνεπώς, το πρόβλημα της ταξινόμησης των επιφανειών εκ περιστροφής, οι οποίες ικανοποιούν τις σχέσεις (3.2.3) και (3.1.4), ανάγεται στην ολοκλήρωση αυτού του συστήματος των συνήθων διαφορικών εξισώσεων.

Εφαρμόζοντας όμοιες αλγεβρικές μεθόδους, που χρησιμοποιήθηκαν στην πρώτη περίπτωση, αυτό το σύστημα ανάγεται ισοδύναμα προς τις ακόλουθες εξισώσεις.

$$Rsinh\theta + \frac{R'cosh\theta}{\theta'} = \mu g \tag{3.3.43}$$

$$Rcosh\theta + \frac{R'sinh\theta}{\theta'} = \lambda f \tag{3.3.44}$$

όπου $a_{11} = \mu,\ a_{22} = a_{33} = \lambda,\ \ \lambda, \mu \in R$.

Διακρίνουμε τις ακόλουθες υποπεριπτώσεις, ως προς τις πραγματικές τιμές των λ, μ.

A. Έστω $\lambda = \mu = 0$, τότε $A = \text{diag}(0, 0, 0)$.

Αν πολλαπλασιάσουμε την (3.3.43) με $sinh\theta$, την (3.3.44) με $cosh\theta$ και έπειτα αφαιρέσουμε τις προκύπτουσες εξισώσεις, εύκολα αποκτούμε $R = 0$ ή ισοδύναμα $H = 0$. Ως εκ τούτου, οι επιφάνειες εκ περιστροφής του E_1^3 που ικανοποιούν τις (3.2.3) και (3.1.4), γιά τις οποίες $A = O_{3\times 3}$ είναι οι ψευδοαλυσοειδείς.

B. Έστω $\lambda = \mu \neq 0$, τότε $A = \mathrm{diag}(\lambda, \lambda, \lambda)$.

Το σύστημα των (3.3.43) και (3.3.44), παίρνει τη μορφή

$$\frac{2sinh\theta}{\theta'} - \frac{\theta'' cosh\theta}{\theta'^3} = \lambda g \tag{3.3.45}$$

$$\frac{cosh\theta}{\theta'} + \frac{sinh^2\theta}{\theta' cosh\theta} - \frac{\theta'' sinh\theta}{\theta'^3} + \frac{f}{cosh^2\theta} = \lambda f. \tag{3.3.46}$$

Από την (3.3.45) έχουμε

$$\theta'' = \frac{\theta'^2}{cosh\theta}\left(2sinh\theta - \lambda g\theta'\right). \tag{3.3.47}$$

Τότε η εξίσωση (3.3.46) δίνει

$$\frac{cosh\theta}{\theta'} - \frac{sinh^2\theta}{\theta' cosh\theta} + \frac{\lambda g sinh\theta}{cosh\theta} + \frac{f}{cosh^2\theta} - \lambda f = 0.$$

Πολλαπλασιάζουμε αυτή την εξίσωση με $cosh\theta$ και έχουμε:

$$\frac{1}{\theta'} + \lambda g sinh\theta + \frac{f}{cosh\theta} - \lambda f cosh\theta = 0. \tag{3.3.48}$$

Παραγωγίζοντας την (3.3.48) και με τη βοήθεια της (3.3.47) παίρνουμε

$$-\frac{sinh\theta}{cosh\theta} + \lambda g\theta' cosh\theta - \lambda f\theta' sinh\theta + \frac{\lambda g\theta'}{cosh\theta} - \frac{f\theta' sinh\theta}{cosh^2\theta} = 0.$$

Αν πολλαπλασιάσουμε την τελευταία εξίσωση με $cosh\theta$ και την (3.3.48) με $\theta' sinh\theta$, έχουμε

$$sinh\theta - \lambda g\theta' cosh^2\theta + \lambda f\theta' sinh\theta cosh\theta - \lambda g\theta' + \frac{f\theta' sinh\theta}{cosh\theta} = 0 \tag{3.3.49}$$

και

$$sinh\theta + \lambda g\theta' sinh^2\theta + \frac{f\theta' sinh\theta}{cosh\theta} - \lambda f\theta' sinh\theta cosh\theta = 0 \tag{3.3.50}$$

αντίστοιχα. Στη συνέχεια, προσθέτουμε τις εξισώσεις (3.3.49) και (3.3.50), οπότε παίρνουμε

$$sinh\theta - \lambda g\theta' + \frac{f\theta' sinh\theta}{cosh\theta} = 0. \tag{3.3.51}$$

Τέλος, η εξίσωση (3.3.49), αν σ' αυτή αντικατασταθεί η (3.3.51) δίνει

$$f sinh\theta - g cosh\theta = 0$$

ή ισοδύναμα,

$$ff' - gg' = 0$$

από την οποία με ολοκλήρωση, έχουμε

$$f^2(u) - g^2(u) = \pm r^2 \quad , r \in R^+.$$

Συνεπώς, η ζητούμενη εκ περιστροφής επιφάνεια έχει αναλυτική εξίσωση

$$-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = r^2,$$

η οποία είναι είτε η ψευδοσφαίρα $S_1^2(r)$ ή ο ψευδο-υπερβολικός χώρος $H_0^2(r)$, όπου η ακτίνα r είναι θετική πραγματική για την $S_1^2(r)$ ή φανταστική για τον $H_0^2(r)$.

C. Έστω $\lambda \neq 0$, $\mu = 0$, τότε $A = \mathrm{diag}(0, \lambda, \lambda)$.

Σ' αυτή την περίπτωση, το σύστημα των εξισώσεων (3.3.43) και (3.3.44), παίρνει τη μορφή

$$\frac{2sinh\theta}{\theta'} - \frac{\theta'' cosh\theta}{\theta'^3} = 0 \tag{3.3.52}$$

$$\frac{cosh\theta}{\theta'} + \frac{sinh^2\theta}{\theta' cosh\theta} - \frac{\theta'' sinh\theta}{\theta'^3} + \frac{f}{cosh^2\theta} = \lambda f. \tag{3.3.53}$$

Η εξίσωση (3.3.52) δύναται να γραφή ως

$$\theta'' = \frac{2\theta'^2 sinh\theta}{cosh\theta}. \tag{3.3.54}$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (3.3.53) και (3.3.54) έχουμε

$$\frac{1}{\theta'} + \frac{f}{cosh\theta} - \lambda f cosh\theta = 0. \tag{3.3.55}$$

Έπειτα παραγωγίζουμε ως προς u την εξίσωση (3.3.55) και έχουμε

$$-\frac{\theta''}{\theta'^2} + \frac{sinh\theta}{cosh\theta} - \frac{f\theta' sinh\theta}{cosh^2\theta} - \lambda sinh\theta cosh\theta - \lambda f\theta' sinh\theta = 0. \tag{3.3.56}$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (3.3.54) και (3.3.56) έχουμε

$$-\frac{sinh\theta}{cosh\theta} - \frac{f\theta' sinh\theta}{cosh^2\theta} - \lambda sinh\theta cosh\theta - \lambda f\theta' sinh\theta = 0. \tag{3.3.57}$$

Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση (3.3.55) με $\dfrac{\theta' sinh\theta}{cosh\theta}$ έχουμε

$$\frac{sinh\theta}{cosh\theta} + \frac{f\theta' sinh\theta}{cosh^2\theta} - \lambda f\theta' sinh\theta = 0. \tag{3.3.58}$$

Αν προσθέσουμε τις εξισώσεις (3.3.57) και (3.3.58), έχουμε

$$\frac{sinh\theta}{cosh\theta} = -\frac{2f\theta' sinh\theta}{cosh^2\theta}. \tag{3.3.59}$$

Με χρήση της (3.3.59), η εξίσωση (3.3.58) παίρνει τη μορφή

$$f\theta' sinh\theta \left(\frac{1}{cosh^2\theta} + \lambda\right) = 0.$$

Μπορούμε να διακρίνουμε τώρα τις ακόλουθες υποπεριπτώσεις:

(**i**) Αν $sinh\theta = 0$, τότε οι προκύπτουσες επιφάνειες εκ περιστροφής, δίνονται από την εξίσωση (3.2.3) η οποία εν προκειμένω γίνεται:

$$\vec{r}(u,v) = (u + c_1, c_2 cosv, c_2 sinv)$$

όπου $c_i \in R, \;\; i = 1, 2$. Οι επιφάνειες αυτές είναι κυλινδρικές.

(**ii**) Αν

$$\frac{1}{cosh^2\theta} + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda cosh^2\theta + 1 = 0$$

οπότε, παραγωγίζοντας αυτή την εξίσωση, έχουμε $2\lambda\theta' cosh\theta sin\theta = 0$, η οποία είναι η προηγούμενη υποπερίπτωση, οδηγούμαστε δηλαδή σε κυλινδρικές επιφάνειες.

D. Έστω $\lambda = 0$, $\mu \neq 0$, τότε $A = \mathrm{diag}(\mu, 0, 0)$.

Το σύστημα των εξισώσεων (3.3.43) και (3.3.44) παίρνει τη μορφή

$$\frac{2sinh\theta}{\theta'} - \frac{\theta'' cosh\theta}{\theta'^3} = \mu g \tag{3.3.60}$$

$$\frac{cosh\theta}{\theta'} + \frac{sinh^2\theta}{\theta' cosh\theta} - \frac{\theta'' sinh\theta}{\theta'^3} + \frac{f}{cosh^2\theta} = 0. \tag{3.3.61}$$

Η εξίσωση (3.3.61) δύναται να γραφεί ως

$$\theta'' = \frac{2\theta'^2}{cosh\theta}\left(2sinh\theta - \mu g\theta'\right). \tag{3.3.62}$$

Τότε η εξίσωση (3.3.60), μέσω της (3.3.62) δίνει

$$\frac{1}{\theta'} + \frac{f}{cosh\theta} + \mu g sinh\theta = 0. \tag{3.3.63}$$

Παραγωγίζοντας αυτή την εξίσωση παίρνουμε

$$-\frac{\theta''}{\theta'^2} + \frac{sinh\theta}{cosh\theta} - \frac{f\theta' sinh\theta}{cosh^2\theta} + \mu cosh\theta sinh\theta + \mu g\theta' cosh\theta = 0. \tag{3.3.64}$$

Συγκρίνοντας τις εξισώσεις (3.3.62) και (3.3.64) έχουμε

$$\frac{\mu g\theta'}{cosh\theta} - \frac{sinh\theta}{cosh\theta} - \frac{f\theta' sinh\theta}{cosh^2\theta} + \mu cosh\theta sinh\theta + \mu g\theta' cosh\theta = 0. \tag{3.3.65}$$

Αν πολλαπλασιάσουμε την εξίσωση (3.3.63), με $\theta'\dfrac{sinh\theta}{cosh\theta}$ έχουμε

$$\frac{\mu g\theta' sinh^2\theta}{cosh\theta} + \frac{sinh\theta}{cosh\theta} + \frac{f\theta' sinh\theta}{cosh^2\theta} = 0.$$

Προσθέτουμε τώρα την τελευταία εξίσωση, με την εξίσωση (3.3.65) και παίρνουμε

$$2g\theta' + sinh\theta = 0. \tag{3.3.66}$$

Αν παραγωγίσουμε την εξίσωση (3.3.66) και χρησιμοποιήσουμε την (3.3.62) παίρνουμε

$$3cosh^2\theta + 4g\theta' sinh\theta - 2\mu g^2\theta'^2 = 0.$$

Τέλος αυτή η εξίσωση με τη βοήθεια της (3.3.66) ανάγεται στην

$$\left(\frac{1}{2}\mu - 1\right) sinh^2\theta = +3$$

η οποία ισχύει μόνο για συγκεκριμένες τιμές της συνάρτησης $\theta = \theta(u)$ και του μ. Συνεπώς, σ' αυτή την περίπτωση, δεν υπάρχουν επιφάνειες εκ περιστροφής που να ικανοποιούν τις σχέσεις (3.1.4) και (3.2.3).

Ε. Έστω $\lambda \neq \mu, \lambda\mu \neq 0$, τότε $A = \mathrm{diag}(\mu, \lambda, \lambda)$.

Από το σύστημα των εξισώσεων (3.3.43) και (3.3.44) παίρνουμε

$$\frac{2sinh\theta}{\theta'} - \frac{\theta'' cosh\theta}{\theta'^3} = \mu g \tag{3.3.67}$$

$$\frac{cosh\theta}{\theta'} + \frac{sinh^2\theta}{\theta' cosh\theta} - \frac{\theta'' sinh\theta}{\theta'^3} + \frac{f}{cosh^2\theta} = \lambda f. \tag{3.3.68}$$

Η εξίσωση (3.3.67) εύκολα δίνει την

$$\theta'' = \frac{\theta'^2}{cosh\theta}\left(2sinh\theta - \mu g\theta'\right). \tag{3.3.69}$$

Αν αντικαταστήσουμε τώρα την εξίσωση αυτή στην (3.3.68) έχουμε

$$\frac{cosh\theta}{\theta'} + \frac{\mu g sinh\theta}{cosh\theta} - \frac{sinh^2\theta}{\theta' cosh\theta} + \frac{f}{cosh^2\theta} - \lambda f = 0.$$

Πολλαπλασιάζουμε αυτή την εξίσωση με $cosh\theta$, οπότε έχουμε

$$\frac{1}{\theta'} + \mu g sinh\theta + \frac{f}{cosh\theta} - \lambda f cosh\theta = 0. \tag{3.3.70}$$

Αν παραγωγίσουμε την εξίσωση (3.3.70) και χρησιμοποιήσουμε την (3.3.69), εύκολα έχουμε

$$-\frac{sinh\theta}{cosh\theta} + \frac{\mu g\theta'}{cosh\theta} - \frac{f\theta' sinh\theta}{cosh^2\theta} + \mu g\theta' cosh\theta - \lambda f\theta' sinh\theta + (\mu - \lambda) sinh\theta cosh\theta = 0. \tag{3.3.71}$$

Αν πολλαπλασιάσουμε την εξίσωση (3.3.70) με θ' έχουμε

$$\mu g\theta' = -\frac{1}{sinh\theta} - \frac{f\theta'}{cosh\theta\ sinh\theta} + \lambda f\theta'\ \frac{cosh\theta}{sinh\theta}. \tag{3.3.72}$$

Η εξίσωση (3.3.71), μέσω της σχέσης (3.3.72) ανάγεται στην

$$(\lambda-\mu-2)\cosh\theta+(\mu-\lambda)\cosh^3\theta+2(\lambda-1)f\theta'=0. \tag{3.3.73}$$

Αν παραγωγίσουμε αυτή την εξίσωση και χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση (3.3.69), έχουμε

$$\begin{aligned}(3\lambda-\mu-4)\sinh\theta+3(\mu-\lambda)\cosh^2\theta\sinh\theta+4(\lambda-1)\frac{f\theta'}{\cosh\theta}\sinh\theta-&\\ -2\mu(\lambda-1)\frac{f\theta'}{\cosh\theta}g\theta'=0.&\end{aligned} \tag{3.3.74}$$

Αυτή η εξίσωση, με χρήση των εξισώσεων (3.3.72) και (3.3.73) και υποθέτοντας ότι $\lambda\neq 1$, ανάγεται στην

$$\begin{aligned}-\lambda(\mu-\lambda)^2\cosh^6\theta+(\mu-\lambda)(-2\lambda^2+5\lambda+\mu+2\lambda\mu-2)\cosh^4\theta+&\\ +\big[2(\lambda-1)(3\lambda-\mu)+(\mu-\lambda)(\lambda^2-2\mu-\lambda\mu-4)-4\lambda\big]\cosh^2\theta+&\\ +\big[-4(\lambda-1)^2+(\mu-\lambda)(-3\lambda+\mu+4)+4\big]=0.&\end{aligned} \tag{3.3.75}$$

Αυτή η εξίσωση, ισχύει μόνο για συγκεκριμένες τιμές της συνάρτησης $\theta=\theta(u)$ και των σταθερών μ,λ. Συνεπώς, δεν υπάρχουν επιφάνειες εκ περιστροφής που να ικανοποιούν τις απαιτήσεις του προβλήματος σε αυτή την περίπτωση.
Στο συμπέρασμα αυτό φθάσαμε υποθέτοντας ότι $\lambda\neq 1$.
Αν λοιπόν υποθέσουμε τώρα ότι $\lambda=1$, η εξίσωση (3.3.73) ανάγεται στην

$$(\mu-1)\cosh^2\theta-(\mu+1)=0$$

η οποία επίσης ισχύει, γιά κάποιες συγκεκριμένες τιμές της συναρτησης $\theta=\theta(u)$ και του μ. Συνεπώς, και σ' αυτή την περίπτωση δεν υπάρχουν επιφάνειες εκ περιστροφής που να ικανοποιούν τις προϋποθέσεις του προβλήματος.

Η παραπάνω εκτεθείσα ανάλυση, μας οδηγεί στη διατύπωση του ακόλουθου θεωρήματος:

Θεώρημα 3.2. *Έστω $\vec{r} = r(u,v)$, μία διαφορίσιμη επιφάνεια εκ περιστροφής M_s^2 του E_1^3 κλάσης C^3, η οποία είναι ισομετρικά εμβυθισμένη στον E_1^3 και είναι ορισμένη επί ενός ανοικτού και συνεκτικού υποσυνόλου $D \subset \mathbb{R}^2$ και η οποία(επιφάνεια), ορίζεται από τη σχέση (3.2.3). Αν $\Delta^{III}\vec{r} = A\vec{r}$, όπου $A \in GL(3,R)$ τότε η M_s^2 είναι είτε ελαχιστική επιφάνεια είτε ο κύλινδρος Lorentz $S_1^1(r) \times \mathbb{R}$ είτε η ψευδοσφαίρα $S_1^2(r)$ θετικής πραγματικής ακτίνας είτε ο ψευδο-υπερβολικός χώρος $H_0^2(r)$, φανταστικής ακτίνας.*

Κεφάλαιο 4

Τελεστής Σχήματος των Υπερεπιφανειών $\mathbf{M}_2^3$ του Ψευδο-Ευκλείδειου Χώρου $\mathbf{E}_2^4$

4.1 Υπερεπιφάνειες των Ψευδο-Ευκλείδειων Χώρων.

Έστω $M_r^3(r=0,1,2,3)$, μία υπερεπιφάνεια του ψευδο- Ευκλείδειου χώρου $E_s^4(s=0,1,2,3,4)$. Τότε η M_r^3 δύναται να είναι είτε Riemannian είτε Lorentzian. Κατά συνέπεια αν $\overrightarrow{\xi}$ είναι το μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο αυτής τότε $<\overrightarrow{\xi},\overrightarrow{\xi}>=\varepsilon$, $\varepsilon=-1$ όταν αναφερόμαστε στην Riemannian περίπτωση και $\varepsilon=+1$, όταν αναφερόμμαστε στην Lorentzian περίπτωση.
Συμβολίζουμε με ∇ και $\widetilde{\nabla}$ τη συνοχή Levi-Civita των M_r^3 και E_s^4, αντίστοιχα. Για οποιαδήποτε διανυσματικά πεδία X, Y εφαπτόμενα στην M_r^3, ισχύει ο **τύπος του Gauss**

$$\tilde{\nabla}_X Y=\nabla_X Y+h\left(X,Y\right)\overrightarrow{\xi}, \tag{4.1.1}$$

όπου h είναι η δεύτερη θεμελιώδης μορφή της M_r^3.
Συμβολίζουμε με S τον τελεστή σχήματος της υπερεπιφάνειας αυτής δηλαδή

τον συμμετρικό ενδομορφισμό

$$S : T_p(M_r^3) \to T_p(M_r^3)$$

με τιμή

$$S(X) = -\widetilde{\nabla}_X \overrightarrow{\xi} \tag{4.1.2}$$

όπου, $\overrightarrow{\xi}$ είναι το μοναδιαίο καθετικό διανυσματικό της πεδίο. Η σχέση αυτή λέγεται και **τύπος του Weigarten**. Συνδυάζοντας τώρα τις σχέσεις (4.1.1) και (4.1.2) και παραγωγίζοντας ως προς X τη σχέση $< Y, \overrightarrow{\xi} >= 0$ εύκολα έχουμε

$$< S(X), Y >= \varepsilon h(X, Y).$$

Το διάνυσμα μέσης καμπυλότητας $\overrightarrow{H} = H\overrightarrow{\xi}$, με $H = \frac{1}{3\varepsilon} trS$, είναι ένα καλώς ορισμένο κάθετο διανυσματικό πεδίο της M_r^3.
Η **εξίσωση Codazzi** δίνεται από τη σχέση

$$(\nabla_X S)Y = (\nabla_Y S)X \tag{4.1.3}$$

και η **εξίσωση Gauss** βλέπε ([45]), [O' Neil 1983] από τη σχέση

$$R(X, Y)Z =< S(Y), Z > S(X)- < S(X), Z > S(Y) \tag{4.1.4}$$

όπου

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z. \tag{4.1.5}$$

Σε μία υπερεπιφάνεια M_r^3 του E_s^4 το διανυσματικό πεδίο μέσης καμπυλότητας είναι **αρμονικό** αν

$$\triangle\overrightarrow{H} = \overrightarrow{0}, \tag{4.1.6}$$

όπου Δ ο τελεστής Laplace. Κάθε τέτοια επιφάνεια λέγεται **διαρμονική επιφάνεια**.
Η συνθήκη αυτή αποδεικνύεται ότι είναι ισοδύναμη προς την

$$\triangle\overrightarrow{H} = \{2S(\nabla H) + 3\varepsilon H(\nabla H)\} + \{\triangle H + \varepsilon H trS^2\}\overrightarrow{\xi} = \overrightarrow{0} \tag{4.1.7}$$

βλέπε ([12]), [B.-Y.Chen and S.Ishikawa 1991].
Κατά συνέπεια για να είναι η υπερεπιφάνεια M_r^3 του E_s^4 διαρμονική θα πρέπει να ισχύουν ταυτοχρόνως οι ακόλουθες σχέσεις

$$S(\nabla H) = -\varepsilon\frac{3H}{2}(\nabla H) \tag{4.1.8}$$

$$\triangle H + \varepsilon H tr S^2 = 0. \tag{4.1.9}$$

Σημειώνεται ότι οι συνθήκες αυτές είναι ικανές και αναγκαίες για τη διαρμονικότητα της υπερεπιφάνειας.
Τέλος, υπενθυμίζεται ότι η τιμή του τελεστή Laplace Δ πάνω σε διαφορίσιμες συναρτήσεις f της M είναι

$$\Delta f = -\sum_{i=1}^{3}\varepsilon_i(e_i e_i f - \nabla_{e_i} e_i f) \tag{4.1.10}$$

βλέπε ([12]), όπου $\{e_i\}_{i=1}^3$ είναι ένα τοπικό **ορθοκανονικό πλαίσιο** του $T_p(M_r^3)$, με $< e_i, e_i >= \varepsilon_i = \pm 1$.

Στη συνέχεια αναφερόμαστε σε μερικές επιπλέον έννοιες οι οποίες παίζουν σημαντικό ρόλο σ΄ αυτή τη διατριβή.
Θεωρούμε τον πραγματικό 4-διάστατο χώρο R^4 με τη συνήθη βάση $\{e_i\}_{i=1}^4$.
Ας συμβολίσουμε με $<,>$ το εσωτερικό γινόμενο που εφοδιάζουμε τον R^4, δηλαδή την διγραμμική απεικόνιση,

$$<,>: T_p(M_r^3) X T_p(M_r^3) \rightarrow R.$$

Ας υποθέσουμε ότι το εσωτερικό αυτό γινόμενο δεν είναι θετικά ορισμένο και ότι η παράστασή του ως προς τη βάση $e^i \otimes e^j$; $i, j = 1, ..., 4$ είναι ο 4×4 διαγώνιος πίνακας με στοιχεία $(-1, +1, -1, +1)$.
Ο χώρος R^4 με αυτή τη μετρική, ονομάζεται 4-διάστατος ψευδο- Ευκλείδειος χώρος και συμβολίζεται με E_2^4, λέμε δε ότι η μετρική του είναι τύπου $(-, +, -, +)$.

Αντίστοιχα μια υπερεπιφάνεια του E_2^4, εφόσον επάγεται εσωτερικό γινόμενο τύπου $(-,+,-)$ συμβολίζεται ως M_2^3.

Ένα μη μηδενικό διάνυσμα X στον E_s^4 ονομάζεται **χρονοειδές** (**time-like**), **χωροειδές** (**space-like**), ή **φωτοειδές** (**light-like**) αν το εσωτερικό γινόμενο $< X, X >$ είναι αρνητικό, θετικό, ή μηδέν αντίστοιχα. Το μηδενικό διάνυσμα θεωρείται ότι είναι **χωροειδές** (**space-like**) διάνυσμα.

Μια μη εκφυλισμένη υπερεπιφάνεια M_r^3 του ψευδο-Ευκλείδειου χώρου E_s^4, δύναται να είναι εφοδιασμένη με μια Riemannian ή με μια Lorentzian δομή, σύμφωνα με το αν η μετρική g, η επαγώμενη επί της M_r^3 από τη μετρική του E_s^4, είναι θετικά ή μη θετικά ορισμένη.

Στην πρώτη περίπτωση ένα κάθετο διάνυσμα στην M_r^3 είναι **χρονοειδές** (**time-like**), ενώ στη δεύτερη περίπτωση είναι **χωροειδές** (**space-like**).

Έστω $[M_2^3, (-,+,-)]$ μια υπερεπιφάνεια της ψευδο-Ευκλείδειας πολλαπλότητας $[E_2^4, (-,+,-,+)]$. Σε αυτή τη περίπτωση $< \overrightarrow{\xi}, \overrightarrow{\xi} >= +1$, δηλαδή το $\overrightarrow{\xi}$ είναι ένα χωροειδές διάνυσμα, όπου $\overrightarrow{\xi}$ είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα του χώρου $T_p(M_2^3)$, $P \in M_2^3$, δηλαδή $\overrightarrow{\xi} \in T_p(M_2^3)^{\perp}$.

Έστω $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$, μία ορθοκανονική βάση του $T_p(M_2^3)$. Τότε, ως γνωστόν, μπορούμε πάντοτε να κατασκευάσουμε μία **ψευδο-ορθοκανονική** βάση $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ αυτού, όπου

$$u_1 = \frac{e_1 + e_2}{\sqrt{2}}, \qquad u_2 = \frac{e_2 - e_1}{\sqrt{2}}, \qquad u_3 = e_3$$

και για την οποία ισχύουν οι σχέσεις

$< u_1, u_1 >=< u_2, u_2 >=< u_1, u_3 >=< u_2, u_3 >= 0,$

$< u_1, u_2 >= +1, \;\; < u_3, u_3 >= -1,$

δηλαδή τα διανύσματα u_1, u_2 να είναι φωτοειδή και το u_3 χρονοειδές

Ο τελεστής σχήματος S της υπερεπιφάνειας M_2^3, είναι ένας αυτοσυζυγής ενδομορφισμός του $T_p(M_2^3)$ για κάθε $P \in M_2^3$, ικανοποιεί δηλαδή τη σχέση

$$< S(X), Y >=< X, S(Y) > . \tag{4.1.11}$$

Στην προκειμένη περίπτωση τονίζουμε ότι, ο τελεστής σχήματος κάθε υποπολλαπλότητας Riemann είναι πάντοτε διαγωνοποιήσιμος. Όμως, όπως αποδεικνύεται και σ' αυτή την εργασία, αυτό δεν ισχύει για την περίπτωση του τελεστή σχήματος των ψευδο-Riemannian υποπολαπλοτήτων.

Πράγματι, εφόσον ο τελεστής σχήματος S είναι ένας αυτοσυζυγής ενδομορφισμός του $T_p(M_2^3)$, θα επιχειρήσουμε να βρούμε όλες τις κανονικές του μορφές ως προς κατάλληλες βάσεις.

Αν λοιπόν συμβολίσουμε με $[S]$ και $[G]$ τις αναπαραστάσεις (πίνακες) των απεικονίσεων S και $<,>$ ως προς τυχαία βάση $\mathcal{B}$, του $T_p(M_2^3)$, τότε εύκολα μπορεί να δείξει κανείς (είναι θέμα λογισμού πινάκων) ότι

$$[G][S] = [S]^t[G]. \tag{4.1.12}$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα $[S]$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$\det([S] - \lambda I_3) = 0. \tag{4.1.13}$$

Αυτή η εξίσωση έχει τρείς ιδιοτιμές γενικώς, συμβολιζόμενες με λ_i, $i = 1, 2, 3$.

Έστω v_i, E_{λ_i}, $i = 1, 2, 3$ τα ιδιοδιανύσματα και οι ιδιόχωροι αντίστοιχα της ιδιοτιμής λ_i.

Θα πρέπει εδώ να τονισθεί ότι τα ιδιοδιανύσματα v_i, $i = 1, 2, 3$ δεν συγκροτούν κατ' ανάγκη βάση του $T_p(M_2^3)$. Πράγματι, αυτό συμβαίνει όταν η **γεωμετρική** πολλαπλότητα ($\dim E_{\lambda_i}$) είναι μικρότερη από την **αλγεβρική** πολλαπλότητα της αντίστοιχης ιδιοτιμής. Σ' αυτές τις περιπτώσεις, δεν αρκούν τα ιδιοδιανύσματα ώστε να συγκροτήσουν βάση του χώρου.

Έτσι, για να κατασκευάσουμε μια βάση του χώρου, αρχίζουμε με ένα ιδιοδιάνυσμα, αντίστοιχο της ιδιοτιμής λ_i ως σημείο αναφοράς και μετά προσθέτουμε καταλλήλως, περισσότερα διανύσματα τα οποία δεν είναι ιδιοδιανύσματα αντίστοιχα του λ_i.

Το πρόβλημα βέβαια που τίθεται σ' αυτές τις περιπτώσεις, είναι ο προσδιορισμός κάθε φορά, της **φύσης** αυτών των διανυσμάτων που απαιτούνται.

Στις επόμενες παραγράφους, βρίσκουμε όλες τις δυνατές κανονικές μορφές των S και G εξετάζοντας τις διάφορες τιμές των λ_i και τη φύση των διανυσμάτων v_i.

Ακριβέστερα, στη δεύτερη παράγραφο βρίσκουμε την κανονική μορφή των S και G αν οι ιδιοτιμές είναι διαφορετικές μεταξύ τους. Σε αυτή την περίπτωση αποδεικνύουμε ότι τα ιδιοδιανύσματα v_i συνιστούν μια ορθοκανονική βάση του $T_p(M_2^3)$ και αποδεικνύουμε ότι κανένα από αυτά τα ιδιοδιανύσματα δεν μπορεί να είναι **φωτοειδές** (**light-like**).

Στην τρίτη παράγραφο, υποθέτουμε ότι μία εκ των ριζών της (4.1.13) δηλαδή μια ιδιοτιμή, έχει πολλαπλότητα δύο. Τότε διάφορες περιπτώσεις εμφανίζονται οι οποίες μελετώνται ξεχωριστά.

Ειδικώτερα στην περίπτωση αυτή, τα ιδιοδιανύσματα v_i, είτε συγκροτούν μία ορθοκανονική βάση είτε μία ψεύδο-ορθοκανονική βάση, δηλαδή μια βάση η οποία περιέχει και **φωτοειδή** (**light-like**) διανύσματα και ικανοποιεί τις συνθήκες

$$< v_1, v_1 >=< v_2, v_2 >=< v_1, v_3 >=< v_2, v_3 >= 0,$$
$$< v_1, v_2 >= +1, < v_3, v_3 >= -1 \qquad (4.1.14)$$

για v_1, v_2 **φωτοειδή** (**light-like**) διανύσματα και v_3 ένα **χρονοειδές** (**time-like**) διάνυσμα.

Στην τέταρτη παράγραφο υποθέτουμε ότι η εξίσωση (4.1.13) έχει μία πραγματική ρίζα πολλαπλότητας τρία και λύνουμε το πρόβλημα για τις διάφορες περιπτώσεις οι οποίες εμφανίζονται.

