Μεγαριτης Αθανασιος

ΘΕΩΡΙΑ ΔΙΑΣΤΑΣΕΩΝ
ΚΑΙ
ΚΑΘΟΛΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΠΑΤΡΑ 2010

Πρόλογος

Η διδακτορική μου διατριβή εκπονήθηκε στο Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Πατρών με Τριμελή Συμβουλευτική Επιτροπή αποτελούμενη από τον κ. Δημήτριο Γεωργίου, Αναπληρωτή Καθηγητή του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Πατρών ως επιβλέποντα και μέλη αυτής, τους κκ. Σταύρο Ηλιάδη, Ομότιμο Καθηγητή του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Πατρών, και Βασίλειο Τζάννες, Καθηγητή του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Πατρών.

Αποφασιστικό ρόλο για την εκπόνηση και συγγραφή της διδακτορικής μου διατριβής έπαιξε η μακροχρόνια και συνεχή συνεργασία που είχα με τους κ. Δημήτριο Γεωργίου και κ. Σταύρο Ηλιάδη. Η συνεργασία αυτή ξεκίνησε από το δεύτερο έτος των προπτυχιακών μου σπουδών με σειρά σεμιναρίων σε ειδικά θέματα Γενικής Τοπολογίας.

Ευχαριστώ θερμά τον κ. Δημήτριο Γεωργίου για την παρότρυνσή του, την καθοδήγησή του και για τις πολύτιμες συμβουλές και υποδείξεις του όλα αυτά τα χρόνια της επιστημονικής συνεργασίας μας. Επίσης, ευχαριστώ τον κ. Σταύρο Ηλιάδη για την επιστημονική συνεργασία που είχαμε όλα αυτά τα χρόνια, τις παρατηρήσεις του και τη συμπαράστασή του.

Τέλος, ευχαριστώ το Πανεπιστήμιο Πατρών για την υποστήριξη που είχα κατά τη διάρκεια της εκπόνησης της διδακτορικής διατριβής μου από το Ερευνητικό Πρόγραμμα με τίτλο «Θωρία Διαστάσεων και Καθολικοί Χώροι» στα πλαίσια του ερευνητικού προγράμματος Κ. Καραθεοδωρή.

Θανάσης Μεγαρίτης
Πάτρα, 2010

Βασικοί συμβολισμοί

$\emptyset$	:	Το κενό σύνολο
$A \cup B$	:	Η ένωση των συνόλων A και B
$A \cap B$	:	Η τομή των συνόλων A και B
$A \times B$	:	Το γινόμενο των συνόλων A και B
$A \setminus B$	:	Η διαφορά του συνόλου A από το B
$\tau(X)$	:	Η τοπολογία του χώρου X
$\mathrm{Int}_X(M)$	:	Το εσωτερικό του M στο χώρο X
$\mathrm{Cl}_X(M)$	:	Το περίβλημα του M στο χώρο X
$\mathrm{Bd}_X(M)$	:	Το σύνορο του M στο χώρο X
ind	:	Η μικρή επαγωγική διάσταση
Ind	:	Η μεγάλη επαγωγική διάσταση
dim	:	Η διάσταση της καλύψεως
$\mathcal{O}$	:	Η κλάση των διατακτικών αριθμών
$(+)$	:	Το άθροισμα του Hessenberg
ω	:	Ο πρώτος άπειρος πληθάριθμος
$\mathcal{P}(X)$	:	Το δυναμοσύνολο του συνόλου X
$\|X\|$	:	Ο πληθάριθμος του συνόλου X
$w(X)$	:	Το βάρος του χώρου X
$\oplus_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$	:	Ελεύθερο άθροισμα των χώρων $X_\lambda, \lambda \in \Lambda$
$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$	:	Γινόμενο (Tychonoff) των χώρων $X_\lambda, \lambda \in \Lambda$

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Η Θεωρία Διαστάσεων (μαζί με τη θεωρία των continua) είναι ο παλαιότερος κλάδος της Γενικής Τοπολογίας. Η πρώτη σημαντική πρόοδος στη Θεωρία Διαστάσεων έγινε από τους Poincaré, Brouwer και Lebesgue. Η κατασκευή του Peano το 1890 μιας συνεχούς απεικόνισης από ένα τμήμα επί ενός τετραγώνου έδωσε αφορμή για το πρόβλημα εάν ένα τμήμα και ένα τετράγωνο είναι ομοιόμορφα, και γενικότερα εάν ο n-κύβος I^n είναι ομοιόμορφος με τον m-κύβο I^m για $n \neq m$. Το πρόβλημα αυτό λύθηκε από τον Brouwer το 1911. Ο Brouwer απέδειξε ότι εάν $n \neq m$, τότε οι I^n και I^m δεν είναι ομοιόμορφοι.

Ο Brouwer προσπάθησε να λύσει το πρόβλημα ορίζοντας μια συνάρτηση df που αντιστοιχεί σε κάθε χώρο ένα φυσικό αριθμό, τη διάσταση του χώρου, με τις ιδιότητες:

(1) Εάν οι χώροι X και Y είναι ομοιόμορφοι, τότε $df(X) = df(Y)$.

(2) $df(I^n) = n$.

Ωστόσο ο ορισμός της τοπολογικής διάστασης δεν ήταν απλό ζήτημα. Έτσι στην εργασία του Brouwer (1911) δεν ορίζεται καμία τέτοια συνάρτηση.

Ο Lebesgue το 1911 πρότεινε μια άλλη προσέγγιση στο πρόβλημα που ήταν η αφορμή για τον ορισμό της διάστασης της καλύψεως. Διατύπωσε το θεώρημα ότι ο n-κύβος I^n μπορεί να καλυφθεί από μια πεπερασμένη οικογένεια αυθαίρετα μικρών κλειστών συνόλων έτσι ώστε η τομή κάθε $n+2$ στοιχείων της οικογένειας να είναι κενή και ότι δεν μπορεί να καλυφθεί από μια πεπερασμένη οικογένεια αυθαίρετα μικρών κλειστών συνόλων έτσι ώστε η τομή κάθε $n+1$ στοιχείων της οικογένειας να είναι κενή. Η απόδειξη του θεωρήματος δόθηκε από τον Brouwer το 1913. Ο Lebesgue απέδειξε το θεώρημα το 1921. Ο ορισμός της διάστασης της καλύψεως dim στην κλάση των φυσικών χώρων δόθηκε από τον Čech το 1933.

Το 1912 ο Poincaré πρότεινε έναν επαγωγικό ορισμό της διάστασης σχετιζόμενο με την έννοια του διαχωρισμού. Το 1913 ο Brouwer βασιζόμενος στην ιδέα του Poincaré όρισε επαγωγικά μια συνάρτηση Dg (Dimensionsgrad) που αντιστοιχεί σε κάθε συμπαγή μετρικό χώρο ένα φυσικό αριθμό με τις ιδιότητες:

(1) Εάν οι χώροι X και Y είναι ομοιόμορφοι, τότε $Dg(X) = Dg(Y)$.

(2) $Dg(I^n) = n$.

Ο Brouwer δεν μελέτησε προσεκτικά την καινούργια διάσταση και τη χρησιμοποίησε μόνο για να δώσει μια άλλη απόδειξη ότι οι I^n και I^m δεν είναι ομοιόμορφοι για $n \neq m$.

Η Θεωρία Διαστάσεων έγινε ανεξάρτητη περιοχή της Γενικής Τοπολογίας μετά τις εργασίες των Menger και Urysohn. Η θεωρία της μικρής επαγωγικής διάστασης ind για την κλάση των συμπαγών μετρικών χώρων διατυπώθηκε και αναπτύχθηκε ανεξάρτητα από τους Urysohn (1922, 1925, 1926) και Menger (1923, 1924). Η θεωρία επεκτάθηκε για την κλάση των διαχωρίσιμων μετρικών χώρων από τους Tumarkin (1925, 1926) και Hurewicz (1927).

Ο ορισμός της μεγάλης επαγωγικής διάστασης Ind στην κλάση των φυσικών χώρων δόθηκε από τον Čech το 1932. Ο ορισμός αυτός μοιάζει με τον ορισμό του Brouwer αλλά οι δύο ορισμοί δεν είναι ισοδύναμοι. Ωστόσο, για τους τοπικά συνεκτικούς πλήρεις μετρικούς χώρους οι ορισμοί συμπίπτουν.

Σήμερα οι διαστάσεις ορίζονται για οποιοδήποτε τοπολογικό χώρο. Η κομψότητα της κλασικής Θεωρίας Διαστάσεων γίνεται κατανοητή από το γεγονός ότι οι τρείς διαστάσεις συμπίπτουν στην κλάση των διαχωρίσιμων μετρικών χώρων, δηλαδή

$$\operatorname{ind}(X) = \operatorname{Ind}(X) = \dim(X)$$

για κάθε διαχωρίσιμο μετρικό χώρο X. Σε μεγαλύτερες κλάσεις τοπολογικών χώρων οι ind, Ind και dim διαφέρουν. Επίσης, οι διαστάσεις Ind και dim συμπίπτουν στην κλάση των μετρικών χώρων, δηλαδή

$$\operatorname{Ind}(X) = \dim(X)$$

για κάθε μετρικό χώρο X.

Το 1925 ο Urysohn έθεσε το ερώτημα εάν μπορεί η μικρή επαγωγική διάσταση ind να επεκταθεί παίρνοντας τιμές στην κλάση όλων των διατακτικών αριθμών. Τελικά, ένας τυπικός ορισμός της υπερπεπερασμένης μικρής επαγωγικής διάστασης δόθηκε από τον Hurewicz το 1928. Η υπερπεπερασμένη μεγάλη επαγωγική διάσταση πρωτοεμφανίστηκε το 1959 από τον Smirnov.

Σημειώνουμε ότι εκτός από τις τρείς διαστάσεις ind, Ind και dim έχουν ορισθεί και μελετηθεί πολλές άλλες διαστάσεις-συναρτήσεις. Ωστόσο οι τρείς αυτές διαστάσεις παρουσιάζουν το μεγαλύτερο ενδιαφέρον.

Ένα άλλο πρόβλημα που απασχόλησε τους τοπολόγους από τα πρώτα βήματα ανάπτυξης της Γενικής Τοπολογίας στις πρώτες δεκαετίες του αιώνα που πέρασε είναι το πρόβλημα της ύπαρξης ή μη καθολικών χώρων για διάφορες κλάσεις τοπολογικών χώρων (πρόβλημα καθολικότητας). Ένας τοπολογικός χώρος T καλείται καθολικός για μια κλάση $\mathbb{P}$ τοπολογικών χώρων, όταν ο T ανήκει στην κλάση $\mathbb{P}$ και κάθε τοπολογικός χώρος που ανήκει στην κλάση $\mathbb{P}$ περιέχεται τοπολογικά στο χώρο T. Αναφέρουμε τα παρακάτω κλασικά αποτελέσματα:

(1) M. Fréchet (1910) *Ο χώρος των ρητών αριθμών* $\mathbb{Q}$ *είναι καθολικός για την κλάση όλων των αριθμήσιμων μετρικοποιήσιμων χώρων.*

(2) W. Sierpiński (1921) *Το σύνολο του Cantor* C *είναι καθολικός χώρος για την κλάση όλων των μηδενοδιάστατων διαχωρίσιμων μετρικοποιήσιμων χώρων.*

(3) P. Urysohn (1927) *Υπάρχει καθολικός χώρος για την κλάση όλων των διαχωρίσιμων μετρικοποιήσιμων χώρων.*

(4) A. Tychonoff (1930) *Για κάθε* $\nu \geq \omega$ *ο κύβος του Tychonoff* I^{ν} *είναι καθολικός χώρος για την κλάση όλων των χώρων Tychonoff με βάρος* ν.

(5) L. Pontrjagin (1931) *Κάθε διαχωρίσιμος μετρικοποιήσιμος χώρος διαστάσεως* $\leq n$ *εμφυτεύεται στον Ευκλείδειο χώρο* $\mathbb{R}^{2n+1}$.

(6) P. Alexandroff (1936) *Για κάθε* $\nu \geq \omega$ *ο κύβος του Alexandroff* S^{ν} *είναι καθολικός χώρος για την κλάση όλων των* T_0*-χώρων με βάρος* ν.

(7) H. Kowalsky (1957) *Για κάθε* $\kappa \geq \omega$ *ο χώρος* $J(\kappa)^{\omega}$, *όπου* $J(\kappa)$ *είναι ο χώρος "σκαντζόχοιρος" με* κ *αγκάθια, είναι καθολικός για την κλάση όλων των μετρικοποιήσιμων χώρων με βάρος* κ.

Πολλές κλάσεις τοπολογικών χώρων που έχουν καθολικό χώρο προέρχονται από τη Θεωρία Διαστάσεων. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει το εξής πρόβλημα: Έστω $\mathbb{P}$ μια κλάση τοπολογικών χώρων, df μια διάσταση-συνάρτηση και κ ένας φυσικός αριθμός. Η κλάση όλων των χώρων X που ανήκουν στην κλάση $\mathbb{P}$ με $df(X) \leq \kappa$ έχει καθολικό χώρο; Εάν η κλάση αυτή έχει καθολικό χώρο, τότε λέμε ότι η διάσταση df έχει την ιδιότητα της καθολικότητας στην κλάση $\mathbb{P}$. Αναφέρουμε τα παρακάτω αποτελέσματα:

(1) Για κάθε φυσικό αριθμό κ και πληθάριθμο $\mu \geq \omega$ η κλάση όλων των T_0-χώρων X με $\mathrm{ind}(X) \leq \kappa$ και $w(X) \leq \mu$ έχει καθολικό χώρο.

(2) Για κάθε φυσικό αριθμό κ και πληθάριθμο $\mu \geq \omega$ η κλάση όλων των κανονικών χώρων X με $\mathrm{ind}(X) \leq \kappa$ και $w(X) \leq \mu$ έχει καθολικό χώρο.

(3) Για κάθε φυσικό αριθμό κ και πληθάριθμο $\mu \geq \omega$ η κλάση όλων των μετρικοποιήσιμων χώρων X με $\mathrm{Ind}(X) \leq \kappa$ και $w(X) \leq \mu$ έχει καθολικό χώρο.

(4) Για κάθε φυσικό αριθμό κ και πληθάριθμο $\mu \geq \omega$ η κλάση όλων των φυσικών χώρων X με $\dim(X) \leq \kappa$ και $w(X) \leq \mu$ έχει καθολικό χώρο.

(5) Για κάθε φυσικό αριθμό κ και πληθάριθμο $\mu \geq \omega$ η κλάση όλων των Tychonoff χώρων X με $\dim(X) \leq \kappa$ και $w(X) \leq \mu$ έχει καθολικό χώρο.

Η δομή της διδακτορικής διατριβής απαρτίζεται από **δύο μέρη** και συνολικά από **επτά κεφάλαια**. Το **πρώτο μέρος**, δηλαδή τα **Κεφάλαια 1, 2 και 3**, περιέχουν βασικούς ορισμούς και αποτελέσματα χρήσιμα στην ανάπτυξη της διδακτορικής διατριβής. Ειδικότερα, στο **πρώτο κεφάλαιο** διατυπώνεται το πρόβλημα καθολικότητας και παρουσιάζεται η γενική Θεωρία Διαστάσεων στην Τοπολογία.

Στο **δεύτερο κεφάλαιο** δίνεται μια μέθοδος κατασκευής περιεκτικών χώρων για μια αυθαίρετη οικογένεια T_0-χώρων, όπως αυτή παρουσιάζεται στο βιβλίο [37] (S.D. Iliadis, Universal spaces and mappings, North-Holland Mathematics Studies, 198. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2005. xvi+559 pp.). Η μέθοδος αυτή είναι συνολοθεωρητική και χρησιμοποιείται στα Κεφάλαια 4 και 7 για την κατασκευή Καθολικών Χώρων.

Το **τρίτο κεφάλαιο** περιέχει ορισμούς και προτάσεις που περιέχονται στο βιβλίο [37]. Ειδικότερα, δίνεται ο ορισμός της κορεσμένης κλάσης χώρων και η έννοια της κορεσμένης κλάσης χώρων που έχουν μια «δομή». Κλάσεις χώρων με δομή είναι *οι κλάσεις υποσυνόλων*, *οι κλάσεις βάσεων* και *οι κλάσεις* p-*βάσεων*. Για τις κλάσεις αυτές δίνεται η έννοια του καθολικού στοιχείου. Οι κορεσμένες κλάσεις έχουν την *ιδιότητα της καθολικότητας*, δηλαδή σε κάθε κορεσμένη κλάση υπάρχει καθολικό στοιχείο. Ωστόσο, οι κορεσμένες κλάσεις χώρων έχουν «κάτι παραπάνω» από την ύπαρξη καθολικών χώρων. Για παράδειγμα, οι κορεσμένες κλάσεις έχουν την *ιδιότητα της τομής*, δηλαδή η τομή κορεσμένων κλάσεων είναι επίσης μια κορεσμένη κλάση, παρόλο που η τομή κλάσεων που έχουν καθολικά στοιχεία μπορεί να μην έχει καθολικό στοιχείο.

Τα αποτελέσματα του **δεύτερου μέρους**, δηλαδή τα αποτελέσματα των **Κεφαλαίων 4, 5, 6 και 7**, είναι **πρωτότυπα** και έχουν δημοσιευθεί σε διεθνή περιοδικά (βλέπε [23], [24], [25], [26] και [27]). Στο δεύτερο μέρος, υποθέτουμε ότι όλοι τοπολογικοί χώροι είναι T_0-χώροι με βάρος $\leq \tau$, όπου τ είναι ένας σταθερός άπειρος πληθάριθμος.

Στην εργασία [56] ορίσθηκαν δύο διαστάσεις dm και Dm στην κλάση όλων των Hausdorff χώρων. Η διάσταση Dm δεν έχει την ιδιότητα της καθολικότητας στην κλάση όλων των διαχωρίσιμων μετρικοποιήσιμων χώρων επειδή η οικογένεια όλων των διαχωρίσιμων μετρικοποιήσιμων χώρων X με $Dm(X) \leq 0$ συμπίπτει με την οικογένεια όλων των totally disconnected χώρων στην οποία δεν υπάρχουν καθολικά στοιχεία (βλέπε [65]). Στο **τέταρτο κεφάλαιο** τροποποιούνται οι διαστάσεις dm και Dm με σκοπό να ορισθούν νέες διαστάσεις που έχουν την ιδιότητα της καθολικότητας. Αυτές οι νέες διαστάσεις συμβολίζονται με $dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu}$ και $Dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu}$, όπου $\mathbb{E}$ είναι μια κλάση χώρων, $\mathbb{K}$ είναι μια κλάση υποσυνόλων και $\mathbb{B}$ είναι μια κλάση βάσεων.

Αναλυτικότερα, στην πρώτη και στη δεύτερη παράγραφο δίνονται οι ορισμοί των διαστάσεων dm, Dm, $dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu}$ και $Dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu}$.

Στην τρίτη παράγραφο δίνονται σχέσεις μεταξύ των διαστάσεων dm, Dm, $dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu}$ και $Dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu}$ και συγκρίνονται με άλλες γνωστές διαστάσεις. Ειδικότερα, αποδεικνύεται ότι εάν ο χώρος X είναι συμπαγής Hausdorff με $Dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\omega}(X) \neq \infty$, τότε οι παρακάτω συνθήκες είναι ισοδύναμες: (1) $Dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\omega}(X) = 0$, (2) $dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\omega}(X) = 0$ και (3) $\mathrm{Ind}(X) = 0$.

Στην τέταρτη παράγραφο διατυπώνονται και αποδεικνύονται θεωρήματα αθροίσματος και γινομένου.

Τέλος, στην πέμπτη παράγραφο αποδεικνύεται ότι εάν οι κλάσεις $\mathbb{K}, \mathbb{B}$ και $\mathbb{E}$ είναι κορεσμένες, τότε για μια δοσμένη κορεσμένη κλάση $\mathbb{P}$ χώρων και για ένα φυσικό αριθμό κ η κλάση όλων των χώρων X που ανήκουν στην κλάση $\mathbb{P}$ με $dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu}(X) \leq \kappa$ και η κλάση όλων των χώρων X που ανήκουν στην κλάση $\mathbb{P}$ με $Dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu}(X) \leq \kappa$ έχουν καθολικά στοιχεία. Αποδεικνύεται ότι εάν $\mathbb{P}$ είναι μια από τις παρακάτω κλάσεις:

(1) η κλάση όλων των (πλήρως) κανονικών χώρων με βάρος $\leq \tau$,

(2) η κλάση όλων των (πλήρως) κανονικών countable-dimensional χώρων με βάρος $\leq \tau$,

(3) η κλάση όλων των (πλήρως) κανονικών strongly countable-dimensional χώρων με βάρος $\leq \tau$,

(4) η κλάση όλων των (πλήρως) κανονικών locally finite-dimensional χώρων με βάρος $\leq \tau$ και

(5) η κλάση όλων των (πλήρως) κανονικών χώρων X με $w(X) \leq \tau$ και $\mathrm{ind}(X) \leq \alpha \in \tau^+$, όπου τ^+ είναι ο μικρότερος πληθάριθμος που είναι μεγαλύτερος από το τ,

τότε για κάθε $\kappa \in \omega$ στις κλάσεις $\mathbb{P}(dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu} \leq \kappa) \cap \mathbb{P}$ και $\mathbb{P}(Dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu} \leq \kappa) \cap \mathbb{P}$ υπάρχουν καθολικά στοιχεία.

Στο βιβλίο [37] ορίσθηκαν διαστάσεις-συναρτήσεις θέσεως του τύπου ind. Οι διαστάσεις αυτές έχουν πεδίο ορισμού την κλάση όλων των ζευγών (Q, X), όπου Q είναι ένα υποσύνολο ενός χώρου X, και συμβολίζονται με p_i-ind, pos_i-ind και ps_i-ind, $i = 0, 1$. Οι παραπάνω διαστάσεις μελετήθηκαν μόνο όσον αφορά την ιδιότητα της καθολικότητας, δηλαδή εάν df είναι μια από τις παραπάνω συναρτήσεις και $\alpha \in \tau^+$, όπου τ^+ είναι ο μικρότερος πληθάριθμος που είναι μεγαλύτερος από το τ, τότε στην κλάση $\mathbb{P}$ όλων των ζευγών (Q^X, X), όπου Q^X είναι ένα υποσύνολο ενός χώρου X με $df(Q^X, X) \leq \alpha$, υπάρχει καθολικό στοιχείο. (Ένα στοιχείο (Q^T, T) της $\mathbb{P}$ καλείται καθολικό στην $\mathbb{P}$ εάν για κάθε $(Q^X, X) \in \mathbb{P}$ υπάρχει μια τοπολογική εμφύτευση $i^X_T : X \to T$ τέτοια ώστε $i^X_T(Q^X) \subseteq Q^T$.) Στο **πέμπτο κεφάλαιο** δίνονται σχέσεις μεταξύ των διαστάσεων-συναρτήσεων θέσεως του τύπου ind και αποδεικνύονται βασικές ιδιότητες της Θεωρίας Διαστάσεων για τις συναρτήσεις αυτές.

Αναλυτικότερα, στην πρώτη παράγραφο δίνονται οι ορισμοί των διαστάσεων-συναρτήσεων θέσεως p_i-ind, pos_i-ind και ps_i-ind, $i = 0, 1$.

Στη δεύτερη παράγραφο δίνονται σχέσεις μεταξύ των διαστάσεων-συναρτήσεων θέσεως p_i-ind, pos_i-ind και ps_i-ind, $i = 0, 1$, και συγκρίνονται με άλλες γνωστές διαστάσεις. Αποδεικνύεται ότι για κάθε υποσύνολο Q ενός χώρου X ισχύει

$$\mathrm{ind}(Q) \leq \mathrm{p}_i\text{-}\mathrm{ind}(Q, X) \leq \mathrm{pos}_i\text{-}\mathrm{ind}(Q, X) \leq \mathrm{ps}_i\text{-}\mathrm{ind}(Q, X),\ i = 0, 1.$$

Αποδεικνύεται ότι εάν ο χώρος X είναι κληρονομικά φυσικός (δηλαδή κάθε υπόχωρος του X είναι φυσικός) και $Q \subseteq X$, τότε

$$\mathrm{ind}(Q) = \mathrm{p}_1\text{-}\mathrm{ind}(Q, X) = \mathrm{pos}_1\text{-}\mathrm{ind}(Q, X).$$

Επίσης, δίνονται παραδείγματα που δείχνουν ότι στην κλάση όλων των T_0-χώρων οι παραπάνω ανισότητες δεν μπορούν να αντικατασταθούν με ισότητες.

Στην τρίτη παράγραφο διατυπώνονται και αποδεικνύονται θεωρήματα υποχώρου. Ειδικότερα, αποδεικνύεται ότι εάν Y είναι ένα πυκνό υποσύνολο ενός χώρου X και $Q \subseteq Y$, τότε

$$\mathrm{p}_1\text{-}\mathrm{ind}(Q, Y) = \mathrm{p}_1\text{-}\mathrm{ind}(Q, X)$$

και

$$\mathrm{pos}_1\text{-}\mathrm{ind}(Q, Y) = \mathrm{pos}_1\text{-}\mathrm{ind}(Q, X).$$

Στην τέταρτη παράγραφο διατυπώνονται και αποδεικνύονται θεωρήματα αθροίσματος.

Τέλος, στην πέμπτη παράγραφο δίνονται σχέσεις μεταξύ των διαστάσεων του πεδίου ορισμού και του πεδίου τιμών μιας συνεχούς απεικόνισης.

Στην εργασία [40] (βλέπε επίσης [30]) ορίσθηκε μια διάσταση-συνάρτηση θέσεως του τύπου Ind. Στο **έκτο κεφάλαιο** ορίζονται νέες διαστάσεις-συναρτήσεις θέσεως του τύπου Ind και αποδεικνύονται βασικές ιδιότητες της Θεωρίας Διαστάσεων για τις συναρτήσεις αυτές. Οι διαστάσεις αυτές έχουν πεδίο ορισμού την κλάση όλων των ζευγών (Q, X), όπου Q είναι ένα υποσύνολο ενός χώρου X, και συμβολίζονται με $\mathrm{p}_i(j)$-ind και $\mathrm{pos}_i(j)$-ind, $i = 0, 1$, $j = 0, 1$.

Αναλυτικότερα, στην πρώτη παράγραφο δίνονται οι ορισμοί των διαστάσεων συναρτήσεων θέσεως $\mathrm{p}_i(j)$-ind και $\mathrm{pos}_i(j)$-ind, $i = 0, 1$, $j = 0, 1$.

Στη δεύτερη παράγραφο δίνονται σχέσεις μεταξύ των διαστάσεων-συναρτήσεων θέσεως $\mathrm{p}_i(j)$-ind και $\mathrm{pos}_i(j)$-ind, $i = 0, 1$, $j = 0, 1$, και συγκρίνονται με άλλες γνωστές διαστάσεις. Αποδεικνύεται ότι εάν ο χώρος X είναι κληρονομικά φυσικός (δηλαδή κάθε υπόχωρος του X είναι φυσικός) και $Q \subseteq X$, τότε

$$\mathrm{p}_1(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q, X) = \mathrm{pos}_1(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q, X) = \mathrm{Ind}(Q).$$

Επίσης, δίνονται παραδείγματα που δείχνουν ότι οι συναρτήσεις $\mathrm{p}_i(j)$-ind και $\mathrm{pos}_i(j)$-ind, $i = 0, 1$, $j = 0, 1$, είναι διαφορετικές.

Στην τρίτη παράγραφο διατυπώνονται και αποδεικνύονται θεωρήματα υποχώρου.

Στην τέταρτη παράγραφο διατυπώνονται και αποδεικνύονται θεωρήματα διαχωρισμού. Στην πέμπτη παράγραφο διατυπώνονται και αποδεικνύονται θεωρήματα αθροίσματος.

Στην έκτη παράγραφο δίνεται ένα θεώρημα ταύτισης για τις διαστάσεις pos_1-ind και $\mathrm{pos}_1(0)$-Ind.

Τέλος, στην έβδομη παράγραφο διατυπώνονται και αποδεικνύονται θεωρήματα γινομένου.

Στο βιβλίο [37] ορίσθηκαν διαστάσεις-συναρτήσεις βάσεως του τύπου ind, Ind και dim. Οι διαστάσεις-συναρτήσεις αυτές μελετήθηκαν μόνο ως προς την ιδιότητα της καθολικότητας. Στο **έβδομο κεφάλαιο** ορίζονται διαστάσεις-συναρτήσεις βάσεως θέσεως του τύπου dim και αποδεικνύεται η ιδιότητα της καθολικότητας για τις συναρτήσεις αυτές. Οι διαστάσεις αυτές έχουν πεδίο ορισμού την κλάση όλων των τριάδων (Q, B, X), όπου Q είναι ένα υποσύνολο ενός χώρου X και B είναι μια οικογένεια από ανοικτά υποσύνολα του X (συμπεριλαμβανομένων των X και $\emptyset$) τέτοια ώστε το σύνολο $\{Q \cap U : U \in B\}$ να είναι μια βάση του υποχώρου Q, και συμβολίζονται με b-p^0-$\dim^{\mathbb{F}}$, b-p^1-$\dim^{\mathbb{F}}$ και b-p-$\dim^{\mathbb{F}}$, όπου $\mathbb{F}$ είναι μια κλάση υποσυνόλων.

Αναλυτικότερα, στην πρώτη παράγραφο δίνονται σχέσεις μεταξύ των συναρτήσεων βάσεως θέσεως b-p^0-$\dim^{\mathbb{F}}$, b-p^1-$\dim^{\mathbb{F}}$ και b-p-$\dim^{\mathbb{F}}$ και συγκρίνονται με άλλες γνωστές διαστάσεις. Επίσης, δίνονται παραδείγματα που δείχνουν ότι οι συναρτήσεις b-p^0-$\dim^{\mathbb{F}}$, b-p^1-$\dim^{\mathbb{F}}$ και b-p-$\dim^{\mathbb{F}}$ είναι διαφορετικές.

Στη δεύτερη παράγραφο αποδεικνύεται ότι εάν df είναι μια από τις διαστάσεις-συναρτήσεις βάσεως θέσεως: b-p^0-$\dim^{\mathbb{F}}$ και b-p^1-$\dim^{\mathbb{F}}$ και b-p-$\dim^{\mathbb{F}}$ και εάν η κλάση $\mathbb{F}$ είναι κορεσμένη, πλήρης και ικανοποιεί τις Συνθήκες Πεπερασμένης Ένωσης και Κενού Υποσυνόλου, τότε για κάθε $n \in \{-1\} \cup \omega$ η κλάση $\mathbb{P}(df \leq n)$ έχει καθολικά στοιχεία (Ένα στοιχείο (Q^T, B^T, T) της $\mathbb{P}$ καλείται καθολικό στην $\mathbb{P}$ εάν για κάθε $(Q^Z, B^Z, Z) \in \mathbb{P}$ υπάρχει μια τοπολογική εμφύτευση $e : Z \to T$ τέτοια ώστε $e(Q^Z) \subseteq Q^T$ και $B^Z = \{e^{-1}(V) : V \in B^T\}$.)

Τέλος, στην τρίτη παράγραφο εάν df είναι μια από τις διαστάσεις-συναρτήσεις βάσεως θέσεως: b-p-$\dim^{\mathbb{F}}$, b-p^0-$\dim^{\mathbb{F}}$ και b-p^1-$\dim^{\mathbb{F}}$ και $\mathbb{D}$ είναι μια κλάση από τριάδες (Q, B, X), όπου Q είναι ένα υποσύνολο ενός χώρου X και B είναι μια οικογένεια από ανοικτά υποσύνολα του X (συμπεριλαμβανομένων των X και $\emptyset$) τέτοια ώστε το σύνολο $\{Q \cap U : U \in B\}$ να είναι μια βάση του υποχώρου Q, τότε ορίζεται μια νέα διάσταση-συνάρτηση $\mathbb{D}$-df, με πεδίο ορισμού την κλάση όλων των χώρων και αποδεικνύεται ότι εάν η κλάση $\mathbb{D}$ είναι κορεσμένη και η κλάση $\mathbb{F}$ είναι κορεσμένη, πλήρης και ικανοποιεί τις Συνθήκες Πεπερασμένης Ένωσης και Κενού Υποσυνόλου, τότε για κάθε $n \in \{-1\} \cup \omega$ η κλάση $\mathbb{P}(\mathbb{D}\text{-}df \leq n)$ έχει καθολικά στοιχεία. Αποδεικνύεται ότι εάν $\mathbb{F}$ είναι η κλάση όλων των ζευγών (Q, X), όπου Q είναι ένα ανοικτό υποσύνολο ενός χώρου X, $\mathbb{D}$ είναι η κλάση όλων των τριάδων (Q, B, X), όπου Q είναι ένα υποσύνολο ενός χώρου X και B είναι μια οικογένεια από ανοικτά υποσύνολα του X (συμπεριλαμβανομένων των X και $\emptyset$) τέτοια ώστε το σύνολο $\{Q \cap U : U \in B\}$ να είναι μια βάση του υποχώρου Q, και $\mathbb{P}$ μια από τις παρακάτω κλάσεις:

(1) η κλάση όλων των (πλήρως) κανονικών χώρων με βάρος $\leq \tau$,

(2) η κλάση όλων των (πλήρως) κανονικών countable-dimensional χώρων με βάρος $\leq \tau$,

(3) η κλάση όλων των (πλήρως) κανονικών strongly countable-dimensional χώρων με βάρος $\leq \tau$,

(4) η κλάση όλων των (πλήρως) κανονικών locally finite-dimensional χώρων με βάρος $\leq \tau$ και

(5) η κλάση όλων των (πλήρως) κανονικών χώρων X με $w(X) \leq \tau$ και $\mathrm{ind}(X) \leq \alpha \in \tau^+$, όπου τ^+ είναι ο μικρότερος πληθάριθμος που είναι μεγαλύτερος από το τ,

τότε για κάθε $n \in \omega$ στην κλάση $\mathbb{P}(\mathbb{D}\text{-}df \leq n) \cap \mathbb{P}$ υπάρχουν καθολικά στοιχεία.

ΜΕΡΟΣ Α

Κεφάλαιο 1

Βασικές έννοιες: καθολικοί χώροι και θεωρία διαστάσεων

Στο κεφάλαιο αυτό διατυπώνεται το πρόβλημα καθολικότητας που έχουμε στη Γενική Τοπολογία και παρουσιάζεται η γενική Θεωρία Διαστάσεων.

1.1 Το πρόβλημα καθολικότητας

Στην παράγραφο αυτή δίνεται ο ορισμός του καθολικού χώρου μιας κλάσης τοπολογικών χώρων και διατυπώνεται το πρόβλημα καθολικότητας που έχουμε στη Γενική Τοπολογία.

1.1.1 Ορισμός. Έστω X τοπολογικός χώρος. Μια ιδιότητα $\mathcal{P}$ του χώρου X καλείται **τοπολογική**, εάν κάθε τοπολογικός χώρος Y ομοιόμορφος με τον X έχει επίσης την ιδιότητα αυτή.

1.1.2 Ορισμός. Έστω $\mathbb{P}$ κλάση τοπολογικών χώρων. Η $\mathbb{P}$ καλείται **τοπολογική** ή **τοπολογικώς κλειστή**, εάν κάθε τοπολογικός χώρος Y που είναι ομοιόμορφος με ένα χώρο X της κλάσης $\mathbb{P}$ ανήκει στην κλάση $\mathbb{P}$. Η κενή κλάση χώρων θεωρείται τοπολογική.

1.1.3 Ορισμός. Έστω $\mathbb{P}$ κλάση τοπολογικών χώρων. Ένας τοπολογικός χώρος T καλείται **καθολικός** (universal space) για την κλάση $\mathbb{P}$, όταν:

(1) $T \in \mathbb{P}$.

(2) Για κάθε $X \in \mathbb{P}$, υπάρχει τοπολογική εμφύτευση $e_X : X \to T$.

Συνήθως, η κλάση $\mathbb{P}$ ορίζεται ως μια κλάση τοπολογικών χώρων που έχει μια συγκεκριμένη τοπολογική ιδιότητα $\mathcal{P}$. Σε αυτή την περίπτωση θα λέμε ότι ο χώρος T είναι καθολικός για όλους τους τοπολογικούς χώρους που έχουν αυτή την ιδιότητα, εάν ο T έχει την ιδιότητα $\mathcal{P}$ και κάθε τοπολογικός χώρος X που έχει την ιδιότητα $\mathcal{P}$ είναι ομοιόμορφος με έναν υπόχωρο του T.

1.1.4 Ορισμός. Έστω $\mathbb{P}$ κλάση τοπολογικών χώρων. Ένας τοπολογικός χώρος T καλείται **περιεκτικός** (containing space) για την κλάση $\mathbb{P}$, εάν για κάθε χώρο X που ανήκει στην κλάση $\mathbb{P}$ υπάρχει ένας ομοιομορφισμός του X με έναν υπόχωρο του T.

1.1.5 Παρατήρηση. Κάθε οικογένεια τοπολογικών χώρων έχει περιεκτικό χώρο. Πράγματι, έστω $\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ μία οικογένεια τοπολογικών χώρων. Για κάθε $\lambda \in \Lambda$ θεωρούμε το χώρο $X'_\lambda = X_\lambda \times \{\lambda\}$ με την τοπολογία

$$\tau(X'_\lambda) = \{U \times \{\lambda\} : U \in \tau(X_\lambda)\}.$$

Προφανώς $X'_\lambda \cap X'_{\lambda'} = \emptyset$ για $\lambda \neq \lambda'$ και ο χώρος X'_λ είναι ομοιόμορφος με το χώρο X_λ για κάθε $\lambda \in \Lambda$.

Θεωρούμε το σύνολο $T = \cup\{X'_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ και ορίζουμε μια τοπολογία τ επί του T ως εξής:

$$\tau = \{U \subseteq T : \text{για κάθε } \lambda \in \Lambda,\ U \cap X'_\lambda \in \tau(X'_\lambda)\}.$$

Ο τοπολογικός χώρος (T, τ) συμβολίζεται με $\oplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ και καλείται **ελεύθερο άθροισμα** (free sum) των χώρων $X_\lambda, \lambda \in \Lambda$.

Είναι φανερό ότι για κάθε $\lambda \in \Lambda$, η απεικόνιση $i_\lambda : X_\lambda \to \oplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ με τύπο $i_\lambda(x) = (x, \lambda)$ είναι μία εμφύτευση του X_λ στο $\oplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$.

Από τους παραπάνω ορισμούς προκύπτει άμεσα το παρακάτω πρόβλημα.

Πρόβλημα. *Έστω $\mathbb{P}$ κλάση τοπολογικών χώρων. Υπάρχει καθολικός χώρος για την κλάση $\mathbb{P}$;*

Το παραπάνω πρόβλημα ονομάζεται **πρόβλημα καθολικότητας** (universality problem) για την κλάση $\mathbb{P}$.

Σημειώνουμε ότι τα θεωρήματα που αναφέρονται στην ύπαρξη καθολικών χώρων είναι πολύ ενδιαφέροντα και χρήσιμα. Για παράδειγμα, μας επιτρέπουν να αναγάγουμε τη μελέτη μιας κλάσης τοπολογικών χώρων που έχουν μια συγκεκριμένη ιδιότητα, στη μελέτη των υποχώρων ενός σταθερού τοπολογικού χώρου.

Ας δούμε τώρα κάποιες παρατηρήσεις σχετικές με το πρόβλημα καθολικότητας.

1.1.6 Παρατήρηση. Έστω $\mathbb{P}$ κλάση τοπολογικών χώρων που έχει καθολικό χώρο. Εάν $\mathbb{P}_1$ και $\mathbb{P}_2$ είναι δύο κλάσεις τοπολογικών χώρων τέτοιες ώστε $\mathbb{P}_1 \subseteq \mathbb{P} \subseteq \mathbb{P}_2$, τότε δεν προκύπτει ότι οι $\mathbb{P}_1$ και $\mathbb{P}_2$ έχουν καθολικό χώρο.

Η παραπάνω παρατήρηση καθιστά το πρόβλημα των καθολικών χώρων ακόμη πιο ενδιαφέρον.

1.1.7 Παρατήρηση. Έστω $\mathbb{P}$ κλάση τοπολογικών χώρων που έχει καθολικό χώρο T. Τότε, για κάθε τοπολογικό χώρο X που ανήκει στην κλάση $\mathbb{P}$ ισχύουν:

(1) $|X| \leq |T|$ και

(2) $w(X) \leq w(T)$.

Πράγματι, εφ' όσον ο T είναι καθολικός, υπάρχει εμφύτευση $e_X : X \to T$. Επομένως $|X| \leq |T|$. Έστω τώρα $B^T = \{V_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ βάση του T με $|\Lambda| = w(T)$ και $Y = e_X(X)$. Υποθέτουμε ότι $U \in \tau(X)$. Τότε, $e_X(U) \in \tau(Y)$ και άρα υπάρχει $V \in \tau(T)$ τέτοιο ώστε $e_X(U) = V \cap Y$. Εφ' όσον η B^T είναι βάση του T και $V \in \tau(T)$, υπάρχει $K \subseteq \Lambda$ τέτοιο ώστε $V = \cup_{\lambda \in K} V_\lambda$. Έχουμε

$$e_X(U) = (\cup_{\lambda \in K} V_\lambda) \cap Y = \cup_{\lambda \in K}(V_\lambda \cap Y)$$

ή

$$U = e_X^{-1}\big(\cup_{\lambda \in K} (V_\lambda \cap Y)\big) = \cup_{\lambda \in K} e_X^{-1}(V_\lambda \cap Y) = \cup_{\lambda \in K} e_X^{-1}(V_\lambda).$$

Άρα, το σύνολο

$$B^X \equiv \{e_X^{-1}(V_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$$

είναι βάση του X και επιπλέον

$$w(X) \leq |B^X| = |B^T| = w(T).$$

Συνεπώς, για να έχει έννοια να αναζητήσουμε καθολικό χώρο σε μια κλάση $\mathbb{P}$, πρέπει για τον πληθάριθμο $|X|$ και για το βάρος $w(X)$ των χώρων $X \in \mathbb{P}$ να έχουμε ένα άνω φράγμα. Σε αντίθετη περίπτωση, η κλάση $\mathbb{P}$ δεν έχει καθολικό χώρο. Για παράδειγμα, η κλάση $\mathbb{T}$ όλων των τετριμμένων τοπολογικών χώρων δεν έχει καθολικό χώρο. Προφανώς ισχύει $w(X) = 1$ για κάθε $X \in \mathbb{T}$, αλλά οι πληθάριθμοι $|X|$ δεν είναι φραγμένοι. Το ίδιο ισχύει και για την κλάση όλων των διακριτικών χώρων, αφού στην περίπτωση αυτή ούτε το βάρος των χώρων είναι φραγμένο.

1.1.8 Πρόταση. Έστω $\mathbb{P}$ κλάση T_0-χώρων με $w(X) \leq \nu$ για κάθε $X \in \mathbb{P}$, για κάποιο πληθάριθμο ν. Τότε, $|X| \leq 2^\nu$ για κάθε $X \in \mathbb{P}$.

Απόδειξη. Έστω $X \in \mathbb{P}$ και $B = \{V_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ βάση του X με $|B| \leq \nu$. Τότε, $X = \cup\{V_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$. Θεωρούμε την απεικόνιση $\Phi : X \to 2^B$ που ορίζεται ως εξής: Έστω

$x \in X$. Τότε, $\Phi(x) = f$, όπου

$$f : B \to 2 \ \text{ με } \ f(V_\lambda) = \begin{cases} 1, & \text{εάν } x \in V_\lambda, \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Αποδεικνύουμε ότι η Φ είναι 1-1. Πράγματι, έστω $x, y \in X$ με $\Phi(x) = f$ και $\Phi(y) = g$. Υποθέτουμε ότι $\Phi(x) = \Phi(y)$. Θα δείξουμε ότι και $x = y$. Έστω αντίθετα ότι $x \neq y$. Θα καταλήξουμε σε άτοπο. Επειδή ο X είναι T_0-χώρος, υπάρχει ανοικτό σύνολο U του X που περιέχει, για παράδειγμα, το x και δεν περιέχει το y. Άρα, υπάρχει κάποιο $\lambda_0 \in \Lambda$ τέτοιο ώστε $x \in V_{\lambda_0} \subseteq U$ και $y \notin V_{\lambda_0}$. Αυτό όμως σημαίνει ότι $f(V_{\lambda_0}) = 1$ ενώ $g(V_{\lambda_0}) = 0$. Άτοπο, αφού είχαμε υποθέσει ότι $f = g$. Συνεπώς, $|X| \leq 2^\nu$. ■

1.1.9 Παρατήρηση. Μια κλάση τοπολογικών χώρων μπορεί να έχει διαφορετικούς (μη ομοιόμορφους) καθολικούς χώρους.

1.1.10 Γνωστά Αποτελέσματα.

(1) Ο χώρος των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ είναι περιεκτικός για την κλάση όλων των πεπερασμένων μετρικοποιήσιμων χώρων.

(2) Ο χώρος των ρητών αριθμών $\mathbb{Q}$ είναι καθολικός για την κλάση όλων των αριθμήσιμων μετρικοποιήσιμων χώρων.

(3) Η κλάση όλων των τοπολογικών χώρων με n σημεία ($n \geq 2$) δεν έχει καθολικό χώρο.

(4) Ο χώρος $C([0,1])$ των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων που ορίζονται στο $[0,1]$ με τη μετρική της ομοιόμορφης σύγκλισης είναι καθολικός για την κλάση όλων των διαχωρίσιμων μετρικοποιήσιμων χώρων.

Το πρόβλημα καθολικότητας για διάφορες κλάσεις τοπολογικών χώρων απασχόλησε τους τοπολόγους από τα πρώτα βήματα ανάπτυξης της Γενικής Τοπολογίας στις πρώτες δεκαετίες του αιώνα που πέρασε. Στην αρχή δεν υπήρχε γενική μέθοδος κατασκευής καθολικών χώρων και οι κατασκευές τέτοιων χώρων βασίζονταν κυρίως στη διαίσθηση. Ωστόσο σημαντικό ρόλο στην κατασκευή περιεκτικών και καθολικών χώρων παίζουν τα γινόμενα τοπολογικών χώρων. Παρακάτω διατυπώνεται ένα θέωρημα εμφύτευσης σε γινόμενα τοπολογικών χώρων.

Έστω X ένας τοπολογικός χώρος, $\{Y_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ οικογένεια τοπολογικών χώρων και $\{f_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ οικογένεια απεικονίσεων, όπου $f_\lambda : X \to Y_\lambda$ για κάθε $\lambda \in \Lambda$.

1.1.11 Ορισμός. Η απεικόνιση $f : X \to \prod_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda$ με τύπο $f(x) = \{f_\lambda(x)\}_{\lambda \in \Lambda}$ καλείται **διαγώνιος απεικόνιση** των απεικονίσεων f_λ, $\lambda \in \Lambda$ (diagonal of the mappings f_λ, $\lambda \in \Lambda$) και συμβολίζεται με $\triangle_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda$.

1.1.12 Ορισμός. (1) Η οικογένεια $\{f_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ **διαχωρίζει τα σημεία** του X (separates points of the space X), εάν για κάθε $x, y \in X$ με $x \neq y$, υπάρχει $\lambda_0 \in \Lambda$ τέτοιο ώστε $f_{\lambda_0}(x) \neq f_{\lambda_0}(y)$.

(2) Η οικογένεια $\{f_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ **διαχωρίζει τα σημεία και τα κλειστά υποσύνολα** του X (separates points from closed sets), εάν για κάθε κλειστό σύνολο F του X και για κάθε $x \in X$ με $x \notin F$, υπάρχει $\lambda_0 \in \Lambda$ τέτοιο ώστε $f_{\lambda_0}(x) \notin \mathrm{Cl}(f_{\lambda_0}(F))$.

1.1.13 Πρόταση. (1) Εάν η οικογένεια $\{f_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ διαχωρίζει τα σημεία του X, τότε η διαγώνιος απεικόνιση $\triangle_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda$ είναι 1-1.

(2) Εάν η οικογένεια $\{f_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ αποτελείται από συνεχείς συναρτήσεις, διαχωρίζει τα σημεία του X και διαχωρίζει τα σημεία και τα κλειστά υποσύνολα του X, τότε η διαγώνιος απεικόνιση $\triangle_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda$ είναι εμφύτευση.

1.1.14 Παρατήρηση. Εάν ο χώρος X είναι T_0 και η οικογένεια $\{f_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ διαχωρίζει τα σημεία και τα κλειστά υποσύνολα του X, τότε η $\{f_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ διαχωρίζει και τα σημεία του X.

Τα παρακάτω αποτελέσματα είναι χαρακτηριστικά παραδείγματα χρήσης της Πρότασης 1.1.13.

1.1.15 Γνωστά Αποτελέσματα.
(1) Έστω ο τοπολογικός χώρος (E, τ), όπου $E = \{0, 1, 2\}$ και $\tau = \{\emptyset, \{0\}, E\}$. Για κάθε $\nu \geq \omega$ ο χώρος E^ν είναι καθολικός για την κλάση όλων των χώρων με βάρος ν και πληθάριθμο $\leq 2^\nu$.

(2) Έστω S ο χώρος του Sierpiński, δηλαδή το σύνολο $S = \{0, 1\}$ με την τοπολογία $\{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}\}$. Για κάθε $\nu \geq \omega$ ο χώρος S^ν είναι καθολικός για την κλάση όλων των T_0-χώρων με βάρος ν.

(3) Έστω ο χώρος $I = [0, 1]$ με τη συνήθη μετρική. Ο χώρος I^ν είναι καθολικός για την κλάση όλων των χώρων Tychonoff με βάρος ν.

(4) Για κάθε $\nu \geq \omega$ ο χώρος $J(\nu)^\omega$, όπου $J(\nu)$ είναι ο χώρος σκαντζόχοιρος με ν αγκάθια, είναι καθολικός για την κλάση όλων των μετρικοποιήσιμων χώρων με βάρος ν.

Με τη μελέτη πιο γενικών κλάσεων τοπολογικών χώρων, προερχόμενες κυρίως από τη Θεωρία Διαστάσεων, προέκυψαν μερικές μέθοδοι κατασκευής καθολικών χώρων. Οι μέθοδοι που χρησιμοποιούν θεωρήματα παραγοντοποίησης (factorization theorems) φαίνονται να είναι οι πιο σημαντικές.

1.2 Θεωρία διαστάσεων (Γενική Θεωρία)

Σε ό,τι ακολουθεί με $\mathcal{O}$ συμβολίζουμε την κλάση των διατακτικών αριθμών και με ω τον πρώτο άπειρο πληθάριθμο. Επίσης, θεωρούμε δύο σύμβολα "-1" και "∞" τέτοια ώστε $-1 < \alpha < \infty$ για κάθε $\alpha \in \mathcal{O}$ και $-1(+)\alpha = \alpha(+)(-1) = \alpha$, $\infty(+)\alpha = \alpha(+)\infty = \infty$ για κάθε $\alpha \in \mathcal{O} \cup \{-1, \infty\}$.

Μια "διάσταση-συνάρτηση" (dimension-like function) ή απλά "διάσταση" είναι μια συνάρτηση df με πεδίο ορισμού την κλάση όλων των χώρων και πεδίο τιμών το σύνολο $\omega \cup \{-1, \infty\}$ ή την κλάση $\mathcal{O} \cup \{-1, \infty\}$, με τις ιδιότητες:

(1) Εάν οι χώροι X και Y είναι ομοιόμορφοι, τότε $df(X) = df(Y)$.

(2) $df(\mathbb{R}^n) = n$.

Η Θεωρία Διαστάσεων μελετάει τις ιδιότητες αυτών των συναρτήσεων. Οι κυριόερες ιδιότητες των διαστάσεων-συναρτήσεων είναι οι εξής:

1. Θεωρήματα υποχώρου. Έστω M υπόχωρος ενός τοπολογικού χώρου X. Κάτω από ποιες συνθήκες ισχύει η ανισότητα $df(M) \leq df(X)$;

2. Θεωρήματα αθροίσματος. Έστω $\{F_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ κάλυμμα ενός τοπολογικού χώρου X έτσι ώστε $df(F_\lambda) \leq n$, όπου $n \in \omega$, για κάθε $\lambda \in \Lambda$. Κάτω από ποιες συνθήκες ισχύει η ανιισότητα $df(X) \leq n$;

3. Ανισότητα του Urysohn. Κάτω από ποιες συνθήκες ισχύει η ανισότητα

$$df(A \cup B) \leq df(A) + df(B) + 1\,;$$

4. Θεωρήματα γινομένου. Κάτω από ποιες συνθήκες ισχύει η ανισότητα

$$df(X \times Y) \leq df(X) + df(Y)\,;$$

5. Ιδιότητα της καθολικότητας. Για ποιους διατακτικούς αριθμούς α η κλάση όλων των χώρων X με $df(X) \leq \alpha$ έχει καθολικό χώρο;

Η Θεωρία Διαστάσεων εξετάζει επίσης τις σχέσεις μεταξύ διαφορετικών διαστάσεων. Ένα σημαντικό πρόβλημα είναι η εύρεση συνθηκών κάτω από τις οποίες κάποιες διαστάσεις συμπίπτουν.

Στην παράγραφο αυτή ορίζονται οι τρείς κυριότερες διαστάσεις: ind, Ind και dim και διατυπώνονται οι βασικές ιδιότητες αυτών.

1.2.1 Ορισμός. Έστω A και B δύο ξένα υποσύνολα ενός χώρου X. Θα λέμε ότι ένα υποσύνολο L του X **διαχωρίζει** (separates) τα σύνολα A και B ή ότι είναι μια **διαμέριση**

(partition) μεταξύ των A και B εάν υπάρχουν δύο ανοικτά υποσύνολα U και W του X έτσι ώστε: (1) $A \subseteq U$, $B \subseteq W$, (2) $U \cap W = \emptyset$ και (3) $X \setminus L = U \cup W$.

Η Μικρή Επαγωγική Διάσταση

1.2.2 Ορισμός. Θεωρούμε τη συνάρτηση ind με πεδίο ορισμού την κλάση όλων των χώρων και πεδίο τιμών το σύνολο $\omega \cup \{-1, \infty\}$ που ικανοποιεί τα παρακάτω αξιώματα:

A1) $\text{ind}(X) = -1$ εάν και μόνο εάν $X = \emptyset$.

A2) $\text{ind}(X) \leq n$, όπου $n \in \omega$, εάν υπάρχει βάση B του X έτσι ώστε $\text{ind}(\text{Bd}(U)) < n$ για κάθε $U \in B$.

Η ind καλείται **μικρή επαγωγική διάσταση** (small inductive dimension) ή *διάσταση των* Menger-Urysohn.

1.2.3 Παρατήρηση. Συνήθως η διάσταση ind ορίζεται για κανονικούς χώρους ή για κάποια πιο περιορισμένη κλάση χώρων. Αποδεικνύεται ότι ένας κανονικός χώρος X ικανοποιεί την ανισότητα $\text{ind}(X) \leq n$, όπου $n \in \omega$, εάν και μόνο εάν για κάθε $x \in X$ και κάθε κλειστό υποσύνολο F του X με $x \notin F$ υπάρχει διαμέριση L μεταξύ των $\{x\}$ και F τέτοια ώστε $\text{ind}(L) < n$.

1.2.4 Παρατήρηση. Έστω $\mathbb{P}$ μια τοπολογική κλάση. Εάν στον Ορισμό 1.2.2 αντικαταστήσουμε το αξίωμα A1) με το αξίωμα:

A1′) $\text{ind}(X) = -1$ εάν και μόνο εάν $X \in \mathbb{P}$,

τότε παίρνουμε τη **μικρή επαγωγική διάσταση modulo** $\mathbb{P}$.

1.2.5 Θεώρημα. Για κάθε υπόχωρο M ενός χώρου X, $\text{ind}(M) \leq \text{ind}(X)$.

1.2.6 Θεώρημα. Έστω X κληρονομικά φυσικός χώρος. Εάν $X = X_1 \cup X_2$, τότε

$$\text{ind}(X) \leq \text{ind}(X_1) + \text{ind}(X_2) + 1.$$

Η Μεγάλη Επαγωγική Διάσταση

1.2.7 Ορισμός. Θεωρούμε τη συνάρτηση Ind με πεδίο ορισμού την κλάση όλων των χώρων και πεδίο τιμών το σύνολο $\omega \cup \{-1, \infty\}$ που ικανοποιεί τα παρακάτω αξιώματα:

A1) $\text{Ind}(X) = -1$ εάν και μόνο εάν $X = \emptyset$.

A2) $\text{Ind}(X) \leq n$, όπου $n \in \omega$, εάν για κάθε κλειστό σύνολο F του X και για κάθε ανοικτό σύνολο V του X με $F \subseteq V$ υπάρχει ανοικτό σύνολο U του X τέτοιο ώστε $F \subseteq U \subseteq V$ και $\mathrm{Ind}(\mathrm{Bd}(U)) < n$.

H Ind καλείται **μεγάλη επαγωγική διάσταση** (large inductive dimension) ή *διάσταση των* Brouwer-Čech.

1.2.8 Παρατήρηση. Συνήθως η διάσταση Ind ορίζεται για φυσικούς χώρους ή για κάποια πιο περιορισμένη κλάση χώρων. Αποδεικνύεται ότι ένας φυσικός χώρος X ικανοποιεί την ανισότητα $\mathrm{Ind}(X) \leq n$, όπου $n \in \omega$, εάν και μόνο εάν για κάθε ζεύγος A, B ξένων κλειστών υποσυνόλων του X υπάρχει διαμέριση L μεταξύ των A και B τέτοια ώστε $\mathrm{Ind}(L) < n$.

1.2.9 Παρατήρηση. Έστω $\mathbb{P}$ μια τοπολογική κλάση. Εάν στον Ορισμό 1.2.7 αντικαταστήσουμε το αξίωμα A1) με το αξίωμα:

A1′) $\mathrm{Ind}(X) = -1$ εάν και μόνο εάν $X \in \mathbb{P}$,

τότε παίρνουμε τη **μεγάλη επαγωγική διάσταση modulo** $\mathbb{P}$.

1.2.10 Θεώρημα. Για κάθε κλειστό υπόχωρο M ενός τοπολογικού χώρου X,

$$\mathrm{Ind}(M) \leq \mathrm{Ind}(X).$$

1.2.11 Θεώρημα. Έστω X κληρονομικά φυσικός χώρος. Εάν $X = X_1 \cup X_2$, τότε

$$\mathrm{Ind}(X) \leq \mathrm{Ind}(X_1) + \mathrm{Ind}(X_2) + 1.$$

1.2.12 Θεώρημα. Έστω X, Y μετρικοποιήσιμοι χώροι με $X \cup Y \neq \emptyset$. Τότε,

$$\mathrm{Ind}(X \times Y) \leq \mathrm{Ind}(X) + \mathrm{Ind}(Y).$$

1.2.13 Θεώρημα. Έστω X φυσικός χώρος. Εάν υπάρχει ακολουθία $F_1, F_2, \ldots,$ κλειστών υποσυνόλων του X έτσι ώστε $\mathrm{Ind}(F_i) \leq 0$ για $i = 1, 2, \ldots,$ και $X = \cup_{i=1}^{\infty} F_i$, τότε

$$\mathrm{Ind}(\mathrm{X}) \leq 0.$$

1.2.14 Ορισμός. Μια οικογένεια c υποσυνόλων ενός τοπολογικού χώρου X καλείται **κάλυμμα** (cover) του X εάν $X = \cup_{A \in c} A$. Το κάλυμμα c καλείται **ανοικτό** (open) εάν όλα τα στοιχεία του είναι ανοικτά υποσύνολα του X.

1.2.15 Ορισμός. Έστω X τοπολογικός χώρος και c_1, c_2 δύο οικογένειες υποσυνόλων του X. Λέμε ότι η οικογένεια c_2 είναι μια **εκλέπτυνση** (refinement) της οικογένειας c_1 (γράφουμε $c_2 \preceq c_1$) εάν για κάθε $B \in c_2$ υπάρχει $A \in c_1$ με $B \subseteq A$.

1.2.16 Ορισμός. Έστω X τοπολογικός χώρος και c κάλυμμα του X. Ο μεγαλύτερος ακέραιος n έτσι ώστε το κάλυμμα c να περιέχει $n+1$ σύνολα με μη κενή τομή καλείται **τάξη** (order) του καλύμματος c και συμβολίζεται με $\operatorname{ord}(c)$. Εάν δεν υπάρχει τέτοιος ακέραιος ορίζουμε $\operatorname{ord}(c) = \infty$.

Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει ότι εάν $\operatorname{ord} c \leq n$, τότε για κάθε $n+2$ διακεκριμένα στοιχεία $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_{n+2}}$ του καλύμματος c έχουμε

$$A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_{n+2}} = \emptyset.$$

Ειδικότερα, εάν $\operatorname{ord}(c) = -1$, τότε $c = \{\emptyset\}$.

Η Διάσταση της Καλύψεως

1.2.17 Ορισμός. Θεωρούμε τη συνάρτηση dim με πεδίο ορισμού την κλάση όλων των χώρων και πεδίο τιμών το σύνολο $\omega \cup \{-1, \infty\}$ που ορίζεται ως εξής:

$\dim(X) \leq n$, όπου $n \in \omega \cup \{-1\}$, εάν για κάθε πεπερασμένο ανοικτό κάλυμμα c του X υπάρχει (πεπερασμένη) ανοικτή εκλέπτυνση r του c με $\operatorname{ord}(r) \leq n$.

Η συνάρτηση dim καλείται **διάσταση της καλύψεως** (covering dimension) ή *διάσταση των* Čech-Lebesgue.

1.2.18 Θεώρημα. Για κάθε κλειστό υπόχωρο M ενός τοπολογικού χώρου X,

$$\dim(M) \leq \dim(X).$$

1.2.19 Θεώρημα. (1) Για κάθε T_1-χώρο X, $\operatorname{ind}(X) \leq \operatorname{Ind}(X)$.
(2) Για κάθε φυσικό χώρο X, $\dim(X) \leq \operatorname{Ind}(X)$.

