ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Δενδρίτες

Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία

Στεφανίδης Νικόλαος

Επιβλέπουσα: Σοφία Ζαφειρίδου–Αναπληρώτρια Καθηγήτρια

ΠΑΤΡΑ 2011

Εισαγωγή

Η εργασία αυτή εκπονήθηκε στα πλαίσια του προγράμματος μεταπτυχιακών σπουδών "Μαθηματικά και σύγχρονες εφαρμογές" του τομέα των θεωρητικών Μαθηματικών του τμήματος Μαθηματικών της Σχολής Θετικών Επιστημών του Πανεπιστημίου Πατρών.

Ο σκοπός της εργασίας αυτής ήταν η συγκέντρωση των βασικών ιδιοτήτων των δενδριτών, οι αποδείξεις των οποίων να γίνουν μόνο με την χρήση των ιδιοτήτων των δενδριτών, με όσο είναι δυνατόν λιγότερη αναφορά σε γενικότερα θεωρήματα, οι αποδείξεις των οποίων είναι εκτενείς και πολύπλοκες.

Στο 1ο κεφάλαιο γίνεται μια ιστορική αναδρομή στη Θεωρία Συνεχών και στην εξέλιξη της έννοιας της καμπύλης

Στο 2ο κεφάλαιο παραθέτονται μερικοί βασικοί ορισμοί και θεωρήματα που χρησιμοποιούνται στα επόμενα κεφάλαια. Γίνεται εκτενής αναφορά σε έννοιες όπως, διαχωρισμός χώρου, τοπικά συνεκτικά συνεχή, ταξινόμηση σημείων ενός χώρου, μονοδιάστατοι χώροι, κανονικοί χώροι και καμπύλες.

Στο 3ο κεφάλαιο αναφέρονται αρκετές ιδιότητες των δενδριτών, όπως ότι κάθε δενδρίτης είναι κανονικός χώρος και κληρονομικά τοπικά συνεκτικό συνεχές. Επίσης, ότι το σύνολο όλων των σημείων διακλάδωσης ενός δενδρίτη είναι αριθμήσιμο.

Το 4ο κεφάλαιο αναφέρεται στην προσέγγιση δενδριτών με δένδρα. Αποδεικνύεται επίσης, ότι κάθε δενδρίτης έχει την ιδιότητα του σταθερού σημείου.

Τέλος, το 5ο κεφάλαιο περιέχει την κατασκευή του καθολικού δενδρίτη D_ω στο επίπεδο και την απόδειξη ότι ο D_ω περιέχει ομοιομορφικά όλους τους δενδρίτες.

Θέλω να εκφράσω τις θερμότατες ευχαριστίες μου στην επιβλέπουσα Καθηγήτριά μου κ. Σοφία Ζαφειρίδου για την απέραντη συμπαράστασή της στην ολοκλήρωση αυτής της εργασίας. Η επιστημονική της κατάρτιση, η προθυμία της και το ήθος που την διακρίνει με βοήθησαν αποφασιστικά στην κατανόηση και στην παρουσίαση του πραγματικά ενδιαφέροντος θέματος με το οποίο ασχολήθηκα.

Τον κ. Ιωάννη Σταμπάκη ευχαριστώ για τις υποδείξεις και τη συμπαράστασή του.

Την κ. Αγγελική Κοντολάτου την ευχαριστώ για τις υποδείξεις και τις διορθώσεις που έκανε.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω και τους καθηγητές του μεταπτυχιακού προγράμματος για όλα αυτά που μου μετέδωσαν στην διάρκεια της φοίτησής μου σ᾽ αυτό το πρόγραμμα. Τέλος θέλω να ευχαριστήσω την οικογένειά μου και ιδιαίτερα τη σύζυγό μου για την συμπαράσταση που μου έδειξαν όλο αυτό το διάστημα.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Ιστορική αναδρομή

Η μελέτη των δενδριτών εμπίπτει στην περιοχή της Θεωρίας Συνεχών, έναν από τους παλαιότερους κλάδους της Γενικής Τοπολογίας.

Στη σύγχρονη βιβλιογραφία σχετική με την Θεωρία Συνεχών ορίζεται ως συνεχές κάθε συμπαγής και συνεκτικός μετρικός χώρος.

Κατά τον Wilder [29]: οι ρίζες της έννοιας της συνεκτικότητας βρίσκονται στην έννοια της συνέχειας, ειδικότερα στην έννοια του γραμμικού συνεχούς, η οποία πάει πίσω στους αρχαίους Ελληνες, που προσπαθούσαν να ξεκαθαρίσουν την έννοια υπό το φως του παραδόξου του Ζήνωνα.

Το 1883 ο Cantor [2] ορίζει ως συνεχές κάθε τέλειο υποσύνολο F του Ευκλειδείου χώρου E^n (κατά Cantor ένα σύνολο είναι τέλειο, όταν συμπίπτει με την παράγωγό του) τέτοιο ώστε για οποιαδήποτε δύο σημεία $p, q \in F$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πεπερασμένο πλήθος σημείων $p = p_0, p_1, ..., p_n = q$ του F με την ιδιότητα $|p_i - p_{i+1}| < \varepsilon$ για $0 \leq i \leq n$.

Το επόμενο αξιοσημείωτο βήμα στην εξέλιξη της έννοιας της συνεκτικότητας έγινε από τον Jordan [12], ο οποίος έδωσε έναν ορισμό αυτού που ο ίδιος αποκαλεί "ένα κομμάτι" και στην σύγχρονη ορολογία καλείται "συνιστώσα" (component).

Ο Schoenflies το 1904 δημοσίευσε τις πρώτες του θεμελιώδεις έρευνες σε τοπολογικές πτυχές της θεωρίας συνόλων, προτείνοντας τον εξής ορισμό της συνεκτικότητας [26]: ένα τέλειο σύνολο καλείται συνεκτικό αν δεν χωρίζεται σε (τουλάχιστον δύο μη κενά) τέλεια υποσύνολα.

Ο Jordan και κατόπιν ο Schoenflies, πρότειναν ο ορισμός της συνεκτικότητας να γενικευτεί σε μη κλειστά σύνολα. Στο βήμα αυτό προχώρησαν ανεξάρτητα ο N.M Lennes και ο F. Riesz. Σύμφωνα με τον Riesz [24]: ένα σύνολο καλείται "απολύτως συνεκτικό" αν για κάθε χωρισμό του σε δύο (μη κενά) υποσύνολα, υπάρχει τουλάχιστον ένα στοιχείο που ανήκει σε ένα υποσύνολο και είναι οριακό σημείο του άλλου. Κατά N.M Lennes [16]: ένα σύνολο καλείται "συνεκτικό" αν ένα από τα δύο οποιαδήποτε συμπληρωματικά υποσύνολά του περιέχει οριακά σημεία του άλλου.

Ο Hausdorff [9] εισάγει τον σημερινό ορισμό της συνεκτικότητας στο βιβλίο του το 1914, αγνοώντας τις εργασίας των Lenes και Riesz, και προχωρεί στην μελέτη μερικών ιδιοτήτων των συνεκτικών συνόλων.

Ωστόσο η πρώτη εργασία αφιερωμένη στη μελέτη των συνεκτικών συνόλων γράφτηκε το 1921 από τους B. Knaster και K. Kuratowski [13].

Η μελέτη της συμπαγότητας έχει δρομολογηθεί από τον Borel, ο οποίος το 1894 απέδειξε ότι κάθε αριθμήσιμο ανοικτό κάλυμμα του κλειστού διαστήματος περιέχει πεπερασμένο υποκάλυμμα [11].

Ακολούθως ο Lindelöff έδειξε ότι η υπόθεση της αριθμησιμότητας του καλύμματος δεν είναι απαραίτητη [11]. Ο όρος "συμπαγής" χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά από τον Frechet για να περιγράψει τους χώρους στους οποίους κάθε ακολουθία έχει συγκλίνουσα υπακολουθία [11]. Ο ορισμός της συμπαγότητας ενός τοπολογικού χώρου X στην σύγχρονη μορφή (κάθε ανοικτό κάλυμμα του X έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα) εισήχθη από τους P. Alexandroff και P. Urysohn το 1923 [11].

Υπάρχει άποψη ότι η θεωρία συνεχών ίσως να έχει γεννηθεί με σκοπό να κατανοηθούν οι καμπύλες. Η καμπύλη είναι ένα από τα θεμελιώδη αντικείμενα γεωμετρικής μελέτης. Η έννοια της καμπύλης βρίσκει πολλές εφαρμογές στη μαθηματική περιγραφή φυσικών φαινομένων και τεχνικών διαδικασιών.

Από τα αρχαία χρόνια μέχρι τις μέρες μας οι μαθηματικοί προσπαθούσαν να ορίσουν την καμπύλη αυστηρά μαθηματικά. Το αποφασιστικό βήμα σε αυτή την κατεύθυνση το έκανε ο Descartes. Η μέθοδος των συντεταγμένων που εισήγαγε επέτρεψε να οριστεί η έννοια της καμπύλης σε πολύ γενική για την εποχή του μορφή. Ο ορισμός της καμπύλης κατά τον Descartes περιλαμβάνει όλες τις αλγεβρικές επίπεδες καμπύλες, δηλαδή τα υποσύνολα του επιπέδου που σε κάποιο σύστημα συντεταγμένων έχουν εξίσωση της μορφής $F(x, y) = 0$, όπου $F(x, y)$ είναι πολυώνυμο δύο μεταβλητών x και y.

Η ανακάλυψη του Descartes είχε αποφασιστική σημασία για όλα τα Μαθηματικά. Από τη μία μεριά καθιερώνει την μελέτη γεωμετρικών αντικειμένων με τις μεθόδους της άλγεβρας και της ανάλυσης, και από την άλλη την χρήση της ορολογίας και των μεθόδων της γεωμετρίας στην άλγεβρα και την ανάλυση. Ωστόσο εκείνη την εποχή ήδη ήταν γνωστές "καμπύλες", οι οποίες είτε δεν ήταν αλγεβρικές, είτε ενώ ήταν αλγεβρικές η εξίσωσή τους δεν προσέφερε τίποτα για τη μελέτη τους.

Το 1887 ο Γάλλος μαθηματικός C. Jordan έδωσε τον εξής ορισμό της καμπύλης:

"*Καμπύλη είναι συλλογή σημείων του επιπέδου των οποίων οι συντεταγμένες είναι συνεχείς συναρτήσεις:* $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ *μιας παραμέτρου* t *που μεταβάλλεται στο διάστημα* [0,1]."

Το 1890 ο Ιταλός Μαθηματικός Peano απέδειξε ότι το τετράγωνο μαζί με το εσωτερικό του είναι συνεχής εικόνα του $[0, 1]$. Δηλαδή υπάρχουν συνεχείς απεικονίσεις $x = \phi(t)$ και $y = \psi(t)$, $t \in [0, 1]$, για τις οποίες το σύνολο των σημείων

$$(x, y) = (\phi(t), \psi(t)), \quad t \in [0, 1]$$

καλύπτει ένα ολόκληρο τετράγωνο. Από τότε για τους χώρους που είναι συνεχείς εικόνες του $[0, 1]$ επικράτησε ο όρος "συνεχείς καμπύλες".

Γύρω στο 1913 ο Hahn και Mazurkiewicz απέδειξαν, ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλον, ότι ένας χώρος X είναι συνεχής εικόνα του $[0,1]$ αν και μόνον αν ο X είναι τοπικά συνεκτικό συνεχές. Οπότε όχι μόνο το τετράγωνο μαζί με το εσωτερικό του, αλλά και ο n-διάστατος κύβος, η n-διάστατη σφαίρα, αλλά και οποιοδήποτε άλλο τοπικά συνεκτικό συνεχές S, μπορούν να παρασταθούν ως "τροχιές" ενός σημείου με την έννοια ότι μπορούν να οριστούν συνεχείς απεικονίσεις

$$x_i = x_i(t),\ 0 \leq t \leq 1,\ i = 1, 2, ..., n,$$

έτσι ώστε όταν το t μεταβάλλεται από 0 έως 1, το σημείο $(x_1, ..., x_n)$ κινείται συνεχόμενα περνώντας από όλα τα σημεία του συνόλου S.

Ο ορισμός της καμπύλης κατά Jordan εκτός του ότι περιλάμβανε χώρους που διαισθητικά δεν νοούνται ως καμπύλες, δεν περιλάμβανε μερικές από τις γνωστές μη τοπικά συνεκτικές καμπύλες.

Αποφασιστικό βήμα στο ορισμό της καμπύλης έγινε από τον G. Cantor, κατά τον οποίον:

"*Καμπύλη είναι επίπεδο συνεχές πουθενά πυκνό στο επίπεδο.*"

Το μοναδικό μειονέκτημα του ορισμού του Cantor ήταν ότι "άφηνε απέξω" τις μη επίπεδες καμπύλες. Ο ορισμός της καμπύλης κατά Cantor δεν μπορεί να γενικευτεί στο χώρο, καθότι στον τρισδιάστατο χώρο πουθενά πυκνά είναι και τα σύνολα που διαισθητικά είναι δισδιάστατα, π.χ. η επιφάνεια ενός κύβου.

Η ανάπτυξη της Θεωρίας Διαστάσεων στις αρχές του 20-ου αιώνα συνέβαλε στον προσδιορισμό της έννοιας της καμπύλης.

Στα πλαίσια της Menger-Urysohn θεωρίας μικρής επαγωγικής διάστασης, ένας χώρος καλείται μονοδιάστατος αν κάθε σημείο του έχει οσοδήποτε μικρή ανοικτή περιοχή με σύνορο διάστασης < 1. Παράλληλα εισάγεται ο ορισμός της καμπύλης που επικρατεί έως σήμερα:

"*Καμπύλη ονομάζεται κάθε μονοδιάστατο συνεχές.*"

Αποδεικνύεται ότι κάθε κατά Cantor καμπύλη είναι καμπύλη κατά Menger-Urysohn.

Τα σημεία μιας καμπύλης ταξινομούνται ανάλογα με την τάξη διακλάδωσης.

Η τάξη διακλάδωσης ενός χώρου X στο σημείο $x \in X$ είναι ο μικρότερος πληθάριθμος $\mathfrak{n}$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ανοικτή περιοχή U_x του x στο X διαμέτρου μικρότερης του ε που περιέχει το x και της οποίας το σύνορο $\mathrm{Bd}(U_x)$ περιέχει το πολύ $\mathfrak{n}$ σημεία. Η τάξη διακλάδωσης του X στο x συμβολίζεται με $\mathrm{ord}(x, X)$.

Ο Menger στην [19] διατυπώνει το παρακάτω Θεώρημα, γνωστό με την ονομασία n–"Beinsatz":

Αν σε ένα σημείο x ενός τοπικά συνεκτικού συνεχούς K είναι $\mathrm{ord}(x, K) \geq \mathfrak{n}$, τότε υπάρχουν $\mathfrak{n}$ τόξα $\widehat{xx}_1, ..., \widehat{xx}_{\mathfrak{n}}$ του K με ένα άκρο το σημείο x και τα οποία εκτός από το x δεν έχουν άλλο κοινό σημείο.

Το Θεώρημα αυτό σε μια ισοδύναμη εκδοχή αποδείχθηκε πρώτα για τα επίπεδα συνεχή από τον Rutt [25], για οποιαδήποτε συνεχή από τους Menger [19] και Nöbeling [23], ενώ γενικεύτηκε από τους Zippin [31] (για τα τοπικά συμπαγή, τοπικά συνεκτικό και συνεκτικό, διαχωρίσιμο μετρικό χώρο) και Whyburn [27] (για τοπικά συνεκτικό, διαχωρίσιμο πλήρη μετρικό χώρο).

Ένα σημείο x ενός χώρου X καλείται σημείο διακλάδωσης του X, αν $\mathrm{ord}(x, X) \geq 3$. Ο Wazewski[28] και ο Menger [18] απέδειξαν ότι το σύνολο των σημείων διακλάδωσης ενός οποιουδήποτε τοπικά συνεκτικού συνεχούς, το οποίο δεν περιέχει απλές κλειστές καμπύλες, είναι αριθμήσιμο.

Η μελέτη των καμπυλών και των ιδιοτήτων τους οδήγησε στην ταξινόμησή τους βάσει κάποιων τοπολογικών ιδιοτήτων τους. Έτσι, μια καμπύλη K λέγεται

– *καμπύλη του Peano*, αν η K είναι τοπικά συνεκτική,

– *κανονική καμπύλη*, αν κάθε σημείο της K έχει οσοδήποτε μικρή ανοικτή περιοχή με πεπερασμένο σύνορο,

– *ακυκλική καμπύλη*, αν η K δεν περιέχει απλές κλειστές καμπύλες.

Αποδεικνύεται ότι:

– Κάθε καμπύλη του Peano είναι κατά τόξο συνεκτική, δηλαδή κάθε ζεύγος σημείων της μπορεί να συνδεθεί με ένα απλό τόξο.

– Κάθε κανονική καμπύλη είναι καμπύλη του Peano και συνεπώς είναι κατά τόξο συνεκτική.

– Αν μια καμπύλη του Peano είναι ακυκλική, τότε το σύνολο των σημείων δικλάδωσής της είναι αριθμήσιμο.

Δενδρίτες είναι τα τοπικά συνεκτικά συνεχή, τα οποία δεν περιέχουν καμία απλή κλειστή καμπύλη. Το πιο απλό παράδειγμα δενδριτών είναι τα δέντρα. Αποδεικνύεται ότι κάθε δενδρίτης είναι κανονική καμπύλη. Συνεπώς δενδρίτες είναι οι ακυκλικές κανονικές καμπύλες.

Το 1923 ο Ważewski [28] κατασκεύασε στο επίπεδο το "καθολικό δενδρίτη", δηλαδή ένα επίπεδο δενδρίτη που περιέχει ομοιομορφικά κάθε δενδρίτη. Έτσι για κάθε δενδρίτη D, που δεν βρίσκεται υποχρεωτικά στο επίπεδο, μπορούμε να βρούμε ένα δενδρίτη ομοιομορφικό με τον D, που να είναι υποσύνολο επιπέδου.

Κεφάλαιο 2

Βασικές έννοιες και θεωρήματα της Θεωρίας Συνεχών

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται βασικές έννοιες και θεωρήματα, τα οποία είναι απαραίτητα για την μελέτη των δενδριτών. Έννοιες όπως αυτή της καμπύλης, της τάξης διακλάδωσης του χώρου σε σημείο, της τοπικής συνεκτικότητας είναι απαραίτητες για την μελέτη των δενδριτών.

Έστω X ένας τοπολογικός χώρος.

Για κάθε υποσύνολο A του X με $\mathrm{Cl}_X(A)$, $\mathrm{Int}_X(A)$ και $\mathrm{Bd}_X(A)$ συμβολίζονται αντίστοιχα το περίβλημα, το εσωτερικό και το σύνορο του A στο X. Οταν ο χώρος X σαφώς εννοείται χρησιμοποιούνται αντίστοιχα οι συμβολισμοί $\mathrm{Cl}(A)$, $\mathrm{Int}(A)$ και $\mathrm{Bd}(A)$). Συμβολίζουμε με $|A|$ την ισχύ του συνόλου A.

Ο X καλείται

- συμπαγής, αν κάθε ανοικτό κάλυμμα του X περιέχει πεπερασμένο υποκάλυμμα,
- συνεκτικός, αν τα μοναδικά υποσύνολα του X που είναι συγχρόνως ανοικτά και κλειστά στο X είναι το X και το $\emptyset$.
- τοπικά συμπαγής αν για κάθε $x \in X$ υπάρχει μια ανοικτή περιοχή U_x του x στο X της οποίας το περίβλημα $Cl_X(U_x)$ είναι συμπαγές.

Για κάθε σημείο $x \in X$, η ένωση S_x όλων των συνεκτικών υποσυνόλων του X που περιέχουν το σημείο x καλείται *συνεκτική συνιστώσα* του x στο X.

Εύκολα αποδεικνύεται ότι η οικογένεια $\{S_x : x \in X\}$ των συνεκτικών συνιστωσών των σημείων του X είναι διαμέριση του X σε κλειστά υποσύνολα. Η διαμέριση αυτή συμπίπτει με το σύνολο–πηλίκο $X/_\sim$ ως προς την παρακάτω σχέση ισοδυναμίας στο X:

$$x \sim y \iff \text{υπάρχει συνεκτικό υποσύνολο } S_{x,y} \text{ του } X \text{ τέτοιο ώστε } x, y \in S_{x,y}.$$

2.1 Τα συνεχή.

Ορισμός 2.1.1. Ένας μετρικός χώρος που είναι συμπαγής και συνεκτικός καλείται *συνεχές*.

Ένα συνεχές που περιέχει τουλάχιστον δύο σημεία καλείται μη τετριμμένο.

Θεώρημα 2.1.1. *Έστω $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ μια ακολουθία μη κενών μετρικών συνεχών τέτοια ώστε*

$$X_1 \supseteq X_2 \supseteq ... \supseteq ...X_n \supseteq X_{n+1} \supseteq ...,$$

τότε ο υπόχωρος $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ του X_1 είναι συνεχές.

Απόδειξη. Επειδή κάθε X_n είναι μη κενός συμπαγής χώρος, $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ είναι (μη κενός) συμπαγής χώρος. Αρκεί να δείξουμε ότι ο υπόχωρος $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ είναι συνεκτικός.

Ας υποθέσουμε ότι αντίθετα ο $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ είναι μη συνεκτικός. Τότε $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n = F_1 \cup F_2$, όπου F_1 και F_2 είναι μη κενά, κλειστά υποσύνολα του $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ και $F_1 \cap F_2 = \emptyset$. Επειδή $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ είναι κλειστό στο X_1, τα F_1 και F_2 είναι κλειστά στο X_1. Υπάρχουν ανοικτά υποσύνολα U_1 και U_2 του X_1, τέτοια ώστε $F_1 \subseteq U_1$, $F_2 \subseteq U_2$ και $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Το ανοικτό σύνολο $U_1 \cup U_2$ περιέχει την τομή $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$. Επομένως υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να είναι $X_n \subseteq U_1 \cup U_2$. Άρα

$$X_{n_0} = (X_{n_0} \cap U_1) \cup (X_{n_0} \cap U_2).$$

Επειδή ο $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \subseteq X_{n_0}$ και το σύνολο $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ τέμνει το καθένα από τα U_1 και U_2, τα σύνολα $X_{n_0} \cap U_1$, $X_{n_0} \cap U_2$ είναι μη κενά. Άρα, ο X_{n_0} είναι μη συνεκτικός που είναι άτοπο.