Τελικά στην πέμπτη παράγραφο, υποθέτουμε ότι η εξίσωση (4.1.13) έχει μία πραγματική και δύο συζυγείς μιγαδικές ρίζες. Σ' αυτή τη περίπτωση ο μόνος ιδιοχώρος τον οποίο θεωρούμε και μελετάμε είναι ο αντίστοιχος προς τη πραγματική ρίζα (καθώς δεν μελετάμε μιγαδικούς ιδιοχώρους). Ως εκ τούτου, σ' αυτή τη περίπτωση τα ιδιοδιανύσματα συγκροτούν, είτε μία ορθοκανονική, είτε μία ψεύδο-ορθοκανονική βάση και λύνουμε το πρόβλημα.

Στη συνέχεια αναφέρουμε το βασικό θεώρημα αυτού του κεφαλαίου.

Θεώρημα 4.1. *Αν S είναι ο τελεστής σχήματος της υπερεπιφάνειας M_2^3 της ψευδο-Ευκλείδειας πολλαπλότητας E_2^4, τότε υπάρχουν ορθοκανονικά ή ψευδο-ορθοκανονικά πλαίσια ως προς τα οποία οι κανονικές μορφές των S και G δίνονται από τους πίνακες*

(I)

$$[S]=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix},\quad [G]=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & +1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix},\ \lambda_i\in R$$

(II)

$$[S]=\begin{pmatrix}\lambda & \mu & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \nu\end{pmatrix},\quad [G]=\begin{pmatrix}0 & +1 & 0\\ +1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix},\ \lambda,\mu,\nu\in R$$

(III)

$$[S]=\begin{pmatrix}\lambda & \mu & \nu\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & -\nu & \lambda\end{pmatrix},\quad [G]_{=}\begin{pmatrix}0 & +1 & 0\\ +1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix},\ \lambda,\mu,\nu\in R$$

$$(IV)$$

$$[S] = \begin{pmatrix} \mu & \nu & 0 \\ -\nu & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \nu \neq 0, \quad [G] = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \ \lambda, \mu, \nu \in R$$

Οι πίνακες G, του μετρικού τανυστή για τις περιπτώσεις (I), (IV) αναφέρονται σε μια ορθοκανονική βάση του $T_p(M_2^3)$, ενώ για τις περιπτώσεις (II), (III) αναφέρονται σε μια ψεύδο-ορθοκανονική βάση.

Απόδειξη. Η απόδειξη του θεωρήματος αυτού είναι αρκετά εκτενής. Για να γίνει κατανοητή την κατανείμαμε σε τέσσερεις παραγράφους, ανάλογα με τη φύση των ιδιοτιμών του τελεστή σχήματος, σε κάθε μια απο τις οποίες αποδεικνύουμε και μια περίπτωση (Πρόταση) του θεωρήματος.

4.2 Περίπτωση I. Οι Ιδιοτιμές του S είναι Διαφορετικές Μεταξύ τους.

Όπως αναφέραμε προηγουμένως, αν θεωρήσουμε τυχαία βάση του χώρου $T_p(M_2^3)$, τότε οι ιδιοτιμές του τελεστή σχήματος S ως προς αυτή τη βάση είναι οι ρίζες της εξίσωσης (4.1.13).

Υποθέτουμε ότι αυτή η εξίσωση έχει τρεις πραγματικές και διακεκριμένες ιδιοτιμές λ_i, $i = 1, 2, 3$ και έστω v_i, $i = 1, 2, 3$ τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα.

Έστω $\mathcal{B} = \{v_i\}$, $i = 1, 2, 3$ η βάση η οποία συγκροτείται από αυτά τα ιδιοδιανύσματα. Τότε, ως γνωστόν, ο πίνακας $[S]$ ως προς αυτή τη βάση είναι διαγωνοποιήσιμος, αφού $S(v_i) = \lambda_i v_i$, $i = 1, 2, 3$ δηλαδή

$$[S]_{\mathcal{B}} = A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \ \lambda_i \in R \tag{4.2.1}$$

Έπειτα, λαμβάνουμε τον πίνακα G του συναλλοίωτου τανυστικού πεδίου $<,>$, ο οποίος γιά κάθε $P \in M_2^3$ δίνει το εσωτερικό γινόμενο $<,>$, το οποίο είναι μία διγραμμική μορφή πάνω στον χώρο $T_p(M_2^3)$, με τιμή

$$< u, v >= -u^1v^1 + u^2v^2 - u^3v^3. \tag{4.2.2}$$

Τα ερωτήματα τώρα τα οποία τίθενται είναι τα ακόλουθα:

(**i**) Ποιά είναι η φύση των διανυσμάτων v_i, $i = 1, 2, 3$.

(**ii**) Ποιός είναι ο πίνακας G ως προς αυτή τη βάση.

Πρώτον είναι φανερό ότι ο πίνακας G, εξαρτάται, γενικώς, από τη φύση των διανυσμάτων v_i, $i = 1, 2, 3$.

Επειδή ο τελεστής S είναι αυτοσυζυγής, θα έχουμε

$$< v_i, S(v_j) >=< S(v_i), v_j >, \ \forall \ v_i, v_j$$

και επειδή $\quad S(v_i) = \lambda_i v_i$, $S(v_j) = \lambda_j v_j$, έχουμε

$$< v_i, \lambda_j v_j >=< \lambda_i v_i, v_j >,$$

$$\text{ή} \qquad \lambda_j < v_i, v_j >= \lambda_i < v_i, v_j >,$$

$$\text{ή ακόμη} \qquad (\lambda_j - \lambda_i) < v_i, v_j >= 0, \ \ i \neq j.$$

Όμως, από την υπόθεση $\lambda_i \neq \lambda_j$ όταν $i \neq j$, άρα

$$< v_i, v_j >= 0, \ \ i \neq j. \tag{4.2.3}$$

Δείξαμε λοιπόν πως τα διανύσματα v_i, $i = 1, 2, 3$ είναι κάθετα μεταξύ τους. Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι κανένα από αυτά τα διανύσματα δεν μπορεί να είναι φωτοειδές.

Πράγματι, αν π.χ. το v_2 είναι ένα **φωτοειδές** διάνυσμα, τότε από τη σχέση (4.2.3) για $i = 2$ και $j = 1, 3$ έχουμε

$$< v_1, v_2 >= 0 \ \text{ και } \ < v_2, v_3 >= 0.$$

Κατά συνέπεια τα διανύσματα v_1, v_3 ανήκουν στον κάθετον χώρο $v_2^{\perp}$, του v_2. Άρα δεν θα ήταν γραμμικώς ανεξάρτητα, πράγμα το οποίο είναι άτοπο.

Επομένως, οι μόνες δυνατές περιπτώσεις για τη φύση των διανυσμάτων v_i, δεδομένης της σχέσης (4.2.2), είναι, ένα εξ' αυτών να είναι **χωροειδές** και τα υπόλοιπα δύο διανύσματα, να είναι **χρονοειδή**.

Γιά παράδειγμα αν το v_2 είναι χωροειδές και τα v_1, v_3 χρονοειδή διανύσματα, τότε

$$< v_2, v_2 >= +1, \ \ < v_1, v_1 >=< v_3, v_3 >= -1,$$

$$< v_1, v_2 >=< v_2, v_3 >=< v_1, v_3 >= 0 \tag{4.2.4}$$

Έτσι, τα διανύσματα $\{v_i\}$, $i = 1, 2, 3$ συγκροτούν μία **ορθοκανονική βάση** του $T_p(M_2^3)$ και ως εκ τούτου, ο πίνακας G του εσωτερικού γινομένου $<, >$ ως προς αυτή τη βάση είναι

$$[G]_{\mathcal{B}} \ = \ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4.2.5}$$

Συνεπώς, αποδείξαμε την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 4.1 *Αν S είναι ο τελεστής σχήματος της υπερεπιφάνειας M_2^3 του E_2^4 και η εξίσωση (4.1.13) έχει τρείς πραγματικές και διακεκριμένες ιδιοτιμές, τότε κανένα από τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα δεν δύναται να είναι φωτοειδές και ως εκ τούτου αυτά τα ιδιοδιανύσματα συγκροτούν μία ορθοκανονική βάση. Επιπλέον, οι κανονικές μορφές του S και του εσωτερικού γινομένου $<, >$, ως προς αυτή τη βάση, δίνονται από τους πίνακες (4.2.1) και (4.2.5) αντίστοιχα.*

4.3 Περίπτωση ΙΙ. Μία Ιδιοτιμή του S είναι Πολλαπλότητας Δύο

Υποθέτουμε ότι ο πίνακας A του τελεστή S έχει μία πραγματική ρίζα λ πολλαπλότητας δύο, και μια απλή πραγματική ρίζα λ_3, $(\lambda \neq \lambda_3)$.

Έστω E_λ, E_{λ_3} οι ιδιόχωροι οι αντίστοιχοι των ιδιοτιμών λ και λ_3.

Τότε η διάσταση του E_λ είναι 1, ή 2 και η διάσταση του E_{λ_3} είναι 1.

Υποπερίπτωση 4.3.1: Θεωρούμε την περίπτωση στην οποία έχουμε $\mathbf{dim}E_\lambda = 1$ και $\mathbf{dim}E_{\lambda_3} = 1$.

Έστω v_1, v_2 διανύσματα του $T_p(M_2^3)$ τέτοια ώστε $E_\lambda = \text{span}\{v_1\}$, $E_{\lambda_3} = \text{span}\{v_2\}$. Θα προσδιορίσουμε πρώτα τη φύση των διανυσμάτων v_1, v_2. Έπειτα προσθέτοντας ένα τρίτο κατάλληλο διάνυσμα, έστω v_3 θα κατασκευάσουμε μία βάση $\{v_1, v_2, v_3\}$, για τον χώρο $T_p(M_2^3)$.

Πρώτα, αποδεικνύουμε ότι $< v_1, v_2 >= 0$. Πράγματι, εφαρμόζοντας τη μέθοδο της προηγούμενης παραγράφου και δεδομένου ότι $\lambda \neq \lambda_3$, εύκολα συμπεραίνουμε ότι:

$$< v_1, v_2 >= 0.$$

A. Έστω ότι το v_1 είναι **χρονοειδές** (**time-like**) διάνυσμα και τα v_2, v_3 είναι **φωτοειδή** (**light-like**) διανύσματα. Τότε
$< v_1, v_1 >= -1$, $< v_2, v_3 >= +1$,
$< v_1, v_2 >=< v_1, v_3 >=< v_2, v_2 >=< v_3, v_3 >= 0$.
Έτσι έχουμε κατασκευάσει μία **ψευδο-ορθοκανονική** βάση $\mathcal{U} = \{v_1, v_2, v_3\}$. Ως εκ τούτου, ο πίνακας αναπαράστασης $G = (g_{ij})_{\mathcal{U}}$, όπου $g_{ij} = g(v_i, v_j)$, του

μετρικού τανυστή είναι

$$[G]_{\mathcal{U}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \\ 0 & +1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.3.1}$$

Έστω $S : T_p(M_2^3) \to T_p(M_2^3)$, ο τελεστής σχήματος της M_2^3 και ότι η κανονική του μορφή ως προς την ψευδο-ορθοκανονική βάση $\mathcal{U}$ που κατασκευάσαμε είναι ο πίνακας

$$[S]_{\mathcal{U}} = A = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{pmatrix}$$

Κάνοντας χρήση του γεγονότος ότι ο S είναι ένας αυτοσυζυγής ενδομορφισμός, μπορούμε να εφαρμόσουμε τη σχέση (4.1.12) και τότε έχουμε

$$[A]^t[G] = [G][A]$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{21} & \lambda_{31} \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} & \lambda_{32} \\ \lambda_{13} & \lambda_{23} & \lambda_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \\ 0 & +1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \\ 0 & +1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{pmatrix}$$

ή

$$\begin{pmatrix} -\lambda_{11} & \lambda_{31} & \lambda_{21} \\ -\lambda_{12} & \lambda_{32} & \lambda_{22} \\ -\lambda_{13} & \lambda_{33} & \lambda_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_{11} & -\lambda_{12} & -\lambda_{13} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \end{pmatrix}$$

Από την ισότητα αυτή των πινάκων έχουμε:

$$\lambda_{31} = -\lambda_{12}, \quad \lambda_{13} = -\lambda_{21}, \quad \lambda_{33} = \lambda_{22}.$$

Συνεπώς ο πίνακας A λαμβάνει την απλούστερη μορφή

$$[S]_{\mathcal{U}} = A = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & -\lambda_{21} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ -\lambda_{12} & \lambda_{32} & \lambda_{22} \end{pmatrix}$$

Από την άλλη μεριά το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A είναι:

$$f(t) = t^3 - tr(A)t^2 + (A_{11} + A_{22} + A_{33})t - det(A)$$

όπου

$$tr(A) = \lambda_{11} + 2\lambda_{22}$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{32} & \lambda_{22} \end{vmatrix} = \lambda_{22}^2 - \lambda_{23}\lambda_{32}$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} \lambda_{11} & -\lambda_{21} \\ -\lambda_{12} & \lambda_{22} \end{vmatrix} = \lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}\lambda_{21}$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{vmatrix} = \lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}\lambda_{21}$$

$$det(A) = \lambda_{11}\lambda_{22}^2 - \lambda_{11}\lambda_{23}\lambda_{32} - 2\lambda_{12}\lambda_{21}\lambda_{22} - \lambda_{12}^2\lambda_{23} - \lambda_{21}^2\lambda_{32}.$$

Τελικά, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A λαμβάνει τη μορφή

$$f(t) = t^3 - (\lambda_{11} + 2\lambda_{22})t^2 + (2\lambda_{11}\lambda_{22} - 2\lambda_{12}\lambda_{21} - \lambda_{23}\lambda_{32} + \lambda_{22}^2)t$$

$$-(\lambda_{11}\lambda_{22}^2 - \lambda_{11}\lambda_{23}\lambda_{32} - 2\lambda_{12}\lambda_{21}\lambda_{22} - \lambda_{12}^2\lambda_{23} - \lambda_{21}^2\lambda_{32}). \tag{4.3.2}$$

Εφόσον όμως από την υπόθεση ο A έχει μία πραγματική ρίζα λ πολλαπλότητας δύο και μία απλή πραγματική ρίζα λ_3, τό $f(t)$ γράφεται και στη μορφή:

$$f(t) = (t - \lambda)^2 (t - \lambda_3)$$

ή ισοδύναμα:

$$f(t) = t^3 - (2\lambda + \lambda_3)t^2 + (\lambda^2 + 2\lambda\lambda_3)t - \lambda^2\lambda_3. \tag{4.3.3}$$

Συγκρίνοντας τώρα τα πολυώνυμα (4.3.2) και (4.3.3), δημιουργούμε τις ακόλουθες εξισώσεις

$$\lambda_{11} + 2\lambda_{22} = 2\lambda + \lambda_3 \tag{4.3.4}$$

$$\lambda_{22}^2 + 2\lambda_{11}\lambda_{22} - 2\lambda_{12}\lambda_{21} - \lambda_{23}\lambda_{32} = \lambda^2 + 2\lambda\lambda_3 \tag{4.3.5}$$

$$\lambda_{11}\lambda_{22}^2 - \lambda_{11}\lambda_{23}\lambda_{32} - 2\lambda_{12}\lambda_{21}\lambda_{22} - \lambda_{12}^2\lambda_{23} - \lambda_{21}^2\lambda_{32} = \lambda^2\lambda_3. \tag{4.3.6}$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο ιδιόχωρος E_λ παράγεται από το ιδιοδιάνυσμα $v_1 = (1,0,0)$ (το οποίο πράγματι είναι χρονοειδές διάνυσμα) και ο E_{λ_3} παράγεται από το ιδιοδιάνυσμα $v_2 = (0,1,0)$, (το οποίο πράγματι είναι φωτοειδές διάνυσμα). Θα έχουμε λοιπόν τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$(A - \lambda I_3)v_1 = 0 \ \ , \ \ (A - \lambda_3 I_3)v_2 = 0$$

ισοδύναμα

$$\begin{pmatrix} \lambda_{11} - \lambda & \lambda_{12} & -\lambda_{21} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} - \lambda & \lambda_{23} \\ -\lambda_{12} & \lambda_{32} & \lambda_{22} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

και

$$\begin{pmatrix} \lambda_{11}-\lambda_3 & \lambda_{12} & -\lambda_{21} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22}-\lambda_3 & \lambda_{23} \\ -\lambda_{12} & \lambda_{32} & \lambda_{22}-\lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ +1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

τότε $\qquad \lambda_{11}=\lambda,\ \lambda_{22}=\lambda_3,\ \lambda_{12}=\lambda_{21}=\lambda_{32}=0.$

Κάνοντας χρήση της σχέσης (4.3.4), καταλήγουμε σε αντίφαση γιατί βρίσκουμε $\lambda=\lambda_3$, ενώ έχουμε υποθέσει ότι $\lambda \neq \lambda_3$. Επομένως, η υπόθεση ότι το v_1 είναι χρονοειδές διάνυσμα και τα v_2, v_3 φωτοειδή δεν ευσταθεί.

Β. Έστω ότι τα v_1, v_3 είναι **φωτοειδή** (**light-like**) διανύσματα και το v_2 είναι ένα **χρονοειδές** (**time-like**) διάνυσμα. Τότε

$< v_2, v_2 >= -1, < v_1, v_3 >= +1$

$< v_1, v_2 >=< v_2, v_3 >=< v_1, v_1 >=< v_3, v_3 >= 0.$

Έτσι έχουμε κατασκευάσει μία **ψευδο-ορθοκανονική** βάση $\mathcal{U}$. Οπότε, ο πίνακας αναπαράστασης του μετρικού τανυστή ως προς αυτή τη βάση είναι

$$[G]_{\mathcal{U}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & +1 \\ 0 & -1 & 0 \\ +1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.3.7}$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι ο S είναι ένας αυτοσυζυγής ενδομορφισμός και κάνοντας χρήση της σχέσης (4.1.12) εύκολα συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{21} & \lambda_{31} \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} & \lambda_{32} \\ \lambda_{13} & \lambda_{23} & \lambda_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & +1 \\ 0 & -1 & 0 \\ +1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & +1 \\ 0 & -1 & 0 \\ +1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{pmatrix}$$

ή

$$\begin{pmatrix} \lambda_{31} & -\lambda_{21} & \lambda_{11} \\ \lambda_{32} & -\lambda_{22} & \lambda_{12} \\ \lambda_{33} & -\lambda_{23} & \lambda_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \\ -\lambda_{21} & -\lambda_{22} & -\lambda_{23} \\ \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \end{pmatrix}$$

και τελικά συμπεραίνουμε ότι:

$$\lambda_{32} = -\lambda_{21}, \quad \lambda_{11} = \lambda_{33}, \quad \lambda_{23} = -\lambda_{12}.$$

Ο πίνακας A λοιπόν λαμβάνει την απλούστερη μορφή

$$[S]_{\mathcal{U}} = A = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & -\lambda_{12} \\ \lambda_{31} & -\lambda_{21} & \lambda_{11} \end{pmatrix}.$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A είναι:

$$f(t) = t^3 - tr(A)t^2 + (A_{11} + A_{22} + A_{33})t - det(A)$$

όπου

$$tr(A) = 2\lambda_{11} + \lambda_{22}$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} \lambda_{22} & -\lambda_{12} \\ -\lambda_{21} & \lambda_{11} \end{vmatrix} = \lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}\lambda_{21}$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{13} \\ \lambda_{31} & \lambda_{11} \end{vmatrix} = \lambda_{11}^2 - \lambda_{13}\lambda_{31}$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{vmatrix} = \lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}\lambda_{21}$$

$$det(A) = \lambda_{11}^2\lambda_{22} - 2\lambda_{11}\lambda_{12}\lambda_{21} - \lambda_{22}\lambda_{13}\lambda_{31} - \lambda_{12}^2\lambda_{31} - \lambda_{21}^2\lambda_{13}$$

Τελικά

$$f(t) = t^3 - (2\lambda_{11} + \lambda_{22})t^2 + (\lambda_{11}^2 + 2\lambda_{11}\lambda_{22} - 2\lambda_{12}\lambda_{21} - \lambda_{13}\lambda_{31})t$$

$$-(\lambda_{22}\lambda_{11}^2 - 2\lambda_{11}\lambda_{12}\lambda_{21} - \lambda_{22}\lambda_{13}\lambda_{31} - \lambda_{12}^2\lambda_{31} - \lambda_{21}^2\lambda_{13}). \tag{4.3.8}$$

Συνδυάζοντας τα πολυώνυμα (4.3.3) και (4.3.8) αποκτούμε

$$2\lambda_{11} + \lambda_{22} = 2\lambda + \lambda_3 \tag{4.3.9}$$

$$\lambda_{11}^2 + 2\lambda_{11}\lambda_{22} - 2\lambda_{12}\lambda_{21} - \lambda_{13}\lambda_{31} = \lambda^2 + 2\lambda\lambda_3 \tag{4.3.10}$$

$$\lambda_{11}^2\lambda_{22} - 2\lambda_{11}\lambda_{12}\lambda_{21} - \lambda_{22}\lambda_{13}\lambda_{31} - \lambda_{12}^2\lambda_{31} - \lambda_{21}^2\lambda_{13} = \lambda^2\lambda_3. \tag{4.3.11}$$

Εφόσον ο ιδιόχωρος E_λ παράγεται από το ιδιοδιάνυσμα $v_1 = (1,0,0)$ και ο E_{λ_3} παράγεται από το ιδιοδιάνυσμα $v_2 = (0,1,0)$ έχουμε τα ακόλουθα συστήματα

$$(A - \lambda I_3)v_1 = 0 \;\;,\;\; (A - \lambda_3 I_3)v_2 = 0$$

ισοδύναμα

$$\begin{pmatrix} \lambda_{11}-\lambda & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22}-\lambda & -\lambda_{12} \\ \lambda_{31} & -\lambda_{21} & \lambda_{11}-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

και

$$\begin{pmatrix} \lambda_{11}-\lambda_3 & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22}-\lambda_3 & -\lambda_{12} \\ \lambda_{31} & -\lambda_{21} & \lambda_{11}-\lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ +1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Οπότε βρίσκουμε $\lambda_{11} = \lambda$, $\lambda_{22} = \lambda_3$ και $\lambda_{12} = \lambda_{21} = \lambda_{31} = 0$.

Οι σχέσεις (4.3.9), (4.3.10) και (4.3.11) ισχύουν ταυτοτικά. Ως εκ τούτου ο πίνακας A παίρνει τη μορφή

$$[S]_{\mathcal{U}} = A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \lambda_{13} \\ 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \tag{4.3.12}$$

C. Έστω ότι v_1, v_3 είναι **χρονοειδή** (**time-like**) διανύσματα και v_2 είναι ένα **χωροειδές** (**space-like**) διάνυσμα. Τότε,
$< v_2, v_2 >= +1, < v_1, v_1 >=< v_3, v_3 >= -1,$
$< v_1, v_2 >=< v_2, v_3 >=< v_3, v_1 >= 0.$
Έτσι έχουμε κατασκευάσει μία **ορθοκανονική βάση** $\mathcal{E}$. Οπότε ο πίνακας αναπαράστασης G του μετρικού τανυστή δίνεται από την (4.2.5). Εργαζόμαστε όπως και στις περιπτώσεις A, B. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι ο S είναι ένας αυτοσυζυγής ενδομορφισμός και κάνοντας χρήση της σχέσης (4.1.12) εύκολα συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{21} & \lambda_{31} \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} & \lambda_{32} \\ \lambda_{13} & \lambda_{23} & \lambda_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{pmatrix}$$

ή

$$\begin{pmatrix} -\lambda_{11} & \lambda_{21} & -\lambda_{31} \\ -\lambda_{12} & \lambda_{22} & -\lambda_{32} \\ -\lambda_{13} & \lambda_{23} & -\lambda_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_{11} & -\lambda_{12} & -\lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ -\lambda_{31} & -\lambda_{32} & -\lambda_{33} \end{pmatrix}$$

και τελικά συμπεραίνουμε ότι:

$$\lambda_{21} = -\lambda_{12}, \;\; \lambda_{31} = \lambda_{13}, \;\; \lambda_{32} = -\lambda_{23}$$

και βρίσκουμε ότι ο πίνακας A παίρνει τη μορφή

$$[S]_{\mathcal{E}} = A = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ -\lambda_{12} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{13} & -\lambda_{23} & \lambda_{33} \end{pmatrix}.$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A είναι:

$$f(t) = t^3 - tr(A)t^2 + (A_{11} + A_{22} + A_{33})t - det(A)$$

όπου

$$tr(A) = \lambda_{11} + \lambda_{22} + \lambda_{33}$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ -\lambda_{23} & \lambda_{33} \end{vmatrix} = \lambda_{22}\lambda_{33} + \lambda_{23}^2$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{13} \\ \lambda_{13} & \lambda_{33} \end{vmatrix} = \lambda_{11}\lambda_{33} - \lambda_{13}^2$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ -\lambda_{12} & \lambda_{22} \end{vmatrix} = \lambda_{11}\lambda_{22} + \lambda_{12}^2$$

$$det(A) = \lambda_{11}\lambda_{22}\lambda_{33} + \lambda_{11}\lambda_{23}^2 + \lambda_{12}^2\lambda_{33} - \lambda_{13}^2\lambda_{22} + 2\lambda_{12}\lambda_{13}\lambda_{23}.$$

Τελικά,

$$f(t) = t^3 - (\lambda_{11} + \lambda_{22} + \lambda_{33})t^2 + (\lambda_{11}\lambda_{22} + \lambda_{11}\lambda_{33} + \lambda_{22}\lambda_{33} + \lambda_{12}^2 - \lambda_{13}^2 + \lambda_{23}^2)t$$
$$-(\lambda_{11}\lambda_{22}\lambda_{33} + \lambda_{11}\lambda_{23}^2 + \lambda_{12}^2\lambda_{33} - \lambda_{13}^2\lambda_{22} + 2\lambda_{12}\lambda_{13}\lambda_{23}). \qquad (4.3.13)$$

Συνδυάζοντας τώρα τα πολυώνυμα (4.3.3) και (4.3.13) αποκτούμε

$$\lambda_{11} + \lambda_{22} + \lambda_{33} = 2\lambda + \lambda_3 \qquad (4.3.14)$$

$$\lambda_{11}\lambda_{22} + \lambda_{11}\lambda_{33} + \lambda_{22}\lambda_{33} + \lambda_{12}^2 - \lambda_{13}^2 + \lambda_{23}^2 = \lambda^2 + 2\lambda\lambda_3 \qquad (4.3.15)$$

$$\lambda_{11}\lambda_{22}\lambda_{33} + \lambda_{11}\lambda_{23}^2 + \lambda_{12}^2\lambda_{33} - \lambda_{13}^2\lambda_{22} + 2\lambda_{12}\lambda_{13}\lambda_{23} = \lambda^2\lambda_3. \qquad (4.3.16)$$

Εφόσον ο ιδιόχωρος E_λ παράγεται από το ιδιοδιάνυσμα $v_1 = (1, 0, 0)$ και ο ιδιόχωρος E_{λ_3} από το ιδιοδιάνυσμα $v_2 = (0, 1, 0)$, έχουμε τα ακόλουθα συστήματα

$$(A - \lambda I_3)v_1 = 0 \ \ , \ \ (A - \lambda_3 I_3)v_2 = 0.$$

ισοδύναμα

$$\begin{pmatrix} \lambda_{11}-\lambda & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ -\lambda_{12} & \lambda_{22}-\lambda & \lambda_{23} \\ \lambda_{13} & -\lambda_{23} & \lambda_{33}-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

και

$$\begin{pmatrix} \lambda_{11}-\lambda_3 & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ -\lambda_{12} & \lambda_{22}-\lambda_3 & \lambda_{23} \\ \lambda_{13} & -\lambda_{23} & \lambda_{33}-\lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ +1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Οπότε έχουμε $\lambda_{11} = \lambda$, $\lambda_{22} = \lambda_3$ και $\lambda_{12} = \lambda_{13} = \lambda_{23} = 0$.
Η σχέση (4.3.14) δίνει ότι $\lambda_{33} = \lambda$ και οι σχέσεις (4.3.15) και (4.3.16) ισχύουν ταυτοτικά. Τελικά, ο πίνακας A παίρνει τη μορφή

$$[S]_{\mathcal{E}} = A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \tag{4.3.17}$$

Ο πίνακας αυτός είναι ειδική περίπτωση του πίνακα (II) γιά $\mu = 0$.

D. Στην παράγραφο αυτή υποθέτουμε ότι τα διανύσματα v_1, v_3 του $T_p(M_2^3)$ είναι τέτοια ώστε $E_\lambda = \text{span}\{v_1\}$, $E_{\lambda_3} = \text{span}\{v_3\}$. Επιβάλεται να προσδιορίσουμε τη φύση των διανυσμάτων v_1, v_3. Αφού γίνει αυτό, στη συνέχεια, προσθέτοντας ένα τρίτο κατάλληλο διάνυσμα, έστω το v_2, μπορούμε να κατασκευάσουμε μία βάση $\{v_1, v_2, v_3\}$ για τον χώρο $T_p(M_2^3)$. Πρώτα, αποδεικνύουμε ότι $< v_1, v_3 >= 0$. Πράγματι εφαρμόζοντας τη σχέση (4.1.11) έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
< v_1, S(v_3) >=< S(v_1), v_3 >, &\qquad \text{ή} \\
< v_1, \lambda_3 v_3 >=< \lambda v_1, v_3 >, &\qquad \text{ή} \\
\lambda_3 < v_1, v_3 >= \lambda < v_1, v_3 >, &\qquad \text{άρα} \\
(\lambda_3 - \lambda) < v_1, v_3 >= 0 \ \text{ και εφόσον } \ \lambda_3 \neq \lambda, &\qquad \text{θα είναι} \\
< v_1, v_3 >= 0.&
\end{aligned}
$$

Έστω λοιπόν ότι το v_3 είναι ένα **χρονοειδές** (**time-like**) διάνυσμα και τα v_1, v_2 είναι **φωτοειδή** (**light-like**) διανύσματα. Τότε θα έχουμε,
$< v_3, v_3 >= -1, < v_1, v_2 >= +1$,
$< v_1, v_3 >=< v_2, v_3 >=< v_1, v_1 >=< v_2, v_2 >= 0$.
Έτσι έχουμε κατασκευάσει μία **ψευδο-ορθοκανονική βάση** $\mathcal{U} = \{v_1, v_2, v_3\}$. Οπότε, ο πίνακας αναπαράστασης $G = (g_{ij})_{\mathcal{U}}$ όπου $g_{ij} = g(v_i, v_j)$ του μετρικού τανυστή είναι

$$
[G]_{\mathcal{U}} = \begin{pmatrix} 0 & +1 & 0 \\ +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4.3.18}
$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι ο S είναι αυτοσυζυγής ενδομορφισμός εύκολα συμπεραίνουμε ότι

$$
\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{21} & \lambda_{31} \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} & \lambda_{32} \\ \lambda_{13} & \lambda_{23} & \lambda_{33} \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 0 & +1 & 0 \\ +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 0 & +1 & 0 \\ +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{pmatrix}
$$

ή

$$
\begin{pmatrix} \lambda_{21} & \lambda_{11} & -\lambda_{31} \\ \lambda_{22} & \lambda_{12} & -\lambda_{32} \\ \lambda_{23} & \lambda_{13} & -\lambda_{33} \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ -\lambda_{31} & -\lambda_{32} & \lambda_{33} \end{pmatrix}
$$

και τελικά συμπεραίνουμε ότι:

$$\lambda_{11} = \lambda_{22}, \;\; \lambda_{23} = -\lambda_{31}, \;\; \lambda_{32} = -\lambda_{13},$$

οπότε ο πίνακας A λαμβάνει τη μορφή

$$[S]_{\mathcal{U}} = A = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{11} & -\lambda_{31} \\ \lambda_{31} & -\lambda_{13} & \lambda_{33} \end{pmatrix}.$$

Από την άλλη μεριά το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A είναι:

$$f(t) = t^3 - tr(A)t^2 + (A_{11} + A_{22} + A_{33})t - det(A)$$

όπου

$$tr(A) = 2\lambda_{11} + \lambda_{33}$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} \lambda_{11} & -\lambda_{31} \\ -\lambda_{13} & \lambda_{33} \end{vmatrix} = \lambda_{11}\lambda_{33} - \lambda_{13}\lambda_{31}$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{13} \\ \lambda_{31} & \lambda_{33} \end{vmatrix} = \lambda_{11}\lambda_{33} - \lambda_{13}\lambda_{31}$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{11} \end{vmatrix} = \lambda_{11}^2 - \lambda_{12}\lambda_{21}$$

$$det(A) = \lambda_{11}^2\lambda_{33} - \lambda_{12}\lambda_{31}^2 - \lambda_{21}\lambda_{13}^2 - 2\lambda_{11}\lambda_{13}\lambda_{31} - \lambda_{12}\lambda_{21}\lambda_{33}.$$

Τελικά

$$f(t) = t^3 - (2\lambda_{11} + \lambda_{33})t^2 + (\lambda_{11}^2 + 2\lambda_{11}\lambda_{33} - 2\lambda_{13}\lambda_{31} - \lambda_{12}\lambda_{21})t$$
$$-(\lambda_{33}\lambda_{11}^2 - 2\lambda_{11}\lambda_{13}\lambda_{31} - \lambda_{33}\lambda_{12}\lambda_{21} - \lambda_{13}^2\lambda_{21} - \lambda_{31}^2\lambda_{12}). \tag{4.3.19}$$

Συγκρίνοντας τώρα τα πολυώνυμα (4.3.3) και (4.3.19) αποκτούμε

$$2\lambda_{11} + \lambda_{33} = 2\lambda + \lambda_3 \tag{4.3.20}$$

$$\lambda_{11}^2 + 2\lambda_{11}\lambda_{33} - 2\lambda_{13}\lambda_{31} - \lambda_{12}\lambda_{21} = \lambda^2 + 2\lambda\lambda_3 \tag{4.3.21}$$

$$\lambda_{11}^2\lambda_{33} - 2\lambda_{11}\lambda_{13}\lambda_{31} - \lambda_{33}\lambda_{12}\lambda_{21} - \lambda_{13}^2\lambda_{21} - \lambda_{31}^2\lambda_{12} = \lambda^2\lambda_3. \tag{4.3.22}$$

Εφόσον ο ιδιόχωρος E_λ παράγεται από το ιδιοδιάνυσμα $v_1 = (1,0,0)$ και ο E_{λ_3} παράγεται από το ιδιοδιάνυσμα $v_3 = (0,0,1)$ έχουμε το ακόλουθο σύστημα

$$(A - \lambda I_3)v_1 = 0 \ \ , \ \ (A - \lambda_3 I_3)v_3 = 0$$

ισοδύναμα

$$\begin{pmatrix} \lambda_{11} - \lambda & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{11} - \lambda & -\lambda_{31} \\ \lambda_{31} & -\lambda_{13} & \lambda_{33} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

και

$$\begin{pmatrix} \lambda_{11} - \lambda_3 & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{11} - \lambda_3 & -\lambda_{31} \\ \lambda_{31} & -\lambda_{13} & \lambda_{33} - \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ +1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Από αυτό το σύστημα βρίσκουμε ότι:

$$\lambda_{11} = \lambda, \ \ \lambda_{33} = \lambda_3, \ \ \text{και} \ \ \lambda_{21} = \lambda_{13} = \lambda_{31} = 0.$$

Οι σχέσεις (4.3.20), (4.3.21) και (4.3.22) ισχύουν ταυτοτικά. Ως εκ τούτου ο πίνακας A λαμβάνει τη μορφή

$$[S]_{\mathcal{U}} = A = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda_{12} & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \tag{4.3.23}$$

Παρατήρηση: Υποθέτοντας ότι τα διανύσματα v_1, v_2, v_3 έχουν την ίδια φύση αλλά $E_\lambda = \text{span}\{v_2\}$ και $E_{\lambda_3} = \text{span}\{v_3\}$ τότε εύκολα συμπεραίνουμε ότι ο S λαμβάνει τη μορφή

$$[S]_{\mathcal{U}} = A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ \lambda_{21} & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \tag{4.3.24}$$

ως προς την ίδια **ψευδο-ορθοκανονική** βάση $\mathcal{U} = \{v_1, v_2, v_3\}$ και ο αντίστοιχος πίνακας για τα εσωτερικά γινόμενα $<,>$, δίνεται από τη σχέση (4.3.18)

Υποπερίπτωση 4.3.2: Θεωρούμε ότι $\mathbf{dim}E_\lambda = 2$ και $\mathbf{dim}E_{\lambda_3} = 1$. Σε αυτή την περίπτωση θα δείξουμε ότι ο τελεστής σχήματος είναι πάντα διαγώνιος.