1.2.20 Θεώρημα. (Katětov-Morita) Για κάθε μετρικοποιήσιμο χώρο X,

$$\operatorname{Ind}(X) = \dim(X).$$

1.2.21 Θεώρημα. Για κάθε διαχωρίσιμο μετρικοποιήσιμο χώρο X,

$$\operatorname{ind}(X) = \operatorname{Ind}(X) = \dim(X).$$

1.2.22 Θεώρημα. Έστω X φυσικός χώρος. Εάν υπάρχει ακολουθία $F_1, F_2, \ldots,$ κλειστών υποσυνόλων του X έτσι ώστε $\dim(F_i) \leq n$ για $i = 1, 2, \ldots,$ και $X = \cup_{i=1}^{\infty} F_i$, τότε

$$\dim(X) \leq n.$$

1.2.23 Θεώρημα. Έστω X φυσικός χώρος. Εάν $X = X_1 \cup X_2$, τότε

$$\dim(X) \leq \dim(X_1) + \dim(X_2) + 1.$$

1.2.24 Θεώρημα. (The Embedding Theorem) Κάθε διαχωρίσιμος μετρικοποιήσιμος χώρος X με $0 \leq \operatorname{ind}(X) \leq n$ εμφυτεύεται στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^{2n+1}$.

1.2.25 Θεώρημα. Για κάθε ακέραιο $n \geq 0$ και πληθάριθμο $\nu \geq \omega$ η κλάση όλων των φυσικών (Tychonoff, μετρικοποιήσιμων) χώρων X με $\dim(X) \leq n$ και $w(X) \leq \nu$ έχει καθολικό χώρο.

Κεφάλαιο 2

Κατασκευή Περιεκτικών Χώρων

Στο κεφάλαιο αυτό δίνεται μια μέθοδος κατασκευής περιεκτικών χώρων για μια αυθαίρετη οικογένεια T_0-χώρων, όπως αυτή παρουσιάζεται στο βιβλίο [37] (βλέπε, επίσης, [34]) του κου Σταύρου Ηλιάδη. Η μέθοδος αυτή είναι συνολοθεωρητική και χρησιμοποιείται στα κεφάλαια 4 και 7 για την κατασκευή Καθολικών Χώρων.

2.1 Προκαταρκτικά

Σε ό,τι ακολουθεί με τ θα συμβολίζουμε ένα σταθερό άπειρο πληθάριθμο. Το σύνολο όλων των πεπερασμένων υποσυνόλων του τ συμβολίζεται με $\mathcal{F}$. Ειδικότερα το κενό σύνολο $\emptyset$ είναι στοιχείο του $\mathcal{F}$. Επίσης, με τη λέξη χώρο θα εννοούμε έναν T_0-χώρο με βάρος $\leq \tau$.

Παρακάτω οι έννοιες σύνολο, οικογένεια και συλλογή ταυτίζονται. Επίσης, οι κλάσεις μπορεί να μην είναι σύνολα. Ένα σύνολο είναι μια κλάση που είναι στοιχείο μιας άλλης κλάσης.

Θα χρησιμοποιούμε το σύμβολο "$\equiv$" για να εισάγουμε καινούργιους συμβολισμούς χωρίς να κάνουμε λόγο γι' αυτό.

2.1.1 Ορισμός. Ένα Λ-**δικτυωμένο σύνολο** (Λ-indexed set) ή απλά **δικτυωμένο σύνολο** είναι μια συνάρτηση F από ένα σύνολο Λ σε ένα σύνολο Y. Δηλαδή,

$$F = \{(\lambda, y_\lambda) : \lambda \in \Lambda\},$$

όπου $y_\lambda = F(\lambda)$ για κάθε $\lambda \in \Lambda$. Επομένως, δύο στοιχεία $(\lambda_1, y_{\lambda_1})$ και $(\lambda_2, y_{\lambda_2})$ του F είναι διαφορετικά εάν και μόνον εάν τα στοιχεία λ_1 και λ_2 του Λ είναι διαφορετικά. Ωστόσο, προς χάριν απλότητας, κάθε στοιχείο (λ, y_λ) του F ταυτίζεται με το στοιχείο y_λ του Y και το δικτυωμένο σύνολο F συμβολίζεται επίσης με $\{y_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$. Σημειώνουμε ότι εάν $y_{\lambda_1} = y_{\lambda_2}$ για κάποια $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ με $\lambda_1 \neq \lambda_2$, τότε τα y_{λ_1} και y_{λ_2} θα τα θεωρούμε διαφορετικά στοιχεία του Y.

Έστω $F : \Lambda \to Y$ ένα δικτυωμένο σύνολο. Εάν $F(\Lambda) = Y$, τότε το δικτυωμένο σύνολο F καλείται **δικτύωση** (indication) του Y.

2.1.2 Ορισμός. Έστω X κλάση. Μια **σχέση ισοδυναμίας** επί της X είναι μια υποκλάση $\sim$ του $X \times X$, τέτοια ώστε για κάθε $x, y, z \in X$ να ισχύουν:

(1) $(x, x) \in \sim$ (αυτοπαθής ιδιότητα).

(2) Εάν $(x, y) \in \sim$, τότε $(y, x) \in \sim$ (συμμετρική ιδιότητα).

(3) Εάν $(x, y) \in \sim$ και $(y, z) \in \sim$, τότε $(x, z) \in \sim$ (μεταβατική ιδιότητα).

Εάν $(x, y) \in \sim$ θα γράφουμε επίσης $x \sim y$. Για κάθε $x \in X$ η κλάση $\{y \in X : x \sim y\}$ καλείται **κλάση ισοδυναμίας** της $\sim$. Εάν η κλάση X είναι σύνολο, τότε το σύνολο όλων των κλάσεων ισοδυναμίας της $\sim$ συμβολίζεται με $\mathrm{C}(\sim)$.

2.1.3 Ορισμός. Έστω X σύνολο. Μια μη κενή συλλογή $\mathcal{R}$ υποσυνόλων του X καλείται **δακτύλιος** (ring) του X, όταν:

(1) Είναι κλειστή ως προς τις πεπερασμένες τομές. Δηλαδή, για κάθε θετικό ακέραιο n και για κάθε $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{R}$ η τομή $U_1 \cap \ldots \cap U_n \in \mathcal{R}$.

(2) Είναι κλειστή ως προς τις πεπερασμένες ενώσεις. Δηλαδή, για κάθε θετικό ακέραιο n και για κάθε $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{R}$ η ένωση $U_1 \cup \ldots \cup U_n \in \mathcal{R}$.

2.1.4 Ορισμός. Έστω X σύνολο. Μια μη κενή συλλογή $\mathcal{A}$ υποσυνόλων του X καλείται **άλγεβρα** (algebra) του X, όταν:

(1) Είναι κλειστή ως προς τα συμπληρώματα. Δηλαδή, για κάθε $U \in \mathcal{A}$ το συμπλήρωμα $U^c \in \mathcal{A}$.

(2) Είναι κλειστή ως προς τις πεπερασμένες ενώσεις. Δηλαδή, για κάθε θετικό ακέραιο n και για κάθε $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{A}$ η ένωση $U_1 \cup \ldots \cup U_n \in \mathcal{A}$.

2.1.5 Παρατήρηση. Κάθε άλγεβρα $\mathcal{A}$ ενός συνόλου X είναι κλειστή ως προς τις πεπερασμένες τομές και περιέχει τα σύνολα $\emptyset$ και X.

Πράγματι, έστω $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{A}$. Τότε, ${U_1}^c, \ldots, {U_n}^c \in \mathcal{A}$. Συνεπώς,

$$ {U_1}^c \cup \ldots \cup {U_n}^c = (U_1 \cap \ldots \cap U_n)^c \in \mathcal{A}. $$

Οπότε,

$$ U_1 \cap \ldots \cap U_n = ((U_1 \cap \ldots \cap U_n)^c)^c \in \mathcal{A}. $$

Έστω $U \in \mathcal{A}$. Τότε, $U^c \in \mathcal{A}$. Συνεπώς, $X = U \cup U^c \in \mathcal{A}$ και $\emptyset = X^c \in \mathcal{A}$.

Από την παραπάνω παρατήρηση είναι φανερό ότι κάθε άλγεβρα ενός συνόλου είναι και δακτύλιος του ίδιου συνόλου.

2.1.6 Παραδείγματα.

(1) Για κάθε σύνολο X η οικογένεια $\{\emptyset, \{X\}\}$ είναι άλγεβρα.

(2) Για κάθε σύνολο X το δυναμοσύνολο $\mathcal{P}(X)$ του X είναι άλγεβρα.

2.1.7 Πρόταση. Η τομή οποιουδήποτε πλήθους αλγεβρών (αντίστοιχα, δακτυλίων) ενός συνόλου X είναι επίσης άλγεβρα (αντίστοιχα, δακτύλιος) του X.

2.1.8 Ορισμός. Έστω X σύνολο και $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Η τομή όλων των αλγεβρών (αντίστοιχα, δακτυλίων) του X που περιέχουν το $\mathcal{G}$ καλείται **άλγεβρα παραγόμενη από το** $\mathcal{G}$ (αντίστοιχα, **δακτύλιος παραγόμενος από το** $\mathcal{G}$). Ο δακτύλιος που παράγεται από το $\mathcal{G}$ συμβολίζεται με $\mathcal{G}^{\diamondsuit}$. Προφανώς ο $\mathcal{G}^{\diamondsuit}$ είναι ο ελάχιστος δακτύλιος του X (ως προς τη σχέση του περιέχεσθαι) που περιέχει το $\mathcal{G}$.

2.1.9 Παρατήρηση. Έστω X σύνολο και $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G} \cup \mathcal{G}^c$, όπου $\mathcal{G}^c = \{U^c : U \in \mathcal{G}\}$.

(1) Ο ελάχιστος δακτύλιος του X που περιέχει το $\mathcal{G}$ αποτελείται από όλες τις πεπερασμένες ενώσεις $\cup\{A_i : i \in n \in \omega\}$, όπου $A_i = G^i_{j_1} \cap \ldots \cap G^i_{j_{k_i}}$ και $G^i_{j_m} \in \mathcal{G}$ για κάθε $i \in n$ και $m = 1, \ldots, k_i$.

(2) Η ελάχιστη άλγεβρα του X που περιέχει το $\mathcal{G}$ αποτελείται από όλες τις πεπερασμένες ενώσεις $\cup\{A_i : i \in n \in \omega\}$, όπου $A_i = G^i_{j_1} \cap \ldots \cap G^i_{j_{k_i}}$ και $G^i_{j_m} \in \mathcal{G}_1$ για κάθε $i \in n$ και $m = 1, \ldots, k_i$.

2.1.10 Ορισμός. Έστω X και Y δύο σύνολα. Μια συνάρτηση i από ένα δακτύλιο $\mathcal{R}$ του X στο δυναμοσύνολο $\mathcal{P}(Y)$ καλείται **ομομορφισμός** (homomorphism), εάν για κάθε $U, V \in \mathcal{R}$ έχουμε ότι:

(1) $i(U \cap V) = i(U) \cap i(V)$.

(2) $i(U \cup V) = i(U) \cup i(V)$.

2.1.11 Ορισμός. Έστω X και Y δύο σύνολα. Μια συνάρτηση i από μια άλγεβρα $\mathcal{A}$ του X στο δυναμοσύνολο $\mathcal{P}(Y)$ καλείται **ομομορφισμός** (homomorphism), εάν για κάθε $U, V \in \mathcal{A}$ έχουμε ότι:

(1) $i(X \setminus U) = Y \setminus i(U)$.

(2) $i(U \cup V) = i(U) \cup i(V)$.

2.1.12 Παρατήρηση. Εάν στους ορισμούς 2.1.10 και 2.1.11 η i είναι επιπλέον 1-1, τότε η αντίστοιχη συνάρτηση καλείται **ισομορφισμός** (isomorphism).

2.1.13 Πρόταση. Έστω X και Y δύο σύνολα, $\mathcal{A}$ μια άλγεβρα του X και $i : \mathcal{A} \to \mathcal{P}(Y)$ ένας ομομορφισμός. Τότε, για κάθε $U, V \in \mathcal{A}$ έχουμε ότι $i(U \cap V) = i(U) \cap i(V)$.

2.1.14 Πρόταση. Έστω X και Y δύο σύνολα, $\mathcal{A}$ μια άλγεβρα του X και $i : \mathcal{A} \to \mathcal{P}(Y)$ ένας ομομορφισμός. Τότε, η εικόνα $i(\mathcal{A})$ του $\mathcal{A}$ μέσω του i είναι μια άλγεβρα του Y.

2.1.15 Πρόταση. Έστω X και Y δύο σύνολα, $\mathcal{A}$ μια άλγεβρα του X και $i : \mathcal{A} \to \mathcal{P}(Y)$ ένας ισομορφισμός. Τότε, η αντίστροφη συνάρτηση $i^{-1} : i(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ είναι ισομορφισμός.

2.1.16 Πρόταση. Έστω X, Y και Z τρία σύνολα, $\mathcal{A}$ μια άλγεβρα του X και $i : \mathcal{A} \to \mathcal{P}(Y)$, $j : i(\mathcal{A}) \to \mathcal{P}(Z)$ δύο ισομορφισμοί. Τότε, η σύνθεση $j \circ i : \mathcal{A} \to \mathcal{P}(Z)$ είναι ισομορφισμός.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "j \circ i"'] & i(A) \arrow[d, "j"] \\
& \mathcal{P}(Z)
\end{tikzcd}$$

2.1.17 Πρόταση. Έστω X και Y δύο σύνολα, $\mathcal{A}$ μια άλγεβρα του X και $i : \mathcal{A} \to \mathcal{P}(Y)$ ένας ισομορφισμός. Τότε, για κάθε $U, V, W \in \mathcal{A}$ οι σχέσεις $U = \emptyset$, $U = X$, $U \cap V = W$ και $U \subseteq V$ είναι ισοδύναμες των σχέσεων $i(U) = \emptyset$, $i(U) = Y$, $i(U) \cap i(V) = i(W)$ και $i(U) \subseteq i(V)$, αντίστοιχα.

2.1.18 Πρόταση. Έστω X και Y δύο σύνολα, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(X)$ και $\mathcal{A}$ η ελάχιστη άλγεβρα του X που περιέχει το $\mathcal{G}$. Τότε, ισχύουν τα εξής:

(1) Εάν $i : \mathcal{A} \to \mathcal{P}(Y)$ είναι ένας ομομορφισμός, τότε η $i(\mathcal{A})$ είναι η ελάχιστη άλγεβρα του Y που περιέχει το $i(\mathcal{G})$.

(2) Εάν $h_1 : \mathcal{A} \to \mathcal{P}(Y)$ και $h_2 : \mathcal{A} \to \mathcal{P}(Y)$ είναι δύο ομομορφισμοί τέτοιοι ώστε $h_1(U) = h_2(U)$ για κάθε $U \in \mathcal{G}$, τότε $h_1(U) = h_2(U)$ για κάθε $U \in \mathcal{A}$.

2.1.19 Συμβολισμοί. Η κλάση όλων των διατακτικών αριθμών συμβολίζεται με $\mathcal{O}$. Στην κλάση $\mathcal{O}$ με $(+)$ συμβολίζουμε το φυσικό άθροισμα του Hessenberg (the natural sum of Hessenberg) (βλέπε, για παράδειγμα, [44]). Σημειώνουμε τις παρακάτω ιδιότητες του φυσικού αθροίσματος:

(1) $\alpha(+)\beta = \beta(+)\alpha$,

(2) εάν $\alpha_1 < \alpha_2$, τότε $\alpha_1(+)\beta < \alpha_2(+)\beta$ και

(3) $\alpha(+)n = \alpha + n$ για $n < \omega$.

Επιπλέον θεωρούμε δύο σύμβολα, "-1" και "∞" τέτοια ώστε $-1 < \alpha < \infty$ για κάθε $\alpha \in \mathcal{O}$ και $-1(+)\alpha = \alpha(+)(-1) = \alpha$, $\infty(+)\alpha = \alpha(+)\infty = \infty$ για κάθε $\alpha \in \mathcal{O} \cup \{-1, \infty\}$.

Για κάθε πληθάριθμο ν με ν^+ συμβολίζουμε το μικρότερο πληθάριθμο που είναι μεγαλύτερος από τον ν. Ο πρώτος άπειρος πληθάριθμος συμβολίζεται με ω. Για κάθε σύνολο X με $|X|$ συμβολίζουμε τον πληθάριθμο του X.

2.2 Σημαδεμένοι χώροι και πρότυπες σχέσεις ισοδυναμίας

Στην ενότητα αυτή στην κλάση όλων των σημαδεμένων χώρων, χρησιμοποιώντας τις άλγεβρες των συνόλων, θα ορισθούν κάποιες σχέσεις ισοδυναμίας. Οι σχέσεις ισοδυναμίας αυτές θα παίξουν σημαντικό ρόλο στην κατασκευή των Περιεκτικών Χώρων.

2.2.1 Ορισμός. Έστω X χώρος. Κάθε τ-δικτυωμένη βάση $\{U_\delta^X : \delta \in \tau\}$ του X καλείται **σημάδι** (mark) του χώρου X. Ο χώρος X καλείται **σημαδεμένος** (marked), εάν έχει δοθεί ένα σημάδι του X.

2.2.2 Ορισμός. Έστω X σημαδεμένος χώρος, $\{U_\delta^X : \delta \in \tau\}$ το αντίστοιχο σημάδι του X και $s \in \mathcal{F} \setminus \{\emptyset\}$. Η ελάχιστη άλγεβρα του X που περιέχει το σύνολο $\{U_\delta^X : \delta \in s\}$ καλείται ***s*-άλγεβρα** του σημαδεμένου χώρου X και συμβολίζεται με A_s^X. Τα στοιχεία U_δ^X και $X \setminus U_\delta^X$ της A_s^X συμβολίζονται επίσης με $X_{(\delta,0)}$ και $X_{(\delta,1)}$, αντίστοιχα.

2.2.3 Παρατήρηση. Από τον παραπάνω ορισμό είναι φανερό ότι εάν $\emptyset \neq t \subseteq s$, τότε $\mathrm{A}_t^X \subseteq \mathrm{A}_s^X$.

2.2.4 Συμβολισμοί. Έστω X σημαδεμένος χώρος και $s \in \mathcal{F} \setminus \{\emptyset\}$. Για κάθε $f \in 2^s$, όπου $2 = \{0, 1\}$, με $X_{(s,f)}$ συμβολίζουμε το σύνολο $\cap\{X_{(\delta,f(\delta))} : \delta \in s\}$. Δηλαδή,

$$X_{(s,f)} = \cap\{X_{(\delta,f(\delta))} : \delta \in s\}.$$

Προφανώς $X_{(s,f)} \in \mathrm{A}_s^X$, ως πεπερασμένη τομή στοιχείων της άλγεβρας A_s^X. Επίσης, με 2_X^s συμβολίζουμε το υποσύνολο του 2^s που αποτελείται από όλα τα στοιχεία f του 2^s για τα οποία $X_{(s,f)} \neq \emptyset$. Δηλαδή,

$$2_X^s = \{f \in 2^s : X_{(s,f)} \neq \emptyset\}.$$

Τέλος, για κάθε $\delta \in s$ θέτουμε

$$u(X, s, \delta) = \{f \in 2_X^s : f(\delta) = 0\}.$$

2.2.5 Πρόταση. Έστω X σημαδεμένος χώρος και $s \in \mathcal{F} \setminus \{\emptyset\}$. Τότε, ισχύουν τα εξής:

(1) Για κάθε $\delta \in s$, $X_{(\delta,0)} \cap X_{(\delta,1)} = \emptyset$ και $X_{(\delta,0)} \cup X_{(\delta,1)} = X$.

(2) Για κάθε $f, g \in 2^s_X$ με $f \neq g$, ισχύει $X_{(s,f)} \cap X_{(s,g)} = \emptyset$.

(3) $\cup\{X_{(s,f)} : f \in 2^s_X\} = X$.

2.2.6 Συμβολισμοί. Έστω X σημαδεμένος χώρος και $s \in \mathcal{F} \setminus \{\emptyset\}$. Από την παραπάνω πρόταση προκύπτει ότι τα σύνολα $X_{(s,f)}$, $f \in 2^s_X$, αποτελούν μια διαμέριση του συνόλου X. Επομένως, για κάθε $x \in X$ υπάρχει μοναδική συνάρτηση $f \in 2^s_X$ τέτοια ώστε $x \in X_{(s,f)}$. Συμβολίζουμε με d^X_s τη συνάρτηση από το X στο 2^s_X που ορίζεται ως εξής:

$$d^X_s(x) = f.$$

Εάν $X = \emptyset$, τότε υποθέτουμε ότι $d^X_s(X) = \emptyset$. Προφανώς, $2^s_X = d^X_s(X)$.

Για κάθε $u \subseteq 2^s_X$ με $X_{(s,u)}$ συμβολίζουμε το σύνολο $\cup\{X_{(s,f)} : f \in u\}$. Δηλαδή,

$$X_{(s,u)} = \cup\{X_{(s,f)} : f \in u\}.$$

Προφανώς $X_{(s,u)} \in \mathrm{A}^X_s$, ως πεπερασμένη ένωση στοιχείων της άλγεβρας A^X_s. Συμβολίζουμε με i^s_X τη συνάρτηση από το $\mathcal{P}(2^s_X)$ στο A^X_s που ορίζεται ως εξής:

$$i^s_X(u) = X_{(s,u)}.$$

2.2.7 Παρατήρηση. Έστω $s \in \mathcal{F} \setminus \{\emptyset\}$, $\delta \in s$ και $u, v \in \mathcal{P}(2^s_X)$. Τότε, ισχύουν τα εξής:

(1) $X \setminus X_{(s,u)} = X_{(s,2^s_X \setminus u)}$.

(2) $X_{(s,u)} \cup X_{(s,v)} = X_{(s,u \cup v)}$.

(3) $X_{(s,u(X,s,\delta))} = X_{(\delta,0)}$.

2.2.8 Πρόταση. Έστω X σημαδεμένος χώρος και $s \in \mathcal{F} \setminus \{\emptyset\}$. Η συνάρτηση i^s_X είναι ένας ισομορφισμός από την άλγεβρα $\mathcal{P}(2^s_X)$ επί της άλγεβρας A^X_s τέτοιος ώστε για κάθε $\delta \in s$, $i^s_X(u(X,s,\delta)) = X_{(\delta,0)}$.

2.2.9 Παρατήρηση. Η $\mathcal{P}(2^s_X)$ είναι η ελάχιστη άλγεβρα επί του 2^s_X που περιέχει τα σύνολα $u(X,s,\delta) = \{f \in 2^s_X : f(\delta) = 0\}$. Πράγματι, επειδή τα στοιχεία του 2^s_X παίρνουν μόνο δύο τιμές, είτε μηδέν είτε ένα, κάθε άλγεβρα $\mathcal{A}$ που περιέχει τα σύνολα $u(X,s,\delta)$ θα ισούται αναγκαστικά με το δυναμοσύνολο $\mathcal{P}(2^s_X)$. Για παράδειγμα, έστω $s = \{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4\}$ και $g \in 2^s_X$ με τιμές $g(\delta_1) = 0$, $g(\delta_2) = 0$, $g(\delta_3) = 1$, $g(\delta_4) = 0$. Τότε,

$$\{g\} = u(X,s,\delta_1) \cap u(X,s,\delta_2) \cap (2^s_X \setminus u(X,s,\delta_3)) \cap u(X,s,\delta_4) \in \mathcal{A}.$$

Οπότε, εάν $g, h \in 2^s_X$, τότε $\{g\}, \{h\} \in \mathcal{A}$ και συνεπώς $\{g, h\} = \{g\} \cup \{h\} \in \mathcal{A}$.

2.2.10 Παρατήρηση. Η i^s_X είναι μοναδική. Δηλαδή, εάν h είναι ένας ισομορφισμός από την άλγεβρα $\mathcal{P}(2^s_X)$ επί της άλγεβρας A^X_s τέτοιος ώστε για κάθε $\delta \in s$, $h(u(X, s, \delta)) = X_{(\delta,0)}$, τότε $h = i^s_X$. Πράγματι, επειδή η $\mathcal{P}(2^s_X)$ είναι η ελάχιστη άλγεβρα επί του 2^s_X που περιέχει τα σύνολα $u(X, s, \delta)$ και για κάθε $u(X, s, \delta) \in \mathcal{P}(2^s_X)$ έχουμε ότι $h(u(X, s, \delta)) = i^s_X(u(X, s, \delta))$, από την Πρόταση 2.1.18(2) προκύπτει ότι $h(v) = i^s_X(v)$ για κάθε $v \in \mathcal{P}(2^s_X)$.

2.2.11 Ορισμός. Για κάθε $s \in \mathcal{F} \setminus \{\emptyset\}$ στην κλάση όλων των σημαδεμένων χώρων ορίζουμε μια σχέση ισοδυναμίας $\sim^s_m$ ως εξής: Δύο σημαδεμένοι χώροι X και Y είναι **$\sim^s_m$-ισοδύναμοι** (γράφουμε $X \sim^s_m Y$) τότε και μόνο τότε όταν υπάρχει ένας ισομορφισμός i από την άλγεβρα A^X_s επί της άλγεβρας A^Y_s τέτοιος ώστε $i(X_{(\delta,0)}) = Y_{(\delta,0)}$ για κάθε $\delta \in s$. Η σχέση ισοδυναμίας $\sim^s_m$ καλείται **s-πρότυπη** (s-standard). Ο ισομορφισμός i, που από την Πρόταση 2.1.18(2) είναι μονοσήμαντα καθορισμένος, καλείται **φυσικός** (natural).

2.2.12 Παρατήρηση. Εάν $\emptyset \neq t \subseteq s$, τότε $\sim^s_m \subseteq \sim^t_m$. Πράγματι, έστω $(X, Y) \in \sim^s_m$. Αποδεικνύουμε ότι $(X, Y) \in \sim^t_m$. Επειδή $(X, Y) \in \sim^s_m$, υπάρχει ένας ισομορφισμός i από την άλγεβρα A^X_s επί της άλγεβρας A^Y_s τέτοιος ώστε $i(X_{(\delta,0)}) = Y_{(\delta,0)}$ για κάθε $\delta \in s$. Θεωρούμε τον περιορισμό $i|_{\mathrm{A}^X_t} : \mathrm{A}^X_t \to \mathrm{A}^Y_t$ του i επί της άλγεβρας A^X_t. Ο $i|_{\mathrm{A}^X_t}$ είναι ισομορφισμός και επιπλέον για κάθε $\delta \in t \subseteq s$ ισχύει $i|_{\mathrm{A}^X_t}(X_{(\delta,0)}) = Y_{(\delta,0)}$. Δηλαδή, ο $i|_{\mathrm{A}^X_t}$ είναι ο φυσικός ισομορφισμός από την άλγεβρα A^X_t στην άλγεβρα A^Y_t. Άρα, $(X, Y) \in \sim^t_m$.

2.2.13 Πρόταση. Έστω X και Y δύο σημαδεμένοι χώροι και $s \in \mathcal{F} \setminus \{\emptyset\}$. Οι παρακάτω συνθήκες είναι ισοδύναμες.

(1) $X \sim^s_m Y$.

(2) $2^s_X = 2^s_Y$.

(3) $u(X, s, \delta) = u(Y, s, \delta)$ για κάθε $\delta \in s$.

2.3 Οι Περιεκτικοί Χώροι $\mathrm{T}(\mathbf{M}, \mathrm{R})$

Σε ό,τι ακολουθεί στην ενότητα αυτή υποθέτουμε ότι δίνεται μια αυθαίρετη μη κενή δικτυωμένη οικογένεια $\mathbf{S}$ σημαδεμένων τοπολογικών χώρων.

2.3.1 Ορισμός. Έστω $\mathrm{R}_0 \equiv \{\sim^s_0 : s \in \mathcal{F}\}$ και $\mathrm{R}_1 \equiv \{\sim^s_1 : s \in \mathcal{F}\}$ δύο $\mathcal{F}$-δικτυωμένες οικογένειες από σχέσεις ισοδυναμίας επί της $\mathbf{S}$. Λέμε ότι η οικογένεια R_1 είναι **τελικώς λεπτότερη** (final refinement) της οικογένειας R_0, εάν για κάθε $s \in \mathcal{F}$ υπάρχει $t \in \mathcal{F}$ τέτοιο ώστε $\sim^t_1 \subseteq \sim^s_0$.

2.3.2 Παρατήρηση. Έστω $\mathrm{R}_0 \equiv \{\sim_0^s : s \in \mathcal{F}\}$, $\mathrm{R}_1 \equiv \{\sim_1^s : s \in \mathcal{F}\}$ και $\mathrm{R}_2 \equiv \{\sim_2^s : s \in \mathcal{F}\}$ τρείς $\mathcal{F}$-δικτυωμένες οικογένειες από σχέσεις ισοδυναμίας επί της $\mathbf{S}$. Εάν η οικογένεια R_0 είναι τελικώς λεπτότερη της R_1 και η οικογένεια R_1 είναι τελικώς λεπτότερη της R_2, τότε η οικογένεια R_0 είναι τελικώς λεπτότερη της R_2 (μεταβατική ιδιότητα).

Πράγματι, έστω $s \in \mathcal{F}$. Επειδή η R_1 είναι τελικώς λεπτότερη της R_2, υπάρχει $p \in \mathcal{F}$ τέτοιο ώστε $\sim_1^p \subseteq \sim_2^s$. Επίσης, επειδή η R_0 είναι τελικώς λεπτότερη της R_1, υπάρχει $t \in \mathcal{F}$ τέτοιο ώστε $\sim_0^t \subseteq \sim_1^p$. Συνεπώς, $\sim_0^t \subseteq \sim_1^p \subseteq \sim_2^s$ και επομένως $\sim_0^t \subseteq \sim_2^s$.

2.3.3 Ορισμός. Μια $\mathcal{F}$-δικτυωμένη οικογένεια $\mathrm{R} \equiv \{\sim^s : s \in \mathcal{F}\}$ από σχέσεις ισοδυναμίας επί της $\mathbf{S}$ καλείται **επιτρεπτή** (admissible), εάν ικανοποιούνται οι παρακάτω συνθήκες:

(1) Εάν $s, t \in \mathcal{F}$ με $s \subseteq t$, τότε $\sim^t \subseteq \sim^s$.

(2) Για κάθε $s \in \mathcal{F}$ ο αριθμός των κλάσεων ισοδυναμίας της σχέσης $\sim^s$ είναι πεπερασμένος.

(3) Εάν $s = \emptyset$, τότε $\sim^s = \mathbf{S} \times \mathbf{S}$.

2.3.4 Ορισμός. Για κάθε $X \in \mathbf{S}$ με $\mathbf{M}(X)$ συμβολίζουμε ένα σημάδι του χώρου X. Το σύνολο

$$\mathbf{M} \equiv \{\mathbf{M}(X) : X \in \mathbf{S}\}$$

όλων αυτών των σημαδιών καλείται **συν-σημάδι** (co-mark) της οικογένειας $\mathbf{S}$.

Η σχέση $\sim_m^s$ της προηγούμενης ενότητας ορίστηκε στην κλάση όλων των σημαδεμένων T_0-χώρων με βάρος $\leq \tau$.

2.3.5 Ορισμός. Έστω $\mathbf{M} \equiv \{\mathbf{M}(X) : X \in \mathbf{S}\}$ ένα συν-σημάδι της οικογένειας $\mathbf{S}$. Για κάθε $s \in \mathcal{F} \setminus \{\emptyset\}$ στην οικογένεια $\mathbf{S}$ ορίζουμε μια σχέση ισοδυναμίας $\sim_m^s$ ως εξής: Δύο σημαδεμένοι χώροι X και Y της $\mathbf{S}$ είναι **$\sim_{\mathbf{M}}^s$-ισοδύναμοι** (γράφουμε $X \sim_{\mathbf{M}}^s Y$) τότε και μόνο τότε όταν $X \sim_m^s Y$. Με άλλα λόγια $\sim_{\mathbf{M}}^s = \sim_m^s \cap (\mathbf{S} \times \mathbf{S})$. Επίσης, ορίζουμε $\sim_{\mathbf{M}}^{\emptyset} = \mathbf{S} \times \mathbf{S}$. Δηλαδή, εάν $s = \emptyset$, τότε $\sim_{\mathbf{M}}^s = \mathbf{S} \times \mathbf{S}$. Η $\mathcal{F}$-δικτυωμένη οικογένεια

$$\mathrm{R}_{\mathbf{M}} \equiv \{\sim_{\mathbf{M}}^s : s \in \mathcal{F}\}$$

καλείται **M-πρότυπη** (M-standard).

2.3.6 Παρατήρηση. Η $\mathbf{M}$-πρότυπη οικογένεια $\mathrm{R}_{\mathbf{M}}$ είναι επιτρεπτή. Πράγματι, ικανοποιούνται οι τρείς ιδιότητες του Ορισμού 2.3.3:

(1) Έστω $s, t \in \mathcal{F} \setminus \{\emptyset\}$ με $s \subseteq t$. Τότε, $\sim_m^t \subseteq \sim_m^s$ και συνεπώς $\sim_{\mathbf{M}}^t \subseteq \sim_{\mathbf{M}}^s$. Επίσης, εάν $s = \emptyset$, τότε προφανώς $\sim_{\mathbf{M}}^t \subseteq \sim_{\mathbf{M}}^s = \mathbf{S} \times \mathbf{S}$.

(2) Εάν $s = \emptyset$, τότε $\sim^s_{\mathbf{M}} = \mathbf{S} \times \mathbf{S}$ και άρα ο αριθμός των κλάσεων ισοδυναμίας της $\sim^s_{\mathbf{M}}$ είναι πεπερασμένος (η μόνη κλάση ισοδυναμίας είναι η $\mathbf{S}$). Εάν $s \in \mathcal{F} \setminus \{\emptyset\}$, τότε, σύμφωνα με την Πρόταση 2.2.13, κάθε σύνολο 2^s_X, $X \in \mathbf{S}$, ορίζει μια κλάση ισοδυναμίας της σχέσης $\sim^s_{\mathbf{M}}$. Συνεπώς, επειδή τα σύνολα 2^s_X, $X \in \mathbf{S}$, είναι υποσύνολα του πεπερασμένου συνόλου 2^s, έχουμε το ζητούμενο.

(3) Εξ ορισμού.

2.3.7 Ορισμός. Μια $\mathcal{F}$-δικτυωμένη οικογένεια $\mathrm{R} \equiv \{\sim^s : s \in \mathcal{F}\}$ από σχέσεις ισοδυναμίας επί της $\mathbf{S}$ καλείται **$\mathbf{M}$-επιτρεπτή** ($\mathbf{M}$-admissible), εάν είναι επιτρεπτή και επιπλέον είναι τελικώς λεπτότερη της οικογένειας $\mathrm{R}_{\mathbf{M}}$. Δηλαδή, όταν για κάθε $s \in \mathcal{F}$ υπάρχει $t \in \mathcal{F}$ τέτοιο ώστε $\sim^t \subseteq \sim^s_{\mathbf{M}}$.

2.3.8 Παρατήρηση. Σημειώνουμε ότι εάν $\sim^t \subseteq \sim^s_{\mathbf{M}}$ και $X \sim^t Y$, τότε $X \sim^s_{\mathbf{M}} Y$ και άρα υπάρχει ένας ισομορφισμός i από την άλγεβρα A^X_s επί της άλγεβρας A^Y_s τέτοιος ώστε $i(U^X_\delta) = U^Y_\delta$ για κάθε $\delta \in s$.

2.3.9 Συμβολισμός. Έστω $\mathrm{R} \equiv \{\sim^s : s \in \mathcal{F}\}$ μια $\mathcal{F}$-δικτυωμένη οικογένεια από σχέσεις ισοδυναμίας επί της $\mathbf{S}$. Με $\mathrm{C}(\mathrm{R})$ συμβολίζουμε το σύνολο $\cup\{\mathrm{C}(\sim^s) : s \in \mathcal{F}\}$. Δηλαδή,

$$\mathrm{C}(\mathrm{R}) = \cup\{\mathrm{C}(\sim^s) : s \in \mathcal{F}\}.$$

Επίσης, το δακτύλιο $\mathrm{C}(\mathrm{R})^\diamondsuit$ θα το συμβολίζουμε με $\mathrm{C}^\diamondsuit(\mathrm{R})$. Προφανώς, $\mathrm{C}^\diamondsuit(\mathrm{R}) \subseteq \mathcal{P}(\mathbf{S})$.

2.3.10 Παρατήρηση. Εάν η οικογένεια R είναι επιτρεπτή, τότε ο δακτύλιος $\mathrm{C}^\diamondsuit(\mathrm{R})$ είναι κλειστός και ως προς τα συμπληρώματα. Δηλαδή, εάν $\mathbf{H} \in \mathrm{C}^\diamondsuit(\mathrm{R})$, τότε $\mathbf{S} \setminus \mathbf{H} \in \mathrm{C}^\diamondsuit(\mathrm{R})$.

2.3.11 Συμφωνία. Σε ό,τι ακολουθεί στην ενότητα αυτή υποθέτουμε ότι δίνεται ένα αυθαίρετο συν-σημάδι

$$\mathbf{M} \equiv \{\mathbf{M}(X) \equiv \{U^X_\delta : \delta \in \tau\} : X \in \mathbf{S}\}$$

της οικογένειας $\mathbf{S}$. Επίσης, υποθέτουμε ότι δίνεται μια $\mathbf{M}$-επιτρεπτή $\mathcal{F}$-δικτυωμένη οικογένεια

$$\mathrm{R} \equiv \{\sim^s : s \in \mathcal{F}\}$$

από σχέσεις ισοδυναμίας επί της $\mathbf{S}$.

Για το συν-σημάδι $\mathbf{M}$ της $\mathbf{S}$ και για την οικογένεια R θα κατασκευάσουμε έναν Περιεκτικό Χώρο $\mathrm{T}(\mathbf{M}, \mathrm{R})$. Ο χώρος αυτός ορίζεται μονοσήμαντα από την οικογένεια $\mathbf{S}$, το συν-σημάδι $\mathbf{M}$ της $\mathbf{S}$ και την οικογένεια R. Για κάθε στοιχείο X της $\mathbf{S}$ υπάρχει μια φυσική τοπολογική εμφύτευση του X στο χώρο $\mathrm{T}(\mathbf{M}, \mathrm{R})$.

2.3.12 Ορισμός. Στο σύνολο όλων των ζευγών (x, X), όπου $X \in \mathbf{S}$ και $x \in X$, ορίζουμε μια σχέση ισοδυναμίας $\sim^{\mathrm{R}}_{\mathbf{M}}$ ως εξής: Δύο ζεύγη (x, X) και (y, Y) είναι **$\sim^{R}_{\mathbf{M}}$-ισοδύναμα** (γράφουμε $(x, X) \sim^{\mathrm{R}}_{\mathbf{M}} (y, Y)$) τότε και μόνο τότε όταν για κάθε $s \in \mathcal{F} \setminus \{\emptyset\}$ έχουμε $X \sim^s Y$ και $d^X_s(x) = d^Y_s(y)$.

2.3.13 Παρατήρηση. Η συνθήκη $d^X_s(x) = d^Y_s(y)$ για κάθε $s \in \mathcal{F} \setminus \{\emptyset\}$ είναι ισοδύναμη με τη συνθήκη: Για κάθε $\delta \in \tau$ είτε $x \in U^X_\delta$ και $y \in U^Y_\delta$ είτε $x \notin U^X_\delta$ και $y \notin U^Y_\delta$.

2.3.14 Συμβολισμοί. Το σύνολο όλων των κλάσεων ισοδυναμίας της $\sim^{\mathrm{R}}_{\mathbf{M}}$ συμβολίζεται με $\mathrm{T}(\mathbf{M}, \mathrm{R})$ ή απλώς με T (αν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης). Δηλαδή,

$$\mathrm{T} = \mathrm{T}(\mathbf{M}, \mathrm{R}) = \mathrm{C}(\sim^{\mathrm{R}}_{\mathbf{M}}).$$

Επίσης, ορίζουμε $\mathrm{T} = \emptyset$ εάν όλα τα στοιχεία της $\mathbf{S}$ είναι κενά.

Για κάθε $\mathbf{H} \in \mathrm{C}^{\diamondsuit}(\mathrm{R})$ (ειδικότερα, για κάθε $\mathbf{H} \in \mathrm{C}(\mathrm{R})$) το σύνολο όλων των στοιχείων $\mathbf{a}$ του T για τα οποία υπάρχει ένα στοιχείο (x, X) του $\mathbf{a}$ τέτοιο ώστε $X \in \mathbf{H}$ συμβολίζεται με $\mathrm{T}(\mathbf{M}, \mathrm{R}, \mathbf{H})$ ή απλώς με $\mathrm{T}(\mathbf{H})$ (αν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης). Δηλαδή,

$$\mathrm{T}(\mathbf{H}) = \{\mathbf{a} \in \mathrm{T} : \text{υπάρχει } (x, X) \in \mathbf{a} \text{ με } X \in \mathbf{H}\}.$$

2.3.15 Παρατήρηση. Έστω $t \in \mathcal{F}$ και $\mathbf{H} \in \mathrm{C}(\sim^t)$. Τότε, το σύνολο $\mathrm{T}(\mathbf{H})$ συμπίπτει με το σύνολο όλων των $\mathbf{a} \in \mathrm{T}$ έτσι ώστε για κάθε $(x, X) \in \mathbf{a}$, $X \in \mathbf{H}$. Δηλαδή,

$$\mathrm{T}(\mathbf{H}) = \{\mathbf{a} \in \mathrm{T} : \text{για κάθε } (x, X) \in \mathbf{a},\ X \in \mathbf{H}\}.$$

Πράγματι, έστω $\mathbf{a} \in \mathrm{T}(\mathbf{H})$ και $(x, X) \in \mathbf{a}$. Επειδή $\mathbf{a} \in \mathrm{T}(\mathbf{H})$, υπάρχει $(y, Y) \in \mathbf{a}$ τέτοιο ώστε $Y \in \mathbf{H}$. Εάν $t \in \mathcal{F} \setminus \{\emptyset\}$, τότε επειδή $(x, X), (y, Y) \in \mathbf{a}$, έχουμε ότι $X \sim^t Y$. Εάν $t = \emptyset$, τότε $\sim^t = \mathbf{S} \times \mathbf{S}$ και επομένως $X \sim^t Y$. Συνεπώς, επειδή $Y \in \mathbf{H} \in \mathrm{C}(\sim^t)$, $X \in \mathbf{H}$.

2.3.16 Συμβολισμοί. Έστω $s, t \in \mathcal{F}$, $s \neq \emptyset$, $\sim^t \subseteq \sim^s_{\mathbf{M}}$ και $\mathbf{H} \in \mathrm{C}(\sim^t)$. Υποθέτουμε ότι ένα στοιχείο X του $\mathbf{H}$ έχει επιλεγεί. Τότε, τα σύνολα $u(X, s, \delta)$ και 2^s_X είναι ανεξάρτητα από την επιλογή του συνόλου X. Πράγματι, έστω $X, Y \in \mathbf{H}$. Τότε, $(X, Y) \in \sim^t$ και συνεπώς $(X, Y) \in \sim^s_{\mathbf{M}}$. Άρα, από την Πρόταση 2.2.13, έχουμε ότι $2^s_X = 2^s_Y$ και $u(X, s, \delta) = u(Y, s, \delta)$.

Για κάθε $X \in \mathbf{H}$ με $2^s_{\mathbf{H}}$ συμβολίζουμε το σύνολο 2^s_X και με $u(\mathbf{H}, s, \delta)$ το σύνολο $u(X, s, \delta)$.

Για κάθε $u \in \mathcal{P}(2^s_{\mathbf{H}})$ με $\mathrm{T}_{(s,u)}(\mathbf{H})$ συμβολίζουμε το σύνολο όλων των στοιχείων $\mathbf{a}$ του T για τα οποία υπάρχει ένα στοιχείο (x, X) του $\mathbf{a}$ με $X \in \mathbf{H}$ και $x \in X_{(s,u)}$. Δηλαδή,

$$\mathrm{T}_{(s,u)}(\mathbf{H}) = \{\mathbf{a} \in \mathrm{T} : \text{υπάρχει } (x, X) \in \mathbf{a} \text{ με } X \in \mathbf{H} \text{ και } x \in X_{(s,u)}\}.$$

Εάν $u = u(\mathbf{H}, s, \delta)$ για κάποιο $\delta \in s$ (και συνεπώς, από την Πρόταση 2.2.8, $X_{(s,u)} = X_{(\delta,0)}$ για κάθε $X \in \mathbf{H}$), τότε το σύνολο $\mathrm{T}_{(s,u)}(\mathbf{H})$ συμβολίζεται επίσης με $\mathrm{T}_{(\delta,0)}(\mathbf{H})$. Δηλαδή,

$$\mathrm{T}_{(\delta,0)}(\mathbf{H}) = \{\mathbf{a} \in \mathrm{T} : \text{υπάρχει } (x, X) \in \mathbf{a} \text{ με } X \in \mathbf{H} \text{ και } x \in X_{(\delta,0)}\}.$$

Με $\mathrm{A}_s^{\mathbf{H}}$ συμβολίζουμε το σύνολο που έχει ως στοιχεία τα σύνολα $\mathrm{T}_{(s,u)}(\mathbf{H})$, $u \in \mathcal{P}(2^s_{\mathbf{H}})$. Δηλαδή,

$$\mathrm{A}_s^{\mathbf{H}} = \{\mathrm{T}_{(s,u)}(\mathbf{H}) : u \in \mathcal{P}(2^s_{\mathbf{H}})\}.$$

Τέλος, με $i^s_{\mathbf{H}}$ συμβολίζουμε τη συνάρτηση από το $\mathcal{P}(2^s_{\mathbf{H}})$ στο $\mathrm{A}_s^{\mathbf{H}}$ που ορίζεται ως εξής:

$$i^s_{\mathbf{H}}(u) = \mathrm{T}_{(s,u)}(\mathbf{H}).$$

2.3.17 Πρόταση. Έστω $s, t \in \mathcal{F}$, $s \neq \emptyset$, $\sim^t \subseteq \sim^s_{\mathbf{M}}$, $\mathbf{H} \in \mathrm{C}(\sim^t)$ και $u \in \mathcal{P}(2^s_{\mathbf{H}})$. Το σύνολο $\mathrm{T}_{(s,u)}(\mathbf{H})$ συμπίπτει με το σύνολο όλων των $\mathbf{a} \in \mathrm{T}$ έτσι ώστε για κάθε $(x, X) \in \mathbf{a}$ να έχουμε $X \in \mathbf{H}$ και $x \in X_{(s,u)}$. Δηλαδή,

$$\mathrm{T}_{(s,u)}(\mathbf{H}) = \{\mathbf{a} \in \mathrm{T} : \text{για κάθε } (x, X) \in \mathbf{a} \text{ έχουμε } X \in \mathbf{H} \text{ και } x \in X_{(s,u)}\}.$$

2.3.18 Παρατήρηση. Έστω $s, t \in \mathcal{F}$, $s \neq \emptyset$, $\sim^t \subseteq \sim^s_{\mathbf{M}}$, $\mathbf{H} \in \mathrm{C}(\sim^t)$ και $u, v \in \mathcal{P}(2^s_{\mathbf{H}})$. Τότε, ισχύουν τα εξής:

(1) $\mathrm{T}(\mathbf{H}) \setminus \mathrm{T}_{(s,u)}(\mathbf{H}) = \mathrm{T}_{(s,2^s_{\mathbf{H}} \setminus u)}(\mathbf{H})$.

(2) $\mathrm{T}_{(s,u)}(\mathbf{H}) \cup \mathrm{T}_{(s,v)}(\mathbf{H}) = \mathrm{T}_{(s,u \cup v)}(\mathbf{H})$.

2.3.19 Πρόταση. Έστω $s, t \in \mathcal{F}$, $s \neq \emptyset$, $\sim^t \subseteq \sim^s_{\mathbf{M}}$ και $\mathbf{H} \in \mathrm{C}(\sim^t)$.

(1) Το σύνολο $\mathrm{A}_s^{\mathbf{H}}$ είναι μια άλγεβρα του $\mathrm{T}(\mathbf{H})$.

(2) Η συνάρτηση $i^s_{\mathbf{H}}$ είναι ένας ισομορφισμός από την άλγεβρα $\mathcal{P}(2^s_{\mathbf{H}})$ επί της άλγεβρας $\mathrm{A}_s^{\mathbf{H}}$.

2.3.20 Πρόταση. Έστω $s, t \in \mathcal{F}$, $s \neq \emptyset$, $\sim^t \subseteq \sim^s_{\mathbf{M}}$, $\mathbf{H} \in \mathrm{C}(\sim^t)$ και $X \in \mathbf{H}$. Τότε, η συνάρτηση $i = i^s_{\mathbf{H}} \circ (i^s_X)^{-1}$ είναι ένας ισομορφισμός από την άλγεβρα A_s^X επί της άλγεβρας $\mathrm{A}_s^{\mathbf{H}}$ τέτοιος ώστε $i(X_{(\delta,0)}) = \mathrm{T}_{(\delta,0)}(\mathbf{H})$ για κάθε $\delta \in s$.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{A}_s^X \arrow[r, "(i^s_X)^{-1}"] \arrow[dr, "i"'] & P(2^s_X) = P(2^s_{\mathbf{H}}) \arrow[d, "i^s_{\mathbf{H}}"] \\
& \mathrm{A}_s^{\mathbf{H}}
\end{tikzcd}$$

2.3.21 Συμβολισμοί. Για κάθε $\delta \in \tau$ και $\mathbf{H} \in \mathrm{C}^{\diamondsuit}(\mathrm{R})$ (ειδικότερα, για κάθε $\mathbf{H} \in \mathrm{C}(\mathrm{R})$) με $U_{\delta}^{\mathrm{T}}(\mathbf{H})$ συμβολίζουμε το σύνολο όλων των στοιχείων $\mathbf{a}$ του T για τα οποία υπάρχει ένα στοιχείο (x, X) του $\mathbf{a}$ με $X \in \mathbf{H}$ και $x \in U_{\delta}^{X}$. Δηλαδή,

$$U_{\delta}^{\mathrm{T}}(\mathbf{H}) = \{\mathbf{a} \in \mathrm{T} : \text{υπάρχει } (x, X) \in \mathbf{a} \text{ με } X \in \mathbf{H} \text{ και } x \in U_{\delta}^{X}\}.$$

Συνεπώς, εάν για κάποιο στοιχείο s του $\mathcal{F} \setminus \{\emptyset\}$ έχουμε $\delta \in s$ και $\mathbf{H} \in \mathrm{C}(\sim^{t})$, όπου $t \in \mathcal{F}$ και $\sim^{t} \subseteq \sim_{\mathbf{M}}^{s}$, τότε $U_{\delta}^{\mathrm{T}}(\mathbf{H}) = \mathrm{T}_{(\delta,0)}(\mathbf{H}) \in \mathrm{A}_{s}^{\mathbf{H}}$.

Για κάθε $\kappa \subseteq \tau$ και $\mathbf{L} \in \mathrm{C}^{\diamondsuit}(\mathrm{R})$ θέτουμε:

(1) $\mathrm{B}^{\mathrm{T}} = \{U_{\delta}^{\mathrm{T}}(\mathbf{H}) : \delta \in \tau \text{ και } \mathbf{H} \in \mathrm{C}(\mathrm{R})\}$.

(2) $\mathrm{B}^{\mathbf{L}} = \{U_{\delta}^{\mathrm{T}}(\mathbf{H}) \in \mathrm{B}^{\mathrm{T}} : \mathbf{H} \subseteq \mathbf{L}\}$.

(3) $\mathrm{B}_{\kappa}^{\mathrm{T}} = \{U_{\delta}^{\mathrm{T}}(\mathbf{H}) \in \mathrm{B}^{\mathrm{T}} : \delta \in \kappa\}$.

(4) $\mathrm{B}_{\kappa}^{\mathbf{L}} = \{U_{\delta}^{\mathrm{T}}(\mathbf{H}) \in \mathrm{B}_{\kappa}^{\mathrm{T}} : \mathbf{H} \subseteq \mathbf{L}\}$.

(5) $\mathrm{B}_{\diamondsuit}^{\mathrm{T}} = \{U_{\delta}^{\mathrm{T}}(\mathbf{H}) : \delta \in \tau \text{ και } \mathbf{H} \in \mathrm{C}^{\diamondsuit}(\mathrm{R})\}$.

(6) $\mathrm{B}_{\diamondsuit}^{\mathbf{L}} = \{U_{\delta}^{\mathrm{T}}(\mathbf{H}) \in \mathrm{B}_{\diamondsuit}^{\mathrm{T}} : \mathbf{H} \subseteq \mathbf{L}\}$.

(7) $\mathrm{B}_{\diamondsuit,\kappa}^{\mathrm{T}} = \{U_{\delta}^{\mathrm{T}}(\mathbf{H}) \in \mathrm{B}_{\diamondsuit}^{\mathrm{T}} : \delta \in \kappa\}$.

(8) $\mathrm{B}_{\diamondsuit,\kappa}^{\mathbf{L}} = \{U_{\delta}^{\mathrm{T}}(\mathbf{H}) \in \mathrm{B}_{\diamondsuit,\kappa}^{\mathrm{T}} : \mathbf{H} \subseteq \mathbf{L}\}$.

2.3.22 Παρατήρηση. Έστω $\mathbf{H} \in \mathrm{C}^{\diamondsuit}(\mathrm{R})$. Τότε,

$$\mathrm{T}(\mathbf{H}) = \cup\{U_{\delta}^{\mathrm{T}}(\mathbf{H}) : \delta \in \tau\}.$$

2.3.23 Παρατήρηση. Έστω $\mathbf{L} \in \mathrm{C}^{\diamondsuit}(\mathrm{R})$. Τότε,

$$\mathrm{B}_{\diamondsuit,\kappa}^{\mathbf{L}} = \{U \cap \mathrm{T}(\mathbf{L}) : U \in \mathrm{B}_{\diamondsuit,\kappa}^{\mathrm{T}}\}.$$

Σημειώνουμε ότι, γενικά, $\mathrm{B}_{\kappa}^{\mathbf{L}} \neq \{U \cap \mathrm{T}(\mathbf{L}) : U \in \mathrm{B}_{\kappa}^{\mathrm{T}}\}$.

2.3.24 Παρατήρηση. Επειδή $|\mathcal{F}| \leq \tau$ και για κάθε $s \in \mathcal{F}$ ο αριθμός των κλάσεων ισοδυναμίας της σχέσης $\sim^{s}$ είναι πεπερασμένος, $|\mathrm{C}(\mathrm{R})| \leq \tau$. Αυτό σημαίνει ότι $|\mathrm{B}^{\mathrm{T}}| \leq \tau$. Ανάλογα, έχουμε ότι $|\mathrm{C}^{\diamondsuit}(\mathrm{R})| \leq \tau$ και συνεπώς $|\mathrm{B}^{\mathrm{T}}| \leq \tau$.

2.3.25 Πρόταση. (1) Το σύνολο B^{T} είναι βάση για μια τοπολογία επί του T. Επιπλέον, εάν κ είναι ένα υποσύνολο του τ έτσι ώστε για κάθε $X \in \mathbf{S}$ το σύνολο $\{U_{\delta}^{X} : \delta \in \kappa\}$ να είναι βάση του X, τότε το σύνολο $\mathrm{B}_{\kappa}^{\mathrm{T}}$ είναι βάση για την ίδια τοπολογία επί του T.

(2) Για κάθε $\mathbf{L} \in \mathrm{C}^{\diamondsuit}(\mathrm{R})$ το σύνολο $\mathrm{B}^{\mathbf{L}}$ είναι βάση του υποχώρου $\mathrm{T}(\mathbf{L})$ του T. Επιπλέον, εάν κ είναι ένα υποσύνολο του τ έτσι ώστε για κάθε $X \in \mathbf{S}$ το σύνολο $\{U_\delta^X : \delta \in \kappa\}$ να είναι βάση του X, τότε το σύνολο $\mathrm{B}_\kappa^{\mathbf{L}}$ είναι βάση του $\mathrm{T}(\mathbf{L})$.

2.3.26 Ορισμός. Οι βάσεις B^{T} και $\mathrm{B}^{\mathbf{L}}$ καλούνται **πρότυπες** (standard). Για κάθε $\kappa \subseteq \tau$ οι βάσεις $\mathrm{B}_\kappa^{\mathrm{T}}$ και $\mathrm{B}_\kappa^{\mathbf{L}}$ καλούνται ***κ*-πρότυπες** (κ-standard).

2.3.27 Ορισμός. Έστω T ο τοπολογικός χώρος που έχει βάση το σύνολο B^{T}. Ο T καλείται **Περιεκτικός Χώρος** (Containing Space) της οικογένειας $\mathbf{S}$ που αντιστοιχεί στο συν-σημάδι $\mathbf{M} \equiv \{\mathbf{M}(X) \equiv \{U_\delta^X : \delta \in \tau\} : X \in \mathbf{S}\}$ και στην οικογένεια $\mathrm{R} \equiv \{\sim^s : s \in \mathcal{F}\}$. Επειδή $|\mathrm{B}^{\mathrm{T}}| \leq \tau$, έχουμε ότι $w(\mathrm{T}) \leq \tau$.

Η επόμενη πρόταση μας λέει ότι τα στοιχεία του συνόλου $\mathrm{B}_\diamondsuit^{\mathrm{T}}$ είναι ανοικτά στο T. Συνεπώς, επειδή $\mathrm{B}^{\mathrm{T}} \subseteq \mathrm{B}_\diamondsuit^{\mathrm{T}}$, το $\mathrm{B}_\diamondsuit^{\mathrm{T}}$ αποτελεί και αυτό βάση για το T. Επίσης, γνωρίζουμε ότι $|\mathrm{B}_\diamondsuit^{\mathrm{T}}| \leq \tau$.

2.3.28 Πρόταση. Έστω $\delta \in \tau$ και $\mathbf{H} \in \mathrm{C}^{\diamondsuit}(\mathrm{R})$. Οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς.

(1) Υπάρχει $t \in \mathcal{F}$ έτσι ώστε το $\mathbf{H}$ να είναι ένωση κλάσεων ισοδυναμίας της σχέσης $\sim^t$. Επιπλέον, εάν $t \subseteq q \in \mathcal{F}$, τότε η $\mathbf{H}$ είναι επίσης ένωση κλάσεων ισοδυναμίας της σχέσης $\sim^q$.

(2) Το σύνολο $U_\delta^{\mathrm{T}}(\mathbf{H})$ είναι ανοικτό στο T και

$$U_\delta^{\mathrm{T}}(\mathbf{H}) = \{\mathbf{a} \in \mathrm{T} : \text{για κάθε } (x, X) \in \mathbf{a} \text{ έχουμε ότι } X \in \mathbf{H} \text{ και } x \in U_\delta^X\}.$$

(3) Το σύνολο $\mathrm{T}(\mathbf{H})$ είναι ανοικτό και κλειστό στο T.

(4) Έχουμε

$$\begin{aligned}\mathrm{Cl}_{\mathrm{T}}(U_\delta^{\mathrm{T}}(\mathbf{H})) &= \{\mathbf{a} \in \mathrm{T} : \text{υπάρχει } (x, X) \in \mathbf{a} \text{ με } X \in \mathbf{H} \text{ και } x \in \mathrm{Cl}_X(U_\delta^X)\} \\ &= \{\mathbf{a} \in \mathrm{T} : \text{για κάθε } (x, X) \in \mathbf{a},\ X \in \mathbf{H} \text{ και } x \in \mathrm{Cl}_X(U_\delta^X)\}.\end{aligned}$$

(5) Έχουμε

$$\begin{aligned}\mathrm{Bd}_{\mathrm{T}}(U_\delta^{\mathrm{T}}(\mathbf{H})) &= \{\mathbf{a} \in \mathrm{T} : \text{υπάρχει } (x, X) \in \mathbf{a} \text{ με } X \in \mathbf{H} \text{ και } x \in \mathrm{Bd}_X(U_\delta^X)\} \\ &= \{\mathbf{a} \in \mathrm{T} : \text{για κάθε } (x, X) \in \mathbf{a},\ X \in \mathbf{H} \text{ και } x \in \mathrm{Bd}_X(U_\delta^X)\}.\end{aligned}$$

2.3.29 Πρόταση. (1) Το σύνολο $\mathrm{B}_\diamondsuit^{\mathrm{T}}$ είναι βάση του χώρου T. Επιπλέον, εάν κ είναι ένα υποσύνολο του τ έτσι ώστε για κάθε $X \in \mathbf{S}$ το σύνολο $\{U_\delta^X : \delta \in \kappa\}$ να είναι βάση του X, τότε το σύνολο $\mathrm{B}_{\diamondsuit,\kappa}^{\mathrm{T}}$ είναι επίσης βάση του T.

(2) Για κάθε $\mathbf{L} \in \mathrm{C}^{\diamondsuit}(\mathrm{R})$ το σύνολο $\mathrm{B}^{\mathbf{L}}_{\diamondsuit}$ είναι βάση του υποχώρου $\mathrm{T}(\mathbf{L})$ του T. Επιπλέον, εάν κ είναι ένα υποσύνολο του τ έτσι ώστε για κάθε $X \in \mathbf{S}$ το σύνολο $\{U^X_\delta : \delta \in \kappa\}$ να είναι βάση του X, τότε το σύνολο $\mathrm{B}^{\mathbf{L}}_{\diamondsuit,\kappa}$ είναι βάση του $\mathrm{T}(\mathbf{L})$.

2.3.30 Ορισμός. Οι βάσεις $\mathrm{B}^{\mathrm{T}}_{\diamondsuit}$ και $\mathrm{B}^{\mathbf{L}}_{\diamondsuit}$ καλούνται **$\diamondsuit$-πρότυπες** ($\diamondsuit$-standard). Για κάθε $\kappa \subseteq \tau$ οι βάσεις $\mathrm{B}^{\mathbf{L}}_{\diamondsuit,\kappa}$ καλούνται **$(\diamondsuit, \boldsymbol{\kappa})$-πρότυπες** ($(\diamondsuit, \kappa)$-standard).

2.3.31 Πρόταση. Ο χώρος T είναι T_0-χώρος με βάρος $w(\mathrm{T}) \leq \tau$.

2.3.32 Συμβολισμός. Έστω $X \in \mathbf{S}$. Τότε για κάθε $x \in X$ υπάρχει μοναδικό σημείο $\mathbf{a} \in \mathrm{T}$ τέτοιο ώστε $(x, X) \in \mathbf{a}$. Συμβολίζουμε με e^X_{T} την απεικόνιση από το χώρο X στο χώρο T που ορίζεται ως εξής:

$$e^X_{\mathrm{T}}(x) = \mathbf{a}.$$

2.3.33 Πρόταση. Για κάθε $X \in \mathbf{S}$ η απεικόνιση e^X_{T} είναι μια εμφύτευση του X στο T.

2.3.34 Ορισμός. Η απεικόνιση e^X_{T} καλείται **φυσική εμφύτευση** (natural embedding) του X στο T.

2.3.35 Παρατήρηση. Έχουμε $\mathrm{T} = \cup\{e^X_{\mathrm{T}}(X) : X \in \mathbf{S}\}$.