□

2.2 Διαχωρισμός του χώρου

Έστω X ένας τοπολογικός χώρος.

Δύο υποσύνολα U και V του X λέγονται *διαχωρισμένα* αν

$$Cl_X(U) \cap V = \emptyset \text{ και } Cl_X(V) \cap U = \emptyset.$$

Αν $X = U \cup V$ και τα σύνολα U και V είναι διαχωρισμένα, τότε ζεύγος (U, V) καλείται διαχωρισμός του X.

Ένα υποσύνολο C του X λέγεται ότι διαχωρίζει το X αν υπάρχουν μη κενά υποσύνολα U και V του X τέτοια ώστε

$$X \setminus C = U \cup V, \text{ όπου } Cl_X(U) \cap V = Cl_X(V) \cap U = \emptyset. \tag{2.1}$$

Αν τα υποσύνολα C, U, V ενός τοπολογικού χώρου X ικανοποιούν τις σχέσεις (2.1), τότε γράφουμε

$$X \setminus C = U|V.$$

Ένα υποσύνολο C του X λέγεται ότι διαχωρίζει το X μεταξύ των υποσυνόλων A και B αν υπάρχουν μη κενά υποσύνολα U και V τέτοια ώστε

$$X \setminus C = U|V,\ A \subseteq U \text{ και } B \subseteq V \tag{2.2}$$

Πρόταση 2.2.1. *Έστω X ένας μετρικός χώρος και $A, B, C \subseteq X$.*

Αν C διαχωρίζει το X μεταξύ των συνόλων A και B, τότε υπάρχουν κλειστό σύνολο $C^* \subseteq C$ και ανοικτά σύνολα U^*, V^* τέτοια ώστε

$$X \setminus C^* = U^*|V^*,\ A \subseteq U^*,\ B \subseteq V^* \tag{2.3}$$

Απόδειξη. Από την υπόθεση ισχύουν οι σχέσεις (2.2). Ο υπόχωρος

$$Y = X \setminus (\mathrm{Cl}(U) \cup \mathrm{Cl}(V))$$

είναι φυσικός και τα σύνολα $\mathrm{Cl}_Y(U)$ και $\mathrm{Cl}_Y(U)$ είναι κλειστά και ξένα στο Y επομένως υπάρχουν ανοικτα στον ανοικτό υπόχωρο Y, άρα και στο X, σύνολα U^* και V^* τέτοια ώστε

$$\mathrm{Cl}_Y(U) \subseteq U^*,\ \mathrm{Cl}_Y(V) \subseteq V^* \text{ και } U^* \cap V^* = \emptyset.$$

Το κλειστό υποσύνολο $C^* = X \setminus (U^* \cup V^*)$ του X ικανοποιεί τις σχέσεις (2.3). □

Ορισμός 2.2.1. Ένα σημείο p ενός συνεκτικού τοπολογικού χώρου X καλείται *σημείο διάσπασης* (*cut point*) του X αν το σύνολο $X \setminus \{p\}$ είναι μη συνεκτικό.

Προφανώς κάθε σημείο διάσπασης ενός μετρικού χώρου X διαχωρίζει το X.

Θεώρημα 2.2.1. *Αν X είναι ένας συνεκτικός, διαχωρίσιμος μετρικός χώρος και $\mathfrak{C}$ είναι μία μη αριθμήσιμη συλλογή των ανά δύο ξένων κλειστών διασπάσεων του X, τότε υπάρχουν $p, q \in X$ τέτοια ώστε μη αριθμήσιμο πλήθος στοιχείων του $\mathfrak{C}$ διαχωρίζουν τα σημεία p και q στο X.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε $D = \{x_i : i = 1, 2, \cdots\}$ είναι ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του X. Για κάθε $i \neq j$, ας πάρουμε

$$\mathfrak{C}(i,j) = \{c \in \mathfrak{C} : c \text{ διαχωρίζει } x_i \text{ και } x_j \text{ στο } X\}.$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι κάθε $c \in \mathfrak{C}$ διαχωρίζει κάποια δύο σημεία του D στο X. Για αυτό,

$$\mathfrak{C} = \cup \{\mathfrak{C}(i,j) : i \neq j\}.$$

Επομένως, αφού $\mathfrak{C}$ είναι μη αριθμήσιμο, υπάρχουν k και l τέτοια ώστε $\mathfrak{C}(k,l)$ είναι μη αριθμήσιμο. Θέτουμε $p = x_k$ και $q = x_l$. □

Θεώρημα 2.2.2. *Για κάθε συνεκτικό μετρικό υπόχωρο υπάρχει μη αριθμήσιμη οικογένεια $\mathcal{G}$ κλειστών και ξένων υποσυνόλων του X που διαχωρίζουν το X.*

Απόδειξη. Έστω a και b δύο διαφορετικά σημεία του X. Ο χώρος X ως μετρικός, είναι φυσικός και τα σύνολα $\{a\}$ και $\{b\}$ είναι κλειστά και ξένα στο X. Επομένως υπάρχει συνεχής απεικόνιση $f : X \to [0,1]$, τέτοια ώστε $f(a) = 0$ και $f(b) = 1$.

Από την συνεκτικότητα του X και συνέχεια της f προκύπτει ότι $f(X)$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του $[0,1]$. Άρα, επειδή $0, 1 \in f(X)$, $f(X) = [0,1]$.

Έστω M ένα μη αριθμήσιμο υποσύνολο του $[0,1]$. Για κάθε $m \in M$ το σύνολο $f^{-1}(m)$ είναι κλειστό υποσύνολο του X που διαχωρίζει το X:

$$X \setminus f^{-1}(m) = f^{-1}[0,m) \cup f^{-1}(m,1].$$

Αν m_1 και m_2 είναι διαφορετικά στοιχεία του M, τότε $f^{-1}(m_1) \cap f^{-1}(m_2) = \emptyset$.

Από τα παραπάνω η οικογένεια

$$\mathcal{G} = \{f^{-1}(m) : m \in M\}$$

είναι η ζητούμενη. □

Θεώρημα 2.2.3. *Για κάθε συνεκτικό χώρο X με αριθμήσιμη βάση και για κάθε μη αριθμήσιμη οικογένεια $\mathcal{G} = \{G_m\}_{m \in M}$ κλειστών και ξένων υποσυνόλων του X που διαχωρίζουν το X, υπάρχει $G \in \mathcal{G}$ τέτοιο ώστε*

$$X \setminus G = U \cup V,\ U \cap V = \emptyset,\ U \cap (\cup\mathcal{G}) \neq \emptyset,\ V \cap (\cup\mathcal{G}) \neq \emptyset,$$

όπου $\cup\mathcal{G}$ συμβολίζει την ένωση των στοιχείων της $\mathcal{G}$ και τα σύνολα U και V είναι ανοικτά.

Απόδειξη. Αντίθετα, ας υποθέσουμε ότι δεν υπάρχει $G \in \mathcal{G}$ με τις παραπάνω ιδιότητες.

Τότε για κάθε $G_m \in \mathcal{G}$ ισχύει

$$X \setminus G_m = U_m \cup V_m \text{ και } \cup\mathcal{G} \subseteq U_m.$$

Θεωρούμε $m, n \in M$, $m \neq n$. Έχουμε

$$X \setminus G_m = U_m \cup V_m \text{ και } G_n \subseteq U_m. \tag{2.4}$$

$$X \setminus G_n = U_n \cup V_n \text{ και } G_m \subseteq U_m. \tag{2.5}$$

Επειδή $G_n \subseteq U_m$ και $G_m \subseteq U_m$, προκύπτει ότι

$$X \setminus (U_m \cup U_n) = (X \setminus U_m) \cap (X \setminus U_n) = (G_m \cup V_m) \cap (G_n \cup V_n) = V_m \cap V_n.$$

Αν $V_m \cap V_n \neq \emptyset$, τότε X είναι ένωση ανοικτών μη κενών και ξένων συνόλων $U_m \cup U_n$ και $V_m \cap V_n$, που είναι άτοπο. Άρα, $V_m \cap V_n = \emptyset$.

Από τα παραπάνω ο χώρος X με αριθμήσιμη βάση περιέχει μια μη αριθμήσιμη οικογένεια $\{V_m\}_{m \in M}$ ανοικτών υποσυνόλων ξένων ανά δύο, που είναι άτοπο.

□

2.3 Τοπική συνεκτικότητα

Ορισμός 2.3.1. Ένας χώρος X καλείται *τοπικά συνεκτικός στο σημείο* $x \in X$ αν για κάθε ανοικτή περιοχή U του x στο X υπάρχει ανοικτή και συνεκτική περιοχή V του x τέτοια ώστε $x \in V \subseteq U$.

Ένας χώρος X ο οποίος είναι τοπικά συνεκτικός σε κάθε σημείο καλείται *τοπικά συνεκτικός χώρος* .

Θεώρημα 2.3.1. *Για έναν χώρο X τα εξής είναι ισοδύναμα*

(i) *ο X είναι τοπικά συνεκτικός,*

(ii) *για κάθε $x \in X$ αν για κάθε ανοικτή περιοχή G του x υπάρχει συνεκτικό υποσύνολο V του X τέτοιο ώστε $x \in Int(V) \subseteq V \subseteq G$,*

(iii) *οι συνεκτικές συνιστώσες κάθε ανοικτού υποσυνόλου G του X είναι ανοικτά στο X σύνολα,*

(iv) *κάθε ανοικτός υπόχωρος U του X είναι τοπικά συνεκτικός.*

Απόδειξη. $(i) \Rightarrow (ii)$ Αν ο X έχει την ιδιότητα (i), τότε για κάθε $x \in X$ και για κάθε ανοικτή περιοχή G του x υπάρχει ανοικτή και συνεκτική περιοχή V του x τέτοια ώστε $x \in V \subseteq G$. Επειδή το σύνολο V είναι ανοικτό, $V = Int(V)$. Άρα, $x \in Int(V) \subseteq V \subseteq G$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Έστω ότι ο X έχει την ιδιότητα (ii) και G είναι ανοικτό υποσύνολο του X. Αν S είναι μια συνεκτική συνεστώσα του G, τότε για κάθε $s \in S$ η G είναι ανοικτή περιοχή του s. Επομένως, για κάθε $s \in S$ υπάρχει συνεκτικό υποσύνολο V_s του X τέτοιο ώστε $s \in Int(V_s) \in V_s \subseteq G$. Επειδή για κάθε $s \in S$ το S είναι ένωση όλων των συνεκτικών υποσυνόλων του G που περιέχουν το s προκύπτει ότι κάθε $V_s \subseteq S$. Άρα S είναι ανοικτό στο X ως ένωση ανοικτών στο X συνόλων $Int(V_s)$, $s \in S$.

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Έστω ότι ο X έχει την ιδιότητα (iii) και U είναι ανοικτός υπόχωρος του X. Αν $x \in U$ και G είναι ανοικτή περιοχή του x στο U, τότε G είναι ανοικτό υποσύνολο του X και, συνεπώς, οι συνεκτικές συνιστώσες του G είναι ανοικτά υποσυνόλα του X. Επομένως η συνεκτική συνιστώσα S_x του x στο G είναι ανοικτό και συνεκτικό υποσύνολο του U τέτοιο ώστε $x \in S_x \subseteq G$. Άρα ο U είναι τοπικά συνεκτικός.

$(iv) \Rightarrow (i)$ Αν ο X έχει την ιδιότητα (iv), τότε ο X είναι τοπικά συνεκτικός ως ανοικτός υπόχωρος του εαυτού του.

□

Ορισμός 2.3.2. Ένας χώρος X καλείται *ασθενώς συνεκτικός στο σημείο* $x \in X$ (X is connected im kleinen at x) αν για κάθε ανοικτή περιοχή U του x στο X υπάρχει συνεκτικό υποσύνολο V τέτοιο ώστε

$$x \in \mathrm{Int}(V) \subseteq V \subseteq U.$$

Άπό τους ορισμούς της τοπικής συνεκτικότητας και της ασθενούς συνεκτικότητας σε ένα σημείο x συνεπάγεται η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 2.3.2. *Αν ο X είναι τοπικά συνεκτικός στο σημείο x, τότε X είναι ασθενώς συνεκτικός στο x.*

Από το Θεώρημα 2.3.1(ισοδυναμία των συνθηκών (i) και (ii)) συνεπάγεται η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 2.3.3. *Ένας χώρος X είναι τοπικά συνεκτικός αν και μόνον αν ο X είναι ασθενώς συνεκτικός σε κάθε σημείο του.*

Θεώρημα 2.3.2. ***(Sierpinski)*** *Για ένα μετρικό και συμπαγή χώρο X τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(i) ο X είναι τοπικά συνεκτικός

(ii) για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν συνεχή $X_1, ..., X_n \subseteq X$ τέτοια ώστε $X = X_1 \cup ... \cup X_n$ και $\operatorname{diam}(X_i) < \varepsilon$ για κάθε $i = 1, ..., n$.

Απόδειξη. $(i) \Rightarrow (ii)$ Επειδή ο X είναι τοπικά συνεκτικός, για κάθε $x \in X$ υπάρχει ανοικτή και συνεκτική περιοχή O_x του x τέτοια ώστε $O_x \subseteq S(x, \frac{\varepsilon}{2})$. Επειδή ο X είναι συμπαγής, το ανοικτό κάλυμμα $\{O_x\}_{x \in X}$ του X περιέχει πεπερασμένο υποκάλυμμα $\{O_{x_1}, ..., O_{x_n}\}$.

Θέτουμε $X_i = Cl(O_{x_i})$, $i = 1, ..., n$. Κάθε X_i είναι συνεκτικό ως περίβλημα συνεκτικού συνόλου και συμπαγές ως κλειστό υποσύνολο συμπαγούς μετρικού χώρου. Επομένως κάθε X_i είναι συνεχές. Επίσης

$$\operatorname{diam}(X_i) = \operatorname{diam}(O_x) < \operatorname{diam}(S(x, \varepsilon/2)) \leq \varepsilon.$$

$(ii) \Rightarrow (i)$ Έστω $x \in X$ και U_x ανοικτή περιοχή του x στο X. Τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $B(x, \varepsilon) \subseteq U_x$. Επομένως υπάρχουν συνεχή $X_1, ..., X_n \subseteq X$ τέτοια ώστε $X = X_1 \cup ... \cup X_n$ και $\operatorname{diam}(X_i) < \frac{\varepsilon}{2}$ για κάθε $i = 1, ..., n$. Έστω ότι $X_{k_1}, ..., X_{k_x}$ είναι τα στοιχεία του καλύμματος $\{X_1, ..., X_n\}$ του X που περιέχουν το σημείο x. Επειδή $x \in X_{k_1} \cap ... \cap X_{k_x}$, το σύνολο $A = X_{k_1} \cup ... \cup X_{k_x}$ είναι συνεχές. Επίσης $x \in A \subseteq B(x, \varepsilon)$.

Έστω $X_{m_1}, ..., X_{m_x}$ τα στοιχεία του καλύμματος $\{X_1, ..., X_n\}$ του X που δέν περιέχουν το σημείο x και $G = X \setminus X_{m_1} \cup ... \cup X_{m_x}$. Τότε το G είναι ανοικτό και $x \in G \subseteq A$. Άρα, $x \in \operatorname{Int}(A)$.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι για κάθε $x \in X$ για κάθε ανοικτή περιοχή U_x του x στο X, υπάρχει συνεκτικό σύνολο A, τέτοιο ώστε $x \in \operatorname{Int}(A) \subseteq A \subseteq U_x$. Αυτό σημαίνει ότι ο X είναι τοπικά συνεκτικός.

□

Θεώρημα 2.3.3. *Αν ο χώρος X είναι τοπικά συνεκτικός και $f : X \to Y = f(X)$ είναι κλειστή απεικόνιση του X επί του χώρου Y, τότε ο Y είναι τοπικά συνεκτικός.*

Απόδειξη. Έστω U ανοικτό υποσύνολο του U και S μια συνεκτική συνιστώσα του U. Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.3.1 αρκεί να αποδειχθεί ότι S είναι ανοικτό στο Y.

Θα δείξουμε $f^{-1}(S)$ είναι ανοικτό. Οπότε το σύνολο $X \setminus f^{-1}(S)$ είναι κλειστό. Τότε, επειδή η f είναι κλειστή, είναι κλειστό το σύνολο $f(X \setminus f^{-1}(S))$, συνεπώς $S = Y \setminus f(X \setminus f^{-1}(S))$ είναι ανοικτό.

Έστω ότι $x \in f^{-1}(S)$. Τότε $x \in f^{-1}(U)$. Εφόσον η f είναι συνεχής, $f^{-1}(U)$ είναι ανοικτό στο X. Επειδή ο X είναι τοπικά συνεκτικός, η συνεκτική συνιστώσα S_x του $f^{-1}(U)$ που περιέχει το x είναι ανοικτό υποσύνολο του X. Επειδή S_x είναι συνεκτικό και η f είναι συνεχής, το σύνολο $f(S_x)$ είναι συνεκτικό.

Έχουμε $f(x) \subseteq f(S_x) \cap S$, όπου $f(S_x)$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του U και S είναι συνεκτική συνιστώσα του U. Επομένως $f(S_x) \subseteq S$, οπότε

$$x \in S_x \subseteq f^{-1}(S).$$

Άρα, το συνεκτικό σύνολο $f^{-1}(S)$ είναι ανοικτό ως ένωση ανοικτών συνόλων S_x. □

2.4 Κατά τόξο Συνεκτικοί Χώροι

Ορισμός 2.4.1. Ένας χώρος X καλείται *τόξο* αν υπάρχει ομοιομορφισμός

$$h : [0, 1] \to X.$$

Τα σημεία $h(0)$ και $h(1)$ καλούνται άκρα το τόξου X.

Πρόταση 2.4.2. *Κάθε τόξο είναι συνεκτικός χώρος.*

Παρατηρούμε ότι τα διαστήματα $[0, 1] \setminus \{0\}$ και $[0, 1] \setminus \{1\}$ είναι συνεκτικά υποσύνολα του $[0, 1]$ και για κάθε $x \in [0, 1]$, $x \neq 0$ και $x \neq 1$, το σύνολο $[0, 1] \setminus \{x\}$ είναι μη συνεκτικό.

Επομένως σε κάθε τόξο X υπάρχουν δύο σημεία a και b ($\{a, b\} = \{h(0), h(1)\}$) τέτοια ώστε τα σύνολα $X \setminus \{a\}$ και $X \setminus \{b\}$ είναι συνεκτικά και για κάθε $x \in X \setminus \{a, b\}$ το σύνολο $X \setminus \{x\}$ είναι μη συνεκτικό. Αποδεικνύεται ότι αυτή η ιδιότητα είναι χαρακτηριστική ιδιότητα των τόξων, δηλαδή ισχύει το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 2.4.3. *Ένας μετρικός, συνεκτικός και συμπαγής χώρος X είναι τόξο αν και μόνον αν υπάρχουν ακριβώς δύο σημεία $a, b \in X$, τέτοια ώστε $X \setminus \{a\}$ και $X \setminus \{b\}$ να είναι συνεκτικά σύνολα.*

Ορισμός 2.4.4. Ένας χώρος X καλείται *κατά τόξο συνεκτικός* αν οποιαδήποτε δύο σημεία $a, b \in X$ είναι άκρα ενός τόξου του X, δηλαδή υπάρχει ομοιομορφισμός

$$h : [0, 1] \to h([0, 1]) \subseteq X$$

τέτοιος ώστε $h(0) = a$ και $h(1) = b$.

Ο $\mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, ...$, είναι κατά τόξο συνεκτικός, επειδή οποιαδήποτε δύο σημεία A και B του $\mathbb{R}^n$ είναι άκρα ευθύγραμμου τμήματος AB και υπάρχει ομοιομορφισμός $h : [0, 1] \to AB$ τέτοιος ώστε $h(0) = A$ και $h(1) = B$.

Πρόταση 2.4.5. *Κάθε κατά τόξο συνεκτικός χώρος είναι συνεκτικός.*

Απόδειξη. Οποιαδήποτε δύο σημεία a και b ενός κατά τόξο συνεκτικού χώρου X ανήκουν σε ένα συνεκτικό υποσύνολο του X, το τόξο με άκρα a και b. Άρα, ο X είναι συνεκτικός.

□

Θεώρημα 2.4.6. *Κάθε πλήρης, συνεκτικός και τοπικά συνεκτικός μετρικός χώρος είναι κατά τόξο συνεκτικός ([10], σελ. 118).*

2.5 Συνεχές σύγκλισης

Ορισμός 2.5.1. Έστω S ένας μετρικός χώρος. Ένα μη τετριμμένο υποσυνεχές A του S καλείται *συνεχές σύγκλισης* (*convergence continuum*), εφ'όσον υπάρχει μια ακολουθία $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ από υποσυνεχή A_i του S τέτοια ώστε $A = \lim A_i$ και $A \cap A_i = \phi$ για κάθε $i \in \{1, 2, ...\}$.

Θεώρημα 2.5.1. *Αν ένα μετρικό συνεχές X δεν είναι ασθενώς συνεκτικό στο σημείο x, τότε υπάρχει μη αριθμήσιμο συνεχές σύγκλισης K του X τέτοιο ώστε $x \in K$ και X δεν είναι ασθενώς συνεκτικό σε κανένα σημείο του K.*

Θεώρημα 2.5.2. *Κάθε συνεχές που δεν είναι τοπικά συνεκτικό περιέχει ένα μη αριθμήσιμο συνεχές σύγκλισης.*

Απόδειξη. Έστω X ένα συνεχές που δεν είναι τοπικά συνεκτικό. Από το Πόρισμα 2.3.3, υπάρχει $x \in X$ στο οποίο ο X δεν είναι ασθενώς συνεκτικό. Άρα, από το Θεώρημα 2.5.1, ο X περιέχει ένα μη αριθμήσιμο συνεχές σύγκλισης. □

Θεώρημα 2.5.3. *Αν K είναι συνεχές σύγκλισης ενός χώρου X και $p, q \in K$, τότε δεν υπάρχει υποσύνολο του K που διαχωρίζει τα σημεία p και q στο X.*

Απόδειξη. Έστω, αντίθετα, υπάρχει $C \subseteq K$, τέτοιο ώστε $X \setminus C = P|Q$, $p \in P$ και $q \in Q$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι το C είναι κλειστό στο X, οπότε P και Q είναι ανοικτά στο X.