Πράγματι, έστω v_1, v_2, v_3 διανύσματα του $T_p(M_2^3)$ τέτοια ώστε

$$E_\lambda = \text{span}\{v_1, v_3\}, \quad E_{\lambda_3} = \text{span}\{v_2\}.$$

Τότε εύκολα συμπεραίνουμε ότι $< v_1, v_2 >= 0$, $< v_3, v_2 >= 0$.

A. Έστω ότι τα v_1, v_3 είναι **χρονοειδή** (**time-like**) διανύσματα και το v_2 είναι ένα **χωροειδές** (**space-like**) διάνυσμα. Σε αυτή τη περίπτωση

$< v_2, v_2 >= +1, \quad < v_1, v_1 >=< v_3, v_3 >= -1,$

και $\qquad < v_1, v_2 >=< v_1, v_3 >=< v_2, v_3 >= 0.$

Έτσι έχουμε κατασκευάσει μία **ορθοκανονική** βάση $\mathcal{E}$. Ως εκ τούτου ο πίνακας αναπαράστασης του μετρικού τανυστή δίνεται από τη σχέση (4.2.5)

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο ιδιόχωρος E_λ παράγεται από τα ιδιοδιανύσματα $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_3 = (0, 0, 1)$ και E_{λ_3} από το $v_2 = (0, 1, 0)$ οπότε έχουμε το ακόλουθο σύστημα,

$(A - \lambda I_3)(k_1 v_1 + k_3 v_3) = 0, \qquad (A - \lambda_3 I_3)v_2 = 0, \;$ όπου $k_1, k_3 \in \mathbb{R}$.

Από αυτό το σύστημα βρίσκουμε ότι: $\lambda_{11} = \lambda_{33} = \lambda$, $\lambda_{22} = \lambda_3$ και $\lambda_{12} = \lambda_{13} = \lambda_{23} = 0$.
Επίσης οι σχέσεις (4.3.14), (4.3.15) και (4.3.16) ισχύουν ταυτοτικά. Έπειτα από αυτά ο πίνακας A λαμβάνει τη μορφή (4.3.17)

B. Έστω ότι v_1, v_3 είναι **φωτοειδή** (**light-like**) διανύσματα και v_2 είναι ένα **χρονοειδές** (**time-like**) διάνυσμα. Σε αυτή την περίπτωση
$< v_2, v_2 >= -1$, $< v_1, v_3 >= +1$
και $< v_1, v_2 >=< v_2, v_3 >=< v_1, v_1 >=< v_3, v_3 >= 0$.

Έτσι έχουμε κατασκευάσει μία **ψευδο-ορθοκανονική** βάση $\mathcal{U}$. Οπότε ο πίνακας αναπαράστασης του μετρικού τανυστή δίνεται από τη σχέση (4.3.7).

Εφόσον ο ιδιόχωρος E_λ παράγεται από τα ιδιοδιανύσματα $v_1 = (1,0,0), v_3 = (0,0,1)$ και ο E_{λ_3} από το $v_2 = (0,1,0)$ έχουμε το ακόλουθο σύστημα.

$(A - \lambda I_3)(k_1 v_1 + k_3 v_3) = 0, \quad (A - \lambda_3 I_3) v_2 = 0,$ όπου $k_1, k_3 \in \mathbb{R}$.

Αν εργασθούμε με όμοιο τρόπο εύκολα συμπεραίνουμε ότι ο πίνακας A λαμβάνει τη μορφή (4.3.17). Έπειτα από αυτά έχουμε αποδείξει την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 4.2. *Αν οι ιδιοτιμές του τελεστή σχήματος S της υπερεπιφάνειας M_2^3 του ψευδο-Ευκλείδειου χώρου E_2^4 είναι πραγματικές και μία εξ' αυτών είναι πολλαπλότητας δύο, τότε οι κανονικές μορφές του S δίνονται από τους πίνακες (II) και οι αντίστοιχοι γιά το εσωτερικό γινόμενο $<,>$, δίνονται από τους πίνακες (4.2.5), (4.3.7) και (4.3.18) ως προς κατάλληλες βάσεις.*

4.4 Περίπτωση ΙΙΙ. Τρεις Ίσες Ιδιοτιμές του S

Υποθέτουμε ότι ο πίνακας A έχει μία πραγματική ρίζα λ πολλαπλότητας τρία. Τότε $\dim E_\lambda = 1$, $\dim E_\lambda = 2$ ή $\dim E_\lambda = 3$.

Υποπερίπτωση 4.4.1: Έστω $\mathbf{dim}E_\lambda = 1$. Τότε υπάρχει ένα διάνυσμα, έστω v_1 τέτοιο ώστε $E_\lambda = \text{span}\{v_1\}$. Πρέπει να προσδιορίσουμε τη φύση αυτού του διανύσματος v_1 και έπειτα προσθέτοντας δύο κατάλληλα διανύσματα v_2, v_3 θα κατασκευάσουμε μία βάση $\{v_1, v_2, v_3\}$ για τον χώρο $T_p(M_2^3)$.

A. Έστω ότι τα v_1, v_3 είναι **χρονοειδή** (**time-like**) διανύσματα και το v_2 είναι ένα **χωροειδές** (**space-like**) διάνυσμα. Τότε
$< v_2, v_2 >= +1, \;\; < v_1, v_1 >=< v_3, v_3 >= -1,$
και $\;\; < v_1, v_2 >=< v_1, v_3 >=< v_2, v_3 >= 0.$
Έτσι έχουμε κατασκευάσει μία **ορθοκανονική βάση** $\mathcal{E}$. Τότε ο συμπληρωματικός χώρος του v_1 στον E_2^3 έχει τύπο $(+, -)$ και ο πίνακας αναπαράστασης του μετρικού τανυστή $G = (g_{ij})_\mathcal{E}$, όπου $g_{ij} = g(v_i, v_j)$ δίνεται από την (4.2.5)

Έστω $S : T_p(M_2^3) \to T_p(M_2^3)$, είναι ο τελεστής σχήματος του $T_p(M_2^3)$. Τότε, $S(v_i) = \lambda_i v_i : i = 1, 2, 3$ όπου, $\lambda_i \in \mathbb{R}$ και εφαρμόζοντας τη σχέση (4.1.12), βρίσκουμε ότι ο πίνακας A παίρνει τη μορφή

$$[S]_\mathcal{E} = A = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ -\lambda_{12} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{13} & -\lambda_{23} & \lambda_{33} \end{pmatrix}$$

Σε αυτή την περίπτωση, εφόσον ο πίνακας A έχει μία πραγματική ρίζα λ πολλαπλότητας τρία, έχουμε ότι

$$f(t) = (t - \lambda)^3 = t^3 - 3\lambda t^2 + 3\lambda^2 t - \lambda^3. \tag{4.4.1}$$

Συνδυάζοντας τα πολυώνυμα από τις σχέσεις (4.3.13) και (4.4.1) έχουμε τις σχέσεις

$$\lambda_{11} + \lambda_{22} + \lambda_{33} = 3\lambda \tag{4.4.2}$$

$$\lambda_{11}\lambda_{22} + \lambda_{11}\lambda_{33} + \lambda_{22}\lambda_{33} + \lambda_{12}^2 - \lambda_{13}^2 + \lambda_{23}^2 = 3\lambda^2 \tag{4.4.3}$$

$$\lambda_{11}\lambda_{22}\lambda_{33} + \lambda_{11}\lambda_{23}^2 + \lambda_{12}^2\lambda_{33} - \lambda_{13}^2\lambda_{22} + 2\lambda_{12}\lambda_{13}\lambda_{23} = \lambda^3. \tag{4.4.4}$$

Εφόσον ο ιδιόχωρος E_λ παράγεται από το ιδιοδιάνυσμα $v_1 = (1,0,0)$ έχουμε ότι

$$(A - \lambda I_3)v_1 = 0$$

και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (4.4.2), (4.4.3) και (4.4.4) ο πίνακας αναπαράστασης του S λαμβάνει τελικά τη μορφή

$$[S]_{\mathcal{E}} = A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda \pm \lambda_{23} & \lambda_{23} \\ 0 & -\lambda_{23} & \lambda \mp \lambda_{23} \end{pmatrix} \tag{4.4.5}$$

Β. Έστω v_2, v_3 είναι **φωτοειδή** (**light-like**) διανύσματα και v_1 είναι ένα **χρονοειδές** (**time-like**) διάνυσμα. Τότε
$< v_1, v_1 >= -1$, $< v_2, v_3 >= +1$,
και $< v_1, v_2 >=< v_1, v_3 >=< v_2, v_2 >=< v_3, v_3 >= 0$.
Έτσι έχουμε κατασκευάσει μία **ψευδο-ορθοκανονική** βάση $\mathcal{U}$. Σε αυτή την περίπτωση ο συμπληρωματικός χώρος του v_1 στον E^3_2 έχει επίσης τον ίδιο, όπως και στην περίπτωση A, τύπο $(+,-)$ και ο πίνακας αναπαράστασης του μετρικού τανυστή $G = (g_{ij})_{\mathcal{U}}$, όπου $g_{ij} = g(v_i, v_j)$ δίνεται από τη σχέση (4.3.1) Ακολουθώντας όμοια ανάλυση εύκολα λαμβάνουμε για τον πίνακα A την ακόλουθη μορφή

$$[S]_{\mathcal{U}} = A = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & -\lambda_{21} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ -\lambda_{12} & \lambda_{32} & \lambda_{22} \end{pmatrix}$$

Συνδυάζοντας τα πολυώνυμα (4.3.2) και (4.4.1) έχουμε τις σχέσεις

$$\lambda_{11} + 2\lambda_{22} = 3\lambda \tag{4.4.6}$$

$$\lambda_{22}^2 + 2\lambda_{11}\lambda_{22} - 2\lambda_{12}\lambda_{21} - \lambda_{23}\lambda_{32} = 3\lambda^2 \tag{4.4.7}$$

$$\lambda_{11}\lambda_{22}^2 - \lambda_{11}\lambda_{23}\lambda_{32} - 2\lambda_{12}\lambda_{21}\lambda_{22} - \lambda_{12}^2\lambda_{23} - \lambda_{21}^2\lambda_{32} = \lambda^3. \tag{4.4.8}$$

Εφόσον ο ιδιόχωρος E_λ παράγεται από το ιδιοδιάνυσμα $v_1 = (1,0,0)$ τότε έχουμε το σύστημα

$$(A - \lambda I_3)v_1 = 0$$

από το οποίο παίρνουμε

$$\lambda_{11} = \lambda, \ \ \lambda_{12} = \lambda_{21} = 0$$

και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (4.4.6), (4.4.7) και (4.4.8) συμπεραίνουμε ότι:

$$\lambda_{22} = \lambda, \quad \lambda_{23}\lambda_{32} = 0.$$

Έτσι διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

(i) : Αν $\lambda_{23} = 0,\ \lambda_{32} \neq 0$, τότε

$$[S]_{\mathcal{U}} = A_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & \lambda_{32} & \lambda \end{pmatrix} \tag{4.4.9}$$

(ii) : Αν $\lambda_{23} \neq 0,\ \lambda_{32} = 0$, τότε

$$[S]_{\mathcal{U}} = A_2 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \lambda_{23} \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \tag{4.4.10}$$

(iii) : Αν $\lambda_{23} = \lambda_{32} = 0$, τότε

$$[S]_{\mathcal{U}} = A_3 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \tag{4.4.11}$$

Παρατήρηση: Οι περιπτώσεις A και B αναφέρονται ουσιωδώς στον υποχώρο του E_2^3, που είναι τύπου $(+,-)$ και είτε γράφεται από ένα χωροειδές (space-like) και ένα χρονοειδές (time-like) διάνυσμα, είτε από δύο φωτοειδή (light-like) διανύσματα. Ως εκ τούτου οι περιπτώσεις A και B καλύπτουν την ίδια κατάσταση, μόνο που αναφέρονται σε διαφορετικές βάσεις. Συνεπώς ο πίνακας (4.4.5) αναπαριστά τον ίδιο ενδομορφισμό ως προς μία βάση η οποία δεν οδηγεί στον πλέον κατάλληλο πίνακα αναπαράστασης. Με άλλα λόγια, ο πίνακας (4.4.5) εκφράζεται από τους πίνακες της περίπτωσης B, όπου η επιλογή της βάσης είναι η πλέον κατάλληλη.

C. Έστω v_1, v_2 είναι **φωτοειδή** (**light-like**) διανύσματα και v_3 είναι ένα **χρονοειδές** (**time-like**) διάνυσμα. Τότε
$< v_3, v_3 >= -1,\ < v_1, v_2 >= +1,$
και $< v_1, v_1 >=< v_2, v_2 >=< v_1, v_3 >=< v_2, v_3 >= 0.$
Έτσι έχουμε κατασκευάσει μία **ψευδο-ορθοκανονική** βάση $\mathcal{U}$. Οπότε ο πίνακας αναπαράστασης του μετρικού τανυστή $G = (g_{ij})_{\mathcal{U}}$, δίνεται από τη σχέση (4.3.18).

Με μία όμοια ανάλυση, αποδεικνύουμε ότι ο πίνακας αναπαράστασης του S, λαμβάνει τελικά τη μορφή

$$[S]_{\mathcal{U}} = A = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda_{13} & \lambda \end{pmatrix} \tag{4.4.12}$$

Υποπερίπτωση 4.4.2: Έστω $\mathbf{dim}E_\lambda = 2$. Συνεπώς υπάρχουν δύο γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα, έστω v_1, v_2 τέτοια ώστε $E_\lambda = \mathrm{span}\{v_1, v_2\}$. Χρειάζεται να προσδιορίσουμε τις δυνατές περιπτώσεις ως προς τη φύση αυτών των διανυσμάτων v_1, v_2 και στη συνέχεια προσθέτοντας ένα κατάλληλο διάνυσμα v_3, θα κατασκευάσουμε μία βάση $\{v_1, v_2, v_3\}$ γιά τον χώρο $T_p(M_2^3)$. Ακολουθώντας τώρα όμοια ανάλυση, όπως στην προηγούμενη υποπερίπτωση, μπορούμε να κατασκευάσουμε είτε μία **ορθοκανονική** βάση $\mathcal{E}$ θεωρώντας ότι τα διανύσματα v_1, v_3 είναι **χρονοειδή** (**time-like**) και το τρίτο v_2 είναι **χωροειδές** (**space-like**) είτε μία **ψευδο-ορθοκανονική** βάση $\mathcal{U}$ επιλέγοντας αμφότερα τα διανύσματα v_1, v_2 να είναι **φωτοειδή** (**light-like**) και το τρίτο από αυτά το v_3 να είναι **χρονοειδές** (**time-like**) ή το v_1 να είναι **χρονοειδές** (**time-like**) και τα διανύσματα v_2, v_3 **φωτοειδή** (**light-like**).

Τότε αποδεικνύουμε ότι για κάθε μία από αυτές τις τρεις περιπτώσεις, ο πίνακας G των εσωτερικών γινομένων δίνεται, είτε από την (4.2.5) είτε από την (4.3.18) είτε από την (4.3.1) και οι αντίστοιχοι πίνακες για τον S, δίνονται από την μορφή του πίνακα (III).

Υποπερίπτωση 4.4.3: Έστω $\mathbf{dim}E_\lambda = 3$. Εφόσον η ιδιοτιμή λ έχει πολλαπλότητα τρία, είναι γνωστό ότι κάθε διάνυσμα $v \in T_p(M_2^3)$, είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του S με την ίδια ιδιοτιμή. Ως εκ τούτου, ο πίνακας αναπαράστασης του τελεστή σχήματος S, ως προς μία **ορθοκανονική**, ή μία **ψευδο-ορθοκανονική** βάση δίνεται από τον (4.4.11). Συνεπώς έχουμε αποδείξει την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 4.3 *Αν ο τελεστής σχήματος S της υπερεπιφάνειας M_2^3 του ψευδο-Ευκλείδειου χώρου E_2^4 έχει μία πραγματική ιδιοτιμή πολλαπλότητας τρία, τότε οι κανονικές μορφές του δίνονται από τους πίνακες (III) και οι αντίστοιχοι για το εσωτερικό γινόμενο $<,>$, από τους πίνακες (4.2.5), (4.3.1) και (4.3.18), ως προς κατάλληλες κάθε φορά βάσεις.*

4.5 Περίπτωση IV. Μιγαδικές Ιδιοτιμές του S

Υποθέτουμε ότι ο πίνακας A του τελεστή σχήματος S έχει δύο ρίζες μιγαδικές συζυγείς $\lambda_1 = \mu + i\nu$, $\lambda_2 = \mu - i\nu$, $\nu \neq 0$, $\mu \in \mathbb{R}$ και μία πραγματική ρίζα $\lambda = \lambda_3$. Τότε $\dim E_{\lambda_3} = 1$.

Έστω v_3 είναι ένα διάνυσμα το οποίο παράγει τον E_{λ_3}, δηλαδή $E_{\lambda_3} = \text{span}\{v_3\}$. Όπως και προηγουμένως, χρειάζεται να προσδιορίσουμε τον χαρακτήρα του v_3. Έπειτα προσθέτουμε δύο κατάλληλα διανύσματα, έστω v_1, v_2 τέτοια ώστε αυτά να μπορούν να συγκροτούν μία βάση $\{v_1, v_2, v_3\}$ για τον χώρο $T_p(M_2^3)$. Διακρίνουμε λοιπόν τις ακόλουθες περιπτώσεις:

Α. Έστω ότι v_1, v_3 είναι **χρονοειδή** (**time-like**) διανύσματα και v_2 είναι ένα **χωροειδές** (**space-like**) διάνυσμα. Σ' αυτή την περίπτωση
$< v_2, v_2 >= +1, < v_1, v_1 >=< v_3, v_3 >= -1,$
και $< v_1, v_2 >=< v_1, v_3 >=< v_2, v_3 >= 0.$
Έτσι έχουμε κατασκευάσει μία **ορθοκανονική** βάση $\mathcal{E}$. Ως εκ τούτου, ο πίνακας αναπαράστασης του μετρικού τανυστή $G = (g_{ij})_{\mathcal{E}}$, όπου $g_{ij} = g(v_i, v_j)$ δίνεται από τη σχέση (4.2.5), δηλαδή

$$[G]_{\mathcal{E}} \;=\; \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Εφαρμόζοντας τη σχέση (4.1.12), βρίσκουμε ότι ο πίνακας A λαμβάνει απλούστερη μορφή

$$[S]_{\mathcal{E}} = A = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ -\lambda_{12} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{13} & -\lambda_{23} & \lambda_{33} \end{pmatrix}$$

Εφόσον ο πίνακας A, έχει μία πραγματική ρίζα λ_3 και δύο ρίζες μιγαδικές συζυγείς $\lambda_1 = \mu + i\nu$, $\lambda_2 = \mu - i\nu$, $\nu \neq 0$, $\mu \in \mathbb{R}$ θα έχουμε,

$$f(t) = t^3 - (2\mu + \lambda_3)t^2 + (\mu^2 + \nu^2 + 2\lambda_3\mu)t - \lambda_3(\mu^2 + \nu^2). \qquad (4.5.1)$$

Συνδυάζοντας τα πολυώνυμα (4.3.13) και (4.5.1) έχουμε ότι

$$\lambda_{11} + \lambda_{22} + \lambda_{33} = \lambda_3 + 2\mu \quad (4.5.2)$$

$$\lambda_{11}\lambda_{22} + \lambda_{11}\lambda_{33} + \lambda_{22}\lambda_{33} + \lambda_{12}^2 - \lambda_{13}^2 + \lambda_{23}^2 = \mu^2 + \nu^2 + 2\lambda_3\mu \quad (4.5.3)$$

$$\lambda_{11}\lambda_{22}\lambda_{33} + \lambda_{11}\lambda_{23}^2 + \lambda_{12}^2\lambda_{33} - \lambda_{13}^2\lambda_{22} + 2\lambda_{12}\lambda_{13}\lambda_{23} = \lambda_3(\mu^2 + \nu^2). \quad (4.5.4)$$

Εφόσον ο ιδιόχωρος E_{λ_3} παράγεται από το ιδιοδιάνυσμα $v_3 = (0,0,1)$, θα έχουμε

$$(A - \lambda_3 I_3)v_3 = 0.$$

Επομένως, $\lambda_{13} = \lambda_{23} = 0$ και $\lambda_{33} = \lambda_3$. Έτσι οι σχέσεις (4.5.2), (4.5.3) και (4.5.4) δίνουν ότι $\lambda_{11} = \lambda_{22} = \mu$, $\lambda_{12} = \nu$. Συνεπώς, ο πίνακας αναπαράστασης του S παίρνει τη μορφή

$$[S]_{\mathcal{E}} = A = \begin{pmatrix} \mu & \nu & 0 \\ -\nu & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad \nu \neq 0, \quad \mu \in \mathbb{R} \qquad (4.5.5)$$

Β. Έστω ότι τα v_1, v_2 είναι **φωτοειδή** (**light-like**) διανύσματα και το v_3 είναι ένα **χρονοειδές** (**time-like**) διάνυσμα. Σ' αυτή την περίπτωση
$< v_1, v_2 >= +1, < v_3, v_3 >= -1,$
και $< v_1, v_1 >=< v_2, v_2 >=< v_1, v_3 >=< v_2, v_3 > 0.$
Έτσι έχουμε κατασκευάσει μία **ψευδο-ορθοκανονική** βάση $\mathcal{U}$. Επομένως ο πίνακας αναπαράστασης του μετρικού τανυστή $G = (g_{ij})_{\mathcal{U}}$, όπου $g_{ij} = g(v_i, v_j)$ δίνεται από τη σχέση (4.3.18)
Εφαρμόζοντας τη σχέση (4.1.12), βρίσκουμε ότι ο πίνακας A παίρνει τη μορφή

$$[S]_{\mathcal{U}} = A = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{11} & -\lambda_{31} \\ \lambda_{31} & -\lambda_{13} & \lambda_{33} \end{pmatrix}$$

Συνδυάζοντας τα πολυώνυμα (4.3.19), και (4.5.1) αποκτούμε ότι

$$2\lambda_{11} + \lambda_{33} = \lambda_3 + 2\mu \quad (4.5.6)$$

$$\lambda_{11}^2 + 2\lambda_{11}\lambda_{33} - 2\lambda_{13}\lambda_{31} - \lambda_{12}\lambda_{21} = \mu^2 + \nu^2 + 2\lambda_3\mu \quad (4.5.7)$$

$$\lambda_{11}^2\lambda_{33} - 2\lambda_{11}\lambda_{13}\lambda_{31} - \lambda_{33}\lambda_{12}\lambda_{21} - \lambda_{13}^2\lambda_{21} - \lambda_{31}^2\lambda_{12} = \lambda_3(\mu^2 + \nu^2). \quad (4.5.8)$$

Εφόσον ο ιδιόχωρος E_{λ_3} παράγεται από το ιδιοδιάνυσμα $v_3 = (0,0,1)$, θα έχουμε

$$(A - \lambda_3 I_3)v_3 = 0.$$

Επομένως, $\lambda_{13} = \lambda_{31} = 0$ και $\lambda_{33} = \lambda_3$. Κατά συνέπεια από τις σχέσεις (4.5.6) και (4.5.7) έχουμε ότι $\lambda_{11} = \mu$, $\lambda_{12} = \nu$ και $\lambda_{21} = -\nu$, ενώ η σχέση (4.5.8) ισχύει ταυτοτικά. Μετά από αυτά, ο πίνακας αναπαράστασης του S λαμβάνει επίσης τη μορφή (4.5.5)

Παρατήρηση: Αν υποθέσουμε ότι το v_1 είναι ένα χρονοειδές (time-like) διάνυσμα και v_2, v_3 είναι φωτοειδή (light-like) διανύσματα ή, v_1, v_3 είναι φωτοειδή (light-like) διανύσματα και v_2 ένα χρονοειδές (time-like) διάνυσμα ή, v_1, v_2 είναι χρονοειδή (time-like) διανύσματα και v_3 ένα χωροειδές (space-like) διάνυσμα, τότε, οδηγούμεθα σε αντίφαση γιατί βρίσκουμε $\nu = 0$, ενώ έχουμε υποθέσει ότι $\nu \neq 0$.

Πράγματι, έχουμε επιπλέον τις ακόλουθες περιπτώσεις.

C. Έστω v_1 είναι ένα **χρονοειδές (time-like)** διάνυσμα και v_2, v_3 είναι **φωτοειδή (light-like)** διανύσματα. Τότε σ' αυτή την περίπτωση έχουμε

$< v_1, v_1 >= -1$, $< v_2, v_3 >= +1$

και $< v_1, v_2 >=< v_1, v_3 >=< v_2, v_2 >=< v_3, v_3 >= 0$.

Έτσι έχουμε κατασκευάσει μία **ψευδο-ορθοκανονική** βάση $\mathcal{U} = \{v_1, v_2, v_3\}$. Επομένως, ο πίνακας αναπαράστασης του μετρικού τανυστή $G = (g_{ij})_{\mathcal{U}}$, όπου $g_{ij} = g(v_i, v_j)$ δίνεται από τη σχέση (4.3.1).

Ως συνήθως, εφαρμόζοντας τη σχέση (4.1.12) ο πίνακας αναπαράστασης A παίρνει τη μορφή

$$[S]_{\mathcal{U}} = A = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & -\lambda_{21} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ -\lambda_{12} & \lambda_{32} & \lambda_{22} \end{pmatrix}$$

Συνδυάζοντας τα πολυώνυμα (4.3.2) και (4.5.1) έχουμε,

$$\lambda_{11} + 2\lambda_{22} = \lambda_3 + 2\mu, \quad (4.5.9)$$

$$\lambda_{22}^2 + 2\lambda_{11}\lambda_{22} - 2\lambda_{12}\lambda_{21} - \lambda_{23}\lambda_{32} = \mu^2 + \nu^2 + 2\lambda_3\mu, \quad (4.5.10)$$

$$\lambda_{11}\lambda_{22}^2 - \lambda_{11}\lambda_{23}\lambda_{32} - 2\lambda_{12}\lambda_{21}\lambda_{22} - \lambda_{12}^2\lambda_{23} - \lambda_{21}^2\lambda_{32} = \lambda_3(\mu^2 + \nu^2). \quad (4.5.11)$$

Εφόσον ο ιδιόχωρος E_{λ_3} παράγεται από το ιδιοδιάνυσμα $v_3 = (0, 0, 1)$, έχουμε

$$(A - \lambda_3 I_3)v_3 = 0,$$

οπότε

$$\lambda_{21} = \lambda_{23} = 0 \text{ και } \lambda_{22} = \lambda_3.$$

Η σχέση (4.5.9) δίνει

$$\lambda_{11} = 2\mu - \lambda_3. \quad (4.5.12)$$

Η (4.5.10) μέσω της (4.5.12) γίνεται

$$\nu^2 + (\mu - \lambda_3)^2 = 0.$$

Από την εξίσωση αυτή όμως συμπεραίνεται άμεσα ότι $\nu = 0$, πράγμα το οποίο είναι άτοπο, αφού υποθέσαμε ότι $\nu \neq 0$.