2.4 Ιδιάζοντα υποσύνολα των Περιεκτικών Χώρων

Σε ό,τι ακολουθεί στην ενότητα αυτή υποθέτουμε ότι έχουν δοθεί:

(1) Μια αυθαίρετη μη κενή δικτυωμένη οικογένεια $\mathbf{S}$ σημαδεμένων τοπολογικών χώρων.

(2) Ένα αυθαίρετο συν-σημάδι

$$\mathbf{M} \equiv \{\mathbf{M}(X) \equiv \{U^X_\delta : \delta \in \tau\} : X \in \mathbf{S}\}$$

της οικογένειας $\mathbf{S}$.

Επίσης, υποθέτουμε ότι για κάθε $X \in \mathbf{S}$ ένα υποσύνολο Q^X του X είναι δοσμένο.

2.4.1 Ορισμός. Το σύνολο $\{Q^X : X \in \mathbf{S}\}$ καλείται **περιορισμός** (restriction) της οικογένειας $\mathbf{S}$ και συμβολίζεται με $\mathbf{Q}$. Δηλαδή,

$$\mathbf{Q} = \{Q^X : X \in \mathbf{S}\}.$$

Το σύνολο Q^X συμβολίζεται επίσης με $\mathbf{Q}(X)$. Προφανώς, το $\mathbf{Q}$ είναι μια $\mathbf{S}$-δικτυωμένη οικογένεια από χώρους.

2.4.2 Ορισμός. Έστω $X \in \mathbf{S}$. Η τ-δικτυωμένη βάση $\{U_\delta^X \cap Q^X : \delta \in \tau\}$ του Q^X καλείται **ίχνος** (trace) του $\mathbf{M}(X)$ επί του Q^X και συμβολίζεται με $\mathbf{M}(X)^{Q^X}$. Δηλαδή,

$$\mathbf{M}(X)^{Q^X} = \{U_\delta^{Q^X} \equiv U_\delta^X \cap Q^X : \delta \in \tau\}.$$

2.4.3 Πρόταση. Έστω $X \in \mathbf{S}$. Για κάθε $s \in \mathcal{F} \setminus \{\emptyset\}$ και $x \in Q^X$ έχουμε

$$d_s^X(x) = d_s^{Q^X}(x).$$

Συνεπώς, $d_s^X(Q^X) = d_s^{Q^X}(Q^X)$.

2.4.4 Ορισμός. Το συν-σημάδι $\{\mathbf{M}(X)^{Q^X} : Q^X \in \mathbf{Q}\}$ του $\mathbf{Q}$ καλείται **ίχνος** (trace) του $\mathbf{M}$ επί του $\mathbf{Q}$ και συμβολίζεται με $\mathbf{M}|_\mathbf{Q}$. Δηλαδή,

$$\begin{aligned} \mathbf{M}|_\mathbf{Q} &= \{\mathbf{M}(X)^{Q^X} : Q^X \in \mathbf{Q}\} \\ &= \{\{U_\delta^{Q^X} : \delta \in \tau\} : Q^X \in \mathbf{Q}\} \\ &= \{\{U_\delta^X \cap Q^X : \delta \in \tau\} : Q^X \in \mathbf{Q}\} \\ &= \{\{U_\delta^X \cap Q^X : \delta \in \tau\} : X \in \mathbf{S}\}. \end{aligned}$$

2.4.5 Ορισμός. Έστω $\sim$ μια σχέση ισοδυναμίας επί του $\mathbf{S}$. Ορίζουμε μια σχέση ισοδυναμίας $\sim|_\mathbf{Q}$ επί του $\mathbf{Q}$ ως εξής: Δύο στοιχεία Q^X και Q^Y του $\mathbf{Q}$ είναι **$\sim|_\mathbf{Q}$-ισοδύναμα** (γράφουμε $Q^X \sim|_\mathbf{Q} Q^Y$), τότε και μόνο τότε, όταν $X \sim Y$. Η σχέση ισοδυναμίας $\sim|_\mathbf{Q}$ καλείται **ίχνος** (trace) της $\sim$ επί του $\mathbf{Q}$.

2.4.6 Παρατήρηση. Έστω $\sim_1$ και $\sim_2$ δύο σχέσεις ισοδυναμίας επί της $\mathbf{S}$. Εάν $\sim_1 \subseteq \sim_2$, τότε $\sim_1|_\mathbf{Q} \subseteq \sim_2|_\mathbf{Q}$.

2.4.7 Ορισμός. Έστω $\mathrm{R} \equiv \{\sim^s : s \in \mathcal{F}\}$ μια $\mathcal{F}$-δικτυωμένη οικογένεια από σχέσεις ισοδυναμίας επί της $\mathbf{S}$. Η $\mathcal{F}$-δικτυωμένη οικογένεια $\{\sim^s|_\mathbf{Q} : s \in \mathcal{F}\}$ από σχέσεις ισοδυναμίας επί του $\mathbf{Q}$ καλείται **ίχνος** (trace) της R επί του $\mathbf{Q}$ και συμβολίζεται με $\mathrm{R}|_\mathbf{Q}$. Δηλαδή,

$$\mathrm{R}|_\mathbf{Q} = \{\sim^s|_\mathbf{Q} : s \in \mathcal{F}\}.$$

2.4.8 Παρατήρηση. Έστω $\mathrm{R} \equiv \{\sim^s : s \in \mathcal{F}\}$ μια $\mathcal{F}$-δικτυωμένη οικογένεια από σχέσεις ισοδυναμίας επί της $\mathbf{S}$. Εάν η R είναι επιτρεπτή, τότε και η $\mathrm{R}|_\mathbf{Q}$ είναι επιτρεπτή.

2.4.9 Παρατήρηση. Έστω R_0 και R_1 δύο $\mathcal{F}$-δικτυωμένες οικογένειες από σχέσεις ισοδυναμίας επί της $\mathbf{S}$. Εάν η R_0 είναι τελικώς λεπτότερη της R_1, τότε και η $\mathrm{R}_0|_\mathbf{Q}$ είναι τελικώς λεπτότερη της $\mathrm{R}_1|_\mathbf{Q}$.

2.4.10 Ορισμός. Έστω $\mathbf{H} \in \mathrm{C}^{\diamondsuit}(\mathrm{R})$. Το σύνολο $\{Q^X \in \mathbf{Q} : X \in \mathbf{H}\}$ καλείται **ίχνος** (trace) του $\mathbf{H}$ επί του $\mathbf{Q}$ και συμβολίζεται με $\mathbf{H}|_{\mathbf{Q}}$. Δηλαδή,

$$\mathbf{H}|_{\mathbf{Q}} = \{Q^X \in \mathbf{Q} : X \in \mathbf{H}\}.$$

2.4.11 Παρατήρηση.
(1) Εάν $\mathbf{H} \in \mathrm{C}^{\diamondsuit}(\mathrm{R})$, τότε $\mathbf{H}|_{\mathbf{Q}} \in \mathrm{C}^{\diamondsuit}(\mathrm{R}|_{\mathbf{Q}})$.

(2) Εάν $\mathbf{H} \in \mathrm{C}(\mathrm{R})$, τότε $\mathbf{H}|_{\mathbf{Q}} \in \mathrm{C}(\mathrm{R}|_{\mathbf{Q}})$.

2.4.12 Παρατήρηση. Σημειώνουμε ότι, εν γένει, το ίχνος της $\mathbf{M}$-πρότυπης οικογένειας

$$\mathrm{R}_{\mathbf{M}} \equiv \{\sim^s_{\mathbf{M}} : s \in \mathcal{F}\}$$

επί του $\mathbf{Q}$ δεν είναι ίσο με την $\mathbf{M}|_{\mathbf{Q}}$-πρότυπη οικογένεια

$$\mathrm{R}_{\mathbf{M}|_{\mathbf{Q}}} \equiv \{\sim^s_{\mathbf{M}|_{\mathbf{Q}}} : s \in \mathcal{F}\}.$$

Δηλαδή,

$$\mathrm{R}_{\mathbf{M}}|_{\mathbf{Q}} \neq \mathrm{R}_{\mathbf{M}|_{\mathbf{Q}}}.$$

Το γεγονός αυτό δικαιολογεί τον παρακάτω ορισμό.

2.4.13 Ορισμός. Μια $\mathcal{F}$-δικτυωμένη οικογένεια $\mathrm{R} \equiv \{\sim^s : s \in \mathcal{F}\}$ από σχέσεις ισοδυναμίας επί της $\mathbf{S}$ καλείται **$(\mathbf{M}, \mathbf{Q})$-επιτρεπτή** ($(\mathbf{M}, \mathbf{Q})$-admissible), εάν είναι $\mathbf{M}$-επιτρεπτή και επιπλέον το ίχνος $\mathrm{R}|_{\mathbf{Q}}$ της R επί του $\mathbf{Q}$ είναι $\mathbf{M}|_{\mathbf{Q}}$-επιτρεπτή οικογένεια από σχέσεις ισοδυναμίας επί του $\mathbf{Q}$.

2.4.14 Πρόταση. Έστω $\mathrm{R} \equiv \{\sim^s : s \in \mathcal{F}\}$ μια $\mathbf{M}$-επιτρεπτή οικογένεια από σχέσεις ισοδυναμίας επί της $\mathbf{S}$. Η R είναι $(\mathbf{M}, \mathbf{Q})$-επιτρεπτή εάν και μόνον εάν για κάθε $s \in \mathcal{F} \setminus \{\emptyset\}$ υπάρχει $t \in \mathcal{F} \setminus \{\emptyset\}$ έτσι ώστε για κάθε $X, Y \in \mathbf{S}$ να ισχύει η συνεπαγωγή

$$X \sim^t Y \Rightarrow d_s^X(Q^X) = d_s^Y(Q^Y).$$

2.4.15 Παράδειγμα. Η οικογένεια $\mathrm{R}_0 \equiv \{\sim^s_0 : s \in \mathcal{F}\}$, όπου $X \sim^s_0 Y$ εάν και μόνον εάν $X \sim^s_{\mathbf{M}} Y$ και $d_s^X(Q^X) = d_s^Y(Q^Y)$, είναι $(\mathbf{M}, \mathbf{Q})$-επιτρεπτή.

2.4.16 Συμβολισμοί. Έστω R μια $(\mathbf{M}, \mathbf{Q})$-επιτρεπτή οικογένεια από σχέσεις ισοδυναμίας επί της $\mathbf{S}$. Τότε, εκτός από τον Περιεκτικό Χώρο $\mathrm{T}(\mathbf{M}, \mathrm{R})$ μπορούμε επίσης να θεωρήσουμε τον Περιεκτικό Χώρο $\mathrm{T}(\mathbf{M}|_{\mathbf{Q}}, \mathrm{R}|_{\mathbf{Q}})$ της δικτυωμένης οικογένειας $\mathbf{Q}$ που αντιστοιχεί στο συν-σημάδι

$$\mathbf{M}|_{\mathbf{Q}} \equiv \{\{U_\delta^{Q^X} \equiv U_\delta^X \cap Q^X : \delta \in \tau\} : Q^X \in \mathbf{Q}\}$$

και στην $\mathbf{M}|_{\mathbf{Q}}$-επιτρεπτή οικογένεια

$$\mathrm{R}|_{\mathbf{Q}} \equiv \{\sim^s|_{\mathbf{Q}} : s \in \mathcal{F}\}.$$

Ο Περιεκτικός Χώρος $\mathrm{T}(\mathbf{M}|_{\mathbf{Q}}, \mathrm{R}|_{\mathbf{Q}})$ συμβολίζεται επίσης με $\mathrm{T}|_{\mathbf{Q}}$.

Έστω $\mathbf{H} \in \mathrm{C}^{\diamondsuit}(\mathrm{R})$ και $\mathbf{H}|_{\mathbf{Q}}$ το ίχνος του $\mathbf{H}$ επί του $\mathbf{Q}$. Τότε, μπορούμε να θεωρήσουμε τον υπόχωρο $\mathrm{T}(\mathbf{M}|_{\mathbf{Q}}, \mathrm{R}|_{\mathbf{Q}}, \mathbf{H}|_{\mathbf{Q}})$ του $\mathrm{T}(\mathbf{M}|_{\mathbf{Q}}, \mathrm{R}|_{\mathbf{Q}})$ τον οποίο συμβολίζουμε επίσης με $\mathrm{T}(\mathbf{H}|_{\mathbf{Q}})$. Επίσης, για κάθε $\delta \in \tau$ μπορούμε να θεωρήσουμε το σύνολο

$$U_\delta^{\mathrm{T}|_{\mathbf{Q}}}(\mathbf{H}|_{\mathbf{Q}}) \equiv \{\mathbf{a} \in \mathrm{T}|_{\mathbf{Q}} : \text{υπάρχει } (x, Q^X) \in \mathbf{a} \text{ με } Q^X \in \mathbf{H}|_{\mathbf{Q}} \text{ και } x \in U_\delta^{Q^X}\}.$$

Για τον Περιεκτικό Χώρο $\mathrm{T}|_{\mathbf{Q}}$ η πρότυπη, η κ-πρότυπη, η $\diamondsuit$-πρότυπη και η $(\diamondsuit, \kappa)$-πρότυπη βάση, όπου $\kappa \subseteq \tau$, συμβολίζονται αντίστοιχα με $\mathrm{B}^{\mathrm{T}|_{\mathbf{Q}}}$, $\mathrm{B}_\kappa^{\mathrm{T}|_{\mathbf{Q}}}$, $\mathrm{B}_\diamondsuit^{\mathrm{T}|_{\mathbf{Q}}}$ και $\mathrm{B}_{\diamondsuit,\kappa}^{\mathrm{T}|_{\mathbf{Q}}}$. Εάν $\mathbf{L}|_{\mathbf{Q}} \in \mathrm{C}^{\diamondsuit}(\mathrm{R}|_{\mathbf{Q}})$, τότε με $\mathrm{B}^{\mathbf{L}|_{\mathbf{Q}}}$, $\mathrm{B}_\kappa^{\mathbf{L}|_{\mathbf{Q}}}$, $\mathrm{B}_\diamondsuit^{\mathbf{L}|_{\mathbf{Q}}}$ και $\mathrm{B}_{\diamondsuit,\kappa}^{\mathbf{L}|_{\mathbf{Q}}}$ συμβολίζουμε τις αντίστοιχες βάσεις του υποχώρου $\mathrm{T}(\mathbf{H}|_{\mathbf{Q}})$ του $\mathrm{T}|_{\mathbf{Q}}$.

2.4.17 Συμφωνία. Σε ό,τι ακολουθεί υποθέτουμε ότι έχει δοθεί μια $(\mathbf{M}, \mathbf{Q})$-επιτρεπτή $\mathcal{F}$-δικτυωμένη οικογένεια

$$\mathrm{R} \equiv \{\sim^s : s \in \mathcal{F}\}$$

από σχέσεις ισοδυναμίας επί της $\mathbf{S}$.

2.4.18 Πρόταση. Για κάθε $\mathbf{b} \in \mathrm{T}|_{\mathbf{Q}}$ υπάρχει ένα και μόνον ένα $\mathbf{a} \in \mathrm{T}$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in Q^X$ να ισχύει η ισοδυναμία

$$(x, Q^X) \in \mathbf{b} \Leftrightarrow (x, X) \in \mathbf{a}.$$

2.4.19 Συμβολισμός. Συμβολίζουμε με $e_{\mathrm{T}}^{\mathrm{T}|_{\mathbf{Q}}}$ την απεικόνιση από το χώρο $\mathrm{T}|_{\mathbf{Q}}$ στο χώρο T που ορίζεται ως εξής:

$$e_{\mathrm{T}}^{\mathrm{T}|_{\mathbf{Q}}}(\mathbf{b}) = \mathbf{a}.$$

2.4.20 Πρόταση. Έστω $\delta \in \tau$, $\mathbf{H} \in \mathrm{C}^{\diamondsuit}(\mathrm{R})$ και $\mathbf{H}|_{\mathbf{Q}}$ το ίχνος του $\mathbf{H}$ επί του $\mathbf{Q}$. Τότε,

$$\mathbf{b} \in U_\delta^{\mathrm{T}|_{\mathbf{Q}}}(\mathbf{H}|_{\mathbf{Q}}) \Leftrightarrow \mathbf{a} \equiv e_{\mathrm{T}}^{\mathrm{T}|_{\mathbf{Q}}}(\mathbf{b}) \in U_\delta^{\mathrm{T}}(\mathbf{H}).$$

2.4.21 Πρόταση. Η απεικόνιση $e_{\mathrm{T}}^{\mathrm{T}|_{\mathbf{Q}}}$ είναι μια εμφύτευση του χώρου $\mathrm{T}|_{\mathbf{Q}}$ στο χώρο T.

2.4.22 Ορισμός. Η απεικόνιση $e_{\mathrm{T}}^{\mathrm{T}|_{\mathbf{Q}}}$ καλείται **φυσική εμφύτευση** (natural embedding) του $\mathrm{T}(\mathbf{M}|_{\mathbf{Q}}, \mathrm{R}|_{\mathbf{Q}})$ στο $\mathrm{T}(\mathbf{M}, \mathrm{R})$.

2.4.23 Παρατήρηση. Από την Πρόταση 2.4.21 προκύπτει ότι οι χώροι $\mathrm{T}|_{\mathbf{Q}}$ και $e_{\mathrm{T}}^{\mathrm{T}|_{\mathbf{Q}}}(\mathrm{T}|_{\mathbf{Q}})$ είναι ομοιόμορφοι. Συνεπώς, τοπολογικά οι χώροι αυτοί διαφέρουν μόνο στην ονομασία των στοιχείων τους. Ταυτίζουμε λοιπόν το χώρο $\mathrm{T}|_{\mathbf{Q}}$ με την εικόνα του μέσω της $e_{\mathrm{T}}^{\mathrm{T}|_{\mathbf{Q}}}$ και θεωρούμε ότι ο χώρος $\mathrm{T}|_{\mathbf{Q}}$ είναι υπόχωρος του T. Δηλαδή,

$$\mathrm{T}|_{\mathbf{Q}} \equiv e_{\mathrm{T}}^{\mathrm{T}|_{\mathbf{Q}}}(\mathrm{T}|_{\mathbf{Q}}) \subseteq \mathrm{T}.$$

Επίσης, θεωρούμε ότι η εμφύτευση $e_{\mathrm{T}}^{\mathrm{T}|_{\mathbf{Q}}}$ είναι η ταυτοτική εμφύτευση του $\mathrm{T}|_{\mathbf{Q}}$ στο T.

2.4.24 Ορισμός. Το υποσύνολο $\mathrm{T}|_{\mathbf{Q}}$ του T καλείται **ιδιάζων** (specific) υποσύνολο του Περιεκτικού Χώρου $\mathrm{T}(\mathbf{M}, \mathrm{R})$.

2.4.25 Παρατήρηση. Έστω $X \in \mathbf{S}$ και $e_X^{Q^X}$ η ταυτοτική εμφύτευση του Q^X στο X. Τότε,

$$e_{\mathrm{T}}^{\mathrm{T}|_{\mathbf{Q}}} \circ e_{\mathrm{T}|_{\mathbf{Q}}}^{Q^X} = e_{\mathrm{T}}^{X} \circ e_X^{Q^X}.$$

$$\begin{tikzcd}
Q^X \arrow[r, "e_{\mathrm{T}|_{\mathbf{Q}}}^{Q^X}"] \arrow[d, "e_X^{Q^X}"'] \arrow[dr] & \mathrm{T}|_{\mathbf{Q}} \arrow[d, "e_{\mathrm{T}}^{\mathrm{T}|_{\mathbf{Q}}}"] \\
X \arrow[r, "e_{\mathrm{T}}^{X}"'] & \mathrm{T}
\end{tikzcd}$$

2.4.26 Πρόταση. Έστω $\mathbf{H} \in \mathrm{C}^{\diamondsuit}(\mathrm{R})$. Τα παρακάτω είναι αληθή.

(1) $\mathrm{T}|_{\mathbf{Q}} = \cup\{e_{\mathrm{T}}^{X}(Q^X) : X \in \mathbf{S}\}$.

(2) $\mathrm{T}(\mathbf{H}|_{\mathbf{Q}}) = \cup\{e_{\mathrm{T}}^{X}(Q^X) : X \in \mathbf{H}\}$.

2.4.27 Πρόταση. Έστω $\delta \in \tau$ και $\mathbf{H} \in \mathrm{C}^{\diamondsuit}(\mathrm{R})$. Τα παρακάτω είναι αληθή.

(1) $\mathrm{T}(\mathbf{M}|_{\mathbf{Q}}, \mathrm{R}|_{\mathbf{Q}}, \mathbf{H}|_{\mathbf{Q}}) = \mathrm{T}(\mathbf{M}|_{\mathbf{Q}}, \mathrm{R}|_{\mathbf{Q}}) \cap \mathrm{T}(\mathbf{H})$.

(2) $\mathrm{T}|_{\mathbf{Q}} \cap U_{\delta}^{\mathrm{T}}(\mathbf{H}) = U_{\delta}^{\mathrm{T}|_{\mathbf{Q}}}(\mathbf{H}|_{\mathbf{Q}})$.

2.4.28 Ορισμός. Ένας περιορισμός $\mathbf{F} \equiv \{F^X : X \in \mathbf{S}\}$ της $\mathbf{S}$ καλείται $(\mathbf{M}, \mathrm{R})$-**πλήρης περιορισμός** ($(\mathbf{M}, \mathrm{R})$-complete restriction), εάν η οικογένεια R είναι $(\mathbf{M}, \mathbf{F})$-επιτρεπτή και το υποσύνολο $\mathrm{T}|_{\mathbf{F}}$ του T ικανοποιεί την παρακάτω συνθήκη: για κάθε $\mathbf{a} \in \mathrm{T}|_{\mathbf{F}}$ και για κάθε $(x, X) \in \mathbf{a}$ έχουμε $x \in F^X$.

2.4.29 Συμβολισμοί. Θεωρούμε τους παρακάτω περιορισμούς της $\mathbf{S}$:

$\mathbf{Cl}(\mathbf{Q}) \equiv \{\mathrm{Cl}_X(Q^X) : X \in \mathbf{S}\}$,

$\mathbf{Bd}(\mathbf{Q}) \equiv \{\mathrm{Bd}_X(Q^X) : X \in \mathbf{S}\}$,

$\mathbf{Int}(\mathbf{Q}) \equiv \{\mathrm{Int}_X(Q^X) : X \in \mathbf{S}\}$ και

$\mathbf{Co}(\mathbf{Q}) \equiv \{X \setminus Q^X : X \in \mathbf{S}\}$.

2.4.30 Ορισμός. Ένας περιορισμός $\mathbf{F} \equiv \{F^X : X \in \mathbf{S}\}$ της $\mathbf{S}$ καλείται **κλειστός** (αντίστοιχα, **ανοικτός**), εάν για κάθε $X \in \mathbf{S}$ το F^X είναι κλειστό (αντίστοιχα, ανοικτό) υποσύνολο του X.

2.4.31 Πρόταση. Υποθέτουμε ότι ο $\mathbf{Q}$ είναι κλειστός περιορισμός της $\mathbf{S}$. Τότε, ισχύουν τα εξής:

(1) Το υποσύνολο $\mathrm{T}|_{\mathbf{Q}}$ του T είναι κλειστό.

(2) Εάν η R είναι $(\mathbf{M}, \mathbf{Co}(\mathbf{Q}))$-επιτρεπτή, τότε $\mathrm{T}|_{\mathbf{Co}(\mathbf{Q})} = \mathrm{T} \setminus \mathrm{T}|_{\mathbf{Q}}$.

(3) Ο περιορισμός $\mathbf{Q}$ είναι $(\mathbf{M}, \mathrm{R})$-πλήρης περιορισμός.

2.4.32 Πρόταση. Υποθέτουμε ότι ο $\mathbf{Q}$ είναι ανοικτός περιορισμός της $\mathbf{S}$ και ότι η οικογένεια R είναι $(\mathbf{M}, \mathbf{Co}(\mathbf{Q}))$-επιτρεπτή. Τότε, ισχύουν τα εξής:

(1) Το υποσύνολο $\mathrm{T}|_{\mathbf{Q}}$ του T είναι ανοικτό.

(2) $\mathrm{T}|_{\mathbf{Co}(\mathbf{Q})} = \mathrm{T} \setminus \mathrm{T}|_{\mathbf{Q}}$.

(3) Ο περιορισμός $\mathbf{Q}$ είναι $(\mathbf{M}, \mathrm{R})$-πλήρης περιορισμός.

2.4.33 Πρόταση. Υποθέτουμε ότι η οικογένεια R είναι $(\mathbf{M}, \mathbf{Cl}(\mathbf{Q}))$-επιτρεπτή. Τότε,

$$\mathrm{T}|_{\mathbf{Cl}(\mathbf{Q})} = \mathrm{Cl}_{\mathrm{T}}(\mathrm{T}|_{\mathbf{Q}}).$$

2.4.34 Πρόταση. Υποθέτουμε ότι ο $\mathbf{Q}$ είναι $(\mathbf{M}, \mathrm{R})$-πλήρης περιορισμός και ότι η οικογένεια R είναι $(\mathbf{M}, \mathbf{Int}(\mathbf{Q}))$-επιτρεπτή και $(\mathbf{M}, \mathbf{Co}(\mathbf{Int}(\mathbf{Q})))$-επιτρεπτή. Τότε,

$$\mathrm{T}|_{\mathbf{Int}(\mathbf{Q})} = \mathrm{Int}_{\mathrm{T}}(\mathrm{T}|_{\mathbf{Q}}).$$

2.4.35 Πρόταση. Υποθέτουμε ότι ο $\mathbf{Q}$ είναι $(\mathbf{M}, \mathrm{R})$-πλήρης περιορισμός και ότι η οικογένεια R είναι $(\mathbf{M}, \mathbf{Cl}(\mathbf{Q}))$-επιτρεπτή, $(\mathbf{M}, \mathbf{Int}(\mathbf{Q}))$-επιτρεπτή, $(\mathbf{M}, \mathbf{Co}(\mathbf{Int}(\mathbf{Q})))$-επιτρεπτή και $(\mathbf{M}, \mathbf{Bd}(\mathbf{Q}))$-επιτρεπτή. Τότε,

$$\mathrm{T}|_{\mathbf{Bd}(\mathbf{Q})} = \mathrm{Bd}_{\mathrm{T}}(\mathrm{T}|_{\mathbf{Q}}).$$

2.4.36 Πρόταση. Υποθέτουμε ότι ο $\mathbf{Q}$ είναι $(\mathbf{M}, \mathrm{R})$-πλήρης περιορισμός και ότι η οικογένεια R είναι $(\mathbf{M}, \mathbf{Co}(\mathbf{Q}))$-επιτρεπτή. Τότε, ο $\mathbf{Co}(\mathbf{Q})$ είναι $(\mathbf{M}, \mathrm{R})$-πλήρης περιορισμός και

$$\mathrm{T}|_{\mathbf{Co}(\mathbf{Q})} = \mathrm{T} \setminus \mathrm{T}|_{\mathbf{Q}}.$$

Κεφάλαιο 3

Κορεσμένες κλάσεις

Στο κεφάλαιο αυτό δίνεται ο ορισμός της κορεσμένης κλάσης χώρων. Μια κλάση χώρων $\mathbb{P}$ είναι κορεσμένη όταν για κάθε δικτυωμένη οικογένεια $\mathbf{S}$ από χώρους που ανήκουν στην $\mathbb{P}$ ο Περιεκτικός Χώρος $\mathrm{T}(\mathbf{M}, \mathrm{R})$ ανήκει στην κλάση $\mathbb{P}$ για «σχεδόν όλα» τα συν-σημάδια $\mathbf{M}$ και τις οικογένειες R. Συνεπώς, στην περίπτωση αυτή, οι Περιεκτικοί Χώροι $\mathrm{T}(\mathbf{M}, \mathrm{R})$ θα είναι καθολικοί για την κλάση $\mathbb{P}$.

Στο κεφάλαιο αυτό εκτός από την έννοια της κορεσμένης κλάσης χώρων δίνεται και η έννοια της κορεσμένης κλάσης χώρων που έχουν μια «δομή». Κλάσεις χώρων με δομή είναι *οι κλάσεις υποσυνόλων*, *οι κλάσεις βάσεων* και *οι κλάσεις* p-*βάσεων*. Για αυτές τις κλάσεις δίνεται η έννοια του καθολικού στοιχείου.

Οι κορεσμένες κλάσεις έχουν φυσικά την *ιδιότητα της καθολικότητας*, δηλαδή σε κάθε κορεσμένη κλάση υπάρχει καθολικό στοιχείο. Ωστόσο, οι κορεσμένες κλάσεις χώρων έχουν «κάτι παραπάνω» από την ύπαρξη καθολικών χώρων. Για παράδειγμα, οι κορεσμένες κλάσεις έχουν την *ιδιότητα της τομής*, δηλαδή η τομή (το πολύ τ το πλήθος) κορεσμένων κλάσεων είναι επίσης μια κορεσμένη κλάση, παρόλο που η τομή κλάσεων που έχουν καθολικά στοιχεία μπορεί να μην έχει καθολικό στοιχείο.

Όλοι οι ορισμοί και οι προτάσεις του κεφαλαίου αυτού βρίσκονται στο βιβλίο [37].

3.1 Κορεσμένες κλάσεις χώρων

Στην ενότητα αυτή υποθέτουμε ότι όλες οι κλάσεις χώρων είναι τοπολογικές.

3.1.1 Ορισμός. Έστω $\mathbf{S}$ μια μη κενή δικτυωμένη οικογένεια $\mathbf{S}$ σημαδεμένων τοπολογικών χώρων και

$$\mathbf{M} \equiv \{\{U_\delta^X : \delta \in \tau\} : X \in \mathbf{S}\},$$

$$\mathbf{M}^+ \equiv \{\{V_\delta^X : \delta \in \tau\} : X \in \mathbf{S}\}$$

δύο συν-σημάδια της $\mathbf{S}$. Λέμε ότι το $\mathbf{M}$ είναι **συν-επέκταση** (co-extension) του $\mathbf{M}^+$, εάν υπάρχει μια 1-1 συνάρτηση $\theta : \tau \to \tau$ τέτοια ώστε για κάθε $X \in \mathbf{S}$ και για κάθε $\delta \in \tau$ να έχουμε $V^X_\delta = U^X_{\theta(\delta)}$. Η συνάρτηση θ καλείται **ενδεικτική συνάρτηση** της συν-επέκτασης ή **ενδεικτική συνάρτηση από το $\mathbf{M}^+$ στο $\mathbf{M}$**.

3.1.2 Παρατήρηση. Σημειώνουμε ότι η συνάρτηση θ, εν γένει, δεν είναι μοναδική.

3.1.3 Παρατήρηση. Έστω $\mathbf{S}$ μια μη κενή δικτυωμένη οικογένεια $\mathbf{S}$ σημαδεμένων τοπολογικών χώρων και

$$\mathbf{M}_0 \equiv \{\{U^X_\delta : \delta \in \tau\} : X \in \mathbf{S}\},$$
$$\mathbf{M}_1 \equiv \{\{V^X_\delta : \delta \in \tau\} : X \in \mathbf{S}\},$$
$$\mathbf{M}_2 \equiv \{\{W^X_\delta : \delta \in \tau\} : X \in \mathbf{S}\}$$

τρία συν-σημάδια της $\mathbf{S}$. Εάν το $\mathbf{M}_0$ είναι συν-επέκταση του $\mathbf{M}_1$ και το $\mathbf{M}_1$ είναι συν-επέκταση του $\mathbf{M}_2$, τότε το $\mathbf{M}_0$ είναι συν-επέκταση του $\mathbf{M}_2$ (μεταβατική ιδιότητα).

Πράγματι, επειδή το συν-σημάδι $\mathbf{M}_0$ είναι συν-επέκταση του $\mathbf{M}_1$, υπάρχει μια 1-1 συνάρτηση $\theta : \tau \to \tau$ τέτοια ώστε για κάθε $X \in \mathbf{S}$ και για κάθε $\delta \in \tau$, $V^X_\delta = U^X_{\theta(\delta)}$. Επίσης, επειδή το συν-σημάδι $\mathbf{M}_1$ είναι συν-επέκταση του $\mathbf{M}_2$, υπάρχει μια 1-1 συνάρτηση $\phi : \tau \to \tau$ τέτοια ώστε για κάθε $X \in \mathbf{S}$ και για κάθε $\delta \in \tau$, $W^X_\delta = V^X_{\phi(\delta)}$. Θέτουμε $\psi = \theta \circ \phi : \tau \to \tau$. Η ψ είναι 1-1 και επιπλέον για κάθε $X \in \mathbf{S}$ και για κάθε $\delta \in \tau$,

$$W^X_\delta = V^X_{\phi(\delta)} = U^X_{\theta(\phi(\delta))} = U^X_{(\theta\circ\phi)(\delta)} = U^X_{\psi(\delta)}.$$

3.1.4 Ορισμός. Μια κλάση χώρων $\mathbb{P}$ καλείται **κορεσμένη** (saturated), εάν για κάθε δικτυωμένη οικογένεια $\mathbf{S}$ από χώρους που ανήκουν στην $\mathbb{P}$ υπάρχει ένα συν-σημάδι $\mathbf{M}^+$ της $\mathbf{S}$ έτσι ώστε για κάθε συν-σημάδι $\mathbf{M}$ της $\mathbf{S}$, που είναι συν-επέκταση του $\mathbf{M}^+$, να υπάρχει μια $\mathbf{M}$-επιτρεπτή οικογένεια R^+ από σχέσεις ισοδυναμίας επί της $\mathbf{S}$ τέτοια ώστε για κάθε επιτρεπτή οικογένεια R από σχέσεις ισοδυναμίας επί της $\mathbf{S}$, που είναι τελικώς λεπτότερη της R^+, και κάθε $\mathbf{L} \in \mathrm{C}^\diamondsuit(\mathrm{R})$ να έχουμε ότι $\mathrm{T}(\mathbf{L}) \in \mathbb{P}$.

Το συν-σημάδι $\mathbf{M}^+$ καλείται **αρχικό συν-σημάδι** (initial co-mark) της $\mathbf{S}$ (που αντιστοιχεί στην κλάση $\mathbb{P}$) και η οικογένεια R^+ καλείται **αρχική οικογένεια** της $\mathbf{S}$ (που αντιστοιχεί στο συν-σημάδι $\mathbf{M}$ και στην κλάση $\mathbb{P}$). Η κενή κλάση χώρων θεωρείται κορεσμένη.

3.1.5 Πρόταση. Έστω $\mathbf{S}$ μια μη κενή δικτυωμένη οικογένεια $\mathbf{S}$ σημαδεμένων τοπολογικών χώρων.

(1) Υποθέτουμε ότι το πολύ τ το πλήθος επιτρεπτές οικογένειες από σχέσεις ισοδυναμίας επί της $\mathbf{S}$ είναι δοσμένες. Τότε, υπάρχει μια επιτρεπτή οικογένεια από σχέσεις ισοδυναμίας επί της $\mathbf{S}$, η οποία είναι τελικώς λεπτότερη από κάθε δοσμένη οικογένεια.

(2) Υποθέτουμε ότι το πολύ τ το πλήθος συν-σημάδια της $\mathbf{S}$ έχουν δοθεί. Τότε, υπάρχει ένα συν-σημάδι της $\mathbf{S}$, το οποίο είναι συν-επέκταση από κάθε δοσμένο συν-σημάδι.

3.1.6 Πρόταση. Η τομή το πολύ τ το πλήθος κορεσμένων κλάσεων χώρων είναι επίσης μια κορεσμένη κλάση χώρων.

Έστω $\mathbb{P}$ μια κορεσμένη κλάση χώρων. Επειδή η $\mathbb{P}$ είναι τοπολογική, υπάρχει μια οικογένεια $\mathbf{S}$ από χώρους που ανήκουν στην $\mathbb{P}$ έτσι ώστε κάθε χώρος που ανήκει στην $\mathbb{P}$ να είναι ομοιόμορφος με ένα χώρο που ανήκει στην $\mathbf{S}$. Επίσης, επειδή η $\mathbb{P}$ είναι κορεσμένη υπάρχει ένα συν-σημάδι $\mathbf{M}$ της $\mathbf{S}$ και μια $\mathbf{M}$-επιτρεπτή οικογένεια R από σχέσεις ισοδυναμίας επί της $\mathbf{S}$ ώστε $\mathrm{T}(\mathbf{M}, \mathrm{R}) = \mathrm{T} \in \mathbb{P}$.

Ο Περιεκτικός Χώρος T της οικογένειας $\mathbf{S}$ που αντιστοιχεί στο συν-σημάδι $\mathbf{M}$ και στην οικογένεια R είναι καθολικός για την κλάση $\mathbb{P}$. Πράγματι, επειδή $\mathrm{T} \in \mathbb{P}$, αρκεί να δείξουμε ότι κάθε χώρος $Z \in \mathbb{P}$ περιέχεται τοπολογικά στο χώρο T. Έστω $Z \in \mathbb{P}$ και X το στοιχείο της $\mathbf{S}$ που είναι ομοιόμορφο με το Z. Συμβολίζουμε με h έναν ομοιομορφισμό του Z επί του X και θεωρούμε τη φυσική εμφύτευση e_{T}^{X} του X στο T. Η απεικόνιση $e \equiv e_{T}^{X} \circ h$ είναι μια εμφύτευση του Z στο T.

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "e"'] & X \arrow[d, "e_T^X"] \\ & \mathrm{T} \end{tikzcd}$$

3.1.7 Πρόταση. Κάθε μη κενή κορεσμένη κλάση χώρων έχει καθολικό χώρο.

3.1.8 Παραδείγματα κορεσμένων κλάσεων χώρων.

(1) Η κλάση όλων των T_0-χώρων με βάρος $\leq \tau$.

(2) Η κλάση όλων των κανονικών χώρων με βάρος $\leq \tau$.

(3) Η κλάση όλων των Tychonoff χώρων με βάρος $\leq \tau$.

3.2 Κορεσμένες κλάσεις υποσυνόλων

3.2.1 Ορισμός. Με τον όρο **κλάση υποσυνόλων** εννοούμε μια κλάση $\mathbb{P}$ που αποτελείται από ζεύγη (Q, X), όπου Q είναι ένα υποσύνολο ενός χώρου X. Μια κλάση υποσυνόλων $\mathbb{P}$ καλείται **τοπολογική**, εάν για κάθε ομοιομορφισμό $h : X \to Y$ η συνθήκη $(Q, X) \in \mathbb{P}$ συνεπάγεται ότι $(h(Q), Y) \in \mathbb{P}$.

Σε ό,τι ακολουθεί υποθέτουμε ότι όλες οι κλάσεις υποσυνόλων είναι τοπολογικές.

3.2.2 Ορισμός. Έστω $\mathbb{P}$ μια κλάση υποσυνόλων. Ο περιορισμός $\mathbf{Q} = \{Q^X : X \in \mathbf{S}\}$ μιας δικτυωμένης οικογένειας $\mathbf{S}$ τοπολογικών χώρων καλείται **$\mathbb{P}$-περιορισμός** ($\mathbb{P}$-restriction), εάν $(Q^X, X) \in \mathbb{P}$ για κάθε $X \in \mathbf{S}$.

3.2.3 Ορισμός. Μια μη κενή κλάση υποσυνόλων $\mathbb{P}$ καλείται **κορεσμένη** (saturated), εάν για κάθε δικτυωμένη οικογένεια $\mathbf{S}$ από χώρους και για κάθε $\mathbb{P}$-περιορισμό $\mathbf{Q}$ της $\mathbf{S}$ υπάρχει ένα συν-σημάδι $\mathbf{M}^+$ της $\mathbf{S}$ έτσι ώστε για κάθε συν-σημάδι $\mathbf{M}$ της $\mathbf{S}$, που είναι συν-επέκταση του $\mathbf{M}^+$, να υπάρχει μια $(\mathbf{M}, \mathbf{Q})$-επιτρεπτή οικογένεια R^+ από σχέσεις ισοδυναμίας επί της $\mathbf{S}$ τέτοια ώστε για κάθε επιτρεπτή οικογένεια R από σχέσεις ισοδυναμίας επί της $\mathbf{S}$, που είναι τελικώς λεπτότερη της R^+, και κάθε $\mathbf{H}, \mathbf{L} \in \mathrm{C}^{\diamondsuit}(\mathrm{R})$ με $\mathbf{H} \subseteq \mathbf{L}$ να έχουμε ότι $(\mathrm{T}(\mathbf{H}|_{\mathbf{Q}}), \mathrm{T}(\mathbf{L})) \in \mathbb{P}$.

Το συν-σημάδι $\mathbf{M}^+$ καλείται **αρχικό συν-σημάδι** (initial co-mark) της $\mathbf{S}$ (που αντιστοιχεί στον περιορισμό $\mathbf{Q}$ και στην κλάση $\mathbb{P}$) και η οικογένεια R^+ καλείται **αρχική οικογένεια** της $\mathbf{S}$ (που αντιστοιχεί στο συν-σημάδι $\mathbf{M}$, στον περιορισμό $\mathbf{Q}$ και στην κλάση $\mathbb{P}$).

3.2.4 Ορισμός. Έστω $\mathbb{P}$ κλάση υποσυνόλων. Ένα ζεύγος (Q^T, T), όπου Q^T είναι ένα υποσύνολο του χώρου T, καλείται **καθολικό στοιχείο** (universal element) για την κλάση $\mathbb{P}$, όταν:

(1) $(Q^T, T) \in \mathbb{P}$.

(2) Για κάθε $(Q^Z, Z) \in \mathbb{P}$, υπάρχει τοπολογική εμφύτευση $e : Z \to T$ τέτοια ώστε $e(Q^Z) \subseteq Q^T$.

3.2.5 Πρόταση. Η τομή το πολύ τ το πλήθος κορεσμένων κλάσεων υποσυνόλων είναι επίσης μια κορεσμένη κλάση υποσυνόλων.

3.2.6 Πρόταση. Κάθε μη κενή κορεσμένη κλάση υποσυνόλων έχει καθολικό στοιχείο.

3.2.7 Παραδείγματα κορεσμένων κλάσεων υποσυνόλων.

(1) Η κλάση $\mathbb{P}(\mathrm{Cl})$ υποσυνόλων που αποτελείται από όλα τα ζεύγη (Q, X), όπου Q είναι ένα κλειστό υποσύνολο ενός χώρου X.

(2) Η κλάση $\mathbb{P}(\mathrm{Op})$ υποσυνόλων που αποτελείται από όλα τα ζεύγη (Q, X), όπου Q είναι ένα ανοικτό υποσύνολο ενός χώρου X.

(3) Η κλάση $\mathbb{P}(\mathrm{n.dense})$ υποσυνόλων που αποτελείται από όλα τα ζεύγη (Q, X), όπου Q είναι ένα πουθενά πυκνό υποσύνολο ενός χώρου X.

3.2.8 Ορισμός. Ένας περιορισμός $\mathbf{Q}$ μιας δικτυωμένης οικογένειας χώρων $\mathbf{S}$ καλείται **πλήρης** (complete), εάν υπάρχει ένα συν-σημάδι $\mathbf{M}$ της $\mathbf{S}$ και μια $(\mathbf{M}, \mathbf{Q})$-επιτρεπτή οικογένεια R από σχέσεις ισοδυναμίας επί της $\mathbf{S}$ έτσι ώστε ο $\mathbf{Q}$ να είναι $(\mathbf{M}, \mathrm{R})$-πλήρης περιορισμός.

3.2.9 Ορισμός. Μια κλάση υποσυνόλων $\mathbb{P}$ καλείται **πλήρης** (complete), εάν για κάθε δικτυωμένη οικογένεια $\mathbf{S}$ από χώρους κάθε $\mathbb{P}$-περιορισμός της $\mathbf{S}$ είναι πλήρης.

3.2.10 Παραδείγματα πλήρων κλάσεων υποσυνόλων.
(1) Η κλάση $\mathbb{P}(\mathrm{Cl})$.
(2) Η κλάση $\mathbb{P}(\mathrm{Op})$.
(3) Η κλάση $\mathbb{P}(\mathrm{Cl}) \cap \mathbb{P}(\mathrm{n.dense})$.

3.3 Κορεσμένες κλάσεις βάσεων

3.3.1 Ορισμός. Με τον όρο **κλάση βάσεων** εννοούμε μια κλάση $\mathbb{P}$ που αποτελείται από ζεύγη (B, X), όπου B είναι μια βάση ενός χώρου X με $|B| \leq \tau$. Μια κλάση βάσεων $\mathbb{P}$ καλείται **τοπολογική**, εάν για κάθε ομοιομορφισμό $h : X \to Y$ η συνθήκη $(B, X) \in \mathbb{P}$ συνεπάγεται ότι $(\{h(V) : V \in B\}, Y) \in \mathbb{P}$.

Σε ό,τι ακολουθεί υποθέτουμε ότι όλες οι κλάσεις βάσεων είναι τοπολογικές.

3.3.2 Ορισμός. Έστω $\mathbb{P}$ κλάση βάσεων. Μια βάση B ενός χώρου X καλείται **$\mathbb{P}$-βάση** ($\mathbb{P}$-base), εάν $(B, X) \in \mathbb{P}$.

3.3.3 Ορισμός. Έστω $\mathbf{S}$ μια δικτυωμένη οικογένεια χώρων.
(1) Ένα $\mathbf{S}$-δικτυωμένο σύνολο $\mathbf{B} \equiv \{B^X : X \in \mathbf{S}\}$ από οικογένειες καλείται **συν-βάση της** $\mathbf{S}$ (co-base for $\mathbf{S}$), εάν η B^X είναι μια βάση του X με $|B^X| \leq \tau$.

(2) Ένα $\mathbf{S}$-δικτυωμένο σύνολο $\mathbf{N} \equiv \{N^X : X \in \mathbf{S}\}$ από τ-δικτυωμένες οικογένειες καλείται **συν-δικτύωση** (co-indication) μιας συν-βάσης $\mathbf{B} \equiv \{B^X : X \in \mathbf{S}\}$ της $\mathbf{S}$, εάν το N^X είναι μια δικτύωση του B^X για κάθε $X \in \mathbf{S}$.

(3) Μια συν-βάση $\mathbf{B} \equiv \{B^X : X \in \mathbf{S}\}$ της $\mathbf{S}$ καλείται **$\mathbb{P}$-συν-βάση** ($\mathbb{P}$-co-base), εάν για κάθε $X \in \mathbf{S}$ η οικογένεια B^X είναι μια $\mathbb{P}$-βάση του X.

3.3.4 Ορισμός. Μια μη κενή κλάση βάσεων $\mathbb{P}$ καλείται **κορεσμένη** (saturated), εάν για κάθε δικτυωμένη οικογένεια $\mathbf{S}$ από χώρους, για κάθε $\mathbb{P}$-συν-βάση $\mathbf{B}$ της $\mathbf{S}$ και για κάθε συν-δικτύωση $\mathbf{N}$ της $\mathbf{B}$ υπάρχει ένα συν-σημάδι $\mathbf{M}^+$ της $\mathbf{S}$, συν-επέκταση του $\mathbf{N}$ έτσι ώστε για κάθε συν-σημάδι $\mathbf{M}$ της $\mathbf{S}$, που είναι συν-επέκταση του $\mathbf{M}^+$, να υπάρχει μια $\mathbf{M}$-επιτρεπτή οικογένεια R^+ από σχέσεις ισοδυναμίας επί της $\mathbf{S}$ τέτοια ώστε για κάθε επιτρεπτή οικογένεια R από σχέσεις ισοδυναμίας επί της $\mathbf{S}$, που είναι τελικώς λεπτότερη της R^+, και κάθε $\mathbf{L} \in \mathrm{C}^{\diamondsuit}(\mathrm{R})$ να έχουμε ότι $(\mathrm{B}^{\mathbf{L}}_{\diamondsuit,\theta(\tau)}, \mathrm{T}(\mathbf{L})) \in \mathbb{P}$, όπου θ είναι μια ενδεικτική συνάρτηση από το $\mathbf{N}$ στο $\mathbf{M}$.

Το συν-σημάδι $\mathbf{M}^+$ καλείται **αρχικό συν-σημάδι** (initial co-mark) της $\mathbf{S}$ (που αντιστοιχεί στη συν-δικτύωση $\mathbf{N}$ της $\mathbf{B}$ και στην κλάση $\mathbb{P}$) και η οικογένεια R^+ καλείται **αρχική οικογένεια** της $\mathbf{S}$ (που αντιστοιχεί στο συν-σημάδι $\mathbf{M}$, στη συν-δικτύωση $\mathbf{N}$ της $\mathbf{B}$ και στην κλάση $\mathbb{P}$).

3.3.5 Ορισμός. Έστω $\mathbb{P}$ κλάση βάσεων. Ένα ζεύγος (B^T, T), όπου B^T είναι μια βάση του χώρου T με $|B^T| \leq \tau$, καλείται **καθολικό στοιχείο** (universal element) για την κλάση $\mathbb{P}$, όταν:

(1) $(B^T, T) \in \mathbb{P}$.

(2) Για κάθε $(B^X, X) \in \mathbb{P}$, υπάρχει τοπολογική εμφύτευση $e : X \to T$ τέτοια ώστε $B^X = \{e^{-1}(V) : V \in B^T\}$.

3.3.6 Πρόταση. Η τομή το πολύ τ το πλήθος κορεσμένων κλάσεων βάσεων είναι επίσης μια κορεσμένη κλάση βάσεων.

3.3.7 Πρόταση. Κάθε μη κενή κορεσμένη κλάση βάσεων έχει καθολικό στοιχείο.

3.3.8 Πρόταση. Έστω $\mathbb{P}$ κορεσμένη κλάση βάσεων και $\mathbb{E}$ κορεσμένη κλάση χώρων. Η κλάση

$$\{(B, X) \in \mathbb{P} : X \in \mathbb{E}\}$$

είναι κορεσμένη κλάση βάσεων.

3.4 Κορεσμένες κλάσεις p-βάσεων

3.4.1 Ορισμός. Έστω Q ένα υποσύνολο ενός χώρου X. Μια οικογένεια B από ανοικτά υποσύνολα του X (συμπεριλαμβανομένων των X και $\emptyset$) καλείται **p-βάση για το Q στο X**, εάν το σύνολο $\{Q \cap U : U \in B\}$ είναι μια βάση του υποχώρου Q. Μια p-βάση για το Q στο X καλείται **pos-βάση**, εάν για κάθε $x \in Q$ και για κάθε ανοικτή περιοχή U του x στο X υπάρχει ένα στοιχείο V της B έτσι ώστε $x \in V \subseteq U$. Μια p-βάση για το Q στο X καλείται **ps-βάση**, εάν η οικογένεια B είναι μια βάση του χώρου X.

3.4.2 Ορισμός. Με τον όρο **κλάση p-βάσεων** εννοούμε μια κλάση $\mathbb{P}$ που αποτελείται από τριάδες (Q, B, X), όπου Q είναι ένα υποσύνολο ενός χώρου X και B είναι μια p-βάση για το Q στο X με $|B| \leq \tau$. Μια κλάση p-βάσεων $\mathbb{P}$ καλείται **τοπολογική**, εάν για κάθε ομοιομορφισμό $h : X \to Y$ η συνθήκη $(Q, B, X) \in \mathbb{P}$ συνεπάγεται ότι

$$(h(Q), \{h(V) : V \in B\}, Y) \in \mathbb{P}.$$

Με τον όρο **κλάση pos-βάσεων** (αντίστοιχα, **κλάση ps-βάσεων**) εννοούμε μια κλάση $\mathbb{P}$ p-βάσεων που αποτελείται από τριάδες (Q, B, X), όπου B είναι μια pos-βάση για το Q στο X (αντίστοιχα, μια ps-βάση για το Q στο X).

Σε ό,τι ακολουθεί υποθέτουμε ότι όλες οι κλάσεις p-βάσεων είναι τοπολογικές.

3.4.3 Ορισμός. Έστω $\mathbb{P}$ κλάση p-βάσεων. Μια p-βάση B για ένα υποσύνολο Q ενός χώρου X καλείται **$\mathbb{P}$-p-βάση** ($\mathbb{P}$-p-base), εάν $(Q, B, X) \in \mathbb{P}$.

3.4.4 Ορισμός. Έστω $\mathbf{S}$ μια οικογένεια χώρων και $\mathbf{Q} \equiv \{\mathbf{Q^X} : \mathbf{X} \in \mathbf{S}\}$ ένας περιορισμός της $\mathbf{S}$.

(1) Ένα $\mathbf{S}$-δικτυωμένο σύνολο $\mathbf{B} \equiv \{B^X : X \in \mathbf{S}\}$ από οικογένειες καλείται **συν-p-βάση για τον $\mathbf{Q}$ στο** $\mathbf{S}$ (co-base for $\mathbf{Q}$ in $\mathbf{S}$) (αντίστοιχα, **συν-pos-βάση** ή **συν-ps-βάση για τον $\mathbf{Q}$ στο** $\mathbf{S}$), εάν η B^X είναι μια p-βάση (αντίστοιχα, μια pos-βάση ή ps-βάση) για το Q^X στο X.

(2) Μια συν-p-βάση $\mathbf{B} \equiv \{B^X : X \in \mathbf{S}\}$ για τον $\mathbf{Q}$ στο $\mathbf{S}$ καλείται **$\mathbb{P}$-συν-p-βάση** ($\mathbb{P}$-p-co-base), εάν για κάθε $X \in \mathbf{S}$ η οικογένεια B^X είναι μια $\mathbb{P}$-p-βάση για το Q^X στο X.

3.4.5 Ορισμός. Μια μη κενή κλάση p-βάσεων $\mathbb{P}$ καλείται **κορεσμένη** (saturated), εάν για κάθε δικτυωμένη οικογένεια $\mathbf{S}$ από χώρους, για κάθε περιορισμό $\mathbf{Q}$ της $\mathbf{S}$, για κάθε $\mathbb{P}$-συν-p-βάση $\mathbf{B}$ για τον $\mathbf{Q}$ στο $\mathbf{S}$ και για κάθε συν-δικτύωση $\mathbf{N}$ της $\mathbf{B}$ υπάρχει ένα συν-σημάδι $\mathbf{M}^+$ της $\mathbf{S}$, συν-επέκταση του $\mathbf{N}$ έτσι ώστε για κάθε συν-σημάδι $\mathbf{M}$ της $\mathbf{S}$, που είναι συν-επέκταση του $\mathbf{M}^+$, να υπάρχει μια $(\mathbf{M}, \mathbf{Q})$-επιτρεπτή οικογένεια R^+ από σχέσεις ισοδυναμίας επί της $\mathbf{S}$ τέτοια ώστε για κάθε επιτρεπτή οικογένεια R από σχέσεις ισοδυναμίας επί της $\mathbf{S}$, που είναι τελικώς λεπτότερη της R^+, και κάθε $\mathbf{L}, \mathbf{H}, \mathbf{E} \in \mathrm{C}^{\diamondsuit}(\mathrm{R})$ με $\mathbf{L} \subseteq \mathbf{H} \subseteq \mathbf{E}$ να έχουμε ότι $(\mathrm{T}(\mathbf{E}|_{\mathbf{Q}}), \mathrm{B}^{\mathbf{H}}_{\diamondsuit,\theta(\tau)}, \mathrm{T}(\mathbf{L})) \in \mathbb{P}$, όπου θ είναι μια ενδεικτική συνάρτηση από το $\mathbf{N}$ στο $\mathbf{M}$.

Το συν-σημάδι $\mathbf{M}^+$ καλείται **αρχικό συν-σημάδι** (initial co-mark) της $\mathbf{S}$ (που αντιστοιχεί στον περιορισμό $\mathbf{Q}$, στη συν-δικτύωση $\mathbf{N}$ της $\mathbf{B}$ και στην κλάση $\mathbb{P}$) και η οικογένεια R^+ καλείται **αρχική οικογένεια** της $\mathbf{S}$ (που αντιστοιχεί στο συν-σημάδι $\mathbf{M}$, στον περιορισμό $\mathbf{Q}$, στη συν-δικτύωση $\mathbf{N}$ της $\mathbf{B}$ και στην κλάση $\mathbb{P}$).

3.4.6 Ορισμός. Έστω $\mathbb{P}$ κλάση p-βάσεων. Ένα ζεύγος (Q^T, B^T, T), όπου Q^T είναι ένα υποσύνολο του χώρου X και B^T είναι μια p-βάση για το Q στο X με $|B^T| \leq \tau$, καλείται **καθολικό στοιχείο** (universal element) για την κλάση $\mathbb{P}$, όταν:

(1) $(Q^T, B^T, T) \in \mathbb{P}$.

(2) Για κάθε $(Q^Z, B^Z, Z) \in \mathbb{P}$, υπάρχει τοπολογική εμφύτευση $e : Z \to T$ τέτοια ώστε $e(Q^Z) \subseteq Q^T$ και $B^Z = \{e^{-1}(V) : V \in B^T\}$.

3.4.7 Πρόταση. Η τομή το πολύ τ το πλήθος κορεσμένων κλάσεων p-βάσεων είναι επίσης μια κορεσμένη κλάση p-βάσεων.

3.4.8 Πρόταση. Κάθε μη κενή κορεσμένη κλάση p-βάσεων έχει καθολικό στοιχείο.

3.4.9 Πρόταση. Έστω $\mathbb{P}$ κορεσμένη κλάση p-βάσεων, $\mathbb{F}$ κορεσμένη κλάση υποσυνόλων και $\mathbb{E}$ κορεσμένη κλάση χώρων. Οι κλάσεις

$\{(Q, B, X) \in \mathbb{P} : (Q, X) \in \mathbb{F}\}$,

$\{(Q, B, X) \in \mathbb{P} : Q \in \mathbb{E}\}$ και

$\{(Q, B, X) \in \mathbb{P} : X \in \mathbb{E}\}$

είναι κορεσμένες κλάσεις p-βάσεων.

ΜΕΡΟΣ Β

Κεφάλαιο 4

Διαστάσεις του τύπου Ind

Στην εργασία [56] ορίσθηκαν δύο διαστάσεις dm και Dm στην κλάση όλων των Hausdorff χώρων. Η διάσταση Dm δεν έχει την ιδιότητα της καθολικότητας στην κλάση όλων των διαχωρίσιμων μετρικοποιήσιμων χώρων επειδή η οικογένεια όλων των διαχωρίσιμων μετρικοποιήσιμων χώρων X με $Dm(X) \leq 0$ συμπίπτει με την οικογένεια όλων των totally disconnected χώρων στην οποία δεν υπάρχουν καθολικά στοιχεία (βλέπε [65]).

Στο κεφάλαιο αυτό τροποποιούνται οι διαστάσεις dm και Dm με σκοπό να ορισθούν καινούργιες διαστάσεις που έχουν την ιδιότητα της καθολικότητας. Αυτές οι καινούργιες διαστάσεις συμβολίζονται με $dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu}$ και $Dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu}$, όπου $\mathbb{E}$ είναι μια κλάση χώρων, $\mathbb{K}$ είναι μια κλάση υποσυνόλων και $\mathbb{B}$ είναι μια κλάση βάσεων. Στο κεφάλαιο αυτό μελετώνται οι διαστάσεις $dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu}$ και $Dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu}$ και συγκρίνονται με άλλες γνωστές διαστάσεις. Ειδικότερα, αποδεικνύεται ότι εάν οι κλάσεις $\mathbb{K}, \mathbb{B}$ και $\mathbb{E}$ είναι κορεσμένες, τότε για μια δοσμένη κορεσμένη κλάση $\mathbb{P}$ χώρων και για ένα φυσικό αριθμό κ η κλάση όλων των χώρων X που ανήκουν στην κλάση $\mathbb{P}$ με $dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu}(X) \leq \kappa$ και η κλάση όλων των χώρων X που ανήκουν στην κλάση $\mathbb{P}$ με $Dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu}(X) \leq \kappa$ έχουν καθολικά στοιχεία. Τα αποτελέσματα του κεφαλαίου αυτού είναι όλα πρωτότυπα.

Σε ό,τι ακολουθεί με τη λέξη χώρο θα εννοούμε έναν T_0-χώρο με βάρος $\leq \tau$.

4.1 Οι διαστάσεις dm και Dm

Στην εργασία [56] δύο διαστάσεις dm και Dm ορίσθηκαν και μελετήθηκαν. Στην εργασία [6] οι διαστάσεις αυτές επεκτάθηκαν στην κλάση $\mathcal{O}$ όλων των διατακτικών αριθμών και συμβολίστηκαν με $trdm$ και $trDm$. Παρακάτω δίνονται οι ορισμοί αυτών των επεκτάσεων χρησιμοποιώντας όμως τους αρχικούς συμβολισμούς dm και Dm.

4.1.1 Ορισμός. Θεωρούμε τις συναρτήσεις dm και Dm με πεδίο ορισμού την κλάση όλων των χώρων και πεδίο τιμών την κλάση $\mathcal{O} \cup \{-1, \infty\}$ που ικανοποιούν τις παρακάτω συνθήκες:

(1) $dm(X) = Dm(X) = -1$ εάν και μόνο εάν $X = \emptyset$.

(2) $Dm(X) \leq \alpha$, όπου $\alpha \in \mathcal{O}$, εάν για κάθε ζεύγος διακεκριμένων σημείων x και y του X υπάρχει υποσύνολο L του X που διαχωρίζει τα σύνολα $\{x\}$ και $\{y\}$ με $dm(L) < \alpha$.

(3) $dm(X) \leq \alpha$, όπου $\alpha \in \mathcal{O}$, εάν $X = \cup\{Q_i^X : i \in \omega\}$, όπου το Q_i^X είναι κλειστό υποσύνολο του X με $Dm(Q_i^X) \leq \alpha$, $i \in \omega$.

Επομένως, $dm(X) = \infty$ (αντίστοιχα, $Dm(X) = \infty$) αν και μόνο αν η ανισότητα $dm(X) \leq \alpha$ (αντίστοιχα, $Dm(X) \leq \alpha$) δεν είναι αληθής για κάθε $\alpha \in \mathcal{O}$.

Στις εργασίες [56] και [6] οι διαστάσεις dm και Dm ορίσθηκαν στην κλάση όλων των Hausdorff χώρων. Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει ότι εάν ένας χώρος X δεν είναι Hausdorff, τότε $dm(X) = Dm(X) = \infty$.

4.1.2 Παρατήρηση. Είναι εύκολο να δεί κανείς ότι $Dm(X) = 0$ εάν και μόνο εάν ο χώρος X είναι totally disconnected. Είναι γνωστό ότι στην κλάση όλων των διαχωρίσιμων μετρικοποιήσιμων totally disconnected χώρων δεν υπάρχουν καθολικά στοιχεία (βλέπε [65]).

4.2 Οι διαστάσεις $dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu}$ και $Dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu}$

Σε ό,τι ακολουθεί με ν συμβολίζουμε ένα σταθερό πληθάριθμο τέτοιο ώστε $\omega \leq \nu \leq \tau$.