Για το συνεχές σύγκλισης K υπάρχει μια ακολουθία $\{K_i\}_{i=1}^{\infty}$ ξένων ανά δύο υποσυνεχών του X τέτοια ώστε $\lim\limits_{i\to\infty} K_i = K$. Επειδή τα σύνολα K_i είναι συνεκτικά και δεν τέμνουν το C, το καθένα από αυτά περιέχεται είτε στο P, είτε στο Q.

Επειδή $p \in P$ και $p \in K = \lim\limits_{i\to\infty} K_i$, έπεται ότι υπάρχει i_0 τέτοιο ώστε $P \cap K_i \neq \emptyset$ για κάθε $i \geq i_0$. Συνεπώς, $K_i \subseteq P$ για κάθε $i \geq i_0$. Άρα, η ανοικτή περιοχή Q του q τέμνει το πολύ πεπερασμένου πλήθους σύνολα K_i, δηλαδή $q \notin \lim\limits_{i\to\infty} K_i = K$, που είναι άτοπο. □

Θεώρημα 2.5.4. *Έστω ότι X είναι συνεκτικός χώρος με αριθμήσιμη βάση και $\mathcal{G}$ είναι μη αριθμήσιμη οικογένεια κλειστών και ξένων υποσυνόλων του X που διαχωρίζουν το X.*

Για κάθε συνεχές σύγκλισης K του X υπάρχει $G \in \mathcal{G}$, τέτοιο ώστε $G \subsetneq K$.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι αντίθετα υπάρχει ένα συνεχές σύγκλισης K τέτοιο ώστε $\cup\mathcal{G} \subseteq K$.

Από το Θεώρημα 2.2.3 υπάρχει $G \in \mathcal{G}$ και διαχωρισμός $X \setminus G = U \cup V$ του X για τον οποίο $U \cap (\cup\mathcal{G}) \neq \emptyset$ και $V \cap (\cup\mathcal{G}) \neq \emptyset$.

Έστω $K = \lim\limits_{i\to\infty} K_i$, όπου $\{K_i\}_{i=1}^{\infty}$ είναι οικογένεια ξένων ανά δύο συνεχών που δεν τέμνουν το K. Επειδή $G \subseteq K$, $K_i \cap K = \emptyset$ και K_i είναι συνεκτικό, προκύπτει ότι ή $K_i \subseteq U$ ή $K_i \subseteq V$ για κάθε i. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπρούμε να υποθέσουμε ότι U περιέχει άπειρη οικογένεια $\{K_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$.

Τότε όμως κάθε σημείο του $V \cap (\cup\mathcal{G})) \subseteq K$ είναι οριακό σημείο του συνόλου $(\bigcup_{i=1}^{\infty} K_{n_i}) \cap U$, που είναι άτοπο, επειδή $\mathrm{Cl}(U) \cap V = \emptyset$.

□

Πόρισμα 2.5.1. *Αν X είναι ένας συνεκτικός χώρος με αριθμήσιμη βάση και K είναι συνεχές σύγκλισης του X, τότε το K περιέχει το πολύ αριθμήσιμο πλήθος σημείων διάσπασης του X.*

Απόδειξη. Θέτουμε

$$\mathcal{G} = \{\{x\} : x \text{ σημείο διάσπασης του } X\}.$$

Προφανώς $\mathcal{G}$ είναι οικογένεια κλειστών και ξένων υποσυνόλων του X που διαχωρίζουν το X. Από το Θεώρημα 2.5.4 κάθε μη αριθμήσιμη υποοικογένεια της $\mathcal{G}$ περιέχει στοιχείο που δεν είναι υποσύνολο του K. Άρα, αν κάθε στοιχείο μιας υποοικογένειας $\mathcal{G}^*$ της $\mathcal{G}$ είναι υποσύνολο του K, τότε η $\mathcal{G}^*$ είναι αριθμήσιμη.

□

2.6 Συνεχή του Peano

Ορισμός 2.6.1. Ένας μετρικός χώρος που είναι τοπικά συνεκτικό συνεχές καλείται *συνεχές του Peano*.

Το παρακάτω Θεώρημα προκύπτει από το Θεώρημα 2.3.2 και προσφέρει μια ικανή και αναγκαία συνθήκη ένα μετρικό συνεχές X να είναι συνεχές του Peano

Θεώρημα 2.6.1. *Ένα μετρικό συνεχές X είναι συνεχές του Peano αν και μόνον αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν συνεχή $X_1, ..., X_n \subseteq X$ τέτοια ώστε $X = X_1 \cup ... \cup X_n$ και $\mathrm{diam}(X_i) < \varepsilon$ για κάθε $i = 1, ..., n$.*

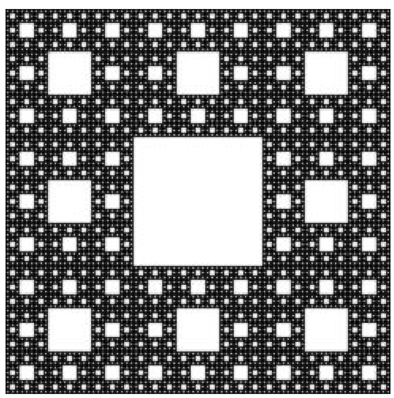
Παραδείγματα 2.6.1.

1. *Χαλί του Sierpinski.*

   Θα περιγράψουμε τη κατασκευή ενός τοπικά συνεκτικού επίπεδου συνεχούς που έχει δοθεί από τον Πολωνό Μαθηματικό W. Sierpinski.

   Χωρίζουμε ένα τετράγωνο T σε εννέα ίσα τετράγωνα και αφαιρούμε από το μεσαίο τα εσωτερικά του σημεία. Χωρίζουμε και πάλι το καθένα από τα οκτώ που απομένουν (τετράγωνα 1ης τάξης) σε εννέα ίσα τετράγωνα και αφαιρούμε από κάθε μεσαίο τετράγωνο τα εσωτερικά του σημεία. Έτσι, παίρνουμε 8^2 τετράγωνα 2ης τάξης. Σε καθένα από αυτά επαναλαμβάνουμε την προηγούμενη διαδικασία λαμβάνοντας 8^3 τετράγωνα 3ης τάξης κ.ο.κ.

   Η ένωση των τετραγώνων n-τάξης είναι ένα συνεχές S_n. Από την κατασκευή $S_1 \supseteq S_2 \supseteq \cdots \supseteq S_n \supseteq S_{n+1} \supseteq \cdots$. Από το Θεώρημα 2.6.1 συνεπάγεται ότι το συνεχές $S = \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$ είναι τοπικά συνεκτικό.

   Σχήμα 2.1: Χαλί του Sierpinski

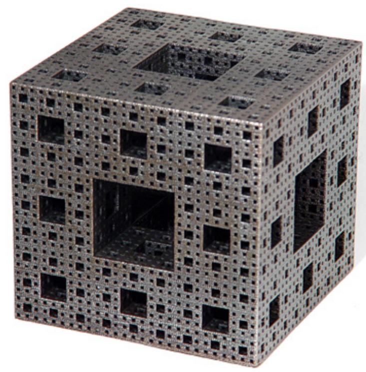
2. *Σπόγγος του Menger*

   Θα περιγράψουμε την κατασκευή ενός τοπικά συνεκτικού συνεχούς που έχει δοθεί από τον Αυστριακό μαθηματικό K. Menger.

   Ένας κύβος M_0 χωρίζεται σε 27 ίσους κύβους: μετά αφαιρούνται ο "μεσαίος" κύβος και οι έξι κύβοι που έχουν με αυτόν κοινές έδρες. Έτσι, έχουμε το σύνολο M_1, που αποτελείται από 20 κλειστούς κύβους 1ης τάξης.

   Σε κάθε κύβο 1ης τάξης εφαρμόζουμε την ίδια διαδικασία, δηλαδή χωρίζουμε τον καθένα σε 27 κύβους και αφαιρούμε τον μεσαίο κύβο, καθώς και τους κύβους που έχουν με αυτόν κοινή έδρα. Το σύνολο M_2 που απομένει αποτελείται από 20^2 κύβους 2ης ταξης. Εφαρμόζουμε την ίδια διαδικασία σε κάθε κύβο 2ης τάξης, λαμβάνουμε το κλειστό σύνολο M_3 που αποτελείται από 20^3 κύβους 3ης τάξης κ.ο.κ..

Η ένωση των κύβων n-τάξης είναι ένα συνεχές M_n. Το σύνολο $M = \bigcap_{n=0}^{\infty} M_n$ ως τομή μιας άπειρης φθίνουσας ακολουθίας συνεχών, είναι και το ίδιο συνεχής, το οποιό είναι καθολική καμπύλη. Από το Θεώρημα 2.6.1 συνεπάγεται ότι το συνεχές M είναι συνεχές του Peano.



Σχήμα 2.2: Σπόγγος του Menger

Θεώρημα 2.6.2. *Ένας μετρικός χώρος Y που είναι συνεχής εικόνα ενός συνεχούς του Peano είναι συνεχές του Peano.*

Απόδειξη. Έστω X ένα συνεχές του Peano και $f : X \to Y = f(X)$. Επειδή ο X είναι συμπαγής χώρος, κάθε συνεχής απεικόνιση είναι κλειστή. Η συνεχής εικόνα ενός συμπαγούς και συνεκτικού χώρου είναι συμπαγής και συνεκτικός χώρος και η κλειστή εικόνα ενός τοπικά συνεκτικού χώρου είναι τοπικά συνεκτικός χώρος, άρα $f(X)$ είναι είναι συνεχές του Peano. □

Το παρακάτω γνωστό Θεώρημα δίνει ακόμα μια χαρακτηριστική ιδιότητα των τοπικά συνεκτικών συνεχών ([15], σελ. 256).

Θεώρημα 2.6.2. ***(Hahn-Mazurkiewicz)*** *Ένας μετρικός χώρος X είναι συνεχές του Peano αν και μόνον αν υπάρχει συνεχής και επί απεικόνιση $f : [0,1] \to f([0,1]) = X$.*

Επειδή κάθε συνεχές του Peano είναι μετρικός, πλήρης, συνεκτικός και τοπικά συνεκτικός χώρος από το Θεώρημα 2.4.6 συνεπάγεται ότι:

Θεώρημα 2.6.3. *Κάθε συνεχές του Peano είναι κατά τόξο συνεκτικός χώρος.*

Το αντίστροφο του Θεωρήματος 2.6.3 δεν αληθεύει, όπως φαίνεται από το παρακάτω παράδειγμα.

Παράδειγμα 2.6.4. Συμβολίζουμε με F_0 το ευθύγραμμο τμήμα του R^2 που ενώνει τα σημεία $(0,1)$ και $(0,0)$. Με F_n, $n = 1, 2, ...$, συμβολίζουμε το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία $(0,1)$ και $(1/n, 0)$. Το συνεχές $F = \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n$ είναι κατά τόξο συνεκτικό, το οποίο δεν είναι τοπικά συνεκτικό στα σημεία του υποσυνόλου $F_0 \setminus \{(0,1)\}$.

Θεώρημα 2.6.4. *Κάθε ανοικτός και συνεκτικός υπόχωρος ενός συνεχούς του Peano είναι κατά τόξο συνεκτικός ([20], σελ. 132).*

2.7 Κληρονομικά τοπικά συνεκτικό συνεχές

Ορισμός 2.7.1. Ένα συνεχές X καλείται *κληρονομικά τοπικά συνεκτικό* αν κάθε υποσυνεχές του X είναι συνεχές του Peano.

Προφανώς κάθε κληρονομικά τοπικά συνεκτικό συνεχές είναι συνεχές του Peano. Παραθέτουμε παράδειγμα ενός συνεχούς του Peano το οποίο δεν είναι κληρονομικά τοπικά συνεκτικό.

Παράδειγμα 2.7.1. Το τετράγωνο $[0,1]\times[0,1]$ του $\mathbb{R}^2$ είναι συνεχές του Peano. Όμως η συμπυκνωμένη ημιτονοειδής

$$S=\left\{(x,\sin\frac{1}{x}):0<x\leq 1\right\}\cup\{(0,y):-1<y\leq 1\}$$

είναι υποσυνεχές του $[0,1]\times[0,1]$, το οποίο δεν είναι τοπικά συνεκτικό.

Το θεώρημα που ακολουθεί προσφέρει μια χαρακτηριστική ιδιότητα των κληρονομικά τοπικά συνεκτικών συνεχών ([15], σελ. 269).

Θεώρημα 2.7.1. *Ένα συνεχές X είναι κληρονομικά τοπικά συνεκτικό αν και μόνον αν ο X δεν περιέχει κανένα μη τετριμμένο συνεχές σύγκλισης.*

2.8 Καμπύλες

2.8.1 Τοπολογική διάσταση

Ορισμός 2.8.1. Η μικρή επαγωγική διάσταση $ind(X)$ ενός τοπολογικού χώρου X είναι ένας ακέραιος αριθμός ≥ -1 ή ∞ και ορίζεται επαγωγικά ως εξής:

1. $ind(X)=-1$ αν και μόνο αν $X=\emptyset$
2. $ind(X)\leq n$, όπου $n=0,1,2,\ldots$, αν υπάρχει ανοικτή βάση $\mathfrak{B}$ του X τέτοια ώστε για κάθε $U\in\mathfrak{B}$ ισχύει $\mathrm{ind}(\mathrm{Bd}(U))\leq n-1$.
3. $ind(X)=n$, αν $ind(X)\leq n$ και $ind(X)\nleq n-1$.
4. $ind(X)=\infty$ αν $ind(X)\nleq n$ για κάθε $n=0,1,\ldots$.

Ένας χώρος X καλείται *μονοδιάστατος* αν $\mathrm{ind}(X)=1$

2.8.2 Ορισμός της καμπύλης

Ορισμός 2.8.2. Κάθε μετρικό μονοδιάστατο συνεχές καλείται *καμπύλη* .

Μία καμπύλη που είναι ομοιομορφική με την περιφέρεια του κύκλου καλείται *απλή κλειστή καμπύλη* .

Ένα συνεχές καλείται *γράφημα*, αν μπορεί να γραφεί ως ένωση πεπερασμένου πλήθους τόξων, τα οποία ανά δύο είτε δεν τέμνονται, είτε τέμνονται σε ένα από τα άκρα τους, είτε τέμνονται στα δύο τους άκρα. Προφανώς κάθε γράφημα είναι καμπύλη.

Ένα γράφημα που δεν περιέχει απλές κλειστές καμπύλες καλείται *δένδρο.*

2.8.3 Τάξη Διακλάδωσης καμπύλης σε σημείο

Κάθε σημείο x ενός γραφήματος G είναι κοινό άκρο πεπερασμένου πλήθους τόξων του G που δεν έχουν άλλο κοινό σημείο εκτός από το x. Το μέγιστο πλήθος n των τόξων αυτών συμβολίζεται $\mathrm{ord}(x, G)$ και καλείται *τάξη διακλάδωσης* του G στο x.

Η έννοια της τάξης διακλάδωσης γενικεύεται για τα σημεία οποιασδήποτε καμπύλης.

Ορισμός 2.8.3. Η τάξη διακλάδωσης $\mathrm{ord}(x, K)$ μιας καμπύλης K στο σημείο $x \in K$ είναι ο μικρότερος πληθικός ή διατακτικός αριθμός n που ορίζεται ως εξής:

για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένα ανοικτό σύνολο U του K τέτοιο ώστε:

$$x \in U,\ \mathrm{diam}(U) < \varepsilon \text{ και } |\mathrm{Bd}(U)| \leq n.$$

Η ανισότητα $|\mathrm{Bd}(U)| \leq \omega$, όπου ω είναι ο μικρότερος άπειρος πληθάριθμος, σημαίνει ότι το σύνολο $\mathrm{Bd}(U)$ είναι πεπερασμένο.

Από τον Ορισμό 2.8.3 προκύπτει ότι τα σημεία μιας καμπύλης K ταξινομούνται ως προς την τάξη διακλάδωσης ως εξής:

1. Σημεία τάξης διακλάδωσης $n \in \{1, 2, \dots\}$: για ένα σημείο $x \in K$ ισχύει ότι $\mathrm{ord}(x, K) = n$ αν $\mathrm{ord}(x, K) \leq n$ και $\mathrm{ord}(x, K) \nleq n - 1$.

2. Σημεία τάξης διακλάδωσης w: για ένα σημείο $x \in K$ ισχύει ότι $\mathrm{ord}(x, K) = w$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ανοικτή περιοχή του x διαμέτρου $< \varepsilon$ με πεπερασμένο σύνορο και $ord(x, K) \nleq n$ για κάθε φυσικό αριθμό n.

3. Σημεία τάξης διακλάδωσης $\mathcal{N}_0$: για ένα σημείο $x \in K$ ισχύει ότι $\mathrm{ord}(x, K) = N_0$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ανοικτή περιοχή του x διαμέτρου $< \varepsilon$ με αριθμήσιμο σύνορο και $ord(x, K) \nleq n$ για κάθε φυσικό αριθμό n.

4. Σημεία μη αριθμήσιμης τάξης διακλάδωσης c: για ένα σημείο $x \in K$ ισχύει ότι $ord(x, K) = c$ αν αν υπάρχει $\varepsilon > 0$ για το οποίο κάθε ανοικτή περιοχή του x διαμέτρου $< \varepsilon$ έχει μη αριθμήσιμο σύνορο.

Συμβολίζουμε

$$K^{[n]} = \{x \in K : \mathrm{ord}(x, K) = n\}.$$

2.8.4 Τελικά σημεία και σημεία διακλάδωσης.

Ορισμός 2.8.4. Ένα σημείο x μιας καμπύλης K καλείται *σημείο διακλάδωσης* της K, αν $\operatorname{ord}(x, K) \geq 3$.

Ένα σημείο x μιας καμπύλης K καλείται *τελικό σημείο* της K, αν $\operatorname{ord}(x, K) = 1$.

2.8.5 Καθολικές καμπύλες

Ένας τοπολογικός χώρος $\mathcal{K}$ καλείται *καθολικός* για μια οικογένεια $\mathcal{F}$ τοπολογικών χώρων, όταν:

(i) $\mathcal{K} \in \mathcal{F}$,

(ii) για κάθε $X \in \mathcal{F}$ υπάρχει ομοιομορφισμός του X επί ενός υποχώρου του $\mathcal{K}$.

Για τις καμπύλες είναι γνωστά τα παρακάτω αποτελέσματα:

1. Το χαλί του Sierpinski S είναι καθολικός χώρος στην οικογένεια όλων των επίπεδων καμπυλών (βλ. Παραδείγματα 2.6.1 για την κατασκευή του S).

2. Ο σπόγγος του Menger M είναι καθολικός χώρος στην οικογένεια όλων των καμπυλών (βλ. Παραδείγματα 2.6.1 για την κατασκευή του M).

2.9 Κανονικοί χώροι

Ορισμός 2.9.1. Ένας χώρος X καλείται κανονικός αν ο X έχει μια ανοικτή βάση $\{O_i\}_{i=1}^{\infty}$ τέτοια ώστε για κάθε $i = 1, 2, \ldots$, το σύνολο $\mathrm{Bd}(O_i)$ είναι πεπερασμένο.

Θεώρημα 2.9.1. *Κάθε υπόχωρος ενός κανονικού χώρου είναι κανονικός.*

Απόδειξη. Έστω ότι X είναι ένας κανονικός χώρος και Y είναι υπόχωρος του X.

Θεωρούμε ένα σήμείο $y \in Y$ και μια ανοικτή περιοχή O_y του y στο Y. Τότε $O_y = Y \cap O'_y$, όπου O'_y είναι ανοικτή περιοχή του σημείου y στο X.

Επειδή ο X είναι κανονικός, υπάρχει ανοικτή περιοχή V'_y του y στο X, τέτοια ώστε

$$V'_y \subseteq Cl_X(V'_y) \subseteq O'_y$$

και το σύνολο $Bd_X(V'_y)$ είναι πεπερασμένο. Το σύνολο $V_y = Y \cap V'_y$ είναι ανοικτό στο Y και $V_y \subseteq O_y$.

Αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο $Bd_Y(V_y)$ είναι πεπερασμένο. Πράγματι, επειδή $Cl_Y(V_y) = Cl_X(V_y) \cap Y \subseteq Cl_X(V'_y)$, έχουμε

$$Bd_Y(V_y) = Cl_Y(V_y) \setminus V_y \subseteq Cl_X(V'_y) \setminus (Y \cap V'_y) \subseteq Cl_X(V'_y) \setminus V'_y = Bd(V'_y).$$

Αφού το σύνολο $Bd(V'_y)$ είναι πεπερασμένο, το υποσύνολό του $Bd_Y(V_y)$ είναι πεπερασμένο.

□

Θεώρημα 2.9.2. *Κάθε κανονικός και συνεκτικός χώρος είναι τοπικά συνεκτικός.*

Απόδειξη. Έστω $x \in X$ και O_x τυχαίο ανοικτό σύνολο που περιέχει το x. Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.3.1 αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει συνεκτικό υποσύνολο του O_x, που περιέχει το σημείο x στο εσωτερικό του.

Επειδή ο X είναι κανονικός, υπάρχει ανοικτό σύνολο V_x τέτοιο ώστε

$$x \in \mathrm{Cl}(V_x) \subseteq O_x$$

και το σύνολο $Bd(V_x)$ είναι πεπερασμένο. Έστω ότι $Bd(V_x) = \{x_1, ..., x_n\}$. Θα δείξουμε ότι $\mathrm{Cl}(V_x)$ έχει το πολύ n συνεκτικές συνιστώσες.

Ας υποθέσουμε αντίθετα ότι το πλήθος των συνεκτικών συνιστωσών του $\mathrm{Cl}(V_x)$ είναι μεγαλύτερο του n. Με επαγωγή ως προς n μπορεί να αποδειχθεί ότι

$$\mathrm{Cl}(V_x) = K_1 \cup ... \cup K_{n+1}$$

όπου τα σύνολα K_i είναι μη κενά κλειστά στο X και ξένα άνα δύο.

Θα δείξουμε ότι $K_i \cap \mathrm{Bd}(V_x) \neq \emptyset$ για κάθε $i = 1, 2, ..., n+1$.

Πράγματι, αν $K_i \cap \mathrm{Bd}(V_x) = \emptyset$ για κάποιο $i = 1, ..., n+1$, τότε

$$X = K_i \cup \left((X \setminus V_x) \cup \bigcup_{j \neq i} K_j \right),$$

είναι διαχωρισμός του X σε δύο ξένα κλειστά μη κενά σύνολα K_i και $(X \setminus V_x) \cup \bigcup_{j \neq i} K_j$, που έρχεται σε αντίθεση με την συνεκτικότητα του X.