D. Έστω v_1, v_3 είναι **φωτοειδή** (**light-like**) διανύσματα και v_2 ένα **χρονοειδές** (**time-like**) διάνυσμα. Τότε
$< v_2, v_2 >= -1, < v_1, v_3 >= +1$

και $< v_1, v_2 >=< v_2, v_3 >=< v_1, v_1 >=< v_3, v_3 >= 0$.
Έτσι έχουμε κατασκευάσει μία **ψευδο-ορθοκανονική** βάση $\mathcal{U}$. Επομένως ο πίνακας αναπαράστασης του μετρικού τανυστή $G = (g_{ij})_{\mathcal{U}}$, όπου $g_{ij} = g(v_i, v_j)$ δίνεται από τη σχέση (4.3.7) και ο πίνακας αναπαράστασης A παίρνει τη μορφή

$$[S]_{\mathcal{U}} = A = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & -\lambda_{12} \\ \lambda_{31} & -\lambda_{21} & \lambda_{11} \end{pmatrix}$$

Συνδυάζοντας τα πολυώνυμα (4.3.8) και (4.5.1) έχουμε,

$$2\lambda_{11} + \lambda_{22} = \lambda_3 + 2\mu, \quad (4.5.13)$$

$$\lambda_{11}^2 + 2\lambda_{11}\lambda_{22} - 2\lambda_{12}\lambda_{21} - \lambda_{13}\lambda_{31} = \mu^2 + \nu^2 + 2\lambda_3\mu, \quad (4.5.14)$$

$$\lambda_{11}^2\lambda_{22} - 2\lambda_{11}\lambda_{12}\lambda_{21} - \lambda_{22}\lambda_{13}\lambda_{31} - \lambda_{12}^2\lambda_{31} - \lambda_{21}^2\lambda_{13} = \lambda_3(\mu^2 + \nu^2). \quad (4.5.15)$$

Εφόσον ο ιδιόχωρος E_{λ_3} παράγεται από το ιδιοδιάνυσμα $v_3 = (0, 0, 1)$, θα έχουμε

$$(A - \lambda_3 I_3)v_3 = 0,$$

οπότε

$$\lambda_{12} = \lambda_{13} = 0 \text{ και } \lambda_{11} = \lambda_3.$$

Από τη σχέση (4.5.13) εύκολα έχουμε

$$\lambda_{22} = 2\mu - \lambda_3. \quad (4.5.16)$$

Η (4.5.14) μέσω της (4.5.16) δίνει την εξίσωση

$$\nu^2 + (\mu - \lambda_3)^2 = 0.$$

Άρα $\nu = 0$, το οποίο είναι άτοπο.

Ε. Έστω ότι v_1, v_2 είναι **χρονοειδή** (**time-like**) διανύσματα και v_3 είναι ένα **χωροειδές** (**space-like**) διάνυσμα. Τότε,
$< v_3, v_3 >= +1, < v_1, v_1 >=< v_2, v_2 >= -1$
και $< v_1, v_2 >=< v_1, v_3 >=< v_2, v_3 >= 0$.
Έτσι έχουμε κατασκευάσει μία **ορθοκανονική βάση** $\mathcal{E} = \{v_1, v_2, v_3\}$. Επομένως ο πίνακας αναπαράστασης του μετρικού τανυστή $G = (g_{ij})_{\mathcal{E}}$, όπου $g_{ij} = g(v_i, v_j)$ δίνεται από τη σχέση,

$$[G]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{pmatrix} \tag{4.5.17}$$

Όπως και στα προηγούμενα, κάνουμε χρήση της σχέσης (4.1.12) και τελικά ο πίνακας αναπαράστασης του S λαμβάνει τη μορφή

$$[S]_{\mathcal{E}} = A = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ -\lambda_{13} & -\lambda_{23} & \lambda_{33} \end{pmatrix}$$

Από την άλλη μεριά το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A είναι:

$$\begin{aligned} f(t) &= t^3 - (\lambda_{11} + \lambda_{22} + \lambda_{33})t^2 + (\lambda_{11}\lambda_{22} + \lambda_{11}\lambda_{33} + \lambda_{22}\lambda_{33} - \lambda_{12}^2 + \lambda_{13}^2 + \lambda_{23}^2)t \\ &\quad -(\lambda_{11}\lambda_{22}\lambda_{33} + \lambda_{11}\lambda_{23}^2 - \lambda_{12}^2\lambda_{33} + \lambda_{13}^2\lambda_{22} - 2\lambda_{12}\lambda_{13}\lambda_{23}). \end{aligned} \tag{4.5.18}$$

Από τον συνδυασμό των πολυωνύμων (4.5.1) και (4.5.18) έχουμε

$$\lambda_{11} + \lambda_{22} + \lambda_{33} = \lambda_3 + 2\mu, \tag{4.5.19}$$

$$\lambda_{11}\lambda_{22} + \lambda_{11}\lambda_{33} + \lambda_{22}\lambda_{33} - \lambda_{12}^2 + \lambda_{13}^2 + \lambda_{23}^2 = \mu^2 + \nu^2 + 2\lambda_3\mu, \tag{4.5.20}$$

$$\lambda_{11}\lambda_{22}\lambda_{33} + \lambda_{11}\lambda_{23}^2 - \lambda_{12}^2\lambda_{33} + \lambda_{13}^2\lambda_{22} - 2\lambda_{12}\lambda_{13}\lambda_{23} = \lambda_3(\mu^2 + \nu^2). \tag{4.5.21}$$

Εφόσον ο ιδιόχωρος E_{λ_3} παράγεται από το ιδιοδιάνυσμα $v_3 = (0, 0, 1)$, έχουμε την ακόλουθη εξίσωση

$$(A - \lambda_3 I_3)v_3 = 0.$$

Επομένως

$$\lambda_{13} = \lambda_{23} = 0 \ \text{και} \ \lambda_{33} = \lambda_3.$$

Από τη σχέση(4.5.19) έχουμε εύκολα ότι

$$\lambda_{22} = 2\mu - \lambda_{11}. \tag{4.5.22}$$

Η (4.5.20) μέσω της (4.5.22) δίνει την εξίσωση

$$\nu^2 + \lambda_{12}^2 + (\lambda_{11} - \mu)^2 = 0,$$

από την οποία έχουμε $\nu = 0$, δηλαδή καταλήγουμε και πάλι σε άτοπο.
Η παραπάνω λοιπόν ανάλυση αποτελεί την απόδειξη της ακόλουθης πρότασης.

Πρόταση 4.4 *Αν ο τελεστής σχήματος S, της υπερεπιφάνειας M_2^3 του ψευδο-Ευκλείδειου χώρου E_2^4, έχει μία πραγματική και δύο μιγαδικές συζυγείς ιδιοτιμές, τότε η κανονική μορφή του S δίνεται από τον πίνακα (4.5.5) και οι αντίστοιχοι για το εσωτερικό γινόμενο $<,>$ από τους πίνακες (4.2.5), ή (4.3.18) ως προς κατάλληλες βάσεις.*

Συνδυάζοντας τώρα τις Προτάσεις (4.1), (4.2), (4.3) και (4.4) έχουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 4.1

Κεφάλαιο 5

Μελέτη των Υπερεπιφανειών $\mathbf{M}_2^3$ του Χώρου $\mathbf{E}_2^4$ με τη βοήθεια του Τελεστή Σχήματος αυτών.

5.1 Διαρμονικές Υπερεπιφάνειες

Έστω M_2^3 μία διαρμονική υπερεπιφάνεια του ψευδο-Ευκλείδειου χώρου E_2^4. Τότε ισχύουν οι ακόλουθες συνθήκες (4.1.8) και (4.1.9) του Κεφαλαίου 4, δηλαδή οι

$$S(\nabla H) = -\varepsilon \frac{3H}{2}(\nabla H)$$

$$\Delta H + \varepsilon H tr S^2 = 0.$$

Στο κεφάλαιο αυτό αποδεικνύουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 5.1. *Κάθε μη εκφυλισμένη διαρμονική υπερεπιφάνεια M_2^3, του 4-διάστατου ψευδο-Ευκλείδειου χώρου E_2^4, ο τελεστής σχήματος της οποίας είναι μη διαγωνοποιήσιμος, είναι ελαχιστική (minimal).*

Η απόδειξη του θεωρήματος αυτού εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από την μορφή του τελεστή σχήματος της υπερεπιφάνειας, σύμφωνα με όσα αναφέρονται στο

Θεώρημα 4.1. Έτσι λοιπόν εξετάζουμε χωριστά το θεώρημα για κάθε μια από τις περιπτώσεις (ΙΙ), (ΙΙΙ) και (IV), του τελεστή σχήματος, που αναφέρονται στο Θεώρημα 4.1. Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις.

5.2 Ι. Ο Τελεστής Σχήματος S έχει την Κανονική μορφή (ΙΙ)

Ας υποθέσουμε ότι η μέση καμπυλότητα H της υπερεπιφάνειας M_2^3 είναι σταθερά. Τότε η εξίσωση (4.1.9) συνεπάγει ότι

$$HtrS^2 = 0,$$

δεδομένου ότι $\varepsilon = g(\xi, \xi) = +1$. Αν η H είναι μηδέν, τότε το αποτέλεσμα έπεται άμεσα, δηλαδή η M_2^3 είναι ελαχιστική. Αν όμως η H δεν είναι μηδέν τότε, θα είναι $trS^2 = 0$. Όμως, εύκολα έχουμε ότι $trS^2 = 2\lambda^2 + \nu^2$. Κατά συνέπεια θα είναι $\lambda = \nu = 0$. Αλλά $trS = 2\lambda + \nu$, οπότε $trS = 0$. Είναι γνωστό όμως ότι $H = \frac{1}{\varepsilon m} trS$, όπου εν προκειμένω είναι $\varepsilon = +1$ και $m = 3$. Άρα $H = 0$ και επομένως και σ΄ αυτή την περίπτωση η M_2^3 είναι ελαχιστική (minimal).
Αν η H δεν είναι σταθερά, τότε η ∇H είναι διάφορη από το μηδέν και από την εξίσωση (4.1.8) συνεπάγεται ότι η ∇H είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του τελεστή S. Όμως, όπως φαίνεται από τον πίνακα $[G]$ που αντιστοιχεί στην κανονική μορφή (ΙΙ) τα ιδιοδιανύσματα του S είναι είτε **χρονοειδή** (**time-like**) είτε **φωτοειδή** (**light-like**). Κατά συνέπεια, το ∇H πρέπει να είναι είτε ως πρός την διεύθυνση του u_3, είτε ως προς την διεύθυνση του u_2. Εξετάζουμε αυτές τις δύο περιπτώσεις ξεχωριστά στις Προτάσεις 5.1 και 5.2 αντίστοιχα.

Πρόταση 5.1 *Έστω $[M_2^3, (-, +, -)]$ μια διαρμονική υπερεπιφάνεια της ψευδο-Ευκλείδειας πολλαπλότητας E_2^4, ο τελεστής σχήματος της οποίας ως προς μία* *ψευδο-ορθοκανονική βάση είναι*

$$[S]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda & \mu & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix},$$

δηλαδή τύπου (II). Υποθέτουμε ότι το ∇H είναι ένα χρονοειδές (time-like) διάνυσμα. Τότε, η υπερεπιφάνεια M_2^3 είναι ελαχιστική (minimal), δηλαδή έχει μηδενική μέση καμπυλότητα, $H = 0$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $H \neq 0$ και όχι σταθερά. Ως εκ τούτου, $\nabla H \neq \overrightarrow{0}$. Θα δείξουμε ότι, αυτή η υπόθεση οδηγεί σε αντίφαση. Καθώς ο τελεστής σχήματος έχει την κανονική μορφή (II), ως προς μια ψευδο-ορθοκανονική βάση $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ του εφαπτόμενου χώρου $T_p(M_2^3)$, θα έχουμε,

$$S(u_1) = \lambda u_1 + \mu u_2, \quad S(u_2) = \lambda u_2, \quad S(u_3) = \nu u_3.$$

Από την εξίσωση (4.1.8), όπως παρατηρήσαμε και προηγουμένως, συμπεραίνουμε ότι, το ∇H είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του S αντίστοιχο προς την ιδιοτιμή $-\frac{3H}{2}$, δεδομένου ότι, όπως αναφέρθηκε επίσης, προηγουμένως $\varepsilon = +1$.
Εφόσον όμως από την υπόθεση το ∇H είναι ένα χρονοειδές ιδιοδιάνυσμα, αν λάβουμε υπόψη μας τον πίνακα $[G]$ της μετρικής που αντιστοιχεί στη μορφή (II), τότε μπορούμε να το επιλέξουμε να έχει τη διεύθυνση του u_3, οπότε τότε εύκολα συμπεραίνουμε ότι θα είναι $\nu = -\frac{3H}{2}$.
Από την άλλη πλευρά όμως, εφόσον η βάση είναι ψευδο-ορθοκανονική θα έχουμε $\nabla H = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3$, όπου,

$$< \nabla H, u_1 > = < \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3, u_1 > = \beta = u_1(H),$$
$$< \nabla H, u_2 > = < \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3, u_2 > = \alpha = u_2(H),$$
$$< \nabla H, u_3 > = < \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3, u_3 > = -\gamma = u_3(H),$$

άρα $\nabla H = u_2(H)u_1 + u_1(H)u_2 - u_3(H)u_3$. Ως εκ τούτου, και δεδομένου ότι ∇H έχει την διεύθυνση του u_3, θα είναι: $u_1(H) = u_2(H) = 0$ και $u_3(H) \neq 0$. Γνωρίζουμε όμως ότι

$$\nabla_{u_i} u_j = \sum_{k=1}^{3} \omega_{ij}^k u_k \quad ; \quad i, j, k = 1, 2, 3. \tag{5.1.1}$$

ΒΗΜΑ 1: *Σ' αυτό το βήμα θα προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε τις μορφές ω_{ij}^k, έτσι ώστε να απλοποιηθούν, όσο γίνεται, οι εκφράσεις των $\nabla_{u_i} u_j$.*

Από τη σχέση $trS = 3H = 2\lambda + \nu$, λαμβανομένου υπόψη ότι $\nu = -\frac{3H}{2}$, έχουμε $\lambda = \frac{9H}{4}$. Κατά συνέπεια εύκολα έχουμε ότι $trS^2 = \dfrac{99H^2}{8}$. Όμως, δεδομένου ότι τα εσωτερικά γινόμενα $< u_i, u_j >$ είναι σταθερά, για $i, j = 1, 2, 3$ θα έχουμε:

$$\nabla_{u_p} < u_1, u_1 >= \nabla_{u_p} < u_2, u_2 >= \nabla_{u_p} < u_3, u_3 >= 0, \text{ p=1, 2, 3.} \tag{5.1.2}$$

Από την εξίσωση $\nabla_{u_p} < u_1, u_1 >= 0$ λαμβανομένης υπόψη της (5.1.1) έχουμε διαδοχικά

$$< \nabla_{u_p} u_1, u_1 > + < u_1, \nabla_{u_p} u_1 >= 0,$$

ή ισοδύναμα

$$< \omega_{p1}^2 u_2, u_1 > + < u_1, \omega_{p1}^2 u_2 >= 0,$$

ή ισοδύναμα $2\omega_{p1}^2 < u_1, u_2 >= 0$, και άρα $\omega_{p1}^2 = 0$, για κάθε p=1, 2, 3. Επίσης, από την εξίσωση $\nabla_{u_p} < u_2, u_2 >= 0$, εύκολα έχουμε ότι $\omega_{p2}^1 = 0$, p=1, 2, 3, και τέλος από την $\nabla_{u_p} < u_3, u_3 >= 0$, έχουμε $\omega_{p3}^3 = 0$, για κάθε p=1, 2, 3.

Τελικά συγκεντρώνοντας τα παραπάνω αποτελέσματα έχουμε

$$\omega_{p1}^2 = \omega_{p2}^1 = \omega_{p3}^3 = 0, \text{ p=1, 2, 3}$$

ή ισοδύναμα

$$\omega_{11}^2 = \omega_{21}^2 = \omega_{31}^2 = \omega_{12}^1 = \omega_{22}^1 = \omega_{32}^1 = \omega_{13}^3 = \omega_{23}^3 = \omega_{33}^3 = 0. \tag{5.1.3}$$

Εντελώς ανάλογα χρησιμοποιώντας τις σχέσεις

$$\nabla_{u_p} < u_1, u_2 >= \nabla_{u_p} < u_1, u_3 >= \nabla_{u_p} < u_2, u_3 >= 0 \tag{5.1.4}$$

έχουμε, αντίστοιχα

$$\omega_{p1}^1 = -\omega_{p2}^2, \quad \text{p=1, 2, 3.} \tag{5.1.5}$$

Επίσης

$$\omega_{p1}^3 = \omega_{p3}^2, \quad \text{p=1, 2, 3} \tag{5.1.6}$$

και

$$\omega_{p2}^3 = \omega_{p3}^1, \quad \text{p=1, 2, 3.} \tag{5.1.7}$$

Από την άλλη μεριά εφαρμόζοντας την εξίσωση **Codazzi** για υπερεπιφάνειες έχουμε

$$< (\nabla u_1 S)u_2, u_1 >=< (\nabla u_2 S)u_1, u_1 >$$

Το πρώτο μέλος αυτής της εξίσωσης, λαμβανομένων υπόψη των ιδιοτήτων των συναλλοιώτων παραγώγων, της σχέσης (5.1.1) και των ιδιοτήτων της ψευδο-ορθοκανονικής βάσης, γίνεται διαδοχικά

$$\begin{aligned}
< (\nabla_{u_1} S)u_2, u_1 > &= < \nabla_{u_1}(Su_2) - S(\nabla_{u_1} u_2), u_1 > \\
&= < \nabla_{u_1}(Su_2), u_1 > - < S(\nabla_{u_1} u_2), u_1 > \\
&= < \nabla_{u_1}(\lambda u_2), u_1 > - < S(\omega_{12}^1 u_1 + \omega_{12}^2 u_2 + \omega_{12}^3 u_3), u_1 > \\
&= < \lambda \nabla_{u_1} u_2 + u_1(\lambda) u_2, u_1 > \\
&\quad - < S(\omega_{12}^2 u_2), u_1 > - < S(\omega_{12}^3 u_3), u_1 > \\
&= \lambda < \nabla_{u_1} u_2, u_1 > + u_1(\lambda) < u_2, u_1 > \\
&\quad -\omega_{12}^2 < Su_2, u_1 > -\omega_{12}^3 < Su_3, u_1 > \\
&= \lambda < \omega_{12}^2 u_2, u_1 > -\omega_{12}^2 < \lambda u_2, u_1 > -\omega_{12}^3 < \nu u_3, u_1 > \\
&= \lambda \omega_{12}^2 - \lambda \omega_{12}^2 = 0.
\end{aligned}$$

Άρα

$$< (\nabla u_1 S)u_2, u_1 >= 0.$$

Εντελώς ανάλογα το δεύτερο μέλος αυτής της εξίσωσης γίνεται

$$\begin{aligned}
< (\nabla_{u_2} S)u_1, u_1 > &= < \nabla_{u_2}(Su_1) - S(\nabla_{u_2} u_1), u_1 > \\
&= < \nabla_{u_2}(Su_1), u_1 > - < S(\nabla_{u_2} u_1), u_1 > \\
&= < \nabla_{u_2}(\lambda u_1 + \mu u_2), u_1 > \\
&\quad - < S(\omega_{21}^1 u_1 + \omega_{21}^2 u_2 + \omega_{21}^3 u_3), u_1 > \\
&= < \nabla_{u_2} \lambda u_1, u_1 > + < \nabla_{u_2} \mu u_2, u_1 > \\
&\quad - < S(\omega_{21}^1 u_1), u_1 > - < S(\omega_{21}^3 u_3), u_1 > \\
&= < \lambda \nabla_{u_2} u_1 + u_2(\lambda) u_1, u_1 > \\
&\quad + < \mu \nabla_{u_2} u_2 + u_2(\mu) u_2, u_1 > -\omega_{21}^1 < Su_1, u_1 > \\
&\quad -\omega_{21}^3 < Su_3, u_1 > \\
&= \lambda < \nabla_{u_2} u_1, u_1 > +u_2(\lambda) < u_1, u_1 > \\
&\quad +\mu < \nabla_{u_2} u_2, u_1 > +u_2(\mu) < u_2, u_1 > \\
&\quad -\omega_{21}^1 < \lambda u_1 + \mu u_2, u_1 > -\omega_{21}^3 < \nu u_3, u_1 > \\
&= \lambda < \omega_{21}^2 u_2, u_1 > +\mu < \omega_{22}^2 u_2, u_1 > \\
&\quad -\lambda \omega_{21}^1 < u_1, u_1 > -\mu \omega_{21}^1 < u_2, u_1 > \\
&\quad -\nu \omega_{21}^3 < u_3, u_1 > \\
&= \lambda \omega_{21}^2 + \mu \omega_{22}^2 - \mu \omega_{21}^1 \\
&= \mu(\omega_{22}^2 - \omega_{21}^1).
\end{aligned}$$

Κατά συνέπεια θα έχουμε

$$\mu(\omega_{22}^2 - \omega_{21}^1) = 0. \tag{5.1.8}$$

Εφαρμόζοντας τώρα την εξίσωση του Codazzi στη μορφή

$$< (\nabla u_1 S)u_3, u_2 >=< (\nabla u_3 S)u_1, u_2 >,$$

με ανάλογο λογισμό για το πρώτο μέλος έχουμε

$$\begin{aligned}
< (\nabla_{u_1} S)u_3, u_2 > &= < \nabla_{u_1}(Su_3) - S(\nabla_{u_1} u_3), u_2 > \\
&= < \nabla_{u_1}(\nu u_3), u_2 > - < S(\nabla_{u_1} u_3), u_2 > \\
&= < \nu \nabla_{u_1} u_3 + u_1(\nu) u_3, u_2 > - < S(\omega_{13}^1 u_1 + \omega_{13}^2 u_2 + \omega_{13}^3 u_3), u_2 > \\
&= \nu < \nabla_{u_1} u_3, u_2 > + u_1(\nu) < u_3, u_2 > - < S(\omega_{13}^1 u_1), u_2 > \\
&\quad - < S(\omega_{13}^2 u_2), u_2 > \\
&= \nu < \omega_{13}^1 u_1, u_2 > - \omega_{13}^1 < Su_1, u_2 > - \omega_{13}^2 < Su_2, u_2 > \\
&= \nu \omega_{13}^1 < u_1, u_2 > - \omega_{13}^1 < \lambda u_1 + \mu u_2, u_2 > - \omega_{13}^2 < \lambda u_2, u_2 > \\
&= \nu \omega_{13}^1 < u_1, u_2 > - \lambda \omega_{13}^1 < u_1, u_2 > - \mu \omega_{13}^1 < u_2, u_2 > \\
&\quad - \lambda \omega_{13}^2 < u_2, u_2 > \\
&= \nu \omega_{13}^1 - \lambda \omega_{13}^1 = (\nu - \lambda)\omega_{13}^1.
\end{aligned}$$

Αντίστοιχα για το δεύτερο μέλος έχουμε

$$\begin{aligned}
< (\nabla_{u_3} S)u_1, u_2 > &= < \nabla_{u_3}(Su_1) - S(\nabla_{u_3} u_1), u_2 > \\
&= < \nabla_{u_3}(Su_1), u_2 > - < S(\nabla_{u_3} u_1), u_2 > \\
&= < \nabla_{u_3}(\lambda u_1 + \mu u_2), u_2 > - < S(\omega_{31}^1 u_1 + \omega_{31}^2 u_2 + \omega_{31}^3 u_3), u_2 > \\
&= < \nabla_{u_3}(\lambda u_1), u_2 > + < \nabla_{u_3}(\mu u_2), u_2 > - < S(\omega_{31}^1 u_1), u_2 > \\
&\quad - < S(\omega_{31}^3 u_3), u_2 > \\
&= < \lambda \nabla_{u_3} u_1 + u_3(\lambda) u_1, u_2 > + < \mu \nabla_{u_3} u_2 + u_3(\mu) u_2, u_2 > \\
&\quad - \omega_{31}^1 < Su_1, u_2 > - \omega_{31}^3 < Su_3, u_2 > \\
&= \lambda < \nabla_{u_3} u_1, u_2 > + u_3(\lambda) < u_1, u_2 > + \mu < \nabla_{u_3} u_2, u_2 > \\
&\quad + u_3(\mu) < u_2, u_2 > - \omega_{31}^1 < \lambda u_1 + \mu u_2, u_2 > - \omega_{31}^3 < \nu u_3, u_2 > \\
&= \lambda < \omega_{31}^1 u_1, u_2 > + u_3(\lambda) + \mu < \omega_{32}^1 u_1, u_2 > - \lambda \omega_{31}^1 \\
&= u_3(\lambda).
\end{aligned}$$

Οπότε

$$u_3(\lambda) = (\nu - \lambda)\omega_{13}^1. \tag{5.1.9}$$

Ανάλογα, θεωρούμε την εξίσωση του Codazzi στην ακόλουθη μορφή,
$< (\nabla u_2 S)u_3, u_1 >=< (\nabla u_3 S)u_2, u_1 >$, οπότε

$$\begin{aligned} < (\nabla_{u_2} S)u_3, u_1 > &= < \nabla_{u_2}(Su_3) - S(\nabla_{u_2} u_3), u_1 > \\ &= (\nu - \lambda)\omega_{23}^2 - \mu\omega_{23}^1, \end{aligned}$$

ενώ το δεύτερο μέλος αυτής γίνεται

$$\begin{aligned} < (\nabla_{u_3} S)u_2, u_1 > &= < \nabla_{u_3}(Su_2) - S(\nabla_{u_3} u_2), u_1 > \\ &= u_3(\lambda), \end{aligned}$$

και κατά συνέπεια

$$u_3(\lambda) = (\nu - \lambda)\omega_{23}^2 - \mu\omega_{23}^1. \tag{5.1.10}$$

Τέλος, θεωρούμε την εξίσωση του Codazzi στη μορφή

$$< (\nabla u_2 S)u_3, u_2 >=< (\nabla u_3 S)u_2, u_2 >,$$

οπότε

$$\begin{aligned} < (\nabla_{u_2} S)u_3, u_2 > &= < \nabla_{u_2}(Su_3) - S(\nabla_{u_2} u_3), u_2 > \\ &= < \nabla_{u_2}(Su_3), u_2 > - < S(\nabla_{u_2} u_3), u_2 > \\ &= < \nabla_{u_2}(\nu u_3), u_2 > - < S(\omega_{23}^1 u_1 + \omega_{23}^2 u_2 + \omega_{23}^3 u_3), u_2 > \\ &= < \nu\nabla_{u_2} u_3 + u_2(\nu)u_3, u_2 > - < S(\omega_{23}^1 u_1), u_2 > \\ &\quad - < S(\omega_{23}^2 u_2), u_2 > \\ &= \nu < \nabla_{u_2} u_3, u_2 > + u_2(\nu) < u_3, u_2 > - \omega_{23}^1 < Su_1, u_2 > \\ &\quad - \omega_{23}^2 < Su_2, u_2 > \\ &= \nu < \omega_{23}^1 u_1, u_2 > - \omega_{23}^1 < \lambda u_1 + \mu u_2, u_2 > \\ &\quad - \omega_{23}^2 < \lambda u_2, u_2 > \\ &= \nu\omega_{23}^1 - \lambda\omega_{23}^1 = (\nu - \lambda)\omega_{23}^1. \end{aligned}$$

Για το δεύτερο μέλος έχουμε

$$\begin{aligned}
<(\nabla_{u_3}S)u_2, u_2> &= <\nabla_{u_3}(Su_2) - S(\nabla_{u_3}u_2), u_2> \\
&= <\nabla_{u_3}(Su_2), u_2> - <S(\nabla_{u_3}u_2), u_2> \\
&= <\nabla_{u_3}(\lambda u_2), u_2> - <S(\omega_{32}^1 u_1 + \omega_{32}^2 u_2 + \omega_{32}^3 u_3), u_2> \\
&= <\lambda\nabla_{u_3}u_2 + u_3(\lambda)u_2, u_2> - <S(\omega_{32}^2 u_2), u_2> \\
&\quad - <S(\omega_{32}^3 u_3), u_2> \\
&= \lambda <\nabla_{u_3}u_2, u_2> + u_3(\lambda) <u_2, u_2> - <S(\omega_{32}^2 u_2), u_2> \\
&\quad - <S(\omega_{32}^3 u_3), u_2> \\
&= \lambda <\nabla_{u_3}u_2, u_2> + u_3(\lambda) <u_2, u_2> - \omega_{32}^2 <Su_2, u_2> \\
&\quad - \omega_{32}^3 <Su_3, u_2> \\
&= \lambda <\omega_{32}^1 u_1, u_2> - \omega_{32}^2 <\lambda u_2, u_2> - \omega_{32}^3 <\nu u_3, u_2> \\
&= \lambda\omega_{32}^1 <u_1, u_2> - \lambda\omega_{32}^2 <u_2, u_2> \\
&\quad - \nu\omega_{32}^3 <u_3, u_2> = 0.
\end{aligned}$$

Εξισώνοντας τα δύο μέλη έχουμε

$$(\nu - \lambda)\omega_{23}^1 = 0. \tag{5.1.11}$$

Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

(1) Αν $\mu \neq 0$, και δεδομένου ότι $\nu = -\frac{3H}{2} \neq \frac{9H}{4} = \lambda$ από την εξίσωση (5.1.8) έχουμε $\omega_{22}^2 = \omega_{21}^1$. Επιπλέον η εξίσωση (5.1.5) γιά p=2 δίνει $\omega_{22}^2 = -\omega_{21}^1$. Συνεπώς,

$$\omega_{22}^2 = \omega_{21}^1 = 0. \tag{5.1.12}$$

Επίσης, από την εξίσωση (5.1.11) συμπεραίνουμε ότι

$$\omega_{23}^1 = 0. \tag{5.1.13}$$

Συνδυάζοντας τώρα τις εξισώσεις (5.1.9) και (5.1.10) εύκολα έχουμε ότι

$$\omega_{23}^2 = \omega_{13}^1 \neq 0. \tag{5.1.14}$$

Επίσης από τις εξισώσεις (5.1.7) και (5.1.13) έχουμε

$$\omega_{22}^3 = 0. \tag{5.1.15}$$

Επομένως, οι εξισώσεις (5.1.9) και (5.1.10) γίνονται

$$u_3(\lambda) = (\nu - \lambda)\omega_{13}^1 = (\nu - \lambda)\omega_{23}^2. \tag{5.1.16}$$

Παρατήρηση: Οι μορφές ω_{13}^1, ω_{23}^2 της σχέσης (5.1.14) είναι διάφορες του μηδενός, γιατί αν υποτεθεί ότι $\omega_{13}^1 = \omega_{23}^2 = 0$, τότε φθάνουμε σε αντίφαση. Πράγματι, από τη σχέση $trS = 3H$, μέσω της (5.1.16) οδηγούμαστε στη σχέση $u_3(\lambda) = 0$, ισοδύναμα $u_3(\frac{9H}{4}) = 0$, δηλαδή $u_3(H) = 0$, πράγμα το οποίο είναι άτοπο, αφού από την υπόθεσή μας $u_3(H) \neq 0$.
Εφαρμόζοντας και πάλι την εξίσωση Codazzi στις ακόλουθες δύο μορφές

$$< (\nabla u_2 S)u_3, u_3 >=< (\nabla u_3 S)u_2, u_3 >,$$
$$< (\nabla u_1 S)u_3, u_3 >=< (\nabla u_3 S)u_1, u_3 >,$$

βρίσκουμε ότι,

$$\omega_{32}^3 = \omega_{31}^3 = 0. \tag{5.1.17}$$

Αν επιπλέον λάβουμε υπόψη τις προηγούμενες συνθήκες (5.1.6), (5.1.7), (5.1.13) και (5.1.17) βρίσκουμε επίσης

$$\omega_{33}^1 = \omega_{33}^2 = \omega_{22}^3 = 0. \tag{5.1.18}$$

Τέλος από την εξίσωση

$$< (\nabla u_1 S)u_2, u_3 >=< (\nabla u_2 S)u_1, u_3 >$$

βρίσκουμε,

$$\omega_{12}^3 = \omega_{21}^3. \tag{5.1.19}$$

Από την παραπάνω ανάλυση λοιπόν, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι, οι συναλλοίωτοι παράγωγοι $\nabla_{u_i} u_j; \quad i,j,k = 1,2,3$ απλοποιούνται στις ακόλουθες μορφές:

$$\nabla_{u_1} u_1 = \omega_{11}^1 u_1 + \omega_{11}^3 u_3, \quad \nabla_{u_1} u_2 = \omega_{12}^2 u_2 + \omega_{12}^3 u_3, \quad \nabla_{u_1} u_3 = \omega_{13}^1 u_1 + \omega_{13}^2 u_2$$

$$\nabla_{u_2} u_1 = \omega_{21}^3 u_3, \quad \nabla_{u_2} u_2 = 0, \quad \nabla_{u_2} u_3 = \omega_{23}^2 u_2 \tag{5.1.20}$$

$$\nabla_{u_3} u_1 = \omega_{31}^1 u_1, \quad \nabla_{u_3} u_2 = \omega_{32}^2 u_2, \quad \nabla_{u_3} u_3 = 0.$$

ΒΗΜΑ 2: *Στόχος του βήματος αυτού, είναι ο υπολογισμός της παραγώγου* $u_3(H)$. Πρώτα, βρίσκουμε την έκφραση του S ως προς μια ορθοκανονική βάση και στη συνέχεια εφαρμόζουμε την εξίσωση (4.1.9), στην οποία το $\triangle H$ είναι εκπεφρασμένο με τη βοήθεια ορθοκανονικής βάσης.