4.2.1 Ορισμός. Μια κλάση χώρων $\mathbb{E}$ καλείται **$\mathbb{B}$-hereditary-separated**, όπου $\mathbb{B}$ είναι μια κλάση βάσεων, εάν για κάθε $X \in \mathbb{E}$ υπάρχει μια $\mathbb{B}$-βάση $B^X \equiv \{U_\delta : \delta \in \tau\}$ του X έτσι ώστε για κάθε δύο στοιχεία U_{δ_1} και U_{δ_2} της B^X με $\mathrm{Cl}(U_{\delta_1}) \cap \mathrm{Cl}(U_{\delta_2}) = \emptyset$ να υπάρχει ένας υπόχωρος L του X που ανήκει στην κλάση $\mathbb{E}$ και διαχωρίζει τα σύνολα $\mathrm{Cl}(U_{\delta_1})$ και $\mathrm{Cl}(U_{\delta_2})$.

Σημειώνουμε ότι εάν η κλάση $\mathbb{E}$ είναι $\mathbb{B}$-hereditary-separated, τότε $\emptyset \in \mathbb{E}$, το οποίο προκύπτει από το γεγονός ότι το κενό σύνολο είναι το μοναδικό υποσύνολο του X που διαχωρίζει τα στοιχεία $\emptyset$ και X της B^X.

4.2.2 Ορισμός. Έστω $\mathbb{B}$ μια κλάση βάσεων, $\mathbb{E}$ μια $\mathbb{B}$-hereditary-separated κλάση χώρων και $\mathbb{K}$ μια κλάση υποσυνόλων με $(X, X) \in \mathbb{K}$ για κάθε χώρο X. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu}$ και $Dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu}$ με πεδίο ορισμού την κλάση όλων των χώρων και πεδίο τιμών την κλάση $\mathcal{O} \cup \{-1, \infty\}$ που ικανοποιούν τις παρακάτω συνθήκες:

(1) $dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu}(X) = Dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu}(X) = -1$ εάν και μόνο εάν $X \in \mathbb{E}$.

(2) $Dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu}(X) \leq \alpha$, όπου $\alpha \in \mathcal{O}$, εάν υπάρχει μια $\mathbb{B}$-βάση $B^X \equiv \{U_\delta : \delta \in \tau\}$ του X έτσι ώστε για κάθε δύο στοιχεία U_{δ_1} και U_{δ_2} της B^X με $\mathrm{Cl}(U_{\delta_1}) \cap \mathrm{Cl}(U_{\delta_2}) = \emptyset$ να υπάρχει ένας υπόχωρος L του X που διαχωρίζει τα σύνολα $\mathrm{Cl}(U_{\delta_1})$ και $\mathrm{Cl}(U_{\delta_2})$ με $dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu}(L) < \alpha$.

(3) $dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu}(X) \leq \alpha$, όπου $\alpha \in \mathcal{O}$, εάν $X = \cup\{Q^X_i : i \in \nu\}$ ώστε (α) το υποσύνολο Q^X_i του X είναι κλειστό, (β) $(Q^X_i, X) \in \mathbb{K}$ και (γ) $Dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu}(Q^X_i) \leq \alpha$, $i \in \nu$.

Επομένως, $dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu}(X) = \infty$ (αντίστοιχα, $Dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu}(X) = \infty$) εάν και μόνο εάν η ανισότητα $dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu}(X) \leq \alpha$ (αντίστοιχα, $Dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu}(X) \leq \alpha$) δεν είναι αληθής για κάθε $\alpha \in \mathcal{O}$.

4.2.3 Παρατήρηση. (1) Οι συναρτήσεις $dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu}$ και $Dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu}$ είναι καλά ορισμένες. Πράγματι, αρκεί να αποδείξουμε ότι εάν για ένα χώρο X έχουμε

$$Dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu}(X) = dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu}(X) = -1,$$

τότε

$$Dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu}(X) \leq 0 \text{ και } dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu}(X) \leq 0.$$

Εφ' όσον $X \in \mathbb{E}$, η σχέση $Dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu}(X) \leq 0$ προκύπτει άμεσα από το γεγονός ότι η κλάση $\mathbb{E}$ είναι $\mathbb{B}$-hereditary-separated. Η σχέση $dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu}(X) \leq 0$ προκύπτει από το γεγονός ότι $X = \cup\{Q^X_i : i \in \nu\}$, όπου $Q^X_i = X$, $(X, X) \in \mathbb{K}$ και $Dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu}(X) = -1 \leq 0$.

(2) Σε ό,τι ακολουθεί όταν θεωρούμε τις διαστάσεις $dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu}$ και $Dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu}$, θα υποθέτουμε ότι $\mathbb{B}$ είναι μια κλάση βάσεων, $\mathbb{E}$ είναι μια $\mathbb{B}$-hereditary-separated κλάση χώρων και $\mathbb{K}$ είναι μια κλάση υποσυνόλων με $(X, X) \in \mathbb{K}$ για κάθε χώρο X. Στην περίπτωση, όπου $\mathbb{E} = \{\emptyset\}$ αντί για $dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu}$ και $Dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu}$ θα γράφουμε $dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\nu}$ και $Dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\nu}$, αντίστοιχα.

4.3 Σχέσεις μεταξύ των $dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu}$, $Dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu}$ και άλλων διαστάσεων.

4.3.1 Πρόταση. Για κάθε χώρο X έχουμε

$$dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu}(X) \leq Dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu}(X). \tag{4.1}$$

Απόδειξη. Έστω $Dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu}(X) = \alpha \in \{-1, \infty\} \cup \mathcal{O}$. Εάν $\alpha = -1$ ή $\alpha = \infty$, τότε προφανώς η ανισότητα (4.1) ισχύει. Υποθέτουμε ότι $\alpha \in \mathcal{O}$. Τότε,

$$X = \cup\{Q^X_i : i \in \nu\},$$

όπου $Q^X_i = X$, $i \in \nu$. Εφ' όσον

$$(Q^X_i, X) = (X, X) \in \mathbb{K}$$

και

$$Dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu}(Q^X_i) = Dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu}(X) \leq \alpha,$$

από τη συνθήκη (3) του Ορισμού 4.2.2 προκύπτει ότι $dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu}(X) \leq \alpha$. ■

4.3.2 Πρόταση. Για κάθε χώρο X έχουμε

$$Dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu}(X) \in \{-1, \infty\} \cup \tau^+$$

και συνεπώς

$$dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu}(X) \in \{-1, \infty\} \cup \tau^+.$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η πρόταση δεν είναι αληθής. Θα καταλήξουμε σε άτοπο. Έστω α το ελάχιστο στοιχείο του $\mathcal{O} \setminus \tau^+$ τέτοιο ώστε υπάρχει ένας χώρος X με $Dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu}(X) = \alpha$. Θεωρούμε μια $\mathbb{B}$-βάση $B^X \equiv \{U_\delta : \delta \in \tau\}$ του X που ικανοποιεί τη συνθήκη (2) του Ορισμού 4.2.2 και συμβλίζουμε με P το σύνολο των ζευγών $(\delta_1, \delta_2) \in \tau \times \tau$ με

$$\mathrm{Cl}(U_{\delta_1}) \cap \mathrm{Cl}(U_{\delta_2}) = \emptyset.$$

Για κάθε $(\delta_1, \delta_2) \in P$ έστω $L(\delta_1, \delta_2)$ ένα υποσύνολο του X που διαχωρίζει τα σύνολα $\mathrm{Cl}(U_{\delta_1})$ και $\mathrm{Cl}(U_{\delta_2})$ με

$$dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu}(L(\delta_1, \delta_2)) = \beta(\delta_1, \delta_2) < \alpha.$$

Πρώτα υποθέτουμε ότι $\beta(\delta_1, \delta_2) < \tau^+$ για κάθε $(\delta_1, \delta_2) \in P$. Εφ' όσον $|P| \leq \tau$, υπάρχει ένας διατακτικός αριθμός $\beta \in \tau^+$ τέτοιος ώστε $\beta(\delta_1, \delta_2) < \beta$ για κάθε $(\delta_1, \delta_2) \in P$. Τότε, $dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu}(L(\delta_1, \delta_2)) < \beta$ και, από τη συνθήκη (2) του Ορισμού 4.2.2, $Dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu}(X) \leq \beta$, άτοπο.

Τώρα, υποθέτουμε ότι υπάρχει $(\delta_1, \delta_2) \in P$ τέτοιο ώστε $\tau^+ \leq \beta(\delta_1, \delta_2)$. Εφ' όσον $dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu}(L(\delta_1, \delta_2)) = \beta(\delta_1, \delta_2)$, υπάρχουν κλειστά υποσύνολα $Q_i^{L(\delta_1,\delta_2)}$ του $L(\delta_1, \delta_2)$, $i \in \nu$, έτσι ώστε:

(α) $L(\delta_1, \delta_2) = \cup\{Q_i^{L(\delta_1,\delta_2)} : i \in \nu\}$,

(β) $(Q_i^{L(\delta_1,\delta_2)}, L(\delta_1, \delta_2)) \in \mathbb{K}$ και

(γ) $Dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu}(Q_i^{L(\delta_1,\delta_2)}) = \beta_i \leq \beta(\delta_1, \delta_2) < \alpha$.

Εάν $\beta_i < \tau^+$ για κάθε $i \in \nu$, τότε υπάρχει ένας διατακτικός αριθμός $\beta \in \tau^+$ τέτοιος ώστε $\beta_i \leq \beta$, που σημαίνει ότι $Dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu}(Q_i^{L(\delta_1,\delta_2)}) \leq \beta$. Συνεπώς,

$$dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu}(L(\delta_1, \delta_2)) \leq \beta < \tau^+ \leq \beta(\delta_1, \delta_2),$$

άτοπο. Άρα, υπάρχει $i \in \nu$ τέτοιο ώστε

$$\tau^+ \leq Dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu}(Q_i^{L(\delta_1,\delta_2)}) < \alpha.$$

Η τελευταία σχέση αντιφάσκει την επιλογή του διατακτικού αριθμού α. Σε όλες τις περιπτώσεις καταλήξαμε σε άτοπο. Συνεπώς, η πρόταση είναι αληθής. ■

4.3.3 Πρόταση. Έστω X κανονικός χώρος. Τότε,

$$dm(X) \leq dm_{\omega}^{\mathbb{K},\mathbb{B}}(X)$$

και

$$Dm(X) \leq Dm_{\omega}^{\mathbb{K},\mathbb{B}}(X).$$

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε την πρόταση με επαγωγή. Αν $dm_{\omega}^{\mathbb{K},\mathbb{B}}(X) = Dm_{\omega}^{\mathbb{K},\mathbb{B}}(X) = -1$, τότε $X = \emptyset$ και συνεπώς, από τη συνθήκη (1) του Ορισμού 4.1.1, $dm(X) = Dm(X) = -1$. Υποθέτουμε ότι η ανισότητα $Dm(X) \leq Dm_{\omega}^{\mathbb{K},\mathbb{B}}(X)$ είναι αληθής για κάθε κανονικό χώρο X με $Dm_{\omega}^{\mathbb{K},\mathbb{B}}(X) < \alpha$ και η ανισότητα $dm(X) \leq dm_{\omega}^{\mathbb{K},\mathbb{B}}(X)$ είναι αληθής για κάθε κανονικό χώρο X με $dm_{\omega}^{\mathbb{K},\mathbb{B}}(X) < \alpha$, όπου $\alpha \in \mathcal{O}$.

Έστω X ένας κανονικός χώρος με $Dm_{\omega}^{\mathbb{K},\mathbb{B}}(X) = \alpha$. Αποδεικνύουμε ότι $Dm(X) \leq \alpha$. Έστω x και y δύο διακεκριμένα σημεία του X. Υπάρχει μια $\mathbb{B}$-βάση $B^X \equiv \{U_\delta : \delta \in \tau\}$ του X έτσι ώστε για κάθε δύο στοιχεία U_{δ_1} και U_{δ_2} της B^X με $\mathrm{Cl}(U_{\delta_1}) \cap \mathrm{Cl}(U_{\delta_2}) = \emptyset$ να υπάρχει ένας υπόχωρος L του X που διαχωρίζει τα σύνολα $\mathrm{Cl}(U_{\delta_1})$ και $\mathrm{Cl}(U_{\delta_2})$ με $dm_{\omega}^{\mathbb{K},\mathbb{B}}(L) < \alpha$. Εφ' όσον ο χώρος X είναι κανονικός υπάρχουν U_{δ_1}, $U_{\delta_2} \in B^X$ έτσι ώστε: $x \in \mathrm{Cl}(U_{\delta_1})$, $y \in \mathrm{Cl}(U_{\delta_2})$ και $\mathrm{Cl}(U_{\delta_1}) \cap \mathrm{Cl}(U_{\delta_2}) = \emptyset$. Συνεπώς, υπάρχει υπόχωρος L του X που διαχωρίζει τα σύνολα $\mathrm{Cl}(U_{\delta_1})$ και $\mathrm{Cl}(U_{\delta_2})$ με $dm_{\omega}^{\mathbb{K},\mathbb{B}}(L) < \alpha$. Προφανώς, ο L διαχωρίζει τα μονοσύνολα $\{x\}$ και $\{y\}$. Επιπλέον από την υπόθεση της επαγωγής

$$dm(L) \leq dm_{\omega}^{\mathbb{K},\mathbb{B}}(L) < \alpha.$$

Επομένως, από τη συνθήκη (2) του Ορισμού 4.1.1, $Dm(X) \leq \alpha$.

Έστω τώρα X κανονικός χώρος με $dm_{\omega}^{\mathbb{K},\mathbb{B}}(X) = \alpha$. Αποδεικνύουμε ότι $dm(X) \leq \alpha$. Έχουμε

$$X = \cup\{Q_i^X : i \in \omega\},$$

όπου:
(α) το υποσύνολο Q_i^X του X είναι κλειστό,
(β) $(Q_i^X, X) \in \mathbb{K}$ και
(γ) $Dm_{\omega}^{\mathbb{K},\mathbb{B}}(Q_i^X) \leq \alpha$.
Από το πρώτο μέρος της απόδειξης προκύπτει ότι $Dm(Q_i^X) \leq \alpha$, $i \in \omega$. Άρα, από τη συνθήκη (3) του Ορισμού 4.1.1, $dm(X) \leq \alpha$.

Τέλος, η πρόταση είναι προφανής εάν $dm_{\omega}^{\mathbb{K},\mathbb{B}}(X) = Dm_{\omega}^{\mathbb{K},\mathbb{B}}(X) = \infty$. ■

4.3.4 Πρόταση. Έστω X φυσικός χώρος με $Dm_{\nu}^{\mathbb{K},\mathbb{B}}(X) \neq \infty$. Τότε,

$$Dm_{\nu}^{\mathbb{K},\mathbb{B}}(X) \leq \mathrm{Ind}(X).$$

Απόδειξη. Έστω $\mathrm{Ind}(X) = \alpha \in \{-1, \infty\} \cup \mathcal{O}$. Θα αποδείξουμε την πρόταση με επαγωγή στο α. Η πρόταση είναι προφανής εάν $\alpha = -1$ ή $\alpha = \infty$. Έστω $\alpha \in \mathcal{O}$ και υποθέτουμε ότι η πρόταση είναι αληθής για κάθε φυσικό χώρο X με $\mathrm{Ind}(X) < \alpha$. Αποδεικνύουμε την πρόταση για ένα φυσικό χώρο X με $\mathrm{Ind}(X) = \alpha$.

Έστω $B^X \equiv \{U_\delta : \delta \in \tau\}$ μια τυχαία $\mathbb{B}$-βάση του X. Η ύπαρξη μιας τέτοιας βάσης έπεται από τη συνθήκη $Dm_{\nu}^{\mathbb{K},\mathbb{B}}(X) \neq \infty$. Έστω U_{δ_1}, $U_{\delta_2} \in B^X$ με $\mathrm{Cl}(U_{\delta_1}) \cap \mathrm{Cl}(U_{\delta_2}) = \emptyset$. Εφ' όσον $\mathrm{Ind}(X) = \alpha$, υπάρχει κλειστός υπόχωρος L του X που διαχωρίζει τα σύνολα $\mathrm{Cl}(U_{\delta_1})$ και $\mathrm{Cl}(U_{\delta_2})$ τέτοιος ώστε $\mathrm{Ind}(L) < \alpha$ (βλέπε Παρατήρηση 1.2.8). Από την υπόθεση της επαγωγής,

$$Dm_{\nu}^{\mathbb{K},\mathbb{B}}(L) \leq \mathrm{Ind}(L) < \alpha.$$

Από την Πρόταση 4.3.1, έχουμε

$$dm_{\nu}^{\mathbb{K},\mathbb{B}}(L) \leq Dm_{\nu}^{\mathbb{K},\mathbb{B}}(L).$$

Αυτό σημαίνει ότι

$$Dm_{\nu}^{\mathbb{K},\mathbb{B}}(X) \leq \alpha. \blacksquare$$

4.3.5 Πόρισμα. Έστω X φυσικός χώρος με $Dm_{\nu}^{\mathbb{K},\mathbb{B}}(X) \neq \infty$. Τότε,

$$dm_{\nu}^{\mathbb{K},\mathbb{B}}(X) \leq \mathrm{Ind}(X).$$

Απόδειξη. Προκύπτει άμεσα από τις Προτάσεις 4.3.1 και 4.3.4. $\blacksquare$

4.3.6 Πρόταση. Έστω X συμπαγής Hausdorff χώρος με $Dm_{\nu}^{\mathbb{K},\mathbb{B}}(X) \neq \infty$. Τότε, οι συνθήκες $Dm_{\nu}^{\mathbb{K},\mathbb{B}}(X) = 0$ και $\mathrm{Ind}(X) = 0$ είναι ισοδύναμες.

Απόδειξη. Από την Πρόταση 4.3.4, αρκεί να αποδείξουμε ότι εάν $Dm_{\nu}^{\mathbb{K},\mathbb{B}}(X) = 0$, τότε $\mathrm{Ind}(X) = 0$. Έστω $Dm_{\nu}^{\mathbb{K},\mathbb{B}}(X) = 0$ και $B^X \equiv \{U_\delta : \delta \in \tau\}$ μια $\mathbb{B}$-βάση του X έτσι ώστε για κάθε δύο στοιχεία U_{δ_1} και U_{δ_2} της B^X με $\mathrm{Cl}(U_{\delta_1}) \cap \mathrm{Cl}(U_{\delta_2}) = \emptyset$ το κενό σύνολο να διαχωρίζει τα σύνολα $\mathrm{Cl}(U_{\delta_1})$ και $\mathrm{Cl}(U_{\delta_2})$. Αποδεικνύουμε ότι το κενό σύνολο διαχωρίζει κάθε δύο, ξένα μεταξύ τους, κλειστά υποσύνολα του X (βλέπε Παρατήρηση 1.2.8).

Έστω A, B ζεύγος ξένων κλειστών υποσυνόλων του X. Εφ' όσον ο χώρος X είναι φυσικός, υπάρχουν δύο ανοικτά υποσύνολα U και V του X έτσι ώστε: $A \subseteq U \subseteq \mathrm{Cl}(U)$, $B \subseteq V \subseteq \mathrm{Cl}(V)$ και $\mathrm{Cl}(U) \cap \mathrm{Cl}(V) = \emptyset$. Έστω

$$U = \cup\{U_\delta : \delta \in \kappa \subseteq \tau\} \ \text{ και } \ V = \cup\{U_\delta : \delta \in \lambda \subseteq \tau\}.$$

Εφ' όσον τα υποσύνολα A και B του X είναι κλειστά και ο χώρος X είναι συμπαγής, τα A και B είναι συμπαγή. Επομένως, υπάρχουν s, $t \in \mathcal{F}$ έτσι ώστε

$$A \subseteq \cup\{U_\delta : \delta \in s\} \subseteq \cup\{\mathrm{Cl}(U_\delta) : \delta \in s\}$$

και

$$B \subseteq \cup\{U_\delta : \delta \in t\} \subseteq \cup\{\mathrm{Cl}(U_\delta) : \delta \in t\}.$$

Προφανώς, $(\cup\{\mathrm{Cl}(U_\delta) : \delta \in s\}) \cap (\cup\{\mathrm{Cl}(U_\delta) : \delta \in t\}) = \emptyset$ και άρα $\mathrm{Cl}(U_{\delta_1}) \cap \mathrm{Cl}(U_{\delta_2}) = \emptyset$ για κάθε $\delta_1 \in s$ και $\delta_2 \in t$. Συνεπώς, υπάρχουν ανοικτά και συγχρόνως κλειστά υποσύνολα $U_{\delta_1}^{\delta_2}$, $\delta_1 \in s$, $\delta_2 \in t$ του X έτσι ώστε: $\mathrm{Cl}(U_{\delta_1}) \subseteq U_{\delta_1}^{\delta_2}$ και $\mathrm{Cl}(U_{\delta_2}) \subseteq X \setminus U_{\delta_1}^{\delta_2}$ για κάθε $\delta_1 \in s$ και $\delta_2 \in t$.

Θέτουμε

$$W = \cap\{\cup\{U_{\delta_1}^{\delta_2} : \delta_1 \in s\} : \delta_2 \in t\}.$$

Τότε, $A \subseteq W$ και $B \subseteq X \setminus W$. Εφ' όσον τα υποσύνολα $U_{\delta_1}^{\delta_2}$, $\delta_1 \in s$, $\delta_2 \in t$, του X είναι ανοικτά και συγχρόνως κλειστά, το σύνολο W είναι ανοικτό και συγχρόνως κλειστό. Συνεπώς, το κενό σύνολο διαχωρίζει τα A και B, που σημαίνει ότι $\mathrm{Ind}(X) = 0$. ■

4.3.7 Πρόταση. Έστω X συμπαγής Hausdorff χώρος με $Dm_\omega^{\mathbb{K},\mathbb{B}}(X) \neq \infty$. Τότε, οι συνθήκες $dm_\omega^{\mathbb{K},\mathbb{B}}(X) = 0$ και $\mathrm{Ind}(X) = 0$ είναι ισοδύναμες.

Απόδειξη. Εάν $\mathrm{Ind}(X) = 0$, τότε από το Πόρισμα 4.3.5,

$$dm_\omega^{\mathbb{K},\mathbb{B}}(X) = 0.$$

Αντιστρόφως, έστω $dm_\omega^{\mathbb{K},\mathbb{B}}(X) = 0$. Τότε,

$$X = \cup\{Q_i^X : i \in \omega\}$$

έτσι ώστε:
(α) το υποσύνολο Q_i^X του X είναι κλειστό,
(β) $(Q_i^X, X) \in \mathbb{K}$ και
(γ) $Dm_\omega^{\mathbb{K},\mathbb{B}}(Q_i^X) \leq 0$.
Εφ' όσον ο υπόχωρος Q_i^X του X είναι συμπαγής και $Dm_\omega^{\mathbb{K},\mathbb{B}}(Q_i^X) \leq 0$, από την Πρόταση 4.3.6, $\mathrm{Ind}(Q_i^X) \leq 0$. Συνεπώς, από το Θεώρημα 1.2.13, $\mathrm{Ind}(X) = 0$. ■

4.3.8 Πόρισμα. Έστω X συμπαγής Hausdorff χώρος με $Dm_\omega^{\mathbb{K},\mathbb{B}}(X) \neq \infty$. Τότε, οι παρακάτω συνθήκες συνθήκες είναι ισοδύναμες.
(1) $Dm_\omega^{\mathbb{K},\mathbb{B}}(X) = 0$,
(2) $dm_\omega^{\mathbb{K},\mathbb{B}}(X) = 0$ και
(3) $\mathrm{Ind}(X) = 0$.

Απόδειξη. Προκύπτει άμεσα από τις Προτάσεις 4.3.6 και 4.3.7. ■

4.4 Θεωρήματα αθροίσματος και γινομένου

4.4.1 Θεώρημα. Έστω $\mathbb{K}$ κλάση υποσυνόλων τέτοια ώστε $(K, X) \in \mathbb{K}$ για κάθε χώρο X και για κάθε κλειστό υποσύνολο K του X. Εάν ο χώρος X είναι ένωση κλειστών υποσυνόλων F_i, $i \in \nu$, έτσι ώστε $dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu}(F_i) \leq \alpha \in \mathcal{O}$, τότε $dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu}(X) \leq \alpha$.

Απόδειξη. Εφ' όσον $dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu}(F_i) \leq \alpha$, από τη συνθήκη (3) του Ορισμού 4.2.2 προκύπτει ότι $F_i = \cup\{Q^i_j : j \in \nu\}$ έτσι ώστε για κάθε $j \in \nu$ να έχουμε:
(α) το υποσύνολο Q^i_j του F_i είναι κλειστό,
(β) $(Q^i_j, F_i) \in \mathbb{K}$ και
(γ) $Dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu}(Q^i_j) \leq \alpha$.
Εφ' όσον το υποσύνολο Q^i_j του X είναι κλειστό στο X, έχουμε $(Q^i_j, X) \in \mathbb{K}$. Επίσης, $X = \cup\{Q^i_j : i, j \in \nu\}$. Συνεπώς, $dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu}(X) \leq \alpha$. ■

4.4.2 Ορισμός. Λέγεται ότι:
(1) μια κλάση $\mathbb{K}$ υποσυνόλων και
(2) μια κλάση $\mathbb{B}$ βάσεων
είναι **κλειστές ως προς τα γινόμενα**, εάν έχουμε αντίστοιχα:
(1) $(Q^X \times Q^Y, X \times Y) \in \mathbb{K}$ για κάθε (Q^X, X), $(Q^Y, Y) \in \mathbb{K}$ και
(2) $(B^{X\times Y}, X \times Y) \in \mathbb{B}$ για κάθε (B^X, X), $(B^Y, Y) \in \mathbb{B}$, όπου

$$B^{X\times Y} = \{U^X \times U^Y : U^X \in B^X, U^Y \in B^Y\}.$$

4.4.3 Πρόταση. Για κάθε δύο χώρους X και Y έχουμε:

$$Dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\nu}(X \times Y) \leq Dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\nu}(X)(+)Dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\nu}(Y) \tag{4.2}$$

και

$$dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\nu}(X \times Y) \leq dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\nu}(X)(+)dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\nu}(Y), \tag{4.3}$$

όπου $\mathbb{K}$ και $\mathbb{B}$ είναι κλάσεις κλειστές ως προς τα γινόμενα.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε την πρόταση με επαγωγή. Αν $Dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\nu}(X)(+)Dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\nu}(Y) = -1$ ή $dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\nu}(X)(+)dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\nu}(Y) = -1$, τότε $X = Y = \emptyset$ και επομένως $Dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\nu}(X \times Y) = -1$ ή $dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\nu}(X \times Y) = -1$, αντίστοιχα. Υποθέτουμε ότι η ανισότητα (4.2) είναι αληθής για κάθε δύο χώρους X και Y με $Dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\nu}(X)(+)Dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\nu}(Y) < \alpha$ και η ανισότητα (4.3) είναι αληθής για κάθε δύο χώρους X και Y με $dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\nu}(X)(+)dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\nu}(Y) < \alpha$, όπου α είναι ένας σταθερός διατακτικός αριθμός.

Έστω X και Y δύο χώροι με $Dm_\nu^{\mathbb{K},\mathbb{B}}(X)(+)Dm_\nu^{\mathbb{K},\mathbb{B}}(Y) = \alpha$. Αποδεικνύουμε ότι $Dm_\nu^{\mathbb{K},\mathbb{B}}(X \times Y) \leq \alpha$. Εάν $Dm_\nu^{\mathbb{K},\mathbb{B}}(X) = -1$ ή $Dm_\nu^{\mathbb{K},\mathbb{B}}(Y) = -1$, τότε $X \times Y = \emptyset$ και συνεπώς $Dm_\nu^{\mathbb{K},\mathbb{B}}(X \times Y) = -1 < \alpha$. Έστω $Dm_\nu^{\mathbb{K},\mathbb{B}}(X) = \beta$ και $Dm_\nu^{\mathbb{K},\mathbb{B}}(Y) = \gamma$, όπου β, $\gamma \in \mathcal{O}$. Τότε, υπάρχουν $\mathbb{B}$-βάσεις $B^X \equiv \{U_\delta : \delta \in \tau\}$ και $B^Y \equiv \{V_\delta : \delta \in \tau\}$ των X και Y, αντίστοιχα, έτσι ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη (2) του ορισμού 4.2.2. Εφ᾽ όσον η κλάση $\mathbb{B}$ είναι κλειστή ως προς τα γινόμενα, το σύνολο $B^{X \times Y} = \{U_\delta \times V_{\delta'} : \delta, \delta' \in \tau\}$ είναι μια $\mathbb{B}$-βάση του $X \times Y$. Υποθέτουμε ότι $U_{\delta_1} \times V_{\delta'_1}$, $U_{\delta_2} \times V_{\delta'_2} \in B^{X \times Y}$ και

$$\mathrm{Cl}(U_{\delta_1} \times V_{\delta'_1}) \cap \mathrm{Cl}(U_{\delta_2} \times V_{\delta'_2}) = \emptyset.$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} \mathrm{Cl}(U_{\delta_1} \times V_{\delta'_1}) \cap \mathrm{Cl}(U_{\delta_2} \times V_{\delta'_2}) &= (\mathrm{Cl}(U_{\delta_1}) \times \mathrm{Cl}(V_{\delta'_1})) \cap (\mathrm{Cl}(U_{\delta_2}) \times \mathrm{Cl}(V_{\delta'_2})) \\ &= (\mathrm{Cl}(U_{\delta_1}) \cap \mathrm{Cl}(U_{\delta_2})) \times (\mathrm{Cl}(V_{\delta'_1}) \cap \mathrm{Cl}(V_{\delta'_2})) \\ &= \emptyset. \end{aligned}$$

Εάν $\mathrm{Cl}(U_{\delta_1}) \cap \mathrm{Cl}(U_{\delta_2}) = \emptyset$, τότε υπάρχει ένας υπόχωρος L του X που διαχωρίζει τα σύνολα $\mathrm{Cl}(U_{\delta_1})$ και $\mathrm{Cl}(U_{\delta_2})$ με $dm_\nu^{\mathbb{K},\mathbb{B}}(L) < \beta$. Συνεπώς, υπάρχουν δύο ανοικτά υποσύνολα W_{δ_1} και H_{δ_2} του X έτσι ώστε:

(α) $\mathrm{Cl}(U_{\delta_1}) \subseteq W_{\delta_1}$, $\mathrm{Cl}(U_{\delta_2}) \subseteq H_{\delta_2}$,

(β) $W_{\delta_1} \cap H_{\delta_2} = \emptyset$ και

(γ) $X \setminus L = W_{\delta_1} \cup H_{\delta_2}$.

Έστω $W = W_{\delta_1} \times Y$, $H = H_{\delta_2} \times Y$ και $P = L \times Y$. Τότε, έχομε:

$\mathrm{Cl}(U_{\delta_1} \times V_{\delta'_1}) = \mathrm{Cl}(U_{\delta_1}) \times \mathrm{Cl}(V_{\delta'_1}) \subseteq W$,

$\mathrm{Cl}(U_{\delta_2} \times V_{\delta'_2}) = \mathrm{Cl}(U_{\delta_2}) \times \mathrm{Cl}(V_{\delta'_2}) \subseteq H$,

$W \cap H = \emptyset$ και $(X \times Y) \setminus P = W \cup H$,

που σημαίνει ότι το P διαχωρίζει τα σύνολα $\mathrm{Cl}(U_{\delta_1} \times V_{\delta'_1})$ και $\mathrm{Cl}(U_{\delta_2} \times V_{\delta'_2})$ στο χώρο $X \times Y$. Από την Πρόταση 4.3.1, $dm_\nu^{\mathbb{K},\mathbb{B}}(Y) \leq Dm_\nu^{\mathbb{K},\mathbb{B}}(Y)$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} dm_\nu^{\mathbb{K},\mathbb{B}}(L)(+)dm_\nu^{\mathbb{K},\mathbb{B}}(Y) &\leq dm_\nu^{\mathbb{K},\mathbb{B}}(L)(+)Dm_\nu^{\mathbb{K},\mathbb{B}}(Y) \\ &< \beta(+)\gamma = \alpha. \end{aligned}$$

Από την υπόθεση της επαγωγής,

$$dm_\nu^{\mathbb{K},\mathbb{B}}(P) = dm_\nu^{\mathbb{K},\mathbb{B}}(L \times Y) \leq dm_\nu^{\mathbb{K},\mathbb{B}}(L)(+)dm_\nu^{\mathbb{K},\mathbb{B}}(Y) < \alpha.$$

Ανάλογα με το παραπάνω, εάν $\mathrm{Cl}(V_{\delta'_1}) \cap \mathrm{Cl}(V_{\delta'_2}) = \emptyset$, τότε στο χώρο $X \times Y$ μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα υποσύνολο P' που διαχωρίζει τα υποσύνολα $\mathrm{Cl}(U_{\delta_1} \times V_{\delta'_1})$ και $\mathrm{Cl}(U_{\delta_2} \times V_{\delta'_2})$ του $X \times Y$ έτσι ώστε $dm_\nu^{\mathbb{K},\mathbb{B}}(P') < \alpha$. Συνεπώς,

$$Dm_\nu^{\mathbb{K},\mathbb{B}}(X \times Y) \leq \alpha. \tag{4.4}$$

Έστω τώρα X και Y δύο χώροι με $dm_\nu^{\mathbb{K},\mathbb{B}}(X)(+)dm_\nu^{\mathbb{K},\mathbb{B}}(Y) = \alpha$. Αποδεικνύουμε ότι $dm_\nu^{\mathbb{K},\mathbb{B}}(X \times Y) \leq \alpha$. Εάν $dm_\nu^{\mathbb{K},\mathbb{B}}(X) = -1$ ή $dm_\nu^{\mathbb{K},\mathbb{B}}(Y) = -1$, τότε $X \times Y = \emptyset$ και συνεπώς $dm_\nu^{\mathbb{K},\mathbb{B}}(X \times Y) = -1 < \alpha$. Υποθέτουμε ότι $dm_\nu^{\mathbb{K},\mathbb{B}}(X) = \beta$ και $dm_\nu^{\mathbb{K},\mathbb{B}}(Y) = \gamma$, όπου $\beta, \gamma \in \mathcal{O}$. Από τη συνθήκη (3) του Ορισμού 4.2.2, έχουμε:

(α) $X = \cup\{Q_i^X : i \in \nu\}$, όπου το υποσύνολο Q_i^X του X είναι κλειστό, $(Q_i^X, X) \in \mathbb{K}$ και $Dm_\nu^{\mathbb{K},\mathbb{B}}(Q_i^X) \leq \beta$ και

(β) $Y = \cup\{Q_i^Y : i \in \nu\}$, όπου το υποσύνολο Q_i^Y του Y είναι κλειστό, $(Q_i^Y, Y) \in \mathbb{K}$ και $Dm_\nu^{\mathbb{K},\mathbb{B}}(Q_i^Y) \leq \gamma$.

Παρατηρούμε ότι

$$X \times Y = \cup\{Q_i^X \times Q_j^Y : i, j \in \nu\},$$

το υποσύνολο $Q_i^X \times Q_j^Y$ του $X \times Y$ είναι κλειστό και

$$Dm_\nu^{\mathbb{K},\mathbb{B}}(Q_i^X)(+)Dm_\nu^{\mathbb{K},\mathbb{B}}(Q_j^Y) \leq \beta(+)\gamma = \alpha,\ i, j \in \nu.$$

Εφ' όσον η κλάση $\mathbb{K}$ είναι κλειστή ως προς τα γινόμενα, $(Q_i^X \times Q_j^Y, X \times Y) \in \mathbb{K}$. Θέτοντας στη σχέση (4.4) $X = Q_i^X$ και $Y = Q_j^Y$, έχουμε

$$Dm_\nu^{\mathbb{K},\mathbb{B}}(Q_i^X \times Q_j^Y) \leq \alpha,\ i, j \in \nu.$$

Συνεπώς, από τη συνθήκη (3) του Ορισμού 4.2.2,

$$dm_\nu^{\mathbb{K},\mathbb{B}}(X \times Y) \leq \alpha.$$

Προφανώς η πρόταση είναι αληθής εάν

$$Dm_\nu^{\mathbb{K},\mathbb{B}}(X)(+)Dm_\nu^{\mathbb{K},\mathbb{B}}(Y) = dm_\nu^{\mathbb{K},\mathbb{B}}(X)(+)dm_\nu^{\mathbb{K},\mathbb{B}}(Y) = \infty. \blacksquare$$

4.5 Ιδιότητα της καθολικότητας

4.5.1 Συμβολισμός. Για κάθε $\kappa \in \{-1\} \cup \omega$, συμβολίζουμε με

$$\mathbb{P}(dm_{\mathbb{E},\nu}^{\mathbb{K},\mathbb{B}} \leq \kappa) \ \text{ και } \ \mathbb{P}(Dm_{\mathbb{E},\nu}^{\mathbb{K},\mathbb{B}} \leq \kappa)$$

τις κλάσεις όλων των χώρων X με $dm_{\mathbb{E},\nu}^{\mathbb{K},\mathbb{B}}(X) \leq \kappa$ και $Dm_{\mathbb{E},\nu}^{\mathbb{K},\mathbb{B}}(X) \leq \kappa$, αντίστοιχα.

4.5.2 Θεώρημα. Έστω $\mathbb{B}$ μια κορεσμένη κλάση βάσεων, $\mathbb{E}$ μια κορεσμένη $\mathbb{B}$-hereditary-separated κλάση χώρων και $\mathbb{K}$ μια κορεσμένη κλάση υποσυνόλων με $(X, X) \in \mathbb{K}$ για κάθε χώρο X. Τότε, για κάθε $\kappa \in \{-1\} \cup \omega$ οι κλάσεις $\mathbb{P}(dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu} \leq \kappa)$ και $\mathbb{P}(Dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu} \leq \kappa)$ είναι κορεσμένες.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε το θεώρημα με επαγωγή στο κ. Έστω $\kappa = -1$. Τότε, ένας χώρος X ανήκει στην κλάση $\mathbb{P}(Dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu} \leq -1)$ εάν και μόνον εάν ο X ανήκει στην κλάση $\mathbb{E}$, δηλαδή

$$\mathbb{P}(Dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu} \leq -1) = \mathbb{E}.$$

Συνεπώς, η κλάση $\mathbb{P}(Dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu} \leq -1)$ είναι κορεσμένη. Ομοίως, η κλάση $\mathbb{P}(dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu} \leq -1)$ είναι κορεσμένη.

Έστω $\kappa \in \omega$. Υποθέτουμε ότι οι κλάσεις $\mathbb{P}(dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu} \leq m)$ και $\mathbb{P}(Dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu} \leq m)$, όπου $m \in \{-1\} \cup \kappa$, ειναι κορεσμένες. Αποδεικνύουμε ότι οι κλάσεις $\mathbb{P}(Dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu} \leq \kappa)$ και $\mathbb{P}(dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu} \leq \kappa)$ είναι επίσης κορεσμένες. Πρώτα αποδεικνύουμε ότι η κλάση $\mathbb{P}(Dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu} \leq \kappa)$ είναι κορεσμένη.

Έστω $\mathbf{S}$ μια δικτυωμένη οικογένεια από στοιχεία της $\mathbb{P}(Dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu} \leq \kappa)$. Για κάθε $X \in \mathbf{S}$ έστω $B^X \equiv \{V^X_\varepsilon : \varepsilon \in \tau\}$ μια δικτυωμένη $\mathbb{B}$-βάση του X που ικανοποιεί τη συνθήκη (2) του Ορισμού 4.2.2. Τότε, υπάρχουν

(i) ένα δικτυωμένο σύνολο $\{L^X_\eta : \eta \in \tau\}$ από υποσύνολα του X,

(ii) δύο δικτυωμένα σύνολα $\{W^X_\eta : \eta \in \tau\}$ και $\{O^X_\eta : \eta \in \tau\}$ από ανοικτά υποσύνολα του X και

(iii) μια 1-1 απεικόνιση φ του $\tau \times \tau$ επί του τ

έτσι ώστε:

(1) Για κάθε $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \tau$ και $\eta = \varphi(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ έχουμε

(iv) $\mathrm{Cl}(V^X_{\varepsilon_1}) \subseteq W^X_\eta$, $\mathrm{Cl}(V^X_{\varepsilon_2}) \subseteq O^X_\eta$,

(v) $W^X_\eta \cap O^X_\eta = \emptyset$ και

(vi) $X \setminus L^X_\eta = W^X_\eta \cup O^X_\eta$,

στην περίπτωση, που είναι $\mathrm{Cl}(V^X_{\varepsilon_1}) \cap \mathrm{Cl}(V^X_{\varepsilon_2}) = \emptyset$ και $L^X_\eta = \emptyset$ στην περίπτωση, που είναι $\mathrm{Cl}(V^X_{\varepsilon_1}) \cap \mathrm{Cl}(V^X_{\varepsilon_2}) \neq \emptyset$.

(2) Για κάθε $\eta \in \tau$, $dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu}(L^X_\eta) \leq \kappa - 1$.

Για κάθε $\eta \in \tau$ θέτουμε

$$\mathbf{L}_\eta = \{L^X_\eta : X \in \mathbf{S}\}, \quad \mathbf{W}_\eta = \{W^X_\eta : X \in \mathbf{S}\} \ \text{ και } \ \mathbf{O}_\eta = \{O^X_\eta : X \in \mathbf{S}\}.$$

Από την ιδιότητα (2) προκύπτει ότι η $\mathbf{L}_\eta$ είναι μια δικτυωμένη οικογένεια από στοιχεία της κλάσης $\mathbb{P}_{\kappa-1} \equiv \mathbb{P}(dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu} \leq \kappa - 1)$. Από την υπόθεση της επαγωγής, η κλάση $\mathbb{P}_{\kappa-1}$ είναι κορεσμένη. Συνεπώς, υπάρχει ένα αρχικό συν-σημάδι $\mathbf{M}^+_{\mathbf{L}_\eta}$ της $\mathbf{L}_\eta$ που αντιστοιχεί στην κλάση $\mathbb{P}_{\kappa-1}$. Συμβολίζουμε με $\mathbf{M}_\eta$ ένα συν-σημάδι της $\mathbf{S}$ τέτοιο ώστε το ίχνος του επί της $\mathbf{L}_\eta$ να είναι μια συν-επέκταση του συν-σημαδιού $\mathbf{M}^+_{\mathbf{L}_\eta}$.

Θεωρούμε τη συν-δικτύωση

$$\mathbf{N} \equiv \{\{V^X_\varepsilon : \varepsilon \in \tau\} : X \in \mathbf{S}\}$$

της $\mathbb{B}$-συν-βάσης $\mathbf{B} \equiv \{B^X : X \in \mathbf{S}\}$ της $\mathbf{S}$. Εφ' όσον η κλάση $\mathbb{B}$ είναι κορεσμένη κλάση βάσεων, υπάρχει ένα αρχικό συν-σημάδι $\mathbf{M}^+_{\mathbb{B}}$ της $\mathbf{S}$ που αντιστοιχεί στην συν-δικτύωση $\mathbf{N}$ της $\mathbf{B}$ και στην κλάση $\mathbb{B}$. Ειδικότερα, το συν-σημάδι $\mathbf{M}^+_{\mathbb{B}}$ είναι συν-επέκταση του $\mathbf{N}$.

Από την Πρόταση 3.1.5(2), υπάρχει ένα συν-σημάδι $\mathbf{M}^+$ της $\mathbf{S}$, το οποίο είναι συν-επέκταση των συν-σημαδιών $\mathbf{M}^+_{\mathbb{B}}$ και $\mathbf{M}_\eta$ για κάθε $\eta \in \tau$. Ειδικότερα, το συν-σημάδι $\mathbf{M}^+$ είναι συν-επέκταση του $\mathbf{N}$. Θα αποδείξουμε ότι το $\mathbf{M}^+$ είναι ένα αρχικό συν-σημάδι της $\mathbf{S}$ που αντιστοιχεί στην κλάση $\mathbb{P}(Dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu} \leq \kappa)$. Πράγματι, έστω

$$\mathbf{M} \equiv \{\{U^X_\delta : \delta \in \tau\} : X \in \mathbf{S}\}$$

μια αυθαίρετη συνεπέκταση του $\mathbf{M}^+$. Τότε, το συν-σημάδι $\mathbf{M}$ είναι συν-επέκταση των συν-σημαδιών $\mathbf{M}^+_{\mathbb{B}}$, $\mathbf{N}$ και $\mathbf{M}_\eta$ για κάθε $\eta \in \tau$. Συβολίζουμε με ϑ μια ενδεικτική συνάρτηση από το $\mathbf{N}$ στο $\mathbf{M}$. Τότε, για κάθε $X \in \mathbf{S}$, $V^X_\varepsilon = U^X_{\vartheta(\varepsilon)}$, $\varepsilon \in \tau$. Προφανώς, το συν-σημάδι $\mathbf{M}|_{\mathbf{L}_\eta}$ είναι μια συν-επέκταση του συν-σημαδιού $\mathbf{M}^+_{\mathbf{L}_\eta}$ της $\mathbf{L}_\eta$. Έστω $\mathrm{R}^+_{\mathbb{B}}$ μια αρχική οικογένεια από σχέσεις ισοδυναμίας επί της $\mathbf{S}$ που αντιστοιχεί στο συν-σημάδι $\mathbf{M}$, στη συν-δικτύωση $\mathbf{N}$ της $\mathbf{B}$ και στην κλάση $\mathbb{B}$. Έστω επίσης $\mathrm{R}^+_{\mathbf{L}_\eta}$ μια αρχική οικογένεια από σχέσεις ισοδυναμίας επί της $\mathbf{L}_\eta$ που αντιστοιχεί στο συν-σημάδι $\mathbf{M}|_{\mathbf{L}_\eta}$ και στη κλάση $\mathbb{P}_{\kappa-1}$. Συμβολίζουμε με R_η την οικογένεια από σχέσεις ισοδυναμίας επί της $\mathbf{S}$ τέτοια ώστε το ίχνος της επί της $\mathbf{L}_\eta$ να είναι η οικογένεια $\mathrm{R}^+_{\mathbf{L}_\eta}$.

Από την Πρόταση 3.1.5(1), υπάρχει μια επιτρεπτή οικογένεια R^+ από σχέσεις ισοδυναμίας επί της $\mathbf{S}$, η οποία είναι τελικώς λεπτότερη από τις οικογένειες $\mathrm{R}^+_{\mathbb{B}}$ και R_η για κάθε $\eta \in \tau$. Ειδικότερα, η R^+ είναι $\mathbf{M}$-επιτρεπτή. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η R^+ είναι $(\mathbf{M}, \mathbf{W}_\eta)$-επιτρεπτή, $(\mathbf{M}, \mathbf{O}_\eta)$-επιτρεπτή, $(\mathbf{M}, \mathbf{Co}(\mathbf{W}_\eta))$-επιτρεπτή και $(\mathbf{M}, \mathbf{Co}(\mathbf{O}_\eta))$-επιτρεπτή. Θα αποδείξουμε ότι η R^+ είναι μια αρχική οικογένεια της $\mathbf{S}$ που αντιστοιχεί στο συν-σημάδι $\mathbf{M}$ της $\mathbf{S}$ και στην κλάση $\mathbb{P}(Dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu} \leq \kappa)$. Προς τούτο θεωρούμε μια αυθαίρετη επιτρεπτή οικογένεια R από σχέσεις ισοδυναμίας επί της $\mathbf{S}$, η οποία είναι τελικώς λεπτότερη από την R^+, και αποδεικνύουμε ότι για κάθε $\mathbf{L} \in \mathrm{C}^\diamondsuit(\mathrm{R})$ ο χώρος

$\mathrm{T}(\mathbf{L})$ ανήκει στην κλάση $\mathbb{P}(Dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu} \leq \kappa)$. Έστω $\mathbf{L} \in \mathrm{C}^{\diamondsuit}(\mathrm{R})$. Εφ' όσον η κλάση $\mathbb{B}$ είναι κορεσμένη, έχουμε $(\mathrm{B}^{\mathbf{L}}_{\diamondsuit,\vartheta(\tau)}, \mathrm{T}(\mathbf{L})) \in \mathbb{B}$. Αποδεικνύουμε ότι η βάση $\mathrm{B}^{\mathbf{L}}_{\diamondsuit,\vartheta(\tau)}$ του $\mathrm{T}(\mathbf{L})$ ικανοποιεί τη συνθήκη (2) του Ορισμού 4.2.2, δηλαδή για κάθε $U^{\mathrm{T}}_{\delta_1}(\mathbf{H}_1)$ και $U^{\mathrm{T}}_{\delta_2}(\mathbf{H}_2)$ της $\mathrm{B}^{\mathbf{L}}_{\diamondsuit,\vartheta(\tau)}$ (όπου $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{H}_2 \subseteq \mathbf{L}$), με

$$\mathrm{Cl}_{\mathrm{T}(\mathbf{L})}(U^{\mathrm{T}}_{\delta_1}(\mathbf{H}_1)) \cap \mathrm{Cl}_{\mathrm{T}(\mathbf{L})}(U^{\mathrm{T}}_{\delta_2}(\mathbf{H}_2)) = \emptyset \tag{4.5}$$

υπάρχει ένας υπόχωρος L του χώρου $\mathrm{T}(\mathbf{L})$ που διαχωρίζει τα σύνολα $\mathrm{Cl}_{\mathrm{T}(\mathbf{L})}(U^{\mathrm{T}}_{\delta_1}(\mathbf{H}_1))$ και $\mathrm{Cl}_{\mathrm{T}(\mathbf{L})}(U^{\mathrm{T}}_{\delta_2}(\mathbf{H}_2))$ με $dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu}(L) \leq \kappa - 1$.

Θεωρούμε δύο στοιχεία $U^{\mathrm{T}}_{\delta_1}(\mathbf{H}_1)$ και $U^{\mathrm{T}}_{\delta_2}(\mathbf{H}_2)$ της $\mathrm{B}^{\mathbf{L}}_{\diamondsuit,\vartheta(\tau)}$ που ικανοποιούν τη σχέση (4.5). Πρώτα υποθέτουμε ότι $\mathbf{H}_1 \cap \mathbf{H}_2 = \emptyset$. Τότε,

(vii) $\mathrm{Cl}_{\mathrm{T}(\mathbf{L})}(U^{\mathrm{T}}_{\delta_1}(\mathbf{H}_1)) \subseteq \mathrm{T}(\mathbf{H}_1)$, $\mathrm{Cl}_{\mathrm{T}(\mathbf{L})}(U^{\mathrm{T}}_{\delta_2}(\mathbf{H}_2)) \subseteq \mathrm{T}(\mathbf{L} \setminus \mathbf{H}_1)$,

(viii) $\mathrm{T}(\mathbf{H}_1) \cap \mathrm{T}(\mathbf{L} \setminus \mathbf{H}_1) = \emptyset$ και

(ix) $\mathrm{T}(\mathbf{L}) = \mathrm{T}(\mathbf{H}_1) \cup \mathrm{T}(\mathbf{L} \setminus \mathbf{H}_1)$.

Συνεπώς, το κενό σύνολο διαχωρίζει τα $\mathrm{Cl}_{\mathrm{T}(\mathbf{L})}(U^{\mathrm{T}}_{\delta_1}(\mathbf{H}_1))$ και $\mathrm{Cl}_{\mathrm{T}(\mathbf{L})}(U^{\mathrm{T}}_{\delta_2}(\mathbf{H}_2))$. Εφ' όσον $dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu}(\emptyset) = -1 < \kappa$, έχουμε $Dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu}(\mathrm{T}(\mathbf{L})) \leq \kappa$. Τώρα, υποθέτουμε ότι $\mathbf{H}_1 \cap \mathbf{H}_2 \neq \emptyset$. Έστω $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 \cap \mathbf{H}_2$, $\vartheta^{-1}(\delta_1) = \varepsilon_1$, $\vartheta^{-1}(\delta_2) = \varepsilon_2$ και $\eta = \varphi(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Αποδεικνύουμε ότι το σύνολο $\mathrm{T}(\mathbf{H}|_{\mathbf{L}_\eta})$ διαχωρίζει τα σύνολα $\mathrm{Cl}_{\mathrm{T}(\mathbf{L})}(U^{\mathrm{T}}_{\delta_1}(\mathbf{H}_1))$ και $\mathrm{Cl}_{\mathrm{T}(\mathbf{L})}(U^{\mathrm{T}}_{\delta_2}(\mathbf{H}_2))$, και $dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu}(\mathrm{T}(\mathbf{H}|_{\mathbf{L}_\eta})) \leq \kappa - 1 < \kappa$.

Εφ' όσον η κλάση $\mathbb{P}_{\kappa-1}$ είναι κορεσμένη κλάση χώρων, ο υπόχωρος $\mathrm{T}(\mathbf{H}|_{\mathbf{L}_\eta})$ του $\mathrm{T}(\mathbf{M}|_{\mathbf{L}_\eta}, \mathrm{R}|_{\mathbf{L}_\eta})$ ανήκει στην κλάση $\mathbb{P}_{\kappa-1}$. Επομένως,

$$dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu}(\mathrm{T}(\mathbf{H}|_{\mathbf{L}_\eta})) \leq \kappa - 1 < \kappa.$$

Αποδεικνύουμε ότι το υποσύνολο $\mathrm{T}(\mathbf{H}|_{\mathbf{L}_\eta})$ του $\mathrm{T}(\mathbf{L})$ διαχωρίζει τα σύνολα $\mathrm{Cl}_{\mathrm{T}(\mathbf{L})}(U^{\mathrm{T}}_{\delta_1}(\mathbf{H}_1))$ και $\mathrm{Cl}_{\mathrm{T}(\mathbf{L})}(U^{\mathrm{T}}_{\delta_2}(\mathbf{H}_2))$. Υποθέτουμε ότι $X \in \mathbf{H}$. Επειδή τα υποσύνολα $\mathrm{Cl}(V^X_{\varepsilon_1})$ και $\mathrm{Cl}(V^X_{\varepsilon_2})$ του X είναι ξένα μεταξύ τους, από τη συνθήκη (1) έχουμε

(x) $\mathrm{Cl}(V^X_{\varepsilon_1}) \subseteq W^X_\eta$, $\mathrm{Cl}(V^X_{\varepsilon_2}) \subseteq O^X_\eta$,

(xi) $W^X_\eta \cap O^X_\eta = \emptyset$ και

(xii) $X \setminus L^X_\eta = W^X_\eta \cup O^X_\eta$.

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι

(xiii) $\mathrm{Cl}_{\mathrm{T}(\mathbf{L})}(U^{\mathrm{T}}_{\delta_1}(\mathbf{H})) \subseteq \mathrm{T}(\mathbf{H}|_{\mathbf{W}_\eta}) = \mathrm{T}|_{\mathbf{W}_\eta} \cap \mathrm{T}(\mathbf{H})$,
$\mathrm{Cl}_{\mathrm{T}(\mathbf{L})}(U^{\mathrm{T}}_{\delta_2}(\mathbf{H})) \subseteq \mathrm{T}(\mathbf{H}|_{\mathbf{O}_\eta}) = \mathrm{T}|_{\mathbf{O}_\eta} \cap \mathrm{T}(\mathbf{H})$,

(xiv) $\mathrm{T}(\mathbf{H}|_{\mathbf{W}_\eta}) \cap \mathrm{T}(\mathbf{H}|_{\mathbf{O}_\eta}) = \emptyset$ και

(xv) $\mathrm{T}(\mathbf{H}) \setminus \mathrm{T}(\mathbf{H}|_{\mathbf{L}_\eta}) = \mathrm{T}(\mathbf{H}|_{\mathbf{W}_\eta}) \cup \mathrm{T}(\mathbf{H}|_{\mathbf{O}_\eta})$.

Εφ' όσον ο περιορισμός $\mathbf{W}_\eta$ της $\mathbf{S}$ είναι ανοικτός και η οικογένεια R είναι $(\mathbf{M}, \mathbf{Co}(\mathbf{W}_\eta))$-επιτρεπτή, από την Πρόταση 2.4.32, το υποσύνολο $\mathrm{T}|_{\mathbf{W}_\eta}$ του T είναι ανοικτό. Ομοίως, το υποσύνολο $\mathrm{T}|_{\mathbf{O}_\eta}$ του T είναι ανοικτό. Επίσης, επειδή το υποσύνολο $\mathrm{T}(\mathbf{H})$ του T είναι ανοικτό και $\mathrm{T}(\mathbf{H}) \subseteq \mathrm{T}(\mathbf{L})$, τα σύνολα $\mathrm{T}(\mathbf{H}|_{\mathbf{W}_\eta})$ και $\mathrm{T}(\mathbf{H}|_{\mathbf{O}_\eta})$ είναι ανοικτά στο $\mathrm{T}(\mathbf{L})$.

Θέτοντας

$$W = \mathrm{T}(\mathbf{H}_1 \setminus \mathbf{H}) \cup \mathrm{T}(\mathbf{H}|_{\mathbf{W}_n})$$

και

$$O = \mathrm{T}(\mathbf{L} \setminus \mathbf{H}_1) \cup \mathrm{T}(\mathbf{H}|_{\mathbf{O}_n})$$

έχουμε

(xvi) $\mathrm{Cl}_{\mathrm{T}(\mathbf{L})}(U^{\mathrm{T}}_{\delta_1}(\mathbf{H}_1)) \subseteq W$, $\mathrm{Cl}_{\mathrm{T}(\mathbf{L})}(U^{\mathrm{T}}_{\delta_2}(\mathbf{H}_2)) \subseteq O$,

(xvii) $W \cap O = \emptyset$ και

(xviii) $\mathrm{T}(\mathbf{L}) \setminus \mathrm{T}(\mathbf{H}|_{\mathbf{L}_\eta}) = W \cup O$.

Άρα, ο υπόχωρος $\mathrm{T}(\mathbf{H}|_{\mathbf{L}_\eta})$ του χώρου $\mathrm{T}(\mathbf{L})$ διαχωρίζει τα σύνολα $\mathrm{Cl}_{\mathrm{T}(\mathbf{L})}(U^{\mathrm{T}}_{\delta_1}(\mathbf{H}_1))$ και $\mathrm{Cl}_{\mathrm{T}(\mathbf{L})}(U^{\mathrm{T}}_{\delta_1}(\mathbf{H}_2))$. Συνεπώς, η κλάση $\mathbb{P}(Dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu} \leq \kappa)$ είναι κορεσμένη.

Τώρα, θα αποδείξουμε ότι η κλάση $\mathbb{P}(dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu} \leq \kappa)$ είναι κορεσμένη. Έστω $\mathbf{S}$ μια δικτυωμένη οικογένεια από στοιχεία της $\mathbb{P}(dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu} \leq \kappa)$. Για κάθε $X \in \mathbf{S}$ υπάρχει ένα δικτυωμένο σύνολο $\{Q^X_i : i \in \nu\}$ από υποσύνολα του X έτσι ώστε:

(3) $X = \cup\{Q^X_i : i \in \nu\}$.

(4) Για κάθε $i \in \nu$, το υποσύνολο Q^X_i του X είναι κλειστό και $(Q^X_i, X) \in \mathbb{K}$.

(5) Για κάθε $i \in \nu$, $Dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu}(Q^X_i) \leq \kappa$.

Θέτουμε

$$\mathbf{Q}_i = \{Q^X_i : X \in \mathbf{S}\},\ i \in \nu.$$

Από το πρώτο μέρος της απόδειξης, η κλάση $\mathbb{P} \equiv \mathbb{P}(Dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu} \leq \kappa)$ είναι κορεσμένη. Από την ιδιότητα (5), η $\mathbf{Q}_i$ είναι μια δικτυωμένη οικογένεια από στοιχεία της κλάσης $\mathbb{P}$. Συνεπώς, υπάρχει ένα αρχικό συν-σημάδι $\mathbf{M}^+_{\mathbf{Q}_i}$ της $\mathbf{Q}_i$ που αντιστοιχεί στην κλάση $\mathbb{P}$. Συμβολίζουμε με $\mathbf{M}_i$ ένα συν-σημάδι της $\mathbf{S}$ τέτοιο ώστε το ίχνος του επί της $\mathbf{Q}_i$ να είναι συν-επέκταση του συν-σημαδιού $\mathbf{M}^+_{\mathbf{Q}_i}$. Από την ιδιότηατα (4), ο περιορισμός $\mathbf{Q}_i$ της $\mathbf{S}$ είναι $\mathbb{K}$-περιορισμός. Επειδή η κλάση $\mathbb{K}$ είναι κορεσμένη κλάση υποσυνόλων, για κάθε $i \in \nu$ υπάρχει ένα αρχικό συν-σημάδι $\mathbf{M}^+_{\mathbb{K},i}$ της $\mathbf{S}$ που αντιστοιχεί στον περιορισμό $\mathbf{Q}_i$ και στην κλάση $\mathbb{K}$.

Από την Πρόταση 3.1.5(2), υπάρχει ένα συν-σημάδι $\mathbf{M}^+$ της $\mathbf{S}$, το οποίο είναι συν-επέκταση των συν-σημαδιών $\mathbf{M}_i$ και $\mathbf{M}^+_{\mathbb{K},i}$ για κάθε $i \in \nu$. Αποδεικνύουμε ότι το $\mathbf{M}^+$ είναι ένα αρχικό συν-σημάδι της $\mathbf{S}$ που αντιστοιχεί στην κλάση $\mathbb{P}(dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu} \leq \kappa)$. Πράγματι, έστω

$$\mathbf{M} \equiv \{\{U^X_\delta : \delta \in \tau\} : X \in \mathbf{S}\}$$

μια αυθαίρετη συν-επέκταση του $\mathbf{M}^+$. Τότε, το $\mathbf{M}$ είναι συν-επέκταση των συν-σημαδιών $\mathbf{M}_i$ και $\mathbf{M}^+_{\mathbb{K},i}$ της $\mathbf{S}$ και το $\mathbf{M}|_{\mathbf{Q}_i}$ είναι συν-επέκταση του συν-σημαδιού $\mathbf{M}^+_{\mathbf{Q}_i}$ της $\mathbf{Q}_i$, $i \in \nu$. Έστω $\mathrm{R}^+_{\mathbf{Q}_i}$ μια αρχική οικογένεια από σχέσεις ισοδυναμίας επί της $\mathbf{Q}_i$ που αντιστοιχεί στο συν-σημάδι $\mathbf{M}|_{\mathbf{Q}_i}$ και στην κλάση $\mathbb{P}$. Συμβολίζουμε με R_i την οικογένεια από σχέσεις ισοδυναμίας επί της $\mathbf{S}$ τέτοια ώστε το ίχνος της επί της $\mathbf{Q}_i$ να είναι η οικογένεια $\mathrm{R}^+_{\mathbf{Q}_i}$. Έστω επίσης $\mathrm{R}^+_{\mathbb{K},i}$ μια αρχική οικογένεια από σχέσεις ισοδυναμίας επί της $\mathbf{S}$ που αντιστοιχεί στο συν-σημάδι $\mathbf{M}$, στον περιορισμό $\mathbf{Q}_i$ και στην κλάση $\mathbb{K}$.