Αν όμως το καθένα από τα ξένα ανά δύο σύνολα $K_1, ..., K_{n+1}$ τέμνει το $\mathrm{Bd}(V_x)$, τότε το σύνολο $\mathrm{Bd}(V_x)$ περιέχει τουλάχιστον $n+1$ στοιχεία, που είναι άτοπο.

Επομένως

$$\mathrm{Cl}(V_x) = C_1 \cup ... \cup C_m, \quad m \leq n,$$

όπου κάθε C_i είναι συνεκτική συνεστώσα του $\mathrm{Cl}(V_x)$.

Έχουμε $x \in V_x \subseteq \mathrm{Cl}(V_x) = C_1 \cup ... \cup C_m$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x \in C_1$.

Επειδή $C_1 \cap (C_2 \cup ... \cup C_m) = \emptyset$, έπεται ότι

$$x \in V_x \setminus (C_2 \cup ... \cup C_m) \subseteq C_1$$

Προφανώς το σύνολο $V_x \setminus (C_2 \cup ... \cup C_m)$ είναι ανοικτό στο X. Άρα,

$$x \in \mathrm{Int}(C_1) \subseteq C_1 \subseteq O_x,$$

όπου C_1 είναι συνεκτικό.

□

Πόρισμα 2.9.1. *Κάθε συνεκτικός υπόχωρος ενός κανονικού χώρου είναι τοπικά συνεκτικός.*

Απόδειξη. Έστω ότι Y είναι συνεκτικός υπόχωρος κανονικου χώρου X. Από το Θεώρημα 2.9.1 ο Y είναι κανονικός. Άρα, από το Θεώρημα 2.9.2, ο συνεκτικός χώρος Y είναι τοπικά συνεκτικός.

□

Κεφάλαιο 3

Δενδρίτες και οι χαρακτηριστικές ιδιότητές τους

Στο Κεφάλαιο αυτό εισάγεται η έννοια του δενδρίτη και μελετώνται οι ιδιότητες των δενδριτών.

Αποδεικνύεται ότι κάθε δενδρίτης είναι κανονική καμπύλη με αριθμήσιμο πλήθος σημείων διακλάδωσης και ότι κάθε συνεκτικό υποσύνολο ενός δενδρίτη είναι κατά τόξο συνεκτικό.

Επίσης θα αποδείξουμε μερικές χαρακτηριστικές ιδιότητες των δενδριτών, όπως ότι η τομή οποιωνδήποτε συνεκτικών υποσυνόλων ενός δενδρίτη είναι συνεκτική και ότι κάθε σημείο ενός δενδρίτη είτε είναι σημείο διάσπασης είτε είναι τελικό σημείο.

3.1 Η έννοια του δενδρίτη.

Ορισμός 3.1.1. Ένα συνεχές του Peano καλείται *δενδρίτης* αν δεν περιέχει απλή κλειστή καμπύλη.

Επειδή κάθε συνεχές του Peano είναι κάτα τόξο συνεκτικό (Θεώρημα 2.6.3), από τον ορισμό του δενδρίτη έπεται ότι:

- *Κάθε δενδρίτης είναι κατά τόξο συνεκτικός.*

Η ένωση δύο τόξων με κοινά άκρα περιέχει απλή κλειστή καμπύλη. Επομένως

- *Για οποιαδήποτε δυο σημεία p και q ενός δενδρίτη D υπάρχει μοναδικό τόξο του D με άκρα p και q.*

3.2 Ιδιότητες των δενδριτών

Στην παράγραφο αυτή με D συμβολίζουμε ένα συνεχές που δεν είναι μονοσύνολο.

Θεώρημα 3.2.1. *Ένα συνεχές D είναι ένας δενδρίτης αν και μόνο αν οποιοαδήποτε δύο σημεία του D διαχωρίζονται στο D από ένα τρίτο σημείο.*

Απόδειξη. Έστω ότι D είναι ένας δενδρίτης και $p, q \in D$, $p \neq q$.

Από το Θεώρημα 2.6.3 υπάρχει στο D ένα τόξο T_D με άκρα p και q. Έστω ότι $r \in T_D - \{p, q\}$. Επειδή ο D είναι τοπικά συνεκτικός και το σύνολο $D \setminus \{r\}$ είναι ανοικτό, από το Θεώρημα 2.3.1 η συνεκτική συνιστώσα P του p στο D - $\{r\}$ είναι ανοικτό σύνολο. Αν $q \in P$, τότε (Θεώρημα 2.6.4) υπάρχει ένα τόξο T_P στο P από το p στο q, διαφορετικό από το T_D, που είναι άτοπο. Θέτουμε $Q = X \setminus \{r\} \setminus P$. Τότε

$$X \setminus \{r\} = P|Q, \ p \in P, q \in Q.$$

Δηλαδή r διαχωρίζει τα σημεία p και q στο D.

Αντιστρόφως, υποθέτουμε ότι οποιαδήποτε δύο σημεία του D διαχωρίζονται στο D από ένα τρίτο σημείο του D. Τότε, από το Θεώρημα 2.5.3 το συνεχές D δεν περιέχει κανένα συνεχές σύγκλισης. Άρα, από το Θεώρημα 2.5.2, το συνεχές D είναι τοπικά συνεκτικό. Αν D περιείχε μια απλή κλειστή καμπύλη K, τότε κανένα σημείο του D δεν θα διαχώριζε δύο σημεία της K. Άρα, το D δεν περιέχει απλή κλειστή καμπύλη. Συνεπώς το D είναι δενδρίτης.

□

Θεώρημα 3.2.2. *Κάθε δενδρίτης είναι κανονικός χώρος.*

Απόδειξη. Έστω D ένας δενδρίτης. Θεωρούμε ένα σημείο $p \in D$ και ένα ανοικτό υποσύνολο W_p του D τέτοιο ώστε $p \in W_p$. Αρκεί να βρούμε ένα ανοικτό υποσύνολο V του D τέτοιο ώστε $p \in V \subseteq W_p$ και το σύνολο $\mathrm{Bd}(V)$ είναι πεπερασμένο.

Από το Θεώρημα 3.2.1 για κάθε $w \in \mathrm{Bd}(W_p)$ υπάρχει σημείο $c_w \in D$ που διαχωρίζει τα σημεία p και w. Επομένως υπάρχουν ανοικτά σύνολα G_w και H_w τέτοια ώστε

$$D \setminus \{c_w\} = G_w \cup H_w, \ p \in G_w, \ w \in H_w, \ G_w \cap H_w = \emptyset.$$

Προφανώς

$$(i) \ \mathrm{Bd}(H_w) = \{c_w\} \text{ και } p \notin \mathrm{Cl}(H_w) = H_w \cup \{c_w\}.$$

Παρατηρούμε ότι η οικογένεια $\{H_w : w \in \mathrm{Bd}(W_p)\}$ αποτελείται από ανοικτά σύνολα και $\mathrm{Bd}(W_p) \subseteq \bigcup_{w \in \mathrm{Bd}(W_p)} H_w$. Επειδή ο D είναι συμπαγής χώρος, ο κλειστός υποχώρος $\mathrm{Bd}(W_p)$ του D είναι συμπαγής. Επομένως

$$(ii) \ \mathrm{Bd}(W_p) \subseteq H_{w_1} \cup ... \cup H_{w_1}, \ w_1, ..., w_n \in \mathrm{Bd}(W_p).$$

Θέτουμε

$$H = H_{w_1} \cup ... \cup H_{w_n}.$$

Τότε

$$\mathrm{Bd}(H) \subseteq \mathrm{Bd}(H_{w_1}) \cup ... \cup \mathrm{Bd}(H_{w_n}) = \{c_{w_1}, ..., c_{w_n}\}.$$

Άρα, το σύνολο $\mathrm{Bd}(H)$ είναι πεπερασμένο.

Θέτουμε $V = W_p \setminus \mathrm{Cl}(H)$. Επειδή, από τις (i),

$$p \notin \mathrm{Cl}(H_{w_1}) \cup ... \cup \mathrm{Cl}(H_{w_n}) = \mathrm{Cl}(H),$$

έπεται ότι

$$p \in V \subseteq W_p.$$

Αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο $\mathrm{Bd}(V)$ είναι πεπερασμένο.
Έχουμε

$$\begin{aligned}\mathrm{Bd}(V) = \mathrm{Cl}(V) \setminus V \subseteq \mathrm{Cl}(W_p) \setminus (W_p \setminus \mathrm{Cl}(H)) &= \\ = (\mathrm{Cl}(W_p) \setminus W_p) \cup (\mathrm{Cl}(W_p) \cap \mathrm{Cl}(H)) &= \\ = \mathrm{Bd}(W_p) \cup (\mathrm{Cl}(W_p) \cap \mathrm{Cl}(H))&\end{aligned}$$

Από τις (ii) έχουμε ότι $\mathrm{Bd}(W_p) \subseteq H$. Συνεπώς

$$\mathrm{Bd}(V) \subseteq H \cup (\mathrm{Cl}(W_p) \cap \mathrm{Cl}(H)) \subseteq H \cup \mathrm{Cl}(H) = \mathrm{Cl}(H)$$

Επειδή το σύνολο H είναι ανοικτό και $H \cap V = \emptyset$, συνεπάγεται ότι $H \cap \mathrm{Cl}(V) = \emptyset$. Επομένως,

$$\mathrm{Bd}(V) \cap H = (\mathrm{Cl}(V) \setminus V) \cap H = \emptyset.$$

Συνεπώς

$$\mathrm{Bd}(V) \subseteq \mathrm{Cl}(H) \setminus H \subseteq \mathrm{Bd}(H).$$

Επειδή το σύνολο $\mathrm{Bd}(H)$ είναι πεπερασμένο, το υποσύνολό του $\mathrm{Bd}(V)$ είναι επίσης πεπερασμένο.

□

Επειδή κάθε κανονικός χώρος είναι μονοδιάστατος, από το Θεώρημα 3.2.2 συμπεραίνουμε ότι

Πόρισμα 3.2.3. *Κάθε δενδρίτης είναι καμπύλη.*

Θεώρημα 3.2.4. *Κάθε δενδρίτης είναι κληρονομικά τοπικά συνεκτικό συνεχές.*

Απόδειξη. Έστω D ένας δενδρίτης, τότε ο D είναι κανονικός. Έστω $Y \subseteq D$ ένα υποσυνεχές του D. Τότε, από το Θεώρημα 2.9.1, ο Y είναι κανονικός χώρος. Επίσης ο Y ως συνεχές είναι συνεκτικός. Συνεπώς, από το Θεώρημα 2.9.2 ο Y είναι τοπικά συνεκτικός. □

Πόρισμα 3.2.5. *Κάθε υποσυνεχές ενός δενδρίτη είναι ένας δενδρίτης.*

Απόδειξη. Έστω D ένας δενδρίτης και Y υποσυνεχές του D. Από το Θεώρημα 3.2.4 το συνεχές U είναι τοπικά συνεκτικό. Αφού ο D δεν περιέχει κλειστές καμπύλες ο Y δεν περιέχει κλειστές καμπύλες. Συνεπώς ο Y είναι δενδρίτης.

□

Ορισμός 3.2.6. Ένας χώρος X καλείται *τοπικά κατά τόξο συνεκτικός* αν για κάθε $x \in X$ και για κάθε σύνολο U τέτοιο ώστε $x \in \mathrm{Int}(U)$ υπάρχει κατά τόξο συνεκτικό σύνολο $V \subseteq U$ τέτοιο ώστε $x \in \mathrm{Int}(V)$.

Θεώρημα 3.2.7. *Κάθε ανοικτό υποσύνολο ενός δενδρίτη είναι τοπικά κατά τόξο συνεκτικό.*

Απόδειξη. Έστω D ένας δενδρίτης και U ένα ανοικτό υποσύνολο του D. Θεωρούμε ένα σημείο $x \in U$. Επειδή ο D είναι τοπικά συνεκτικός για κάθε $\varepsilon >$ υπάρχει ένα ανοικτό συνεκτικό σύνολο V_ε τέτοιο ώστε $x \in V_\varepsilon$ και $\mathrm{Cl}(V_\varepsilon) \subseteq U$. Προφανώς $\mathrm{Cl}(V_\varepsilon)$ είναι συνεχές. Από το Θεώρημα 3.2.4 το συνεχές $\mathrm{Cl}(V_\varepsilon)$ είναι τοπικά συνεκτικό. Άρα, από το Θεώρημα 2.6.3, το $\mathrm{Cl}(V_\varepsilon)$ είναι κατά τόξο συνεκτικό.

□

Ορισμός 3.2.8. Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και $U \subseteq X$. Λέγεται ότι ένα σημείο $p \in X \setminus U$ είναι *κατά τόξο προσβάσιμο* από το U αν υπάρχει τόξο στο $U \cup \{p\}$ με ένα άκρο το σημείο p.

Λήμμα 3.2.9. *Αν U είναι ανοικτό υποσύνολο ενός τοπικά κατά τόξο συνεκτικού χώρου X, τότε το σύνολο όλων των σημείων του $\mathrm{Bd}(U)$ που είναι κατά τόξο προσβάσιμα από το U είναι παντού πυκνό στο $\mathrm{Bd}(U)$.*

Απόδειξη. Έστω $x \in \mathrm{Bd}(U)$ και $\varepsilon > 0$. Επειδή ο X είναι τοπικά κατά τόξο συνεκτικός, υπάρχει σύνολο V τέτοιο ώστε $x \in \mathrm{Int}(V) \subseteq V$, $V \subseteq S(x, \varepsilon)$ και V είναι κατά τόξο συνεκτικό. Επειδή $x \in \mathrm{Bd}(U) \cap \mathrm{Int}(V)$, υπάρχει $y \in U \cap \mathrm{Int}(V)$ τέτοιο ώστε $y \neq x$.

Έστω ότι T είναι το τόξο του V με άκρα τα σημεία x και y. Τότε $T \cap \mathrm{Bd}(U)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του T που περιέχει το σημείο p. Θεωρώντας ότι το τόξο T έχει διάταξη από το x προς το y, μπορούμε να βρούμε ένα σημείο $z \in Bd(U) \cap T$ τέτοιο ώστε το τόξο στο T με άκρα τα σημεία z και y να τέμνει το $\mathrm{Bd}(U)$ στο σημείο z.

Από τα παραπάνω $z \in \mathrm{Bd}(U)$, $z \in\subseteq S(x, \varepsilon)$ και z είναι κατά τόξο προσβάσιμο από το U. Άρα, το σύνολο όλων των σημείων του $\mathrm{Bd}(U)$ που είναι κατά τόξο προσβάσιμα από το U είναι παντού πυκνό στο $\mathrm{Bd}(U)$. □

Θεώρημα 3.2.10. *Κάθε ανοικτό υποσύνολο ενός δενδρίτη είναι κατά τόξο συνεκτικό.*

Απόδειξη. Έστω ότι U είναι μη κενό ανοικτό υποσύνολο ενός δενδρίτη D και $u \in U$. Αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο U είναι ίσο με το σύνολο

$$P_u = \{p \in U : \text{ υπάρχει τόξο από το } p \text{ έως το } u\} \cup \{u\}.$$

Το σύνολο P_u είναι μη κενό αφού περιέχει το σημείο u.

Από το Θεώρημα 3.2.7 το U είναι τοπικά κατά τόξο συνεκτικό. Επομένως για κάθε $y \in U$ υπάρχει κατά τόξο συνεκτικό ανοικτό σύνολο $V_y \subseteq U$, τέτοιο ώστε $y \in V_y$.

Αν $p \in P_u$, τότε κάθε σημείο $x \in V_p$ συνδέεται με ένα τόξο με το p, το οποίο με την σειρά του συνδέεται με ένα τόξο με το u. Άρα, κάθε σημείο του V_p συνδέεται με ένα τόξο με το u, δηλαδή $V_p \subseteq P_u$. Επομένως το σύνολο P_u είναι ανοικτό στο U.

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $y \in U \setminus P_u$. Τότε $V_y \subseteq U \setminus P_u$. Άρα, $U \setminus P_u$ είναι ανοικτό στο U. Τότε όμως το συνεκτικό σύνολο U είναι ένωση ανοικτών μη τεμνόμενων συνόλων $U \setminus P_u$ και P_u, που είναι άτοπο. Άρα, $U \setminus P_u = \emptyset$, δηλαδή $U = P_u$.

□

Λήμμα 3.2.11. *(Nadler [20], σελ. 137) Έστω ότι X είναι ένα συνεχές του Peano και $p \in X$. Αν p δεν είναι σημείο διάσπασης του X, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ανοικτό και συνεκτικό σύνολο U, τέτοιο ώστε*

$$p \in U,\ \mathrm{diam}(U) < \varepsilon \text{ και } X \setminus U \text{ είναι συνεκτικό.}$$

Θεώρημα 3.2.12. *Ένα συνεχές D είναι δενδρίτης αν και μόνον αν κάθε σημείο του D είναι είτε ένα σημείο διάσπασης είτε ένα τελικό σημείο του D.*

Απόδειξη. Έστω ότι D είναι δενδρίτης και e είναι ένα σημείο του D, το οποίο δεν είναι σημείο διάσπασης. Θα δείξουμε ότι e είναι τελικό σημείο του D.

Έστω $\varepsilon > 0$. Από το Λήμμα 3.2.11 υπάρχει ένα συνεκτικό ανοικτό υποσύνολο U_e του D τέτοιο ώστε:

$$e \in U_e,\ \mathrm{diam}(U_e) < \varepsilon \text{ και } X \setminus U_e \text{ είναι συνεκτικό.}$$

Ας υποθέσουμε ότι $|Bd(U_e)| \geq 2$. Τότε, από το Λήμμα 3.2.9 υπάρχουν $q, p \in Bd(U)$ με $q \neq p$ τέτοια ώστε q και p συνδέονται με τόξα με κάποια σημεία του U_e.

Έτσι, αφού το U_e είναι κατά τόξο συνεκτικό από το Θεώρημα 3.2.10, υπάρχει ένα τόξο A στο $U_e \cup \{q, p\}$ από το q στο p. Σημειώνουμε ότι $q, p \in D - U_e$ και ότι, αφού $D - U_e$ είναι συμπαγές και συνεκτικό, το $D - U_e$ είναι ένα συνεχές.

Επειδή ο D, ως δενδρίτης, είναι κληρονομικά τοπικά συνεκτικός, ο υπόχωρος $D - U_e$ είναι συνεχές του Peano. Επομένως, υπάρχει ένα τόξο B στο $D - U_e$ από το q στο p. Προφανώς $A \cup B$ είναι μια απλή κλειστή καμπύλη που περιέχεται στο δενδρίτη D, που είναι άτοπο. Συνεπώς, $|Bd(U_e)| \leq 1$. Άρα, e είναι ένα τελικό σημείο του D.

Αντιστρόφως, έστω ότι D είναι ένα συνεχές τέτοιο ώστε κάθε σημείο του D είναι ένα σημείο διάσπασης του D είτε ένα τελικό σημείο του D.

Ας υποθέσουμε ότι D δεν είναι τοπικά συνεκτικό. Τότε από το Θεώρημα 2.5.2 το D περιέχει ένα μη αριθμήσιμο συνεχές σύγκλισης K που αποτελείται από σημεία στα οποία το D δεν είναι τοπικά συνεκτικό. Επειδή σε κάθε τελικό σημείο το D είναι τοπικά συνεκτικό (βλ. την απόδειξη του Θεωρήματος 2.9.2), το K αποτελείται από σημεία διάσπασης του D. Αυτό όμως είναι άτοπο, αφού σύμφωνα με το Πόρισμα 2.5.1, το K περιέχει το πολύ αριθμήσιμο πλήθος σημείων διάσπασης του D. Συνεπώς το συνεχές D είναι τοπικά συνεκτικό.

Ας υποθέσουμε ότι το D περιέχει μια απλή κλειστή καμπύλη Z. Τότε κανένα σημείο της Z δεν μπορεί να είναι ένα τελικό σημείο του D. Για αυτό, από την υπόθεσή μας, κάθε σημείο της Z είναι ένα σημείο διάσπασης του D. Άρα, υπάρχει σημείο διάσπασης του Z. Αυτό όμως είναι αδύνατον (αφού μια απλή κλειστή καμπύλη δεν έχει σημείο διάσπασης). Για αυτό το D δεν περιέχει καμία απλή κλειστή καμπύλη. Συνεπώς το D είναι ένας δενδρίτης. □

Θεώρημα 3.2.13. *Ένα συνεχές D είναι δενδρίτης αν και μόνον αν κάθε υποσυνεχές του D περιέχει μη αριθμήσιμο πλήθος σημείων διάσπασης.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι D είναι ένας δενδρίτης. Έστω Ψ ένα μη τετριμμένο υποσυνεχές του D. Τότε, από το Πόρισμα 3.2.5, ο υπόχωρος Ψ είναι δενδρίτης. Άρα ο Ψ είναι κατά τόξο συνεκτικός. Έστω $p, q \in \Psi$, $p \neq q$, και A ένα τόξο του Ψ με άκρα p και q. Αν $r \in A - \{p, q\}$, τότε $ord(r, A) = 2$. Άρα, $\operatorname{ord}(r, D) \geq 2$. Επομένως από το Θεώρημα 3.2.12 το r είναι ένα σημείο διάσπασης του D. Επομένως το A, και άρα και το Ψ, περιέχει μη αριθμήσιμο πλήθος σημείων του D.

Αντιστρόφως, υποθέτουμε ότι κάθε μη τετριμμένο συνεκτικό υποσυνεχές του D περιέχει μη αριθμήσιμα σημεία διάσπασης του D. Ας υποθέσουμε ότι το συνεχές D δεν είναι τοπικά συνεκτικό. Τότε από το Θεώρημα 2.5.2 το D περιέχει ένα μη αριθμήσιμο συνεχές σύγκλισης K που αποτελείται από σημεία στα οποία το D δεν είναι τοπικά συνεκτικό. Από το Πόρισμα 2.5.1 το K περιέχει το πολύ αριθμήσιμο πλήθος σημείων διάσπασης του D, που είναι άτοπο. Άρα, το D είναι τοπικά συνεκτικό.

Ας υποθέσουμε ότι το συνεχές D περιέχει μια απλή κλειστή καμπύλη Z. Τότε από την υπόθεση η Z περιέχει μη αριθμήσιμο πλήθος σημείων διάσπασης του D. Έτσι υπάρχει ένα σημείο διάσπασης της Z, που είναι αδύνατον. Έτσι, το D δεν περιέχει μια απλή κλειστή καμπύλη. Συνεπώς, το συνεχές D είναι ένας δενδρίτης.