Κατά ένα φυσικό τρόπο, μπορεί εύκολα να κατασκευασθεί μια ορθοκανονική βάση $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$, από την ψευδο-ορθοκανονική βάση $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$, που ήδη έχουμε θεωρήσει. Πράγματι, τα διανύσματα τα οποία δίνονται από τις σχέσεις

$$e_1 = \frac{u_1 - u_2}{\sqrt{2}}, \qquad e_2 = \frac{u_1 + u_2}{\sqrt{2}}, \qquad e_3 = u_3 \tag{5.1.21}$$

εύκολα αποδεικνύεται ότι, συνιστούν μία ορθοκανονική βάση του $T_p(M_2^3)$. Ικανοποιούν δηλαδή τις ακόλουθες συνθήκες:

$$< e_1, e_1 >=< e_3, e_3 >= -1, < e_2, e_2 >= +1,$$

$$< e_1, e_2 >=< e_1, e_3 >=< e_2, e_3 >= 0. \tag{5.1.22}$$

Τα διανύσματα δηλαδή e_1, e_3 είναι χρονοειδή (time-like) διανύσματα, ενώ το e_2 είναι χωροειδές (space-like) διάνυσμα. Από (5.1.21) εύκολα έχουμε

$$u_1 = \frac{2(e_1 + e_2)}{\sqrt{2}}, \qquad u_2 = \frac{2(-e_1 + e_2)}{\sqrt{2}}, \qquad u_3 = e_3. \tag{5.1.23}$$

Αλλά λόγω της μορφής του S, όπως έχουμε αναφέρει και στην αρχή της απόδειξης

$$S(u_1) = \lambda u_1 + \mu u_2.$$

Η σχέση αυτή λόγω των σχέσεων (5.1.23) γίνεται

$$S[\frac{2(e_1+e_2)}{\sqrt{2}}] = \lambda\frac{2(e_1+e_2)}{\sqrt{2}} + \mu\frac{2(-e_1+e_2)}{\sqrt{2}},$$

ή ισοδύναμα

$$S(e_1) + S(e_2) = (\lambda-\mu)e_1 + (\lambda+\mu)e_2. \tag{5.1.24}$$

Όμως,

$$S(u_2) = \lambda u_2,$$

άρα

$$-S(e_1) + S(e_2) = -\lambda e_1 + \lambda e_2. \tag{5.1.25}$$

Τέλος από τη σχέση

$$S(u_3) = \nu u_3,$$

έχουμε

$$S(e_3) = -\frac{3H}{2}e_3. \tag{5.1.26}$$

Από το σύστημα τώρα των εξισώσεων (5.1.24), (5.1.25) και (5.1.26) εύκολα έχουμε,

$$S(e_1) = (\lambda - \frac{\mu}{2})e_1 + \frac{\mu}{2}e_2 + 0e_3$$

$$S(e_2) = -\frac{\mu}{2}e_1 + (\lambda + \frac{\mu}{2})e_2 + 0e_3, \tag{5.1.27}$$

$$S(e_3) = 0e_1 + 0e_2 - \frac{3H}{2}e_3. \tag{5.1.28}$$

Επομένως, η παράσταση του τελεστή σχήματος S, ως προς την ορθοκανονική βάση $\mathcal{E}$ θα είναι:

$$[S]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \lambda - \frac{\mu}{2} & \frac{\mu}{2} & 0 \\ -\frac{\mu}{2} & \lambda + \frac{\mu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3H}{2} \end{pmatrix}$$

Σημειώνουμε ότι το ∇H έχει την διεύθυνση του e_3 και ότι $\nu = -\frac{3H}{2}$. Η σχέση (5.1.1) μέσω των σχέσεων (5.1.23) μετασχηματίζεται στην

$$\begin{aligned} \nabla H &= \frac{(-e_1+e_2)}{\sqrt{2}}(H)\frac{(e_1+e_2)}{\sqrt{2}} + \frac{(e_1+e_2)}{\sqrt{2}}(H)\frac{(-e_1+e_2)}{\sqrt{2}} - e_3(H)e_3 \\ &= -e_1(H)e_1 + e_2(H)e_2 - e_3(H)e_3 \end{aligned}$$

τελικά,

$$\nabla H = -e_1(H)e_1 + e_2(H)e_2 - e_3(H)e_3. \tag{5.1.29}$$

Δεδομένου όμως ότι το ∇H έχει την διεύθυνση του e_3, άμεσα συνάγεται ότι,

$$e_1(H) = e_2(H) = 0 \ \text{ και } \ e_3(H) \neq 0.$$

Χρησιμοποιώντας τον τελεστή Laplace (4.1.10) όπου $< e_i, e_i >= \varepsilon_i = \pm 1$, η εξίσωση

$$\triangle H + HtrS^2 = 0 \qquad\qquad (4.1.9)$$

μετασχηματίζεται στην εξίσωση,

$$-\varepsilon_1[e_1e_1(H) - \nabla_{e_1}e_1(H)] - \varepsilon_2[e_2e_2(H) - \nabla_{e_2}e_2(H)] - \varepsilon_3[e_3e_3(H) - \nabla_{e_3}e_3(H)] + \\ + HtrS^2 = 0.$$

Όμως $\varepsilon_1 = -1, \ \varepsilon_2 = +1, \ \varepsilon_3 = -1$ και επομένως η παραπάνω σχέση, αν ληφθεί υπόψη η τιμή του trS^2 από τη σχέση

$$trS^2 = \frac{99}{8}H^2. \tag{5.1.30}$$

γίνεται

$$\nabla_{e_1}e_1(H) - \nabla_{e_2}e_2(H) - e_3e_3(H) - \frac{99H^3}{8} = 0. \tag{5.1.31}$$

Στη συνέχεια, θα υπολογίσουμε τις ποσότητες $\nabla_{e_1}e_1(H)$ και $\nabla_{e_2}e_2(H)$.

Με τη βοήθεια των (5.1.20) και (5.1.21) έχουμε διαδοχικά,

$$\begin{aligned}
\nabla_{e_1}e_1 &= \nabla_{\frac{(u_1-u_2)}{\sqrt{2}}}(\frac{u_1-u_2}{\sqrt{2}}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\nabla_{u_1}(\frac{u_1-u_2}{\sqrt{2}}) - \frac{1}{\sqrt{2}}\nabla_{u_2}(\frac{u_1-u_2}{\sqrt{2}}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}[\nabla_{u_1}(\frac{u_1}{\sqrt{2}}) - \nabla_{u_1}(\frac{u_2}{\sqrt{2}})] - \frac{1}{\sqrt{2}}[\nabla_{u_2}(\frac{u_1}{\sqrt{2}}) - \nabla_{u_2}(\frac{u_2}{\sqrt{2}})] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}[\frac{1}{\sqrt{2}}\nabla_{u_1}u_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\nabla_{u_1}u_2] - \frac{1}{\sqrt{2}}[\frac{1}{\sqrt{2}}\nabla_{u_2}u_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\nabla_{u_2}u_2] \\
&= \frac{1}{2}(\nabla_{u_1}u_1 - \nabla_{u_1}u_2 - \nabla_{u_2}u_1 + \nabla_{u_2}u_2) \\
&= \frac{1}{2}(\omega_{11}^1 u_1 + \omega_{11}^3 u_3 - \omega_{12}^2 u_2 - \omega_{12}^3 u_3 - \omega_{21}^3 u_3),
\end{aligned}$$

άρα

$$\nabla_{e_1}e_1(H) = \frac{1}{2}(\omega_{11}^3 - \omega_{12}^3 - \omega_{21}^3)u_3(H)$$

και αν ληφθεί υπόψη (5.1.19) έχουμε

$$\nabla_{e_1}e_1(H) = \frac{1}{2}(\omega_{11}^3 - 2\omega_{12}^3)u_3(H). \tag{5.1.32}$$

Όμοια εργαζόμενοι έχουμε

$$\begin{aligned}
\nabla_{e_2}e_2 &= \nabla_{\frac{(u_1+u_2)}{\sqrt{2}}}(\frac{u_1+u_2}{\sqrt{2}}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\nabla_{u_1}(\frac{u_1+u_2}{\sqrt{2}}) + \frac{1}{\sqrt{2}}\nabla_{u_2}(\frac{u_1+u_2}{\sqrt{2}}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}[\nabla_{u_1}(\frac{u_1}{\sqrt{2}}) + \nabla_{u_1}(\frac{u_2}{\sqrt{2}})] + \frac{1}{\sqrt{2}}[\nabla_{u_2}(\frac{u_1}{\sqrt{2}}) + \nabla_{u_2}(\frac{u_2}{\sqrt{2}})] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}[\frac{1}{\sqrt{2}}\nabla_{u_1}u_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\nabla_{u_1}u_2] + \frac{1}{\sqrt{2}}[\frac{1}{\sqrt{2}}\nabla_{u_2}u_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\nabla_{u_2}u_2] \\
&= \frac{1}{2}(\nabla_{u_1}u_1 + \nabla_{u_1}u_2 + \nabla_{u_2}u_1 + \nabla_{u_2}u_2) \\
&= \frac{1}{2}(\omega_{11}^1 u_1 + \omega_{11}^3 u_3 + \omega_{12}^2 u_2 + \omega_{12}^3 u_3 + \omega_{21}^3 u_3),
\end{aligned}$$

άρα

$$\nabla_{e_2}e_2(H) = \frac{1}{2}(\omega_{11}^3 + \omega_{12}^3 + \omega_{21}^3)u_3(H),$$

και αν ληφθεί υπόψη η (5.1.19) έχουμε

$$\nabla_{e_2} e_2(H) = \frac{1}{2}(\omega_{11}^3 + 2\omega_{12}^3)u_3(H). \tag{5.1.33}$$

Η σχέση (5.1.31) μέσω των σχέσεων, (5.1.32) και (5.1.33) γίνεται

$$u_3 u_3(H) + 2\omega_{12}^3 u_3(H) + \frac{99H^3}{8} = 0. \tag{5.1.34}$$

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε την έκφραση $u_3(H)$. Η σχέση,

$$u_3(\lambda) = (\nu - \lambda)\omega_{13}^1 \qquad (5.1.16)$$

αν λάβουμε υπόψη μας ότι $\lambda = \frac{9H}{4}$, $\nu = -\frac{3H}{2}$ και τη σχέση (5.1.7) γίνεται

$$\frac{9}{4}u_3(H) = -\frac{15}{4}H\omega_{13}^1$$

από την οποία εύκολα έχουμε,

$$u_3(H) = -\frac{5}{3}H\omega_{13}^1 = -\frac{5}{3}H\omega_{12}^3. \tag{5.1.35}$$

ΒΗΜΑ 3: *Στο βήμα αυτό θα υπολογίσουμε πρώτα την έκφραση* $u_3 u_3(H)$. Αυτό επιτυγχάνεται με την εφαρμογή της εξίσωσης του Gauss. Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα των βημάτων 1 και 2 φθάνουμε σε άτοπο. Πράγματι, χρησιμοποιώντας την εξίσωση Gauss (4.1.4) για υπερεπιφάνειες του χώρου E_2^4 έχουμε:

$$R(X,Y)Z = S(X) < S(Y), Z > -S(Y) < S(X), Z > .$$

Αλλά είναι επίσης γνωστό ότι

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z.$$

Εφαρμόζοντας τις σχέσεις αυτές για $X = u_3,\ Y = u_1,\ Z = u_2$, βρίσκουμε το $R(u_3, u_1)u_2$ με δύο διαφορετικούς τρόπους. Στη συνέχεια παίρνουμε το εσωτερικό γινόμενο με το u_3 και έχουμε.

$$R(u_3, u_1)u_2 = \nabla_{u_3}\nabla_{u_1} u_2 - \nabla_{u_1}\nabla_{u_3} u_2 - \nabla_{[u_3,u_1]} u_2.$$

Αλλά

$$[u_3, u_1] = \nabla_{u_3} u_1 - \nabla_{u_1} u_3 = \omega_{31}^1 u_1 - \omega_{13}^1 u_1 - \omega_{13}^2 u_2,$$

τότε

$$\begin{aligned}
R(u_3, u_1)u_2 &= \nabla_{u_3}(\omega_{12}^2 u_2 + \omega_{12}^3 u_3) - \nabla_{u_1}(\omega_{32}^2 u_2) - \nabla_{\omega_{31}^1 u_1 - \omega_{13}^1 u_1 - \omega_{13}^2 u_2} u_2 \\
&= \nabla_{u_3}(\omega_{12}^2 u_2) + \nabla_{u_3}(\omega_{12}^3 u_3) - \nabla_{u_1}(\omega_{32}^2 u_2) \\
&\quad -\omega_{31}^1 \nabla_{u_1} u_2 + \omega_{13}^1 \nabla_{u_1} u_2 + \omega_{13}^2 \nabla_{u_2} u_2 \\
&= \omega_{12}^2 \nabla_{u_3} u_2 + u_3(\omega_{12}^2) u_2 + \omega_{12}^3 \nabla_{u_3} u_3 + u_3(\omega_{12}^3) u_3 \\
&\quad -\omega_{32}^2 \nabla_{u_1} u_2 - u_1(\omega_{32}^2) u_2 - \omega_{31}^1(\omega_{12}^2 u_2 + \omega_{12}^3 u_3) \\
&\quad +\omega_{13}^1(\omega_{12}^2 u_2 + \omega_{12}^3 u_3) \\
&= \omega_{12}^2 \omega_{32}^2 u_2 + u_3(\omega_{12}^2) u_2 + u_3(\omega_{12}^3) u_3 - \omega_{32}^2(\omega_{12}^2 u_2 + \omega_{12}^3 u_3) \\
&\quad -u_1(\omega_{32}^2) u_2 - \omega_{31}^1 \omega_{12}^2 u_2 - \omega_{31}^1 \omega_{12}^3 u_3 + \omega_{13}^1 \omega_{12}^2 u_2 + \omega_{13}^1 \omega_{12}^3 u_3.
\end{aligned}$$

Παίρνουμε τώρα τα εσωτερικά γινόμενα με το u_3 και των δύο μελών και έχουμε:

$$\begin{aligned}
< R(u_3, u_1)u_2, u_3 > &= -u_3(\omega_{12}^3) + \omega_{32}^2 \omega_{12}^3 + \omega_{31}^1 \omega_{12}^3 - \omega_{13}^1 \omega_{12}^3 \\
&= -u_3(\omega_{12}^3) - \omega_{31}^1 \omega_{12}^3 + \omega_{31}^1 \omega_{12}^3 - (\omega_{12}^3)^2 \\
&= -u_3(\omega_{12}^3) - (\omega_{12}^3)^2,
\end{aligned}$$

ή τελικά

$$< R(u_3, u_1)u_2, u_3 >= -u_3(\omega_{12}^3) - (\omega_{12}^3)^2. \tag{5.1.36}$$

Κάναμε χρήση των τύπων (5.1.5) και (5.1.7) δηλαδή $\omega_{32}^2 = -\omega_{31}^1$ και $\omega_{12}^3 = \omega_{13}^1$. Από την άλλη μεριά έχουμε.

$$R(u_3, u_1)u_2 = S(u_3) < S(u_1), u_2 > -S(u_1) < S(u_3), u_2 >,$$

οπότε παίρνοντας τα εσωτερικά γινόμενα με το u_3 και των δυο μελών έχουμε

$$\begin{aligned} < R(u_3,u_1)u_2,u_3 > &= < S(u_3),u_3 >< S(u_1),u_2 > \\ &\quad - < S(u_1),u_3 >< S(u_3),u_2 > \\ &= < \nu u_3,u_3 >< \lambda u_1+\mu u_2,u_2 > \\ &\quad - < S(u_1),u_3 >< \nu u_3,u_2 > \\ &= -\nu < \lambda u_1+\mu u_2,u_2 > \\ &= -\nu < \lambda u_1,u_2 > -\nu < \mu u_2,u_2 > \\ &= -\nu\lambda = \frac{27}{8}H^2. \end{aligned}$$

Τελικά

$$< R(u_3,u_1)u_2,u_3 >= \frac{27}{8}H^2. \tag{5.1.37}$$

Από τις σχέσεις (5.1.36) και (5.1.37) έχουμε,

$$u_3(\omega_{12}^3) = -(\omega_{12}^3)^2 - \frac{27H^2}{8}. \tag{5.1.38}$$

Παραγωγίζουμε τώρα και τα δυο μέλη της (5.1.35) ως προς u_3 και χρησιμοποιώντας την (5.1.38) έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} u_3u_3(H) &= -\frac{5}{3}u_3(H)\omega_{12}^3 - \frac{5}{3}Hu_3(\omega_{12}^3) \\ &= -\frac{5}{3}[-\frac{5}{3}H\omega_{12}^3]\omega_{12}^3 - \frac{5}{3}H[-(\omega_{12}^3)^2 - \frac{27}{8}H^2] \\ &= \frac{25}{9}H(\omega_{12}^3)^2 + \frac{5}{3}H(\omega_{12}^3)^2 + \frac{135}{24}H^3. \end{aligned}$$

Άρα,

$$u_3u_3(H) = \frac{40H}{9}(\omega_{12}^3)^2 + \frac{45H^3}{8}. \tag{5.1.39}$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (5.1.35) και (5.1.39) στη σχέση (5.1.34) έχουμε:

$$\frac{40H}{9}(\omega_{12}^3)^2 + \frac{45H^3}{8} + 2\omega_{12}^3(-\frac{5}{3}H\omega_{12}^3) + \frac{99}{8}H^3 = 0$$

ή

$$\frac{5}{9}H(\omega_{12}^3)^2 + \frac{72}{8}H^3 = 0,$$

και εφόσον από την υπόθεση $H \neq 0$, έχουμε

$$\frac{5}{9}(\omega_{12}^3)^2 + 9H^2 = 0. \tag{5.1.40}$$

Αυτή η συνθήκη όμως ικανοποιείται αν και μόνο αν $\omega_{12}^3 = 0$ και $H = 0$, πράγμα το οποίο είναι άτοπο.

(2) Αν $\mu = 0$, και δεδομένου ότι $\nu \neq \lambda$ εργαζόμαστε με όμοιο τρόπο οπότε οι εξισώσεις (5.1.20) παραμένουν ίδιες, και διαφοροποιούνται μόνο οι ακόλουθες:

$$\nabla_{u_2}u_1 = \omega_{21}^1 u_1 + \omega_{21}^3 u_3, \quad \nabla_{u_2}u_2 = \omega_{22}^2 u_2.$$

Επίσης οι εξισώσεις (5.1.32), (5.1.33), (5.1.38), (5.1.39) και (5.1.40) παραμένουν ίδιες. Εργαζόμενοι τώρα όπως και προηγουμένως, εύκολα συνάγουμε πάλι ότι $H = 0$, πράγμα το οποίο αντίκειται στην υπόθεσή μας.

(3) Αν $\mu = 0, \quad \nu = \lambda$ τότε, $trS = 2\lambda + \nu = 3H$ ή $\lambda = H$. Από τη σχέση (5.1.9) έχουμε $u_3(\lambda) = 0$ ή ισοδύναμα $u_3(H) = 0$, το οποίο είναι μία αντίφαση, επειδή έχουμε υποθέσει ότι $u_3(H) \neq 0$. Συνεπώς $H = 0$ και η υπερεπιφάνεια είναι ελαχιστική.

(4) Αν $\mu \neq 0, \quad \nu = \lambda$ εύκολα προκύπτει και πάλι ότι $\lambda = H$ και επομένως $u_3(H) = 0$, το οποίο είναι μία αντίφαση και συνεπώς $H = 0$.

Αποδείχθηκε λοιπόν σε κάθε περίπτωση, πως η υπερεπιφάνεια M_2^3 είναι ελαχιστική.

Στη συνέχεια μελετάμε το ίδιο πρόβλημα, με την υπόθεση ότι το ιδιοδιάνυσμα ∇H είναι ένα φωτοειδές διάνυσμα. Ειδικότερα, έχουμε, την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 5.2 *Έστω $[M_2^3, (-,+,-)]$ μία διαρμονική υπερεπιφάνεια της ψευδο-Ευκλείδειας πολλαπλότητας E_2^4, ο τελεστής σχήματος της οποίας ως προς μία* *ψευδο-ορθοκανονική βάση είναι*

$$[S]_{\mathcal{B}} \;=\; \begin{pmatrix} \lambda & \mu & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix},$$

δηλαδή τύπου (ΙΙ). Υποθέτουμε ότι το ∇H είναι ένα φωτοειδές (light-like) διάνυσμα. Τότε, η υπερεπιφάνεια M_2^3 είναι ελαχιστική (minimal), δηλαδή έχει μηδενική μέση καμπυλότητα, $H = 0$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι H δεν είναι σταθερά και ότι $H \neq 0$. Θα αποδειξουμε ότι, αυτή η υπόθεση οδηγεί σε αντίφαση. Εφόσον η H δεν είναι σταθερά θα είναι $\nabla H \neq \overrightarrow{0}$, οπότε η διανυσματική εξίσωση (4.1.8), δηλαδή η

$$S(\nabla H) = -\frac{3H}{2}(\nabla H)$$

μας λέει ότι το ∇H είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του τελεστή S αντίστοιχο της ιδιοτιμής $-\frac{3H}{2}$.

Εφόσον ο τελεστής σχήματος S έχει την κανονική μορφή (ΙΙ), ως προς μια ψευδο-ορθοκανονική βάση $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ του εφαπτόμενου χώρου $T_p(M_2^3)$, θα έχουμε,

$$S(u_1) = \lambda u_1 + \mu u_2, \quad S(u_2) = \lambda u_2, \quad S(u_3) = \nu u_3. \quad (1)$$

Ως γνωστόν σ' αυτή την περίπτωση, ο πίνακας αναπαράστασης $G = (g_{ij})$, όπου $g_{ij} = g_{ij}(u_i, u_j)$, του μετρικού τανυστή είναι

$$[G]_{\mathcal{B}} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & +1 & 0 \\ +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Εφόσον το ∇H είναι ένα φωτοειδές (light-like) ιδιοδιάνυσμα του S, λαμβανομένου υπόψη των σχέσεων (1) μπορούμε να θεωρήσουμε το διάνυσμα αυτό στην διεύθυνση του u_2. Επομένως θα είναι $\lambda = -\frac{3H}{2}$. Επειδή η βάση είναι ψευδο-ορθοκανονική όπως και προηγουμένως θα έχουμε

$$\nabla H = u_2(H)u_1 + u_1(H)u_2 - u_3(H)u_3.$$

Ως εκ τούτου

$$u_2(H) = u_3(H) = 0 \ \text{ και } \ \ u_1(H) \neq 0.$$

Ως γνωστόν

$$\nabla_{u_i} u_j = \sum \omega_{ij}^k u_k \ \ ; \ \ i, j, k = 1, 2, 3.$$

Θα προσπαθήσουμε να απλοποιήσουμε αυτές τις εκφράσεις, υπολογίζοντας τα ω_{ij}^k. Από τη σχέση $\frac{1}{\varepsilon m} trS = H$, γιά $\varepsilon = +1$ και $m = 3$ έχουμε $\frac{1}{3}(2\lambda + \nu) = H$, άρα $2\lambda + \nu = 3H$, τελικά $\nu = 6H$.

Παρατηρούμε ότι οι εξισώσεις (5.1.2), (5.1.3), (5.1.4), (5.1.5), (5.1.6) και (5.1.7) της προηγούμενης Πρότασης 5.1 ισχύουν επίσης και σε αυτή την περίπτωση. Στη συνέχεια εφαρμόζοντας την εξίσωση Codazzi γιά υπερεπιφάνειες, έχουμε

$$< (\nabla u_1 S)u_3, u_2 > = < (\nabla u_3 S)u_1, u_2 > .$$

Το πρώτο μέλος αυτής της εξίσωσης, λαμβανομένου υπόψη των ιδιοτήτων των συναλλοιώτων παραγώγων της σχέσης (5.1.1) και των ιδιοτήτων της ψευδο-ορθοκανονικής βάσης, γράφεται διαδοχικά ως εξής:

$$\begin{aligned} < (\nabla_{u_1} S)u_3, u_2 > &= < \nabla_{u_1}(Su_3) - S(\nabla_{u_1} u_3), u_2 > \\ &= (\nu - \lambda)\omega_{13}^1. \end{aligned}$$

Εντελώς ανάλογα το δεύτερο μέλος αυτής της εξίσωσης γίνεται

$$\begin{aligned} < (\nabla_{u_3} S)u_1, u_2 > &= < \nabla_{u_3}(Su_1) - S(\nabla_{u_3} u_1), u_2 > \\ &= u_3(\lambda). \end{aligned}$$

Κατά συνέπεια θα έχουμε

$$u_3(\lambda) = (\nu - \lambda)\omega_{13}^1 = 0. \tag{5.1.41}$$

Παρατήρηση: Το ότι $u_3(\lambda) = 0$, συνεπάγεται άμεσα, δεδομένου ότι $u_3(\lambda) = u_3(-\frac{3H}{2}) = -\frac{3}{2}u_3(H) = 0$.

Εφαρμόζοντας και πάλι την εξίσωση Codazzi γιά υπερεπιφάνειες έχουμε

$$< (\nabla u_2 S)u_3, u_3 >=< (\nabla u_3 S)u_2, u_3 > .$$

Το πρώτο μέλος αυτής της εξίσωσης γράφεται διαδοχικά

$$\begin{aligned}
< (\nabla_{u_2} S)u_3, u_3 > &= < \nabla_{u_2}(Su_3) - S(\nabla_{u_2} u_3), u_3 > \\
&= < \nabla_{u_2}(Su_3), u_3 > - < S(\nabla_{u_2} u_3), u_3 > \\
&= < \nabla_{u_2}(\nu u_3), u_3 > - < S(\omega_{23}^1 u_1 + \omega_{23}^2 u_2 + \omega_{23}^3 u_3), u_3 > \\
&= < \nu \nabla_{u_2} u_3 + u_2(\nu)u_3, u_3 > - < S(\omega_{23}^1 u_1), u_3 > \\
&\quad - < S(\omega_{23}^3 u_2), u_3 > \\
&= \nu < \nabla_{u_2} u_3, u_3 > + u_2(\nu) < u_3, u_3 > -\omega_{23}^1 < Su_1, u_3 > \\
&\quad -\omega_{23}^3 < Su_2, u_3 > \\
&= \nu < \omega_{23}^3 u_3, u_3 > -u_2(\nu) - \omega_{23}^1 < \lambda u_1 + \mu u_2, u_3 > \\
&\quad -\omega_{23}^2 < \lambda u_2, u_3 > \\
&= -\nu\omega_{23}^3 - u_2(\nu) - \lambda\omega_{23}^1 < u_1, u_3 > -\mu\omega_{23}^1 < u_2, u_3 > \\
&\quad -\lambda\omega_{23}^2 < u_2, u_3 > \\
&= -u_2(\nu).
\end{aligned}$$

Εντελώς ανάλογα το δεύτερο μέλος αυτής της εξίσωσης γίνεται

$$< (\nabla_{u_3} S)u_2, u_3 > \;=\; (\nu - \lambda)\omega_{32}^3.$$

Κατά συνέπεια θα έχουμε

$$u_2(\nu) = (\lambda - \nu)\omega_{32}^3 = 0. \tag{5.1.42}$$

Παρατήρηση: $u_2(\nu) = u_2(6H) = 6u_2(H) = 0.$

Εφαρμόζοντας και πάλι την εξίσωση του Codazzi στη μορφή

$$< (\nabla u_2 S)u_3, u_2 >=< (\nabla u_3 S)u_2, u_2 >,$$

με ανάλογο λογισμό για το πρώτο μέλος έχουμε

$$\begin{aligned}
< (\nabla_{u_2} S)u_3, u_2 > &= < \nabla_{u_2}(Su_3) - S(\nabla_{u_2} u_3), u_2 > \\
&= < \nabla_{u_2}(Su_3), u_2 > - < S(\nabla_{u_2} u_3), u_2 > \\
&= < \nabla_{u_2}(\nu u_3), u_2 > - < S(\omega_{23}^1 u_1 + \omega_{23}^2 u_2 + \omega_{23}^3 u_3), u_2 > \\
&= \nu < \omega_{23}^1 u_1, u_2 > -\omega_{23}^1 < \lambda u_1 + \mu u_2, u_2 > \\
&\quad -\omega_{23}^2 < \lambda u_2, u_2 > \\
&= \nu < \omega_{23}^1 u_1, u_2 > -\lambda\omega_{23}^1 < u_1, u_2 > -\mu\omega_{23}^1 < u_2, u_2 > \\
&\quad -\lambda\omega_{23}^2 < u_2, u_2 > \\
&= \nu\omega_{23}^1 - \lambda\omega_{23}^1 \\
&= (\nu - \lambda)\omega_{23}^1.
\end{aligned}$$

Αντίστοιχα για το δεύτερο μέλος έχουμε

$$\begin{aligned}
< (\nabla_{u_3} S)u_2, u_2 > &= < \nabla_{u_3}(Su_2) - S(\nabla_{u_3} u_2), u_2 > \\
&= \lambda\omega_{32}^1 = 0.
\end{aligned}$$

Οπότε,

$$(\nu - \lambda)\omega_{23}^1 = 0. \tag{5.1.43}$$

Θεωρούμε και πάλι την μορφή του Codazzi που ακολουθεί για υπερεπιφάνειες και έχουμε

$$< (\nabla u_1 S)u_2, u_3 >=< (\nabla u_2 S)u_1, u_3 >$$

οπότε από το πρώτο μέλος αυτής της εξίσωσης έχουμε

$$\begin{aligned}
< (\nabla_{u_1} S)u_2, u_3 > &= < \nabla_{u_1}(Su_2) - S(\nabla_{u_1} u_2), u_3 > \\
&= (\nu - \lambda)\omega_{12}^3,
\end{aligned}$$

ενώ το δεύτερο μέλος αυτής της εξίσωσης γίνεται

$$\begin{aligned}
<(\nabla_{u_2}S)u_1, u_3> &= <\nabla_{u_2}(Su_1) - S(\nabla_{u_2}u_1), u_3> \\
&= <\nabla_{u_2}(Su_1), u_3> - <S(\nabla_{u_2}u_1), u_3> \\
&= <\nabla_{u_2}(\lambda u_1 + \mu u_2), u_3> \\
&\quad - <S(\omega_{21}^1 u_1 + \omega_{21}^2 u_2 + \omega_{21}^3 u_3), u_3> \\
&= <\nabla_{u_2}(\lambda u_1), u_3> + <\nabla_{u_2}(\mu u_2), u_3> \\
&\quad - <S(\omega_{21}^1 u_1), u_3> - <S(\omega_{21}^3 u_3), u_3> \\
&= <\lambda\nabla_{u_2}u_1 + u_2(\lambda)u_1, u_3> \\
&\quad + <\mu\nabla_{u_2}u_2 + u_2(\mu)u_2, u_3> -\omega_{21}^1 <Su_1, u_3> \\
&\quad -\omega_{21}^3 <Su_3, u_3> \\
&= \lambda <\nabla_{u_2}u_1, u_3> + u_2(\lambda) <u_1, u_3> + \mu <\nabla_{u_2}u_2, u_3> \\
&\quad + u_2(\mu) <u_2, u_3> \\
&\quad -\omega_{21}^1 <\lambda u_1 + \mu u_2, u_3> \\
&\quad -\omega_{21}^3 <\nu u_3, u_3> \\
&= \lambda <\omega_{21}^3 u_3, u_3> + \mu <\omega_{22}^3 u_3, u_3> + \nu\omega_{21}^3 \\
&= -\lambda\omega_{21}^3 - \mu\omega_{22}^3 + \nu\omega_{21}^3 \\
&= (\nu - \lambda)\omega_{21}^3 - \mu\omega_{22}^3.
\end{aligned}$$

Κατά συνέπεια

$$(\nu - \lambda)\omega_{12}^3 = (\nu - \lambda)\omega_{21}^3 - \mu\omega_{22}^3. \tag{5.1.44}$$

Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

(1) Επειδή $\nu \neq \lambda$, τότε από τη σχέση (5.1.41) έχουμε $\omega_{13}^1 = 0$ και μέσω της σχέσης (5.1.7)

$$\omega_{13}^1 = \omega_{12}^3 = 0. \tag{5.1.45}$$

Από τη σχέση (5.1.42) έχουμε $\omega_{32}^3 = 0$ και μέσω της (5.1.7)

$$\omega_{32}^3 = \omega_{33}^1 = 0. \tag{5.1.46}$$

Επίσης από τη (5.1.43) έχουμε $\omega_{23}^1 = 0$ και μέσω της (5.1.7)

$$\omega_{23}^1 = \omega_{22}^3 = 0. \tag{5.1.47}$$

Τέλος από τη σχέση (5.1.44) έχουμε μέσω των σχέσεων (5.1.45) και (5.1.47) ότι $\omega_{21}^3 = 0$, και μέσω της σχέσης (5.1.6) συνάγουμε ότι

$$\omega_{21}^3 = \omega_{23}^2 = 0. \tag{5.1.48}$$

Συνδυάζοντας τώρα τις σχέσεις (5.1.45), (5.1.46), (5.1.47) και (5.1.48) έχουμε

$$\omega_{13}^1 = \omega_{12}^3 = \omega_{32}^3 = \omega_{33}^1 = \omega_{23}^1 = \omega_{22}^3 = \omega_{21}^3 = \omega_{23}^2 = 0. \tag{5.1.49}$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (5.1.3) και (5.1.49) έχουμε τις ακόλουθες απλοποιημένες εκφράσεις των συναλλοιώτων παραγώγων $\nabla_{u_i} u_j$:

$$\begin{aligned} \nabla_{u_1} u_1 = \omega_{11}^1 u_1 + \omega_{11}^3 u_3, \quad \nabla_{u_1} u_2 = \omega_{12}^2 u_2, \quad \nabla_{u_1} u_3 = \omega_{13}^2 u_2 \\ \nabla_{u_2} u_1 = \omega_{21}^1 u_1, \quad \nabla_{u_2} u_2 = \omega_{22}^2 u_2, \quad \nabla_{u_2} u_3 = 0 \\ \nabla_{u_3} u_1 = \omega_{31}^1 u_1 + \omega_{31}^3 u_3, \quad \nabla_{u_3} u_2 = \omega_{32}^2 u_2, \quad \nabla_{u_3} u_3 = \omega_{33}^2 u_2 \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση Gauss (4.1.4) για υπερεπιφάνειες του χώρου E_2^4 έχουμε,

$$R(X,Y)Z = S(X) < S(Y), Z > -S(Y) < S(X), Z > .$$

Αλλά είναι επίσης γνωστό ότι,

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z.$$

Εφαρμόζοντας τις σχέσεις αυτές για $X = u_1, \quad Y = u_3, \quad Z = u_2$, βρίσκουμε την ποσότητα $R(u_1, u_3)u_2$, με δύο διαφορετικούς τρόπους. Στη συνέχεια εφαρμόζουμε το εσωτερικό γινόμενο με το u_3.