Από την Πρόταση 3.1.5(1), υπάρχει μια επιτρεπτή οικογένεια R^+ από σχέσεις ισοδυναμίας επί της $\mathbf{S}$, η οποία είναι τελικώς λεπτότερη από τις οικογένειες R_i και $\mathrm{R}^+_{\mathbb{K},i}$, $i \in \nu$. Άρα, η οικογένεια R^+ είναι $\mathbf{M}$-επιτρεπτή. Θα αποδείξουμε ότι η R^+ είναι μια αρχική οικογένεια της $\mathbf{S}$ που αντιστοιχεί στο συν-σημάδι $\mathbf{M}$ της $\mathbf{S}$ και στην κλάση $\mathbb{P}(dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu} \leq \kappa)$. Προς τούτο, θεωρούμε μια αυθαίρετη επιτρεπτή οικογένεια R από σχέσεις ισοδυναμίας επί της $\mathbf{S}$, η οποία είναι τελικώς λεπτότερη της R^+. Τότε, η R είναι τελικώς λεπτότερη από τις οικογένειες R_i και $\mathrm{R}^+_{\mathbb{K},i}$ για κάθε $i \in \nu$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε $\mathbf{L} \in \mathrm{C}^{\diamondsuit}(\mathrm{R})$, $\mathrm{T}(\mathbf{L}) \in \mathbb{P}(dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu} \leq \kappa)$.

Έστω $\mathbf{L} \in \mathrm{C}^{\diamondsuit}(\mathrm{R})$. Αποδεικνύουμε ότι $\mathrm{T}(\mathbf{L}) = \cup\{\mathrm{T}_i(\mathbf{L}) : i \in \nu\}$ έτσι ώστε:

(xix) το υποσύνολο $\mathrm{T}_i(\mathbf{L})$ του $\mathrm{T}(\mathbf{L})$ είναι κλειστό,

(xx) $(\mathrm{T}_i(\mathbf{L}), \mathrm{T}(\mathbf{L})) \in \mathbb{K}$ και

(xxi) $Dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu}(\mathrm{T}_i(\mathbf{L})) \leq \kappa$, $i \in \nu$.

Θέτουμε

$$\mathrm{T}_i(\mathbf{L}) = \mathrm{T}(\mathbf{L}|_{\mathbf{Q}_i}),\ i \in \nu.$$

Το υποσύνολο $\mathrm{T}(\mathbf{L}|_{\mathbf{Q}_i})$ του $\mathrm{T}(\mathbf{L})$ είναι κλειστό και $\mathrm{T}(\mathbf{L}) = \cup\{\mathrm{T}(\mathbf{L}|_{\mathbf{Q}_i}) : i \in \nu\}$. Εφ' όσον η κλάση $\mathbb{K}$ είναι κορεσμένη κλάση υποσυνόλων, $(\mathrm{T}(\mathbf{L}|_{\mathbf{Q}_i}), \mathrm{T}(\mathbf{L})) \in \mathbb{K}$. Επίσης, εφ' όσον η κλάση $\mathbb{P}$ είναι κορεσμένη, ο υπόχωρος $\mathrm{T}(\mathbf{L}|_{\mathbf{Q}_i})$ του $\mathrm{T}(\mathbf{M}|_{\mathbf{Q}_i}, \mathrm{R}|_{\mathbf{Q}_i})$ ανήκει στην κλάση $\mathbb{P}$. Οπότε, $Dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu}(\mathrm{T}(\mathbf{L}|_{\mathbf{Q}_i})) \leq \kappa$. Συνεπώς, από τη συνθήκη (3) του Ορισμού 4.2.2, $dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu}(\mathrm{T}(\mathbf{L})) \leq \kappa$. Άρα, η κλάση $\mathbb{P}(dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu} \leq \kappa)$ είναι κορεσμένη. ■

4.5.3 Πόρισμα. Για κάθε $\kappa \in \omega$ στις κλάσεις $\mathbb{P}(dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu} \leq \kappa)$ και $\mathbb{P}(Dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu} \leq \kappa)$ υπάρχουν καθολικά στοιχεία.

Απόδειξη. Προκύπτει άμεσα από την Πρόταση 3.1.7. ■

4.5.4 Πόρισμα. Έστω $\mathbb{P}$ μια από τις παρακάτω κλάσεις:

(1) η κλάση όλων των (πλήρως) κανονικών χώρων με βάρος $\leq \tau$,

(2) η κλάση όλων των (πλήρως) κανονικών countable-dimensional χώρων με βάρος $\leq \tau$,

(3) η κλάση όλων των (πλήρως) κανονικών strongly countable-dimensional χώρων με βάρος $\leq \tau$,

(4) η κλάση όλων των (πλήρως) κανονικών locally finite-dimensional χώρων με βάρος $\leq \tau$ και

(5) η κλάση όλων των (πλήρως) κανονικών χώρων X με $w(X) \leq \tau$ και $\mathrm{ind}(X) \leq \alpha \in \tau^+$.

Τότε, για κάθε $\kappa \in \omega$ στις κλάσεις $\mathbb{P}(dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu} \leq \kappa) \cap \mathbb{P}$ και $\mathbb{P}(Dm^{\mathbb{K},\mathbb{B}}_{\mathbb{E},\nu} \leq \kappa) \cap \mathbb{P}$ υπάρχουν καθολικά στοιχεία.

Απόδειξη. Προκύπτει άμεσα από την Πρόταση 3.1.6. ■

Κεφάλαιο 5

Διαστάσεις-συναρτήσεις θέσεως του τύπου ind

Στο κεφάλαιο αυτό μελετώνται διαστάσεις-συναρτήσεις θέσεως του τύπου ind. Οι διαστάσεις αυτές ορίσθηκαν στο βιβλίο [37] και μελετήθηκαν μόνο ως προς την ιδιότητα της καθολικότητας. Στο κεφάλαιο αυτό δίνονται σχέσεις μεταξύ των διαστάσεων-συναρτήσεων θέσεως του τύπου ind και αποδεικνύονται βασικές ιδιότητες της Θεωρίας Διαστάσεων για τις συναρτήσεις αυτές. Τα αποτελέσματα του κεφαλαίου αυτού είναι όλα πρωτότυπα.

Σε ό,τι ακολουθεί με τη λέξη χώρο θα εννοούμε έναν T_0-χώρο με βάρος $\leq \tau$.

5.1 Βασικοί ορισμοί

5.1.1 Ορισμός. (Βλέπε [37]) Έστω Q ένα υποσύνολο ενός χώρου X. Μια οικογένεια B από ανοικτά υποσύνολα του X (συμπεριλαμβανομένων των X και $\emptyset$) καλείται **p-βάση για το Q στο X**, εάν το σύνολο $\{Q \cap U : U \in B\}$ είναι μια βάση του υποχώρου Q. Μια p-βάση για το Q στο X καλείται **pos-βάση**, εάν για κάθε $x \in Q$ και για κάθε ανοικτή περιοχή U του x στο X υπάρχει ένα στοιχείο V της B έτσι ώστε $x \in V \subseteq U$. Μια p-βάση για το Q στο X καλείται **ps-βάση**, εάν η οικογένεια B είναι μια βάση του χώρου X.

5.1.2 Ορισμός. (Βλέπε [37]) Θεωρούμε τη συνάρτηση p_0-ind με πεδίο ορισμού την κλάση όλων των ζευγών (Q, X), όπου Q είναι ένα υποσύνολο ενός χώρου X, και πεδίο τιμών την κλάση $\mathcal{O} \cup \{-1, \infty\}$ που ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

(1) $\mathrm{p}_0\text{-ind}(Q, X) = -1$ εάν και μόνον εάν $Q = X = \emptyset$.

(2) $\mathrm{p}_0\text{-ind}(Q, X) \leq \alpha$, όπου $\alpha \in \mathcal{O}$, εάν και μόνον εάν υπάρχει μια p-βάση B για το Q στο X έτσι ώστε για κάθε $U \in B$ να έχουμε

$$\mathrm{p}_0\text{-ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(U), \mathrm{Bd}_X(U)) < \alpha.$$

5.1.3 Παρατήρηση. Η συνθήκη (2) του Ορισμού 5.1.2 είναι ισοδύναμη με την παρακάτω συνθήκη:
(2′) p_0-ind$(Q, X) \leq \alpha$, όπου $\alpha \in \mathcal{O}$, εάν και μόνον εάν για κάθε $x \in Q$ και για κάθε ανοικτή περιοχή V του x στο X υπάρχει ένα ανοικτό υποσύνολο U του X έτσι ώστε $x \in Q \cap U \subseteq Q \cap V$ και p_0-ind$(Q \cap \mathrm{Bd}_X(U), \mathrm{Bd}_X(U)) < \alpha$.

5.1.4 Ορισμός. (Βλέπε [37]) Θεωρούμε τη συνάρτηση p_1-ind με πεδίο ορισμού την κλάση όλων των ζευγών (Q, X), όπου Q είναι ένα υποσύνολο ενός χώρου X, και πεδίο τιμών την κλάση $\mathcal{O} \cup \{-1, \infty\}$ που ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

(1) p_1-ind$(Q, X) = -1$ εάν και μόνον εάν $Q = \emptyset$.

(2) p_1-ind$(Q, X) \leq \alpha$, όπου $\alpha \in \mathcal{O}$, εάν και μόνον εάν υπάρχει μια p-βάση B για το Q στο X έτσι ώστε για κάθε $U \in B$ να έχουμε

$$\mathrm{p}_1\text{-ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(U), X) < \alpha.$$

5.1.5 Παρατήρηση. Η συνθήκη (2) του Ορισμού 5.1.4 είναι ισοδύναμη με την παρακάτω συνθήκη:
(2′) p_1-ind$(Q, X) \leq \alpha$, όπου $\alpha \in \mathcal{O}$, εάν και μόνον εάν για κάθε $x \in Q$ και για κάθε ανοικτή περιοχή V του x στο X υπάρχει ένα ανοικτό υποσύνολο U του X έτσι ώστε $x \in Q \cap U \subseteq Q \cap V$ και p_1-ind$(Q \cap \mathrm{Bd}_X(U), X) < \alpha$.

5.1.6 Ορισμός. (Βλέπε [37]) Θεωρούμε τη συνάρτηση pos_0-ind με πεδίο ορισμού την κλάση όλων των ζευγών (Q, X), όπου Q είναι ένα υποσύνολο ενός χώρου X, και πεδίο τιμών την κλάση $\mathcal{O} \cup \{-1, \infty\}$ που ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

(1) pos_0-ind$(Q, X) = -1$ εάν και μόνον εάν $Q = X = \emptyset$.

(2) pos_0-ind$(Q, X) \leq \alpha$, όπου $\alpha \in \mathcal{O}$, εάν και μόνον εάν υπάρχει μια pos-βάση B για το Q στο X έτσι ώστε για κάθε $U \in B$ να έχουμε

$$\mathrm{pos}_0\text{-ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(U), \mathrm{Bd}_X(U)) < \alpha.$$

5.1.7 Παρατήρηση. Η συνθήκη (2) του Ορισμού 5.1.6 είναι ισοδύναμη με την παρακάτω συνθήκη:
(2′) pos_0-ind$(Q, X) \leq \alpha$, όπου $\alpha \in \mathcal{O}$, εάν και μόνον εάν για κάθε $x \in Q$ και για κάθε ανοικτή περιοχή V του x στο X υπάρχει ένα ανοικτό υποσύνολο U του X έτσι ώστε $x \in U \subseteq V$ και pos_0-ind$(Q \cap \mathrm{Bd}_X(U), \mathrm{Bd}_X(U)) < \alpha$.

5.1.8 Ορισμός. (Βλέπε [37]) Θεωρούμε τη συνάρτηση pos_1-ind με πεδίο ορισμού την κλάση όλων των ζευγών (Q, X), όπου Q είναι ένα υποσύνολο ενός χώρου X, και πεδίο τιμών την κλάση $\mathcal{O} \cup \{-1, \infty\}$ που ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

(1) $\mathrm{pos}_1\text{-ind}(Q, X) = -1$ εάν και μόνον εάν $Q = \emptyset$.

(2) $\mathrm{pos}_1\text{-ind}(Q, X) \leq \alpha$, όπου $\alpha \in \mathcal{O}$, εάν και μόνον εάν υπάρχει μια pos-βάση B για το Q στο X έτσι ώστε για κάθε $U \in B$ να έχουμε

$$\mathrm{pos}_1\text{-ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(U), X) < \alpha.$$

5.1.9 Παρατήρηση. Η συνθήκη (2) του Ορισμού 5.1.8 είναι ισοδύναμη με την παρακάτω συνθήκη:

(2′) $\mathrm{pos}_1\text{-ind}(Q, X) \leq \alpha$, όπου $\alpha \in \mathcal{O}$, εάν και μόνον εάν για κάθε $x \in Q$ και για κάθε ανοικτή περιοχή V του x στο X υπάρχει ένα ανοικτό υποσύνολο U του X έτσι ώστε $x \in U \subseteq V$ και $\mathrm{pos}_1\text{-ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(U), X) < \alpha$.

5.1.10 Παρατήρηση. Εάν στους ορισμούς 5.1.6 και 5.1.8 αντί για την pos-βάση B θεωρήσουμε μια ps-βάση, τότε οι διαστάσεις-συναρτήσεις pos_i-ind, $i \in \{0, 1\}$, θα συμβολίζονται με ps_i-ind. Σημειώνουμε ότι η συνάρτηση-διάσταση pos_1-ind είναι η υπερπεπερασμένη επέκταση της σχετικής μικρής επαγωγικής διάστασης που έχει δοθεί στις [69] και [70] (βλέπε επίσης [30]).

5.1.11 Παρατήρηση. Είναι γνωστό (βλέπε [37]) ότι για κάθε ζεύγος (Q, X) έχουμε

$\mathrm{p}_i\text{-ind}(Q, X) \in \{-1, \infty\} \cup \tau^+$,

$\mathrm{pos}_i\text{-ind}(Q, X) \in \{-1, \infty\} \cup \tau^+$ και

$\mathrm{ps}_i\text{-ind}(Q, X) \in \{-1, \infty\} \cup \tau^+$, $i = 0, 1$,

όπου τ είναι το βάρος του X και τ^+ είναι ο μικρότερος πληθάριθμος που είναι μεγαλύτερος από το τ. Επίσης, έαν με df συμβολίσουμε μια από τις παραπάνω συναρτήσεις-διαστάσεις, τότε $df(Q, X) = \infty$ εάν και μόνον εάν η ανισότητα $df(Q, X) \leq \alpha$ δεν είναι αληθής για κάθε $\alpha \in \tau^+ \cup \{-1\}$.

Οι παραπάνω διαστάσεις ορίσθηκαν στο [37] με το όνομα «**positional dimension like-functions of the type ind**» (διαστάσεις-συναρτήσεις θέσεως του τύπου ind). Οι συναρτήσεις αυτές μελετήθηκαν μόνο όσον αφορά την ιδιότητα της καθολικότητας, δηλαδή εάν df είναι μια από τις παραπάνω συναρτήσεις και $\alpha \in \tau^+ \cup \{-1\}$, τότε στην κλάση $\mathbb{P}$ όλων των ζευγών (Q^X, X), όπου Q^X είναι ένα υποσύνολο ενός χώρου X με $df(Q^X, X) \leq \alpha$, υπάρχει καθολικό στοιχείο. (Ένα στοιχείο (Q^T, T) της $\mathbb{P}$ καλείται **καθολικό** στην $\mathbb{P}$, εάν για κάθε $(Q^X, X) \in \mathbb{P}$ υπάρχει μια τοπολογική εμφύτευση $i_T^X : X \to T$ έτσι ώστε $i_T^X(Q^X) \subseteq Q^T$.) Σχετικά με κάποιες άλλες διαστάσεις-συναρτήσεις θέσεως με το όνομα **«relative dimensions»** βλέπε για παράδειγμα τις [12] και [13].

5.2 Σχέσεις μεταξύ των διαστάσεων θέσεως του τύπου ind και άλλων διαστάσεων

5.2.1 Πρόταση. Για κάθε υποσύνολο Q ενός χώρου X έχουμε

$$\mathrm{ind}(Q) \leq \mathrm{p}_i\text{-}\mathrm{ind}(Q, X),\ i \in \{0, 1\}.$$

Απόδειξη. Αποδεικνύουμε ότι

$$\mathrm{ind}(Q) \leq \mathrm{p}_0\text{-}\mathrm{ind}(Q, X). \tag{5.1}$$

Η περίπτωση $i = 1$ είναι όμοια. Έστω $\mathrm{p}_0\text{-}\mathrm{ind}(Q, X) = \alpha \in \mathcal{O} \cup \{-1, \infty\}$. Εάν $\alpha = -1$ ή $\alpha = \infty$, τότε η σχέση (5.1) είναι προφανής. Υποθέτουμε ότι $\alpha \in \mathcal{O}$ και ότι η σχέση (5.1) είναι αληθής για κάθε ζεύγος (Q^Y, Y) με $\mathrm{p}_0\text{-}\mathrm{ind}(Q^Y, Y) < \alpha$. Θα αποδείξουμε ότι $\mathrm{ind}(Q) \leq \alpha$. Εφ' όσον $\mathrm{p}_0\text{-}\mathrm{ind}(Q, X) = \alpha$, υπάρχει μια p-βάση B για το Q στο X έτσι ώστε για κάθε $U \in B$ να έχουμε

$$\mathrm{p}_0\text{-}\mathrm{ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(U), \mathrm{Bd}_X(U)) < \alpha.$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\mathrm{ind}(\mathrm{Bd}_Q(Q \cap U)) < \alpha$ για κάθε $U \in B$. Εφ' όσον

$$\mathrm{Bd}_Q(Q \cap U) \subseteq Q \cap \mathrm{Bd}_X(U),$$

από την υπόθεση της επαγωγής έχουμε

$$\begin{aligned} \mathrm{ind}(\mathrm{Bd}_Q(Q \cap U)) &\leq \mathrm{ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(U)) \\ &\leq \mathrm{p}_0\text{-}\mathrm{ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(U), \mathrm{Bd}_X(U)) < \alpha. \end{aligned}$$

Συνεπώς, $\mathrm{ind}(Q) \leq \alpha$. ■

5.2.2 Πρόταση. Για κάθε υποσύνολο Q ενός χώρου X έχουμε

$$\mathrm{p}_i\text{-}\mathrm{ind}(Q, X) \leq \mathrm{pos}_i\text{-}\mathrm{ind}(Q, X) \leq \mathrm{ps}_i\text{-}\mathrm{ind}(Q, X),\ i \in \{0, 1\}.$$

Απόδειξη. Αποδεικνύουμε πρώτα ότι

$$\mathrm{p}_0\text{-}\mathrm{ind}(Q, X) \leq \mathrm{pos}_0\text{-}\mathrm{ind}(Q, X). \tag{5.2}$$

Η περίπτωση $i = 1$ είναι όμοια. Έστω $\mathrm{pos}_0\text{-}\mathrm{ind}(Q, X) = \alpha \in \mathcal{O} \cup \{-1, \infty\}$. Εάν $\alpha = -1$ ή $\alpha = \infty$, τότε η σχέση (5.2) είναι προφανής. Υποθέτουμε ότι $\alpha \in \mathcal{O}$ και ότι η σχέση (5.2) είναι αληθής για κάθε ζεύγος (Q^Y, Y) με $\mathrm{pos}_0\text{-}\mathrm{ind}(Q^Y, Y) < \alpha$. Θα αποδείξουμε ότι $\mathrm{p}_0\text{-}\mathrm{ind}(Q, X) \leq \alpha$. Εφ' όσον $\mathrm{pos}_0\text{-}\mathrm{ind}(Q, X) = \alpha$, υπάρχει μια pos-βάση B για το Q στο X έτσι ώστε για κάθε $U \in B$ να έχουμε

$$\mathrm{pos}_0\text{-}\mathrm{ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(U), \mathrm{Bd}_X(U)) < \alpha.$$

Από την υπόθεση της επαγωγής,

$$\mathrm{p}_0\text{-}\mathrm{ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(U), \mathrm{Bd}_X(U)) \leq \mathrm{pos}_0\text{-}\mathrm{ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(U), \mathrm{Bd}_X(U))$$

και επειδή η B είναι επίσης μια p-βάση για το Q στο X, $\mathrm{p}_0\text{-}\mathrm{ind}(Q, X) \leq \alpha$.

Αποδεικνύουμε τώρα ότι

$$\mathrm{pos}_0\text{-}\mathrm{ind}(Q, X) \leq \mathrm{ps}_0\text{-}\mathrm{ind}(Q, X). \tag{5.3}$$

Η περίπτωση $i = 1$ είναι όμοια. Έστω $\mathrm{ps}_0\text{-}\mathrm{ind}(Q, X) = \alpha \in \mathcal{O} \cup \{-1, \infty\}$. Εάν $\alpha = -1$ ή $\alpha = \infty$, τότε η σχέση (5.3) είναι προφανής. Υποθέτουμε ότι $\alpha \in \mathcal{O}$ και ότι η σχέση (5.3) είναι αληθής για κάθε ζεύγος (Q^Y, Y) με $\mathrm{ps}_0\text{-}\mathrm{ind}(Q^Y, Y) < \alpha$. Θα αποδείξουμε ότι $\mathrm{pos}_0\text{-}\mathrm{ind}(Q, X) \leq \alpha$. Εφ' όσον $\mathrm{ps}_0\text{-}\mathrm{ind}(Q, X) = \alpha$, υπάρχει μια ps-βάση B για το Q στο X έτσι ώστε για κάθε $U \in B$ να έχουμε

$$\mathrm{ps}_0\text{-}\mathrm{ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(U), \mathrm{Bd}_X(U)) < \alpha.$$

Από την υπόθεση της επαγωγής,

$$\mathrm{pos}_0\text{-}\mathrm{ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(U), \mathrm{Bd}_X(U)) \leq \mathrm{ps}_0\text{-}\mathrm{ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(U), \mathrm{Bd}_X(U))$$

και επειδή η B είναι επίσης μια pos-βάση για το Q στο X, $\mathrm{pos}_0\text{-}\mathrm{ind}(Q, X) \leq \alpha$. ■

5.2.3 Πρόταση. Για κάθε υποσύνολο Q ενός χώρου X έχουμε

$$\mathrm{ps}_0\text{-}\mathrm{ind}(Q, X) = \mathrm{ind}(X).$$

Απόδειξη. Αποδεικνύουμε πρώτα ότι

$$\mathrm{ps}_0\text{-}\mathrm{ind}(Q, X) \leq \mathrm{ind}(X). \tag{5.4}$$

Έστω $\mathrm{ind}(X) = \alpha \in \mathcal{O} \cup \{-1, \infty\}$. Εάν $\alpha = -1$ ή $\alpha = \infty$, τότε η σχέση (5.4) είναι προφανής. Υποθέτουμε ότι $\alpha \in \mathcal{O}$ και ότι η σχέση (5.4) είναι αληθής για κάθε ζεύγος

(Q^Y, Y) με $\text{ind}(Y) < \alpha$. Θα αποδείξουμε ότι $\text{ps}_0\text{-ind}(Q, X) \leq \alpha$. Εφ' όσον $\text{ind}(X) = \alpha$, υπάρχει μια βάση B του X έτσι ώστε για κάθε $U \in B$ να έχουμε

$$\text{ind}(\text{Bd}_X(U)) < \alpha.$$

Από την υπόθεση της επαγωγής,

$$\text{ps}_0\text{-ind}(Q \cap \text{Bd}_X(U), \text{Bd}_X(U)) \leq \text{ind}(\text{Bd}_X(U))$$

και επειδή η B είναι επίσης μια ps-βάση για το Q στο X, $\text{ps}_0\text{-ind}(Q, X) \leq \alpha$.

Αποδεικνύουμε τώρα ότι

$$\text{ind}(X) \leq \text{ps}_0\text{-ind}(Q, X). \tag{5.5}$$

Έστω $\text{ps}_0\text{-ind}(Q, X) = \alpha \in \mathcal{O} \cup \{-1, \infty\}$. Εάν $\alpha = -1$ ή $\alpha = \infty$, τότε η ανισότητα (5.5) είναι προφανής. Υποθέτουμε ότι $\alpha \in \mathcal{O}$ και ότι η ανισότητα (5.5) είναι αληθής για κάθε ζεύγος (Q^Y, Y) με $\text{ps}_0\text{-ind}(Q^Y, Y) < \alpha$. Θα αποδείξουμε ότι $\text{ind}(X) \leq \alpha$. Εφ' όσον $\text{ps}_0\text{-ind}(Q, X) = \alpha$, υπάρχει μια ps-βάση B για το Q στο X έτσι ώστε για κάθε $U \in B$ να έχουμε

$$\text{ps}_0\text{-ind}(Q \cap \text{Bd}_X(U), \text{Bd}_X(U)) < \alpha.$$

Από την υπόθεση της επαγωγής,

$$\text{ind}(\text{Bd}_X(U)) \leq \text{ps}_0\text{-ind}(Q \cap \text{Bd}_X(U), \text{Bd}_X(U))$$

και επειδή η B είναι επίσης μια βάση του X, $\text{ind}(X) \leq \alpha$. ■

5.2.4 Πόρισμα. Για κάθε χώρο X έχουμε

$$\text{p}_0\text{-ind}(X, X) = \text{pos}_0\text{-ind}(X, X) = \text{ps}_0\text{-ind}(X, X) = \text{ind}(X).$$

Απόδειξη. Προκύπτει άμεσα από τις Προτάσεις 5.2.1, 5.2.2 και 5.2.3. ■

Τα παρακάτω παραδείγματα δείχνουν ότι στην κλάση όλων των T_0-χώρων οι ανισότητες στις Προτάσεις 5.2.1 και 5.2.2 δεν μπορούν να αντικατασταθούν με ισότητες.

5.2.5 Παράδειγμα. Έστω $X = \{a, b\}$, $Q = \{a\}$, $K = \{b\}$ και $\tau = \{\emptyset, \{b\}, X\}$ μια τοπολογία επί του X. Τότε,

$\text{ind}(X) = 1$, $\text{p}_0\text{-ind}(Q, X) = \text{pos}_0\text{-ind}(Q, X) = 0$, $\text{p}_0\text{-ind}(K, X) = 0$, $\text{pos}_0\text{-ind}(K, X) = 1$ και $\text{ps}_1\text{-ind}(Q, X) = 0$.

5.2.6 Παράδειγμα. Έστω $X = \{a, b, c\}$, $Q = \{a, b\}$ και $\tau = \{\emptyset, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X\}$ μια τοπολογία επί του X. Τότε,

$\mathrm{ind}(Q) = 0,\ \mathrm{ind}(X) = 1,\ \mathrm{p}_1\text{-}\mathrm{ind}(X, X) = \mathrm{pos}_1\text{-}\mathrm{ind}(X, X) = 2,$

$\mathrm{p}_i\text{-}\mathrm{ind}(Q, X) = \mathrm{pos}_i\text{-}\mathrm{ind}(Q, X) = 1,\ i \in \{0, 1\}$ και

$\mathrm{ps}_1\text{-}\mathrm{ind}(K, X) = \infty.$

5.2.7 Παρατήρηση. Οι σχέσεις μεταξύ των διαστάσεων θέσεως του τύπου ind (βλέπε τις παραπάνω προτάσεις και παραδείγματα) συνοψίζονται στο παρακάτω διάγραμμα, όπου "$\rightarrow$" σημαίνει "$\leq$" και "$\nrightarrow$" σημαίνει ότι "γενικά $\nleq$".

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{ps}_0\text{-}\mathrm{ind}(Q,X) = \mathrm{ind}(X) \arrow[d, shift right, "/" marking] & & \mathrm{ps}_1\text{-}\mathrm{ind}(Q,X) \arrow[d, shift left, "/" marking] \\
\mathrm{pos}_0\text{-}\mathrm{ind}(Q,X) \arrow[u, shift right] \arrow[d, shift right, "/" marking] & & \mathrm{pos}_1\text{-}\mathrm{ind}(Q,X) \arrow[u, shift left] \\
\mathrm{p}_0\text{-}\mathrm{ind}(Q,X) \arrow[u, shift right] \arrow[dr, shift right, "/" marking] & & \mathrm{p}_1\text{-}\mathrm{ind}(Q,X) \arrow[u] \arrow[dl, shift left, "/" marking] \\
& \mathrm{ind}(Q) \arrow[ul, shift right] \arrow[ur, shift left] &
\end{tikzcd}$$

Διάγραμμα 5.1

Η Πρόταση 1 του [69] (που έχει δοθεί για πεπερασμένες διαστάσεις) μπορεί να επεκταθεί για υπερπεπερασμένες διαστάσεις όπως φαίνεται στην παρακάτω πρόταση.

5.2.8 Πρόταση. Έστω X κληρονομικά φυσικός χώρος (δηλαδή κάθε υπόχωρος του X είναι φυσικός) και $Q \subseteq X$. Τότε,

$$\mathrm{ind}(Q) = \mathrm{pos}_1\text{-}\mathrm{ind}(Q, X).$$

Απόδειξη. Από τις Προτάσεις 5.2.1 και 5.2.2 αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\mathrm{pos}_1\text{-}\mathrm{ind}(Q, X) \leq \mathrm{ind}(Q). \tag{5.6}$$

Έστω $\mathrm{ind}(Q) = \alpha \in \mathcal{O} \cup \{-1, \infty\}$. Εάν $\alpha = -1$ ή $\alpha = \infty$, τότε η σχέση (5.6) είναι προφανής. Υποθέτουμε ότι $\alpha \in \mathcal{O}$ και ότι η σχέση (5.6) είναι αληθής για κάθε ζεύγος

(Q^Y, Y) με $\mathrm{ind}(Q^Y) < \alpha$. Θα αποδείξουμε ότι $\mathrm{pos}_1\text{-}\mathrm{ind}(Q, X) \leq \alpha$. Εφ' όσον $\mathrm{ind}(Q) = \alpha$, υπάρχει μια pos-βάση B για το Q στο X έτσι ώστε για κάθε $U \in B$ να έχουμε

$$\mathrm{ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(U)) < \alpha$$

(βλέπε Problem 2.2.A of [19]). Από την υπόθεση της επαγωγής,

$$\mathrm{pos}_1\text{-}\mathrm{ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(U), \mathrm{Bd}_X(U)) \leq \mathrm{ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(U)) < \alpha.$$

Συνεπώς, $\mathrm{pos}_1\text{-}\mathrm{ind}(Q, X) \leq \alpha$. ■

5.2.9 Πόρισμα. Έστω X κληρονομικά φυσικός χώρος (δηλαδή κάθε υπόχωρος του X είναι φυσικός) και $Q \subseteq X$. Τότε,

$$\mathrm{ind}(Q) = \mathrm{p}_1\text{-}\mathrm{ind}(Q, X) = \mathrm{pos}_1\text{-}\mathrm{ind}(Q, X).$$

Απόδειξη. Προκύπτει άμεσα από τις Προτάσεις 5.2.1, 5.2.2 και 5.2.8. ■

5.2.10 Πόρισμα. Για κάθε υποσύνολο Q ενός μετρικού χώρου X έχουμε

$$\mathrm{ind}(Q) = \mathrm{p}_1\text{-}\mathrm{ind}(Q, X) = \mathrm{pos}_1\text{-}\mathrm{ind}(Q, X).$$

Απόδειξη. Προκύπτει άμεσα από το γεγονός ότι κάθε μετρικός χώρος είναι κληρονομικά φυσικός. ■

5.3 Θεωρήματα Υποχώρου

5.3.1 Πρόταση. Έστω $i \in \{0, 1\}$ και Q, K δύο υποσύνολα ενός χώρου X με $K \subseteq Q$. Τότε,

(α) $\mathrm{p}_i\text{-}\mathrm{ind}(K, X) \leq \mathrm{p}_i\text{-}\mathrm{ind}(Q, X)$,

(β) $\mathrm{pos}_i\text{-}\mathrm{ind}(K, X) \leq \mathrm{pos}_i\text{-}\mathrm{ind}(Q, X)$ και

(γ) $\mathrm{ps}_i\text{-}\mathrm{ind}(K, X) \leq \mathrm{ps}_i\text{-}\mathrm{ind}(Q, X)$.

Απόδειξη. (α) Αποδεικνύουμε την ανισότητα

$$\mathrm{p}_0\text{-}\mathrm{ind}(K, X) \leq \mathrm{p}_0\text{-}\mathrm{ind}(Q, X). \tag{5.7}$$

Η περίπτωση $i = 1$ είναι όμοια. Έστω $\mathrm{p}_0\text{-}\mathrm{ind}(Q, X) = \alpha \in \mathcal{O} \cup \{-1, \infty\}$. Εάν $\alpha = -1$ ή $\alpha = \infty$, τότε η ανισότητα (5.7) προφανώς ισχύει. Υποθέτουμε ότι $\alpha \in \mathcal{O}$ και ότι η ανισότητα (5.7) είναι αληθής για κάθε $K \subseteq Q \subseteq X$ με p_0-$\mathrm{ind}(Q, X) < \alpha$. Θα αποδείξουμε ότι p_0-$\mathrm{ind}(Q, X) \leq \alpha$. Εφ' όσον p_0-$\mathrm{ind}(Q, X) = \alpha$, υπάρχει μια p-βάση B για το Q στο X έτσι ώστε για κάθε $U \in B$ να έχουμε

$$\mathrm{p}_0\text{-}\mathrm{ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(U), \mathrm{Bd}_X(U)) < \alpha.$$

Εφ' όσον

$$K \cap \mathrm{Bd}_X(U) \subseteq Q \cap \mathrm{Bd}_X(U),$$

από την υπόθεση της επαγωγής,

$$\mathrm{p}_0\text{-}\mathrm{ind}(K \cap \mathrm{Bd}_X(U), \mathrm{Bd}_X(U)) \leq \mathrm{p}_0\text{-}\mathrm{ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(U), \mathrm{Bd}_X(U)) < \alpha$$

και επειδή η B είναι επίσης μια p-βάση για το K στο X, p_0-$\mathrm{ind}(K, X) \leq \alpha$.

(β) Αποδεικνύουμε την ανισότητα

$$\mathrm{pos}_0\text{-}\mathrm{ind}(K, X) \leq \mathrm{pos}_0\text{-}\mathrm{ind}(Q, X). \tag{5.8}$$

Η περίπτωση $i = 1$ είναι όμοια. Έστω pos_0-$\mathrm{ind}(Q, X) = \alpha \in \mathcal{O} \cup \{-1, \infty\}$. Εάν $\alpha = -1$ ή $\alpha = \infty$, τότε η σχέση (5.8) είναι προφανής. Υποθέτουμε ότι $\alpha \in \mathcal{O}$ και ότι η σχέση (5.8) είναι αληθής για κάθε $K \subseteq Q \subseteq X$ με pos_0-$\mathrm{ind}(Q, X) < \alpha$. Θα αποδείξουμε ότι pos_0-$\mathrm{ind}(Q, X) \leq \alpha$. Εφ' όσον pos_0-$\mathrm{ind}(Q, X) = \alpha$, υπάρχει μια p-βάση B για το Q στο X έτσι ώστε για κάθε $U \in B$ να έχουμε

$$\mathrm{pos}_0\text{-}\mathrm{ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(U), \mathrm{Bd}_X(U)) < \alpha.$$

Εφ' όσον

$$K \cap \mathrm{Bd}_X(U) \subseteq Q \cap \mathrm{Bd}_X(U),$$

από την υπόθεση της επαγωγής,

$$\mathrm{pos}_0\text{-}\mathrm{ind}(K \cap \mathrm{Bd}_X(U), \mathrm{Bd}_X(U)) \leq \mathrm{pos}_0\text{-}\mathrm{ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(U), \mathrm{Bd}_X(U)) < \alpha$$

και επειδή η B είναι επίσης μια pos-βάση για το K στο X, pos_0-$\mathrm{ind}(K, X) \leq \alpha$.

(γ) Αποδεικνύουμε την ανισότητα

$$\mathrm{ps}_0\text{-}\mathrm{ind}(K, X) \leq \mathrm{ps}_0\text{-}\mathrm{ind}(Q, X). \tag{5.9}$$

Η περίπτωση $i = 1$ είναι όμοια. Έστω ps_0-$\mathrm{ind}(Q, X) = \alpha \in \mathcal{O} \cup \{-1, \infty\}$. Εάν $\alpha = -1$ ή $\alpha = \infty$, τότε η σχέση (5.9) είναι προφανής. Υποθέτουμε ότι $\alpha \in \mathcal{O}$ και ότι η σχέση (5.9) είναι αληθής για κάθε $K \subseteq Q \subseteq X$ με ps_0-$\mathrm{ind}(Q, X) < \alpha$. Θα αποδείξουμε ότι

$\text{ps}_0\text{-ind}(Q, X) \leq \alpha$. Εφ' όσον $\text{ps}_0\text{-ind}(Q, X) = \alpha$, υπάρχει μια ps-βάση B για το Q στο X έτσι ώστε για κάθε $U \in B$ να έχουμε

$$\text{ps}_0\text{-ind}(Q \cap \text{Bd}_X(U), \text{Bd}_X(U)) < \alpha.$$

Εφ' όσον

$$K \cap \text{Bd}_X(U) \subseteq Q \cap \text{Bd}_X(U),$$

από την υπόθεση της επαγωγής,

$$\text{ps}_0\text{-ind}(K \cap \text{Bd}_X(U), \text{Bd}_X(U)) \leq \text{ps}_0\text{-ind}(Q \cap \text{Bd}_X(U), \text{Bd}_X(U)) < \alpha$$

και επειδή η B είναι επίσης μια ps-βάση για το K στο X, $\text{ps}_0\text{-ind}(K, X) \leq \alpha$. ■

5.3.2 Πρόταση. Έστω $i \in \{0, 1\}$, Y ένας υπόχωρος ενός χώρου X και $Q \subseteq Y$. Τότε,
(α) $\text{p}_i\text{-ind}(Q, Y) \leq \text{p}_i\text{-ind}(Q, X)$,
(β) $\text{pos}_i\text{-ind}(Q, Y) \leq \text{pos}_i\text{-ind}(Q, X)$ και
(γ) $\text{ps}_i\text{-ind}(Q, Y) \leq \text{ps}_i\text{-ind}(Q, X)$.

Απόδειξη. (α) Αποδεικνύουμε την ανισότητα

$$\text{p}_1\text{-ind}(Q, Y) \leq \text{p}_1\text{-ind}(Q, X). \tag{5.10}$$

Η περίπτωση $i = 0$ είναι όμοια. Έστω $\text{p}_1\text{-ind}(Q, X) = \alpha \in \mathcal{O} \cup \{-1, \infty\}$. Εάν $\alpha = -1$ ή $\alpha = \infty$, τότε η σχέση (5.10) είναι προφανής. Υποθέτουμε ότι $\alpha \in \mathcal{O}$ και ότι η σχέση (5.10) είναι αληθής για κάθε $Q \subseteq Y \subseteq X$ με $\text{p}_1\text{-ind}(Q, X) < \alpha$. Θα αποδείξουμε ότι $\text{p}_1\text{-ind}(Q, Y) \leq \alpha$. Εφ' όσον $\text{p}_1\text{-ind}(Q, X) = \alpha$, υπάρχει μια p-βάση B για το Q στο X έτσι ώστε για κάθε $U \in B$ να έχουμε

$$\text{p}_1\text{-ind}(Q \cap \text{Bd}_X(U), X) < \alpha.$$

Εφ' όσον

$$\text{Bd}_Y(U \cap Y) \subseteq Y \cap \text{Bd}_X(U) \subseteq \text{Bd}_X(U),$$

από την Πρόταση 5.3.1,

$$\text{p}_1\text{-ind}(Q \cap \text{Bd}_Y(U \cap Y), X) \leq \text{p}_1\text{-ind}(Q \cap \text{Bd}_X(U), X) < \alpha.$$

Επίσης, από την υπόθεση της επαγωγής,

$$\text{p}_1\text{-ind}(Q \cap \text{Bd}_Y(U \cap Y), Y) \leq \text{p}_1\text{-ind}(Q \cap \text{Bd}_Y(U \cap Y), X) < \alpha$$

και επειδή το σύνολο $\{U \cap Y : U \in B\}$ είναι μια p-βάση για το Q στο Y, έχουμε $\mathrm{p}_1\text{-ind}(Q, Y) \leq \alpha$.

(β) Αποδεικνύουμε την ανισότητα

$$\mathrm{pos}_1\text{-ind}(Q, Y) \leq \mathrm{pos}_1\text{-ind}(Q, X). \tag{5.11}$$

Η περίπτωση $i = 0$ είναι όμοια. Έστω $\mathrm{pos}_1\text{-ind}(Q, X) = \alpha \in \mathcal{O} \cup \{-1, \infty\}$. Εάν $\alpha = -1$ ή $\alpha = \infty$, τότε η σχέση (5.11) είναι προφανής. Υποθέτουμε ότι $\alpha \in \mathcal{O}$ και ότι η σχέση (5.11) είναι αληθής για κάθε $Q \subseteq Y \subseteq X$ με $\mathrm{pos}_1\text{-ind}(Q, X) < \alpha$. Θα αποδείξουμε ότι $\mathrm{pos}_1\text{-ind}(Q, Y) \leq \alpha$. Εφ' όσον $\mathrm{pos}_1\text{-ind}(Q, X) = \alpha$, υπάρχει μια pos-βάση B για το Q στο X έτσι ώστε για κάθε $U \in B$ να έχουμε

$$\mathrm{pos}_1\text{-ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(U), X) < \alpha.$$

Εφ' όσον

$$\mathrm{Bd}_Y(U \cap Y) \subseteq Y \cap \mathrm{Bd}_X(U) \subseteq \mathrm{Bd}_X(U),$$

από την Πρόταση 5.3.1,

$$\mathrm{pos}_1\text{-ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_Y(U \cap Y), X) \leq \mathrm{pos}_1\text{-ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(U), X) < \alpha.$$

Επίσης, από την υπόθεση της επαγωγής,

$$\mathrm{pos}_1\text{-ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_Y(U \cap Y), Y) \leq \mathrm{pos}_1\text{-ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_Y(U \cap Y), X) < \alpha$$

και επειδή το σύνολο $\{U \cap Y : U \in B\}$ είναι μια pos-βάση για το Q στο Y, έχουμε $\mathrm{pos}_1\text{-ind}(Q, Y) \leq \alpha$.

(γ) Αποδεικνύουμε την ανισότητα

$$\mathrm{ps}_1\text{-ind}(Q, Y) \leq \mathrm{ps}_1\text{-ind}(Q, X). \tag{5.12}$$

Η περίπτωση $i = 0$ είναι όμοια. Έστω $\mathrm{ps}_1\text{-ind}(Q, X) = \alpha \in \mathcal{O} \cup \{-1, \infty\}$. Εάν $\alpha = -1$ ή $\alpha = \infty$, τότε η σχέση (5.12) είναι προφανής. Υποθέτουμε ότι $\alpha \in \mathcal{O}$ και ότι η σχέση (5.12) είναι αληθής για κάθε $Q \subseteq Y \subseteq X$ με $\mathrm{ps}_1\text{-ind}(Q, X) < \alpha$. Θα αποδείξουμε ότι $\mathrm{ps}_1\text{-ind}(Q, Y) \leq \alpha$. Εφ' όσον $\mathrm{ps}_1\text{-ind}(Q, X) = \alpha$, υπάρχει μια ps-βάση B για το Q στο X έτσι ώστε για κάθε $U \in B$ να έχουμε

$$\mathrm{ps}_1\text{-ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(U), X) < \alpha.$$

Εφ' όσον

$$\mathrm{Bd}_Y(U \cap Y) \subseteq Y \cap \mathrm{Bd}_X(U) \subseteq \mathrm{Bd}_X(U),$$

από την Πρόταση 5.3.1,

$$\mathrm{ps}_1\text{-}\mathrm{ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_Y(U \cap Y), X) \leq \mathrm{ps}_1\text{-}\mathrm{ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(U), X) < \alpha.$$

Επίσης, από την υπόθεση της επαγωγής,

$$\mathrm{ps}_1\text{-}\mathrm{ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_Y(U \cap Y), Y) \leq \mathrm{ps}_1\text{-}\mathrm{ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_Y(U \cap Y), X) < \alpha$$

και επειδή το σύνολο $\{U \cap Y : U \in B\}$ είναι μια ps-βάση για το Q στο Y, έχουμε ps_1-ind$(Q, Y) \leq \alpha$. ■

5.3.3 Πρόταση. Έστω Y ένα πυκνό υποσύνολο ενός χώρου X και $Q \subseteq Y$. Τότε,

(α) p_1-ind$(Q, Y) = \mathrm{p}_1$-ind(Q, X).

(β) pos_1-ind$(Q, Y) = \mathrm{pos}_1$-ind(Q, X).

Απόδειξη. (α) Από την Πρόταση 5.3.2 αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\mathrm{p}_1\text{-}\mathrm{ind}(Q, X) \leq \mathrm{p}_1\text{-}\mathrm{ind}(Q, Y). \tag{5.13}$$

Έστω p_1-ind$(Q, Y) = \alpha \in \mathcal{O} \cup \{-1, \infty\}$. Εάν $\alpha = -1$ ή $\alpha = \infty$, τότε η σχέση (5.13) είναι προφανής. Υποθέτουμε ότι $\alpha \in \mathcal{O}$ και ότι η σχέση (5.13) είναι αληθής για κάθε $Q \subseteq Y \subseteq X$ με p_1-ind$(Q, Y) < \alpha$, όπου το Y είναι πυκνό στο X. Θα αποδείξουμε ότι p_1-ind$(Q, X) \leq \alpha$. Εφ' όσον p_1-ind$(Q, Y) = \alpha$, υπάρχει μια p-βάση B για το Q στο Y έτσι ώστε για κάθε $U \in B$ να έχουμε p_1-ind$(Q \cap \mathrm{Bd}_Y(U), Y) < \alpha$.

Το σύνολο όλων των ανοικτών υποσυνόλων V του X έτσι ώστε $V \cap Y \in B$ είναι μια p-βάση για το Q στο X. Εφ' όσον το Y είναι πυκνό στο X, για κάθε ανοικτό υποσυνόλο V του X έχουμε

$$\mathrm{Bd}_Y(V \cap Y) = Y \cap \mathrm{Bd}_X(V)$$

και, επομένως,

$$Q \cap \mathrm{Bd}_Y(V \cap Y) = Q \cap \mathrm{Bd}_X(V).$$

Από την υπόθεση της επαγωγής, εάν $V \cap Y \in B$, τότε έχουμε

$$\begin{aligned} \mathrm{p}_1\text{-}\mathrm{ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(V), X) &= \mathrm{p}_1\text{-}\mathrm{ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_Y(V \cap Y), X) \\ &\leq \mathrm{p}_1\text{-}\mathrm{ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_Y(V \cap Y), Y) < \alpha. \end{aligned}$$

Συνεπώς, p_1-ind$(Q, X) \leq \alpha$.

(β) Από την Πρόταση 5.3.2 αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\mathrm{pos}_1\text{-}\mathrm{ind}(Q, X) \leq \mathrm{pos}_1\text{-}\mathrm{ind}(Q, Y). \tag{5.14}$$

Έστω $\mathrm{pos}_1\text{-}\mathrm{ind}(Q,Y) = \alpha \in \mathcal{O} \cup \{-1,\infty\}$. Εάν $\alpha = -1$ ή $\alpha = \infty$, τότε η σχέση (5.14) είναι προφανής. Υποθέτουμε ότι $\alpha \in \mathcal{O}$ και ότι η σχέση (5.14) είναι αληθής για κάθε $Q \subseteq Y \subseteq X$ με $\mathrm{pos}_1\text{-}\mathrm{ind}(Q,Y) < \alpha$, όπου το Y είναι πυκνό στο X. Θα αποδείξουμε ότι $\mathrm{pos}_1\text{-}\mathrm{ind}(Q,X) \leq \alpha$. Εφ' όσον $\mathrm{pos}_1\text{-}\mathrm{ind}(Q,Y) = \alpha$, υπάρχει μια pos-βάση B για το Q στο Y έτσι ώστε για κάθε $U \in B$ να έχουμε $\mathrm{pos}_1\text{-}\mathrm{ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_Y(U), Y) < \alpha$.

Το σύνολο όλων των ανοικτών υποσυνόλων V του X έτσι ώστε $V \cap Y \in B$ είναι μια pos-βάση για το Q στο X. Εφ' όσον το Y είναι πυκνό στο X, για κάθε ανοικτό υποσύνολο V του X έχουμε

$$\mathrm{Bd}_Y(V \cap Y) = Y \cap \mathrm{Bd}_X(V)$$

και, επομένως,

$$Q \cap \mathrm{Bd}_Y(V \cap Y) = Q \cap \mathrm{Bd}_X(V).$$

Από την υπόθεση της επαγωγής, εάν $V \cap Y \in B$, τότε έχουμε

$$\begin{aligned}\mathrm{pos}_1\text{-}\mathrm{ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(V), X) &= \mathrm{pos}_1\text{-}\mathrm{ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_Y(V \cap Y), X) \\ &\leq \mathrm{pos}_1\text{-}\mathrm{ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_Y(V \cap Y), Y) < \alpha.\end{aligned}$$

Συνεπώς, $\mathrm{pos}_1\text{-}\mathrm{ind}(Q,X) \leq \alpha$. ■

5.4 Θεωρήματα Αθροίσματος

5.4.1 Πρόταση. Έστω Q_1 και Q_2 δύο υποσύνολα ενός χώρου X. Τότε,

(5.15) $$\mathrm{pos}_0\text{-}\mathrm{ind}(Q_1 \cup Q_2, X) \leq \mathrm{pos}_0\text{-}\mathrm{ind}(Q_1, X)(+)\mathrm{pos}_0\text{-}\mathrm{ind}(Q_2, X).$$

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε τη σχέση (5.15) με επαγωγή επί του α, όπου

$$\alpha = \mathrm{pos}_0\text{-}\mathrm{ind}(Q_1, X)(+)\mathrm{pos}_0\text{-}\mathrm{ind}(Q_2, X).$$

Εάν $\alpha = -1$, τότε $\mathrm{pos}_0\text{-}\mathrm{ind}(Q_1, X) = \mathrm{pos}_0\text{-}\mathrm{ind}(Q_2, X) = -1$ που σημαίνει ότι

$$Q_1 \cup Q_2 = X = \emptyset$$

και επομένως η σχέση (5.15) ισχύει. Υποθέτουμε ότι για κάθε χώρο X και κάθε δύο υποσύνολα Q_1, Q_2 του X η σχέση (5.15) είναι αληθής εάν

$$\mathrm{pos}_0\text{-}\mathrm{ind}(Q_1, X)(+)\mathrm{pos}_0\text{-}\mathrm{ind}(Q_2, X) < \alpha,$$

όπου α είναι ένας σταθερός διατακτικός αριθμός. Θα αποδείξουμε τη σχέση (5.15) για

$$\mathrm{pos}_0\text{-ind}(Q_1, X)(+)\mathrm{pos}_0\text{-ind}(Q_2, X) = \alpha.$$

Έστω

$$\mathrm{pos}_0\text{-ind}(Q_1, X) = \alpha_1$$

και

$$\mathrm{pos}_0\text{-ind}(Q_2, X) = \alpha_2,$$

όπου $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{O} \cup \{-1\}$. Εάν ένα από τα στοιχεία α_1, α_2 είναι ίσο με το -1, τότε και το άλλο είναι ίσο με το -1 και επομένως το $\alpha = -1$ δεν είναι διατακτικός αριθμός . Συνεπώς, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{O}$.

Υπάρχει μια pos-βάση B_1 για το Q_1 στο X και μια pos-βάση B_2 για το Q_2 στο X έτσι ώστε

$$\mathrm{pos}_0\text{-ind}(Q_1 \cap \mathrm{Bd}_X(U_1), \mathrm{Bd}_X(U_1)) < \alpha_1$$

και

$$\mathrm{pos}_0\text{-ind}(Q_2 \cap \mathrm{Bd}_X(U_2), \mathrm{Bd}_X(U_2)) < \alpha_2$$

για κάθε $U_1 \in B_1$ και $U_2 \in B_2$. Το σύνολο $B \equiv B_1 \cup B_2$ μια pos-βάση για το $Q_1 \cup Q_2$ στο X. Έστω $U \in B$, για παράδειγμα, $U \in B_1$. Τότε,

$$\mathrm{pos}_0\text{-ind}(Q_1 \cap \mathrm{Bd}_X(U), \mathrm{Bd}_X(U)) < \alpha_1$$

και, από τις Προτάσεις 5.3.1(β) και 5.3.2(β),

$$\mathrm{pos}_0\text{-ind}(Q_2 \cap \mathrm{Bd}_X(U), \mathrm{Bd}_X(U)) \leq \mathrm{pos}_0\text{-ind}(Q_2, X) = \alpha_2.$$

Από την υπόθεση της επαγωγής, έχουμε

$$\begin{aligned}
&\mathrm{pos}_0\text{-ind}((Q_1 \cup Q_2) \cap \mathrm{Bd}_X(U), \mathrm{Bd}_X(U)) = \\
&\mathrm{pos}_0\text{-ind}((Q_1 \cap \mathrm{Bd}_X(U)) \cup (Q_2 \cap \mathrm{Bd}_X(U)), \mathrm{Bd}_X(U)) \leq \\
&\mathrm{pos}_0\text{-ind}(Q_1 \cap \mathrm{Bd}_X(U), \mathrm{Bd}_X(U))(+)\mathrm{pos}_0\text{-ind}(Q_2 \cap \mathrm{Bd}_X(U), \mathrm{Bd}_X(U)) < \\
&\alpha_1(+)\alpha_2 = \alpha.
\end{aligned}$$

Συνεπώς, $\mathrm{pos}_0\text{-ind}(Q_1 \cup Q_2, X) \leq \alpha$. ■

5.4.2 Πρόταση. Έστω Q_1 και Q_2 δύο υποσύνολα ενός χώρου X. Τότε,

$$\mathrm{pos}_1\text{-ind}(Q_1 \cup Q_2, X) \leq \mathrm{pos}_1\text{-ind}(Q_1, X)(+)\mathrm{pos}_1\text{-ind}(Q_2, X) + 1 \tag{5.16}$$

και

$$\text{(5.17)} \qquad \mathrm{ps}_1\text{-ind}(Q_1 \cup Q_2, X) \leq \mathrm{ps}_1\text{-ind}(Q_1, X)(+)\mathrm{ps}_1\text{-ind}(Q_2, X) + 1.$$

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε τη σχέση (5.16) με επαγωγή επί του α, όπου

$$\alpha = \mathrm{pos}_1\text{-ind}(Q_1, X)(+)\mathrm{pos}_1\text{-ind}(Q_2, X).$$

Εάν $\alpha = -1$, τότε $\mathrm{pos}_1\text{-ind}(Q_1, X) = \mathrm{pos}_1\text{-ind}(Q_2, X) = -1$ που σημαίνει ότι

$$Q_1 \cup Q_2 = \emptyset$$

και επομένως η σχέση (5.16) ισχύει. Υποθέτουμε ότι για κάθε χώρο X και κάθε δύο υποσύνολα Q_1, Q_2 του X η σχέση (5.16) είναι αληθής εάν

$$\mathrm{pos}_1\text{-ind}(Q_1, X)(+)\mathrm{pos}_1\text{-ind}(Q_2, X) < \alpha,$$

όπου α είναι ένας σταθερός διατακτικός αριθμός. Θα αποδείξουμε τη σχέση (5.16) για

$$\mathrm{pos}_1\text{-ind}(Q_1, X)(+)\mathrm{pos}_1\text{-ind}(Q_2, X) = \alpha.$$

Έστω

$$\mathrm{pos}_1\text{-ind}(Q_1, X) = \alpha_1$$

και

$$\mathrm{pos}_1\text{-ind}(Q_2, X) = \alpha_2,$$

όπου $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{O} \cup \{-1\}$. Εάν $\alpha_1 = -1$ ή $\alpha_2 = -1$, τότε $Q_1 = \emptyset$ ή $Q_2 = \emptyset$, αντίστοιχα και επομένως η σχέση (5.16) ισχύει. Υποθέτουμε ότι $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{O}$.

Υπάρχει μια pos-βάση B_1 για το Q_1 στο X και μια pos-βάση B_2 για το Q_2 στο X έτσι ώστε

$$\mathrm{pos}_1\text{-ind}(Q_1 \cap \mathrm{Bd}_X(U_1), X) < \alpha_1$$

και

$$\mathrm{pos}_1\text{-ind}(Q_2 \cap \mathrm{Bd}_X(U_2), X) < \alpha_2$$

για κάθε $U_1 \in B_1$ και $U_2 \in B_2$. Το σύνολο $B \equiv B_1 \cup B_2$ μια pos-βάση για το $Q_1 \cup Q_2$ στο X. Έστω $U \in B$, για παράδειγμα, $U \in B_1$. Τότε,

$$\mathrm{pos}_1\text{-ind}(Q_1 \cap \mathrm{Bd}_X(U), X) < \alpha_1$$

και, από την Πρόταση 5.3.1(β),

$$\mathrm{pos}_1\text{-ind}(Q_2 \cap \mathrm{Bd}_X(U), X) \leq \mathrm{pos}_1\text{-ind}(Q_2, X) = \alpha_2.$$

Από την υπόθεση της επαγωγής, έχουμε

$$\begin{aligned}&\mathrm{pos}_1\text{-ind}((Q_1 \cup Q_2) \cap \mathrm{Bd}_X(U), X) =\\ &\mathrm{pos}_1\text{-ind}((Q_1 \cap \mathrm{Bd}_X(U)) \cup (Q_2 \cap \mathrm{Bd}_X(U)), X) \leq\\ &\mathrm{pos}_1\text{-ind}(Q_1 \cap \mathrm{Bd}_X(U), X)(+)\mathrm{pos}_1\text{-ind}(Q_2 \cap \mathrm{Bd}_X(U), X) + 1 <\\ &\alpha_1(+)\alpha_2 + 1 = \alpha + 1.\end{aligned}$$

Συνεπώς, $\mathrm{pos}_1\text{-ind}(Q_1 \cup Q_2, X) \leq \alpha + 1$.

Θα αποδείξουμε τη σχέση (5.17) με επαγωγή επί του α, όπου

$$\alpha = \mathrm{ps}_1\text{-ind}(Q_1, X)(+)\mathrm{ps}_1\text{-ind}(Q_2, X).$$

Εάν $\alpha = -1$, τότε $\mathrm{ps}_1\text{-ind}(Q_1, X) = \mathrm{ps}_1\text{-ind}(Q_2, X) = -1$ που σημαίνει ότι

$$Q_1 \cup Q_2 = \emptyset$$

και επομένως η σχέση (5.17) ισχύει. Υποθέτουμε ότι για κάθε χώρο X και κάθε δύο υποσύνολα Q_1, Q_2 του X η σχέση (5.17) είναι αληθής εάν

$$\mathrm{ps}_1\text{-ind}(Q_1, X)(+)\mathrm{ps}_1\text{-ind}(Q_2, X) < \alpha,$$

όπου α είναι ένας σταθερός διατακτικός αριθμός. Θα αποδείξουμε τη σχέση (5.17) για

$$\mathrm{ps}_1\text{-ind}(Q_1, X)(+)\mathrm{ps}_1\text{-ind}(Q_2, X) = \alpha.$$

Έστω

$$\mathrm{ps}_1\text{-ind}(Q_1, X) = \alpha_1$$

και

$$\mathrm{ps}_1\text{-ind}(Q_2, X) = \alpha_2,$$

όπου $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{O} \cup \{-1\}$. Εάν $\alpha_1 = -1$ ή $\alpha_2 = -1$, τότε $Q_1 = \emptyset$ ή $Q_2 = \emptyset$, αντίστοιχα και επομένως η σχέση (5.17) ισχύει. Υποθέτουμε ότι $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{O}$.

Υπάρχει μια ps-βάση B_1 για το Q_1 στο X και μια ps-βάση B_2 για το Q_2 στο X έτσι ώστε

$$\mathrm{ps}_1\text{-ind}(Q_1 \cap \mathrm{Bd}_X(U_1), X) < \alpha_1$$

και

$$\mathrm{ps}_1\text{-ind}(Q_2 \cap \mathrm{Bd}_X(U_2), X) < \alpha_2$$

για κάθε $U_1 \in B_1$ και $U_2 \in B_2$. Το σύνολο $B \equiv B_1 \cup B_2$ μια ps-βάση για το $Q_1 \cup Q_2$ στο X. Έστω $U \in B$, για παράδειγμα, $U \in B_1$. Τότε,

$$\text{ps}_1\text{-ind}(Q_1 \cap \text{Bd}_X(U), X) < \alpha_1$$

και, από την Πρόταση 5.3.1(γ),

$$\text{ps}_1\text{-ind}(Q_2 \cap \text{Bd}_X(U), X) \leq \text{ps}_1\text{-ind}(Q_2, X) = \alpha_2.$$

Από την υπόθεση της επαγωγής, έχουμε

$$\begin{aligned}
&\text{ps}_1\text{-ind}((Q_1 \cup Q_2) \cap \text{Bd}_X(U), X) = \\
&\text{ps}_1\text{-ind}((Q_1 \cap \text{Bd}_X(U)) \cup (Q_2 \cap \text{Bd}_X(U)), X) \leq \\
&\text{ps}_1\text{-ind}(Q_1 \cap \text{Bd}_X(U), X)(+)\text{ps}_1\text{-ind}(Q_2 \cap \text{Bd}_X(U), X) + 1 < \\
&\alpha_1(+)\alpha_2 + 1 = \alpha + 1.
\end{aligned}$$

Συνεπώς, $\text{ps}_1\text{-ind}(Q_1 \cup Q_2, X) \leq \alpha + 1$. ■

5.5 Απεικονίσεις

5.5.1 Πρόταση. Έστω $f : X \to Y$ συνεχής απεικόνιση και $Q \subseteq X$. Εάν ο περιορισμός $f|_Q$ της απεικόνισης f επί του Q είναι ομοιομορφισμός, τότε

$$\text{p}_1\text{-ind}(Q, X) \leq \text{p}_1\text{-ind}(f(Q), Y) \tag{5.18}$$

και

$$\text{pos}_1\text{-ind}(Q, X) \leq \text{pos}_1\text{-ind}(f(Q), Y). \tag{5.19}$$

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε τη σχέση (5.18) με επαγωγή επί του στοιχείου

$$\text{p}_1\text{-ind}(f(Q), Y) \in \mathcal{O} \cup \{-1, \infty\}.$$

Η σχέση (5.18) ισχύει εάν $\text{p}_1\text{-ind}(f(Q), Y) = -1$ ή $\text{p}_1\text{-ind}(f(Q), Y) = \infty$. Υποθέτουμε ότι η σχέση (5.18) ισχύει εάν $\text{p}_1\text{-ind}(f(Q), Y) < \alpha \in \mathcal{O}$ και αποδεικνύουμε ότι ισχύει για $\text{p}_1\text{-ind}(f(Q), Y) = \alpha$. Υπάρχει μια p-βάση B για το $f(Q)$ στο Y έτσι ώστε για κάθε $W \in B$ να έχουμε

$$\text{p}_1\text{-ind}(f(Q) \cap \text{Bd}_Y(W), Y) < \alpha.$$

Το σύνολο $\{f^{-1}(W) : W \in B\}$ είναι μια p-βάση για το Q στο X. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\mathrm{p}_1\text{-ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(f^{-1}(W)), X) < \alpha$ για κάθε $W \in B$. Εφ' όσον η απεικόνιση f είναι συνεχής, έχουμε $f(\mathrm{Bd}_X(f^{-1}(W))) \subseteq \mathrm{Bd}_Y(W)$. Από την Πρόταση 5.3.1(α),

$$\begin{aligned} \mathrm{p}_1\text{-ind}(f(Q \cap \mathrm{Bd}_X(f^{-1}(W))), Y) &= \mathrm{p}_1\text{-ind}(f(Q) \cap f(\mathrm{Bd}_X(f^{-1}(W))), Y) \\ &\leq \mathrm{p}_1\text{-ind}(f(Q) \cap \mathrm{Bd}_Y(W), Y) < \alpha. \end{aligned}$$

Συνεπώς, από την υπόθεση της επαγωγής,

$$\mathrm{p}_1\text{-ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(f^{-1}(W)), X) \leq \mathrm{p}_1\text{-ind}(f(Q) \cap \mathrm{Bd}_Y(W), Y) < \alpha$$

και επομένως $\mathrm{p}_1\text{-ind}(Q, X) \leq \alpha$.