□

Θεώρημα 3.2.14. *Κάθε συνεκτικό υποσύνολο ενός δενδρίτη είναι κατά τόξο συνεκτικό.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι C είναι ένα μη τετριμμένο συνεκτικό υποσύνολο ενός δενδρίτη D. Ας πάρουμε $p, q \in C$ έτσι ώστε $p \neq q$. Προφανώς $\mathrm{Cl}(C)$ είναι ένας δενδρίτης. Για αυτό υπάρχει ένα τόξο A στο $\mathrm{Cl}(C)$ από p στο q.

Αρκεί να δείξουμε ότι $A \subset C$. Έστω $x \in \mathrm{Cl}(C) - C$. Επειδή το σύνολο C είναι συνεκτικό και $C \subseteq C \cup \{x\} \subseteq \mathrm{Cl}(C)$, το σύνολο $C \cup \{x\}$ είναι συνεκτικό, άρα x δεν είναι σημείο διάσπασης του $\mathrm{Cl}(C)$.

Έτσι, αφού $\mathrm{Cl}(C)$ είναι ένας δενδρίτης, από το Θεώρημα 3.2.12 έπεται ότι κάθε σημείο του $\mathrm{Cl}(C) \setminus C$ είναι ένα τελικό σημείο του $\mathrm{Cl}(C)$.

Τα μόνα σημεία του τόξου $A \subseteq \mathrm{Cl}(C)$, τα οποία μπορούν να ειναι τελικά σημεία του $\mathrm{Cl}(C)$ είναι τα άκρα p και q. Αφού $p, q \in C$, έχουμε ότι: $A \cap (\mathrm{Cl}(C) \setminus C) = \emptyset$. Άρα, $A \subseteq C$.

□

Λήμμα 3.2.15. *Αν X είναι ένα τοπικά συνεκτικό συνεχές, U είναι γνήσιο ανοικτό υποσύνολο του X και S είναι μια συνεκτική συνιστώσα του U, τότε $(X \setminus U) \cap \mathrm{Cl}(S) \neq \emptyset$.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 2.3.1 το σύνολο S είναι ανοικτό στο X.

Ας υποθέσουμε ότι, αντίθετα, $(X \setminus U) \cap \mathrm{Cl}(S) = \emptyset$. Τότε $\mathrm{Cl}(S) \subseteq U$. Επειδή S είναι κλειστό στον υπόχωρο U προκύπτει ότι

$$S = \mathrm{Cl}_U(S) = \mathrm{Cl}(S) \cap U = \mathrm{Cl}(S),$$

δηλαδή S είναι κλειστό στο X.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι ο συνεκτικός χώρος X περιέχει ένα γνήσιο ανοικτό και κλειστό σύνολο S, που είναι άτοπο.

$\square$

Θεώρημα 3.2.16. *Το σύνολο όλων των σημείων διακλάδωσης ενός δενδρίτη είναι αριθμήσιμο.*

Απόδειξη. Έστω ότι D είναι ένας δενδρίτης. Ας υποθέσουμε, αντίθετα ότι το σύνολο $R(D)$ των σημείων διακλάδωσης του D είναι μη αριθμήσιμο Από το θεώρημα 3.2.1 το σύνολο $R(D)$ αποτελείται από σημεία διάσπασης του D.

Από το Θεώρημα 2.2.1 προκύπτει ότι υπάρχουν $p, q \in D$ και ένα μη αριθμήσιμο σύνολο $A \subseteq R(D)$ τέτοιο ώστε:

$$\text{κάθε } a \in A \text{ διαχωρίζει τα σημεία } p \text{ και } q \text{ στο } D. \tag{3.1}$$

Επειδή ο χώρος D ως δενδρίτης είναι κατά τόξο συνεκτικός, υπάρχει τόξο pq του D με άκρα p και q. Κάθε σημείο του D που διαχωρίζει το p από το q στο D ανήκει στο pq. Άρα

$$A \subseteq pq \setminus \{p, q\}. \tag{3.2}$$

Έστω $a \in A$. Τότε $a \in R(D)$. Επομένως $\mathrm{ord}(a, D) \geq 3$. Από Θεώρημα 3.2.19 το σύνολο $D \setminus \{a\}$ περιέχει τουλάχιστον 3 συνιστώσες. Επειδή το σύνολο $pq \setminus \{a\}$ έχει ακριβώς δύο συνιστώσες, συνεπάγεται ότι υπάρχει συνιστώσα S_a του $D \setminus \{a\}$ τέτοια ώστε $S_a \cap pq = \emptyset$.

Επειδή το σύνολο $D \setminus \{a\}$ είναι ανοικτό και S_a είναι συνεκτική συνιστώσα του $D \setminus \{a\}$, από το Λήμμα 3.2.15 προκύπτει ότι $\mathrm{Cl}(S_a) \cap \{a\} \neq \emptyset$. Άρα, $a \in \mathrm{Cl}(S_a)$.

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $a^* \in \mathrm{Cl}(S_a) \cap pq$ τέτοιο ώστε $a^* \neq a$.

Επειδή S_a είναι συνεκτικό και $S_a \subseteq S_a \cup \{a^*\} \subseteq \mathrm{Cl}(S_a)$, το $S_a \cup \{a^*\}$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του $D \setminus \{a\}$. Άρα, $a^* \in S_a$, που είναι άτοπο.

Συνεπώς

$$(\mathrm{Cl}(S_a) \setminus S_a) \cap pq = \{a\}, \forall a \in A. \tag{3.3}$$

Έστω $a \neq a^*$ και $S_a \cap S_{a^*} \neq \emptyset$. Επειδή η τομή δύο συνεκτικών υποσυνόλων ενός δενδρίτη είναι συνεκτική, το σύνολο $S_a \cap S_{a^*}$ είναι συνεκτικό.

Έστω $w \in S_a \cap S_{a^*}$. Επειδή $\mathrm{Cl}(S_a)$ και $\mathrm{Cl}(S_{a^*})$ είναι δενδρίτες που περιέχουν το σημείο w, υπάρχουν τόξα $wa \subseteq \mathrm{Cl}(S_a)$ και $wa^* \subseteq \mathrm{Cl}(S_{a^*})$. Η ένωση $wa \cup wa^*$ των τόξων περιέχει ένα τόξο $T_1(aa^*)$ με άκρα τα σημεία a και a^*. Προφανώς $aa^* \cap pq = \{a, a^*\}$.

Έστω $T_2(aa^*)$ το τόξο με άκρα τα σημεία a και a^* που περιέχεται στο pq. Τότε ο δενδρίτης D περιέχει μια απλή κλειστή καμπύλη $T_1(aa^*) \cup T_2(aa^*)$, που είναι άτοπο.

Συνεπώς $\{S_a\}_{a \in A}$ είναι μη αριθμήσιμη οικογένεια ξένων ανά δύο ανοικτών υποσυνόλων του D, που είναι άτοπο, αφού ο D είναι διαχωρίσιμος. $\square$

Θεώρημα 3.2.17. *Σε κάθε δενδρίτη D το σύνολο των σημείων x με $\operatorname{ord}(x, D) = 2$ είναι παντού πυκνό.*

Απόδειξη. Θέτουμε

$$D^{[2]} = \{x \in D : \operatorname{ord}(x, D) = 2\}.$$

Έστω U ανοικτό υποσύνολο του D. Θεωρούμε δύο σημεία $x, y \in U$. Από το Θεώρημα 3.2.10 το U περιέχει τόξο xy με άκρα x και y.

Κάθε σημείο του ανοικτού τόξου $xy \setminus \{x, y\}$ είναι της τάξης ≥ 2 στο D. Επειδή, από το Θεώρημα 3.2.16, το σύνολο $R(D)$ των σημείων τάξης ≥ 3 είναι αριθμήσιμο, συνεπάγεται ότι το μη αριθμήσιμο σύνολο $xy \setminus \{x, y\} \setminus R(D)$ αποτελείται από τα σημεία τάξης 2. Συνεπώς $U \cap D^{[2]} \neq \emptyset$. Άρα, $D^{[2]}$ είναι παντού πυκνό στο D.

$\square$

Θεώρημα 3.2.18. *Ένα συνεχές D είναι δενδρίτης αν και μόνον αν η τομή οποιωνδήποτε δύο συνεκτικών υποσυνόλων του D είναι συνεκτική.*

Απόδειξη. Έστω D ένας δενδρίτης. Αντίθετα, ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν συνεκτικά υποσύνολα C_1 και C_2 του D έτσι ώστε $C_1 \cap C_2$ να μην είναι συνεκτική. Τότε το $C_1 \cap C_2$ έχει τουλάχιστον δύο συνεκτικές συνιστώσες P και Q. Έστω $p \in P$ και $q \in Q$. Από το θεώρημα 3.2.14 υπάρχουν τόξα A_1 και A_2 με τα ίδια άκρα p και q τέτοια ώστε:

$A_1 = pq \subseteq C_1$ και $A_2 = pq \subseteq C_2$.

Η τομή των τόξων $A_1 \cap A_2$ είναι μη συνεκτική, διαφορετικά $p, q \in A_1 = A_2 \subseteq C_1 \cap C_2$, οπότε p και q ανήκουν στην ίδια συνεκτική συνιστώσα του $C_1 \cap C_2$.

Για αυτό το λόγο, $A_1 \cup A_2$ περιέχει μια απλή κλειστή καμπύλη. Αυτό όμως αντιφάσκει στην υπόθεση ότι το D είναι ένας δενδρίτης.

Αντιστρόφως, ας υποθέσουμε ότι η τομή οποιωνδήποτε δύο συνεκτικών υποσυνόλων του D είναι συνεκτική. Τότε ο D δεν περιέχει απλή κλειστή καμπύλη. Αρκεί να δείξουμε ότι ο D είναι τοπικά συνεκτικός.

Έστω, αντίθετα ότι, το συνεχές D δεν είναι τοπικά συνεκτικός. Τότε, από το Θεώρημα 2.5.2 ο D περιέχει ένα συνεχές σύγκλισης K. Από το Θεώρημα 2.2.2 υπάρχει μη αριθμήσιμη οικογένεια $\mathcal{G}$ αμοιβαία διαζευγμένων κλειστών υποσυνόλων του D που διαχωρίζουν το K. Από το Θεώρημα 2.5.2 υπάρχει $G \in \mathcal{G}$ που δεν διαχωρίζει το D (διαφορετικά το συνεχές σύγκλισης K θα περιείχε την ένωση των στοιχείων μιας μη αριθμήσιμης οικογένειας $\mathcal{G}$ αμοιβαία διαζευγμένων κλειστών υποσυνόλων που διαχωρίζουν το D). Άρα, το σύνολο $D \setminus G$ είναι συνεκτικό. Τότε όμως το σύνολο $K \cap (D - G)$ είναι συνεκτικό, ως τομή δυο συνεκτικών συνόλων.

Ωστόσο, αυτό είναι αδύνατο αφού $K \cap (D - G) = K - G$ και G είναι ένα από τα στοιχεία της μη αριθμήσιμης οικογένειας $\mathcal{G}$, η οποία αποτελείται από σύνολα που διαχωρίζουν το K. Άρα, ο D είναι τοπικά συνεκτικός.

$\square$

Θεώρημα 3.2.19. *Έστω X ένα τοπικά συνεκτικό συνεχές που περιέχει περισσότερα του ενός σημεία και $x \in X$. Αν $\operatorname{ord}(x, X)$ είναι πεπερασμένο, τότε το πλήθος $c(x, X)$ των συνιστωσών του $X \setminus \{x\}$ είναι πεπερασμένο. Επιπλέον,*

$$c(x, X) \leq \operatorname{ord}(x, X).$$

Απόδειξη. Έστω ότι $\operatorname{ord}(x, X) = n < \infty$.

Ας υποθέσουμε ότι, αντίθετα, $c(x, X) > n$. Τότε το σύνολο $X \setminus \{x\}$ περιέχει τουλάχιστον $n+1$ συνεκτικές συνιστώσες $S_1, \cdots, S_{n+1}$.

Από το Λήμμα 3.2.15, $x \in \operatorname{Cl}(S_i)$ για κάθε i.

Για κάθε i διαλέγουμε $s_i \in S_i$.

Έστω ότι d είναι μια μετρική του X και

$$\varepsilon < \min\{d(x, s_i) : i \in \{1, ..., n+1\}\}.$$

Έστω $i \in \{1, ..., n+1\}$. Τότε

$$s_i \in X \setminus S(x, \varepsilon) \subseteq X \setminus \operatorname{Cl}\left(S\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right)\right).$$

Έστω U μια τυχαία ανοικτή περιοχή του x τέτοια ώστε $\operatorname{Cl}(U) \subseteq S\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Τότε

$$s_i \in X \setminus \operatorname{Cl}(U).$$

Συνεπώς

$$S_i \cap U \neq \emptyset \text{ και } S_i \cap (X \setminus \operatorname{Cl}(U)) \neq \emptyset.$$

Επειδή κάθε S_i είναι συνεκτικό και $\operatorname{Bd}(U) = \operatorname{Cl}(U) \setminus U$ έπεται ότι $\operatorname{Bd}(U) \cap S_i \neq \emptyset$ για κάθε i.

Αφού $S_i \cap S_j = \emptyset$ όταν $i \neq j$, συμπεραίνουμε ότι $|\operatorname{Bd}(U)| \geq n+1$. Άρα, η ανοικτή περιοχή $S\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ του x δεν περιέχει καμία ανοικτή περιοχή U για την οποία $|\operatorname{Bd}(U)| \leq n$. Οπότε $\operatorname{ord}(x, X) \geq n+1$, που είναι άτοπο. Άρα, $c(x, X) \leq n$.

□

Θεώρημα 3.2.20. *Ένα συνεχές D που περιέχει περισσότερα του ενός σημεία είναι δενδρίτης αν και μόνον αν σε κάθε σημείο $x \in D$ στο οποίο οποιοσδήποτε από τους πληθάριθμους $c(x, D)$ ή $\operatorname{ord}(x, D)$ είναι πεπερασμένος ισχύει $c(x, D) = \operatorname{ord}(x, D)$.*

Απόδειξη. Αν $c(x, X) = \operatorname{ord}(x, X)$ σε κάθε σημείο $x \in D$ στο οποίο οποιοσδήποτε από τους πληθάριθμους $c(x, D)$ ή $\operatorname{ord}(x, D)$ είναι πεπερασμένος, τότε σε κάθε σημείο x που δεν είναι σημείο διάσπασης ισχύει $c(x, D) = 1 = \operatorname{ord}(x, D)$. Επομένως κάθε σημείο του D που δεν είναι σημείο διάσπασης είναι τελικό. Άρα, από το Θεώρημα 3.2.12 το συνεχές D είναι δενδρίτης.

Αντιστρόφως, ας υποθέσουμε ότι D είναι ένας δενδρίτης και $x \in D$. Έστω ότι ο πληθάριθμος $\operatorname{ord}(x, D)$ είναι πεπερασμένος. Τότε από το Θεώρημα 3.2.19 ο πληθάριθμος

$c(x, D)$ είναι πεπερασμένος. Αρκεί να δείξουμε ότι αν ο πληθάριθμος $c(x, D)$ είναι πεπερασμένος, τότε $c(x, X) = \mathrm{ord}(x, X)$.

Έστω ότι $c(x, X) = n$ και $S_1, \cdots, S_n$ είναι οι συνεκτικές συνιστώσες του $D \setminus \{x\}$. Τότε, από το Λήμμα 3.2.15, $\mathrm{Cl}(S_i) \cap \{x\} \neq \emptyset$ για κάθε $i = 1, ..., n$. Επειδή $x \notin S_i$, προκύπτει ότι $x \in \mathrm{Cl}(S_i) \setminus S_i$. Αφού S_i είναι συνεκτικό και $S_i \subseteq S_i \cup \{x\} \subseteq \mathrm{Cl}(S_i)$, συνεπάγεται ότι κάθε $S_i \cup \{x\}$ είναι ένα συνεχές. Άρα, από το Πόρισμα 3.2.5, κάθε $S_i \cup \{x\}$ είναι ένας δενδρίτης.

Επιπλέον, αφού τα σύνολα S_i είναι συνεκτικά, το σημείο x δεν είναι σημείο διάσπασης κανενός από τους δενδρίτες $S_i \cup \{x\}$. Άρα, από το Θεώρημα 3.2.12, x είναι τελικό σημείο του κάθε $S_i \cup \{x\}$.

Έστω U ανοικτή περιοχή του x στο D και $i \in \{1, ..., n\}$. Αφού το x είναι τελικό σημείο του $S_i \cup \{x\}$ υπάρχει ανοικτό στο $S_i \cup \{x\}$ σύνολο U_i τέτοιο ώστε

$$x \in U_i \subseteq U \text{ και } |\mathrm{Bd}_{S_i \cup \{x\}}(U_i))| = 1.$$

Θέτουμε $V = D \setminus \bigcup_{i=1}^{n} (S_i \setminus U_i)$. Προφανώς V είναι ανοικτό στο D, $x \in V \subseteq U$ και $|\mathrm{Bd}(V)| = n$. Άρα, $\mathrm{ord}(x, D) = n = c(x, D)$.

□

Θεώρημα 3.2.21. *Ένα συνεχές D είναι δενδρίτης αν και μόνον αν κάθε υποσυνεχές του D περιλαμβάνει μη αριθμήσιμο πλήθος σημείων διάσπασης του D.*

Απόδειξη. Έστω K υποσυνεχές ενός δενδρίτη D. Τότε K είναι ένας δενδρίτης. Από το Θεώρημα 3.2.13 το K περιέχει μη αριθμήσιμο πλήθος σημείων διάσπασης. Από το 3.2.12 το σύνολο των σημείων διάσπασης του K είναι το $K \setminus E(K)$. Επομένως το σύνολο $K \setminus E(K)$ είναι μη αριθμήσιμο.

Επειδή $K \cap E(D) \subseteq E(K)$ προκύπτει ότι

$$K \setminus E(K) \subseteq K \setminus K \cap E(D).$$

Το σύνολο $K \setminus K \cap E(D)$ αποτελείται από τα σημεία διάσπασης του D. Άρα, το σύνολο $K \setminus K \cap E(D)$ είναι μη αριθμήσιμο.

Αντιστρόφως, έστω ότι κάθε υποσυνεχές του D περιλαμβάνει μη αριθμήσιμο πλήθος σημείων διάσπασης. Τότε, από το Θεώρημα 2.5.1, ο D δεν περιέχει κανένα συνεχές σύγκλισης. Άρα, από το Θεώρημα 2.5.2 ο D είναι τοπικά συνεκτικό.

Μια απλή κλειστή καμπύλη ενός τοπικά συνεκτικού χώρου μπορεί να περιέχει μόνο αριθμήσιμο πλήθος σημείων διάσπασης του χώρου. Επειδή κάθε υποσυνεχές του D περιλαμβάνει μη αριθμήσιμο πλήθος σημείων διάσπασης του D, ο D δεν περιέχει απλές κλειστές καμπύλες.

□

Ορισμός 3.2.22. Ένας συνεκτικός χώρος X καλείται *μονοσυνδεδεμένος* (unicoherent) αν για οποιαδήποτε κλειστά και συνεκτικά υποσύνολα M και N τέτοια ώστε $X = M \cup N$ το σύνολο $M \cap N$ είναι συνεκτικό.

Ένας συνεκτικός χώρος X καλείται *κληρονομικά μονοσυνδεδεμένος* αν κάθε συνεκτικός και κλειστός υπόχωρος του X είναι μονοσυνδεδεμένος.

Θεώρημα 3.2.23. *Ένα συνεχές του Peano είναι δενδρίτης αν και μόνον αν είναι κληρονομικά μονοσυνδεδεμένο.*

Απόδειξη. Έστω D ένας δενδρίτης. Αν $D = M \cup N$, όπου M και N είναι κλειστά και συνεκτικά υποσύνολα του D, τότε από το Θεώρημα 3.2.18 το σύνολο $M \cap N$ είναι συνεκτικό. Επομένως ο D είναι μονοσυνδεδεμένος. Κάθε συνεκτικός και κλειστός υπόχωρος του D είναι δενδρίτης, άρα το συνεχές D είναι κληρονομικά μονοσυνδεδεμένο.

Αντιστρόφως, ας υποθέσουμε ότι D είναι κληρονομικά μονοσυνδεδεμένο συνεχές του Peano. Τότε το D δεν περιέχει καμιά κλειστή καμπύλη, επειδή η κλειστή καμπύλη δεν είναι μονοσυνδεδεμένος χώρος. Άρα, το συνεχές D είναι δενδρίτης.

$\square$

Κεφάλαιο 4

Προσέγγιση δενδριτών με δέντρα

Στο Κεφάλαιο αυτό θα αποδείξουμε ότι κάθε δενδρίτης D είναι τοπολογικό όριο ακολουθίας δένδρων που περιέχονται στο D. Θα δείξουμε ότι αν ένας δενδρίτης D_1 περιέχεται σε έναν δενδρίτη D_2, τότε ο D_1 είναι συρρίκνωμα του D_2. Τέλος, θα αποδείξουμε ότι κάθε δενδρίτης έχει την ιδιότητα του σταθερού σημείου.

4.1 Απεικόνιση αρχικού σημείου

Έστω D ένας δενδρίτης. Για δύο διαφορετικά σημεία $x, y \in D$ συμβολίζουμε με xy το μοναδικό τόξο του D με άκρα τα σημεία x και y.

Θεώρημα 4.1.1. *Έστω X δενδρίτης και Y ένα υποσυνεχές του X. Τότε για κάθε $x \in X \setminus Y$, υπάρχει μοναδικό σημείο $\widetilde{x} \in Y$ τέτοιο ώστε $\widetilde{x} \in xy$ για κάθε $y \in Y$. (Το σημείο $\widetilde{x}$ ανήκει σε οποιοδήποτε τόξο από το x σε οποιοδήποτε σημείο του Y.)*

Απόδειξη. Έστω $x \in X \setminus Y$ και $p \in Y$. Επειδή ο X είναι κατά τόξο συνεκτικός χώρος, υπάρχει τόξο $xp \subseteq X$. Ας υποθέσουμε ότι το τόξο xp είναι διατεταγμένο με τέτοιο τρόπο ώστε $x \leq p$.