Πράγματι από τον τύπο του τανυστή καμπυλότητας έχουμε

$$R(u_1, u_3)u_2 = \nabla_{u_1}\nabla_{u_3}u_2 - \nabla_{u_3}\nabla_{u_1}u_2 - \nabla_{[u_1,u_3]}u_2$$

αλλά,

$$[u_1, u_3] = \nabla_{u_1}u_3 - \nabla_{u_3}u_1 = \omega_{13}^2 u_2 - \omega_{31}^1 u_1 - \omega_{31}^3 u_3.$$

Κατά συνέπεια, λαμβανομένων υπόψη και των τιμών των συναλλοιώτων παραγώγων που αναφέραμε, έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned}
R(u_1, u_3)u_2 &= \nabla_{u_1}(\omega_{32}^2 u_2) - \nabla_{u_3}(\omega_{12}^2 u_2) \\
&\quad -\nabla_{\omega_{13}^2 u_2 - \omega_{31}^1 u_1 - \omega_{31}^3 u_3} u_2 \\
&= \omega_{32}^2 \nabla_{u_1}u_2 + u_1(\omega_{32}^2)u_2 - \omega_{12}^2\nabla_{u_3}u_2 \\
&\quad -u_3(\omega_{12}^2)u_2 - \omega_{13}^2\nabla_{u_2}u_2 + \omega_{31}^1\nabla_{u_1}u_2 + \omega_{31}^3\nabla_{u_3}u_2 \\
&= \omega_{32}^2(\omega_{12}^2 u_2) + u_1(\omega_{32}^2)u_2 - \omega_{12}^2(\omega_{32}^2 u_2) \\
&\quad -u_3(\omega_{12}^2)u_2 - \omega_{13}^2(\omega_{22}^2 u_2) + \omega_{31}^1(\omega_{12}^2 u_2) + \omega_{31}^3(\omega_{32}^2 u_2).
\end{aligned}$$

Άρα

$$< R(u_1, u_3)u_2, u_3 >= 0. \tag{5.1.50}$$

Από την εξίσωση Gauss έχουμε

$$R(u_1, u_3)u_2 = S(u_1) < S(u_3), u_2 > -S(u_3) < S(u_1), u_2 >,$$

οπότε, λαμβανομένων υπόψη και των σχέσεων (1) έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} < R(u_1, u_3)u_2, u_3 > &= < S(u_1), u_3 >< S(u_3), u_2 > \\ &\quad - < S(u_3), u_3 >< S(u_1), u_2 > \\ &= < \lambda u_1 + \mu u_2, u_3 >< \nu u_3, u_2 > \\ &\quad - < \nu u_3, u_3 >< \lambda u_1 + \mu u_2, u_2 > \\ &= \nu\lambda = 6H(-\frac{3}{2}H) = -9H^2. \end{aligned}$$

Άρα

$$< R(u_1, u_3)u_2, u_3 >= -9H^2. \tag{5.1.51}$$

Συγκρίνοντας τις σχέσεις (5.1.50) και (5.1.51) συμπεραίνουμε αμέσως ότι:

$$H = 0.$$

Το συμπέρασμα αυτό όμως είναι μία αντίφαση, γιατί έχουμε υποθέσει ότι $H \neq 0$.
(2) Αν ήταν $\nu = \lambda$, τότε θα είχαμε $-\frac{3H}{2} = 6H$, οπότε προφανώς $H = 0$ και η υπερεπιφάνεια είναι ελαχιστική (minimal).

Αποδείχθηκε λοιπόν και πάλι ότι σε κάθε περίπτωση η υπερεπιφάνεια M_2^3 είναι ελαχιστική.

5.3 II. Ο Τελεστής Σχήματος S έχει την Κανονική μορφή (III)

Υποθέτουμε ότι η H είναι μία σταθερά. Τότε η εξίσωση (4.1.9) συνεπάγει ότι $HtrS^2 = 0$. Αν είναι $H = 0$, τότε το αποτέλεσμα είναι προφανές. Αν όμως είναι $H \neq 0$ τότε θα έχουμε $trS^2 = 3\lambda^2 = 0$, οπότε $\lambda = 0$. Όμως, $trS = 3\lambda = 0$ και επειδή $trS = 3H$ θα είναι $3H = 0$, οπότε $H = 0$ και η υπερεπιφάνεια M_2^3 θα είναι ελαχιστική.

Έστω ότι η H δεν είναι σταθερά. Υποθέτουμε ότι $H \neq 0$, τότε $\nabla H \neq \overrightarrow{0}$, και η διανυσματική εξίσωση (4.1.8) μας πληροφορεί ότι το ∇H είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του S.

Πρόταση 5.3 *Έστω $[M_2^3, (-,+,-)]$ μία διαρμονική υπερεπιφάνεια της ψευδο-Ευκλείδειας πολλαπλότητας E_2^4, ο τελεστής σχήματος της οποίας ως προς μία ψευδο-ορθοκανονική βάση είναι*

$$[S]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & -\nu & \lambda \end{pmatrix},$$

δηλαδή τύπου (III). Υποθέτουμε ότι το ∇H είναι ένα φωτοειδές (light-like) διάνυσμα. Τότε η υπερεπιφάνεια M_2^3 είναι ελαχιστική (minimal), δηλαδή έχει μηδενική μέση καμπυλότητα, $H = 0$.

Απόδειξη. Έστω ότι η H δεν είναι σταθερά και ότι $H \neq 0$. Τότε $\nabla H \neq \overrightarrow{0}$, και όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, το ∇H είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του S με αντίστοιχη ιδιοτιμή $-\frac{3H}{2}$. Επειδή όμως, ο τελεστής σχήματος, ως προς μία ψευδο-ορθοκανονική βάση $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ του εφαπτόμενου χώρου $T_p(M_2^3)$, έχει την κανονική μορφή (III), θα έχουμε

$$S(u_1) = \lambda u_1 + \mu u_2 + \nu u_3, \tag{5.1.52}$$

$$S(u_2) = \lambda u_2, \tag{5.1.53}$$

$$S(u_3) = -\nu u_2 + \lambda u_3. \tag{5.1.54}$$

Εφόσον το ∇H είναι ένα φωτοειδές (light-like) ιδιοδιάνυσμα, λαμβανομένου υπόψη και του αντίστοιχου πίνακα $[G]$ μπορούμε να το θεωρήσουμε, στη διεύθυνση του u_2. Τότε όμως θα είναι $\lambda = -\frac{3H}{2}$. Εφόσον η βάση είναι ψευδο-ορθοκανονική έχουμε, ως γνωστόν

$$\nabla H = u_2(H)u_1 + u_1(H)u_2 - u_3(H)u_3,$$

και λόγω της παραπάνω υπόθεσης θα πρέπει,

$$u_2(H) = u_3(H) = 0, \quad u_1(H) \neq 0.$$

Είναι γνωστό ότι, μπορούμε πάντοτε να κατασκευάσουμε μία ορθοκανονική βάση $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$, από την ψευδο-ορθοκανονική βάση $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$. Τότε, τα διανύσματα των δύο βάσεων συνδέονται με τις σχέσεις (5.1.21), δηλαδή

$$e_1 = \frac{u_1 - u_2}{\sqrt{2}}, \qquad e_2 = \frac{u_1 + u_2}{\sqrt{2}}, \qquad e_3 = u_3,$$

όπου τα $\{e_i\} \quad i = 1, 2, 3$ αποτελούν μία ορθοκανονική βάση του $T_p(M_2^3)$ χώρου, τα στοιχεία της οποίας ικανοποιούν τις σχέσεις (5.1.22), δηλαδή

$< e_1, e_1 >=< e_3, e_3 >= -1$, $< e_2, e_2 >= +1$,

$< e_1, e_2 >=< e_1, e_3 >=< e_2, e_3 >= 0$.

Ο τελεστής σχήματος S, ως προς αυτή την ορθοκανονική βάση, παίρνει μία νέα μορφή. Πράγματι, από τις παραπάνω σχέσεις εύκολα έχουμε

$$u_1 = \frac{(e_1 + e_2)}{\sqrt{2}}, \qquad u_2 = \frac{(-e_1 + e_2)}{\sqrt{2}}, \qquad u_3 = e_3.$$

Τότε η σχέση (5.1.52) παίρνει τη μορφή,

$$S[\frac{(e_1 + e_2)}{\sqrt{2}}] = \lambda\frac{(e_1 + e_2)}{\sqrt{2}} + \mu\frac{(-e_1 + e_2)}{\sqrt{2}} + \nu e_3,$$

οπότε,

$$S(e_1) + S(e_2) = (\lambda - \mu)e_1 + (\lambda + \mu)e_2 + \nu\sqrt{2}e_3. \tag{5.1.55}$$

Από τη σχέση (5.1.53) έχουμε,

$$-S(e_1) + S(e_2) = -\lambda e_1 + \lambda e_2 + 0e_3. \tag{5.1.56}$$

Τέλος, από τη σχέση (5.1.54) έχουμε,

$$S(e_3) = \frac{\nu}{\sqrt{2}}e_1 - \frac{\nu}{\sqrt{2}}e_2 + \lambda e_3. \tag{5.1.57}$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (5.1.55) και (5.1.56) έχουμε,

$$S(e_1) = (\lambda - \frac{\mu}{2})e_1 + \frac{\mu}{2}e_2 + \frac{\nu}{\sqrt{2}}e_3. \tag{5.1.58}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (5.1.55) και (5.1.56) έχουμε,

$$S(e_2) = -\frac{\mu}{2}e_1 + (\lambda + \frac{\mu}{2})e_2 + \frac{\nu}{\sqrt{2}}e_3. \tag{5.1.59}$$

Τελικά, από τις σχέσεις (5.1.57), (5.1.58) και (5.1.59) ο τελεστής σχήματος S ως προς αυτή την ορθοκανονική βάση παίρνει τη μορφή,

$$[S]_{\mathcal{E}} \;=\; \begin{pmatrix} \lambda - \frac{\mu}{2} & \frac{\mu}{2} & \frac{\nu}{\sqrt{2}} \\ -\frac{\mu}{2} & \lambda + \frac{\mu}{2} & \frac{\nu}{\sqrt{2}} \\ \frac{\nu}{\sqrt{2}} & -\frac{\nu}{\sqrt{2}} & \lambda \end{pmatrix}$$

Εφόσον $trS = 3H = 3\lambda$, συνεπάγεται ότι $\lambda = H$ ή $-\frac{3H}{2} = H$ και τελικά έχουμε $H = 0$. Αυτό είναι μία αντίφαση, επειδή υποθέσαμε ότι $H \neq 0$. Συνεπώς η υπερεπιφάνεια M_2^3 είναι ελαχιστική (minimal).

5.4 III. Ο Τελεστής Σχήματος S έχει την Κανονική μορφή (IV)

Υποθέτουμε ότι η H είναι μία σταθερά. Τότε η εξίσωση (4.1.9) γίνεται

$$HtrS^2 = 0. \tag{5.1.60}$$

Αν $H = 0$, τότε το αποτέλεσμα έπεται άμεσα, δηλαδή η M_2^3 είναι ελαχιστική. Αν $H \neq 0$, τότε από την (5.1.60) έχουμε,

$$trS^2 = 2\mu^2 - 2\nu^2 + \lambda^2 = 0. \tag{5.1.61}$$

Επίσης

$$trS = 2\mu + \lambda = 3H \neq 0, \tag{5.1.62}$$

εφόσον σε αυτή την περίπτωση $\varepsilon = +1$. Στην περίπτωση αυτή θα έχουμε:

$$\begin{aligned} S(e_1) &= \mu e_1 + \nu e_2, \\ S(e_2) &= -\nu e_1 + \mu e_2, \\ S(e_3) &= \lambda e_3. \end{aligned} \tag{5.1.63}$$

Επίσης έχουμε

$$\nabla_{e_i} e_j = \sum_{k=1}^{3} \omega_{ij}^k e_k \quad ; \quad i,j,k = 1,2,3 \tag{5.1.64}$$

Εφαρμόζοντας την εξίσωση Codazzi (4.1.3) για υπερεπιφάνειες, δηλαδή την

$$< (\nabla_{e_i} S)e_j, e_k > = < (\nabla_{e_j} S)e_i, e_k >$$

για κάθε τριάδα (i,j,k) του συνόλου
$\{(1,2,1),(1,2,2),(1,3,1),(2,3,2),(1,3,3),(2,3,3),(1,2,3),(1,3,2),(2,3,1)\}$ δημιουργούμε ένα σύστημα εννέα διαφορικών εξισώσεων, από τη μελέτη του οποίου σε συνδυασμό με την εξίσωση του Gauss και με τις σχέσεις (5.1.61) και (5.1.62) προκύπτει το άτοπο της υπόθεσής μας.

Πράγματι, η ως άνω εξίσωση Codazzi για υπερεπιφάνειες για την πρώτη τριάδα γίνεται

$$< (\nabla_{e_1} S)e_2, e_1 > = < (\nabla_{e_2} S)e_1, e_1 > . \quad \text{(A)}$$

Το πρώτο μέλος αυτής της εξίσωσης λαμβανομένου υπόψη και των (5.1.63) και (5.1.64) γράφεται διαδοχικά

$$\begin{aligned} < (\nabla_{e_1} S)e_2, e_1 > &= < \nabla_{e_1}(Se_2) - S(\nabla_{e_1} e_2), e_1 > \\ &= < \nabla_{e_1}(Se_2), e_1 > - < S(\nabla_{e_1} e_2), e_1 > \\ &= -\varepsilon_1 e_1(\nu) + \varepsilon_1 \mu \omega_{12}^1 - \varepsilon_1 \mu \omega_{12}^1. \end{aligned}$$

Άρα

$$< (\nabla_{e_1} S)e_2, e_1 > = -\varepsilon_1 e_1(\nu). \quad \text{(A-1)}$$

Αντίστοιχα το δεύτερο μέλος αυτής της εξίσωσης γίνεται

$$\begin{aligned} <(\nabla_{e_2}S)e_1, e_1> &= <\nabla_{e_2}(Se_1) - S(\nabla_{e_2}e_1), e_1> \\ &= \mu <\omega_{21}^1 e_1, e_1> + \varepsilon_1 e_2(\mu) + \nu <\omega_{22}^1 e_1, e_1> + \nu\omega_{21}^2\varepsilon_1. \end{aligned}$$

Άρα

$$<(\nabla_{e_2}S)e_1, e_1>= \varepsilon_1 e_2(\mu) + \varepsilon_1\nu\omega_{22}^1 + \varepsilon_1\nu\omega_{21}^2. \quad \text{(A-2)}$$

Εξισώνοντας τα δύο μέλη των (A-1) και (A-2) έχουμε

$$-e_1(\nu) = e_2(\mu) + \nu(1 - \varepsilon_1\varepsilon_2)\omega_{21}^2. \tag{5.1.65}$$

Όμοια η εξίσωση Codazzi, για την τριάδα $(1, 2, 2)$ γίνεται,

$$<(\nabla_{e_1}S)e_2, e_2>=<(\nabla_{e_2}S)e_1, e_2> . \quad \text{(B)}$$

Το πρώτο μέλος αυτής της εξίσωσης μετασχηματίζεται διαδοχικά ως εξής

$$\begin{aligned} <(\nabla_{e_1}S)e_2, e_2> &= <\nabla_{e_1}(Se_2) - S(\nabla_{e_1}e_2), e_2> \\ &= <\nabla_{e_1}(Se_2), e_2> - <S(\nabla_{e_1}e_2), e_2> \\ &= <\nabla_{e_1}(-\nu e_1 + \mu e_2), e_2> - <S(\omega_{12}^1 e_1 + \omega_{12}^2 e_2 + \omega_{12}^3 e_3), e_2> \\ &= <\nabla_{e_1}(-\nu e_1), e_2> + <\nabla_{e_1}(\mu e_2), e_2> \\ &\quad - <S(\omega_{12}^1 e_1), e_2> - <S(\omega_{12}^3 e_3), e_2> \\ &= <-\nu\nabla_{e_1}e_1 + e_1(-\nu)e_1, e_2> + <\mu\nabla_{e_1}e_2 + e_1(\mu)e_2, e_2> \\ &\quad -\omega_{12}^1 <Se_1, e_2> -\omega_{12}^3 <Se_3, e_2> \\ &= -\nu <\nabla_{e_1}e_1, e_2> -e_1(\nu) <e_1, e_2> +\mu <\nabla_{e_1}e_2, e_2> \\ &\quad +e_1(\mu) <e_2, e_2> -\omega_{12}^1 <\mu e_1 + \nu e_2, e_2> -\omega_{12}^3 <\lambda e_3, e_2> \\ &= -\nu <\omega_{11}^2 e_2, e_2> +\mu <\omega_{12}^2 e_2, e_2> +e_1(\mu)\varepsilon_2 - \nu\omega_{12}^1\varepsilon_2 \\ &= \varepsilon_2 e_1(\mu) - \varepsilon_2\nu(-\varepsilon_1\varepsilon_2\omega_{12}^1) - \nu\varepsilon_2\omega_{12}^1 \\ &= \varepsilon_2 e_1(\mu) + \varepsilon_2\nu(\varepsilon_1\varepsilon_2\omega_{12}^1) - \varepsilon_2\nu\omega_{12}^1 \\ &= \varepsilon_2 e_1(\mu) + \varepsilon_2\nu(\varepsilon_1\varepsilon_2 - 1)\omega_{12}^1. \end{aligned}$$

Άρα

$$< (\nabla_{e_1}S)e_2, e_2 >= \varepsilon_2 e_1(\mu) + \varepsilon_2\nu(\varepsilon_1\varepsilon_2 - 1)\omega_{12}^1. \quad \text{(B-1)}$$

Αντίστοιχα το δεύτερο μέλος αυτής της εξίσωσης γίνεται

$$\begin{aligned}
< (\nabla_{e_2}S)e_1, e_2 > &= < \nabla_{e_2}(Se_1) - S(\nabla_{e_2}e_1), e_2 > \\
&= < \nabla_{e_2}(Se_1), e_2 > - < S(\nabla_{e_2}e_1), e_2 > \\
&= < \nabla_{e_2}(\mu e_1 + \nu e_2), e_2 > - < S(\omega_{21}^1 e_1 + \omega_{21}^2 e_2 + \omega_{21}^3 e_3), e_2 > \\
&= < \nabla_{e_2}(\mu e_1), e_2) > + < \nabla_{e_2}(\nu e_2), e_2 > \\
&\quad - < S(\omega_{21}^2 e_2), e_2 > - < S(\omega_{21}^3 e_3), e_2 > \\
&= < \mu\nabla_{e_2}e_1 + e_2(\mu)e_1, e_2 > + < \nu\nabla_{e_2}e_2 + e_2(\nu)e_2, e_2 > \\
&\quad -\omega_{21}^2 < Se_2, e_2 > -\omega_{21}^3 < Se_3, e_2 > \\
&= \mu < \nabla_{e_2}e_1, e_2 > +\nu < \nabla_{e_2}e_2, e_2 > +\varepsilon_2 e_2(\nu) \\
&\quad -\omega_{21}^2 < -\nu e_1 + \mu e_2, e_2 > -\omega_{21}^3 < \lambda e_3, e_2 > \\
&= \mu < \omega_{21}^2 e_2, e_2 > +\nu < \omega_{22}^2 e_2, e_2 > +\varepsilon_2 e_2(\nu) - \varepsilon_2\mu\omega_{21}^2 \\
&= \varepsilon_2 e_2(\nu) - \varepsilon_2\mu\omega_{21}^2 + \varepsilon_2\mu\omega_{21}^2.
\end{aligned}$$

Άρα

$$< (\nabla_{e_2}S)e_1, e_2 >= \varepsilon_2 e_2(\nu). \quad \text{(B-2)}$$

Εξισώνουμε τα δύο μέλη των (B-1), (B-2) και έχουμε

$$e_2(\nu) = e_1(\mu) + \nu(\varepsilon_1\varepsilon_2 - 1)\omega_{12}^1. \tag{5.1.66}$$

Ανάλογα για την τριάδα $(1, 3, 1)$ η εξίσωση Codazzi, παίρνει τη μορφή,

$$< (\nabla_{e_1}S)e_3, e_1 >=< (\nabla_{e_3}S)e_1, e_1 > . \quad \text{(C)}$$

Το πρώτο μέλος αυτής της εξίσωσης γίνεται

$$\begin{aligned}
< (\nabla_{e_1}S)e_3, e_1 > &= < \nabla_{e_1}(Se_3) - S(\nabla_{e_1}e_3), e_1 > \\
&= \varepsilon_1\lambda\omega_{13}^1 - \varepsilon_1\mu\omega_{13}^1 + \varepsilon_1\nu\omega_{13}^2.
\end{aligned}$$

Άρα,

$$< (\nabla_{e_1} S)e_3, e_1 >= \varepsilon_1(\lambda - \mu)\omega_{13}^1 + \varepsilon_1\nu\omega_{13}^2. \quad \text{(C-1)}$$

Αντίστοιχα το δεύτερο μέλος αυτής της εξίσωσης γίνεται

$$\begin{aligned} < (\nabla_{e_3} S)e_1, e_1 > &= < \nabla_{e_3}(Se_1) - S(\nabla_{e_3} e_1), e_1 > \\ &= \varepsilon_1\mu\omega_{31}^1 + \varepsilon_1 e_3(\mu) + \varepsilon_1\nu\omega_{32}^1 + \varepsilon_1\nu\omega_{31}^2. \end{aligned}$$

Άρα

$$< (\nabla_{e_3} S)e_1, e_1 >= \varepsilon_1 e_3(\mu) + \varepsilon_1\nu\omega_{32}^1 + \varepsilon_1\nu\omega_{31}^2. \quad \text{(C-2)}$$

Εξισώνουμε τα δύο μέλη των (C-1), (C-2) και έχουμε

$$(\lambda - \mu)\omega_{13}^1 + \nu\omega_{13}^2 = e_3(\mu) + \nu(1 - \varepsilon_1\varepsilon_2)\omega_{32}^1. \tag{5.1.67}$$

Ανάλογα για την τριάδα $(2, 3, 2)$ έχουμε

$$< (\nabla_{e_2} S)e_3, e_2 >=< (\nabla_{e_3} S)e_2, e_2 >, \quad \text{(D)}$$

οπότε,

$$\begin{aligned} < (\nabla_{e_2} S)e_3, e_2 > &= < \nabla_{e_2}(Se_3) - S(\nabla_{e_2} e_3), e_2 > \\ &= < \nabla_{e_2}(Se_3), e_2 > - < S(\nabla_{e_2} e_3), e_2 > \\ &= < \nabla_{e_2}(\lambda e_3), e_2 > - < S(\omega_{23}^1 e_1 + \omega_{23}^2 e_2 + \omega_{23}^3 e_3), e_2 > \\ &= < \nabla_{e_2}(\lambda e_3), e_2 > - < S(\omega_{23}^1 e_1), e_2 > - < S(\omega_{23}^2 e_2), e_2 > \\ &= < \lambda\nabla_{e_2} e_3, e_2 > + e_2(\lambda) < e_3, e_2 > - \omega_{23}^1 < Se_1, e_2 > \\ &\quad - \omega_{23}^2 < Se_2, e_2 > \\ &= \lambda < \nabla_{e_2} e_3, e_2 > - \omega_{23}^1 < \mu e_1 + \nu e_2, e_2 > \\ &\quad - \omega_{23}^2 < -\nu e_1 + \mu e_2, e_2 > \\ &= \lambda < \omega_{23}^2 e_2, e_2 > - \varepsilon_2\nu\omega_{23}^1 - \varepsilon_2\mu\omega_{23}^2 \\ &= \varepsilon_2\lambda\omega_{23}^2 - \varepsilon_2\nu\omega_{23}^1 - \varepsilon_2\mu\omega_{23}^2. \end{aligned}$$

Άρα,

$$< (\nabla_{e_2}S)e_3, e_2 >= \varepsilon_2(\lambda-\mu)\omega_{23}^2 - \varepsilon_2\nu\omega_{23}^1, \quad \text{(D-1)}$$

και

$$\begin{aligned}
< (\nabla_{e_3}S)e_2, e_2 > &= < \nabla_{e_3}(Se_2) - S(\nabla_{e_3}e_2), e_2 > \\
&= < \nabla_{e_3}(Se_3), e_2 > - < S(\nabla_{e_3}e_2), e_2 > \\
&= < \nabla_{e_3}(-\nu e_1 + \mu e_2), e_2 > \\
&\quad - < S(\omega_{32}^1 e_1 + \omega_{32}^2 e_2 + \omega_{32}^3 e_3), e_2 > \\
&= < \nabla_{e_3}(-\nu e_1, e_2) > + < \nabla_{e_3}(\mu e_2), e_2 > \\
&\quad - < S(\omega_{32}^1 e_1), e_2 > - < S(\omega_{32}^3 e_3), e_2 > \\
&= < -\nu\nabla_{e_3}e_1 + e_3(-\nu)e_1, e_2 > + < \mu\nabla_{e_3}e_2 + e_3(\mu)e_2, e_2 > \\
&\quad -\omega_{32}^1 < Se_1, e_2 > -\omega_{32}^3 < Se_3, e_2 > \\
&= -\nu < \nabla_{e_3}e_1, e_2 > -e_3(\nu) < e_1, e_2 > +\mu < \nabla_{e_3}e_2, e_2 > \\
&\quad +e_3(\mu) < e_2, e_2 > -\omega_{32}^1 < \mu e_1 + \nu e_2, e_2 > -\omega_{32}^3 < \lambda e_3, e_2 > \\
&= -\nu < \omega_{31}^2 e_2, e_2 > +\mu < \omega_{32}^2 e_2, e_2 > +\varepsilon_2 e_3(\mu) - \varepsilon_2\nu\omega_{32}^1 \\
&= -\varepsilon_2\nu\omega_{31}^2 + \varepsilon_2 e_3(\mu) - \varepsilon_2\nu\omega_{32}^1.
\end{aligned}$$

Άρα,

$$< (\nabla_{e_3}S)e_2, e_2 >= -\varepsilon_2\nu\omega_{31}^2 - \varepsilon_2\nu\omega_{32}^1 + \varepsilon_2 e_3(\mu). \quad \text{(D-2)}$$

Εξισώνουμε τα δύο μέλη των (D-1), (D-2) και έχουμε

$$(\lambda-\mu)\omega_{23}^2 - \nu\omega_{23}^1 = e_3(\mu) - \nu(1-\varepsilon_1\varepsilon_2)\omega_{31}^2. \qquad (5.1.68)$$

Για την τριάδα $(1,3,3)$ έχουμε

$$< (\nabla_{e_1}S)e_3, e_3 >=< (\nabla_{e_3}S)e_1, e_3 >, \quad \text{(E)}$$

οπότε

$$
\begin{aligned}
<(\nabla_{e_1}S)e_3, e_3> &= <\nabla_{e_1}(Se_3) - S(\nabla_{e_1}e_3), e_3> \\
&= <\nabla_{e_1}(Se_3), e_3> - <S(\nabla_{e_1}e_3), e_3> \\
&= <\nabla_{e_1}(\lambda e_3), e_3> - <S(\omega_{13}^1 e_1 + \omega_{13}^2 e_2 + \omega_{13}^3 e_3), e_3> \\
&= <\nabla_{e_1}(\lambda e_3), e_3> - <S(\omega_{13}^1 e_1), e_3> - <S(\omega_{13}^2 e_2), e_3> \\
&= <\lambda\nabla_{e_1}e_3 + e_1(\lambda)e_3, e_3> - <S(\omega_{13}^1 e_1), e_3> \\
&\quad - <S(\omega_{13}^2 e_2), e_3> \\
&= \lambda <\nabla_{e_1}e_3, e_3> + e_1(\lambda) <e_3, e_3> - \omega_{13}^1 <Se_1, e_3> \\
&\quad - \omega_{13}^2 <Se_2, e_3> \\
&= \lambda <\omega_{13}^3 e_3, e_3> + \varepsilon_3 e_1(\lambda) - \omega_{13}^1 <\mu e_1 + \nu e_2, e_3> \\
&\quad - \omega_{13}^2 <-\nu e_1 + \mu e_2, e_3> .
\end{aligned}
$$

Άρα,

$$
<(\nabla_{e_1}S)e_3, e_3> = \varepsilon_3 e_1(\lambda), \quad \text{(E-1)}
$$

και για το δεύτερο μέλος,

$$
\begin{aligned}
<(\nabla_{e_3}S)e_1, e_3> &= <\nabla_{e_3}(Se_1) - S(\nabla_{e_3}e_1), e_3> \\
&= <\nabla_{e_3}(Se_1), e_3> - <S(\nabla_{e_3}e_1), e_3> \\
&= <\nabla_{e_3}(\mu e_1 + \nu e_2), e_3> - <S(\omega_{31}^1 e_1 + \omega_{31}^2 e_2 + \omega_{31}^3 e_3), e_3> \\
&= <\nabla_{e_3}(\mu e_1), e_3> + <\nabla_{e_3}(\nu e_2), e_3> \\
&\quad - <S(\omega_{31}^2 e_2), e_3> - <S(\omega_{31}^3 e_3), e_3> \\
&= <\mu\nabla_{e_3}e_1 + e_3(\mu)e_1, e_3> + <\nu\nabla_{e_3}e_2 + e_3(\nu)e_2, e_3> \\
&\quad - \omega_{31}^2 <Se_2, e_3> - \omega_{31}^3 <Se_3, e_3> \\
&= \mu <\nabla_{e_3}e_1, e_3> + e_3(\mu) <e_1, e_3> + \nu <\nabla_{e_3}e_2, e_3> \\
&\quad + e_3(\nu) <e_2, e_3> - \omega_{31}^2 <-\nu e_1 + \mu e_2, e_3> - \omega_{31}^3 <\lambda e_3, e_3> \\
&= \mu <\omega_{31}^3 e_3, e_3> + \nu <\omega_{32}^3 e_3, e_3> - \varepsilon_3 \lambda \omega_{31}^3.
\end{aligned}
$$