Θα αποδείξουμε τη σχέση (5.19) με επαγωγή επί του στοιχείου

$$\mathrm{pos}_1\text{-ind}(f(Q), Y) \in \mathcal{O} \cup \{-1, \infty\}.$$

Η σχέση (5.19) ισχύει εάν $\mathrm{pos}_1\text{-ind}(f(Q), Y) = -1$ ή $\mathrm{pos}_1\text{-ind}(f(Q), Y) = \infty$. Υποθέτουμε ότι η σχέση (5.19) ισχύει εάν $\mathrm{pos}_1\text{-ind}(f(Q), Y) < \alpha \in \mathcal{O}$ και αποδεικνύουμε ότι ισχύει για $\mathrm{pos}_1\text{-ind}(f(Q), Y) = \alpha$. Υπάρχει μια pos-βάση B για το $f(Q)$ στο Y έτσι ώστε για κάθε $W \in B$ να έχουμε

$$\mathrm{pos}_1\text{-ind}(f(Q) \cap \mathrm{Bd}_Y(W), Y) < \alpha.$$

Το σύνολο $\{f^{-1}(W) : W \in B\}$ είναι μια pos-βάση για το Q στο X. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\mathrm{pos}_1\text{-ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(f^{-1}(W)), X) < \alpha$ για κάθε $W \in B$. Εφ' όσον η απεικόνιση f είναι συνεχής, έχουμε $f(\mathrm{Bd}_X(f^{-1}(W))) \subseteq \mathrm{Bd}_Y(W)$. Από την Πρόταση 5.3.1(β),

$$\begin{aligned} \mathrm{pos}_1\text{-ind}(f(Q \cap \mathrm{Bd}_X(f^{-1}(W))), Y) &= \mathrm{pos}_1\text{-ind}(f(Q) \cap f(\mathrm{Bd}_X(f^{-1}(W))), Y) \\ &\leq \mathrm{pos}_1\text{-ind}(f(Q) \cap \mathrm{Bd}_Y(W), Y) < \alpha. \end{aligned}$$

Συνεπώς, από την υπόθεση της επαγωγής,

$$\mathrm{pos}_1\text{-ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(f^{-1}(W)), X) \leq \mathrm{pos}_1\text{-ind}(f(Q) \cap \mathrm{Bd}_Y(W), Y) < \alpha$$

και επομένως $\mathrm{pos}_1\text{-ind}(Q, X) \leq \alpha$. ■

Κεφάλαιο 6

Διαστάσεις-συναρτήσεις θέσεως του τύπου Ind

Στην εργασία [40] (βλέπε επίσης [30]) ορίσθηκε μια διάσταση-συνάρτηση θέσεως του τύπου Ind. Στο κεφάλαιο αυτό δίνονται και μελετώνται καινούργιες διαστάσεις-συναρτήσεις θέσεως του τύπου Ind και αποδεικνύονται βασικές ιδιότητες της Θεωρίας Διαστάσεων για τις συναρτήσεις αυτές. Τα αποτελέσματα του κεφαλαίου αυτού είναι όλα πρωτότυπα.

Σε ό,τι ακολουθεί με τη λέξη χώρο θα εννοούμε έναν T_0-χώρο με βάρος $\leq \tau$.

6.1 Βασικοί ορισμοί

6.1.1 Ορισμός. (Βλέπε, για παράδειγμα, [45]) Μια οικογένεια $\mathcal{B}$ από ανοικτά υποσύνολα ενός χώρου X καλείται **μεγάλη βάση** (big base) του X, εάν για κάθε ζεύγος (F, U) από υποσύνολα του X, όπου το F είναι κλειστό, το U είναι ανοικτό και $F \subseteq U$ υπάρχει $V \in \mathcal{B}$ με την ιδιότητα $F \subseteq V \subseteq U$.

6.1.2 Ορισμός. Έστω Q ένα υποσύνολο ενός χώρου X. Μια οικογένεια $\mathcal{B}$ από ανοικτά υποσύνολα του X καλείται **p(0)-μεγάλη βάση του Q στο X** (p(0)-big base for Q in X), εάν για κάθε ζεύγος (F, U) από υποσύνολα του X, όπου το F είναι κλειστό υποσύνολο του X, το U είναι ανοικτό υποσύνολο του X και $F \subseteq Q \cap U$ υπάρχει $V \in \mathcal{B}$ με την ιδιότητα $F \subseteq Q \cap V \subseteq Q \cap U$. Μια p(0)-μεγάλη βάση $\mathcal{B}$ του Q στο X καλείται **pos(0)-μεγάλη βάση του Q στο X** (pos(0)-big base for Q in X), εάν για κάθε ζεύγος (F, U) από υποσύνολα του X, όπου το F είναι κλειστό υποσύνολο του X, το U είναι ανοικτό υποσύνολο του X και $F \subseteq Q \cap U$ υπάρχει $V \in \mathcal{B}$ με την ιδιότητα $F \subseteq V \subseteq U$.

6.1.3 Ορισμός. Θεωρούμε τη συνάρτηση $p_0(0)$-Ind με πεδίο ορισμού την κλάση όλων των ζευγών (Q, X), όπου Q είναι ένα υποσύνολο ενός χώρου X, και πεδίο τιμών την κλάση $\mathcal{O} \cup \{-1, \infty\}$ που ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

(1) $\mathrm{p}_0(0)$-$\mathrm{Ind}(Q, X) = -1$ εάν και μόνον εάν $Q = X = \emptyset$.

(2) $\mathrm{p}_0(0)$-$\mathrm{Ind}(Q, X) \leq \alpha$, όπου $\alpha \in \mathcal{O}$, εάν και μόνον εάν υπάρχει μια $\mathrm{p}(0)$-μεγάλη βάση $\mathcal{B}$ για το Q στο X έτσι ώστε για κάθε $U \in \mathcal{B}$ να έχουμε

$$\mathrm{p}_0(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(U), \mathrm{Bd}_X(U)) < \alpha.$$

6.1.4 Παρατήρηση. Η συνθήκη (2) του Ορισμού 6.1.3 είναι ισοδύναμη με την παρακάτω συνθήκη:
(2′) $\mathrm{p}_0(0)$-$\mathrm{Ind}(Q, X) \leq \alpha$, όπου $\alpha \in \mathcal{O}$, εάν και μόνον εάν για κάθε ζεύγος (F, U) από υποσύνολα του X, όπου το F είναι κλειστό υποσύνολο του X, το U είναι ανοικτό υποσύνολο του X και $F \subseteq Q \cap U$ υπάρχει ανοικτό υποσύνολο V του X έτσι ώστε $F \subseteq Q \cap V \subseteq Q \cap U$ και

$$\mathrm{p}_0(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(V), \mathrm{Bd}_X(V)) < \alpha.$$

6.1.5 Ορισμός. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\mathrm{p}_1(0)$-Ind με πεδίο ορισμού την κλάση όλων των ζευγών (Q, X), όπου Q είναι ένα υποσύνολο ενός χώρου X, και πεδίο τιμών την κλάση $\mathcal{O} \cup \{-1, \infty\}$ που ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

(1) $\mathrm{p}_1(0)$-$\mathrm{Ind}(Q, X) = -1$ εάν και μόνον εάν $Q = \emptyset$.

(2) $\mathrm{p}_1(0)$-$\mathrm{Ind}(Q, X) \leq \alpha$, όπου $\alpha \in \mathcal{O}$, εάν και μόνον εάν υπάρχει μια $\mathrm{p}(0)$-μεγάλη βάση $\mathcal{B}$ για το Q στο X έτσι ώστε για κάθε $U \in \mathcal{B}$ να έχουμε

$$\mathrm{p}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(U), X) < \alpha.$$

6.1.6 Παρατήρηση. Η συνθήκη (2) του Ορισμού 6.1.5 είναι ισοδύναμη με την παρακάτω συνθήκη:
(2′) $\mathrm{p}_1(0)$-$\mathrm{Ind}(Q, X) \leq \alpha$, όπου $\alpha \in \mathcal{O}$, εάν και μόνον εάν για κάθε ζεύγος (F, U) από υποσύνολα του X, όπου το F είναι κλειστό υποσύνολο του X, το U είναι ανοικτό υποσύνολο του X και $F \subseteq Q \cap U$ υπάρχει ανοικτό υποσύνολο V του X έτσι ώστε $F \subseteq Q \cap V \subseteq Q \cap U$ και

$$\mathrm{p}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(V), X) < \alpha.$$

6.1.7 Παρατήρηση. (1) Εάν στους ορισμούς 6.1.3 και 6.1.5 αντί για την $\mathrm{p}(0)$-μεγάλη βάση $\mathcal{B}$ θεωρήσουμε μια $\mathrm{pos}(0)$-μεγάλη βάση $\mathcal{B}$, τότε οι διαστάσεις-συναρτήσεις $\mathrm{p}_i(0)$-Ind, $i \in \{0, 1\}$, θα συμβολίζονται με $\mathrm{pos}_i(0)$-Ind.
(2) Για κάθε χώρο X έχουμε

$$\mathrm{p}_0(0)\text{-}\mathrm{Ind}(X, X) = \mathrm{pos}_0(0)\text{-}\mathrm{Ind}(X, X) = \mathrm{Ind}(X).$$

6.1.8 Ορισμός. Έστω Q ένα υποσύνολο ενός χώρου X. Μια οικογένεια $\mathcal{B}$ από ανοικτά υποσύνολα του X καλείται **p(1)-μεγάλη βάση του Q στο X** (p(1)-big base for Q in X), εάν το σύνολο $\{Q \cap U : U \in \mathcal{B}\}$ είναι μεγάλη βάση για τον υπόχωρο Q. Μια p(1)-μεγάλη βάση $\mathcal{B}$ του Q στο X καλείται **pos(1)-μεγάλη βάση του Q στο X** (pos(1)-big base for Q in X), εάν για κάθε ζεύγος (F^Q, U) από υποσύνολα του X, όπου το F^Q είναι κλειστό υποσύνολο του Q, το U είναι ανοικτό υποσύνολο του X και $F^Q \subseteq U$ υπάρχει $V \in \mathcal{B}$ με την ιδιότητα $F^Q \subseteq V \subseteq U$.

6.1.9 Ορισμός. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\mathrm{p}_0(1)$-Ind με πεδίο ορισμού την κλάση όλων των ζευγών (Q, X), όπου Q είναι ένα υποσύνολο ενός χώρου X, και πεδίο τιμών την κλάση $\mathcal{O} \cup \{-1, \infty\}$ που ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

(1) $\mathrm{p}_0(1)\text{-Ind}(Q, X) = -1$ εάν και μόνον εάν $Q = X = \emptyset$.

(2) $\mathrm{p}_0(1)\text{-Ind}(Q, X) \leq \alpha$, όπου $\alpha \in \mathcal{O}$, εάν και μόνον εάν υπάρχει μια p(1)-μεγάλη βάση $\mathcal{B}$ για το Q στο X έτσι ώστε για κάθε $U \in \mathcal{B}$ να έχουμε

$$\mathrm{p}_0(1)\text{-Ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(U), \mathrm{Bd}_X(U)) < \alpha.$$

6.1.10 Παρατήρηση. Η συνθήκη (2) του Ορισμού 6.1.9 είναι ισοδύναμη με την παρακάτω συνθήκη:

(2′) $\mathrm{p}_0(1)\text{-Ind}(Q, X) \leq \alpha$, όπου $\alpha \in \mathcal{O}$, εάν και μόνον εάν για κάθε ζεύγος (F^Q, U) από υποσύνολα του X, όπου το F^Q είναι κλειστό υποσύνολο του Q, το U είναι ανοικτό υποσύνολο του X και $F^Q \subseteq Q \cap U$ υπάρχει ένα ανοικτό υποσύνολο V του X έτσι ώστε $F^Q \subseteq Q \cap V \subseteq Q \cap U$ και

$$\mathrm{p}_0(1)\text{-Ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(V), \mathrm{Bd}_X(V)) < \alpha.$$

6.1.11 Ορισμός. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\mathrm{p}_1(1)$-Ind με πεδίο ορισμού την κλάση όλων των ζευγών (Q, X), όπου Q είναι ένα υποσύνολο ενός χώρου X, και πεδίο τιμών την κλάση $\mathcal{O} \cup \{-1, \infty\}$ που ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

(1) $\mathrm{p}_1(1)\text{-Ind}(Q, X) = -1$ εάν και μόνον εάν $Q = \emptyset$.

(2) $\mathrm{p}_1(1)\text{-Ind}(Q, X) \leq \alpha$, όπου $\alpha \in \mathcal{O}$, εάν και μόνον εάν υπάρχει μια p(1)-μεγάλη βάση $\mathcal{B}$ για το Q στο X έτσι ώστε για κάθε $U \in \mathcal{B}$ να έχουμε

$$\mathrm{p}_1(1)\text{-Ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(U), X) < \alpha.$$

6.1.12 Παρατήρηση. Η συνθήκη (2) του Ορισμού 6.1.11 είναι ισοδύναμη με την παρακάτω συνθήκη:

(2′) $\mathrm{p}_1(1)$-$\mathrm{Ind}(Q,X) \leq \alpha$, όπου $\alpha \in \mathcal{O}$, εάν και μόνον εάν για κάθε ζεύγος (F^Q, U) από υποσύνολα του X, όπου το F^Q είναι κλειστό υποσύνολο του Q, το U είναι ανοικτό υποσύνολο του X και $F^Q \subseteq Q \cap U$ υπάρχει ένα ανοικτό υποσύνολο V του X έτσι ώστε $F^Q \subseteq Q \cap V \subseteq Q \cap U$ και

$$\mathrm{p}_1(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(V), X) < \alpha.$$

6.1.13 Παρατήρηση. (1) Εάν στους ορισμούς 6.1.9 και 6.1.11 αντί για την $\mathrm{p}(1)$-μεγάλη βάση $\mathcal{B}$ θεωρήσουμε μια $\mathrm{pos}(1)$-μεγάλη βάση $\mathcal{B}$, τότε οι διαστάσεις-συναρτήσεις $\mathrm{p}_i(1)$-Ind, $i \in \{0,1\}$, θα συμβολίζονται με $\mathrm{pos}_i(1)$-Ind. Σημειώνουμε ότι η συνάρτηση-διάσταση $\mathrm{pos}_1(1)$-ind είναι η υπερπεπερασμένη επέκταση της σχετικής μεγάλης επαγωγικής διάστασης που έχει δοθεί στην εργασία [40] (βλέπε επίσης [30]).
(2) Για κάθε χώρο X έχουμε

$$\mathrm{p}_0(1)\text{-}\mathrm{Ind}(X,X) = \mathrm{pos}_0(1)\text{-}\mathrm{Ind}(X,X) = \mathrm{Ind}(X).$$

6.2 Σχέσεις μεταξύ των διαστάσεων θέσεως του τύπου Ind και άλλων διαστάσεων

6.2.1 Πρόταση. Έστω $i \in \{0,1\}$. Για κάθε υποσύνολο Q ενός χώρου X έχουμε

(1) $\mathrm{p}_i(0)$-$\mathrm{Ind}(Q,X) \leq \mathrm{p}_i(1)$-$\mathrm{Ind}(Q,X)$ και

(2) $\mathrm{pos}_i(0)$-$\mathrm{Ind}(Q,X) \leq \mathrm{pos}_i(1)$-$\mathrm{Ind}(Q,X)$.

Εάν επιπλέον το υποσύνολο Q του X είναι κλειστό, τότε

$$\mathrm{p}_i(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q,X) = \mathrm{p}_i(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q,X)$$

και

$$\mathrm{pos}_i(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q,X) = \mathrm{pos}_i(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q,X).$$

Απόδειξη. (1) Αποδεικνύουμε ότι

$$\mathrm{p}_0(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q,X) \leq \mathrm{p}_0(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q,X). \tag{6.1}$$

Η περίπτωση $i = 1$ είναι όμοια. Έστω $\mathrm{p}_0(1)$-$\mathrm{Ind}(Q,X) = \alpha \in \mathcal{O} \cup \{-1, \infty\}$. Εάν $\alpha = -1$ ή $\alpha = \infty$, τότε η σχέση (6.1) είναι προφανής. Υποθέτουμε ότι $\alpha \in \mathcal{O}$ και ότι η σχέση (6.1) είναι αληθής για κάθε ζεύγος (Q^Y, Y) με $\mathrm{p}_0(1)$-$\mathrm{Ind}(Q^Y, Y) < \alpha$. Θα αποδείξουμε ότι

$\mathrm{p}_0(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q,X) \leq \alpha$. Εφ' όσον $\mathrm{p}_0(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q,X) = \alpha$, υπάρχει μια $\mathrm{p}(1)$-μεγάλη βάση $\mathcal{B}$ για το Q στο X έτσι ώστε για κάθε $U \in \mathcal{B}$ να έχουμε

$$\mathrm{p}_0(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(U), \mathrm{Bd}_X(U)) < \alpha.$$

Από την υπόθεση της επαγωγής,

$$\mathrm{p}_0(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(U), \mathrm{Bd}_X(U)) \leq \mathrm{p}_0(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(U), \mathrm{Bd}_X(U))$$

και επειδή η $\mathcal{B}$ είναι επίσης μια $\mathrm{p}(0)$-μεγάλη βάση για το Q στο X, $\mathrm{p}_0(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q,X) \leq \alpha$.

Έστω τώρα ότι το υποσύνολο Q του X είναι κλειστό. Αποδεικνύουμε ότι

$$\mathrm{p}_0(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q,X) = \mathrm{p}_0(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q,X).$$

Η περίπτωση $i = 1$ είναι όμοια. Αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\mathrm{p}_0(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q,X) \leq \mathrm{p}_0(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q,X). \tag{6.2}$$

Έστω $\mathrm{p}_0(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q,X) = \alpha \in \mathcal{O} \cup \{-1,\infty\}$. Εάν $\alpha = -1$ ή $\alpha = \infty$, τότε η σχέση (6.2) είναι προφανής. Υποθέτουμε ότι $\alpha \in \mathcal{O}$ και ότι η σχέση (6.2) είναι αληθής για κάθε ζεύγος (Q^Y, Y) με $\mathrm{p}_0(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q^Y,Y) < \alpha$. Θα αποδείξουμε ότι $\mathrm{p}_0(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q,X) \leq \alpha$. Εφ' όσον $\mathrm{p}_0(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q,X) = \alpha$, υπάρχει μια $\mathrm{p}(0)$-μεγάλη βάση $\mathcal{B}$ για το Q στο X έτσι ώστε για κάθε $U \in \mathcal{B}$ να έχουμε

$$\mathrm{p}_0(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(U), \mathrm{Bd}_X(U)) < \alpha.$$

Από την υπόθεση της επαγωγής,

$$\mathrm{p}_0(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(U), \mathrm{Bd}_X(U)) \leq \mathrm{p}_0(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(U), \mathrm{Bd}_X(U)).$$

Επειδή το υποσύνολο Q του X είναι κλειστό, η $\mathcal{B}$ είναι επίσης μια $\mathrm{p}(1)$-μεγάλη βάση για το Q στο X. Συνεπώς, $\mathrm{p}_0(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q,X) \leq \alpha$.

(2) Αποδεικνύουμε ότι

$$\mathrm{pos}_0(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q,X) \leq \mathrm{pos}_0(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q,X). \tag{6.3}$$

Η περίπτωση $i = 1$ είναι όμοια. Έστω $\mathrm{pos}_0(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q,X) = \alpha \in \mathcal{O} \cup \{-1,\infty\}$. Εάν $\alpha = -1$ ή $\alpha = \infty$, τότε η σχέση (6.3) είναι προφανής. Υποθέτουμε ότι $\alpha \in \mathcal{O}$ και ότι η σχέση (6.3) είναι αληθής για κάθε ζεύγος (Q^Y, Y) με $\mathrm{pos}_0(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q^Y,Y) < \alpha$. Θα αποδείξουμε ότι $\mathrm{pos}_0(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q,X) \leq \alpha$. Εφ' όσον $\mathrm{pos}_0(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q,X) = \alpha$, υπάρχει μια $\mathrm{pos}(1)$-μεγάλη βάση $\mathcal{B}$ για το Q στο X έτσι ώστε για κάθε $U \in \mathcal{B}$ να έχουμε

$$\mathrm{pos}_0(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(U), \mathrm{Bd}_X(U)) < \alpha.$$

Από την υπόθεση της επαγωγής,

$$\mathrm{pos}_0(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(U), \mathrm{Bd}_X(U)) \leq \mathrm{pos}_0(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(U), \mathrm{Bd}_X(U))$$

και επειδή η $\mathcal{B}$ είναι επίσης μια pos(0)-μεγάλη βάση για το Q στο X, $\mathrm{pos}_0(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q, X) \leq \alpha$.

Έστω τώρα ότι το υποσύνολο Q του X είναι κλειστό. Αποδεικνύουμε ότι

$$\mathrm{pos}_0(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q, X) = \mathrm{pos}_0(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q, X).$$

Η περίπτωση $i = 1$ είναι όμοια. Αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\mathrm{pos}_0(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q, X) \leq \mathrm{pos}_0(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q, X). \tag{6.4}$$

Έστω $\mathrm{pos}_0(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q, X) = \alpha \in \mathcal{O} \cup \{-1, \infty\}$. Εάν $\alpha = -1$ ή $\alpha = \infty$, τότε η σχέση (6.4) είναι προφανής. Υποθέτουμε ότι $\alpha \in \mathcal{O}$ και ότι η σχέση (6.4) είναι αληθής για κάθε ζεύγος (Q^Y, Y) με $\mathrm{pos}_0(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q^Y, Y) < \alpha$. Θα αποδείξουμε ότι $\mathrm{pos}_0(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q, X) \leq \alpha$. Εφ' όσον $\mathrm{pos}_0(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q, X) = \alpha$, υπάρχει μια pos(0)-μεγάλη βάση $\mathcal{B}$ για το Q στο X έτσι ώστε για κάθε $U \in \mathcal{B}$ να έχουμε

$$\mathrm{pos}_0(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(U), \mathrm{Bd}_X(U)) < \alpha.$$

Από την υπόθεση της επαγωγής,

$$\mathrm{pos}_0(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(U), \mathrm{Bd}_X(U)) \leq \mathrm{pos}_0(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(U), \mathrm{Bd}_X(U)).$$

Επειδή το υποσύνολο Q του X είναι κλειστό, η $\mathcal{B}$ είναι επίσης μια pos(1)-μεγάλη βάση για το Q στο X. Συνεπώς, $\mathrm{pos}_0(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q, X) \leq \alpha$. ■

6.2.2 Παράδειγμα. Έστω $X = [-1, 1]$ και $Q = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Η οικογένεια που αποτελείται από όλα τα σύνολα της μορφής $[-1, b)$ για $b > 0$, $(a, 1]$ για $a < 0$ και (a, b) είναι βάση για μια τοπολογία επί του X. Παρατηρούμε ότι

$\mathrm{p}_i(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q, X) = \mathrm{pos}_i(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q, X) = 0$ και

$\mathrm{p}_i(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q, X) = \mathrm{pos}_i(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q, X) > 0$, $i \in \{0, 1\}$.

Επομένως οι ανισότητες στην Πρόταση 6.2.1 δεν μπορούν να αντικατασταθούν από ισότητες.

6.2.3 Πρόταση. Έστω $i \in \{0, 1\}$. Για κάθε υποσύνολο Q ενός χώρου X έχουμε

$$\mathrm{Ind}(Q) \leq \mathrm{p}_i(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q, X).$$

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε ότι

$$\mathrm{Ind}(Q) \leq \mathrm{p}_0(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q, X). \tag{6.5}$$

Η περίπτωση $i = 1$ είναι ανάλογη. Έστω $\mathrm{p}_0(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q, X) = \alpha \in \mathcal{O} \cup \{-1, \infty\}$. Εάν $\alpha = -1$ ή $\alpha = \infty$, τότε η σχέση (6.5) είναι προφανής. Υποθέτουμε ότι $\alpha \in \mathcal{O}$ και ότι η σχέση (6.5) είναι αληθής για κάθε ζεύγος (Q^Y, Y) με $\mathrm{p}_0(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q^Y, Y) < \alpha$. Εφ᾽ όσον $\mathrm{p}_0(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q, X) = \alpha$, υπάρχει μια p(1)-μεγάλη βάση $\mathcal{B}$ για το Q στο X έτσι ώστε για κάθε $U \in \mathcal{B}$ να έχουμε

$$\mathrm{p}_0(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(U), \mathrm{Bd}_X(U)) < \alpha.$$

Επειδή το σύνολο $\{Q \cap U : U \in \mathcal{B}\}$ είναι μια μεγάλη βάση για τον υπόχωρο Q, για να αποδείξουμε ότι $\mathrm{Ind}(Q) \leq \alpha$ αρκεί να αποδείξουμε ότι $\mathrm{Ind}(\mathrm{Bd}_Q(Q \cap U)) < \alpha$ για κάθε $U \in \mathcal{B}$. Πράγματι, εφ᾽ όσον $\mathrm{Bd}_Q(Q \cap U) \subseteq Q \cap \mathrm{Bd}_X(U)$, από την υπόθεση της επαγωγής, έχουμε

$$\mathrm{Ind}(\mathrm{Bd}_Q(Q \cap U)) \leq \mathrm{Ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(U)) \leq \mathrm{p}_0(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(U), \mathrm{Bd}_X(U)) < \alpha.$$

Συνεπώς, $\mathrm{Ind}(Q) \leq \alpha$. ■

6.2.4 Παράδειγμα. Έστω $X = \{a, b, c\}$ και $Q = \{a, b\}$. Θεωρούμε επί του X την τοπολογία $\tau = \{\emptyset, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X\}$. Τότε,

$\mathrm{Ind}(Q) = 0$,

$\mathrm{p}_i(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q, X) = \mathrm{pos}_i(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q, X) = 1$ και

$\mathrm{p}_i(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q, X) = \mathrm{pos}_i(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q, X) = 1$, $i \in \{0, 1\}$.

Επομένως η ανισότητα στην Πρόταση 6.2.3 δεν μπορεί να αντικατασταθεί από ισότητα.

6.2.5 Πρόταση. Έστω $i \in \{0, 1\}$. Για κάθε υποσύνολο Q ενός χώρου X έχουμε

(1) $\mathrm{p}_i(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q, X) \leq \mathrm{pos}_i(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q, X)$ και

(2) $\mathrm{p}_i(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q, X) \leq \mathrm{pos}_i(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q, X)$.

Απόδειξη. (1) Αποδεικνύουμε ότι

$$\mathrm{p}_0(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q, X) \leq \mathrm{pos}_0(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q, X). \tag{6.6}$$

Η περίπτωση $i = 1$ είναι όμοια. Έστω $\mathrm{pos}_0(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q, X) = \alpha \in \mathcal{O} \cup \{-1, \infty\}$. Εάν $\alpha = -1$ ή $\alpha = \infty$, τότε η σχέση (6.6) είναι προφανής. Υποθέτουμε ότι $\alpha \in \mathcal{O}$ και ότι η σχέση (6.6) είναι αληθής για κάθε ζεύγος (Q^Y, Y) με $\mathrm{pos}_0(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q^Y, Y) < \alpha$. Θα αποδείξουμε ότι

$\mathrm{p}_0(0)$-$\mathrm{Ind}(Q,X) \leq \alpha$. Εφ' όσον $\mathrm{pos}_0(0)$-$\mathrm{Ind}(Q,X) = \alpha$, υπάρχει μια pos(0)-μεγάλη βάση $\mathcal{B}$ για το Q στο X έτσι ώστε για κάθε $U \in B$ να έχουμε

$$\mathrm{pos}_0(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(U), \mathrm{Bd}_X(U)) < \alpha.$$

Από την υπόθεση της επαγωγής,

$$\mathrm{p}_0(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(U), \mathrm{Bd}_X(U)) \leq \mathrm{pos}_0(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(U), \mathrm{Bd}_X(U))$$

και επειδή η $\mathcal{B}$ είναι επίσης μια p(0)-μεγάλη βάση για το Q στο X, $\mathrm{p}_0(0)$-$\mathrm{Ind}(Q,X) \leq \alpha$.

(2) Αποδεικνύουμε ότι

$$\mathrm{p}_0(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q,X) \leq \mathrm{pos}_0(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q,X). \tag{6.7}$$

Η περίπτωση $i = 1$ είναι όμοια. Έστω $\mathrm{pos}_0(1)$-$\mathrm{Ind}(Q,X) = \alpha \in \mathcal{O} \cup \{-1, \infty\}$. Εάν $\alpha = -1$ ή $\alpha = \infty$, τότε η σχέση (6.7) είναι προφανής. Υποθέτουμε ότι $\alpha \in \mathcal{O}$ και ότι η σχέση (6.7) είναι αληθής για κάθε ζεύγος (Q^Y, Y) με $\mathrm{pos}_0(1)$-$\mathrm{Ind}(Q^Y, Y) < \alpha$. Θα αποδείξουμε ότι $\mathrm{p}_0(1)$-$\mathrm{Ind}(Q,X) \leq \alpha$. Εφ' όσον $\mathrm{pos}_0(1)$-$\mathrm{Ind}(Q,X) = \alpha$, υπάρχει μια pos(1)-μεγάλη βάση $\mathcal{B}$ για το Q στο X έτσι ώστε για κάθε $U \in B$ να έχουμε

$$\mathrm{pos}_0(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(U), \mathrm{Bd}_X(U)) < \alpha.$$

Από την υπόθεση της επαγωγής,

$$\mathrm{p}_0(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(U), \mathrm{Bd}_X(U)) \leq \mathrm{pos}_0(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(U), \mathrm{Bd}_X(U))$$

και επειδή η $\mathcal{B}$ είναι επίσης μια p(1)-μεγάλη βάση για το Q στο X, $\mathrm{p}_0(1)$-$\mathrm{Ind}(Q,X) \leq \alpha$. ■

Από τα παρακάτω παραδείγματα προκύπτει ότι οι ανισότητες για $i = 0$ στην Πρόταση 6.2.5 δεν μπορούν να αντικατασταθούν από ισότητες. Σημειώνουμε ότι η περίπτωση $i = 1$ είναι ανοικτό πρόβλημα.

6.2.6 Παράδειγμα. Έστω $X = \{a, b, c, d\}$ και $Q = \{a\}$. Θεωρούμε επί του X την τοπολογία $\tau = \{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c, d\}, X\}$. Τότε,

$\mathrm{p}_0(0)$-$\mathrm{Ind}(Q,X) = \mathrm{p}_0(1)$-$\mathrm{Ind}(Q,X) = 0$,

$\mathrm{pos}_0(0)$-$\mathrm{Ind}(Q,X) = \mathrm{pos}_0(1)$-$\mathrm{Ind}(Q,X) = 1$ και

$\mathrm{pos}_1(0)$-$\mathrm{Ind}(Q,X) = \mathrm{pos}_1(1)$-$\mathrm{Ind}(Q,X) = 0$.

6.2.7 Παράδειγμα. Έστω $X = \{a, b, c\}$ και $Q = \{a\}$. Θεωρούμε επί του X την τοπολογία $\tau = \{\emptyset, \{a, b\}, X\}$. Τότε, $\mathrm{p}_0(1)$-$\mathrm{Ind}(Q,X) = 0$ και $\mathrm{pos}_0(1)$-$\mathrm{Ind}(Q,X) = 1$.

6.2.8 Παράδειγμα. Έστω $X = \{a, b, c, d\}$. Θεωρούμε επί του X την τοπολογία

$$\tau = \{\emptyset, \{d\}, \{a, d\}, \{b, c, d\}, X\}.$$

Προφανώς, $\mathrm{Ind}(X) = 1$ και $\mathrm{p}_0(1)\text{-}\mathrm{Ind}(\emptyset, X) = \mathrm{pos}_0(1)\text{-}\mathrm{Ind}(\emptyset, X) = 0$. Παρατηρούμε ότι εάν $Q = \{a, b, c\}$, τότε

$\mathrm{p}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q, X) = \mathrm{pos}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q, X) = 2$ και

$\mathrm{p}_1(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q, X) = \mathrm{pos}_1(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q, X) = 2$.

Επίσης, εάν $Q' = \{b\}$, τότε $\mathrm{pos}_0(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q', X) = \mathrm{pos}_1(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q', X) = 0$.

6.2.9 Παράδειγμα. Έστω $X = \{a, b, c, d\}$ και $Q = \{d\}$. Θεωρούμε επί του X την τοπολογία $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, X\}$. Προφανώς, $\mathrm{Ind}(X) = 2$ και $\mathrm{p}_0(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q, X) = \mathrm{pos}_0(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q, X) = 1$.

6.2.10 Παρατήρηση. Οι σχέσεις μεταξύ των διαστάσεων θέσεως του τύπου Ind (βλέπε τις παραπάνω προτάσεις και παραδείγματα) συνοψίζονται στα παρακάτω δύο διαγράμματα, όπου "$\rightarrow$" σημαίνει "$\leq$" και "$\nrightarrow$" σημαίνει ότι "γενικά $\nleq$".

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ind}(Q) \arrow[d, shift left] & \\
\mathrm{p}_0(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q,X) \arrow[u, shift left, "/" marking] \arrow[r, shift left] \arrow[d, shift right, "/" marking] & \mathrm{pos}_0(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q,X) \arrow[l, shift left, "/" marking] \arrow[d, shift right, "/" marking] \\
\mathrm{p}_0(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q,X) \arrow[u, shift right] \arrow[r, shift left] & \mathrm{pos}_0(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q,X) \arrow[l, shift left, "/" marking] \arrow[u, shift right]
\end{tikzcd}$$

Διάγραμμα 6.1

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ind}(Q) \arrow[d, shift left] & \\
\mathrm{p}_1(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q,X) \arrow[u, shift left, "/" marking] \arrow[r] \arrow[d, shift right, "/" marking] & \mathrm{pos}_1(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q,X) \arrow[d, shift right, "/" marking] \\
\mathrm{p}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q,X) \arrow[u, shift right] \arrow[r] & \mathrm{pos}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q,X) \arrow[u, shift right]
\end{tikzcd}$$

Διάγραμμα 6.2

6.2.11 Λήμμα. Έστω X κληρονομικά φυσικός χώρος και $Q \subseteq X$. Για κάθε ανοικτό υποσύνολο V^Q του Q και για κάθε ανοικτό υποσύνολο U του X με $V^Q \subseteq U$ υπάρχει ανοικτό υποσύνολο V του X έτσι ώστε $V \subseteq U$, $V^Q = Q \cap V$ και $\mathrm{Bd}_Q(V^Q) = Q \cap \mathrm{Bd}_X(V)$.

Απόδειξη. Τα σύνολα V^Q και $Q \setminus \mathrm{Cl}_Q(V^Q)$ είναι διαχωρισμένα στο X. Επειδή ο X είναι κληρονομικά φυσικός, υπάρχει ανοικτό υποσύνολο V_0 του X τέτοιο ώστε

$$V^Q \subseteq V_0 \text{ και } \mathrm{Cl}_X(V_0) \cap (Q \setminus \mathrm{Cl}_Q(V^Q)) = \emptyset.$$

Έστω V_1 ανοικτό υποσύνολο του X τέτοιο ώστε $V^Q = Q \cap V_1$. Θέτουμε

$$V = V_0 \cap V_1 \cap U.$$

Τότε, $V \subseteq U$, $V^Q = Q \cap V \subseteq V$ και $\mathrm{Cl}_X(V) \cap (Q \setminus \mathrm{Cl}_Q(V^Q)) = \emptyset$. Άρα,

$$Q \cap \mathrm{Cl}_X(V) \subseteq \mathrm{Cl}_Q(V^Q).$$

Επίσης,

$$\mathrm{Cl}_Q(V^Q) = Q \cap \mathrm{Cl}_X(V^Q) \subseteq Q \cap \mathrm{Cl}_X(V).$$

Συνεπώς, $\mathrm{Cl}_Q(V^Q) = Q \cap \mathrm{Cl}_X(V)$ και επομένως

$$\mathrm{Bd}_Q(V^Q) = \mathrm{Cl}_Q(V^Q) \setminus V^Q = (Q \cap \mathrm{Cl}_X(V)) \setminus (Q \cap V) = Q \cap \mathrm{Bd}_X(V).$$

Άρα, $V \subseteq U$, $V^Q = Q \cap V$ και $\mathrm{Bd}_Q(V^Q) = Q \cap \mathrm{Bd}_X(V)$. ■

6.2.12 Πρόταση. Έστω X κληρονομικά φυσικός χώρος (δηλαδή κάθε υπόχωρος του X είναι φυσικός) και $Q \subseteq X$. Τότε,

$$\mathrm{pos}_1(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q, X) = \mathrm{Ind}(Q).$$

Απόδειξη. Από τις Προτάσεις 6.2.3 και 6.2.5(2), αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\mathrm{pos}_1(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q, X) \leq \mathrm{Ind}(Q). \tag{6.8}$$

Έστω $\mathrm{Ind}(Q) = \alpha \in \mathcal{O} \cup \{-1, \infty\}$. Εάν $\alpha = -1$ ή $\alpha = \infty$, τότε η σχέση (6.8) είναι προφανής. Υποθέτουμε ότι $\alpha \in \mathcal{O}$ και ότι η σχέση (6.8) είναι αληθής για κάθε υποσύνολο M του X με $\mathrm{Ind}(M) < \alpha$. Έστω (F^Q, U) ένα ζεύγος από υποσύνολα του X, όπου το F^Q είναι κλειστό υποσύνολο του Q, το U είναι ανοικτό υποσύνολο του X και $F^Q \subseteq U$. Εφ' όσον $\mathrm{Ind}(Q) = \alpha$, υπάρχει ανοικτό υποσύνολο V^Q του Q τέτοιο ώστε $F^Q \subseteq V^Q \subseteq Q \cap U$ και $\mathrm{Ind}(\mathrm{Bd}_Q(V^Q)) < \alpha$. Από το Λήμμα 6.2.11, υπάρχει ανοικτό υποσύνολο V του X έτσι ώστε $V \subseteq U$, $V^Q = Q \cap V$ και $\mathrm{Bd}_Q(V^Q) = Q \cap \mathrm{Bd}_X(V)$. Από την υπόθεση της επαγωγής, έχουμε

$$\mathrm{pos}_1(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(V), X) \leq \mathrm{Ind}(\mathrm{Bd}_Q(V^Q)) < \alpha.$$

Συνεπώς, $\mathrm{pos}_1(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q, X) \leq \alpha$. ■

6.2.13 Πόρισμα. Έστω X κληρονομικά φυσικός χώρος (δηλαδή κάθε υπόχωρος του X είναι φυσικός) και $Q \subseteq X$. Τότε, $\mathrm{p}_1(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q,X) = \mathrm{Ind}(Q)$.

Απόδειξη. Από τις Προτάσεις 6.2.3, 6.2.5(2) και 6.2.12, έχουμε

$$\mathrm{Ind}(Q) \leq \mathrm{p}_1(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q,X) \leq \mathrm{pos}_1(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q,X) = \mathrm{Ind}(Q).$$

Συνεπώς, $\mathrm{p}_1(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q,X) = \mathrm{Ind}(Q)$. ■

6.2.14 Πόρισμα. Έστω X κληρονομικά φυσικός χώρος (δηλαδή κάθε υπόχωρος του X είναι φυσικός) και $Q \subseteq X$. Τότε, $\mathrm{pos}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q,X) \leq \mathrm{Ind}(Q)$.

Απόδειξη. Από τις Προτάσεις 6.2.1(2) και 6.2.12, έχουμε

$$\mathrm{pos}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q,X) \leq \mathrm{pos}_1(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q,X) = \mathrm{Ind}(Q).$$

Συνεπώς, $\mathrm{pos}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q,X) \leq \mathrm{Ind}(Q)$. ■

6.2.15 Πρόταση. Έστω $i \in \{0,1\}$. Για κάθε υποσύνολο Q ενός T_1-χώρου X έχουμε
(1) $\mathrm{p}_i\text{-}\mathrm{ind}(Q,X) \leq \mathrm{p}_i(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q,X)$ και
(2) $\mathrm{pos}_i\text{-}\mathrm{ind}(Q,X) \leq \mathrm{pos}_i(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q,X)$.

Απόδειξη. Προκύπτει άμεσα από το γεγονός ότι σ' έναν T_1-χώρο κάθε μονοσύνολο είναι κλειστό. ■

6.3 Θεωρήματα Υποχώρου

6.3.1 Πρόταση. Έστω $i \in \{0,1\}$ και Q, K δύο υποσύνολα ενός χώρου X με $K \subseteq Q$. Τότε,
(α) $\mathrm{p}_i(0)\text{-}\mathrm{Ind}(K,X) \leq \mathrm{p}_i(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q,X)$ και
(β) $\mathrm{pos}_i(0)\text{-}\mathrm{Ind}(K,X) \leq \mathrm{pos}_i(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q,X)$.

Απόδειξη. (α) Αποδεικνύουμε την ανισότητα

$$\mathrm{p}_0(0)\text{-}\mathrm{Ind}(K,X) \leq \mathrm{p}_0(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q,X). \tag{6.9}$$

Η περίπτωση $i = 1$ είναι όμοια. Έστω $\mathrm{p}_0(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q,X) = \alpha$, όπου $\alpha \in \mathcal{O} \cup \{-1, \infty\}$. Εάν $\alpha = -1$ ή $\alpha = \infty$, τότε η ανισότητα (6.9) είναι προφανής. Υποθέτουμε ότι $\alpha \in \mathcal{O}$ και ότι η ανισότητα (6.9) είναι αληθής για κάθε $K \subseteq Q \subseteq X$ με $\mathrm{p}_0(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q,X) < \alpha$. Υπάρχει μια $\mathrm{p}(0)$-μεγάλη βάση $\mathcal{B}$ για το Q στο X έτσι ώστε για κάθε $U \in \mathcal{B}$ να έχουμε

$$\mathrm{p}_0(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(U), \mathrm{Bd}_X(U)) < \alpha.$$

Εφ' όσον $K \cap \mathrm{Bd}_X(U) \subseteq Q \cap \mathrm{Bd}_X(U)$, από την υπόθεση της επαγωγής,

$$\mathrm{p}_0(0)\text{-}\mathrm{Ind}(K \cap \mathrm{Bd}_X(U), \mathrm{Bd}_X(U)) \leq \mathrm{p}_0(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(U), \mathrm{Bd}_X(U)) < \alpha$$

και επειδή η $\mathcal{B}$ είναι μια p(0)-μεγάλη βάση για το K στο X, $\mathrm{p}_0(0)\text{-}\mathrm{Ind}(K, X) \leq \alpha$.

(β) Αποδεικνύουμε την ανισότητα

$$\mathrm{pos}_0(0)\text{-}\mathrm{Ind}(K, X) \leq \mathrm{pos}_0(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q, X). \tag{6.10}$$

Η περίπτωση $i = 1$ είναι όμοια. Έστω $\mathrm{pos}_0(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q, X) = \alpha$, όπου $\alpha \in \mathcal{O} \cup \{-1, \infty\}$. Εάν $\alpha = -1$ ή $\alpha = \infty$, τότε η ανισότητα (6.10) είναι προφανής. Υποθέτουμε ότι $\alpha \in \mathcal{O}$ και ότι η ανισότητα (6.10) είναι αληθής για κάθε $K \subseteq Q \subseteq X$ με $\mathrm{pos}_0(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q, X) < \alpha$. Υπάρχει μια pos(0)-μεγάλη βάση $\mathcal{B}$ για το Q στο X έτσι ώστε για κάθε $U \in \mathcal{B}$ να έχουμε

$$\mathrm{pos}_0(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(U), \mathrm{Bd}_X(U)) < \alpha.$$

Εφ' όσον $K \cap \mathrm{Bd}_X(U) \subseteq Q \cap \mathrm{Bd}_X(U)$, από την υπόθεση της επαγωγής,

$$\mathrm{pos}_0(0)\text{-}\mathrm{Ind}(K \cap \mathrm{Bd}_X(U), \mathrm{Bd}_X(U)) \leq \mathrm{pos}_0(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(U), \mathrm{Bd}_X(U)) < \alpha$$

και επειδή η $\mathcal{B}$ είναι μια pos(0)-μεγάλη βάση για το K στο X, $\mathrm{pos}_0(0)\text{-}\mathrm{Ind}(K, X) \leq \alpha$. ■

6.3.2 Πρόταση. Έστω $i \in \{0, 1\}$, Y ένας κλειστός υπόχωρος ενός χώρου X και $Q \subseteq Y$. Τότε,

(α) $\mathrm{p}_i(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q, Y) \leq \mathrm{p}_i(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q, X)$ και

(β) $\mathrm{pos}_i(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q, Y) \leq \mathrm{pos}_i(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q, X)$.

Απόδειξη. (α) Αποδεικνύουμε την ανισότητα

$$\mathrm{p}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q, Y) \leq \mathrm{p}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q, X). \tag{6.11}$$

Η περίπτωση $i = 0$ είναι όμοια. Έστω $\mathrm{p}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q, X) = \alpha$, όπου $\alpha \in \mathcal{O} \cup \{-1, \infty\}$. Εάν $\alpha = -1$ ή $\alpha = \infty$, τότε η σχέση (6.11) είναι προφανής. Υποθέτουμε ότι $\alpha \in \mathcal{O}$ και ότι η σχέση (6.11) είναι αληθής για κάθε $Q \subseteq Y \subseteq X$, όπου το Y είναι κλειστό στο X, με $\mathrm{p}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q, X) < \alpha$. Υπάρχει μια p(0)-μεγάλη βάση $\mathcal{B}$ για το Q στο X έτσι ώστε για κάθε $U \in \mathcal{B}$ να έχουμε

$$\mathrm{p}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(U), X) < \alpha.$$

Εφ' όσον $\mathrm{Bd}_Y(U \cap Y) \subseteq Y \cap \mathrm{Bd}_X(U) \subseteq \mathrm{Bd}_X(U)$, από την Πρόταση 6.3.1(α),

$$\mathrm{p}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_Y(U \cap Y), X) \leq \mathrm{p}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(U), X) < \alpha.$$

Επίσης, από την υπόθεση της επαγωγής,

$$\mathrm{p}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_Y(U \cap Y), Y) \leq \mathrm{p}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_Y(U \cap Y), X) < \alpha.$$

Εφ' όσον ο υπόχωρος Y του X είναι κλειστός, το σύνολο $\{U \cap Y : U \in \mathcal{B}\}$ είναι μια p(0)-μεγάλη βάση για το Q στο Y. Συνεπώς, $\mathrm{p}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q, Y) \leq \alpha$.

(β) Αποδεικνύουμε την ανισότητα

$$\mathrm{pos}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q, Y) \leq \mathrm{pos}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q, X). \tag{6.12}$$

Η περίπτωση $i = 0$ είναι όμοια. Έστω $\mathrm{pos}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q, X) = \alpha$, όπου $\alpha \in \mathcal{O} \cup \{-1, \infty\}$. Εάν $\alpha = -1$ ή $\alpha = \infty$, τότε η σχέση (6.12) είναι προφανής. Υποθέτουμε ότι $\alpha \in \mathcal{O}$ και ότι η σχέση (6.12) είναι αληθής για κάθε $Q \subseteq Y \subseteq X$, όπου το Y είναι κλειστό στο X, με $\mathrm{pos}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q, X) < \alpha$. Υπάρχει μια pos(0)-μεγάλη βάση $\mathcal{B}$ για το Q στο X έτσι ώστε για κάθε $U \in \mathcal{B}$ να έχουμε

$$\mathrm{pos}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(U), X) < \alpha.$$

Εφ' όσον $\mathrm{Bd}_Y(U \cap Y) \subseteq Y \cap \mathrm{Bd}_X(U) \subseteq \mathrm{Bd}_X(U)$, από την Πρόταση 6.3.1(β),

$$\mathrm{pos}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_Y(U \cap Y), X) \leq \mathrm{pos}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(U), X) < \alpha.$$

Επίσης, από την υπόθεση της επαγωγής,

$$\mathrm{pos}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_Y(U \cap Y), Y) \leq \mathrm{pos}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_Y(U \cap Y), X) < \alpha.$$

Εφ' όσον ο υπόχωρος Y του X είναι κλειστός, το σύνολο $\{U \cap Y : U \in \mathcal{B}\}$ είναι μια pos(0)-μεγάλη βάση για το Q στο Y. Συνεπώς, $\mathrm{pos}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q, Y) \leq \alpha$. ■

6.3.3 Πρόταση. Έστω $i \in \{0, 1\}$ και Q, K δύο υποσύνολα ενός χώρου X με $K \subseteq Q$. Εάν το υποσύνολο K είναι κλειστό στο Q, τότε
(α) $\mathrm{p}_i(1)\text{-}\mathrm{Ind}(K, X) \leq \mathrm{p}_i(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q, X)$ και
(β) $\mathrm{pos}_i(1)\text{-}\mathrm{Ind}(K, X) \leq \mathrm{pos}_i(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q, X)$.

Απόδειξη. (α) Αποδεικνύουμε την ανισότητα

$$\mathrm{p}_1(1)\text{-}\mathrm{Ind}(K, X) \leq \mathrm{p}_1(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q, X). \tag{6.13}$$

Η περίπτωση $i = 0$ είναι όμοια. Έστω $\mathrm{p}_1(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q, X) = \alpha$, όπου $\alpha \in \mathcal{O} \cup \{-1, \infty\}$. Εάν $\alpha = -1$ ή $\alpha = \infty$, τότε η ανισότητα (6.13) είναι προφανής. Υποθέτουμε ότι $\alpha \in \mathcal{O}$ και ότι η ανισότητα (6.13) είναι αληθής για κάθε $K \subseteq Q \subseteq X$, όπου το K είναι κλειστό στο Q, με $\mathrm{p}_1(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q,X) < \alpha$. Υπάρχει μια p(1)-μεγάλη βάση $\mathcal{B}$ για το Q στο X έτσι ώστε για κάθε $U \in \mathcal{B}$ να έχουμε

$$\mathrm{p}_1(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(U), X) < \alpha.$$

Εφ' όσον το υποσύνολο $K \cap \mathrm{Bd}_X(U)$ είναι κλειστό στο $Q \cap \mathrm{Bd}_X(U)$, από την υπόθεση της επαγωγής,

$$\mathrm{p}_1(1)\text{-}\mathrm{Ind}(K \cap \mathrm{Bd}_X(U), X) \leq \mathrm{p}_1(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(U), X) < \alpha.$$

Επιπλέον, εφ' όσον το K είναι κλειστό στο Q, η οικογένεια $\mathcal{B}$ είναι μια p(1)-μεγάλη βάση για το K στο X. Συνεπώς, $\mathrm{p}_1(1)\text{-}\mathrm{Ind}(K,X) \leq \alpha$.

(β) Αποδεικνύουμε την ανισότητα

$$\mathrm{pos}_1(1)\text{-}\mathrm{Ind}(K,X) \leq \mathrm{pos}_1(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q,X). \tag{6.14}$$

Η περίπτωση $i = 0$ είναι όμοια. Έστω $\mathrm{pos}_1(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q,X) = \alpha$, όπου $\alpha \in \mathcal{O} \cup \{-1, \infty\}$. Εάν $\alpha = -1$ ή $\alpha = \infty$, τότε η ανισότητα (6.14) είναι προφανής. Υποθέτουμε ότι $\alpha \in \mathcal{O}$ και ότι η ανισότητα (6.14) είναι αληθής για κάθε $K \subseteq Q \subseteq X$, όπου το K είναι κλειστό στο Q, με $\mathrm{pos}_1(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q,X) < \alpha$. Υπάρχει μια pos(1)-μεγάλη βάση $\mathcal{B}$ για το Q στο X έτσι ώστε για κάθε $U \in \mathcal{B}$ να έχουμε

$$\mathrm{pos}_1(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(U), X) < \alpha.$$

Εφ' όσον το υποσύνολο $K \cap \mathrm{Bd}_X(U)$ είναι κλειστό στο $Q \cap \mathrm{Bd}_X(U)$, από την υπόθεση της επαγωγής,

$$\mathrm{pos}_1(1)\text{-}\mathrm{Ind}(K \cap \mathrm{Bd}_X(U), X) \leq \mathrm{pos}_1(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(U), X) < \alpha.$$

Επιπλέον, εφ' όσον το K είναι κλειστό στο Q, η οικογένεια $\mathcal{B}$ είναι μια pos(1)-μεγάλη βάση για το K στο X. Συνεπώς, $\mathrm{pos}_1(1)\text{-}\mathrm{Ind}(K,X) \leq \alpha$. ■

6.3.4 Πρόταση. Έστω $i \in \{0,1\}$, Y ένας υπόχωρος ενός χώρου X και $Q \subseteq Y$. Τότε,
(α) $\mathrm{p}_i(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q,Y) \leq \mathrm{p}_i(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q,X)$ και
(β) $\mathrm{pos}_i(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q,Y) \leq \mathrm{pos}_i(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q,X)$.

Απόδειξη. (α) Αποδεικνύουμε την ανισότητα

$$\mathrm{p}_0(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q,Y) \leq \mathrm{p}_0(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q,X). \tag{6.15}$$

Η περίπτωση $i = 1$ είναι όμοια. Έστω $\mathrm{p}_0(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q,X) = \alpha \in \mathcal{O} \cup \{-1, \infty\}$. Εάν $\alpha = -1$ ή $\alpha = \infty$, τότε η σχέση (6.15) είναι προφανής. Υποθέτουμε ότι $\alpha \in \mathcal{O}$ και ότι η σχέση (6.15) είναι αληθής για κάθε $Q \subseteq Y \subseteq X$ με $\mathrm{p}_0(1)$-$\mathrm{Ind}(Q, X) < \alpha$. Υπάρχει μια p(1)-μεγάλη βάση $\mathcal{B}$ για το Q στο X έτσι ώστε για κάθε $U \in \mathcal{B}$ να έχουμε

$$\mathrm{p}_0(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(U), \mathrm{Bd}_X(U)) < \alpha.$$

Εφ' όσον το υποσύνολο $Q \cap \mathrm{Bd}_Y(U \cap Y)$ είναι κλειστό στο $Q \cap \mathrm{Bd}_X(U)$, από την Πρόταση 6.3.3(α),

$$\mathrm{p}_0(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_Y(U \cap Y), \mathrm{Bd}_X(U)) \leq \mathrm{p}_0(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(U), \mathrm{Bd}_X(U)) < \alpha.$$

Επίσης, από την υπόθεση της επαγωγής,

$$\mathrm{p}_0(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_Y(U \cap Y), \mathrm{Bd}_Y(U \cap Y)) \leq \mathrm{p}_0(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_Y(U \cap Y), \mathrm{Bd}_X(U)) < \alpha$$

και επειδή το σύνολο $\{U \cap Y : U \in \mathcal{B}\}$ είναι μια p(1)-μεγάλη βάση για το Q στο Y, έχουμε $\mathrm{p}_0(1)$-$\mathrm{Ind}(Q, Y) \leq \alpha$.

(β) Αποδεικνύουμε την ανισότητα

$$\mathrm{pos}_0(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q, Y) \leq \mathrm{pos}_0(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q, X). \tag{6.16}$$

Η περίπτωση $i = 1$ είναι όμοια. Έστω $\mathrm{pos}_0(1)$-$\mathrm{Ind}(Q, X) = \alpha \in \mathcal{O} \cup \{-1, \infty\}$. Εάν $\alpha = -1$ ή $\alpha = \infty$, τότε η σχέση (6.16) είναι προφανής. Υποθέτουμε ότι $\alpha \in \mathcal{O}$ και ότι η σχέση (6.16) είναι αληθής για κάθε $Q \subseteq Y \subseteq X$ με $\mathrm{pos}_0(1)$-$\mathrm{Ind}(Q, X) < \alpha$. Υπάρχει μια pos(1)-μεγάλη βάση $\mathcal{B}$ για το Q στο X έτσι ώστε για κάθε $U \in \mathcal{B}$ να έχουμε

$$\mathrm{pos}_0(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(U), \mathrm{Bd}_X(U)) < \alpha.$$

Εφ' όσον το υποσύνολο $Q \cap \mathrm{Bd}_Y(U \cap Y)$ είναι κλειστό στο $Q \cap \mathrm{Bd}_X(U)$, από την Πρόταση 6.3.3(β),

$$\mathrm{pos}_0(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_Y(U \cap Y), \mathrm{Bd}_X(U)) \leq \mathrm{pos}_0(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(U), \mathrm{Bd}_X(U)) < \alpha.$$

Επίσης, από την υπόθεση της επαγωγής,

$$\mathrm{pos}_0(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_Y(U \cap Y), \mathrm{Bd}_Y(U \cap Y)) \leq \mathrm{pos}_0(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_Y(U \cap Y), \mathrm{Bd}_X(U)) < \alpha$$

και επειδή το σύνολο $\{U \cap Y : U \in \mathcal{B}\}$ είναι μια p(1)-μεγάλη βάση για το Q στο Y, έχουμε $\mathrm{pos}_0(1)$-$\mathrm{Ind}(Q, Y) \leq \alpha$. ■

6.4 Θεωρήματα Διαχωρισμού

Στην ενότητα αυτή θεωρούμε ένα σταθερό χώρο X, ένα υποσύνολο Q του X και ένα διατακτικό αριθμό α.

6.4.1 Πρόταση. (α) Εάν για κάθε ζεύγος (A, B) από ξένα μεταξύ τους κλειστά υποσύνολα του X, όπου $A \subseteq Q$, υπάρχει ένα υποσύνολο L του χώρου X το οποίο διαχωρίζει τα σύνολα A και B έτσι ώστε $\mathrm{p}_0(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap L, L) < \alpha$, τότε $\mathrm{p}_0(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q, X) \leq \alpha$.
(β) Εάν για κάθε ζεύγος (A, B) από ξένα μεταξύ τους κλειστά υποσύνολα του X, όπου $A \subseteq Q$, υπάρχει ένα υποσύνολο L του χώρου X το οποίο διαχωρίζει τα σύνολα A και B έτσι ώστε $\mathrm{p}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap L, X) < \alpha$, τότε $\mathrm{p}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q, X) \leq \alpha$.

Απόδειξη. (α) Έστω (F, U) ζεύγος από υποσύνολα του X, όπου το F είναι κλειστό υποσύνολο του X, το U είναι ανοικτό υποσύνολο του X και $F \subseteq Q \cap U$. Από τη υπόθεση, υπάρχει ένα υποσύνολο L του X το οποίο διαχωρίζει τα σύνολα F και $X \setminus U$ έτσι ώστε

$$\mathrm{p}_0(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap L, L) < \alpha.$$

Έστω V και W ανοικτά υποσύνολα του X έτσι ώστε:
(1) $F \subseteq V$, $X \setminus U \subseteq W$,
(2) $V \cap W = \emptyset$ και
(3) $X \setminus L = V \cup W$.
Από τις σχέσεις (1) και (2), έχουμε $F \subseteq V \subseteq X \setminus W \subseteq U$. Άρα, $F \subseteq Q \cap V \subseteq Q \cap U$. Επίσης, από τις σχέσεις (2) και (3), έχουμε

$$\begin{aligned} \mathrm{Bd}_X(V) &= \mathrm{Cl}_X(V) \cap \mathrm{Cl}_X(X \setminus V) = \mathrm{Cl}_X(V) \cap (X \setminus V) \\ &\subseteq \mathrm{Cl}_X(X \setminus W) \cap (X \setminus V) = (X \setminus W) \cap (X \setminus V) \\ &= X \setminus (V \cup W) = L. \end{aligned}$$

Εφ' όσον $\mathrm{p}_0(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap L, L) < \alpha$ και $\mathrm{Bd}_X(V) \subseteq L$, από την Πρόταση 6.3.1(α),

$$\mathrm{p}_0(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(V), L) \leq \mathrm{p}_0(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap L, L) < \alpha.$$

Επίσης, εφ' όσον το $\mathrm{Bd}_X(V)$ είναι κλειστό υποσύνολο του L, από την Πρόταση 6.3.2(α),

$$\mathrm{p}_0(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(V), \mathrm{Bd}_X(V)) \leq \mathrm{p}_0(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(V), L).$$

Συνεπώς, $\mathrm{p}_0(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(V), \mathrm{Bd}_X(V)) < \alpha$ και επομένως $\mathrm{p}_0(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q, X) \leq \alpha$.