Από το Θεώρημα 3.2.18 το σύνολο $xp \cap Y$ είναι συνεκτικό. Επειδή τα σύνολα xp και Y είναι συμπαγή, το σύνολο $xp \cap Y$ είναι κλειστό. Συνεπώς, είτε το σύνολο $xp \cap Y$ είναι ένα τόξο $\widetilde{p}p$, όπου $x < \widetilde{p} < p$, είτε $\widetilde{p} = p$. Σε κάθε περίπτωση $x\widetilde{p} \cap Y = \{\widetilde{p}\}$.

Έστω $q \in X \setminus Y$ και $q \neq p$. Όμοια αποδεικνύεται ότι υπάρχει $\widetilde{q} \in Y$, τέτοιο ώστε $x\widetilde{q} \cap Y = \{\widetilde{q}\}$.

Ας υποθέσουμε ότι $\widetilde{q} \neq \widetilde{p}$. Επειδή ο υπόχωρος Y ως δενδρίτης είναι κατά τόξο συνεκτικός, υπάρχει τόξο $\widetilde{p}\widetilde{q} \subseteq Y$. Από την άλλη μεριά, το συνεκτικό υποσύνολο $x\widetilde{p} \cap x\widetilde{q}$ του τόξου $x\widetilde{p}$ είτε είναι $\{x\}$, είτε είναι ένα τόξο xr. Στην δεύτερη περίπτωση $r \in R(X)$ και $r\widetilde{q} \cap r\widetilde{q} = \emptyset$. Σε κάθε περίπτωση υπάρχει τόξο $\widetilde{p}\widetilde{q} \subseteq X \setminus Y$.

Από τα παραπάνω συνεπάγεται ότι υπάρχουν δύο τόξα στο X που συνδέουν τα σημεία $\widetilde{p}$ και $\widetilde{q}$, τα οποία τέμνονται μόνο στα άκρα τους. Δηλαδή ο X περιέχει απλή κλειστή καμπύλη, που είναι άτοπο. Άρα, $\widetilde{p} = \widetilde{q}$.

Θέτουμε $\widetilde{x} = \widetilde{p}$. Τότε $\widetilde{x}$ είναι το ζητούμενο σημείο. □

Ορισμός 4.1.2. Έστω X ένας δενδρίτης και έστω Y ένα υποσυνεχές του X.

Για κάθε $x \in X \setminus Y$ συμβολίζουμε με $\widetilde{x}$ το μοναδικό (σύμφωνα με το Θεώρημα 4.1.1) σημείο του Y τέτοιο ώστε $\widetilde{x} \in xy$ για κάθε $y \in Y$.

Ορίζουμε $r : X \to Y$ ως εξής

$$r(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } x \in Y \\ \widetilde{x}, & \text{αν } x \in X \setminus Y. \end{cases}$$

Η απεικόνιση r καλείται *απεικόνιση αρχικού σημείου* για το Y.

Θεώρημα 4.1.3. *Για κάθε δενδρίτη X και για κάθε υποσυνεχές Y του X η απεικόνιση αρχικού σημείου $r : X \to Y$ είναι συνεχής.*

Απόδειξη. Έστω $x \in X$ και U ανοικτό υποσύνολο του Y που περιέχει το σημείο $r(x)$.

Αν $x \in \mathrm{Int}(Y)$, τότε $x = r(x)$ και το σύνολο $V = U \cap \mathrm{Int}(Y)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X που περιέχει το σημείο x. Επειδή $V \subseteq Y$, έπεται ότι $r(V) = V$. Επομένως $r(V) \subseteq U$. Άρα, η r είναι συνεχής στο x.

Έστω ότι $x \in X \setminus Y$. Συμβολίζουμε $\widetilde{x} = r(x)$. Επειδή ο υπόχωρος Y είναι συμπαγής, το σύνολο $X \setminus Y$ είναι ανοικτό στο X. Θεωρούμε τη συνεκτική συνιστώσα V του $X \setminus Y$ που περιέχει το σημείο x.

Επειδή ο X, ως δενδρίτης, είναι τοπικά συνεκτικός, από το Θεώρημα 2.3.1, συνεπάγεται ότι το σύνολο V είναι ανοικτό στο X. Επομένως, από το Θεώρημα 2.6.4, ο υπόχωρος V είναι κατά τόξο συνεκτικός. Άρα, για κάθε $a \in V \setminus \{x\}$ είτε $a \in x\widetilde{x}$, είτε $x \in a\widetilde{x}$. Άρα, $r(x) = r(a)$. Συνεπώς, $r(V) = \{r(x)\} \subseteq U$, δηλαδή η r είναι συνεχής στο x.

Έστω ότι $x \in Y \setminus \mathrm{Int}(Y)$ και U^* είναι ανοικτό υποσύνολο του X τέτοιο ώστε $U = U^* \cap Y$. Επειδή ο X είναι τοπικά συνεκτικός και $x = r(x) \in U^*$, υπάρχει ανοικτό και συνεκτικό υποσύνολο W του X τέτοιο ώστε $x \in W \subseteq U^*$. Αρκεί να δείξουμε ότι $r(W) \subset W$, οπότε

$$r(W) \subset W \cap Y \subseteq U^* \cap Y \subseteq U,$$

δηλαδή η απεικόνιση r είναι συνεχής στο x.

Πράγματι, αν $a \in W \cap Y$, τότε $r(a) = a \in W$. Έστω ότι $a \in W \setminus Y$. Επειδή $x \in \mathrm{Cl}(Y)$ και $x \in W$, έπεται ότι $W \cap Y \neq \emptyset$. Έστω ότι $y \in W \cap Y$. Από το Θεώρημα 2.6.4, ο υπόχωρος W είναι κατά τόξο συνεκτικός. Άρα, $r(a) \in ay \subseteq W$. □

Ορισμός 4.1.4. Έστω ότι X και Y είναι τοπολογικοί χώροι. Μια συνεχής και επί απεικόνιση $f : X \to Y$ καλείται *μονότονη* αν για κάθε $y \in Y$ το σύνολο $f^{-1}(y)$ είναι συνεκτικό.

Ορισμός 4.1.5. Ένας υπόχωρος Y ενός τοπολογικού χώρου X καλείται *μονότονο συρρίκνωμα* του X αν υπάρχει μονότονη απεικόνιση $\mu : X \to Y$ τέτοια ώστε $\mu(y) = y$ για κάθε $y \in Y$.

Θεώρημα 4.1.6. *Κάθε υποσυνεχές ενός δενδρίτη είναι μονότονο συρρίκνωμά του.*

Απόδειξη. Έστω ότι Y είναι υποσυνεχές ενός δενδρίτη D.

Από το Θεώρημα 4.1.3 η απεικόνιση αρχικού σημείου $r : D \to Y$ είναι συνεχής. Επίσης $r(y) = y$ για κάθε $y \in Y$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η r είναι μονότονη.

Έστω $y \in Y$. Επειδή ο περιορισμός της r στο Y είναι ταυτοτική απεικόνιση, έχουμε ότι $r^{-1}(y) \cap Y = \{y\}$. Άρα, $r^{-1}(y)$ είναι συνεκτικό σύνολο στην περίπτωση που $r^{-1}(y) \cap (D \setminus Y) = \emptyset$.

Ας υποθέσουμε ότι $r^{-1}(y) \cap (D \setminus Y) \neq \emptyset$. Τότε, από το Θεώρημα 4.1.1, για οποιαδήποτε $p, q \in r^{-1}(y) \cap (D \setminus Y)$ το σημείο y ανήκει σε οποιοδήποτε τόξο από το p σε οποιοδήποτε σημείο του Y και σε οποιοδήποτε τόξο από το q σε οποιοδήποτε σημείο του Y. Άρα, $py \subseteq r^{-1}(y)$ και $qy \subseteq r^{-1}(y)$. Η ένωση τόξων $py \cup qy$ περιέχει τόξο pq με άκρα p και q. Προφανώς $pq \subseteq r^{-1}(y)$. Συνεπώς το σύνολο $r^{-1}(y)$ είναι κατά τόξο συνεκτικό, άρα το σύνολο $r^{-1}(y)$ είναι συνεκτικό. □

4.2 Δένδρα

Ορισμός 4.2.1. Ένα γράφημα G καλείται *δένδρο* αν το G δεν περιέχει απλές κλειστές καμπύλες.

Πρόταση 4.2.2. *Κάθε δένδρο είναι δενδρίτης.*

Απόδειξη. Έστω T ένα δένδρο. Τότε το T δεν περιέχει απλές κλειστές καμπύλες. Αρκεί να δείξουμε ότι ο χώρος T είναι τοπικά συνεκτικός.

Από τον ορισμό του δένδρου, ο χώρος T είναι συνεχές που μπορεί να γραφεί ως ένωση πεπερασμένου πλήθους τόξων, οποιαδήποτε δύο από τα οποία ή δεν τέμνονται ή τέμνονται μόνο σε ένα από τα άκρα τους. Άρα, σε κάθε σημείο $x \in T$ υπάρχει τοπική βάση αποτελούμενη από ανοικτά σύνολα με πεπερασμένα σύνορα. Επομένως ο χώρος T είναι κανονικός. Από το Θεώρημα 2.9.2 ο T είναι τοπικά συνεκτικός.

□

Θεώρημα 4.2.2. *Για κάθε δένδρο T υπάρχει πεπερασμένη οικογένεια δένδρων $\{T_i\}_{i=1}^{n}$, τέτοια ώστε*

(i) $T_1 = \{p_1\}$, *όπου* p_1 *τελικό σημείο του* T,

(ii) για κάθε $i > 1$ *υπάρχει τόξο* A_i *τέτοιο ώστε* $T_i = T_{i-1} \cup A_i$ *και* $T_{i-1} \cap A_i$ *είναι τελικό σημείο του* A_i,

(iii) $T = T_n$.

Απόδειξη. Έστω $p_1q_1, ..., p_nq_n$ είναι τόξα τέτοια ώστε $T = p_1q_1 \cup ... \cup p_nq_n$ και οποιαδήποτε δύο από τα οποία ή δεν τέμνονται ή τέμνονται μόνο σε ένα από τα άκρα τους. Αν T είναι ένα τόξο p_1q_1, τότε θέτουμε $T_1 = \{p\}$ και $T = T_2 = p_1q_1$.

Ας υποθέσουμε ότι το T δεν είναι τόξο, τότε $n \geq 3$.

Για $n = 3$, έχουμε $T = p_1q_1 \cup p_2q_2 \cup p_3q_3$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $q_1 = q_2 = q_3$. Θέτουμε

$$T_1 = \{p_1\},\ T_2 = p_1q_1 \cup p_2q_2,\ T_3 = p_1q_1 \cup p_2q_2 \cup p_3q_3.$$

Ας υποθέσουμε ότι $n_0 > 3$ και το Θεώρημα ισχύει για $n = n_0 - 1$. Τότε $T = (p_1q_1 \cup ... \cup p_{n-1}q_{n-1}) \cup p_nq_n = T_{n-1} \cup p_nq_n$, όπου $p_nq_n \cap T_{n-1}$ είναι τελικό σημείο του p_nq_n. Θέτουμε $T = T_n$.

□

4.3 Δενδρίτης ως όριο ακολουθίας δένδρων

Ορισμός 4.3.1. Έστω X ένας μετρικός χώρος και $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ μια ακολουθία υποσυνόλων του X. Ορίζουμε το *άνω όριο* $\overline{\lim} Y_i$ και το *κάτω όριο* $\underline{\lim} Y_i$ της $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ ως εξής:

$$\overline{\lim}\ Y_i = \{x \in X : \forall \varepsilon > 0, \exists i_0,\ \text{έτσι ώστε}\ S(x,\varepsilon) \cap Y_i \neq \emptyset, \forall i \geq i_0\}$$

$$\underline{\lim}\ Y_i = \{x \in X : \forall \varepsilon > 0, S(x,\varepsilon) \cap Y_i \neq \emptyset,\ \text{για άπειρο πλήθος}\ i\}$$

Από τον ορισμό των συνόλων $\underline{\lim}\ Y_i$ και $\overline{\lim}\ Y_i$ έχουμε: $\underline{\lim}\ Y_i \subseteq \overline{\lim}\ Y_i$.

Αν $\overline{\lim}\ Y_i \subseteq \underline{\lim}\ Y_i$ τότε το σύνολο $Y = \underline{\lim} Y_i = \overline{\lim} Y_i$ καλείται *όριο της ακολουθίας* $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$. Γράφουμε τότε

$$\lim Y_i = Y.$$

Θεώρημα 4.3.2. *Έστω D ένας δενδρίτης. Αν D δεν είναι δένδρο, τότε υπάρχει ακολουθία δένδρων $\{T_n\}_{n=0}^{\infty}$ του D που έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:*

- *(i) $T_0 = \{p_0\}$ και για κάθε $n > 0$ υπάρχει τόξο A_n τέτοιο ώστε $T_n = T_{n-1} \cup A_n$ και $T_{n-1} \cap A_n = \{p_n\}$, όπου p_n είναι τελικό σημείο του A_n,*
- *(ii) $\lim T_n = D$,*
- *(iii) η ακολουθία απεικονίσεων αρχικού σημείου $r_n : D \to T_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην ταυτοτική απεικόνιση $\tau : D \to D$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε ένα αριθμήσιμο παντού πυκνό υποσύνολο $\{d_i\}_{i=0}^{\infty}$ του D.

(i) Θέτουμε $p_0 = d_0$ και $T_0 = \{p_0\}$. Έστω ότι για $n > 1$ έχουν οριστεί τα δένδρα $T_1 \subset ... \subset T_{n-1}$. Επειδή από την υπόθεση, ο D δεν είναι δένδρο, $(D \backslash T_{n-1}) \cap \{d_i\}_{i=0}^{\infty} \neq \emptyset$. Έστω

$$i_n = \min\{i : d_i \notin T_{n-1}\}$$

και $r_{n-1} : X \to T_{n-1}$ είναι η απεικόνιση αρχικού σημείου. Θέτουμε $p_n = r_{n-1}(d_{i_n})$. Προφανώς το τόξο A_n του D με άκρα τα σημεία p_n και d_{i_n} τέμνει το T_{n-1} στο σημείο p_n. Ορίζουμε $T_n = T_{n-1} \cup A_n$.

(ii) Θέτουμε $D_i = \{d_0, ..., d_i\}$. Από την επιλογή του i_{n+1} έπεται ότι $n+1 \le i_{n+1}$. Επομένως, $D_n \subseteq T_n$ για κάθε n. Άρα, $\underline{\lim}\ D_n \subseteq \underline{\lim}\ T_n$.

Κάθε $d \in D$ είναι όριο μιας υπακολουθίας $\{d_{i_k}\}_{k=1}^{\infty}$ της $\{d_i\}_{i=0}^{\infty}$, άρα $d \in \underline{\lim} D_{i_k}$. Επειδή $D_i \subset D_{i+1}$ για κάθε i, έπεται ότι $\underline{\lim} D_{i_k} \subseteq \underline{\lim}\ D_i$. Συνεπώς

$$D \subseteq \underline{\lim}\ D_i \subseteq \underline{\lim}\ T_n \subseteq \overline{\lim}\ T_n \subseteq D.$$

Άρα, $\lim T_n = D$.

(iii) Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή ο D είναι τοπικά συνεκτικός για κάθε $x \in D$ υπάρχει ανοικτό και συνεκτικό σύνολο U_x, τέτοιο ώστε $x \in U_x \subseteq S(x, \frac{\varepsilon}{2})$.

Έστω $\delta > 0$ αριθμός του Lebesque για το κάλυμμα $\{U_x\}_{x \in D}$ του D, δηλαδή αν $p, q \in D$ και $d(p,q) < \delta$, τότε $p, q \in U_x$ για κάποιο $x \in D$. Επειδή κάθε ανοικτό και συνεκτικό υποσύνολο του D είναι κατά τόξο συνεκτικό, υπάρχει τόξο $A(p,q) \subseteq U_x$ με άκρα p και q. Προφανώς $\mathrm{diam}(A(p,q)) < \delta$.

Επειδή ο D είναι συμπαγής,

$$D = S(x_1, \frac{\delta}{2}) \cup ... \cup S(x_k, \frac{\delta}{2}).$$

Από την ιδιότητα (ii), $x_1, ..., x_k \in \lim T_n$. Επομένως υπάρχει n_0 τέτοιος ώστε για κάθε $n \ge n_0$ και για κάθε $j = 1, ..., k$ ισχύει $S(x_j, \frac{\delta}{2}) \cap T_n \neq \emptyset$.

Έστω ότι $x \in D$ και $n \ge n_0$. Τότε $x \in S(x_j, \frac{\delta}{2})$ για κάποιο j. Επομένως $d(x,y) < \delta$ για κάποιο $y \in T_n$. Άρα, υπάρχει τόξο $A(x,y)$ με άκρα x και y με $\mathrm{diam}(A(x,y)) < \varepsilon$. Από τον ορισμό της απεικόνισης αρχικού σημείου συνεπάγεται ότι το τόξο $A(x, r_n(x))$ με άκρα x και $r_n(x)$ περιέχεται στο $A(x,y)$. Επομένως

$$\mathrm{diam}(A(x, r_n(x))) \le \mathrm{diam}(A(x,y)) < \varepsilon.$$

Από τα παραπάνω

$$d(x, r_n(x)) < \varepsilon,\ \forall x \in D,\ \forall n \ge n_0,$$

δηλαδή η ακολουθία απεικονίσεων αρχικού σημείου $r_n : D \to T_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην ταυτοτική απεικόνιση $\tau : D \to D$.

$\square$

4.4 Αναπαράσταση ενός δενδρίτη με την βοήθεια των τόξων

Λήμμα 4.4.1. *Κάθε παντού πυκνό συνεκτικό υποσύνολο ενός συνεκτικού χώρου X περιέχει όλα τα σημεία διάσπασης του X.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι A είναι ένα παντού πυκνό συνεκτικό υποσύνολο ενός συνεχούς X και ότι ένα σημείο διάσπασης x του X δεν ανήκει στο A. Τότε υπάρχουν ανοικτά μη κενά υποσύνολα U και V του X τέτοια ώστε

$$X \setminus \{x\} = U \cup V,\ U \cap V = \emptyset.$$

Επειδή το σύνολο A είναι συνεκτικό, $A \subseteq U$ ή $A \subseteq V$. Επομένως ή $A \cap V = \emptyset$ ή $A \cap U = \emptyset$. Άρα, A δεν είναι παντού πυκνό στο X, που είναι άτοπο.

□

Θεώρημα 4.4.2. *Σε κάθε μη τετριμμένο δενδρίτη D υπάρχει μια ακολουθία τόξων $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ τέτοια ώστε*

(a) $D = D^{[1]} \cup \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right)$,

(b) $A_{n+1} \cap (A_1 \cup ... \cup A_n) = \{p_{n+1}\}$, *όπου* p_{n+1} *είναι άκρο του τόξου* A_{n+1} *για κάθε* n,

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}(\mathrm{diam}(A_n)) = 0$

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 4.3.2, $D = \lim T_n$, όπου $\{T_n\}_{i=1}^{\infty}$ είναι ακολουθία δένδρων του D.

(a) Επειδή κάθε T_n είναι συνεκτικό και $T_n \subseteq T_{n+1}$, το σύνολο $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} T_n$ είναι συνεκτικό. Επειδή $D = \lim T_n$, το σύνολο $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} T_n$ είναι παντού πυκνό στο D. Από το Λήμμα 4.4.1, το σύνολο $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} T_n$ περιέχει όλα τα σημεία διάσπασης του D. Από το Θεώρημα 3.2.12 κάθε σημείο του D είτε είναι σημείο διάσπασης, είτε είναι τελικό σημείο. Άρα, $D \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq D^{[1]}$, που αποδεικνύει την (a).

(b) Από τη ιδιότητα (i) του Θεωρήματος 4.3.2 έχουμε: $T_{n+1} = A_1 \cup ... \cup A_n \cup A_{n+1}$ και $A_{n+1} \cap (A_1 \cup ... \cup A_n) = \{p_{n+1}\}$, όπου p_{n+1} είναι τελικό σημείο του τόξου A_{n+1} για κάθε n.

(c) Έστω $\varepsilon > 0$. Από την ιδιότητα (iii) του Θεωρήματος 4.3.2 υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε

$$d(x, r_n(x)) < \frac{\varepsilon}{2},\ \forall n > n_0,\ \forall x \in D.$$

Αν $x, y \in A_{n+1}$, τότε $r_n(x) = r_n(y) = p_{n+1}$. Επομένως

$$d(x,y) \leq d(x,p_{n+1}) + d(p_{n+1},y) = d(x,r_n(x)) + d(y,r_n(y)) < \varepsilon.$$

Συνεπώς $\operatorname{diam}(A_{n+1}) < \varepsilon$ για κάθε $n > n_0$, που αποδεικνύει την ιδιότητα (c).

□

4.5 Ιδιότητα σταθερού σημείου των δενδριτών

Λήμμα 4.5.1. *Έστω X συμπαγής μετρικός χώρος.*
Αν υπάρχει ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $f_i : X \to X$, $i = 1, 2, ...$, τέτοια ώστε

(i) ο υπόχωρος $f_i(X)$ έχει την ιδιότητα του σταθερού σημείο για κάθε i και

(ii) για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει i_ε τέτοιο ώστε $d(f_{i_\varepsilon}(x), x) < \varepsilon$ για κάθε $x \in X$,

τότε ο X έχει την ιδιότητα του σταθερού σημείου.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι, αντίθετα, ο X δεν έχει την ιδιότητα του σταθερού σημείου. Τότε υπάρχει συνεχής απεικόνιση $f : X \to X$ με $f(x) \neq x$ για κάθε $x \in X$.

Για κάθε $x \in X$ υπάρχουν ανοικτά σύνολα V_x και $V_{f(x)}$ τέτοια ώστε

$$x \in V_x,\ f(x) \in V_{f(x)} \text{ και } V_x \cap V_{f(x)} = \emptyset$$

Από την συνέχεια της f προκύπτει ότι υπάρχει ανοικτή περιοχή O_x του x τέτοια ώστε $f(O_x) \subseteq V_{f(x)}$.

Θέτουμε $U_x = O_x \cap V_x$. Τότε

$$U_x \subseteq V_x \text{ και } f(U_x) \subseteq V_{f(x)}.$$

Άρα, $f(U_x) \cap U_x = \emptyset$. Για το ανοικτό κάλυμμα $\{U_x\}_{x \in X}$ του συμπαγούς X υπάρχει πεπερασμένο υποκάλυμμα $\mathfrak{U} = \{U_1, ..., U_n\}$. Προφανώς $f(U_i) \cap U_i = \emptyset$ για κάθε $i = 1, ..., n$.