Άρα

$$< (\nabla_{e_3}S)e_1, e_3 >= \varepsilon_3\mu\omega_{31}^3 + \varepsilon_3\nu\omega_{32}^3 - \varepsilon_3\lambda\omega_{31}^3. \quad \text{(E-2)}$$

Εξισώνουμε τα δύο μέλη των (E-1), (E-2) και έχουμε

$$e_1(\lambda) = (\mu - \lambda)\omega_{31}^3 + \nu\omega_{32}^3. \tag{5.1.69}$$

Για την τριάδα $(2,3,3)$ έχουμε

$$< (\nabla_{e_2}S)e_3, e_3 >=< (\nabla_{e_3}S)e_2, e_3 >, \quad \text{(F)}$$

οπότε,

$$\begin{aligned} < (\nabla_{e_2}S)e_3, e_3 > &= < \nabla_{e_2}(Se_3) - S(\nabla_{e_2}e_3), e_3 > \\ &= \varepsilon_3 e_2(\lambda). \end{aligned}$$

Άρα,

$$< (\nabla_{e_2}S)e_3, e_3 >= \varepsilon_3 e_2(\lambda), \quad \text{(F-1)}$$

και για το δεύτερο μέλος

$$\begin{aligned} < (\nabla_{e_3}S)e_2, e_3 > &= < \nabla_{e_3}(Se_2) - S(\nabla_{e_3}e_2), e_3 > \\ &= -\varepsilon_3\nu\omega_{31}^3 + \varepsilon_3\mu\omega_{32}^3 - \varepsilon_3\lambda\omega_{32}^3. \end{aligned}$$

Άρα

$$< (\nabla_{e_3}S)e_2, e_3 >= -\varepsilon_3\nu\omega_{31}^3 + \varepsilon_3(\mu - \lambda)\omega_{32}^3. \quad \text{(F-2)}$$

Εξισώνουμε τα δύο μέλη των (F-1), (F-2) και έχουμε

$$e_2(\lambda) = -\nu\omega_{31}^3 + (\mu - \lambda)\omega_{32}^3. \tag{5.1.70}$$

Επίσης για την τριάδα $(1,2,3)$ έχουμε

$$< (\nabla_{e_1}S)e_2, e_3 >=< (\nabla_{e_2}S)e_1, e_3 >, \quad \text{(G)}$$

οπότε,

$$\begin{aligned} <(\nabla_{e_1}S)e_2, e_3> &= <\nabla_{e_1}(Se_2) - S(\nabla_{e_1}e_2), e_3> \\ &= -\varepsilon_3\nu\omega_{11}^3 + \varepsilon_3\mu\omega_{12}^3 - \varepsilon_3\lambda\omega_{12}^3. \end{aligned}$$

Άρα,

$$<(\nabla_{e_1}S)e_2, e_3> = -\varepsilon_3\nu\omega_{11}^3 + \varepsilon_3(\mu-\lambda)\omega_{12}^3, \quad \text{(G-1)}$$

και για το δεύτερο μέλος έχουμε

$$\begin{aligned} <(\nabla_{e_2}S)e_1, e_3> &= <\nabla_{e_2}(Se_1) - S(\nabla_{e_2}e_1), e_3> \\ &= \varepsilon_3\mu\omega_{21}^3 + \varepsilon_3\nu\omega_{22}^3 - \varepsilon_3\lambda\omega_{21}^3. \end{aligned}$$

Άρα

$$<(\nabla_{e_2}S)e_1, e_3> = \varepsilon_3\nu\omega_{22}^3 + \varepsilon_3(\mu-\lambda)\omega_{21}^3. \quad \text{(G-2)}$$

Εξισώνοντας τα δύο μέλη των (G-1) και (G-2) έχουμε

$$-\nu\omega_{11}^3 + (\mu-\lambda)\omega_{12}^3 = \nu\omega_{22}^3 + (\mu-\lambda)\omega_{21}^3. \tag{5.1.71}$$

Για την τριάδα $(1,3,2)$ η εξίσωση Codazzi γίνεται

$$<(\nabla_{e_1}S)e_3, e_2> = <(\nabla_{e_3}S)e_1, e_2>. \quad \text{(H)}$$

Το πρώτο μέλος αυτής της εξίσωσης γίνεται

$$\begin{aligned} <(\nabla_{e_1}S)e_3, e_2> &= <\nabla_{e_1}(Se_3) - S(\nabla_{e_1}e_3), e_2> \\ &= \varepsilon_2\lambda\omega_{13}^2 - \varepsilon_2\nu\omega_{13}^1 - \varepsilon_2\mu\omega_{13}^2. \end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$<(\nabla_{e_1}S)e_3, e_2> = -\varepsilon_2\nu\omega_{13}^1 + \varepsilon_2(\lambda-\mu)\omega_{13}^2. \quad \text{(H-1)}$$

Το δεύτερο μέλος αυτής της εξίσωσης γίνεται

$$\begin{aligned}
<(\nabla_{e_3}S)e_1, e_2> &= <\nabla_{e_3}(Se_1) - S(\nabla_{e_3}e_1), e_2> \\
&= <\nabla_{e_3}(Se_1), e_2> - <S(\nabla_{e_3}e_1), e_2> \\
&= \varepsilon_2\mu\omega_{31}^2 - \varepsilon_2\mu\omega_{31}^2 + \varepsilon_2 e_3(\nu).
\end{aligned}$$

Δηλαδή

$$<(\nabla_{e_3}S)e_1, e_2> = \varepsilon_2 e_3(\nu). \quad \text{(H-2)}$$

Εξισώνοντας τα δύο μέλη των (H-1) και (H-2) έχουμε

$$e_3(\nu) = (\lambda - \mu)\omega_{13}^2 - \nu\omega_{13}^1. \tag{5.1.72}$$

Τέλος για την τριάδα $(2, 3, 1)$ η εξίσωση Codazzi γίνεται

$$<(\nabla_{e_2}S)e_3, e_1> = <(\nabla_{e_3}S)e_2, e_1>. \quad \text{(I)}$$

Το πρώτο μέλος αυτής της εξίσωσης γίνεται

$$\begin{aligned}
<(\nabla_{e_2}S)e_3, e_1> &= <\nabla_{e_2}(Se_3) - S(\nabla_{e_2}e_3), e_1> \\
&= <\nabla_{e_2}(Se_3), e_1> - <S(\nabla_{e_2}e_3), e_1> \\
&= <\nabla_{e_2}(\lambda e_3), e_1> - <S(\omega_{23}^1 e_1 + \omega_{23}^2 e_2 + \omega_{23}^3 e_3), e_1> \\
&= <\lambda\nabla_{e_2}e_3 + e_2(\lambda)e_3, e_1> - <S(\omega_{23}^1 e_1), e_1> \\
&\quad - <S(\omega_{23}^2 e_2), e_1> \\
&= \lambda <\nabla_{e_2}e_3, e_1> + e_2(\lambda) <e_3, e_1> - \omega_{23}^1 <Se_1, e_1> \\
&\quad - \omega_{23}^2 <Se_2, e_1> \\
&= \lambda <\omega_{23}^1 e_1, e_1> - \omega_{23}^1 <\mu e_1 + \nu e_2, e_1> \\
&\quad - \omega_{23}^2 <-\nu e_1 + \mu e_2, e_1> \\
&= \varepsilon_1\lambda\omega_{23}^1 - \varepsilon_1\mu\omega_{23}^1 + \varepsilon_1\nu\omega_{23}^2.
\end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$< (\nabla_{e_2} S)e_3, e_1 >= \varepsilon_1 \nu \omega_{23}^2 + \varepsilon_1(\lambda - \mu)\omega_{23}^1. \quad \text{(I-1)}$$

Το δεύτερο μέλος αυτής της εξίσωσης γίνεται

$$\begin{aligned}
< (\nabla_{e_3} S)e_2, e_1 > &= < \nabla_{e_3}(Se_2) - S(\nabla_{e_3} e_2), e_1 > \\
&= < \nabla_{e_3}(Se_2), e_1 > - < S(\nabla_{e_3} e_2), e_1 > \\
&= < \nabla_{e_3}(-\nu e_1 + \mu e_2), e_1 > \\
&\quad - < S(\omega_{32}^1 e_1 + \omega_{32}^2 e_2 + \omega_{32}^3 e_3), e_1 > \\
&= < \nabla_{e_3}(-\nu e_1), e_1 > + < \nabla_{e_3}(\mu e_2), e_1 > \\
&\quad - < S(\omega_{32}^1 e_1), e_1 > - < S(\omega_{32}^3 e_3), e_1 > \\
&= < -\nu \nabla_{e_3} e_1 + e_3(-\nu)e_1, e_1 > + < \mu \nabla_{e_3} e_2 + e_3(\mu)e_2, e_1 > \\
&\quad -\omega_{32}^1 < Se_1, e_1 > -\omega_{32}^3 < Se_3, e_1 > \\
&= -\nu < \nabla_{e_3} e_1, e_1 > -e_3(\nu) < e_1, e_1 > +\mu < \nabla_{e_3} e_2, e_1 > \\
&\quad +e_3(\mu) < e_2, e_1 > -\omega_{32}^1 < \mu e_1 + \nu e_2, e_1 > -\omega_{32}^3 < \lambda e_3, e_1 > \\
&= -\nu < \omega_{31}^1 e_1, e_1 > -\varepsilon_1 e_3(\nu) + \mu < \omega_{32}^1 e_1, e_1 > -\varepsilon_1 \mu \omega_{32}^1.
\end{aligned}$$

Άρα

$$< (\nabla_{e_3} S)e_2, e_1 >= -\varepsilon_1 e_3(\nu). \quad \text{(I-2)}$$

Εξισώνοντας τα δύο μέλη των (I-1), (I-2) έχουμε

$$-e_3(\nu) = (\lambda - \mu)\omega_{23}^1 + \nu \omega_{23}^2. \tag{5.1.73}$$

Οι σχέσεις (5.1.65), (5.1.66), (5.1.67), (5.1.68), (5.1.69), (5.1.70), (5.1.71), (5.1.72) και (5.1.73), που δημιουργήσαμε συνιστούν το ακόλουθο σύστημα των εννέα διαφορικών εξισώσεων

$$
\begin{aligned}
-e_1(\nu) &= e_2(\mu) + \nu(1-\varepsilon_1\varepsilon_2)\omega_{21}^2,\\
e_2(\nu) &= e_1(\mu) + \nu(\varepsilon_1\varepsilon_2 - 1)\omega_{12}^1,\\
(\lambda-\mu)\omega_{13}^1 + \nu\omega_{13}^2 &= e_3(\mu) + \nu(1-\varepsilon_1\varepsilon_2)\omega_{32}^1,\\
(\lambda-\mu)\omega_{23}^2 - \nu\omega_{23}^1 &= e_3(\mu) - \nu(1-\varepsilon_1\varepsilon_2)\omega_{31}^2,\\
e_1(\lambda) &= (\mu-\lambda)\omega_{31}^3 + \nu\omega_{32}^3,\\
e_2(\lambda) &= -\nu\omega_{31}^3 + (\mu-\lambda)\omega_{32}^3,\\
-\nu\omega_{11}^3 + (\mu-\lambda)\omega_{12}^3 &= \nu\omega_{22}^3 + (\mu-\lambda)\omega_{21}^3,\\
e_3(\nu) &= (\lambda-\mu)\omega_{13}^2 - \nu\omega_{13}^1,\\
-e_3(\nu) &= (\lambda-\mu)\omega_{23}^1 + \nu\omega_{23}^2.
\end{aligned}
$$

Είναι όμως $\varepsilon_1\varepsilon_2 = -1$, οπότε χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = -1$ και $\varepsilon_2 = +1$. Λαμβάνοντας στη συνέχεια υπόψη και τις σχέσεις

$$\omega_{ij}^k = -\varepsilon_j\varepsilon_k\omega_{ik}^j; \quad i,j,k = 1,2,3, \tag{5.1.74}$$

το προηγούμενο σύστημα ανάγεται στο ακόλουθο σύστημα:

$$
\begin{aligned}
2\nu\omega_{21}^2 &= -e_1(\nu) - e_2(\mu),\\
-2\nu\omega_{12}^1 &= e_2(\nu) - e_1(\mu),\\
(\lambda-\mu)\omega_{13}^1 + \nu\omega_{13}^2 - 2\nu\omega_{32}^1 &= e_3(\mu),\\
(\lambda-\mu)\omega_{23}^2 - \nu\omega_{23}^1 + 2\nu\omega_{32}^1 &= e_3(\mu),\\
(\mu-\lambda)\omega_{31}^3 + \nu\omega_{32}^3 &= e_1(\lambda),\\
-\nu\omega_{31}^3 + (\mu-\lambda)\omega_{32}^3 &= e_2(\lambda),\\
\nu\omega_{13}^1 + (\mu-\lambda)\omega_{13}^2 - \nu\omega_{23}^2 + (\mu-\lambda)\omega_{23}^1 &= 0,\\
(\lambda-\mu)\omega_{13}^2 - \nu\omega_{13}^1 &= e_3(\nu),\\
(\lambda-\mu)\omega_{23}^1 + \nu\omega_{23}^2 &= -e_3(\nu).
\end{aligned}
$$

Το πρόβλημά μας λοιπόν, στην περίπτωση που είναι $H \neq 0$, ανάγεται στη μελέτη του συστήματος των ένδεκα εξισώσεων, που συναποτελούν οι ως άνω εννέα και οι εξισώσεις (5.1.61) και (5.1.62).

Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

(1) Αν $\mu = \lambda$, οι συνθήκες (5.1.61) και (5.1.62), μας πληροφορούν ότι τα λ, μ, ν είναι σταθερές, ειδικώτερα $\mu = \lambda = H$ και $\nu = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}H$. Επομένως,

$$e_i(\mu) = e_i(\nu) = e_i(\lambda) = 0; \;\; i = 1, 2, 3.$$

Συνεπώς, το ως άνω σύστημα μετατρέπεται σε ένα ομογενές σύστημα η λύση του οποίου είναι

$$\omega_{21}^2 = \omega_{12}^1 = \omega_{32}^3 = \omega_{31}^3 = \omega_{13}^1 = \omega_{23}^2 = 0,$$

και

$$\omega_{13}^2 = \omega_{23}^1 = 2\omega_{32}^1.$$

(**1a**) Αν $\omega_{32}^1 = 0$, τότε, εύκολα συμπεραίνουμε ότι

$$\omega_{21}^2 = \omega_{12}^1 = \omega_{32}^3 = \omega_{31}^3 = \omega_{13}^1 = \omega_{23}^2 = \omega_{13}^2 = \omega_{23}^1 = \omega_{32}^1 = 0.$$

(**1b**) Αν $\omega_{32}^1 \neq 0$, τότε εφαρμόζοντας την εξίσωση Gauss (4.1.4) και τη σχέση (4.1.5) για $X = e_1$, $Y = Z = e_2$, υπολογίζουμε την ποσότητα $R(e_1, e_2)e_2$ με δύο διαφορετικούς τρόπους. Πράγματι εύκολα έχουμε

$$R(e_1, e_2)e_2 = S(e_1) < S(e_2), e_2 > -S(e_2) < S(e_1), e_2 >$$

και

$$R(e_1, e_2)e_2 = -\omega_{12}^3\omega_{23}^1 e_1 - e_2(\omega_{12}^3)e_3 - 4(\omega_{32}^1)^2 e_1 - 4\omega_{32}^1\omega_{32}^3 e_3$$

αντίστοιχα. Παίρνοντας τώρα τα εσωτερικά γινόμενα με e_1, όπως συνήθως κάνουμε, έχουμε

$$8(\omega_{32}^1)^2 + \mu^2 + \nu^2 = 0,$$

από την οποία συμπεραίνουμε ότι $\omega_{32}^1 = 0$. Το συμπέρασμα αυτό όμως είναι μία αντίφαση, επειδή έχουμε υποθέσει ότι $\omega_{32}^1 \neq 0$.

(2) Αν $\mu \neq \lambda$ και $\mu, \lambda \in R$ τότε οι λύσεις του συστήματος είναι

$$\omega_{21}^2 = \omega_{12}^1 = \omega_{31}^3 = \omega_{32}^3 = 0$$

και

$$\omega_{23}^1 = \omega_{13}^2 = \frac{2\nu^2}{(\lambda-\mu)^2+\nu^2}\omega_{32}^1, \ \ \omega_{23}^2 = -\frac{2(\lambda-\mu)\nu}{(\lambda-\mu)^2+\nu^2}\omega_{32}^1, \ \ \omega_{13}^1 = \frac{2(\lambda-\mu)\nu}{(\lambda-\mu)^2+\nu^2}\omega_{32}^1.$$

(**2a**) Αν $\omega_{32}^1 = 0$, τότε, εύκολα συμπεραίνουμε ότι

$$\omega_{21}^2 = \omega_{12}^1 = \omega_{32}^3 = \omega_{31}^3 = \omega_{13}^1 = \omega_{23}^2 = \omega_{13}^2 = \omega_{23}^1 = \omega_{32}^1 = 0.$$

(**2b**) Αν $\omega_{32}^1 \neq 0$, τότε εργαζόμαστε με όμοιο τρόπο και έχουμε τη σχέση

$$\frac{8\nu^2}{(\lambda-\mu)^2+\nu^2}(\omega_{32}^1)^2 + \mu^2 + \nu^2 = 0,$$

από την οποία έχουμε ότι $\omega_{32}^1 = 0$. Το αποτέλεσμα αυτό είναι επίσης μία αντίφαση, επειδή έχουμε υποθέσει ότι $\omega_{32}^1 \neq 0$.
Από την παραπάνω ανάλυση λοιπόν, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα, ότι η υπόθεση $H = C \neq 0$ δεν ευσταθεί. Κατά συνέπεια θα πρέπει να είναι $H = 0$, δηλαδή η υπερεπιφάνεια να είναι ελαχιστική.

Αν η H δεν είναι σταθερά($H \neq 0$), τότε το ∇H θα είναι διάφορο από το μηδενικό διάνυσμα και από την εξίσωση (4.1.8) συνεπάγεται ότι το ∇H είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του S.

Εφόσον η κανονική μορφή (IV), επιτρέπει μόνο χρονοειδή (time-like) ιδιοδιάνυσματα, το ∇H πρέπει να είναι στην διεύθυνση του e_3.

Πρόταση 5.4 *Έστω* $[M_2^3, (-,+,-)]$ μία διαρμονική υπερεπιφάνεια στην ψευδο-Ευκλείδεια πολλαπλότητα E_2^4 ο τελεστής σχήματος της οποίας ως προς μια ορθοκανονική βάση είναι

$$[S]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \mu & \nu & 0 \\ -\nu & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \nu \neq 0$$

δηλαδή τύπου (IV). Υποθέτουμε ότι το ∇H είναι ένα χρονοειδές (time-like) διάνυσμα. Τότε η υπερεπιφάνεια M_2^3 είναι ελαχιστική, $(H = 0)$.

Απόδειξη. Εφόσον η H είναι μη σταθερά $(H \neq 0)$ θα είναι, $\nabla H \neq \overrightarrow{0}$. Καθώς ο τελεστής σχήματος έχει την κανονική μορφή (IV), ως προς μια ορθοκανονική βάση $\{e_1, e_2, e_3\}$ του $T_p(M_2^3)$, εύκολα έχουμε

$$\begin{aligned} S(e_1) &= \mu e_1 + \nu e_2, \\ S(e_2) &= -\nu e_1 + \mu e_2, \quad (5.1.63) \\ S(e_3) &= \lambda e_3. \end{aligned}$$

Ως εκ τούτου, χρησιμοποιώντας την (4.1.8) συμπεραίνουμε ότι ∇H είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του S, αντίστοιχο της ιδιοτιμής $\frac{-3H}{2}$ και ότι το ∇H μπορεί να επιλεγεί προς την διεύθυνση του e_3, εφόσον αυτό είναι ένα χρονοειδές (time-like) διάνυσμα, οπότε $\lambda = \frac{-3H}{2}$. Έπειτα από αυτό, χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$\nabla H = -e_1(H)e_1 + e_2(H)e_2 - e_3(H)e_3,$$

συμπεραίνουμε ότι

$$e_1(H) = e_2(H) = 0 \ \text{ και } \ e_3(H) \neq 0.$$

Από την εξίσωση $trS = 2\mu + \lambda = 3H \neq 0$ (5.1.62) και δεδομένου ότι $\lambda = \frac{-3H}{2}$ έχουμε $\mu = \frac{9H}{4}$. Γνωρίζουμε ότι:

$$\nabla_{e_i} e_j = \sum_{k=1}^{3} \omega_{ij}^k e_k \ \ ; \ \ i,j,k = 1,2,3 \ \ (5.1.64)$$

όπου $\omega_{ij}^k = -\varepsilon_j \varepsilon_k \omega_{ik}^j$ (5.1.74), με $\varepsilon_j =< e_j, e_j >$ (δηλαδή $\varepsilon_1 = -1$, $\varepsilon_2 = +1$, $\varepsilon_3 = -1$).

Εφαρμόζουμε την εξίσωση Codazzi (4.1.3) για τις τριάδες $(1,3,1)$, $(2,3,2)$, $(1,3,2)$, $(1,3,3)$ και $(2,3,3)$ οπότε έχουμε

$$\frac{15H}{4}\omega_{13}^1 - \nu\omega_{13}^2 = -e_3(\mu) - 2\nu\omega_{32}^1 \tag{5.1.75}$$

$$\frac{15H}{4}\omega_{23}^2 + \nu\omega_{23}^1 = -e_3(\mu) + 2\nu\omega_{31}^2 \tag{5.1.76}$$

$$e_3(\nu) = -\nu\omega_{13}^1 - \frac{15H}{4}\omega_{13}^2 \tag{5.1.77}$$

$$\frac{15H}{4}\omega_{31}^3 + \nu\omega_{32}^3 = 0 \tag{5.1.78}$$

$$-\nu\omega_{31}^3 + \frac{15H}{4}\omega_{32}^3 = 0 \tag{5.1.79}$$

αντίστοιχα.

Από τη σχέση (5.1.74) εύκολα έχουμε ότι

$$\omega_{32}^1 = \omega_{31}^2, \tag{5.1.80}$$

$$\omega_{12}^3 = \omega_{13}^2, \tag{5.1.81}$$

$$\omega_{21}^3 = -\omega_{23}^1, \tag{5.1.82}$$

$$\omega_{11}^3 = -\omega_{13}^1, \tag{5.1.83}$$

$$\omega_{22}^3 = \omega_{23}^2. \tag{5.1.84}$$

Επειδή τώρα, $e_1(H) = e_2(H) = 0$, θα είναι και $[e_1, e_2](H) = 0$. Όμως, αν λάβουμε υπόψη μας και την (5.1.64), τότε έχουμε διαδοχικά

$$[e_1, e_2](H) = \nabla_{e_1} e_2(H) - \nabla_{e_2} e_1(H) = (\omega_{12}^3 - \omega_{21}^3) e_3(H) = 0.$$

Κατά συνέπεια,

$$\omega_{12}^3 = \omega_{21}^3. \tag{5.1.85}$$

Επομένως

$$\omega_{13}^{2} = -\omega_{23}^{1}. \tag{5.1.86}$$

Από την άλλη μεριά χρησιμοποιώντας την εξίσωση Codazzi για την τριάδα $(1, 2, 3)$

$$< (\nabla e_1 S)e_2, e_3 >=< (\nabla e_2 S)e_1, e_3 >$$

και τη σχέση (5.1.85) έχουμε

$$\omega_{11}^{3} = -\omega_{22}^{3}. \tag{5.1.87}$$

Τέλος, από τον συνδυασμό των (5.1.83), (5.1.84) και (5.1.87) έχουμε και

$$\omega_{13}^{1} = \omega_{23}^{2}. \tag{5.1.88}$$

Το σύστημα των εξισώσεων (5.1.75) και (5.1.76) μέσω των σχέσεων (5.1.80), (5.1.86) και (5.1.88) γίνεται

$$\frac{15H}{4}\omega_{13}^{1} - \nu\omega_{13}^{2} = -e_3(\mu) - 2\nu\omega_{32}^{1}$$

$$\frac{15H}{4}\omega_{13}^{1} - \nu\omega_{13}^{2} = -e_3(\mu) + 2\nu\omega_{32}^{1}.$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις έχουμε $0 = -4\nu\omega_{32}^{1}$, με $\nu \neq 0$. Οπότε $\omega_{32}^{1} = 0$, και η σχέση (5.1.80) δίνει

$$\omega_{32}^{1} = \omega_{31}^{2} = 0. \tag{5.1.89}$$

Η σχέση (5.1.75) λαμβανομένου υπόψη ότι $\mu = \frac{9H}{4}$ γίνεται

$$e_3(H) = -\frac{5H}{3}\omega_{13}^{1} + \frac{4\nu}{9}\omega_{13}^{2}. \tag{5.1.90}$$

Από τις εξισώσεις (5.1.78) και (5.1.79) εύκολα έχουμε ότι

$$\omega_{31}^{3} = \omega_{32}^{3} = 0, \tag{5.1.91}$$

αφού αυτό είναι ένα ομογενές γραμμικό σύστημα με ορίζουσα,

$$D = (\frac{15H}{4})^2 + \nu^2 \neq 0.$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (5.1.74) και (5.1.91) έχουμε επίσης ότι

$$\omega_{33}^1 = \omega_{33}^2 = 0. \tag{5.1.92}$$

Εφαρμόζοντας τώρα την εξίσωση Gauss (4.1.4) και τη σχέση (4.1.5) για $X = e_1,\ Y = e_3,\ Z = e_1$, υπολογίζουμε την ποσότητα $R(e_1, e_3)e_1$ με δύο διαφορετικούς τρόπους. Παίρνουμε έπειτα τα εσωτερικά γινόμενα με το e_3 και έχουμε την ποσότητα $< R(e_1, e_3)e_1, e_3 >$ με δυο διαφορετικές εκφράσεις. Πράγματι, έχουμε:

$$\begin{aligned}
< R(e_1, e_3)e_1, e_3 > &= < S(e_1), e_3 >< S(e_3), e_1 > \\
&\quad - < S(e_3), e_3 >< S(e_1), e_1 > \\
&= - < \lambda e_3, e_3 >< \mu e_1 + \nu e_2, e_1 > \\
&= \lambda(-\mu) = \frac{27}{8}H^2.
\end{aligned}$$

Αλλά και

$$\begin{aligned}
R(e_1, e_3)e_1 &= \nabla_{e_1}\nabla_{e_3}e_1 - \nabla_{e_3}\nabla_{e_1}e_1 - \nabla_{[e_1,e_3]}e_1 \\
&= -\nabla_{e_3}(\omega_{11}^2 e_2) - \nabla_{e_3}(\omega_{11}^3 e_3) - \omega_{13}^1\nabla_{e_1}e_1 - \omega_{13}^2\nabla_{e_2}e_1 \\
&= -\omega_{11}^2\nabla_{e_3}e_2 - e_3(\omega_{11}^2)e_2 - \omega_{11}^3\nabla_{e_3}e_3 \\
&\quad -e_3(\omega_{11}^3)e_3 - \omega_{13}^1\nabla_{e_1}e_1 - \omega_{13}^2\nabla_{e_2}e_1 \\
&= -e_3(\omega_{11}^2)e_2 - e_3(\omega_{11}^3)e_3 - \omega_{13}^1(\omega_{11}^2 e_2 + \omega_{11}^3 e_3) \\
&\quad -\omega_{13}^2(\omega_{21}^2 e_2 + \omega_{21}^3 e_3).
\end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned}
< R(e_1, e_3)e_1, e_3 > &= e_3(\omega_{11}^3) + \omega_{13}^1\omega_{11}^3 + \omega_{13}^2\omega_{21}^3 \\
&= -e_3(\omega_{13}^1) - (\omega_{13}^1)^2 + (\omega_{13}^2)^2.
\end{aligned}$$

Εξισώνουμε τώρα τα δεύτερα μέλη και έχουμε,

$$e_3(\omega_{13}^1) = -(\omega_{13}^1)^2 + (\omega_{13}^2)^2 - \frac{27H^2}{8}. \tag{5.1.93}$$

Η εξίσωση

$$\triangle H + HtrS^2 = 0$$

με τη βοήθεια των (4.1.10), (5.1.83), (5.1.84) και (5.1.88) γίνεται,

$$\begin{aligned} -\varepsilon_1[e_1e_1(H) - \nabla_{e_1}e_1(H)] - \varepsilon_2[e_2e_2(H) - \nabla_{e_2}e_2(H)] & \\ -\varepsilon_3[e_3e_3(H) - \nabla_{e_3}e_3(H)] + H\left(\frac{99}{8}H^2 - 2\nu^2\right) &= 0. \end{aligned}$$

Δεδομένου όμως ότι, $\varepsilon_1 = -1, \;\; \varepsilon_2 = +1, \;\; \varepsilon_3 = -1$, η σχέση αυτή παίρνει τη μορφή

$$-\omega_{11}^3 e_3(H) + \omega_{22}^3 e_3(H) + e_3e_3(H) + H\left(\frac{99}{8}H^2 - 2\nu^2\right) = 0,$$

και τελικά

$$2\omega_{13}^1 e_3(H) + e_3e_3(H) + \frac{99}{8}H^3 - 2H\nu^2 = 0. \tag{5.1.94}$$

Εφαρμόζουμε τώρα πάλι, την εξίσωση Gauss (4.1.4) και τη σχέση (4.1.5) για $X = e_1, \; Y = e_3, \; Z = e_2$ και εργαζόμενοι όπως προηγουμένως έχουμε τελικά ότι

$$e_3(\omega_{13}^2) = -2\omega_{13}^1\omega_{13}^2 - \frac{3H\nu}{2}. \tag{5.1.95}$$

Το πρόβλημα λοιπόν στην προκειμένη περίπτωση, ανάγεται στη μελέτη του συστήματος των πέντε διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους (5.1.77), (5.1.90), (5.1.93), (5.1.94) και (5.1.95).

Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

(1) Αν $\omega_{13}^1 = \omega_{13}^2 = 0$, τότε από τη σχέση (5.1.90) έχουμε $e_3(H) = 0$, το οποίο είναι άτοπο, καθόσον από την υπόθεση είναι $e_3(H) \neq 0$.

(2) Αν $\omega_{13}^1 \neq 0$ και $\omega_{13}^2 = 0$, τότε από τη σχέση (5.1.95) έχουμε ότι $-\frac{3H\nu}{2} = 0$ και δεδομένου ότι $\nu \neq 0$, θα πρέπει $H = 0$, το οποίο επίσης είναι αντίφαση, αφού από την υπόθεση $H \neq 0$.

(3) Αν $\omega_{13}^1 = 0$ και $\omega_{13}^2 \neq 0$, τότε η εξίσωση (5.1.93) μετατρέπεται στην $\omega_{13}^2 = \pm\frac{3\sqrt{6}H}{4}$ και οι υπόλοιπες των εξισώσεων (5.1.77), (5.1.90), (5.1.94) και (5.1.95) παίρνουν τις ακόλουθες μορφές:

$$e_3(\nu) = -\frac{15H}{4}\omega_{13}^2 \tag{5.1.96}$$

$$e_3(H) = \frac{4\nu}{9}\omega_{13}^2 \tag{5.1.97}$$

$$e_3e_3(H) + \frac{99H^3}{8} - 2H\nu^2 = 0 \tag{5.1.98}$$

$$e_3(\omega_{13}^2) = -\frac{3H\nu}{2} \tag{5.1.99}$$

αντίστοιχα. Έπειτα υπολογίζουμε την έκφραση $e_3e_3(H)$. Για αυτό το λόγο παραγωγίζοντας ως προς e_3 αμφότερα τα μέλη της (5.1.97) έχουμε

$$e_3e_3(H) = \frac{4}{9}\omega_{13}^2 e_3(\nu) + \frac{4\nu}{9}e_3(\omega_{13}^2)$$

και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (5.1.96) και (5.1.99) έχουμε τελικά

$$e_3e_3(H) = -\frac{5H}{3}(\omega_{13}^2)^2 - \frac{2H\nu^2}{3}. \tag{5.1.100}$$

Η σχέση λοιπόν (5.1.98) μέσω της σχέσης (5.1.100) λαμβάνοντας υπόψη και ότι $H \neq 0$, γίνεται

$$-\frac{5}{3}(\omega_{13}^2)^2 + \frac{99H^2}{8} - \frac{8\nu^2}{3} = 0. \tag{5.1.101}$$

Παραγωγίζοντας και πάλι την σχέση αυτή ως προς τη διεύθυνση του e_3 και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (5.1.96), (5.1.97) και (5.1.99) έχουμε

$$-\frac{5}{3}2(\omega_{13}^2)e_3(\omega_{13}^2) + \frac{99}{8}2He_3(H) - \frac{8}{3}2\nu e_3(\nu) = 0,$$

οπότε τελικά, $36H\nu = 0$, με $\nu \neq 0$. Κατά συνέπεια και πάλι οδηγούμαστε στο ότι $H = 0$, το οποίο είναι άτοπο.