(β) Έστω (F, U) ζεύγος από υποσύνολα του X, όπου το F είναι κλειστό υποσύνολο του X, το U είναι ανοικτό υποσύνολο του X και $F \subseteq Q \cap U$. Από τη υπόθεση, υπάρχει ένα υποσύνολο L του X το οποίο διαχωρίζει τα σύνολα F και $X \setminus U$ έτσι ώστε

$$\mathrm{p}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap L, X) < \alpha.$$

Έστω V και W ανοικτά υποσύνολα του X έτσι ώστε:
(1) $F \subseteq V$, $X \setminus U \subseteq W$,
(2) $V \cap W = \emptyset$ και
(3) $X \setminus L = V \cup W$.
Από τις σχέσεις (1) και (2), έχουμε $F \subseteq V \subseteq X \setminus W \subseteq U$. Άρα, $F \subseteq Q \cap V \subseteq Q \cap U$. Επίσης, από τις σχέσεις (2) και (3), έχουμε $\mathrm{Bd}_X(V) \subseteq L$. Εφ' όσον $\mathrm{p}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap L, X) < \alpha$ και $\mathrm{Bd}_X(V) \subseteq L$, από την Πρόταση 6.3.1(α),

$$\mathrm{p}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(V), X) \leq \mathrm{p}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap L, X) < \alpha.$$

Συνεπώς, $\mathrm{p}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(V), X) < \alpha$ και επομένως $\mathrm{p}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q, X) \leq \alpha$. ■

6.4.2 Πρόταση. (α) Εάν για κάθε ζεύγος (A, B) από ξένα μεταξύ τους κλειστά υποσύνολα του X, όπου $A \subseteq Q$, υπάρχει ένα υποσύνολο L του χώρου X το οποίο διαχωρίζει τα σύνολα A και B έτσι ώστε $\mathrm{pos}_0(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap L, L) < \alpha$, τότε $\mathrm{pos}_0(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q, X) \leq \alpha$.
(β) Εάν για κάθε ζεύγος (A, B) από ξένα μεταξύ τους κλειστά υποσύνολα του X, όπου $A \subseteq Q$, υπάρχει ένα υποσύνολο L του χώρου X το οποίο διαχωρίζει τα σύνολα A και B έτσι ώστε $\mathrm{pos}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap L, X) < \alpha$, τότε $\mathrm{pos}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q, X) \leq \alpha$.

Απόδειξη. (α) Έστω (F, U) ζεύγος από υποσύνολα του X, όπου το F είναι κλειστό υποσύνολο του X, το U είναι ανοικτό υποσύνολο του X και $F \subseteq Q \cap U$. Από τη υπόθεση, υπάρχει ένα υποσύνολο L του X το οποίο διαχωρίζει τα σύνολα F και $X \setminus U$ έτσι ώστε

$$\mathrm{pos}_0(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap L, L) < \alpha.$$

Έστω V και W ανοικτά υποσύνολα του X έτσι ώστε:
(1) $F \subseteq V$, $X \setminus U \subseteq W$,
(2) $V \cap W = \emptyset$ και
(3) $X \setminus L = V \cup W$.
Από τις σχέσεις (1) και (2), έχουμε $F \subseteq V \subseteq X \setminus W \subseteq U$. Επίσης, από τις σχέσεις (2) και (3), έχουμε

$$\mathrm{Bd}_X(V) \quad = \quad \mathrm{Cl}_X(V) \cap \mathrm{Cl}_X(X \setminus V) = \mathrm{Cl}_X(V) \cap (X \setminus V)$$

$$\begin{aligned} &\subseteq \mathrm{Cl}_X(X \setminus W) \cap (X \setminus V) = (X \setminus W) \cap (X \setminus V) \\ &= X \setminus (V \cup W) = L. \end{aligned}$$

Εφ' όσον $\mathrm{pos}_0(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap L, L) < \alpha$ και $\mathrm{Bd}_X(V) \subseteq L$, από την Πρόταση 6.3.1(β),

$$\mathrm{pos}_0(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(V), L) \leq \mathrm{p}_0(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap L, L) < \alpha.$$

Επίσης, εφ' όσον το $\mathrm{Bd}_X(V)$ είναι κλειστό υποσύνολο του L, από την Πρόταση 6.3.2(β),

$$\mathrm{pos}_0(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(V), \mathrm{Bd}_X(V)) \leq \mathrm{pos}_0(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(V), L).$$

Συνεπώς, $\mathrm{pos}_0(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(V), \mathrm{Bd}_X(V)) < \alpha$ και επομένως $\mathrm{pos}_0(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q, X) \leq \alpha$.

(β) Έστω (F, U) ζεύγος από υποσύνολα του X, όπου το F είναι κλειστό υποσύνολο του X, το U είναι ανοικτό υποσύνολο του X και $F \subseteq Q \cap U$. Από τη υπόθεση, υπάρχει ένα υποσύνολο L του X το οποίο διαχωρίζει τα σύνολα F και $X \setminus U$ έτσι ώστε

$$\mathrm{pos}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap L, X) < \alpha.$$

Έστω V και W ανοικτά υποσύνολα του X έτσι ώστε:
(1) $F \subseteq V$, $X \setminus U \subseteq W$,
(2) $V \cap W = \emptyset$ και
(3) $X \setminus L = V \cup W$.
Από τις σχέσεις (1) και (2), έχουμε $F \subseteq V \subseteq X \setminus W \subseteq U$. Επίσης, από τις σχέσεις (2) και (3), έχουμε $\mathrm{Bd}_X(V) \subseteq L$. Εφ' όσον $\mathrm{pos}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap L, X) < \alpha$ και $\mathrm{Bd}_X(V) \subseteq L$, από την Πρόταση 6.3.1(β),

$$\mathrm{pos}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(V), X) \leq \mathrm{p}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap L, X) < \alpha.$$

Συνεπώς, $\mathrm{pos}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(V), X) < \alpha$ και επομένως $\mathrm{pos}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q, X) \leq \alpha$. ■

Στην παρακάτω πρόταση αποδεικνύεται το αντίστροφο της Πρότασης 6.4.2 για φυσικούς χώρους.

6.4.3 Πρόταση. (α) Εάν $\mathrm{pos}_0(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q, X) \leq \alpha$, τότε για κάθε ζεύγος (A, B) από ξένα μεταξύ τους κλειστά υποσύνολα του X, όπου $A \subseteq Q$, υπάρχει ένα υποσύνολο L του χώρου X το οποίο διαχωρίζει τα σύνολα A και B έτσι ώστε $\mathrm{pos}_0(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap L, L) < \alpha$.
(β) Εάν $\mathrm{pos}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q, X) \leq \alpha$, τότε για κάθε ζεύγος (A, B) από ξένα μεταξύ τους κλειστά υποσύνολα του X, όπου $A \subseteq Q$, υπάρχει ένα υποσύνολο L του χώρου X το οποίο διαχωρίζει τα σύνολα A και B έτσι ώστε $\mathrm{pos}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap L, X) < \alpha$.

Απόδειξη. (α) Έστω (A, B) ζεύγος από ξένα μεταξύ τους κλειστά υποσύνολα του X, όπου $A \subseteq Q$. Τότε, το $X \setminus B$ είναι ανοικτό υποσύνολο του χώρου X και $A \subseteq X \setminus B$. Επομένως, επειδή ο χώρος X είναι φυσικός, υπάρχει ανοικτό υποσύνολο U του X έτσι ώστε

$$A \subseteq U \subseteq \mathrm{Cl}_X(U) \subseteq X \setminus B.$$

Επίσης, επειδή $\mathrm{pos}_0(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q, X) \leq \alpha$, υπάρχει ανοικτό υποσύνολο V του X έτσι ώστε

$$A \subseteq V \subseteq U \subseteq \mathrm{Cl}_X(U) \subseteq X \setminus B$$

και

$$\mathrm{pos}_0(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(V), \mathrm{Bd}_X(V)) < \alpha.$$

Εφ' όσον το σύνολο $\mathrm{Bd}_X(V)$ διαχωρίζει τα A και B, το ζητούμενο υποσύνολο L του X είναι το $\mathrm{Bd}_X(V)$.

(β) Έστω (A, B) ζεύγος από ξένα μεταξύ τους κλειστά υποσύνολα του X, όπου $A \subseteq Q$. Τότε, το $X \setminus B$ είναι ανοικτό υποσύνολο του χώρου X και $A \subseteq X \setminus B$. Επομένως, επειδή ο χώρος X είναι φυσικός, υπάρχει ανοικτό υποσύνολο U του X έτσι ώστε

$$A \subseteq U \subseteq \mathrm{Cl}_X(U) \subseteq X \setminus B.$$

Επίσης, επειδή $\mathrm{pos}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q, X) \leq \alpha$, υπάρχει ανοικτό υποσύνολο V του X έτσι ώστε

$$A \subseteq V \subseteq U \subseteq \mathrm{Cl}_X(U) \subseteq X \setminus B$$

και

$$\mathrm{pos}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(V), X) < \alpha.$$

Εφ' όσον το σύνολο $\mathrm{Bd}_X(V)$ διαχωρίζει τα A και B, το ζητούμενο υποσύνολο L του X είναι το $\mathrm{Bd}_X(V)$. ■

6.4.4 Πρόταση. (α) Εάν για κάθε ζεύγος (A, B) από ξένα μεταξύ τους κλειστά υποσύνολα του υποχώρου Q υπάρχει ένα υποσύνολο L του χώρου X το οποίο διαχωρίζει τα σύνολα A και B έτσι ώστε $\mathrm{p}_0(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap L, L) < \alpha$, τότε $\mathrm{p}_0(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q, X) \leq \alpha$.
(β) Εάν για κάθε ζεύγος (A, B) από ξένα μεταξύ τους κλειστά υποσύνολα του υποχώρου Q υπάρχει ένα υποσύνολο L του χώρου X το οποίο διαχωρίζει τα σύνολα A και B έτσι ώστε $\mathrm{p}_1(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap L, X) < \alpha$, τότε $\mathrm{p}_1(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q, X) \leq \alpha$.

Απόδειξη. (α) Έστω (F^Q, U) ζεύγος από υποσύνολα του X, όπου το F^Q είναι κλειστό υποσύνολο του Q, το U είναι ανοικτό υποσύνολο του X και $F^Q \subseteq U$. Από τη υπόθεση, υπάρχει ένα υποσύνολο L του X το οποίο διαχωρίζει τα σύνολα F^Q και $Q \setminus U$ έτσι ώστε

$$\mathrm{p}_0(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap L, L) < \alpha.$$

Έστω V και W ανοικτά υποσύνολα του X έτσι ώστε:
(1) $F^Q \subseteq V$, $Q \setminus U \subseteq W$,
(2) $V \cap W = \emptyset$ και
(3) $X \setminus L = V \cup W$.
Από τις σχέσεις (1) και (2), έχουμε

$$F^Q \subseteq Q \cap V \subseteq Q \cap (X \setminus W) \subseteq Q \cap U.$$

Επίσης, από τις σχέσεις (2) και (3), έχουμε $\mathrm{Bd}_X(V) \subseteq L$. Εφ' όσον $\mathrm{p}_0(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap L, L) < \alpha$ και το $Q \cap \mathrm{Bd}_X(V)$ είναι κλειστό υποσύνολο του $Q \cap L$, από τις Προτάσεις 6.3.3(α) και 6.3.4(α), έχουμε

$$\mathrm{p}_0(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(V), \mathrm{Bd}_X(V)) < \alpha.$$

Συνεπώς, $\mathrm{p}_0(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q, X) \leq \alpha$.

(β) Έστω (F^Q, U) ζεύγος από υποσύνολα του X, όπου το F^Q είναι κλειστό υποσύνολο του Q, το U είναι ανοικτό υποσύνολο του X και $F^Q \subseteq U$. Από τη υπόθεση, υπάρχει ένα υποσύνολο L του X το οποίο διαχωρίζει τα σύνολα F^Q και $Q \setminus U$ έτσι ώστε

$$\mathrm{p}_1(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap L, X) < \alpha.$$

Έστω V και W ανοικτά υποσύνολα του X έτσι ώστε:
(1) $F^Q \subseteq V$, $Q \setminus U \subseteq W$,
(2) $V \cap W = \emptyset$ και
(3) $X \setminus L = V \cup W$.
Από τις σχέσεις (1) και (2), έχουμε

$$F^Q \subseteq Q \cap V \subseteq Q \cap (X \setminus W) \subseteq Q \cap U.$$

Επίσης, από τις σχέσεις (2) και (3), έχουμε $\mathrm{Bd}_X(V) \subseteq L$. Εφ' όσον $\mathrm{p}_1(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap L, X) < \alpha$ και το $Q \cap \mathrm{Bd}_X(V)$ είναι κλειστό υποσύνολο του $Q \cap L$, από την Πρόταση 6.3.3(α), έχουμε

$$\mathrm{p}_1(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(V), X) < \alpha.$$

Συνεπώς, $\mathrm{p}_1(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q, X) \leq \alpha$. ■

6.4.5 Πρόταση. (α) Εάν για κάθε ζεύγος (A, B) από ξένα μεταξύ τους υποσύνολα του X, όπου το A είναι κλειστό υποσύνολο του Q και το B είναι κλειστό υποσύνολο του X, υπάρχει ένα υποσύνολο L του χώρου X το οποίο διαχωρίζει τα σύνολα A και B έτσι ώστε $\mathrm{pos}_0(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap L, L) < \alpha$, τότε $\mathrm{pos}_0(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q, X) \leq \alpha$.
(β) Εάν για κάθε ζεύγος (A, B) από ξένα μεταξύ τους υποσύνολα του X, όπου το A είναι

κλειστό υποσύνολο του Q και το B είναι κλειστό υποσύνολο του X, υπάρχει ένα υποσύνολο L του χώρου X το οποίο διαχωρίζει τα σύνολα A και B έτσι ώστε $\mathrm{pos}_1(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap L, X) < \alpha$, τότε $\mathrm{pos}_1(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q, X) \leq \alpha$.

Απόδειξη. (α) Έστω (F^Q, U) ζεύγος από υποσύνολα του X, όπου το F^Q είναι κλειστό υποσύνολο του Q, το U είναι ανοικτό υποσύνολο του X και $F^Q \subseteq U$. Από τη υπόθεση, υπάρχει ένα υποσύνολο L του X το οποίο διαχωρίζει τα σύνολα F^Q και $X \setminus U$ έτσι ώστε

$$\mathrm{pos}_0(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap L, L) < \alpha.$$

Έστω V και W ανοικτά υποσύνολα του X έτσι ώστε:
(1) $F^Q \subseteq V$, $X \setminus U \subseteq W$,
(2) $V \cap W = \emptyset$ και
(3) $X \setminus L = V \cup W$.
Από τις σχέσεις (1) και (2), έχουμε $F^Q \subseteq V \subseteq X \setminus W \subseteq U$. Επίσης, από τις σχέσεις (2) και (3), έχουμε $\mathrm{Bd}_X(V) \subseteq L$. Εφ' όσον $\mathrm{pos}_0(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap L, L) < \alpha$ και το $Q \cap \mathrm{Bd}_X(V)$ είναι κλειστό υποσύνολο του $Q \cap L$, από τις Προτάσεις 6.3.3(β) και 6.3.4(β), έχουμε

$$\mathrm{pos}_0(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(V), \mathrm{Bd}_X(V)) < \alpha.$$

Συνεπώς, $\mathrm{pos}_0(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q, X) \leq \alpha$.

(β) Έστω (F^Q, U) ζεύγος από υποσύνολα του X, όπου το F^Q είναι κλειστό υποσύνολο του Q, το U είναι ανοικτό υποσύνολο του X και $F^Q \subseteq U$. Από τη υπόθεση, υπάρχει ένα υποσύνολο L του X το οποίο διαχωρίζει τα σύνολα F^Q και $X \setminus U$ έτσι ώστε

$$\mathrm{pos}_1(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap L, X) < \alpha.$$

Έστω V και W ανοικτά υποσύνολα του X έτσι ώστε:
(1) $F^Q \subseteq V$, $X \setminus U \subseteq W$,
(2) $V \cap W = \emptyset$ και
(3) $X \setminus L = V \cup W$.
Από τις σχέσεις (1) και (2), έχουμε $F^Q \subseteq V \subseteq X \setminus W \subseteq U$. Επίσης, από τις σχέσεις (2) και (3), έχουμε $\mathrm{Bd}_X(V) \subseteq L$. Εφ' όσον $\mathrm{pos}_1(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap L, X) < \alpha$ και το $Q \cap \mathrm{Bd}_X(V)$ είναι κλειστό υποσύνολο του $Q \cap L$, από την Πρόταση 6.3.3(β), έχουμε

$$\mathrm{pos}_1(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(V), X) < \alpha.$$

Συνεπώς, $\mathrm{pos}_1(1)\text{-}\mathrm{Ind}(Q, X) \leq \alpha$. ■

6.5 Θεωρήματα Αθροίσματος

6.5.1 Λήμμα. *Έστω Q κλειστό υποσύνολο ενός κληρονομικά φυσικού χώρου X και $\alpha \in \mathcal{O}$.*
(α) Εάν $\mathrm{p}_1(0)$-$\mathrm{Ind}(Q, X) \leq \alpha$, τότε για κάθε ζεύγος (A, B) από ξένα μεταξύ τους κλειστά υποσύνολα του X υπάρχει ένα υποσύνολο L του χώρου X το οποίο διαχωρίζει τα σύνολα A και B έτσι ώστε $\mathrm{p}_1(0)$-$\mathrm{Ind}(Q \cap L, X) < \alpha$.
(β) Εάν $\mathrm{pos}_1(0)$-$\mathrm{Ind}(Q, X) \leq \alpha$, τότε για κάθε ζεύγος (A, B) από ξένα μεταξύ τους κλειστά υποσύνολα του X υπάρχει ένα υποσύνολο L του χώρου X το οποίο διαχωρίζει τα σύνολα A και B έτσι ώστε $\mathrm{pos}_1(0)$-$\mathrm{Ind}(Q \cap L, X) < \alpha$.

Απόδειξη. (α) Έστω (A, B) ζεύγος από ξένα μεταξύ τους κλειστά υποσύνολα του X. Εφ' όσον ο χώρος X είναι φυσικός, υπάρχουν δύο ανοικτά υποσύνολα U_1, U_2 του X έτσι ώστε $A \subseteq U_1$, $B \subseteq U_2$ και $\mathrm{Cl}_X(U_1) \cap \mathrm{Cl}_X(U_2) = \emptyset$. Εφ' όσον ο Q είναι φυσικός, υπάρχει ένα ανοικτό υποσύνολο U του X έτσι ώστε

$$Q \cap \mathrm{Cl}_X(U_1) \subseteq Q \cap U \subseteq \mathrm{Cl}_Q(Q \cap U) \subseteq Q \setminus \mathrm{Cl}_X(U_2).$$

Επίσης, επειδή $\mathrm{p}_1(0)$-$\mathrm{Ind}(Q, X) \leq \alpha$, υπάρχει ένα ανοικτό υποσύνολο V του X έτσι ώστε

$$Q \cap \mathrm{Cl}_X(U_1) \subseteq Q \cap V \subseteq Q \cap U \subseteq \mathrm{Cl}_Q(Q \cap U) \subseteq Q \setminus \mathrm{Cl}_X(U_2)$$

και

$$\mathrm{p}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(V), X) < \alpha.$$

Από την Πρόταση 6.3.1(α) έχουμε

$$\mathrm{p}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(\mathrm{Bd}_Q(Q \cap V), X) \leq \mathrm{p}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(V), X).$$

Επίσης, το σύνολο $\mathrm{Bd}_Q(Q \cap V)$ διαχωρίζει τα $Q \cap \mathrm{Cl}_X(U_1)$ και $Q \cap \mathrm{Cl}_X(U_2)$ στο Q. Από το Λήμμα 1.2.9 του [19] (βλέπε επίσης Παρατήρηση 1.2.10 του [19]), υπάρχει ένα υποσύνολο L του X το οποίο διαχωρίζει τα A και B έτσι ώστε $Q \cap L = \mathrm{Bd}_Q(Q \cap V)$. Συνεπώς, $\mathrm{p}_1(0)$-$\mathrm{Ind}(Q \cap L, X) < \alpha$.

(β) Έστω (A, B) ζεύγος από ξένα μεταξύ τους κλειστά υποσύνολα του X. Εφ' όσον ο χώρος X είναι φυσικός, υπάρχουν δύο ανοικτά υποσύνολα U_1, U_2 του X έτσι ώστε $A \subseteq U_1$, $B \subseteq U_2$ και $\mathrm{Cl}_X(U_1) \cap \mathrm{Cl}_X(U_2) = \emptyset$. Εφ' όσον ο Q είναι φυσικός, υπάρχει ένα ανοικτό υποσύνολο U του X έτσι ώστε

$$Q \cap \mathrm{Cl}_X(U_1) \subseteq Q \cap U \subseteq \mathrm{Cl}_Q(Q \cap U) \subseteq Q \setminus \mathrm{Cl}_X(U_2).$$

Επίσης, επειδή $\mathrm{pos}_1(0)$-$\mathrm{Ind}(Q, X) \leq \alpha$, υπάρχει ένα ανοικτό υποσύνολο V του X έτσι ώστε

$$Q \cap \mathrm{Cl}_X(U_1) \subseteq Q \cap V \subseteq Q \cap U \subseteq \mathrm{Cl}_Q(Q \cap U) \subseteq Q \setminus \mathrm{Cl}_X(U_2)$$

και

$$\mathrm{pos}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(V), X) < \alpha.$$

Από την Πρόταση 6.3.1(β) έχουμε

$$\mathrm{pos}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(\mathrm{Bd}_Q(Q \cap V), X) \leq \mathrm{pos}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap \mathrm{Bd}_X(V), X).$$

Επίσης, το σύνολο $\mathrm{Bd}_Q(Q \cap V)$ διαχωρίζει τα $Q \cap \mathrm{Cl}_X(U_1)$ και $Q \cap \mathrm{Cl}_X(U_2)$ στο Q. Από το Λήμμα 1.2.9 του [19] (βλέπε επίσης Παρατήρηση 1.2.10 του [19]), υπάρχει ένα υποσύνολο L του X το οποίο διαχωρίζει τα A και B έτσι ώστε $Q \cap L = \mathrm{Bd}_Q(Q \cap V)$. Συνεπώς, $\mathrm{pos}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap L, X) < \alpha$. ■

6.5.2 Πρόταση. Έστω Q_1 και Q_2 δύο υπόχωροι ενός κληρονομικά φυσικού χώρου X. Εάν το υποσύνολο Q_1 του X είναι κλειστό, τότε

(1) $\mathrm{p}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q_1 \cup Q_2, X) \leq \mathrm{p}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q_1, X)(+)\mathrm{p}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q_2, X) + 1$ και

(2) $\mathrm{pos}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q_1 \cup Q_2, X) \leq \mathrm{pos}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q_1, X)(+)\mathrm{pos}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q_2, X) + 1$.

Απόδειξη. (1) Αποδεικνύουμε τη σχέση

$$\mathrm{p}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q_1 \cup Q_2, X) \leq \mathrm{p}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q_1, X)(+)\mathrm{p}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q_2, X) + 1 \tag{6.17}$$

με επαγωγή στο α, όπου $\alpha = \mathrm{p}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q_1, X)(+)\mathrm{p}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q_2, X)$. Εάν $\alpha = -1$, τότε $\mathrm{p}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q_1, X) = \mathrm{p}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q_2, X) = -1$ που σημαίνει ότι $Q_1 \cup Q_2 = \emptyset$ και συνεπώς η (6.17) είναι αληθής. Υποθέτουμε ότι για κάθε κληρονομικά φυσικό χώρο X και κάθε δύο υποσύνολα Q_1, Q_2 του X η σχέση (6.17) είναι αληθής εάν

$$\mathrm{p}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q_1, X)(+)\mathrm{p}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q_2, X) < \alpha,$$

όπου α είναι ένας σταθερός διατακτικός αριθμός. Αποδεικνύουμε τη σχέση (6.17) για την περίπτωση $\mathrm{p}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q_1, X)(+)\mathrm{p}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q_2, X) = \alpha$. Έστω

$$\mathrm{p}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q_1, X) = \alpha_1$$

και

$$\mathrm{p}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q_1, X) = \alpha_2,$$

όπου $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{O} \cup \{-1\}$. Εάν $\alpha_1 = -1$ ή $\alpha_2 = -1$, τότε $Q_1 = \emptyset$ ή $Q_2 = \emptyset$, αντίστοιχα και η σχέση (6.17) είναι αληθής. Υποθέτουμε ότι $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{O}$.

Από την Πρόταη 6.4.1(β), αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε ζεύγος (A, B) από ξένα μεταξύ τους κλειστά υποσύνολα του X, όπου $A \subseteq Q$, υπάρχει ένα υποσύνολο L του X

το οποίο διαχωρίζει τα A και B έτσι ώστε $\mathrm{p}_1(0)$-$\mathrm{Ind}(Q \cap L, X) < \alpha$. Έστω (A, B) ένα ζεύγος από ξένα μεταξύ τους κλειστά υποσύνολα του X. Από το Λήμμα 6.5.1(α), υπάρχει ένα υποσύνολο L του X το οποίο διαχωρίζει τα A και B έτσι ώστε

$$\mathrm{p}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q_1 \cap L, X) < \alpha_1.$$

Επίσης, από την Πρόταση 6.3.1(α),

$$\mathrm{p}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q_2 \cap L, X) \leq \mathrm{p}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q_2, X) = \alpha_2.$$

Άρα,

$$\mathrm{p}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q_1, X)(+)\mathrm{p}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q_2, X) < \alpha_1(+)\alpha_2 = \alpha.$$

Εφ' όσον $(Q_1 \cup Q_2) \cap L = (Q_1 \cap L) \cup (Q_2 \cap L)$, από την υπόθεση της επαγωγής,

$$\mathrm{p}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}((Q_1 \cup Q_2) \cap L, X) < \alpha + 1.$$

Συνεπώς,

$$\mathrm{p}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q_1 \cup Q_2, X) \leq \alpha + 1 = \mathrm{p}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q_1, X)(+)\mathrm{p}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q_2, X) + 1.$$

(2) Αποδεικνύουμε τη σχέση

$$\mathrm{pos}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q_1 \cup Q_2, X) \leq \mathrm{pos}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q_1, X)(+)\mathrm{pos}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q_2, X) + 1 \tag{6.18}$$

με επαγωγή στο α, όπου $\alpha = \mathrm{pos}_1(0)$-$\mathrm{Ind}(Q_1, X)(+)\mathrm{pos}_1(0)$-$\mathrm{Ind}(Q_2, X)$. Εάν $\alpha = -1$, τότε $\mathrm{pos}_1(0)$-$\mathrm{Ind}(Q_1, X) = \mathrm{pos}_1(0)$-$\mathrm{Ind}(Q_2, X) = -1$ που σημαίνει ότι $Q_1 \cup Q_2 = \emptyset$ και συνεπώς η (6.18) είναι αληθής. Υποθέτουμε ότι για κάθε κληρονομικά φυσικό χώρο X και κάθε δύο υποσύνολα Q_1, Q_2 του X η σχέση (6.18) είναι αληθής εάν

$$\mathrm{pos}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q_1, X)(+)\mathrm{pos}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q_2, X) < \alpha,$$

όπου α είναι ένας σταθερός διατακτικός αριθμός. Αποδεικνύουμε τη σχέση (6.18) για την περίπτωση $\mathrm{pos}_1(0)$-$\mathrm{Ind}(Q_1, X)(+)\mathrm{pos}_1(0)$-$\mathrm{Ind}(Q_2, X) = \alpha$. Έστω

$$\mathrm{pos}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q_1, X) = \alpha_1$$

και

$$\mathrm{pos}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q_1, X) = \alpha_2,$$

όπου $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{O} \cup \{-1\}$. Εάν $\alpha_1 = -1$ ή $\alpha_2 = -1$, τότε $Q_1 = \emptyset$ ή $Q_2 = \emptyset$, αντίστοιχα και η σχέση (6.18) είναι αληθής. Υποθέτουμε ότι $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{O}$.

Από την Πρόταη 6.4.2(β), αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε ζεύγος (A, B) από ξένα μεταξύ τους κλειστά υποσύνολα του X, όπου $A \subseteq Q$, υπάρχει ένα υποσύνολο L του X το οποίο διαχωρίζει τα A και B έτσι ώστε $\mathrm{pos}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap L, X) < \alpha$. Έστω (A, B) ένα ζεύγος από ξένα μεταξύ τους κλειστά υποσύνολα του X. Από το Λήμμα 6.5.1(β), υπάρχει ένα υποσύνολο L του X το οποίο διαχωρίζει τα A και B έτσι ώστε

$$\mathrm{pos}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q_1 \cap L, X) < \alpha_1.$$

Επίσης, από την Πρόταση 6.3.1(β),

$$\mathrm{pos}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q_2 \cap L, X) \leq \mathrm{pos}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q_2, X) = \alpha_2.$$

Άρα,

$$\mathrm{pos}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q_1, X)(+)\mathrm{pos}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q_2, X) < \alpha_1(+)\alpha_2 = \alpha.$$

Εφ' όσον $(Q_1 \cup Q_2) \cap L = (Q_1 \cap L) \cup (Q_2 \cap L)$, από την υπόθεση της επαγωγής,

$$\mathrm{pos}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}((Q_1 \cup Q_2) \cap L, X) < \alpha + 1.$$

Συνεπώς,

$$\mathrm{pos}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q_1 \cup Q_2, X) \leq \alpha + 1 = \mathrm{pos}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q_1, X)(+)\mathrm{pos}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q_2, X) + 1,$$

αποδεικνύοντας την πρόταση. ■

6.5.3 Παρατήρηση. Από την Πρόταση 6.2.12 και το Πόρισμα 6.2.13 προκύπτει ότι το παραπάνω Θεώρημα Αθροίσματος είναι τετριμμένο για τις διαστάσεις $\mathrm{p}_1(1)$-Ind και $\mathrm{pos}_1(1)$-Ind.

6.6 Θεώρημα Ταύτισης για τις pos_1-ind και $\mathrm{pos}_1(0)$-Ind

Στην ενότητα αυτή δίνουμε συνθήκες ώστε οι διαστάσεις-συναρτήσεις θέσεως pos_1-ind και $\mathrm{pos}_1(0)$-Ind να συμπίπτουν.

6.6.1 Ορισμός. Έστω df μια από τις διαστάσεις-συναρτήσεις θέσεως του τύπου Ind: $\mathrm{p}_i(j)$-Ind, $\mathrm{pos}_i(j)$-Ind, όπου $i \in \{0, 1\}$ και $j \in \{0, 1\}$. Λέμε ότι **το αριθμήσιμο θεώρημα αθροίσματος για τη df ισχύει** σ' ένα χώρο X, εάν για κάθε αριθμήσιμη οικογένεια Q_i, $i = 1, 2, \ldots$, από κλειστούς υποχώρους του X με $df(Q_i, X) \leq \alpha$, $i = 1, 2, \ldots$, έχουμε $df(\cup_{i=1}^{\infty} Q_i, X) \leq \alpha$.

6.6.2 Λήμμα. Έστω X ένας Lindelöf κανονικός χώρος και Q ένα κλειστό υποσύνολο του X. Εάν $\mathrm{pos}_1\text{-}\mathrm{ind}(Q, X) \leq \alpha$, τότε για κάθε ζεύγος (A, B) από ξένα μεταξύ τους κλειστά υποσύνολα του X υπάρχει ένα υποσύνολο L του X το οποίο διαχωρίζει τα A και B έτσι ώστε $Q \cap L = Q \cap \cup_{i=1}^{\infty} L_i$, όπου το L_i είναι κλειστό στο X και $\text{pos}_1\text{-ind}(Q \cap L_i, X) < \alpha$, $i = 1, 2, \ldots$.

Απόδειξη. Έστω (A, B) ζεύγος από ξένα μεταξύ τους κλειστά υποσύνολα του X. Εφ' όσον ο χώρος X είναι φυσικός, υπάρχουν δύο ανοικτά υποσύνολα U και V του X έτσι ώστε $A \subseteq U$, $B \subseteq W$ και $\text{Cl}_X(U) \cap \text{Cl}_X(W) = \emptyset$. Εφ' όσον ο X είναι Lindelöf και $\text{pos}_1\text{-ind}(Q, X) \leq \alpha$, υπάρχει μια αριθμήσιμη ανοικτή εκλέπτυνση

$$\{V_1, V_2, \ldots, X \setminus (Q \cup \text{Cl}_X(U)), X \setminus (Q \cup \text{Cl}_X(W))\}$$

του ανοικτού καλύμματος $\{X \setminus \text{Cl}_X(U), X \setminus \text{Cl}_X(W)\}$ του X τέτοια ώστε

$$\text{Cl}_X(V_i) \cap A = \emptyset \;\; \text{ή} \;\; \text{Cl}_X(V_i) \cap B = \emptyset$$

και

$$\text{pos}_1\text{-ind}(Q \cap \text{Bd}_X(V_i), X) < \alpha, \; i = 1, 2, \ldots.$$

Από το Λήμμα 2.3.16 του [19], υπάρχει ένα υποσύνολο L του X το οποίο διαχωρίζει τα A και B έτσι ώστε $Q \cap L = Q \cap \cup_{i=1}^{\infty} L_i$, όπου $L_i = L \cap \text{Bd}_X(V_i)$, $i = 1, 2, \ldots$. Προφανώς,

$$\text{pos}_1\text{-ind}(Q \cap L_i, X) \leq \text{pos}_1\text{-ind}(Q \cap \text{Bd}_X(V_i), X) < \alpha, \; i = 1, 2, \ldots. \blacksquare$$

6.6.3 Πρόταση. Έστω X ένας Lindelöf κανονικός χώρος στον οποίο το αριθμήσιμο θεώρημα αθροίσματος για τη $\text{pos}_1(0)\text{-Ind}$ ισχύει και Q ένα κλειστό υποσύνολο του X. Τότε, έχουμε $\text{pos}_1\text{-ind}(Q, X) = \text{pos}_1(0)\text{-Ind}(Q, X)$.

Απόδειξη. Από την Πρόταση 6.2.15(2), αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\text{pos}_1(0)\text{-Ind}(Q, X) \leq \text{pos}_1\text{-ind}(Q, X). \tag{6.19}$$

Έστω $\text{pos}_1\text{-ind}(Q, X) = \alpha \in \cup\{-1, \infty\}$. Η σχέση (6.19) είναι προφανής εάν $\alpha = -1$ ή $\alpha = \infty$. Υποθέτουμε ότι $\alpha \in \mathcal{O}$ και ότι η σχέση (6.19) είναι αληθής για κάθε υποσύνολο Q^Y ενός Lindelöf κανονικού χώρου Y με $\text{pos}_1\text{-ind}(Q^Y, Y) < \alpha$. Αποδεικνύουμε ότι $\text{pos}_1(0)\text{-Ind}(Q, X) \leq \alpha$.

Από την Πρόταση 6.4.2(β), αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε ζεύγος (A, B) από ξένα μεταξύ τους κλειστά υποσύνολα του X, όπου $A \subseteq Q$, υπάρχει ένα υποσύνολο L του X το οποίο διαχωρίζει τα A και B έτσι ώστε $\text{pos}_1(0)\text{-Ind}(Q \cap L, X) < \alpha$. Έστω (A, B) ζεύγος από ξένα μεταξύ τους κλειστά υποσύνολα του X. Από το Λήμμα 6.6.2, υπάρχει ένα υποσύνολο L του X το οποίο διαχωρίζει τα A και B έτσι ώστε $L = \cup_{i=1}^{\infty} L_i$, όπου το L_i είναι κλειστό στο X και $\mathrm{pos}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap L_i, X) < \alpha$, $i = 1, 2, \ldots$. Εφ' όσον το αριθμήσιμο θεώρημα αθροίσματος για την $\mathrm{pos}_1(0)$-Ind ισχύει στο X,

$$\begin{aligned}\mathrm{pos}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap L, X) &= \mathrm{pos}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q \cap \cup_{i=1}^{\infty} L_i, X)\\ &= \mathrm{pos}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(\cup_{i=1}^{\infty}(Q \cap L_i), X) < \alpha.\end{aligned}$$

Συνεπώς, $\mathrm{pos}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q, X) \leq \alpha$. ■

6.7 Θεωρήματα Γινομένου

6.7.1 Ορισμός. Έστω *df* μια από τις διαστάσεις-συναρτήσεις θέσεως του τύπου Ind: $\mathrm{p}_i(j)$-Ind, $\mathrm{pos}_i(j)$-Ind, όπου $i \in \{0, 1\}$ και $j \in \{0, 1\}$. Λέμε ότι **το πεπερασμένο θεώρημα αθροίσματος για τη** *df* **ισχύει** σ' ένα χώρο X, εάν για κάθε ζεύγος (Q_1, Q_2) από κλειστούς υποχώρους του X με $df(Q_1, X) \leq \alpha$ και $df(Q_2, X) \leq \alpha$ έχουμε $df(Q_1 \cup Q_2, X) \leq \alpha$.

6.7.2 Πρόταση. Έστω X και Y δύο συμπαγείς χώροι και Q^X, Q^Y δύο κλειστά υποσύνολα των X και Y, αντίστοιχα.

(1) Εάν το πεπερασμένο θεώρημα αθροίσματος για την $\mathrm{p}_1(0)$-Ind ισχύει στο χώρο $X \times Y$, τότε $\mathrm{p}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q^X \times Q^Y, X \times Y) \leq \mathrm{p}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q^X, X)(+)\mathrm{p}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q^Y, Y)$.

(2) Εάν το πεπερασμένο θεώρημα αθροίσματος για την $\mathrm{pos}_1(0)$-Ind ισχύει στο χώρο $X \times Y$, τότε $\mathrm{pos}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q^X \times Q^Y, X \times Y) \leq \mathrm{pos}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q^X, X)(+)\mathrm{pos}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q^Y, Y)$.

Απόδειξη. (1) Αποδεικνύουμε τη σχέση

$$\mathrm{p}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q^X \times Q^Y, X \times Y) \leq \mathrm{p}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q^X, X)(+)\mathrm{p}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q^Y, Y) \tag{6.20}$$

με επαγωγή. Εάν $\mathrm{p}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q^X, X)(+)\mathrm{p}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q^Y, Y) = -1$, τότε τα Q^X και Q^Y είναι κενά και επομένως $\mathrm{p}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q^X \times Q^Y, X \times Y) = -1$. Υποθέτουμε ότι η σχέση (6.20) είναι αληθής για κάθε ζεύγη (Q^X, X) και (Q^Y, Y) με

$$\mathrm{p}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q^X, X)(+)\mathrm{p}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q^Y, Y) < \alpha,$$

όπου το α είναι ένας σταθερός διατακτικός αριθμός. Θεωρούμε δύο ζεύγη (Q^X, X) και (Q^Y, Y) με $\mathrm{p}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q^X, X)(+)\mathrm{p}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q^Y, Y) = \alpha$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\mathrm{p}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q^X \times Q^Y, X \times Y) \leq \alpha.$$

Εάν $\mathrm{p}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q^X, X) = -1$ ή $\mathrm{p}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q^Y, Y) = -1$, τότε $Q^X \times Q^Y = \emptyset$ και συνεπώς $\mathrm{p}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q^X \times Q^Y, X \times Y) = -1 < \alpha$. Έστω

$$\mathrm{p}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q^X, X) = \beta$$

και

$$\mathrm{p}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q^Y, Y) = \gamma,$$

όπου $\beta, \gamma \in \mathcal{O}$.

Θεωρούμε ένα ζεύγος (F, U) από υποσύνολα του $X \times Y$, όπου το F είναι κλειστό υποσύνολο του $X \times Y$, το U είναι ανοικτό υποσύνολο του $X \times Y$ και $F \subseteq (Q^X \times Q^Y) \cap U$. Είναι αρκετό να ορίσουμε ένα ανοικτό υποσύνολο V του $X \times Y$ έτσι ώστε $F \subseteq V \subseteq U$ και

$$\mathrm{p}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}((Q^X \times Q^Y) \cap \mathrm{Bd}_{X\times Y}(V), X \times Y) < \alpha.$$

Από τη συμπαγία του F, υπάρχει πεπερασμένο πλήθος από ανοικτά υποσύνολα $V_1^X, \ldots, V_n^X$ του X και ανοικτά υποσύνολα $V_1^Y, \ldots, V_n^Y$ του Y έτσι ώστε

$F \subseteq V = \cup_{i=1}^n (V_i^X \times V_i^Y) \subseteq U$,

$\mathrm{p}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q^X \cap \mathrm{Bd}_X(V_i^X), X) < \beta$ και

$\mathrm{p}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q^Y \cap \mathrm{Bd}_Y(V_i^Y), Y) < \gamma$ για $i = 1, \ldots, n$.

Έχουμε

$$\begin{aligned}(Q^X \times Q^Y) \cap \mathrm{Bd}_{X\times Y}(V) &= (Q^X \times Q^Y) \cap \mathrm{Bd}_{X\times Y}(\cup_{i=1}^n (V_i^X \times V_i^Y))\\ &\subseteq \cup_{i=1}^n ((Q^X \times Q^Y) \cap \mathrm{Bd}_{X\times Y}(V_i^X \times V_i^Y))\\ &\subseteq \cup_{i=1}^n ((Q^X \times Q^Y) \cap ((X \times \mathrm{Bd}_Y(V_i^Y)) \cup (\mathrm{Bd}_X(V_i^X) \times Y)))\\ &\subseteq \cup_{i=1}^n ((Q^X \times (Q^Y \cap \mathrm{Bd}_Y(V_i^Y))) \cup ((Q^X \cap \mathrm{Bd}_X(V_i^X)) \times Q^Y)),\end{aligned}$$

$$\mathrm{p}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q^X, X)(+)\mathrm{p}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q^Y \cap \mathrm{Bd}_Y(V_i^Y), Y) < \beta(+)\gamma = \alpha$$

και

$$\mathrm{p}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q^X \cap \mathrm{Bd}_X(V_i^X), X)(+)\mathrm{p}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q^Y, Y) < \beta(+)\gamma = \alpha.$$

Από την υπόθεση της επαγωγής, έχουμε

$$\mathrm{p}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q^X \times (Q^Y \cap \mathrm{Bd}_Y(V_i^Y)), X \times Y) < \alpha$$

και

$$\mathrm{p}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}((Q^X \cap \mathrm{Bd}_X(V_i^X)) \times Q^Y, X \times Y) < \alpha.$$

Εφ' όσον το πεπερασμένο θεώρημα αθροίσματος για την $\mathrm{p}_1(0)$-Ind ισχύει,

$$\mathrm{p}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}((Q^X \times Q^Y) \cap \mathrm{Bd}_{X\times Y}(V), X \times Y) < \alpha.$$

Συνεπώς, $\mathrm{p}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q^X \times Q^Y, X \times Y) \leq \alpha$.

(2) Αποδεικνύουμε τη σχέση

$$\text{(6.21)} \qquad \mathrm{pos}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q^X \times Q^Y, X \times Y) \leq \mathrm{pos}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q^X, X)(+)\mathrm{pos}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q^Y, Y)$$

με επαγωγή. Εάν $\mathrm{pos}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q^X, X)(+)\mathrm{pos}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q^Y, Y) = -1$, τότε τα Q^X και Q^Y είναι κενά και επομένως $\mathrm{pos}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q^X \times Q^Y, X \times Y) = -1$. Υποθέτουμε ότι η σχέση (6.21) είναι αληθής για κάθε ζεύγη (Q^X, X) και (Q^Y, Y) με

$$\mathrm{pos}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q^X, X)(+)\mathrm{pos}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q^Y, Y) < \alpha,$$

όπου το α είναι ένας σταθερός διατακτικός αριθμός. Θεωρούμε δύο ζεύγη (Q^X, X) και (Q^Y, Y) με $\mathrm{pos}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q^X, X)(+)\mathrm{pos}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q^Y, Y) = \alpha$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\mathrm{pos}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q^X \times Q^Y, X \times Y) \leq \alpha.$$

Εάν $\mathrm{pos}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q^X, X) = -1$ ή $\mathrm{pos}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q^Y, Y) = -1$, τότε $Q^X \times Q^Y = \emptyset$ και συνεπώς $\mathrm{pos}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q^X \times Q^Y, X \times Y) = -1 < \alpha$. Έστω

$$\mathrm{pos}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q^X, X) = \beta$$

και

$$\mathrm{pos}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q^Y, Y) = \gamma,$$

όπου $\beta, \gamma \in \mathcal{O}$.

Θεωρούμε ένα ζεύγος (F, U) από υποσύνολα του $X \times Y$, όπου το F είναι κλειστό υποσύνολο του $X \times Y$, το U είναι ανοικτό υποσύνολο του $X \times Y$ και $F \subseteq (Q^X \times Q^Y) \cap U$. Είναι αρκετό να ορίσουμε ένα ανοικτό υποσύνολο V του $X \times Y$ έτσι ώστε $F \subseteq V \subseteq U$ και

$$\mathrm{pos}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}((Q^X \times Q^Y) \cap \mathrm{Bd}_{X \times Y}(V), X \times Y) < \alpha.$$

Από τη συμπαγία του F, υπάρχει πεπερασμένο πλήθος από ανοικτά υποσύνολα $V_1^X, \ldots, V_n^X$ του X και ανοικτά υποσύνολα $V_1^Y, \ldots, V_n^Y$ του Y έτσι ώστε

$F \subseteq V = \cup_{i=1}^n (V_i^X \times V_i^Y) \subseteq U$,

$\mathrm{pos}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q^X \cap \mathrm{Bd}_X(V_i^X), X) < \beta$ και

$\mathrm{pos}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q^Y \cap \mathrm{Bd}_Y(V_i^Y), Y) < \gamma$ για $i = 1, \ldots, n$.

Έχουμε

$$\begin{aligned}(Q^X \times Q^Y) \cap \mathrm{Bd}_{X \times Y}(V) &= (Q^X \times Q^Y) \cap \mathrm{Bd}_{X \times Y}(\cup_{i=1}^n (V_i^X \times V_i^Y)) \\ &\subseteq \cup_{i=1}^n ((Q^X \times Q^Y) \cap \mathrm{Bd}_{X \times Y}(V_i^X \times V_i^Y))\end{aligned}$$

$$\subseteq \cup_{i=1}^{n}((Q^X \times Q^Y) \cap ((X \times \mathrm{Bd}_Y(V_i^Y)) \cup (\mathrm{Bd}_X(V_i^X) \times Y)))$$
$$\subseteq \cup_{i=1}^{n}((Q^X \times (Q^Y \cap \mathrm{Bd}_Y(V_i^Y))) \cup ((Q^X \cap \mathrm{Bd}_X(V_i^X)) \times Q^Y)),$$

$$\mathrm{pos}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q^X, X)(+)\mathrm{pos}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q^Y \cap \mathrm{Bd}_Y(V_i^Y), Y) < \beta(+)\gamma = \alpha$$

και

$$\mathrm{pos}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q^X \cap \mathrm{Bd}_X(V_i^X), X)(+)\mathrm{pos}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q^Y, Y) < \beta(+)\gamma = \alpha.$$

Από την υπόθεση της επαγωγής, έχουμε

$$\mathrm{pos}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q^X \times (Q^Y \cap \mathrm{Bd}_Y(V_i^Y)), X \times Y) < \alpha$$

και

$$\mathrm{pos}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}((Q^X \cap \mathrm{Bd}_X(V_i^X)) \times Q^Y, X \times Y) < \alpha.$$

Εφ' όσον το πεπερασμένο θεώρημα αθροίσματος για την $\mathrm{pos}_1(0)$-Ind ισχύει,

$$\mathrm{pos}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}((Q^X \times Q^Y) \cap \mathrm{Bd}_{X\times Y}(V), X \times Y) < \alpha.$$

Συνεπώς, $\mathrm{pos}_1(0)\text{-}\mathrm{Ind}(Q^X \times Q^Y, X \times Y) \leq \alpha$. ■

Κεφάλαιο 7

Διαστάσεις-συναρτήσεις βάσεως θέσεως του τύπου dim

Στο βιβλίο [37] ορίσθηκαν διαστάσεις-συναρτήσεις βάσεως του τύπου ind, Ind και dim. Οι διαστάσεις-συναρτήσεις αυτές μελετήθηκαν μόνο ως προς την ιδιότητα της καθολικότητας. Στο κεφάλαιο αυτό δίνονται διαστάσεις-συναρτήσεις βάσεως θέσεως του τύπου dim και αποδεικνύεται η ιδιότητα της καθολικότητας για τις συναρτήσεις αυτές. Τα αποτελέσματα του κεφαλαίου αυτού είναι όλα πρωτότυπα.

Σε ό,τι ακολουθεί με τη λέξη χώρο θα εννοούμε έναν T_0-χώρο με βάρος $\leq \tau$.

7.1 Βασικοί ορισμοί

Στην εργασία [71] ορίσθηκαν και μελετήθηκαν δύο διαστάσεις θέσεως *dim* και dim^*. Παρακάτω οι διαστάσεις *dim* και dim^* συμβολίζονται p^0-dim και p^1-dim, αντίστοιχα.

7.1.1 Ορισμός. Θεωρούμε τη συνάρτηση p^0-dim με πεδίο ορισμού την κλάση όλων των ζευγών (Q, X), όπου Q είναι ένα υποσύνολο ενός χώρου X, και πεδίο τιμών το σύνολο $\omega \cup \{-1, \infty\}$ που ικανοποιεί την παρακάτω συνθήκη:

$$\mathrm{p}^0\text{-dim}(Q, X) \leq n, \text{ όπου } n \in \{-1\} \cup \omega$$

εάν και μόνον εάν για κάθε πεπερασμένο ανοικτό κάλυμμα c του χώρου X υπάρχει ένα πεπερασμένο ανοικτό κάλυμμα r του Q, εκλέπτυνση του c, έτσι ώστε $\mathrm{ord}(r) \leq n$.

7.1.2 Ορισμός. Θεωρούμε τη συνάρτηση p^1-dim με πεδίο ορισμού την κλάση όλων των ζευγών (Q, X), όπου Q είναι ένα υποσύνολο ενός χώρου X, και πεδίο τιμών το σύνολο $\omega \cup \{-1, \infty\}$ που ικανοποιεί την παρακάτω συνθήκη:

$$\mathrm{p}^1\text{-dim}(Q, X) \leq n, \text{ όπου } n \in \{-1\} \cup \omega$$

εάν και μόνον εάν για κάθε πεπερασμένο ανοικτό κάλυμμα c του χώρου X υπάρχει μια πεπερασμένη οικογένεια r από ανοικτά υποσύνολα του X, εκλέπτυνση του c, έτσι ώστε $Q \subseteq \cup\{V : V \in r\}$ και $\mathrm{ord}(r) \leq n$.

7.1.3 Παρατήρηση. Παρατηρούμε ότι για κάθε υποσύνολο Q ενός χώρου X έχουμε

$$\mathrm{p}^0\text{-}\dim(Q, X) \leq \mathrm{p}^1\text{-}\dim(Q, X) \leq \dim(X).$$

Επίσης, εάν X είναι το επίπεδο του Niemytzki και $Q = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$, τότε

$$\mathrm{p}^0\text{-}\dim(Q, X) < \mathrm{p}^1\text{-}\dim(Q, X) < \dim(X)$$

και

$$\dim(Q) \neq \mathrm{p}^1\text{-}\dim(Q, X).$$

(Βλέπε Example 5 του [71]).

7.1.4 Ορισμός. (1) Έστω B μια βάση ενός χώρου X. Ένα κάλυμμα c του X λέγεται **B-κάλυμμα**, εάν όλα τα στοιχεία του c είναι στοιχεία της B.
(2) Έστω Q ένα υποσύνολο ενός χώρου X. Λέμε ότι μια οικογένεια c από υποσύνολα του X **καλύπτει** το Q, εάν η οικογένεια $\{Q \cap U : U \in c\}$ είναι ένα κάλυμμα του υποχώρου Q.

7.1.5 Ορισμός. Έστω $\mathbb{F}$ μια κλάση υποσυνόλων και Q ένα υποσύνολο του X. Ένα κάλυμμα c του X (αντίστοιχα, μια οικογένεια c από υποσύνολα του X που καλύπτει το Q) λέγεται **$\mathbb{F}$-κάλυμμα** (αντίστοιχα, **$\mathbb{F}$-κάλυμμα για το Q**), εάν $(C, X) \in \mathbb{F}$ για κάθε $C \in c$. Ένα $\mathbb{F}$-κάλυμμα (αντίστοιχα, ένα $\mathbb{F}$-κάλυμμα για το Q) r, που είναι εκλέπτυνση ενός καλύμματος c του X (αντίστοιχα, μιας οικογένειας c από υποσύνολα του X που καλύπτουν το Q), καλείται **$\mathbb{F}$-εκλέπτυνση του c** (αντίστοιχα, **$\mathbb{F}$-εκλέπτυνση του c για το Q**).

7.1.6 Συμβολισμός. Η κλάση όλων των p-βάσεων (αντίστοιχα, όλων των pos-βάσεων ή ps-βάσεων), δηλαδή η κλάση όλων των τριάδων (Q, B, X), όπου Q είναι ένα υποσύνολο ενός χώρου X και B είναι μια p-βάση (αντίστοιχα, μια pos-βάση ή ps-βάση) για το Q στο X, συμβολίζεται με $\mathbb{D}$(p-base) (αντίστοιχα, με $\mathbb{D}$(pos-base) ή $\mathbb{D}$(ps-base)).

7.1.7 Ορισμός. Για κάθε κλάση $\mathbb{F}$ υποσυνόλων θεωρούμε τη συνάρτηση $\mathrm{b}\text{-}\mathrm{p}^0\text{-}\dim^{\mathbb{F}}$ με πεδίο ορισμού την κλάση $\mathbb{D}$(ps-base) και πεδίο τιμών το σύνολο $\omega \cup \{-1, \infty\}$ που ικανοποιεί την παρακάτω συνθήκη:

$$\mathrm{b}\text{-}\mathrm{p}^0\text{-}\dim^{\mathbb{F}}(Q, B, X) \leq n, \text{ όπου } n \in \{-1\} \cup \omega$$

εάν και μόνον εάν για κάθε πεπερασμένο B-κάλυμμα c του χώρου X υπάρχει ένα πεπερασμένο $\mathbb{F}$-κάλυμμα r του Q, εκλέπτυνση του c, έτσι ώστε $\mathrm{ord}(r) \leq n$.

Εάν $\mathbb{F}$ είναι η κλάση όλων των ζευγών (Q, X), όπου Q είναι ένα ανοικτό υποσύνολο ενός χώρου X, τότε η συνάρτηση $\text{b-p}^0\text{-dim}^{\mathbb{F}}$ θα συμβολίζεται με $\text{b-p}^0\text{-dim}^{\text{Op}}$.

7.1.8 Ορισμός. Για κάθε κλάση $\mathbb{F}$ υποσυνόλων θεωρούμε τη συνάρτηση $\text{b-p}^1\text{-dim}^{\mathbb{F}}$ με πεδίο ορισμού την κλάση $\mathbb{D}(\text{ps-base})$ και πεδίο τιμών το σύνολο $\omega \cup \{-1, \infty\}$ που ικανοποιεί την παρακάτω συνθήκη:

$$\text{b-p}^1\text{-dim}^{\mathbb{F}}(Q, B, X) \leq n, \text{ όπου } n \in \{-1\} \cup \omega$$

εάν και μόνον εάν για κάθε πεπερασμένο B-κάλυμμα c του χώρου X υπάρχει μια πεπερασμένη οικογένεια r από ανοικτά υποσύνολα του X, εκλέπτυνση του c, έτσι ώστε $(C, X) \in \mathbb{F}$ για κάθε $C \in c$, $Q \subseteq \cup\{V : V \in r\}$ και $\text{ord}(r) \leq n$.

Εάν $\mathbb{F}$ είναι η κλάση όλων των ζευγών (Q, X), όπου Q είναι ένα ανοικτό υποσύνολο ενός χώρου X, τότε η συνάρτηση $\text{b-p}^1\text{-dim}^{\mathbb{F}}$ θα συμβολίζεται με $\text{b-p}^1\text{-dim}^{\text{Op}}$.

7.1.9 Πρόταση. Έστω B μια βάση ενός χώρου X. Για κάθε υποσύνολο Q του X έχουμε

(1) $\text{b-p}^0\text{-dim}^{\text{Op}}(Q, B, X) \leq \text{p}^0\text{-dim}(Q, X)$ και

(2) $\text{b-p}^1\text{-dim}^{\text{Op}}(Q, B, X) \leq \text{p}^1\text{-dim}(Q, X)$.

Απόδειξη. (1) Αποδεικνύουμε ότι

$$\text{b-p}^0\text{-dim}^{\text{Op}}(Q, B, X) \leq \text{p}^0\text{-dim}(Q, X). \tag{7.1}$$

Έστω $\text{p}^0\text{-dim}(Q, X) = n \in \omega \cup \{-1, \infty\}$. Η ανισότητα (7.1) είναι προφανής εάν $n = -1$ ή $n = \infty$. Υποθέτουμε ότι $n \in \omega$. Έστω c ένα πεπερασμένο B-κάλυμμα του χώρου X. Προφανώς, η οικογένεια c είναι ένα πεπερασμένο ανοικτό κάλυμμα του χώρου X. Εφ' όσον $\text{p}^0\text{-dim}(Q, X) = n$, υπάρχει ένα πεπερασμένο ανοικτό κάλυμμα r του Q, εκλέπτυνση του c, έτσι ώστε $\text{ord}(r) \leq n$. Συνεπώς, $\text{b-p}^0\text{-dim}^{\text{Op}}(Q, B, X) \leq n$.

(2) Αποδεικνύουμε ότι

$$\text{b-p}^1\text{-dim}^{\text{Op}}(Q, B, X) \leq \text{p}^1\text{-dim}(Q, X). \tag{7.2}$$

Έστω $\text{p}^1\text{-dim}(Q, X) = n \in \omega \cup \{-1, \infty\}$. Η ανισότητα (7.2) είναι προφανής εάν $n = -1$ ή $n = \infty$. Υποθέτουμε ότι $n \in \omega$. Έστω c ένα πεπερασμένο B-κάλυμμα του χώρου X. Προφανώς, η οικογένεια c είναι ένα πεπερασμένο ανοικτό κάλυμμα του χώρου X. Εφ' όσον $\text{p}^1\text{-dim}(Q, X) = n$, υπάρχει μια πεπερασμένη οικογένεια r από ανοικτά υποσύνολα του X, εκλέπτυνση του c, έτσι ώστε $Q \subseteq \cup\{V : V \in r\}$ και $\text{ord}(r) \leq n$. Συνεπώς, $\text{b-p}^1\text{-dim}^{\text{Op}}(Q, B, X) \leq n$. ■

7.1.10 Παράδειγμα. Έστω $\mathbb{R}$ το σύνολο των πραγματικών αριθμών με τη συνήθη τοπολογία, $Q = (-\infty, 2]$ και $B = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R} \text{ και } a < b\} \cup \{\mathbb{R}\}$. Προφανώς η οικογένεια B είναι μια βάση για το $\mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι

$$\mathrm{p}^0\text{-}\dim(Q, \mathbb{R}) = \mathrm{p}^1\text{-}\dim(Q, \mathbb{R}) = 1$$

και

$$\text{b-p}^0\text{-}\dim^{\mathrm{Op}}(Q, B, \mathbb{R}) = \text{b-p}^1\text{-}\dim^{\mathrm{Op}}(Q, B, \mathbb{R}) = 0.$$

7.1.11 Ορισμός. Λέμε ότι μια κλάση $\mathbb{F}$ υποσυνόλων είναι **κλειστή ως προς τον υπόχωρο Q του χώρου** X, εάν $(Y \cap Q, Q) \in \mathbb{F}$ για κάθε $(Y, X) \in \mathbb{F}$.

7.1.12 Πρόταση. Έστω B μια βάση ενός χώρου X. Για κάθε υποσύνολο Q του X έχουμε

$$\text{b-p}^0\text{-}\dim^{\mathbb{F}}(Q, B, X) \leq \text{b-p}^1\text{-}\dim^{\mathbb{F}}(Q, B, X), \tag{7.3}$$

όπου $\mathbb{F}$ είναι κλάση υποσυνόλων κλειστή ως προς τον υπόχωρο Q του χώρου X.

Απόδειξη. Έστω $\text{b-p}^1\text{-}\dim^{\mathbb{F}}(Q, B, X) = n \in \omega \cup \{-1, \infty\}$. Η ανισότητα (7.3) είναι προφανής εάν $n = -1$ ή $n = \infty$. Υποθέτουμε ότι $n \in \omega$. Έστω c ένα πεπερασμένο B-κάλυμμα του χώρου X. Εφ' όσον $\text{b-p}^1\text{-}\dim^{\mathbb{F}}(Q, B, X) = n$, υπάρχει μια πεπερασμένη οικογένεια r από υποσύνολα του X, εκλέπτυνση του c, έτσι ώστε $(C, X) \in \mathbb{F}$ για κάθε $C \in c$, $Q \subseteq \cup\{V : V \in r\}$ και $\mathrm{ord}(r) \leq n$. Τότε, η οικογένεια $r_Q = \{U \cap Q : U \in r\}$ είναι ένα πεπερασμένο $\mathbb{F}$-κάλυμμα του Q, εκλέπτυνση του c, και έχει τάξη $\leq n$. Συνεπώς, $\text{b-p}^0\text{-}\dim^{\mathbb{F}}(Q, B, X) \leq n$. ■

7.1.13 Παράδειγμα. Έστω X το επίπεδο του Niemytzki και $Q = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$. Εάν συμβολίσουμε με t την τοπολογία του X, τότε

$$\text{b-p}^0\text{-}\dim^{\mathrm{Op}}(Q, t, X) = \mathrm{p}^0\text{-}\dim(Q, X) < \mathrm{p}^1\text{-}\dim(Q, X) = \text{b-p}^1\text{-}\dim^{\mathrm{Op}}(Q, t, X).$$

(Βλέπε Example 5 του [71]).

7.1.14 Ορισμός. (Βλέπε [37]) Για κάθε κλάση $\mathbb{F}$ υποσυνόλων θεωρούμε τη συνάρτηση $\text{b-}\dim^{\mathbb{F}}$ με πεδίο ορισμού την κλάση όλων των ζευγών (B, X), όπου B είναι μια βάση ενός χώρου X, και πεδίο τιμών το σύνολο $\omega \cup \{-1, \infty\}$ που ικανοποιεί την παρακάτω συνθήκη:

$$\text{b-}\dim^{\mathbb{F}}(B, X) \leq n, \text{ όπου } n \in \{-1\} \cup \omega$$

εάν και μόνον εάν για κάθε πεπερασμένο B-κάλυμμα c του χώρου X υπάρχει μια πεπερασμένη $\mathbb{F}$-εκλέπτυνση r του c με $\mathrm{ord}(r) \leq n$.

Εάν $\mathbb{F}$ είναι η κλάση όλων των ζευγών (Q, X), όπου Q είναι ένα ανοικτό υποσύνολο ενός χώρου X, τότε η συνάρτηση b-dim$^{\mathbb{F}}$ θα συμβολίζεται με b-dim$^{\mathrm{Op}}$.