Επειδή ο X είναι συμπαγής για το ανοικτό κάλυμμα $\mathfrak{U}$ υπάρχει αριθμός $\varepsilon > 0$ (αριθμός του Lebesque) τέτοιος ώστε το ανοικτό κάλυμμα $\{B(x,\varepsilon)\}_{x \in X}$ είναι εγγεγραμμένο στο $\mathfrak{U}$, δηλαδή για κάθε $x \in X$ υπάρχει U_i τέτοιο ώστε $B(x,\varepsilon) \subseteq U_i$.

Επειδή οι απεικονίσεις $f : X \to X$ και $f_{i_\varepsilon} : X \to X$ είναι συνεχείς, η απεικόνιση

$$f_{i_\varepsilon} \circ f|_{f_{i_\varepsilon}(X)} : f_{i_\varepsilon}(X) \to f_{i_\varepsilon}(X),$$

όπου $f|_{f_{i_\varepsilon}(X)}$ είναι ο περιορισμός της f στο $f_{i_\varepsilon(X)}$, είναι συνεχής. Από την συνθήκη (i) του Θεωρήματος έπεται ότι υπάρχει $z \in f_{i_\varepsilon}(X)$ για το οποίο $f_{i_\varepsilon}(f(z)) = z$.

Από την συνθήκη (ii) του Θεωρήματος

$$d(f_{i_\varepsilon}(f(z)), f(z)) < \varepsilon.$$

Επομένως $d(z, f(z)) < \varepsilon$. Άρα, $f(z) \in B(z, \varepsilon)$.

Έστω ότι U_i είναι εκείνο το στοιχείο του καλύμματος $\mathfrak{U}$ για το οποίο $B(z, \varepsilon) \subseteq U_i$. Τότε $z, f(z) \in U_i$. Συνεπώς $f(z) \in f(U_i) \cap U_i$, που είναι άτοπο.

Άρα, ο X έχει την ιδιότητα του σταθερού σημείου.

□

Θεώρημα 4.5.2. *Αν X είναι ένα συνεχές και υπάρχει μια ακολουθία $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ συνεχών απεικονίσεων από το X στο X που συγκλίνει ομοιόμορφα στην ταυτοτική απεικόνιση*

$$\tau_X : X \to X$$

έτσι ώστε για κάθε i το συνεχές $f_i(X)$ έχει την ιδιότητα του σταθερού σημείου, τότε και το συνεχές X έχει την ιδιότητα του σταθερού σημείου.

Απόδειξη. Από την ομοιόμορφη σύγκλιση της ακολουθίας συναρτήσεων $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ στην ταυτοτική απεικόνιση τ_X, έπεται ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει i_0 τέτοιο ώστε για κάθε $i \geq i_0$ και για κάθε $x \in X$ ισχύει

$$d(f_i(x), x) = d(f_i(x), \tau_X(x)) < \varepsilon.$$

Επειδή για κάθε i το συνεχές $f_i(X)$ έχει την ιδιότητα του σταθερού σημείου, από το Λήμμα 4.5.1 προκύπτει ότι το συνεχές X έχει την ιδιότητα του σταθερού σημείου.

□

Θεώρημα 4.5.3. *Αν X και Y είναι συνεχή το καθένα από τα οποία έχει την ιδιότητα του σταθερού σημείου και $X \cap Y = \{p\}$, τότε το συνεχές $X \cup Y$ έχει την ιδιότητα του σταθερού σημείου.*

Απόδειξη. Έστω $f : X \cup Y \to X \cup Y$ μια συνεχής απεικόνιση. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f(p) \in X$. Ορίζουμε

$$g : X \cup Y \to X$$

θέτοντας

$$g(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } x \in X, \\ p, & \text{αν } x \in Y. \end{cases}$$

Η απεικόνιση g είναι συνεχής. Άρα, και η απεικόνιση $g \circ f|_X : X \to X$ είναι συνεχής. Επειδή ο X έχει την ιδιότητα του σταθερού σημείου, υπάρχει $q \in X$ για το οποίο $g(f(q)) = q$.

Ας υποθέσουμε ότι $f(q) \notin X$, τότε $f(q) \in Y \setminus \{p\}$. Οπότε, από τον ορισμό της g, παίρνουμε ότι $q = g(f(q)) = p$, άρα $f(p) = f(q) \in X$, που είναι άτοπο.

Επομένως $f(q) \in X$. Οπότε, από τον ορισμό της g, παίρνουμε ότι

$$q = g(f(q)) = f(q).$$

Άρα, q είναι σταθερό σημείο της f.

□

Θεώρημα 4.5.4. *Κάθε δένδρο έχει την ιδιότητα του σταθερού σημείου.*

Απόδειξη. Είναι γνωστό ότι κάθε τόξο έχει την ιδιότητα του σταθερού σημείου. Έπειδή κάθε δένδρο είναι ένωση πεπερασμένου πλήθους τόξων, τα οποία ανά δύο είτε δεν τέμνονται, είτε τέμνονται σε ένα κοινό τους άκρο, το Θεώρημα προκύπτει από τα Θεωρήματα 4.2.2 και 4.5.3. □

Θεώρημα 4.5.5. *Κάθε δενδρίτης έχει την ιδιότητα του σταθερού σημείου.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 4.3.2 συνεπάγεται ότι για κάθε δενδρίτη D υπάρχει μια ακολουθία $\{r_i\}_{i=1}^{\infty}$ συνεχών απεικονίσεων από το D στο D που συγκλίνει ομοιόμορφα στην ταυτοτική απεικόνιση $\tau_D : D \to D$ έτσι ώστε για κάθε i το συνεχές $r_i(D)$ είναι δένδρο. Άρα, από το Θεώρημα 4.5.4 κάθε $r_i(D)$ έχει την ιδιότητα του σταθερού σημείου. Συνεπώς, από το Θεώρημα 4.5.2, το συνεχές D έχει την ιδιότητα του σταθερού σημείου. □

Κεφάλαιο 5

Καθολικός δενδρίτης

5.1 Αντίστροφες ακολουθίες και αντίστροφα όρια

Μια διπλή ακολουθία $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ τοπολογικών χώρων X_i και συνεχών συναρτήσεων

$$f_i : X_{i+1} \to X_i,\ i = 1, 2, ...$$

καλείται *αντίστροφη ακολουθία* .

Κάθε συνάρτηση f_i ονομάζεται *συνδετική απεικόνιση* (bonding map).

Μια αντίστροφη ακολουθία $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ γράφεται και ως εξής:

$$X_1 \xleftarrow{f_1} X_2 \xleftarrow{f_2} X_3 \xleftarrow{f_4} \cdots \xleftarrow{f_{i-1}} X_i \xleftarrow{f_i} X_{i+1} \xleftarrow{f_{i+1}} \cdots$$

Το *αντίστροφο όριο* $\varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ μιας αντίστροφης ακολουθίας $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ είναι υποχώρος του καρτεσιανού γινομένου $\prod\limits_{i=1}^{\infty} X_i$ που ορίζεται ως εξής:

$$\varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty} = \{(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \prod_{i=1}^{\infty} X_i : f_i(x_{i+1}) = x_i, \forall i = 1, 2, ...\}.$$

Έστω

$$\pi_i : X_\infty \to X_i,\ i = 1, 2, ...$$

ο περιορισμός της προβολικής απεικόνισης $\prod\limits_{i=1}^{\infty} X_i \to X_i$ στον υπόχωρο X_∞.

5.1.1 Ιδιότητες αντίστροφων ορίων

Πρόταση 5.1.1. *Έστω ότι* $X_\infty = \varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^\infty$, *όπου* X_i *είναι μετρικός χώρος για κάθε* i.

Αν A *είναι συμπαγής υπόχωρος του* X_∞, *τότε* $\{\pi_i(A), f_i|_{\pi_{i+1}(A)}\}_{i=1}^\infty$ *είναι αντίστροφη ακολουθία της οποίας κάθε συνδετική απεικόνιση* $f_i|_{\pi_{i+1}(A)}\colon \pi_{i+1}(A) \to \pi_i(A)$ *είναι επί και*

$$A = \varprojlim\{\pi_i(A), f_i|_{\pi_{i+1}(A)}\}_{i=1}^\infty = \left(\prod_{i=1}^\infty \pi_i(A)\right) \cap X_\infty.$$

Πρόταση 5.1.2. ([3]) *Έστω ότι* $X_\infty = \varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^\infty$.

Αν A *και* B *είναι συμπαγή υποσύνολα του* X_∞, *τότε*

$$A \cap B = \varprojlim\{\pi_i(A) \cap \pi_i(B), f_i|_{\pi_i(A)\cap\pi_i(B)}\}_{i=1}^\infty.$$

Πρόταση 5.1.2. *Αν* $X_\infty = \varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^\infty$ *όπου κάθε* X_i *είναι συνεχές, τότε ο χώρος* X_∞ *είναι ένα συνεχές.*

Πρόταση 5.1.3. *Αν* $X_\infty = \varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^\infty$ *όπου κάθε* X_i *είναι συνεχές του Peano και κάθε* f_i *είναι μονότονη απεικόνιση, τότε ο χώρος* X_∞ *είναι ένα συνεχές του Peano.*

5.1.2 Αντίστροφες ακολουθίες δένδριτών.

Θεώρημα 5.1.4. *Κάθε αντίστροφο όριο* $X_\infty = \varprojlim\{D_i, f_i\}_{i=1}^\infty$ *των δενδριτών* $\{D_i\}_{i=1}^\infty$ *με μονότονες συνδετικές απεικονίσεις*

$$f_i : D_{i+1} \to f_i(D_{i+1}) \subseteq D_i,\ i = 1, 2, ...$$

είναι ένας δενδρίτης.

Απόδειξη. Έστω $X_\infty = \varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^\infty$. Από την Πρόταση 5.1.2 ο χώρος X_∞ είναι καλά ορισμένος.

Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.2.23: ένα συνεχές του Peano είναι δενδρίτης αν και μόνον αν είναι κληρονομικά μονοσυνδεδεμένο.

Θα δείξουμε ότι το συνεχές X_∞ είναι κληρονομικά μονοσυνδεδεμένο.

Έστω A και B δυο υποσυνεχή του X_∞. Αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο $A \cap B$ είναι συνεκτικό. Από την Πρόταση 5.1.2 έπεται ότι

$$A \cap B = \varprojlim\{\pi_i(A) \cap \pi_i(B), f_i|_{\pi_i(A)\cap\pi_i(B)}\}_{i=1}^\infty, \tag{5.1}$$

όπου $\pi_i : X_\infty \to X_i,\ i = 1, 2, ...$, είναι προβολικές απεικονίσεις.

Έστω ότι $A \cap B \neq \emptyset$. Τότε, επειδή κάθε απεικόνιση π_i είναι συνεχής, τα σύνολα $\pi_i(A)$ και $\pi_i(B)$ είναι μη κενά υποσυνεχή του δενδρίτη D_i για κάθε i. Επειδή από το Θεώρημα

3.2.23 κάθε δενδρίτης είναι κληρονομικά μονοσυνδεδεμένος, το σύνολο $\pi_i(A) \cap \pi_i(B)$ είναι συνεχές για κάθε i. Επομένως, από την ισότητα (5.1) και την Πρόταση 5.1.2, ο υπόχωρος $A \cap B$ του X_∞ είναι συνεχές. Άρα, το σύνολο $A \cap B$ είναι συνεκτικό.

Θα δείξουμε ότι X_∞ είναι ένα συνεχές του Peano.

Από την Πρόταση 5.1.1 συνεπάγεται ότι

$$X_\infty = \varprojlim \{\pi_i(X_\infty), f_i|\pi_{i+1}(X_\infty)\}_i^\infty$$

Επειδή κάθε δενδρίτης X_{i+1} είναι κληρονομικά μονοσυνδεδεμένος, κάθε $f_i|\pi_{i+1}(X_\infty)$ είναι μια μονότονη απεικόνιση επί του $\pi_i(X_\infty)$. Άρα, από την Πρόταση 5.1.3, ο χώρος X_∞ είναι συνεχές του Peano.

□

5.2 Δενδρίτης ως αντίστροφο όριο δένδρων.

Λήμμα 5.2.1. **([8])** *Έστω ότι X είναι ένας συμπαγής μετρικός χώρος και $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ είναι μια ακολουθία συμπαγών υποσυνόλων του X.*

Αν για κάθε $i = 1, 2, ...,$ υπάρχουν συνεχείς απεικονίσεις

$$\pi_i : X \to X_i \text{ και } f_i : X_{i+1} \to X_i$$

τέτοιες ώστε $f_i \circ \pi_{i+1} = \pi_i$ και η ακολουθία $\{\pi_i\}_{i=1}^\infty$ συκλίνει ομοιόμορφα στη σταθερή απεικόνιση $\tau_X : X \to X$, τότε ο X είναι ομοιομορφικός με το $\varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^\infty$.

Τώρα μπορούμε να αποδείξουμε το παρακάτω σημαντικό θεώρημα χρησιμοποιώντας την μέθοδο προσέγγισης των δενδριτών με δένδρα από μέσα.

Θεώρημα 5.2.2. *Έστω ότι D είναι ένας δενδρίτης και $\{T_n\}_{n=0}^\infty$ μια ακολουθία δένδρων του D που έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:*

(i) $T_0 = \{p_0\}$ και για κάθε $n > 0$ υπάρχει τόξο A_n τέτοιο ώστε $T_n = T_{n-1} \cup A_n$ και $T_{n-1} \cap A_n = \{p_n\}$, όπου p_n είναι τελικό σημείο του A_n,

(ii) $\lim T_n = D$,

(iii) η ακολουθία απεικονίσεων αρχικού σημείου $r_n : D \to T_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην ταυτοτική απεικόνιση $\tau : D \to D$.

Τότε ο D είναι ομοιομορφικός με το $\varprojlim\{T_n, r_n\}_{n=1}^\infty$.

Απόδειξη. Θεωρούμε τις απεικονίσεις αρχικού σημείου $r_n : D \to T_n$.

Για κάθε n ορίζουμε

$$f_n = r_n\big|_{T_{n+1}} : T_{n+1} \to T_n.$$

Παρατηρούμε ότι κάθε στοιχείο της ακολουθίας $\{T_n\}_{n=0}^{\infty}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του D. Σύμφωνα με το Λήμμα 5.2.1, αρκεί να δείξουμε ότι $f_n \circ r_{n+1} = r_n$ για κάθε n. Δηλαδή ότι $f_n(r_{n+1}(x)) = r_n(x)$ για κάθε n και για κάθε $x \in D$.

Έστω $x \in D$. Αν $x \in T_{n+1}$, τότε, από τον ορισμό της απεικόνισης αρχικού σημείου, $r_{n+1}(x) = x$. Επομένως

$$f_n(r_{n+1}(x)) = f_n(x) = r_n(x) \text{ για κάθε } x \in T_{n+1}$$

Αν $x \in D \setminus T_{n+1}$, τότε $r_{n+1}(x)$ είναι το μοναδικό σημείο του T_{n+1} το οποίο ανήκει σε κάθε τόξο του D από το σημείο x σε οποιοδήποτε σημείο του T_{n+1}. Επειδή $T_n \subseteq T_{n+1}$, το σημείο $r_{n+1}(x)$ είναι το μοναδικό σημείο του T_{n+1} το οποίο ανήκει σε κάθε τόξο του D από το σημείο x σε οποιοδήποτε σημείο του T_n.

Αν $r_{n+1}(x) \in T_n$, τότε $r_{n+1}(x) = r_n(x)$. Άρα,

$$f_n(r_{n+1}(x)) = f_n(r_n(x)) = r_n(r_n(x)) = r_n(x).$$

Αν $r_{n+1}(x) \in T_{n+1} \setminus T_n$, τότε $r_{n+1}(x) \in xp_{n+1}$ και $r_n(r_{n+1}(x)) = p_{n+1}$. Αν $r_n(x) \in T_n \setminus \{p_{n+1}\}$, τότε ο δενδρίτης D περιέχει απλή κλειστή καμπύλη. Συνεπώς

$$f_n(r_{n+1}(x)) = r_n(r_{n+1}(x)) = p_{n+1} = r_n(x)$$

□

5.3 Κατασκευή του καθολικού δενδρίτη D_ω

Έστω r ένα σημείο του επιπέδου.

Συμβολίζουμε με $S_i(r)$, $i = 1, 2, ...$, την ένωση των ευθυγράμμων τμημάτων $\overline{re_j}$, $j = 1, 2, ...$, τέτοιων ώστε:

(a) $\bigcap_{j=1}^{\infty} \overline{re_j} = \{r\}$ και

(b) $\text{diam}(\overline{re_j}) = 4^{-(i+j-1)}$.

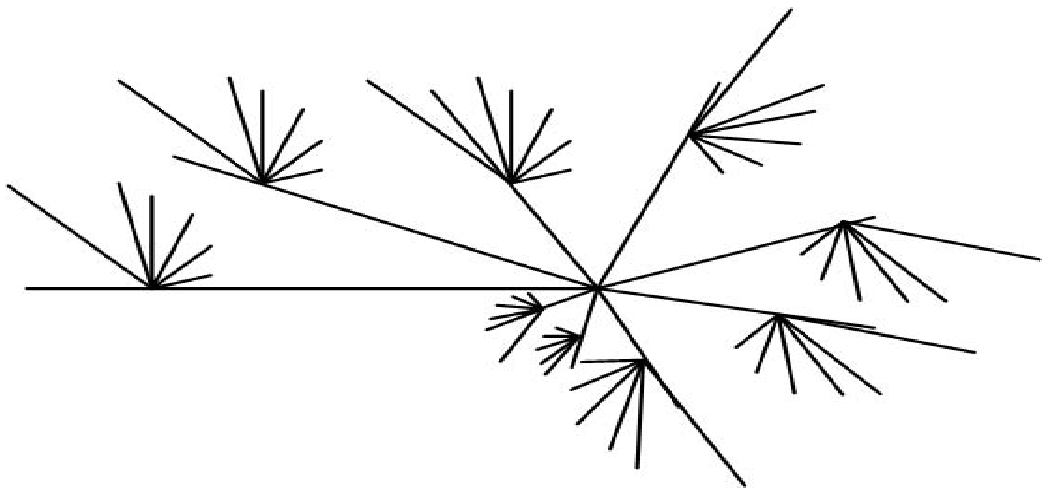
Προφανώς $S_i(r) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \overline{re_j}$ είναι ένας τοπικά συνεκτικός δενδρίτης, επιπλέον

1. $\text{diam}(S_i(r)) \leq 4^{-(i+1)}$ (επειδή $S_i(r) \subseteq S[r, \frac{1}{4^i}] \subseteq S(r, \frac{2}{4^i})$),
2. $S_i(r)$ έχει μόνο ένα σημείο διακλάδωσης r, το οποίο είναι τάξης ω,
3. το σύνολο των τελικών σημείων $\{e_1, e_2, ...\}$ του $S_i(r)$ είναι αριθμήσιμο.

Καλούμε το σύνολο $S_i(r)$ άστρο (ή i-άστρο) με κορυφή r.

Τώρα κατασκευάζουμε επαγωγικά μια ακολουθία δενδριτών D_i με σημεία διακλάδωσης της τάξης ω, έτσι ώστε:

$$D_1 \subset D_2 \subset \cdots \subset D_i \subset D_{i+1} \subset \cdots$$



Σχήμα 5.1: Δενδρίτης D_2.

Ο υπό κατασκευή δενδρίτης D_ω θα οριστεί ως το περίβλημα της ένωσής τους.

Έστω ότι $D_1 = S_1(r)$ είναι το 1-άστρο με κορυφή r.

Έχουμε ότι $S_1(r) = \bigcup_{m=1}^{\infty} \overline{re_m}$

Συμβολίζουμε με r_m το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος re_m.

Έστω ότι $\{S_2(r_m)\}_{m=1}^{\infty}$ μια οικογένεια 2-άστρων με κορυφές τα σημεία r_m τέτοια ώστε

(m) $S_2(r_m) \cap S_2(r_k) = \emptyset$ αν $m \neq k$.

(ii) $S_2(r_m) \cap D_1 = \{r_m\}$ για κάθε m.

Ορίζουμε

$$D_2 = D_1 \cup \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} S_2(r_m) \right).$$

Μια εικόνα του D_2 είναι στο Σχήμα ;;.

Ορίζουμε D_3 με ανάλογο τρόπο, επικολλώντας από ένα 3-αστέρι στο μέσο του κάθε ευθύγραμμου τμήματος $\overline{xy}$ του δένδρου D_2, με $x, y \in E(D_2) \cup R(D_2))$.

Υποθέτουμε τώρα ότι ο δενδρίτης D_i έχει οριστεί ως ένωση αριθμήσιμου πλήθους ευθύγραμμων τμημάτων $\overline{x_i y_m}$ τέτοιων ώστε

$$\begin{aligned} E(D_i) \cup R(D_i) &= \{x_m\}_{m=1}^{\infty} \cup \{y_m\}_{m=1}^{\infty} \\ O(D_i) &= \bigcup_{m=1}^{\infty} \overline{x_m y_m} \setminus \{x_m y_m\} \end{aligned}$$

Συμβολίζουμε με r_m το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος $\overline{x_m y_m}$.

Έστω ότι $\{S_i(r_m)\}_{m=1}^{\infty}$ μια οικογένεια i-άστρων με κορυφές τα σημεία r_m τέτοια ώστε

(i) $S_i(r_{m_1}) \cap S_i(r_{m_2}) = \emptyset$ αν $m_1 \neq m_2$.

(ii) $S_i(r_m) \cap D_i = \{r_m\}$ για κάθε m.

Ορίζουμε

$$D_{i+1} = D_i \cup \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} S_i(r_m) \right).$$

Για κάθε i ορίζουμε απεικόνιση $g_i : D_{i+1} \to D_i$ ως εξής:

$$g_i(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } x \in D_i, \\ r_m, & \text{αν } x \in S_i(r_m). \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι κάθε g_i συμπίπτει με την απεικόνιση αρχικού σημείου από το D_{i+1} επί του D_i. Επομένως κάθε g_i είναι μονότονη. Άρα, από το Θεώρημα 5.1.3, το αντίστροφο όριο $D_\infty = \varprojlim \{D_i, g_i\}_{i=1}^{\infty}$ είναι ένας δενδρίτης.