(4) Αν $\omega_{13}^1 = \omega_{13}^2 \neq 0$, τότε το σύστημα των πέντε εξισώσεων (5.1.77), (5.1.90), (5.1.93), (5.1.94) και (5.1.95) ανάγεται ισοδύναμα στο ακόλουθο σύστημα:

$$e_3(\nu) = -(\nu + \frac{15H}{4})\omega_{13}^1 \tag{5.1.102}$$

$$e_3(H) = (-\frac{5H}{3} + \frac{4\nu}{9})\omega_{13}^1 \tag{5.1.103}$$

$$e_3(\omega_{13}^1) = -\frac{27H^2}{8} \tag{5.1.104}$$

$$2\omega_{13}^1 e_3(H) + e_3e_3(H) + \frac{99H^3}{8} - 2H\nu^2 = 0 \quad (5.1.94)$$

$$e_3(\omega_{13}^1) = -2(\omega_{13}^1)^2 - \frac{3H\nu}{2} \tag{5.1.105}$$

αντίστοιχα.

Από τις σχέσεις (5.1.104) και (5.1.105) εύκολα έχουμε ότι

$$(\omega_{13}^1)^2 = \frac{27H^2}{16} - \frac{3H\nu}{4}. \tag{5.1.106}$$

Παραγωγίζοντας στη συνέχεια ως προς τη διεύθυνση του e_3 αμφότερα τα μέλη της (5.1.103) και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (5.1.102) και (5.1.104), έχουμε

$$e_3e_3(H) = (\frac{10H}{9} - \frac{32\nu}{27})(\omega_{13}^1)^2 + \frac{45H^3}{8} - \frac{3H^2\nu}{2}. \tag{5.1.107}$$

Συνεπώς η σχέση (5.1.94) μέσω των σχέσεων (5.1.103) και (5.1.107) γίνεται,

$$(-\frac{20H}{9} - \frac{8\nu}{27})(\omega_{13}^1)^2 + 18H^3 - \frac{3H^2\nu}{2} - 2H\nu^2 = 0. \tag{5.1.108}$$

Αν αντικαταστήσουμε τη σχέση (5.1.106) στη σχέση (5.1.108) έχουμε

$$-\frac{57}{4}H^2 + \frac{1}{3}H\nu + \frac{16}{9}\nu^2 = 0. \tag{5.1.109}$$

Παραγωγίζοντας και πάλι ως προς τη διεύθυνση του e_3 την εξίσωση αυτή και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (5.1.102) και (5.1.103) έχουμε επίσης

$$-\frac{555}{968}H^2 + \frac{1}{3}H\nu + \frac{46}{1089}\nu^2 = 0. \tag{5.1.110}$$

Αφαιρούμε κατά μέλη τις εξισώσεις (5.1.109) και (5.1.110) οπότε προκύπτει η εξίσωση

$$-\frac{13239}{968}H^2 + \frac{1890}{1089}\nu^2 = 0. \tag{5.1.111}$$

Παραγωγίζοντας τώρα ως προς τη διεύθυνση του e_3 αμφότερα τα μέλη της (5.1.106) και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (5.1.102), (5.1.103) και (5.1.104) έχουμε τη σχέση

$$\frac{3}{8}H^2 + \frac{1}{3}H\nu - \frac{2}{63}\nu^2 = 0. \tag{5.1.112}$$

Αφαιρούμε κατά μέλη τις εξισώσεις (5.1.109) και (5.1.112) και έχουμε τελικά την εξίσωση

$$-\frac{117}{8}H^2 + \frac{38}{21}\nu^2 = 0. \tag{5.1.113}$$

Συνεπώς το αρχικό σύστημα των πέντε εξισώσεων (5.1.94), (5.1.102), (5.1.103), (5.1.104) και (5.1.105) έχει αναχθεί ισοδύναμα στο σύστημα των εξισώσεων (5.1.111) και (5.1.113) με δύο αγνώστους H^2 και ν^2. Αυτό το σύστημα είναι ένα ομογενές σύστημα με ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων

$$D = \frac{537}{847} \neq 0.$$

Ως εκ τούτου, αυτό το σύστημα δέχεται ως μοναδική λύση τη μηδενική. Δηλαδή, $H^2 = \nu^2 = 0$ και συνεπώς, $H = \nu = 0$, το οποίο είναι άτοπο, επειδή έχουμε υποθέσει ότι $H \neq 0$. Συνεπώς και σ′ αυτή την περίπτωση η επιφάνεια είναι ελαχιστική.

(5) Αν $\omega_{13}^1 \neq 0$, $\omega_{13}^2 \neq 0$ και $\omega_{13}^1 \neq \omega_{13}^2$. Εφαρμόζουμε την εξίσωση Gauss (4.1.4), για υπερεπιφάνειες του χώρου E_2^4, για τις τριάδες (e_1, e_2, e_1), (e_1, e_2, e_2), (e_2, e_3, e_1) και (e_3, e_1, e_1) και παίρνουμε τα εσωτερικά γινόμενα με το e_3, e_2, οπότε έχουμε:

$< R(e_1, e_2)e_1, e_3 >= 0$, $< R(e_1, e_2)e_2, e_3 >= 0$, $< R(e_2, e_3)e_1, e_2 >= 0$, και $< R(e_3, e_1)e_1, e_2 >= 0$. αντίστοιχα.

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε τη σχέση (4.1.5) για τις ίδιες τριάδες των διανυσμάτων και έχουμε.

$$R(e_1, e_2)e_1 = \nabla_{e_1}\nabla_{e_2}e_1 - \nabla_{e_2}\nabla_{e_1}e_1 - \nabla_{[e_1,e_2]}e_1$$

όπου,

$$[e_1, e_2] = \nabla_{e_1}e_2 - \nabla_{e_2}e_1 = \omega^1_{12}e_1 + \omega^3_{12}e_3 - \omega^2_{21}e_2 - \omega^3_{21}e_3.$$

Άρα

$$\begin{aligned}
R(e_1, e_2)e_1 &= \nabla_{e_1}(\omega^2_{21}e_2 + \omega^3_{21}e_3) - \nabla_{e_2}(\omega^2_{11}e_2 + \omega^3_{11}e_3) \\
&\quad -\nabla_{\omega^1_{12}e_1+\omega^3_{12}e_3-\omega^2_{21}e_2-\omega^3_{21}e_3}e_1 \\
&= \nabla_{e_1}(\omega^2_{21}e_2) + \nabla_{e_1}(\omega^3_{21}e_3) - \nabla_{e_2}(\omega^2_{11}e_2) - \nabla_{e_2}(\omega^3_{11}e_3) \\
&\quad -\omega^1_{12}\nabla_{e_1}e_1 - \omega^3_{12}\nabla_{e_3}e_1 + \omega^2_{21}\nabla_{e_2}e_1 + \omega^3_{21}\nabla_{e_3}e_1 \\
&= \omega^2_{21}\nabla_{e_1}e_2 + e_1(\omega^2_{21})e_2 + \omega^3_{21}\nabla_{e_1}e_3 + e_1(\omega^3_{21})e_3 \\
&\quad -\omega^2_{11}\nabla_{e_2}e_2 - e_2(\omega^2_{11})e_2 - \omega^3_{11}\nabla_{e_2}e_3 - e_2(\omega^3_{11})e_3 \\
&\quad -\omega^1_{12}\nabla_{e_1}e_1 - \omega^3_{12}\nabla_{e_3}e_1 + \omega^2_{21}\nabla_{e_2}e_1 + \omega^3_{21}\nabla_{e_3}e_1 \\
&= \omega^2_{21}(\omega^1_{12}e_1 + \omega^3_{12}e_3) + e_1(\omega^2_{21})e_2 + \omega^3_{21}(\omega^1_{13}e_1 + \omega^2_{13}e_2) + e_1(\omega^3_{21})e_3 \\
&\quad -\omega^2_{11}(\omega^1_{22}e_1 + \omega^3_{22}e_3) - e_2(\omega^2_{11})e_2 - \omega^3_{11}(\omega^1_{23}e_1 + \omega^2_{23}e_2) - e_2(\omega^3_{11})e_3 \\
&\quad -\omega^1_{12}(\omega^2_{11}e_2 + \omega^3_{11}e_3) - \omega^3_{12}.0 + \omega^2_{21}(\omega^2_{21}e_2 + \omega^3_{21}e_3) + \omega^3_{21}.0.
\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
< R(e_1, e_2)e_1, e_3 > &= -\omega^2_{21}\omega^3_{12} - e_1(\omega^3_{21}) + \omega^2_{11}\omega^3_{22} + e_2(\omega^3_{11}) + \omega^1_{12}\omega^3_{11} - \omega^2_{21}\omega^3_{21} \\
&= -\omega^2_{21}\omega^2_{13} - e_1(\omega^2_{13}) + \omega^1_{12}\omega^2_{23} - e_2(\omega^1_{13}) - \omega^1_{12}\omega^1_{13} - \omega^2_{21}\omega^3_{21} \\
&= -\omega^2_{21}\omega^2_{13} - e_1(\omega^2_{13}) + \omega^1_{12}\omega^1_{13} - e_2(\omega^1_{13}) - \omega^1_{12}\omega^1_{13} - \omega^2_{21}\omega^2_{13} \\
&= -e_1(\omega^2_{13}) - e_2(\omega^1_{13}) - 2\omega^2_{21}\omega^2_{13}.
\end{aligned}$$

Τελικά είναι,

$$< R(e_1, e_2)e_1, e_3 >= -e_1(\omega^2_{13}) - e_2(\omega^1_{13}) - 2\omega^2_{21}\omega^2_{13}.$$

Όμοια, αν εργασθούμε και για τις υπόλοιπες τριάδες έχουμε αντίστοιχα:

$$< R(e_1, e_2)e_2, e_3 >= -e_1(\omega_{13}^1) + e_2(\omega_{13}^2) + 2\omega_{12}^1\omega_{13}^2.$$

$$< R(e_2, e_3)e_1, e_2 >= -e_3(\omega_{21}^2) + \omega_{13}^2\omega_{12}^1 - \omega_{13}^1\omega_{21}^2.$$

$$< R(e_3, e_1)e_1, e_2 >= e_3(\omega_{12}^1) + \omega_{13}^1\omega_{12}^1 + \omega_{13}^2\omega_{21}^2.$$

Δεδομένου όμως, ότι τα πρώτα μέλη αυτών των σχέσεων, όπως αποδείξαμε, είναι μηδέν, θα έχουμε:

$$e_1(\omega_{13}^2) + e_2(\omega_{13}^1) = -2\omega_{13}^2\omega_{21}^2 \tag{5.1.114}$$

$$e_1(\omega_{13}^1) - e_2(\omega_{13}^2) = 2\omega_{13}^2\omega_{12}^1 \tag{5.1.115}$$

$$e_3(\omega_{21}^2) = \omega_{13}^2\omega_{12}^1 - \omega_{13}^1\omega_{21}^2 \tag{5.1.116}$$

$$e_3(\omega_{12}^1) = -\omega_{13}^1\omega_{12}^1 - \omega_{13}^2\omega_{21}^2 \tag{5.1.117}$$

αντίστοιχα.

Διακρίνουμε τώρα τις ακόλουθες περιπτώσεις:

(5a) Έστω ότι $\omega_{12}^1\omega_{21}^2 \neq 0$. Εφαρμόζουμε την εξίσωση Codazzi για την δυάδα (e_1, e_2) και παίρνουμε εσωτερικά γινόμενα με το e_1:

$$< (\nabla_{e_1}S)e_2, e_1 >=< (\nabla_{e_2}S)e_1, e_1 > \quad \text{(K)}$$

Το πρώτο μέλος αυτής της εξίσωσης γράφεται διαδοχικά

$$\begin{aligned} < (\nabla_{e_1}S)e_2, e_1 > &= < \nabla_{e_1}(Se_2) - S(\nabla_{e_1}e_2), e_1 > \\ &= < \nabla_{e_1}(Se_2), e_1 > - < S(\nabla_{e_1}e_2), e_1 > \\ &= e_1(\nu) - \mu\omega_{12}^1 + \mu\omega_{12}^1 \\ &= e_1(\nu). \end{aligned}$$

Άρα

$$< (\nabla_{e_1} S)e_2, e_1 >= e_1(\nu). \quad \text{(K-1)}$$

Το δεύτερο μέλος της εξίσωσης (K) γίνεται

$$\begin{aligned}
< (\nabla_{e_2} S)e_1, e_1 > &= < \nabla_{e_2}(Se_1) - S(\nabla_{e_2} e_1), e_1 > \\
&= < \nabla_{e_2}(Se_1), e_1 > - < S(\nabla_{e_2} e_1), e_1 > \\
&= < \nabla_{e_2}(\mu e_1 + \nu e_2), e_1 > - < S(\nabla_{e_2} e_1), e_1 > \\
&= < \nabla_{e_2}(\mu e_1), e_1 > + < \nabla_{e_2}(\nu e_2), e_1 > \\
&\quad - < S(\omega_{21}^1 e_1 + \omega_{21}^2 e_2 + \omega_{21}^3 e_3), e_1 > \\
&= < \mu \nabla_{e_2} e_1 + e_2(\mu) e_1, e_1 > + < \nu \nabla_{e_2} e_2 + e_2(\nu) e_2, e_1 > \\
&\quad - < S(\omega_{21}^2 e_2), e_1 > - < S(\omega_{21}^3 e_3), e_1 > \\
&= \mu < \nabla_{e_2} e_1, e_1 > + e_2(\mu) < e_1, e_1 > + \nu < \nabla_{e_2} e_2, e_1 > \\
&\quad + e_2(\nu) < e_2, e_1 > - \omega_{21}^2 < Se_2, e_1 > - \omega_{21}^3 < Se_3, e_1 > \\
&= \mu < \omega_{21}^1 e_1, e_1 > + \nu < \omega_{22}^1 e_1, e_1 > \\
&\quad - \omega_{21}^2 < -\nu e_1 + \mu e_2, e_1 > - \omega_{21}^3 < \lambda e_3, e_1 > \\
&= -\nu \omega_{22}^1 - \nu \omega_{21}^2 \\
&= -\nu \omega_{21}^2 - \nu \omega_{21}^2 \\
&= -2\nu \omega_{21}^2.
\end{aligned}$$

Άρα

$$< (\nabla_{e_2} S)e_1, e_1 >= -2\nu \omega_{21}^2. \quad \text{(K-2)}$$

Εξισώνουμε τα δύο μέλη των (K-1), (K-2) και έχουμε

$$e_1(\nu) = -2\nu \omega_{21}^2. \tag{5.1.118}$$

Όμοια αν εργασθούμε, από την εξίσωση

$$< (\nabla_{e_1} S)e_2, e_2 >=< (\nabla_{e_2} S)e_1, e_2 >$$

έχουμε,

$$e_2(\nu) = -2\nu\omega_{12}^1 \tag{5.1.119}$$

αντίστοιχα. Εφόσον οι εξισώσεις αυτές ισχύουν για κάθε $\nu \neq 0$, θα ισχύουν και αν αντικαταστήσουμε τη μη μηδενική συνάρτηση ν με την συνάρτηση H, η οποία είναι επίσης διάφορη του μηδενός. Συνεπώς, από τις εξισώσεις (5.1.118) και (5.1.119) και δεδομένου ότι $e_1(H) = e_2(H) = 0$, έχουμε

$$e_1(H) = -2H\omega_{21}^2 = 0 \tag{5.1.120}$$

και

$$e_2(H) = -2H\omega_{12}^1 = 0 \tag{5.1.121}$$

αντίστοιχα.
Αλλά από την υπόθεση $\omega_{12}^1\omega_{21}^2 \neq 0$, κατά συνέπεια από τις εξισώσεις (5.1.120) και (5.1.121) συμπεραίνουμε ότι $H = 0$, το οποίο είναι μία αντίφαση.
(**5b**) Έστω ότι

$$\omega_{12}^1 = 0, \tag{5.1.122}$$

τότε, από τη σχέση (5.1.117) εύκολα συμπεραίνουμε ότι

$$\omega_{21}^2 = 0. \tag{5.1.123}$$

Χρησιμοποιώντας τώρα την παρένθεση Lie $[e_1, e_3]$ με δύο διαφορετικούς τρόπους έχουμε:

$$[e_1, e_3](H) = e_1(e_3(H)) - e_3(e_1(H)) = e_1(e_3(H))$$

και

$$[e_1, e_3](H) = (\nabla_{e_1}e_3 - \nabla_{e_3}e_1)(H) = (\omega_{13}^3 - \omega_{31}^3)e_3(H).$$

Όμως είναι, $\omega_{13}^3 = \omega_{31}^3 = 0$. Άρα $[e_1, e_3](H) = 0$. Επομένως,

$$e_1(e_3(H)) = 0. \tag{5.1.124}$$

Όμοια βρίσκουμε:

$$[e_2, e_3](H) = e_2(e_3(H)) - e_3(e_2(H)) = e_2(e_3(H))$$

και

$$[e_2, e_3](H) = (\nabla_{e_2} e_3 - \nabla_{e_3} e_2)(H) = 0.$$

Τελικά,

$$e_2(e_3(H)) = 0. \tag{5.1.125}$$

Η σχέση (5.1.124), μέσω των σχέσεων (5.1.90), (5.1.118) και (5.1.123) γίνεται

$$\frac{5H}{3} e_1(\omega_{13}^1) - \frac{4\nu}{9} e_1(\omega_{13}^2) = 0 \tag{5.1.126}$$

Ανάλογα η σχέση (5.1.125), μέσω των σχέσεων (5.1.90), (5.1.119) και (5.1.122) γίνεται

$$\frac{5H}{3} e_2(\omega_{13}^1) - \frac{4\nu}{9} e_2(\omega_{13}^2) = 0 \tag{5.1.127}$$

Έτσι, σχηματίσαμε ένα σύστημα έξι εξισώσεων (5.1.114), (5.1.115), (5.1.116), (5.1.117), (5.1.126) και (5.1.127) με έξι αγνώστους ω_{13}^1, ω_{13}^2, ω_{21}^2, ω_{12}^1, ν και H. Στη συνέχεια μελετάμε αυτό το σύστημα.

Οι σχέσεις (5.1.126) και (5.1.127), με χρήση των σχέσεων (5.1.123) και (5.1.122) αντίστοιχα, μετασχηματίζονται στις,

$$e_1(\omega_{13}^1) = \frac{4\nu}{15H} e_1(\omega_{13}^2) \tag{5.1.128}$$

και

$$e_2(\omega_{13}^1) = \frac{4\nu}{15H} e_2(\omega_{13}^2) \tag{5.1.129}$$

αντίστοιχα. Η σχέση (5.1.115) μέσω της σχέσης (5.1.122) γίνεται

$$e_1(\omega_{13}^1) = e_2(\omega_{13}^2). \tag{5.1.130}$$

Η σχέση (5.1.114) μέσω της σχέσης (5.1.123) γίνεται

$$e_1(\omega_{13}^2) = -e_2(\omega_{13}^1). \tag{5.1.131}$$

Συνεπώς το σύστημα των εξισώσεων έχει αναχθεί προς το ισοδύναμο σύστημα των έξι εξισώσεων (5.1.123), (5.1.116), (5.1.128), (5.1.129), (5.1.130) και (5.1.131).

Η σχέση (5.1.129) μέσω των σχέσεων (5.1.128) και (5.1.130) γίνεται

$$e_2(\omega_{13}^1) = \left(\frac{4\nu}{15H}\right)^2 e_1(\omega_{13}^2). \tag{5.1.132}$$

Η σχέση (5.1.116) καθίσταται ταυτότητα. Τελικά, συνδυάζοντας τις σχέσεις (5.1.131) και (5.1.132) έχουμε

$$\left(\frac{4\nu}{15H}\right)^2 = -1$$

το οποίο είναι μία αντίφαση. Η αντίφαση προέκυψε από την υπόθεση ότι $H \neq 0$. Θα είναι λοιπόν αναγκαστικά, $H = 0$ και επομένως η υπερεπιφάνεια M_2^3 είναι ελαχιστική.

Παρατήρηση: Από τα προηγούμενα καθίσταται αμέσως φανερό ότι αν $\omega_{12}^1 = 0$, τότε και $\omega_{21}^2 = 0$ και αντίστροφα.

Αποδείξαμε λοιπόν, ότι σε καθεμιά από τις περιπτώσεις (II), (III) και (IV) η υπερεπιφάνεια M_2^3, του ψευδο-Ευκλείδειου χώρου E_2^4 είναι ελαχιστική και κατά συνέπεια η απόδειξη του Θεωρήματος 5.1 έχει ολοκληρωθεί.

Κεφάλαιο 6

6.1 SUMMARY

In the present Ph.D. Thesis we study three problems referred in the pseudo-Euclidean geometry. In the first two chapters, Chapter 1 and Chapter 2 we review known results and describe the basic notions of the Riemannian and pseudo-Riemannian geometry. In Chapter 3 we study surfaces of revolution of the 3-dimensional Lorentz-Minkowski space satisfying given geometric condition. In Chapter 4 we find all the canonical forms of the shape operator of the 3-dimensional hypersurfaces of signature (-, +, -) of the 4-dimensional pseudo-Euclidean space of signature (-, +, -, +). Finally in Chapter 5 we study the relation which exists between the biharmonic and minimal hypersurfaces referred in Chapter 4, by using their shape operator. More precisely we prove that every such biharmonic hypersurface is minimal. The main results of this Ph.D thesis are published (or has been accepted for publication) in the papers of Petoumenos et al (*Surfaces of Revolution in the 3-dimensional Lorentz-Minkowski space* E_1^3 *satisfying* $\Delta^{III}\vec{r} = A\vec{r}$, Bull. Greek Math. Soc., 2005), Petoumenos et al (*On the shape operator of the hypersurfaces* M_2^3 *of* E_2^4, Bull. Greek Math. Soc., 2007) and Petoumenos et al (*Biharmonic hypersurfaces of type* M_2^3 *in* E_2^4, Houston J. Math., 2009).

Βιβλιογραφία

[1] Aiyama R. -Cheng Q.M., *Complete spacelike hypersurfaces with constant mean curvature in a Lorentz space form of dimension 4*, Kodai Mathematical Journal, **15(3)**, (1992) 375–386.

[2] Alias L., Ferrandez A., Lucas P., *Surfaces in the 3-dimensional Lorentz-Minkowski space satisfying* $\Delta \mathbf{x} = A\mathbf{x} + B$, Pacific Journal of Mathematics, **156(2)**, (1992) 201–208.

[3] Alias L., Ferrandez A., Lucas P., *Hypersurfaces in space forms satisfying the condition* $\Delta \mathbf{x} = A\mathbf{x} + B$, Transactions of the American Mathematical Society, **347(5)**, (1995) 1793–1801.

[4] Alias L. -Pastor A.J., *Constant mean curvature spacelike hypersurfaces with spherical boundary in the Lorentz-Minkowski space*, J. of Geometry and Physics, **28**, (1998) 85–93.

[5] Alias L. -Aledo J., *Curvature properties of compact spacelike hypersurfaces in de Sitter space*, Differential Geometry and its Applications, **14**, (2001) 137–149.

[6] Arvanitoyeorgos A. - Defever F. - Kaimakamis G. - Papantoniou V., *Biharmonic Lorentz hypersurfaces in* E_1^4, Pacific J. Math., **229(2)**, (2007) 293–305.

[7] Baikoussis Chr., Blair D., Chen B. Y., Defever F., *Hypersurfaces of Restricted Type in Minkowski Space*, Geometriae Dedicata, **62**, (1996) 319–332.

[8] Beneki Chr. - Kaimakamis G. - Papantoniou B. J., *A classification of surfaces of revolution with constant Gauss curvature in a 3-dimensional Minkowski space*, Bull. Calcutta Math. Soc., **90(6)**, (1998) 441–458

[9] Chen B.-Y., *Total mean curvature and submanifolds of finite type*, World Scientific, Singapore, 1984.

[10] Chen B. Y., *Finite-type Pseudo-Riemannian Submanifolds*, Tamkang Journal of Math. **17(2)**, (1986) 137–151.

[11] Chen B.-Y., *Some open problems and conjectures on submanifolds of finite type*, Soochow J. Math., **17(2)**, (1991) 169–188.

[12] Chen B.-Y. - Ishikawa S., *Biharmonic surfaces in pseudo-Euclidean spaces*, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A, **45(2)**, (1991) 323–347.

[13] Chen B.-Y., *Submanifolds of finite type and applications*, Proc. Geometry and Topology Research Center, Taegu, **3**, (1993) 1–48.

[14] Chen B. Y., *Submanifolds in De Sitter space-time satisfying* $\Delta\vec{H} = \lambda\vec{H}$, Israel J. of Math. **91**, (1995) 373–391.

[15] Chen B.-Y., *A report on submanifolds of finite type*, Soochow J. Math., **22(2)**, (1996) 117–337.

[16] Chen B.-Y. - Ishikawa S., *Biharmonic pseudo-Riemannian submanifolds in pseudo-Euclidean spaces*, Kyushu J. Math., **52(1)**, (1998), 167–185.

[17] Defever F., *Hypersurfaces of E^4 with harmonic mean curvature vector*, Math. Nachr., **196**, (1998) 61–69.

[18] Defever F. - Kaimakamis G. - Papantoniou V., *Biharmonic hypersurfaces of the four-dimensional semi-Euclidean space E_4^s*, J. Math. Anal. Appl., **315(1)**, (2006) 276–286.

[19] Dillen F. - Pas J. - Vestraelen L., *On surfaces of finite type in Euclidean 3-space*, Kodai Math. J., **13**, (1990) 10–21.

[20] Dimitric I., *Quadratic representation and submanifolds of finite type*, Doctoral thesis, Michigan State University, Lansing, MI, (1989).

[21] Dimitric I., *Submanifolds of E^m with harmonic mean curvature vector*, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica, **20(1)**, (1992) 53–65.

[22] Duggal K.L.- Bejancu A., *Lightlike Submanifolds of Semi-Riemannian Manifolds and Applications*, Kluwer Academic Publishers, 1996.

[23] Duggal K.L.- Jin, Dae Ho, *Null curves and hypersurfaces of semi-Riemannian manifolds*, World Scientific Publishing, Singapore, 2007.

[24] Ferrandez A. - Garay O. J. - Lucas P., *On a certain class of conformally flat Euclidean hypersurfaces*, Proc. of the Conf. in Global Analysis and Global Differential Geometry, Berlin, (1990).

[25] Ferrandez A. - Lucas P., *On surfaces in 3-dimensional Lorentz-Minkowski space*, Pacific J. Math., **152(1)**, (1992) 93–100.

[26] Garay O. J., *On a certain class of finite type surfaces of revolution*, Kodai Math. J., **11(1)**, (1988) 25–31.

[27] Garay O. J., *An extension of Takahashi's theorem*, Geom. Dedicata, **34(2)**, (1990) 105–112.

[28] Garay O. J. - Vestraelen L., *On submanifolds of finite Chen-type and some related topics*, preprint.

[29] Ge Y., *Immersed surfaces of prescribed Gauss curvature into Minkowski space* , Proc. Amer. Math. Soc., **129(7)**, (2000) 2093–2101.

[30] Gerhardt C., *Hypersurfaces of prescribed mean curvature in Lorentzian manifolds*, Math. Zeits., **235**, (2000) 83–97.

[31] Hasanis Th. - Vlachos Th., *Hypersurfaces in E^4 with harmonic mean curvature vector field*, Math. Nachr., **172**, (1995) 145–169.

[32] Jung S. D. -Pak J. S., *Classification of cylindrical ruled surfaces satisfying $\Delta H = AH$ in a 3-dimensional Minkowski space*, Bull. Korean Math. Soc , **33(1)**, (1996) 97–106 .

[33] Kaimakamis G. - Papantoniou B. J., *Surfaces of Revolution in the 3-dimensional Lorentz-Minkowski space satisfying $\Delta^{II}\vec{r} = A\vec{r}$*, J. Geom., **81**, (2004) 81–92.

[34] Kaimakamis G. - Papantoniou V. - Petoumenos K., *Surfaces of revolution in the* 3*-dimensional Lorentz-Minkowski space E_1^3 satisfying* $\Delta^{III}\vec{r} = A\vec{r}$, Bull. Greek Math. Soc., **50**, (2005) 75–90.

[35] Kaimakamis G. - Papantoniou V. - Petoumenos K., *On the shape operator of the hypersurfaces M_2^3 of E_2^4*, Bull. Greek Math. Soc., **54**, (2007) 87–100.

[36] Kim Y. H. -Yoon D. W., *Ruled surfaces with finite type Gauss map in Minkowski spaces*, Soochow J. of Math., **26(1)**, (2000) 85-96.

[37] Kobayashi S. - Nomizu K., *Foundations of differential geometry*, I, II, Interscience Publishers, N.Y., 1963.

[38] Senchun Lin, *Curvature restrictions on convex, timelike surfaces in Minkowski 3-space* , Proc. Amer. Math. Soc., **128(5)**, (1999) 1459–1466.

[39] Lopez R., *Constant mean curvature surfaces foliated by circles in Lorentz-Minkowski space*,Geometriae Dedicata **76**, (1999) 81–95.

[40] Lopez R., *Timelike surfaces with constant mean curvature in Lorentz three-space*, Tôhoku Math. J. **52**, (2000) 515–532.

[41] Magid M., *Shape operators of Einstein hypersurfaces in indefinite space forms*, Proc. Amer. Math. Soc., **84(2)**, (1982) 237–242.

[42] Magid M., *Isometric immersions of Lorentz space with parallel second fundamental forms*, Tsukuba J. Math., **8(1)**, (1984) 31–54.

[43] Magid M., *Lorentzian isoparametric hypersurfaces*, Pacific J. Math., **118**, (1985) 165–198.

[44] Mishchenko A. - Fomenko A., *A course of differential geometry and topology*, Translate from Russian by A. Talashev, Mir Publishers Moscow, 1988.

[45] O' Neil B., *Semi-Riemannian Geometry, With Applications to Relativity*, Academic Press, San Diego, CA, 1983.

[46] Papantoniou V. - Petoumenos K., *Biharmonic hypersurfaces of type M_2^3 in E_2^4*, to appear in Houston J. Math.

[47] Petrov A. Z., *Einstein spaces*, Pergamon Press, Oxford, 1969.

[48] Taimanov Iskander, *Lectures on Differential Geometry*, EMS Series of Lectures in Mathematics, 2008.

[49] Takahashi T., *Minimal immersions of Riemannian manifolds*, J. Math. Soc. Japan, **18**, (1966) 380–385.

[50] Takiyama A. -Izumiya S., *A time like surface in Minkowski 3-space which contains light-like lines* , Journal of Geometry, **64**, (1999) 95–101.

[51] Ximin Liu, *Spacelike hypersurfaces in the de Sitter spaces*, Journal of mathematical Physics, **42(8)**, (2001) 3965–3972.

[52] Παπαντωνίου Β. Ι., *Διαφορίσιμες πολλαπλότητες*,Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών, Πάτρα, 1993.

[53] Παπαντωνίου Β. Ι., *Τανυστική Ανάλυση και Γεωμετρία Riemann*, Τόμος ΙΙ, Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών, Πάτρα, 1996.

[54] Παπαντωνίου Β. Ι., *Διαφορική Γεωμετρία, Θεωρία Επιφανειών*, Τόμος ΙΙ, Αυτοέκδοση, Πάτρα, 1997.