7.1.15 Πρόταση. Για κάθε χώρο X και για κάθε βάση B του X έχουμε

$$\text{b-dim}^{\mathrm{Op}}(B, X) \leq \dim(X). \tag{7.4}$$

Επιπλέον, εάν η βάση B είναι πεπερασμένη, τότε

$$\text{b-dim}^{\mathrm{Op}}(B, X) = \dim(X).$$

Απόδειξη. Έστω $\dim(X) = n \in \omega \cup \{-1, \infty\}$. Η ανισότητα (7.4) είναι προφανής εάν $n = -1$ ή $n = \infty$. Υποθέτουμε ότι $n \in \omega$. Έστω c ένα πεπερασμένο B-κάλυμμα του χώρου X. Προφανώς, η οικογένεια c είναι ένα πεπερασμένο ανοικτό κάλυμμα του χώρου X. Εφ' όσον $\dim(X) = n$, η οικογένεια c έχει μια πεπερασμένη εκλέπτυνση r από ανοικτά υποσύνολα του X με $\mathrm{ord}(r) \leq n$. Συνεπώς, b-dim$^{\mathrm{Op}}(B, X) \leq n$.

Έστω ότι η βάση B είναι πεπερασμένη. Αποδεικνύουμε ότι b-dim$^{\mathrm{Op}}(B, X) = \dim(X)$. Από τη σχέση (7.4), αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\dim(X) \leq \text{b-dim}^{\mathrm{Op}}(B, X). \tag{7.5}$$

Έστω b-dim$^{\mathrm{Op}}(B, X) = n \in \omega \cup \{-1, \infty\}$. Η ανισότητα (7.5) είναι προφανής εάν $n = -1$ ή $n = \infty$. Υποθέτουμε ότι $n \in \omega$. Έστω $c = \{U_i : i = 1, \ldots, k\}$ ένα πεπερασμένο ανοικτό κάλυμμα του χώρου X. Εφ' όσον η βάση B είναι πεπερασμένη, για κάθε $i = 1, \ldots, k$ υπάρχουν στοιχεία $W_{i,j}$, $j = 1, \ldots, k_i$ της βάσης B έτσι ώστε $U_i = \bigcup_{j=1}^{k_i} W_{i,j}$. Η οικογένεια

$$c' = \{W_{i,j} : j = 1, \ldots, k_i \text{ και } i = 1, \ldots, k\}$$

είναι ένα πεπερασμένο B-κάλυμμα του χώρου X. Εφ' όσον b-dim$^{\mathrm{Op}}(B, X) = n$, υπάρχει μια πεπερασμένη εκλέπτυνση r του c' από ανοικτά υποσύνολα του X με $\mathrm{ord}(r) \leq n$. Προφανώς, η οικογένεια r είναι μια πεπερασμένη εκλέπτυνση του c. Συνεπώς, $\dim(X) \leq n$. ■

7.1.16 Πρόταση. Έστω $\mathbb{F}$ η κλάση όλων των υποσυνόλων και B μια βάση ενός χώρου X. Τότε, b-dim$^{\mathbb{F}}(B, X) = 0$.

Απόδειξη. Έστω $c = \{U_i : i = 1, \ldots, k\}$ ένα πεπερασμένο B-κάλυμμα του χώρου X. Τα σύνολα

$$V_1 = U_1 \;\text{ και }\; V_i = U_i \setminus \bigcup_{j<i} U_j, \text{ όπου } i = 2, \ldots, k,$$

αποτελούν μια πεπερασμένη $\mathbb{F}$-εκλέπτυνση του c με τάξη 0. Άρα, $\text{b-dim}^{\mathbb{F}}(B,X)=0$. ■

7.1.17 Ορισμός. Για κάθε κλάση $\mathbb{F}$ υποσυνόλων θεωρούμε τη συνάρτηση $\text{b-p-dim}^{\mathbb{F}}$ με πεδίο ορισμού την κλάση $\mathbb{D}$(p-base) και πεδίο τιμών το σύνολο $\omega\cup\{-1,\infty\}$ που ικανοποιεί την παρακάτω συνθήκη:

$$\text{b-p-dim}^{\mathbb{F}}(Q,B,X)\leq n,\ \text{ όπου } n\in\{-1\}\cup\omega$$

εάν και μόνον εάν για κάθε πεπερασμένη οικογένεια c από στοιχεία της B που καλύπτει το Q υπάρχει μια πεπερασμένη $\mathbb{F}$-εκλέπτυνση r του c για το Q με $\text{ord}(r)\leq n$.

Εάν $\mathbb{F}$ είναι η κλάση όλων των ζευγών (Q,X), όπου Q είναι ένα ανοικτό υποσύνολο ενός χώρου X, τότε η συνάρτηση $\text{b-p-dim}^{\mathbb{F}}$ θα συμβολίζεται με $\text{b-p-dim}^{\text{Op}}$.

7.1.18 Παρατήρηση. (1) Εάν στον Ορισμό 7.1.17 αντικαταστήσουμε την κλάση $\mathbb{D}$(p-base) με την κλάση $\mathbb{D}$(pos-base) (αντίστοιχα, με την κλάση $\mathbb{D}$(ps-base)), τότε θα πάρουμε τη διάσταση-συνάρτηση βάσεως θέσεως $\text{b-pos-dim}^{\mathbb{F}}$ (αντίστοιχα, $\text{b-ps-dim}^{\mathbb{F}}$). Προφανώς,

(α) $\text{b-p-dim}^{\mathbb{F}}|_{\mathbb{D}(\text{pos-base})}=\text{b-pos-dim}^{\mathbb{F}}$ και

(β) $\text{b-p-dim}^{\mathbb{F}}|_{\mathbb{D}(\text{ps-base})}=\text{b-ps-dim}^{\mathbb{F}}$.

(2) Έστω $\mathbb{F}$ μια κλάση υποσυνόλων και B μια βάση ενός χώρου X. Τότε,

$$\begin{aligned}\text{b-ps-dim}^{\mathbb{F}}(X,B,X) &= \text{b-p}^0\text{-dim}^{\mathbb{F}}(X,B,X)\\ &= \text{b-p}^1\text{-dim}^{\mathbb{F}}(X,B,X)\\ &= \text{b-dim}^{\mathbb{F}}(B,X).\end{aligned}$$

7.1.19 Πρόταση. Έστω B μια βάση ενός χώρου X. Για κάθε υποσύνολο Q του X έχουμε

$$\text{b-p}^1\text{-dim}^{\mathbb{F}}(Q,B,X)\leq\text{b-ps-dim}^{\mathbb{F}}(Q,B,X). \tag{7.6}$$

Απόδειξη. Έστω $\text{b-ps-dim}^{\mathbb{F}}(Q,B,X)=n\in\omega\cup\{-1,\infty\}$. Η ανισότητα (7.6) είναι προφανής εάν $n=-1$ ή $n=\infty$. Υποθέτουμε ότι $n\in\omega$. Έστω c ένα πεπερασμένο B-κάλυμμα του χώρου X. Τότε, η οικογένεια c καλύπτει το Q. Εφ' όσον $\text{b-ps-dim}^{\mathbb{F}}(Q,B,X)=n$, υπάρχει μια πεπερασμένη $\mathbb{F}$-εκλέπτυνση r του c με $\text{ord}(r)\leq n$. Προφανώς, $Q\subseteq\cup\{V:V\in r\}$. Συνεπώς, $\text{b-p}^1\text{-dim}^{\mathbb{F}}(Q,B,X)\leq n$. ■

7.1.20 Πρόταση. Έστω $\mathbb{F}$ μια κλάση υποσυνόλων και B μια βάση ενός χώρου X. Για κάθε υποσύνολο Q του X έχουμε $\text{b-p}^1\text{-dim}^{\mathbb{F}}(Q,B,X)\leq\text{b-dim}^{\mathbb{F}}(B,X)$. Επίσης, για κάθε $V\in B$ έχουμε $\text{b-ps-dim}^{\mathbb{F}}(X\setminus V,B,X)\leq\text{b-dim}^{\mathbb{F}}(B,X)$.

Απόδειξη. Αποδεικνύουμε ότι

$$\text{b-p}^1\text{-dim}^{\mathbb{F}}(Q, B, X) \leq \text{b-dim}^{\mathbb{F}}(B, X). \tag{7.7}$$

Έστω $\text{b-dim}^{\mathbb{F}}(B, X) = n \in \omega \cup \{-1, \infty\}$. Η ανισότητα (7.7) είναι προφανής εάν $n = -1$ ή $n = \infty$. Υποθέτουμε ότι $n \in \omega$. Έστω c ένα πεπερασμένο B-κάλυμμα του χώρου X. Εφ' όσον $\text{b-dim}^{\mathbb{F}}(B, X) = n$, υπάρχει μια πεπερασμένη $\mathbb{F}$-εκλέπτυνση r του c με $\text{ord}(r) \leq n$. Προφανώς, $Q \subseteq \cup\{V : V \in r\}$. Συνεπώς, $\text{b-p}^1\text{-dim}^{\mathbb{F}}(Q, B, X) \leq n$.

Αποδεικνύουμε ότι

$$\text{b-ps-dim}^{\mathbb{F}}(X \setminus V, B, X) \leq \text{b-dim}^{\mathbb{F}}(B, X). \tag{7.8}$$

Έστω $\text{b-dim}^{\mathbb{F}}(B, X) = n \in \omega \cup \{-1, \infty\}$. Η ανισότητα (7.8) είναι προφανής εάν $n = -1$ ή $n = \infty$. Υποθέτουμε ότι $n \in \omega$. Έστω c μια πεπερασμένη οικογένεια από στοιχεία της B που καλύπτει το $X \setminus V$. Τότε, η οικογένεια $c \cup \{V\}$ είναι ένα πεπερασμένο B-κάλυμμα του χώρου X. Εφ' όσον $\text{b-dim}^{\mathbb{F}}(B, X) = n$, υπάρχει μια πεπερασμένη $\mathbb{F}$-εκλέπτυνση r του $c \cup \{V\}$ με $\text{ord}(r) \leq n$. Προφανώς, $X \setminus V \subseteq \cup\{V : V \in r\}$. Συνεπώς, $\text{b-ps-dim}^{\mathbb{F}}(X \setminus V, B, X) \leq n$.
■

7.1.21 Πόρισμα. Έστω $\mathbb{F}$ μια κλάση υποσυνόλων και B μια βάση ενός χώρου X. Τότε,

$$\begin{aligned}\text{b-dim}^{\mathbb{F}}(B, X) &= \max\{\text{b-ps-dim}^{\mathbb{F}}(X \setminus V, B, X) : V \in B\} \\ &= \max\{\text{b-p}^1\text{-dim}^{\mathbb{F}}(Q, B, X) : Q \subseteq X\}.\end{aligned}$$

Απόδειξη. Από την Πρόταση 7.1.20, έχουμε

$$\sup\{\text{b-p}^1\text{-dim}^{\mathbb{F}}(Q, B, X) : Q \subseteq X\} \leq \text{b-dim}^{\mathbb{F}}(B, X)$$

και

$$\sup\{\text{b-ps-dim}^{\mathbb{F}}(X \setminus V, B, X) : V \in B\} \leq \text{b-dim}^{\mathbb{F}}(B, X).$$

Επίσης, για $Q = X$ έχουμε

$$\text{b-p}^1\text{-dim}^{\mathbb{F}}(Q, B, X) = \text{b-dim}^{\mathbb{F}}(B, X)$$

και για $V = \emptyset$ έχουμε

$$\text{b-ps-dim}^{\mathbb{F}}(X, B, X) = \text{b-dim}^{\mathbb{F}}(B, X).$$

Άρα,

b-dim$^{\mathbb{F}}(B,X) = \max\{$b-p^1-dim$^{\mathbb{F}}(Q,B,X) : Q \subseteq X\}$ και

b-dim$^{\mathbb{F}}(B,X) = \max\{$b-ps-dim$^{\mathbb{F}}(X \setminus V, B, X) : V \in B\}$. ■

7.1.22 Παράδειγμα. Έστω $X = \{a,b,c\}$. Θεωρούμε επί του X την τοπολογία

$$t = \{\emptyset, \{a,b\}, \{b,c\}, \{b\}, X\}.$$

Έστω $Q = \{c\}$. Παρατηρούμε ότι

b-p^0-dim$^{\mathrm{Op}}(Q,t,X) =$ b-p^1-dim$^{\mathrm{Op}}(Q,t,X) = 0$ και

b-dim$^{\mathrm{Op}}(t,X) = 1$.

7.1.23 Παράδειγμα. Έστω $\mathbb{R}$ το σύνολο των πραγματικών αριθμών με τη συνήθη τοπολογία, $I = [0,1]$ και $B = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{R}$ και $a < b\} \cup \{\mathbb{R}\}$. Προφανώς η οικογένεια B είναι μια βάση για το $\mathbb{R}$ και $\dim(\mathbb{R}) = 1$. Επιπλέον, επειδή το μονοσύνολο $\{\mathbb{R}\}$ είναι εκλέπτυνση κάθε πεπερασμένου B-καλύμματος του $\mathbb{R}$, b-dim$^{\mathrm{Op}}(B,\mathbb{R}) = 0$. Παρατηρούμε ότι

b-p^0-dim$^{\mathrm{Op}}(I,B,\mathbb{R}) =$ b-p^1-dim$^{\mathrm{Op}}(I,B,\mathbb{R}) = 0$ και

b-ps-dim$^{\mathrm{Op}}(I,B,\mathbb{R}) = 1$.

7.1.24 Παρατήρηση. Οι σχέσεις μεταξύ των διαστάσεων-συναρτήσεων του τύπου dim (βλέπε τις παραπάνω προτάσεις και παραδείγματα) συνοψίζονται στο παρακάτω διάγραμμα, όπου "$\to$" σημαίνει "$\leq$" και "$\not\to$" σημαίνει ότι "γενικά $\not\leq$".

$$\begin{tikzcd}
 & \text{b-dim}^{\mathrm{Op}}(B,X) \arrow[r, shift left] \arrow[d, shift right, "/" marking] & \dim(X) \arrow[l, shift left, "/" marking] \arrow[d, shift right, "/" marking] \\
\text{b-ps-dim}^{\mathrm{Op}}(Q,B,X) \arrow[r, shift right, "/" marking] & \text{b-p}^1\text{-dim}^{\mathrm{Op}}(Q,B,X) \arrow[l, shift right] \arrow[r, shift left] \arrow[u, shift right] \arrow[d, shift right, "/" marking] & \text{p}^1\text{-dim}(Q,X) \arrow[l, shift left, "/" marking] \arrow[u, shift right] \arrow[d, shift right, "/" marking] \\
 & \text{b-p}^0\text{-dim}^{\mathrm{Op}}(Q,B,X) \arrow[r, shift left] \arrow[u, shift right] & \text{p}^0\text{-dim}(Q,X) \arrow[l, shift left, "/" marking] \arrow[u, shift right]
\end{tikzcd}$$

Διάγραμμα 7.1

7.2 Καθολικά στοιχεία για διαστάσεις-συναρτήσεις βάσεως θέσεως του τύπου dim

7.2.1 Συμβολισμοί. Έστω df μια από τις παρακάτω διαστάσεις-συναρτήσεις βάσεως θέσεως του τύπου dim: b-p-dim$^{\mathbb{F}}$, b-pos-dim$^{\mathbb{F}}$, b-ps-dim$^{\mathbb{F}}$, b-p^0-dim$^{\mathbb{F}}$ και b-p^1-dim$^{\mathbb{F}}$. Για κάθε $n \in \{-1\} \cup \omega$ με $\mathbb{P}(df \leq n)$ συμβολίζουμε την κλάση p-βάσεων που αποτελείται από όλες τις τριάδες (Q, B, X) με $df(Q, B, X) \leq n$.

7.2.2 Ορισμός. (Βλέπε [37]) Έστω X ένας χώρος. Λέγεται ότι μια κλάση $\mathbb{F}$ υποσυνόλων ικανοποιεί τη **Συνθήκη Πεπερασμένης Ένωσης** (Finite Union Condition), εάν από τις συνθήκες $(F_i, X) \in \mathbb{F}$, $i \in j \in \omega$, προκύπτει ότι $(\cup\{F_i : i \in j\}, X) \in \mathbb{F}$. Επίσης, λέγεται ότι μια κλάση $\mathbb{F}$ υποσυνόλων ικανοποιεί τη **Συνθήκη Κενού Υποσυνόλου** (Empty Subset Condition), εάν από τη συνθήκη $(Q, X) \in \mathbb{F}$ προκύπτει ότι $(\emptyset, X) \in \mathbb{F}$.

7.2.3 Λήμμα. (Βλέπε [37]) Έστω $\mathbf{Q}$ ένας περιορισμός μιας δικτυωμένης οικογένειας $\mathbf{S}$ από χώρους. Υποθέτουμε ότι ο $\mathbf{Q}$ είναι $(\mathbf{M}_0, \mathrm{R}_0)$-πλήρης περιορισμός για κάποιο συν-σημάδι $\mathbf{M}_0$ της $\mathbf{S}$ και για κάποια $(\mathbf{M}_0, \mathbf{Q})$-επιτρεπτή οικογένεια από σχέσεις ισοδυναμίας επί της $\mathbf{S}$. Τότε, για κάθε συν-σημάδι $\mathbf{M}$ της $\mathbf{S}$, που είναι συν-επέκταση του $\mathbf{M}_0$ και για κάθε $(\mathbf{M}, \mathbf{Q})$-επιτρεπτή οικογένεια R από σχέσεις ισοδυναμίας επί της $\mathbf{S}$, που είναι τελικώς λεπτότερη της R_0, ο $\mathbf{Q}$ είναι $(\mathbf{M}, \mathrm{R})$-πλήρης περιορισμός.

7.2.4 Θεώρημα. Έστω df μια από τις διαστάσεις-συναρτήσεις βάσεως θέσεως: b-p-dim$^{\mathbb{F}}$, b-pos-dim$^{\mathbb{F}}$, b-ps-dim$^{\mathbb{F}}$, b-p^0-dim$^{\mathbb{F}}$ και b-p^1-dim$^{\mathbb{F}}$. Εάν η κλάση $\mathbb{F}$ είναι κορεσμένη, πλήρης και ικανοποιεί τις Συνθήκες Πεπερασμένης Ένωσης και Κενού Υποσυνόλου, τότε για κάθε $n \in \{-1\} \cup \omega$ η κλάση $\mathbb{P}(df \leq n)$ είναι κορεσμένη.

Απόδειξη. Δίνεται η απόδειξη του θεωρήματος μόνο για την κλάση $\mathbb{P}(\text{b-p-dim}^{\mathbb{F}} \leq n)$, όπου $n \in \{-1\} \cup \omega$. Η απόδειξη του θεωρήματος για τις υπόλοιπες κλάσεις είναι ανάλογη. Έστω $n \in \{-1\} \cup \omega$. Θα αποδείξουμε ότι η κλάση $\mathbb{P}(\text{b-p-dim}^{\mathbb{F}} \leq n)$ είναι κορεσμένη. Έστω $\mathbf{S}$ μια δικτυωμένη οικογένεια από χώρους, $\mathbf{Q} \equiv \{Q^X : X \in \mathbf{S}\}$ ένας περιορισμός της $\mathbf{S}$, $\mathbf{B} \equiv \{B^X : X \in \mathbf{S}\}$ μια $\mathbb{P}(\text{b-p-dim}^{\mathbb{F}} \leq n)$-συν-p-βάση για τον $\mathbf{Q}$ στην $\mathbf{S}$ και

$$\mathbf{N} \equiv \{\{V_\varepsilon^X : \varepsilon \in \tau\} : X \in \mathbf{S}\}$$

μια συν-δικτύωση της $\mathbf{B}$. Αποδεικνύουμε ότι υπάρχει μια συν-επέκταση $\mathbf{M}^+$ του $\mathbf{N}$ έτσι ώστε για κάθε συν-σημάδι $\mathbf{M}$ της $\mathbf{S}$, που είναι συν-επέκταση του $\mathbf{M}^+$, να υπάρχει μια $(\mathbf{M}, \mathbf{Q})$-επιτρεπτή οικογένεια R^+ από σχέσεις ισοδυναμίας επί της $\mathbf{S}$ τέτοια ώστε για κάθε επιτρεπτή οικογένεια R από σχέσεις ισοδυναμίας επί της $\mathbf{S}$, που είναι τελικώς λεπτότερη της R^+, και κάθε $\mathbf{L}, \mathbf{H}, \mathbf{E} \in \mathrm{C}^{\diamondsuit}(\mathrm{R})$ με $\mathbf{L} \subseteq \mathbf{H} \subseteq \mathbf{E}$ να έχουμε ότι

$$(\mathrm{T}(\mathbf{E}|_{\mathbf{Q}}), \mathrm{B}^{\mathbf{H}}_{\diamondsuit, \theta(\tau)}, \mathrm{T}(\mathbf{L})) \in \mathbb{P}(\text{b-p-dim}^{\mathbb{F}} \leq n),$$

όπου θ είναι μια ενδεικτική συνάρτηση από το $\mathbf{N}$ στο $\mathbf{M}$.

Πρώτα, για κάθε $q \in \mathcal{F} \setminus \{\emptyset\}$ και για κάθε $\varepsilon \in q$ θα κατασκευάσουμε ένα $\mathbb{F}$-περιορισμό της $\mathbf{S}$:

$$\mathbf{W}(q,\varepsilon) \equiv \{W^X(q,\varepsilon) : X \in \mathbf{S}\}.$$

Έστω $q = \{\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_k\}$ ένα στοιχείο του $\mathcal{F} \setminus \{\emptyset\}$. Για κάθε $X \in \mathbf{S}$ θεωρούμε ένα δικτυωμένο σύνολο

$$V^X(q) \equiv \{V^X_\varepsilon : \varepsilon \in q\}.$$

Εάν το σύνολο $V^X(q)$ δεν καλύπτει το Q^X, τότε για κάθε $\varepsilon \in q$ θέτουμε $W^X(q,\varepsilon) = \emptyset$. Υποθέτουμε ότι το σύνολο $V^X(q)$ καλύπτει το Q^X. Εφ' όσον η $V^X(q)$ είναι μια πεπερασμένη οικογένεια από στοιχεία της B^X που καλύπτει το Q^X και $(Q^X, B^X, X) \in \mathbb{P}(\text{b-p-dim}^{\mathbb{F}} \leq n)$, υπάρχει μια πεπερασμένη $\mathbb{F}$-εκλέπτυνση r^X_q του $V^X(q)$ για το Q^X με $\text{ord}(r^X_q) \leq n$. Θέτουμε

$$W^X(q,\varepsilon_0) = \cup\{V \in r^X_q : V \subseteq V^X_{\varepsilon_0}\}$$

και

$$W^X(q,\varepsilon_i) = \cup\{V \in r^X_q : V \subseteq V^X_{\varepsilon_i} \text{ και } V \not\subseteq V^X_\varepsilon \text{ για κάθε } \varepsilon \in \{\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_{i-1}\}\}$$

για κάθε $i \in \{1, \ldots, k\}$. Εφ' όσον το r^X_q είναι ένα $\mathbb{F}$-κάλυμμα για το Q^X με $\text{ord}(r^X_q) \leq n$ και επειδή η $\mathbb{F}$ ικανοποιεί τις Συνθήκες Πεπερασμένης Ένωσης και Κενού Υποσυνόλου, το σύνολο

$$W^X(q) \equiv \{W^X(q,\varepsilon) : \varepsilon \in q\}$$

είναι επίσης ένα $\mathbb{F}$-κάλυμμα για το Q^X με $\text{ord}(W^X(q)) \leq n$. Επιπλέον, από την κατασκευή,

$$W^X(q,\varepsilon) \subseteq V^X_\varepsilon \text{ για κάθε } \varepsilon \in q.$$

Σημειώνουμε ότι το κάλυμμα $W^X(q)$ έχει επίσης την παρακάτω ιδιότητα: εάν τα $\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_{n+1}$ είναι διακεκριμένα στοιχεία του q έτσι ώστε $W^X(q,\varepsilon_i) \neq \emptyset$, $i \in \{0, \ldots, n+1\}$, τότε τα $W^X(q,\varepsilon_0), \ldots, W^X(q,\varepsilon_{n+1})$ είναι διακεκριμένα στοιχεία του $W^X(q)$ και επομένως

$$W^X(q,\varepsilon_0) \cap \ldots \cap W^X(q,\varepsilon_{n+1}) = \emptyset.$$

Έστω $\mathbf{M}^+$ ένα συν-σημάδι της $\mathbf{S}$, το οποίο είναι συν-επέκταση του $\mathbf{N}$. Συμβολίζουμε με $\theta^{\mathbf{N}}$ μια ενδεικτική συνάρτηση από το $\mathbf{N}$ στο $\mathbf{M}^+$. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι για κάθε $q \in \mathcal{F} \setminus \{\emptyset\}$ και για κάθε $\varepsilon \in q$, το $\mathbf{M}^+$ είναι ένα αρχικό συν-σημάδι της $\mathbf{S}$ που αντιστοιχεί στον περιορισμό $\mathbf{W}(q,\varepsilon)$ και στην κλάση $\mathbb{F}$. Επιπλέον, εφ' όσον η κλάση $\mathbb{F}$ είναι πλήρης μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχει μια οικογένεια R^+_0 από σχέσεις ισοδυναμίας επί της $\mathbf{S}$ έτσι ώστε για κάθε $q \in \mathcal{F} \setminus \{\emptyset\}$ και για κάθε $\varepsilon \in q$ να έχουμε: (α) η οικογένεια R^+_0 είναι $(\mathbf{M}^+, \mathbf{W}(q,\varepsilon))$-επιτρεπτή και (β) ο περιορισμός $\mathbf{W}(q,\varepsilon)$

της $\mathbf{S}$ είναι $(\mathbf{M}^+, \mathrm{R}_0^+)$-πλήρης. Θα αποδείξουμε ότι το $\mathbf{M}^+$ είναι ένα αρχικό συν-σημάδι της $\mathbf{S}$ που αντιστοιχεί στον περιορισμό $\mathbf{Q}$, στη συν-δικτύωση $\mathbf{N}$ της $\mathbf{B}$ και στην κλάση $\mathbb{P}(\text{b-p-dim}^{\mathbb{F}} \leq n)$. Πράγματι, έστω

$$\mathbf{M} \equiv \{\{U_\delta^X : \delta \in \tau\} : X \in \mathbf{S}\}$$

μια αυθαίρετη συν-επέκταση του $\mathbf{M}^+$. Συμβολίζουμε με θ^+ μια ενδεικτική συνάρτηση από το $\mathbf{M}^+$ στο $\mathbf{M}$. Τότε, το συν-σημάδι $\mathbf{M}$ είναι συν-επέκταση του συν-σημαδιού $\mathbf{N}$ και η συνάρτηση $\theta = \theta^+ \circ \theta^{\mathbf{N}}$ είναι μια ενδεικτική συνάρτηση από το $\mathbf{N}$ στο $\mathbf{M}$. (Συνεπώς, $V_\varepsilon^X = U_{\theta(\varepsilon)}^X$ για κάθε $\varepsilon \in \tau$ και $X \in \mathbf{S}$).

Για κάθε $q \in \mathcal{F} \setminus \{\emptyset\}$ και για κάθε $\varepsilon \in q$ θεωρούμε μια αρχική οικογένεια $\mathrm{R}_{q,\varepsilon}^+$ από σχέσεις ισοδυναμίας επί της $\mathbf{S}$ που αντιστοιχεί στο συν-σημάδι $\mathbf{M}$, στον περιορισμό $\mathbf{W}(q, \varepsilon)$ και στην κλάση $\mathbb{F}$. Από την Πρόταση 3.1.5(1), υπάρχει μια επιτρεπτή οικογένεια R^+ από σχέσεις ισοδυναμίας επί της $\mathbf{S}$, η οποία είναι τελικώς λεπτότερη από την R_0^+ και από όλες τις οικογένειες $\mathrm{R}_{q,\varepsilon}^+$. Θα αποδείξουμε ότι η R^+ είναι μια αρχική οικογένεια της $\mathbf{S}$ που αντιστοιχεί στο συν-σημάδι $\mathbf{M}$, στον περιορισμό $\mathbf{Q}$, στη συν-δικτύωση $\mathbf{N}$ της $\mathbf{B}$ και στην κλάση $\mathbb{P}(\text{b-p-dim}^{\mathbb{F}} \leq n)$. Προς τούτο θεωρούμε μια αυθαίρετη επιτρεπτή οικογένεια R από σχέσεις ισοδυναμίας επί της $\mathbf{S}$, η οποία είναι τελικώς λεπτότερη της R^+. Αποδεικνύουμε ότι για κάθε $\mathbf{L}, \mathbf{H}, \mathbf{E} \in \mathrm{C}^\diamondsuit(\mathrm{R})$ με $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{H} \subseteq \mathbf{L}$, έχουμε $(\mathrm{T}(\mathbf{E}|_\mathbf{Q}), \mathrm{B}_{\diamondsuit,\theta(\tau)}^{\mathbf{H}}, \mathrm{T}(\mathbf{L})) \in \mathbb{P}(\text{b-p-dim}^{\mathbb{F}} \leq n)$.

Έστω $\mathbf{L}, \mathbf{H}, \mathbf{E}$ στοιχεία του $\mathrm{C}^\diamondsuit(\mathrm{R})$ με $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{H} \subseteq \mathbf{L}$ και

$$c \equiv \{U_{\delta_0}^{\mathrm{T}}(\mathbf{H}_0), \ldots, U_{\delta_k}^{\mathrm{T}}(\mathbf{H}_k)\}$$

μια πεπερασμένη οικογένεια από στοιχεία της $\mathrm{B}_{\diamondsuit,\theta(\tau)}^{\mathbf{H}}$, όπου $\mathbf{H}_0 \subseteq \mathbf{H}, \ldots, \mathbf{H}_k \subseteq \mathbf{H}$ και $\delta_0, \ldots, \delta_k \in \theta(\tau)$, που καλύπτει το $\mathrm{T}(\mathbf{E}|_\mathbf{Q})$. Θέτουμε $s = \{\delta_0, \ldots, \delta_k\}$ και $q = \theta^{-1}(s)$. Για κάθε $X \in \mathbf{E}$ συμβολίζουμε με q^X το σύνολο όλων των στοιχείων ε του q για τα οποία υπάρχει $i \in \{0, \ldots, k\}$ έτσι ώστε $\theta(\varepsilon) = \delta_i$ και $X \in \mathbf{H}_i$. Τότε, $q^X \neq \emptyset$ και το σύνολο

$$V^X(q^X) = \{V_\varepsilon^X : \varepsilon \in q^X\}$$

είναι μια πεπερασμένη οικογένεια από στοιχεία του B^X που καλύπτει το Q^X. Συνεπώς, το

$$W^X(q^X) = \{W^X(q^X, \varepsilon) : \varepsilon \in q^X\}$$

είναι ένα $\mathbb{F}$-κάλυμμα του Q^X. Έστω t ένα στοιχείο του $\mathcal{F}$ τέτοιο ώστε εάν $\mathbf{K}$ είναι μια $\sim^t$-κλάση ισοδυναμίας και $\mathbf{K} \cap \mathbf{H}_i \neq \emptyset$ για κάποιο $i \in \{0, \ldots, k\}$, τότε $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{H}_i$. Προφανώς, εάν $X \sim^t Y$, τότε $q^X = q^Y$.

Έστω $\mathbf{K}$ ένα στοιχείο του $\mathrm{C}(\sim^t)$ τέτοιο ώστε $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{E}$. Θέτουμε $q^{\mathbf{K}} = q^X$, όπου $X \in \mathbf{K}$. Από τα παραπάνω, το $q^{\mathbf{K}}$ δεν εξαρτάται από το στοιχείο X του $\mathbf{K}$. Θεωρούμε την οικογένεια

$$c(\mathbf{K}) \equiv \{U_{\delta_i}^{\mathrm{T}}(\mathbf{H}_i) \cap \mathrm{T}(\mathbf{K}) = U_{\delta_i}^{\mathrm{T}}(\mathbf{K}) : \delta_i \in \theta(q^{\mathbf{K}}), \mathbf{K} \subseteq \mathbf{H}_i\}.$$

Προφανώς η οικογένεια $c(\mathbf{K})$ καλύπτει το $\mathrm{T}(\mathbf{K}|_{\mathbf{Q}})$. Αποδεικνύουμε ότι η

$$r(\mathbf{K}) \equiv \{\mathrm{T}|_{\mathbf{W}(q^{\mathbf{K}},\varepsilon)} \cap \mathrm{T}(\mathbf{K}) = \mathrm{T}(\mathbf{K}|_{\mathbf{W}(q^{\mathbf{K}},\varepsilon)}) : \varepsilon \in q^{\mathbf{K}}\}$$

είναι μια $\mathbb{F}$-εκλέπτυνση του $c(\mathbf{K})$ για το $\mathrm{T}(\mathbf{K}|_{\mathbf{Q}})$ με $\mathrm{ord}(r(\mathbf{K})) \leq n$. Εφ' όσον η κλάση $\mathbb{F}$ είναι κορεσμένη κλάση υποσυνόλων, το ζεύγος

$$(\mathrm{T}(\mathbf{K}|_{\mathbf{W}(q^{\mathbf{K}},\varepsilon)}), \mathrm{T}(\mathbf{L}))$$

ανήκει στην $\mathbb{F}$, δηλαδή το $r(\mathbf{K})$ είναι ένα $\mathbb{F}$-κάλυμμα για το $\mathrm{T}(\mathbf{K}|_{\mathbf{Q}})$. Για κάθε $X \in \mathbf{K}$ και για κάθε $\varepsilon \in q^{\mathbf{K}}$ έχουμε

$$W^X(q^{\mathbf{K}}, \varepsilon) \subseteq V_\varepsilon^X$$

και συνεπώς

$$e_{\mathrm{T}}^X(W^X(q^{\mathbf{K}}, \varepsilon)) \subseteq e_{\mathrm{T}}^X(V_\varepsilon^X),$$

όπου e_{T}^X είναι η φυσική εμφύτευση του X στο T. Από την Πρόταση 2.4.26, έχουμε

$$\begin{aligned} \mathrm{T}(\mathbf{K}|_{\mathbf{W}(q^{\mathbf{K}},\varepsilon)}) &= \cup\{e_{\mathrm{T}}^X(W^X(q^{\mathbf{K}}, \varepsilon)) : X \in \mathbf{K}\} \\ &\subseteq \{e_{\mathrm{T}}^X(V_\varepsilon^X) : X \in \mathbf{K}\} \\ &= \{e_{\mathrm{T}}^X(U_{\delta_i}^X) : X \in \mathbf{K}\} = U_{\delta_i}^{\mathrm{T}}(\mathbf{K}), \end{aligned}$$

όπου $i \in \{0, \ldots, k\}$ έτσι ώστε $\delta_i = \theta(\varepsilon)$ και $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{H}_i$, που σημαίνει ότι η $r(\mathbf{K})$ είναι μια $\mathbb{F}$-εκλέπτυνση του $c(\mathbf{K})$ για το $\mathrm{T}(\mathbf{K}|_{\mathbf{Q}})$.

Τώρα, θα αποδείξουμε ότι $\mathrm{ord}(r(\mathbf{K})) \leq n$. Υποθέτουμε ότι $\mathrm{ord}(r(\mathbf{K})) > n$. Τότε, υπάρχουν $n+2$ διακεκριμένα στοιχεία $\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_{n+1}$ του $q^{\mathbf{K}}$ έτσι ώστε

$$\mathrm{T}(\mathbf{K}|_{\mathbf{W}(q^{\mathbf{K}},\varepsilon_0)}) \cap \ldots \cap \mathrm{T}(\mathbf{K}|_{\mathbf{W}(q^{\mathbf{K}},\varepsilon_{n+1})}) \neq \emptyset$$

ή

$$(\mathrm{T}|_{\mathbf{W}(q^{\mathbf{K}},\varepsilon_0)} \cap \mathrm{T}(\mathbf{K})) \cap \ldots \cap (\mathrm{T}|_{\mathbf{W}(q^{\mathbf{K}},\varepsilon_{n+1})} \cap \mathrm{T}(\mathbf{K})) \neq \emptyset.$$

Έστω

$$\mathbf{a} \in \mathrm{T}|_{\mathbf{W}(q^{\mathbf{K}},\varepsilon_0)} \cap \ldots \cap \mathrm{T}|_{\mathbf{W}(q^{\mathbf{K}},\varepsilon_{n+1})} \cap \mathrm{T}(\mathbf{K})$$

και έστω $(x, X) \in \mathbf{a}$. Επειδή οι περιορισμοί $\mathbf{W}(q^{\mathbf{K}}, \varepsilon_i)$, $i \in \{0, \ldots, n+1\}$ είναι $(\mathbf{M}^+, \mathrm{R}_0^+)$-πλήρεις, από το Λήμμα 7.2.3, αυτοί οι περιορισμοί είναι επίσης $(\mathbf{M}, \mathrm{R})$-πλήρεις. Συνεπώς,

$$x \in W^X(q^X, \varepsilon_0) \cap \ldots \cap W^X(q^X, \varepsilon_{n+1}).$$

Εφ' όσον τα $W^X(q, \varepsilon_0), \ldots, W^X(q, \varepsilon_{n+1})$ είναι διακεκριμένα στοιχεία του $W^X(q)$, τα παραπάνω έρχονται σε αντίφαση με το γεγονός ότι $\mathrm{ord}(W^X(q)) \leq n$. Συνεπώς, $\mathrm{ord}(r(\mathbf{K})) \leq n$.

Τέλος, παρατηρούμε ότι το

$$r \equiv \cup\{r(\mathbf{K}) : \mathbf{K} \in C(\sim^t) \text{ και } \mathbf{K} \subseteq \mathbf{E}\}$$

είναι μια $\mathbb{F}$-εκλέπτυνση του c για το $\mathrm{T}(\mathbf{E}|_{\mathbf{Q}})$ με $\mathrm{ord}(r) \leq n$. ■

7.2.5 Πόρισμα. Έστω *df* μια από τις διαστάσεις-συναρτήσεις βάσεως θέσεως: b-p-dim$^{\mathbb{F}}$, b-pos-dim$^{\mathbb{F}}$, b-ps-dim$^{\mathbb{F}}$, b-p^0-dim$^{\mathbb{F}}$ και b-p^1-dim$^{\mathbb{F}}$. Για κάθε $n \in \omega$ στην κλάση $\mathbb{P}(df \leq n)$ υπάρχουν καθολικά στοιχεία.

Απόδειξη. Προκύπτει άμεσα από την Πρόταση 3.4.8. ■

7.3 Καθολικά στοιχεία για διαστάσεις-συναρτήσεις

Έστω $\mathbb{F}$ μια κλάση υποσυνόλων, $\mathbb{D}$ μια κλάση p-βάσεων και *df* μια από τις διαστάσεις-συναρτήσεις βάσεως θέσεως: b-p-dim$^{\mathbb{F}}$, b-p^0-dim$^{\mathbb{F}}$ και b-p^1-dim$^{\mathbb{F}}$. Τότε, όπως στο [37] (βλέπε Ενότητα 3.3, σελίδα 106) μπορούμε να ορίσουμε μια καινούργια διάσταση-συνάρτηση $\mathbb{D}$-*df*, με πεδίο ορισμού την κλάση όλων των χώρων και πεδίο τιμών το σύνολο $\omega \cup \{-1, \infty\}$ ως εξής: για κάθε χώρο X, $\mathbb{D}\text{-}df(X)$ είναι το ελάχιστο στοιχείο n του $\omega \cup \{\infty\}$ για το οποίο υπάρχουν ένα υποσύνολο Q του X και μια p-βάση B για το Q στο X έτσι ώστε $(Q, B, X) \in \mathbb{D}$ και $df(Q, B, X) \leq n$.

7.3.1 Συμβολισμός. Έστω *df* μια από τις παρακάτω διαστάσεις-συναρτήσεις βάσεως θέσεως: b-p-dim$^{\mathbb{F}}$, b-p^0-dim$^{\mathbb{F}}$ και b-p^1-dim$^{\mathbb{F}}$. Για κάθε $n \in \{-1\} \cup \omega$ με $\mathbb{P}(\mathbb{D}\text{-}df \leq n)$ συμβολίζουμε την κλάση όλων των χώρων X με $\mathbb{D}\text{-}df(X) \leq n$.

7.3.2 Θεώρημα. Έστω $\mathbb{D}$ κορεσμένη κλάση p-βάσεων. Εάν η κλάση $\mathbb{F}$ είναι κορεσμένη, πλήρης και ικανοποιεί τις Συνθήκες Πεπερασμένης Ένωσης και Κενού Υποσυνόλου, τότε για κάθε $n \in \{-1\} \cup \omega$ η κλάση $\mathbb{P}(\mathbb{D}\text{-}df \leq n)$ είναι κορεσμένη.

Απόδειξη. Έστω $n \in \{-1\} \cup \omega$. Από το Θεώρημα 7.2.4, η κλάση $\mathbb{P}(df \leq n)$ είναι κορεσμένη. Θα αποδείξουμε ότι η κλάση $\mathbb{P}(\mathbb{D}\text{-}df \leq n)$ είναι κορεσμένη. Έστω $\mathbf{S}$ μια δικτυωμένη οικογένεια από χώρους που ανήκουν στην κλάση $\mathbb{P}(\mathbb{D}\text{-}df \leq n)$. Αποδεικνύουμε ότι υπάρχει ένα συν-σημάδι $\mathbf{M}^+$ της $\mathbf{S}$ έτσι ώστε για κάθε συν-σημάδι $\mathbf{M}$ της $\mathbf{S}$, που είναι συν-επέκταση του $\mathbf{M}^+$, να υπάρχει μια $\mathbf{M}$-επιτρεπτή οικογένεια R^+ από σχέσεις ισοδυναμίας επί της $\mathbf{S}$ τέτοια ώστε για κάθε επιτρεπτή οικογένεια R από σχέσεις ισοδυναμίας επί της $\mathbf{S}$, που είναι τελικώς λεπτότερη της R^+, και κάθε $\mathbf{L} \in \mathrm{C}^{\diamondsuit}(\mathrm{R})$ να έχουμε ότι

$$\mathrm{T}(\mathbf{L}) \in \mathbb{P}(\mathbb{D}\text{-}df \leq n).$$

Για κάθε $X \in \mathbf{S}$ υπάρχει ένα υποσύνολο Q^X του X και μια p-βάση B^X για το Q^X στο X έτσι ώστε $(Q^X, B^X, X) \in \mathbb{D}$ και $df(Q, B, X) \leq n$. Εφ' όσον η κλάση $\mathbb{D}$ είναι κορεσμένη, υπάρχει ένα αρχικό συν-σημάδι $\mathbf{M}^+_{\mathbb{D}}$ της $\mathbf{S}$ που αντιστοιχεί στον περιορισμό

$$\mathbf{Q} \equiv \{Q^X : X \in \mathbf{S}\},$$

στη συν-δικτύωση $\mathbf{N} \equiv \{N^X : X \in \mathbf{S}\}$ της $\mathbf{B} \equiv \{B^X : X \in \mathbf{S}\}$ και στην κλάση $\mathbb{D}$. Εφ' όσον η κλάση $\mathbb{P}(df \leq n)$ είναι κορεσμένη, υπάρχει ένα αρχικό συν-σημάδι $\mathbf{M}^+_{\mathbb{P}(df\leq n)}$ της $\mathbf{S}$ που αντιστοιχεί στον περιορισμό $\mathbf{Q}$, στη συν-δικτύωση $\mathbf{N}$ της $\mathbf{B}$ και στην κλάση $\mathbb{P}(df \leq n)$. Συμβολίζουμε με $\mathbf{M}^+$ ένα συν-σημάδι της $\mathbf{S}$, το οποίο είναι συν-επέκταση των $\mathbf{M}^+_{\mathbb{D}}$ και $\mathbf{M}^+_{\mathbb{P}(df\leq n)}$. Έστω $\mathbf{M}$ μια αυθαίρετη συν-επέκταση του $\mathbf{M}^+$. Συμβολίζουμε με R^+ μια αρχική οκογένεια της $\mathbf{S}$ που αντιστοιχεί στο συν-σημάδι $\mathbf{M}$, στον περιορισμό $\mathbf{Q}$, στη συν-δικτύωση $\mathbf{N}$ της $\mathbf{B}$ και στην κλάση $\mathbb{D}$ όπως επίσης μια αρχική οικογένεια της $\mathbf{S}$ που αντιστοιχεί στο συν-σημάδι $\mathbf{M}$, στον περιορισμό $\mathbf{Q}$, στη συν-δικτύωση $\mathbf{N}$ της $\mathbf{B}$ και στην κλάση $\mathbb{P}(df \leq n)$. Έστω R μια αυθαίρετη επιτρεπτή οικογένεια R από σχέσεις ισοδυναμίας επί της $\mathbf{S}$, η οποία είναι τελικώς λεπτότερη της R^+, και $\mathbf{L} \in \mathrm{C}^{\diamondsuit}(\mathrm{R})$. Τότε, έχουμε $(\mathrm{T}(\mathbf{L}|_{\mathbf{Q}}), \mathrm{B}^{\mathbf{L}}_{\diamondsuit,\theta(\tau)}, \mathrm{T}(\mathbf{L})) \in \mathbb{D}$ και $df(\mathrm{T}(\mathbf{L}|_{\mathbf{Q}}), \mathrm{B}^{\mathbf{L}}_{\diamondsuit,\theta(\tau)}, \mathrm{T}(\mathbf{L})) \leq n$, όπου θ είναι μια ενδεικτική συνάρτηση από το $\mathbf{N}$ στο $\mathbf{M}$, ή ισοδύναμα $\mathbb{D}\text{-}df(\mathrm{T}(\mathbf{L})) \leq n$, δηλαδή $\mathrm{T}(\mathbf{L}) \in \mathbb{P}(\mathbb{D}\text{-}df \leq n)$. Συνεπώς η κλάση $\mathbb{P}(\mathbb{D}\text{-}df \leq n)$ είναι κορεσμένη. ■

7.3.3 Πόρισμα. Για κάθε $n \in \omega$ στην κλάση $\mathbb{P}(\mathbb{D}\text{-}df \leq n)$ υπάρχουν καθολικά στοιχεία.

Απόδειξη. Προκύπτει άμεσα από την Πρόταση 3.1.7. ■

7.3.4 Πόρισμα. Έστω $\mathbb{F}$ η κλάση όλων των ζευγών (Q, X), όπου Q είναι ένα ανοικτό υποσύνολο ενός χώρου X, $\mathbb{D}$ η κλάση όλων των p-βάσεων και $\mathbb{P}$ μια από τις παρακάτω κλάσεις:

(1) η κλάση όλων των (πλήρως) κανονικών χώρων με βάρος $\leq \tau$,

(2) η κλάση όλων των (πλήρως) κανονικών countable-dimensional χώρων με βάρος $\leq \tau$,

(3) η κλάση όλων των (πλήρως) κανονικών strongly countable-dimensional χώρων με βάρος $\leq \tau$,

(4) η κλάση όλων των (πλήρως) κανονικών locally finite-dimensional χώρων με βάρος $\leq \tau$ και

(5) η κλάση όλων των (πλήρως) κανονικών χώρων X με $w(X) \leq \tau$ και $\mathrm{ind}(X) \leq \alpha \in \tau^+$.

Τότε, για κάθε $n \in \omega$ στην κλάση $\mathbb{P}(\mathbb{D}\text{-}df \leq n) \cap \mathbb{P}$ υπάρχουν καθολικά στοιχεία.

Απόδειξη. Προκύπτει άμεσα από την Πρόταση 3.1.6. ■

Βιβλιογραφία

[1] J.M. Aarts, T. Nishiura, *Covering dimension modulo a class of spaces*, Fund. Math. 78 (1973), no. 1, 75–97.

[2] J.M. Aarts, T. Nishiura, *Dimension and Extensions*, North-Holland Mathematical Library, 48. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1993. xiv+331 pp.

[3] P. Alexandroff, *On the dimension of normal spaces*, Proc. Roy. London. Ser. A. 189 (1947), 11–39.

[4] P. Alexandroff, H. Hopf, *Topologie. I.* Berichtigter Reprint. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 45. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1974. xiii+636+2 pp.

[5] P.S. Aleksandrov and B.A. Pasynkov, *Introduction to dimension theory*, Nauka, Moscow, 1973, (in Russian).

[6] F.G. Arenas and M.L. Puertas, *A new approach to transfinite dimension*, Q and A in General Topology, Vol. 17 (1999), 227–232.

[7] L.E.J. Brouwer, *Beweis der Invarianz der Dimensionenzahl*, (German) Math. Ann. 70 (1911), no. 2, 161–165.

[8] M.G. Charalambous, *Two new inductive dimension functions for topological spaces*, Ann. University Sci. Budapest Eötvös Sect. Math. 18 (1975), 15–25.

[9] M.G. Charalambous, *Universal spaces for locally finite-dimensional Tychonoff Spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., 106 (1989), 507–514.

[10] M.G. Charalambous, *On transfinite inductive dimension and deficiency modulo a class $\mathcal{P}$*, Topology and Appl. 81 (1997), 123–135.

[11] M.G. Charalambous and V.A. Chatyrko, *Notes on the inductive dimension Ind_0*, Topology Proceedings, 27 (2003), 395–410.

[12] A. Chigogidze, *Inductive dimensions for completely regular spaces*, Comment. Math. Univ. Carolinae 18 (1977), no. 4, 623–637.

[13] A. Chigogidze, *Relative dimensions*, (Russian) General topology, 67–117, 132, Moskov. Gos. Univ., Moscow, 1985.

[14] P.J. Collins, *Universals in our time*, Topology Proceedings 25 Summer (2000), pp. 487–494.

[15] P.J. Collins, *Problems on Universals*, Topology and its Applications Volume 140, Issue 1, 14 May 2004, Pages 33–36.

[16] W.W. Comfort and S. Negrepontis, *The theory of ultrafilters*, Springer-Verlag 1974.

[17] James Dugundji, *Topology*, Boston: Allyn and Bacon, 1966.

[18] R. Engelking, *General Topology*, Sigma Series in Pure Mathematics, 6. Heldermann Verlag, Berlin, 1989. viii+529 pp.

[19] R. Engelking, *Theory of dimensions, finite and infinite*, Sigma Series in Pure Mathematics, 10. Heldermann Verlag, Lemgo, 1995. viii+401 pp.

[20] R. Engelking, *Transfinite Dimension*, Surveys in General Topology, Academic Press, New York, 1980, pp. 131–161.

[21] V.V. Fedorchuk, *The Fundamentals of Dimension Theory*, in: Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Volume 17 (General Topology I), Springer-Verlag, Berlin, 1990, 91–202.

[22] V.V. Filippov, *The dimension of normal spaces*, (Russian) Dokl. Akad. Nauk SSSR **209** (1973), 805–807.

[23] D.N. Georgiou, S.D. Iliadis, and A.C. Megaritis, *Dimension-like functions and universality*, Topology and its Applications 155 (2008), no. 17-18, 2196–2201.

[24] D.N. Georgiou, S.D. Iliadis, and A.C. Megaritis, *On some new dimension-like functions*, Topology Proceedings 31 (2007), no. 1, 125–136.

[25] D.N. Georgiou, S.D. Iliadis, and A.C. Megaritis, *On positional dimension-like functions*, Topology Proceedings 33 (2009), 285–296.

[26] D.N. Georgiou, S.D. Iliadis, and A.C. Megaritis, *Positional dimension-like functions of the type Ind*, Εστάλη για δημοσίευση.

[27] D.N. Georgiou, S.D. Iliadis, and A.C. Megaritis, *Dimension-like functions of the type dim and universality*, Topology and its Applications 156 (2009), no. 18, 3077–3085.

[28] D.N. Georgiou, S.D. Iliadis, and K.L. Kozlov, *The inductive dimension of a space by a normal base*, (Russian), Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh. 2009, no. 3, 7–14; translation in Moscow Univ. Math. Bull. 64 (2009), no. 3, 95–101.

[29] D.N. Georgiou, S.D. Iliadis, and K.L. Kozlov, *On the large transfinite inductive dimension of a space by a normal base*, Mat. Vesnik 61 (2009), no. 1, 93–102.

[30] K.P. Hart, Jun-iti Nagata and J.E. Vaughan, *Encyclopedia of general topology*, Elsevier Science Publishers, B.V., Amsterdam, 2004. x+526 pp.

[31] D.W. Henderson, *D-dimension. I. A new transfinite dimension*, Pacific J. Math. Volume 26, Number 1 (1968), 91–107.

[32] D.W. Henderson, *D-dimension. II. Separable spaces and compactifications*, Pacific J. Math. Volume 26, Number 1 (1968), 109–113.

[33] Witold Hurewicz, Henry Wallman, *Dimension Theory*, Princeton Mathematical Series, v. 4. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1941. vii+165 pp.

[34] S.D. Iliadis, *A construction of containing spaces*, Topology and its Applications 107 (2000), no 1-2, 97–116.

[35] S.D. Iliadis, *Some properties of the containing spaces and saturated classes of spaces*, Appl. Gen. Topol. 4 (2003), no. 2, 487–507.

[36] S.D. Iliadis, *Saturated classes of bases*, Note Mat. 22 (2003/04), no. 2, 141–156.

[37] S.D. Iliadis, *Universal spaces and mappings*, North-Holland Mathematics Studies, 198. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2005. xvi+559 pp.

[38] M. Katětov, P. Simon, *Origins of dimension theory*, Handbook of the history of general topology, Vol. 1, 113–134, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1997.

[39] A.S. Kechris, *Classical Descriptive Set Theory*, Springer-Verlag, 1995.

[40] R. Koga, *Subspace-dimension with respect to total spaces*, Master Thesis, Osaka Kyoiku University (1998).

[41] K. Kuratowski, *Topology I*, New York, 1966.

[42] K. Kuratowski, *Topology II*, New York, 1968.

[43] K. Kuratowski, *Introduction to set theory and topology*, Pergamon Press, 1972.

[44] K. Kuratowski and A. Mostowski, *Set Theory, With an introduction to descriptive set theory*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Vol. 86. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York-Oxford; PWN—Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1976. xiv+514 pp.

[45] M. Landau, *Strong transfinite ordinal dimension*, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 21, No. 3 (1969) 591–596.

[46] H. Lebesgue, *Sur la non-applicabilité de deux domaines appartenant respectivement à des espaces à n et $n+p$ dimensions*, (French) Math. Ann. 70 (1911), no. 2, 166–168.

[47] J. van Mill, *Infinite-Dimensional Topology, Prerequisites and Introduction*, North-Holland, Amsterdam, 1989.

[48] K. Morita, *On the dimension of normal spaces I*, Jap. J. Math. 20, (1950), 5–36.

[49] K. Morita, *On the dimension of normal spaces II*, J. Math. Soc. Japan 2, (1950), 16–33.

[50] S. Mrówka, *On universal spaces*, Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III 4 (1956), 479–481.

[51] K.R. Nagami, *Dimension Theory*, Volume 37 in the series Pure and Applied Mathematics, Academic Press, New York and London, 1970, 244+xi pp.

[52] Jun-iti Nagata, *Modern dimension theory*, Sigma Series in Pure Mathematics, 2. Heldermann Verlag, Berlin, 1983. ix+284 p.

[53] Jun-iti Nagata, *Topics in dimension theory*. General topology and its relations to modern analysis and algebra, V (Prague, 1981), 497–506, Sigma Ser. Pure Math., 3, Heldermann, Berlin, 1983.

[54] Jun-iti Nagata, *On a universal n-dimensional set for metric spaces*. J. Reine Angew. Math. **204** 1960 132–138.

[55] T. Nishiura, *Inductive invariants and dimension theory*, Fund. Math., 59, 243–262 (1966).

[56] A.K. O'Connor, *A new approach to dimension*, Acta Math. Hung. 55(1–2) (1990), 83–95.

[57] W. Olszewski, *Universal spaces in the theory of transfinite dimension. I*, Fundamenta Mathematicae 144 (1994), 243–258.

[58] W. Olszewski, *Universal spaces in the theory of transfinite dimension. II*, Fundamenta Mathematicae 145 (1994), 121–139.

[59] B. Pasynkov, *Universal spaces for certain classes of spaces.* (Russian) Dokl. Akad. Nauk SSSR **153** 1963 1009–1012.

[60] B. Pasynkov, *On universal bicompacta of given weight and dimension.* (Russian) Dokl. Akad. Nauk SSSR **154** 1964 1042–1043.

[61] B. Pasynkov, *Universal compacta.* (Russian) Uspehi Mat. Nauk **21** 1966 no. 4 (130), 91–100.

[62] B. Pasynkov, *Universal bicompact and metric spaces of given dimension.* (Russian) Fund. Math. **60** 1967 285–308.

[63] B. Pasynkov, *On dimension theory.* Aspects of topology, 227–250, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 93, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1985.

[64] A.R. Pears, *Dimension theory of general spaces*, Cambridge University Press, Cambridge, England-New York-Melbourne, 1975. xii+428 pp.

[65] R. Pol, *There is no universal totally disconnected space*, Fund. Math. 79 (1973), 265–267.

[66] R. Pol, *Countable dimensional universal sets*, Trans. Amer. Math. Soc. 297 (1986), 255–268.

[67] A. Ramer, *Some problems on universal spaces*, Bull. Acad. Pol. Sci. 13 (1965) 291–294.

[68] Yu. M. Smirnov, *On universal spaces for certain classes of infinite-dimensional spaces*, Izv. Akad. Nauk SSSR 23 (1959), 185–196; translated in Amer. Math. Soc. Transl., (2) 21 (1962), 21–33.

[69] V.V. Tkachuk, *On the dimension of subspaces*, Moscow Univ. Math. Bull. **36**(1981), no.2, 25-29.

[70] V.V. Tkachuk, *On the relative small inductive dimension*, Moscow Univ. Math. Bull. **37**(1982), no.5, 25-29.

[71] J. Valuyeva, *On relative dimension concepts*, Q & A in General Topology, Vol. 15 (1997).

Περίληψη

Η κατασκευή του Peano το 1890 μιας συνεχούς απεικόνισης από ένα τμήμα επί ενός τετραγώνου έδωσε αφορμή για το πρόβλημα εάν ένα τμήμα και ένα τετράγωνο είναι ομοιόμορφα, και γενικότερα εάν ο n-κύβος I^n είναι ομοιόμορφος με τον m-κύβο I^m για $n \neq m$. Το πρόβλημα αυτό λύθηκε από τον Brouwer το 1911 και η μελέτη αυτού του προβλήματος οδήγησε στον ορισμό των διαστάσεων ind, Ind και dim και γενικότερα στη γένεση και ανάπτυξη της Θεωρίας Διαστάσεων.

Στη διατριβή αυτή ορίζονται διαστάσεις-συναρτήσεις του τύπου ind, Ind και dim και αποδεικνύονται βασικές ιδιότητες της Θεωρίας Διαστάσεων (θεωρήματα υποχώρου, αθροίσματος και γινομένου) για τις συναρτήσεις αυτές. Με τη βοήθεια των συναρτήσεων αυτών ορίζονται νέες κλάσεις τοπολογικών χώρων και μελετάται για τις κλάσεις αυτές το πρόβλημα της καθολικότητας, δηλαδή της ύπαρξης ή μη καθολικών χώρων για τις κλάσεις αυτές. Ένας τοπολογικός χώρος T καλείται καθολικός για μια κλάση $\mathbb{P}$ τοπολογικών χώρων, όταν ο T ανήκει στην κλάση $\mathbb{P}$ και κάθε τοπολογικός χώρος που ανήκει στην κλάση $\mathbb{P}$ περιέχεται τοπολογικά στο χώρο T. Για την ύπαρξη καθολικών στοιχείων στις κλάσεις αυτές χρησιμοποιείται η μέθοδος κατασκευής Περιεκτικών Χώρων του βιβλίου: S.D. Iliadis, Universal spaces and mappings, North-Holland Mathematics Studies, 198. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2005. xvi+559 pp.

Τα αποτελέσματα της διατριβής έχουν δημοσιευθεί στα παρακάτω περιοδικά:

(1) D.N. Georgiou, S.D. Iliadis, and A.C. Megaritis, Dimension-like functions and universality, Topology and its Applications 155 (2008), no. 17-18, 2196–2201.

(2) D.N. Georgiou, S.D. Iliadis, and A.C. Megaritis, On some new dimension-like functions, Topology Proceedings 31, no 1 (2007) pp. 125–136.

(3) D.N. Georgiou, S.D. Iliadis, and A.C. Megaritis, On positional dimension-like functions, Topology Proceedings 33 (2009) pp. 285–296.

(4) D.N. Georgiou, S.D. Iliadis, and A.C. Megaritis, Positional dimension-like functions of the type Ind, Εστάλη για δημοσίευση.

(5) D.N. Georgiou, S.D. Iliadis, and A.C. Megaritis, Dimension-like functions of the type dim and universality, Topology and its Applications 156 (2009), no. 18, 3077–3085.

Abstract

Peano' s construction in 1890 of a continuous map of a segment onto a square gave rise to the problem of whether a segment and a square are homeomorphic and generally whether the cubes I^n and I^m are homeomorhic for $n \neq m$. This problem was solved by Brouwer in 1911 and the investigation of this problem leads to the definitions of ind, Ind, and dim and generally to the beginning of Dimension Theory.

In this thesis we define new dimension-like functions of the type ind, Ind and dim and we give basic properties of Dimension Theory (subspace theorems, sum theorems, product theorems) for these dimension-like functions. Using the introduced dimension-like functions, new classes of spaces are defined and the investigation of the universality problem for these classes is given, that is whether there exists universal space in these classes. A space T is said to be universal in a class $\mathbb{P}$ of spaces if $T \in \mathbb{P}$ and for every $X \in \mathbb{P}$ there exists an embedding of X into T. For the existence of universal elements in these classes is used the construction of Containing Spaces given in book: S.D. Iliadis, Universal spaces and mappings, North-Holland Mathematics Studies, 198. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2005. xvi+559 pp.

The results of this thesis are published in the following journals:

(1) D.N. Georgiou, S.D. Iliadis, and A.C. Megaritis, Dimension-like functions and universality, Topology and its Applications 155 (2008), no. 17-18, 2196–2201.

(2) D.N. Georgiou, S.D. Iliadis, and A.C. Megaritis, On some new dimension-like functions, Topology Proceedings 31, no 1 (2007) pp. 125–136.

(3) D.N. Georgiou, S.D. Iliadis, and A.C. Megaritis, On positional dimension-like functions, Topology Proceedings 33 (2009) pp. 285–296.

(4) D.N. Georgiou, S.D. Iliadis, and A.C. Megaritis, Positional dimension-like functions of the type Ind, submitted for publication.

(5) D.N. Georgiou, S.D. Iliadis, and A.C. Megaritis, Dimension-like functions of the type dim and universality, Topology and its Applications 156 (2009), no. 18, 3077–3085.