Ορίζουμε

$$D_\omega = \mathrm{Cl}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} D_i \right).$$

Από τον ορισμό της ακολουθίας δενδριτών $\{D_i\}_{i=1}^{\infty}$ και της ακολουθίας των απεικονίσεων $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ συνεπάγεται ότι η αντίστροφη ακολουθία $\{D_i, g_i\}_{i=1}^{\infty}$ ικανοποιεί της συνθήκες του Θεωρήματος 5.4.2. Άρα, ο υπόχωρος D_ω του επιπέδου είναι ομοιομορφικός με τον δενδρίτη D_∞.

Θα δείξουμε ότι κάθε σημείο διακλάδωσης του δενδρίτη D_ω είναι της τάξης ω.

Έστω $x \in D_\omega \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i$. Τότε

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} D_i \subseteq \mathrm{Cl}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} D_i \right) \setminus \{x\} = D_\omega \setminus \{x\} \subseteq \mathrm{Cl}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} D_i \right) \tag{5.2}$$

Επειδή το σύνολο $\bigcup_{i=1}^{\infty} D_i$ είναι συνεκτικό, από τις σχέσεις (5.2) προκύπτει ότι το σύνολο $D_\omega \setminus \{x\}$ είναι συνεκτικό. Επομένως το σημείο x δεν είναι σημείο διάσπασης του D_ω. Άρα, από το Θεώρημα 3.2.12, $x \in E(X)$.

Συνεπώς $D_\omega \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i \subseteq E(X)$. Επομένως τα σημεία διακλάδωσης του δενδρίτη D_ω ανήκουν στο σύνολο $\bigcup_{i=1}^{\infty} D_i$. Από τον ορισμό των δενδριτών D_i έχουμε ότι κάθε σημείο διακλάδωσης του D_ω είναι της τάξης ω.

5.4 Απόδειξη της καθολικότητας του D_ω

Τα Θεωρήματα 5.4.1 και 5.4.2 που ακολουθούν θα χρησιμοποιηθούν στην απόδειξη της καθολικότητας του D_ω.

Θεώρημα 5.4.1. ([**7**], σελ.139) *Έστω $\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$ και $\{Y_n, g_n\}_{n=1}^{\infty}$ δυο αντίστροφες ακολουθίες και για κάθε $n = 1, 2, ...,$ έχει οριστεί ομοιομορφισμος $h_n : X_n \to Y_n$ έτσι ώστε*

$$h_n \circ f_n = g_n \circ h_{n+1}.$$

Αν $X_\infty = \varprojlim \{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$ και $Y_\infty = \varprojlim \{Y_n, g_n\}_{n=1}^{\infty}$, τότε η απεικόνιση

$$h_\infty : X_\infty \to Y_\infty,$$

για την οποία $h_\infty (\{x_n\}_{n=1}^{\infty}) = \{h_n(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$, είναι ομοιομορφισμός.

Το Θεώρημα 5.4.1 απεικονίζεται στο διάγραμμα που ακολουθεί:

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[d, "h_1"] & X_2 \arrow[l, "f_1"'] \arrow[d, "h_2"] & \cdots \arrow[l, "f_2"'] & X_n \arrow[l, "f_{n-1}"'] \arrow[d, "h_n"] & X_{n+1} \arrow[l, "f_n"'] \arrow[d, "h_{n+1}"] & \cdots \arrow[l, "f_{n+1}"'] \; X_\infty \arrow[d, "h_\infty"] \\
Y_1 & Y_2 \arrow[l, "g_1"'] & \cdots \arrow[l, "g_2"'] & Y_n \arrow[l, "g_{n-1}"'] & Y_{n+1} \arrow[l, "g_n"'] & \cdots \arrow[l, "g_{n+1}"'] \; Y_\infty
\end{tikzcd}$$

Θεώρημα 5.4.2. ([**1**]) *Έστω ότι (S, d) είναι συμπαγής μετρικός χώρος και $\{S_n, g_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι αντίστροφη ακολουθία, όπου $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μια οικογένεια μη κενών και κλειστών υποσυνόλων του S, τέτοια ώστε*

$$S_1 \subseteq S_2 \subseteq \cdots \subseteq S_n \subseteq S_{n+1} \subseteq \ldots$$

Έστω

$$g_{n,m} = g_n \circ \cdots \circ g_{m-1} : S_m \to S_n, \text{ για } m > n+1 \text{ και } g_{n,n+1} = g_n$$

Αν

(*i*) *για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει n τέτοιο ώστε $\operatorname{diam}(\bigcup_{m>n} g_{n,m}^{-1}(s)) < \varepsilon$ για κάθε $s \in S_n$*

(*ii*) *για κάθε n και για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε*

$$m > n \text{ και } p, q \in X_m \text{ με } d(g_{n,m}(p), g_{n,m}(q)) > \delta \Longrightarrow d(p,q) > \varepsilon,$$

τότε το $\varprojlim \{S_n, g_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι ομοιομορφικό με τον υποχώρο $\mathrm{Cl}(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n)$ του S.

Λήμμα 5.4.3. *Για οποιαδήποτε αριθμήσιμα πυκνά υποσύνολα A και B του διαστήματος $(0,1)$ υπάρχει ομοιομορφισμός $h : [0,1] \to [0,1]$ τέτοιος ώστε*

$$h(0) = 0,\ h(1) = 1 \text{ και } h(A) = B.$$

Απόδειξη. Έστω $A = \{a_1, a_2, ...\}$ και $B = \{b_1, b_2, ...\}$.

Θα αναριθμήσουμε τα σύνολα A και B έτσι ώστε:

$$A = \{a'_1, a'_2, ...\}, \quad B = \{b'_1, b'_2, ...\}$$

$$a'_i < a'_j \Longleftrightarrow b'_i < b'_j \tag{5.3}$$

Θέτουμε $a'_1 = a_1$, $b'_1 = b_1$ και $b'_2 = b_2$.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $b'_1 < b'_2$. Επειδή A είναι πυκνό στο $(0,1)$, έπεται ότι $A \cap (a'_1, 1) \neq \emptyset$. Έστω a'_2 το πρώτο στοιχείο της ακολουθίας $\{a_1, a_2, ...\}$ που ανήκει στο σύνολο $A \cap (a'_1, 1)$. Έχουμε τότε: $a'_1 < a'_2$ και $b'_1 < b'_2$.

Ας υποθέσουμε ότι έχουν οριστεί οι αριθμοί $a'_1, a'_2, \ldots, a'_{2n} \in A$ και $b'_1, b'_2, \ldots, b'_{2n} \in B$ έτσι ώστε οι συνθήκες (5.3) να ικανοποιούνται για οποιαδήποτε $i, j \in \{1, ..., 2n\}$. Ορίζουμε

$$b'_{2n+1} = \min\{b : b \in B \setminus \{b'_1, b'_2, \ldots, b'_{2n}\}$$

Έστω ότι a'_{2n+1} είναι το πρώτο στοιχείο της ακολουθίας $\{a_1, a_2, ...\}$ τέτοιο ώστε a'_{2n+1} δεν ανήκει στο σύνολο $\{a'_1, a'_2, \ldots, a'_{2n}\}$ και οι συνθήκες (5.3) να ικανοποιούνται για οποιαδήποτε $i, j \in \{1, ..., 2n+1\}$. Η ύπαρξη του a'_{2n+1} προκύπτει από το δεδομένο ότι A είναι πυκνό στο $(0,1)$.

Ορίζουμε την απεικόνιση $h : [0,1] \to [0,1]$ ως εξής:

$$x \in [0,1] \Longrightarrow h(x) = \inf\{h(a'_n) : a'_n \geq x\}.$$

Προφανώς η h είναι ένα προς ένα. Επειδή το B είναι πυκνό στο $(0,1)$ η h είναι επί. Για οποιαδήποτε ακολουθία $\{x_1, x_2, ...\} \subset [0,1]$ ισχύει $\lim_{i\to\infty} h(x_i) = h(\lim_{i\to\infty} x_i)$. Επομένως η h είναι συνεχής. Επειδή το $[0,1]$ είναι συμπαγές η h είναι ομοιομορφισμός.

□

Λήμμα 5.4.4. *Έστω ότι $J_1 = p_1q_1$ και $J_2 = p_2q_2$ είναι δύο τόξα και B_1 και B_2 είναι αριθμήσιμα πυκνά υποσύνολα του J_1 και J_2, αντίστοιχα.*

Τότε υπάρχει ένας ομοιομορφισμός $h : J_1 \to J_2$ τέτοιος ώστε

$$h(B_1) = B_2,\ h(p_1) = p_2,\ h(q_1) = q_2$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τους ομοιομορφισμούς $h_1 : J_1 \to [0,1]$ και $h_2 : J_2 \to [0,1]$, τέτοιους ώστε $h_1(p_1) = 0$, $h_2(p_2) = 0$, $h_1(q_1) = 1$, $h_2(q_2) = 1$.

Τα σύνολα $h_1(B_1)$ και $h_2(B_2)$ είναι αριθμήσιμα και πυκνά στο $[0,1]$. Επομένως, από το Λήμμα 5.4.3, υπάρχει ομοιομορφισμός $g : [0,1] \to [0,1]$ τέτοιος ώστε $g(0) = 0$, $g(1) = 1$ και $g(h_1(B_1)) = h_2(B_2)$.

Η απεικόνιση $h = h_2^{-1} \circ g \circ h_1$ είναι ο ζητούμενος ομοιομορφισμός.

□

Θεώρημα 5.4.5. *Ο δενδρίτης D_ω είναι καθολικός στην οικογένεια όλων των δενδριτών.*

Απόδειξη. Έστω D ένας δενδρίτης.

Από το Θεώρημα 4.3.2 υπάρχει ακολουθία δένδρων $\{T_n\}_{n=0}^{\infty}$ του D που έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) $T_0 = \{p_0\}$ και για κάθε $n > 0$ υπάρχει τόξο A_n τέτοιο ώστε $T_n = T_{n-1} \cup A_n$ και $T_{n-1} \cap A_n = \{p_{n-1}\}$, όπου p_{n-1} είναι τελικό σημείο του A_n,

(ii) $\lim T_n = D$,

(iii) η ακολουθία απεικονίσεων αρχικού σημείου $r_n : D \to T_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην ταυτοτική απεικόνιση $\tau : D \to D$.

Από το Θεώρημα 5.2.2 ο D είναι ομοιομορφικός με το $\underleftarrow{\lim}\{T_n, r_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Από την κατασκευή του D_ω συνεπάγεται ότι D_ω είναι ομοιομορφικός με το $\underleftarrow{\lim}\{D_i, g_i\}_{i=1}^{\infty}$, όπου $\{D_i\}_{i=1}^{\infty}$ μια οικογένεια δενδριτών του D_ω τέτοια ώστε

$$D_1 \subset D_2 \subset \cdots \subset D_i \subset D_{i+1} \subset \cdots$$

Για κάθε $n = 1, 2, ...$, θα ορίσουμε

(1) έναν φυσικό αριθμό i_n

(2) ένα δένδρο $\widetilde{T}_{i_n} \subset D_{i_n}$,

(3) έναν ομοιομορφισμό $h_n : T_n \to \widetilde{T}_{i_n}$,

(4) μια μονότονη απεικόνιση $\widetilde{g}_n : \widetilde{T}_{i_{n+1}} \to \widetilde{T}_{i_n}$,

έτσι ώστε για κάθε n

(5) $h_n(T_n \cap R(D)) \subseteq \widetilde{T}_{i_n} \cap R(D_\omega)$,

(6) $f_n \circ h_n = h_{n+1} \circ \widetilde{g}_n$, δηλαδή να είναι αντιμεταθετικό το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} T_n \arrow[d, "h_n"] & T_{n+1} \arrow[l, "f_n"'] \arrow[d, "h_{n+1}"] \\ \widetilde{T}_{i_n} & \widetilde{T}_{i_{n+1}} \arrow[l, "\widetilde{g}_n"'] \end{tikzcd}$$

Από τις σχέσεις $(i) - (iii)$ για κάθε $n = 0, 1, ...$, έχουμε ότι

$$T_{n+1} = T_n \cup p_n q_n \text{ και } T_n \cap p_n q_n = \{p_n\}$$

Θέτουμε $R_i = R(D_\omega) \setminus R(D_i)$, $i = 1, 2, ...$ Προφανώς

$$R_i = \left(\bigcup_{j=i+1}^{\infty} R(D_j) \right) \setminus R(D_i) \tag{5.4}$$

Έστω $i_1 = 1$, r_0 είναι το μοναδικό σημείο διακλάδωσης του D_1 και $s_0 \in D_1 \cap R_1$.

Το αριθμήσιμο σύνολο $p_0q_0 \cap R(D)$ μπορεί να συμπληρωθεί με αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο του p_0q_0. Επειδή το σύνολο $r_0s_0 \cap R_1$ είναι αριθμήσιμο και πυκνό στο r_0s_0, από το Λήμμα 5.4.4 συνεπάγεται ότι υπάρχει ομοιομορφισμός $h_1 : T_1 = \{p_0q_0\} \to D_1$ τέτοιος ώστε

$$h_1(p_0) = r_0,\ h_1(q_0) = s_0 \in D_1 \cap R_1 \text{ και } h_1(T_1 \cap R(D)) \subseteq r_0s_0 \cap R_1.$$

Θέτουμε $\widetilde{T}_1 = r_0s_0$. Θα ορίσουμε τον φυσικό αριθμό $i_2 > i_1$ και το δένδρο $\widetilde{T}_{i_2}$.

Έχουμε $T_2 = T_1 \cup p_1q_1$ και $T_1 \cap p_1q_1 = \{p_1\}$. Από τον ορισμό της h_1 έπεται ότι $h_1(p_1) = r_1 \in r_0s_0 \cap R_1$. Από την ισότητα (5.4) υπάρχει ο μικρότερος φυσικός αριθμός $i_2 > i_1 = 1$ τέτοιος ώστε $r_1 \in R(D_{i_2})$. Διαλέγουμε $s_1 \in S_{i_2}(r_1) \cap R_{i_2+1}$.

Το αριθμήσιμο σύνολο $p_1q_1 \cap R(D)$ μπορεί να συμπληρωθεί με αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο του p_1q_1. Επειδή το σύνολο $r_1s_1 \cap R_{i_2}$ είναι αριθμήσιμο και πυκνό στο r_1s_1, από το Λήμμα 5.4.4 συνεπάγεται ότι υπάρχει ομοιομορφισμός $h_{p_1q_1} : p_1q_1 \to r_1s_1$ τέτοιος ώστε

$$h_{p_1q_1}(p_1) = r_1,\ h_{p_1q_1}(q_1) = s_1 \text{ και } h_{p_1q_1}(p_1q_1) \cap R(D)) \subseteq r_1s_1 \cap R_{i_2+1}.$$

Θέτουμε $\widetilde{T}_{i_2} = \widetilde{T}_{i_2} \cup r_1s_1$ και ορίζουμε τον ομοιομορφισμό $h_2 : T_2 \to \widetilde{T}_{i_2}$ ως εξής:

$$h_2(x) = \begin{cases} h_1(x), & \text{αν } x \in T_1, \\ h_{p_1q_1}(x), & \text{αν } x \in p_1q_1. \end{cases}$$

Ορίζουμε $g_{i_2,i_1} : D_{i_2} \to D_{i_1}$ ως εξής:

$$g_{i_2,i_1} = g_{i_2-1} \circ g_{i_2-2} \circ \cdots \circ g_{i_1}$$

Θέτουμε $\widetilde{g}_2 = g_{i_2,i_1}\big|_{\widetilde{T}_2}$. Επειδή οι απεικονίσεις g_i είναι μονότονες, η $\widetilde{g}_2$ είναι μονότονη.

Ας υποθέσουμε ότι $n \geq 2$ και ότι ισχύουν οι συνθήκες $(1) - (6)$.

Έχουμε $T_{n+1} = T_n \cup p_nq_n$ και $T_n \cap p_nq_n = \{p_n\}$. Από τον ορισμό της h_n έπεται ότι $h_n(p_n) = r_n \in r_{n-1}s_{n-1} \cap R_n$. Από την ισότητα (5.4) υπάρχει ο μικρότερος φυσικός $i_{n+1} > i_n$ τέτοιος ώστε $r_n \in R(D_{i_{n+1}})$. Διαλέγουμε $s_n \in S_{i_{n+1}}(r_n) \cap R_{i_{n+1}+1}$.

Το αριθμήσιμο σύνολο $p_nq_n \cap R(D)$ μπορεί να συμπληρωθεί με αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο του p_nq_n. Επειδή το σύνολο $r_ns_n \cap R_{i_{n+1}}$ είναι αριθμήσιμο και πυκνό στο r_ns_n, από το Λήμμα 5.4.4 υπάρχει ομοιομορφισμός $h_{p_nq_n} : p_nq_n \to r_ns_n$ τέτοιος ώστε

$$h_{p_nq_n}(p_n) = r_n,\ h_{p_nq_n}(q_n) = s_n \text{ και } h_{p_nq_n}(p_nq_n) \cap R(D)) \subseteq r_ns_n \cap R_{i_{n+1}+1}.$$

Θέτουμε $\widetilde{T}_{i_{n+1}} = \widetilde{T}_{i_{n+1}} \cup r_n s_n$ και ορίζουμε τον ομοιομορφισμό $h_{n+1} : T_{n+1} \to \widetilde{T}_{i_{n+1}}$ ως εξής:

$$h_{n+1}(x) = \begin{cases} h_n(x), & \text{αν } x \in T_n, \\ h_{p_n q_n}(x), & \text{αν } x \in p_n q_n. \end{cases}$$

Επίσης ορίζουμε $g_{i_{n+1}, i_n} : D_{i_{n+1}} \to D_{i_n}$ ως εξής:

$$g_{i_{n+1}, i_n} = g_{i_{n+1}-1} \circ g_{i_{n+1}-2} \circ \cdots \circ g_{i_n}$$

Θέτουμε $\widetilde{g}_{n+1} = g_{i_{n+1}, i_n}\big|_{\widetilde{T}_n}$. Επειδή οι απεικονίσεις g_i είναι μονότονες, η $\widetilde{g}_n : \widetilde{T}_{i_{n+1}} \to \widetilde{T}_{i_n}$ είναι μονότονη.

Από το Θεώρημα 5.1.4 το αντίστροφο όριο $\widetilde{T}_\infty = \varprojlim \{\widetilde{T}_{i_n}, \widetilde{g}_n\}_{n=1}^\infty$ των δενδριτών $\{\widetilde{T}_{i_n}\}_{n=1}^\infty$ με μονότονες συνδετικές απεικονίσεις $\widetilde{g}_n : \widetilde{T}_{i_{n+1}} \to \widetilde{T}_{i_n}$ είναι δενδρίτης.

Από το Θεώρημα 5.2.2 ο δενδρίτης D είναι ομοιομορφικός με το αντίστροφο όριο $T_\infty = \varprojlim \{T_n, r_n\}_{n=1}^\infty$.

Από την ιδιότητα (6) συνεπάγεται ότι το παρακάτω διάγραμμα είναι αντιμεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
T_1 \arrow[d, "h_1"] & T_2 \arrow[l, "f_1"'] \arrow[d, "h_2"] & \cdots \arrow[l, "f_2"'] & T_n \arrow[l, "f_{n-1}"'] \arrow[d, "h_n"] & T_{n+1} \arrow[l, "f_n"'] \arrow[d, "h_{n+1}"] & \cdots T_\infty \arrow[l, "f_{n+1}"'] \arrow[d, "h_\infty"] \\
\widetilde{T}_{i_1} & \widetilde{T}_{i_2} \arrow[l, "\widetilde{g}_1"'] & \cdots \arrow[l, "\widetilde{g}_2"'] & \widetilde{T}_{i_n} \arrow[l, "\widetilde{g}_{n-1}"'] & \widetilde{T}_{i_{n+1}} \arrow[l, "\widetilde{g}_n"'] & \cdots \widetilde{T}_\infty \arrow[l, "\widetilde{g}_{n+1}"']
\end{tikzcd}$$

Θεωρούμε την απεικόνιση $h_\infty : T_\infty \to \widetilde{T}_\infty$, για την οποία $h_\infty\left(\{x_n\}_{n=1}^\infty\right) = \{h_n(x_n)\}_{n=1}^\infty$. Από το Θεώρημα 5.4.1 η h_∞ είναι ομοιομορφισμός.

Από τον ορισμό της ακολουθίας δένδρων $\{\widetilde{T}_{i_n}\}_{n=1}^\infty$ και της ακολουθίας των απεικονίσεων $\{\widetilde{g}_n\}_{n=1}^\infty$ συνεπάγεται ότι η αντίστροφη ακολουθία $\{\widetilde{T}_{i_n}, g_n\}_{n=1}^\infty$ ικανοποιεί της συνθήκες του Θεωρήματος 5.4.2. Επομένως ο δενδρίτης $\widetilde{T}_\infty$. είναι ομοιομορφικός με τον υποχώρο

$$\widetilde{T} = \mathrm{Cl}\left(\bigcup_{n=1}^\infty \widetilde{T}_{i_n}\right)$$

του δενδρίτη $D_\omega = \mathrm{Cl}\left(\bigcup_{i=1}^\infty D_i\right)$.

Συνεπώς ο δενδρίτης D είναι ομοιομορφικός με τον δενδρίτη $\widetilde{T} \subseteq D_\omega$.

Άρα, ο δενδρίτης D_ω είναι καθολικός.

□

Πόρισμα 5.4.5. *Κάθε δενδρίτης είναι ομοιομορφικός με έναν υποχώρο του επιπέδου.*

Βιβλιογραφία

[1] R. D. Anderson and Gustave Choquet, *A plane continuum no two of whose nondegenerate subcontinua are homeomorphic: an application of inverse limits*, Proc. Amer. Math. Soc., 10(1959), 347-353.

[2] G. Cantor, *Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten*, Math. Ann. 21 (1883), no. 4, 545-591.

[3] C. E. Capel, *Inverse limit spaces.*, Duke Math. Journal, 21 (1954), 233-245.

[4] J. J. Charatonik, *Monotone mappings of universal dendrites*, Topology Appl. 38 (1991), 163-187.

[5] J. J. Charatonik, W. J. Charatonik, J. R. Prajs, *Mapping hierarchy for dendrrites*, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) 333 (1994), 1-52.

[6] C. A. Eberhart and J. B. Fugate, *Approximating continua from within.* Fund. Math. 72 (1971), no. 3, 223-231.

[7] R. Engelking, *General Topology*, Warszawa, 1977.

[8] M. K. Fort and Jack Segal *Minimal representation of the hyperspace of a continnum*, Duke Math. J., 32 (1965), 129-138.

[9] F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre,* von Weit, Leipzig, 1914

[10] J. G. Hocking and G. S. Young, *Topology*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1961.

[11] W. T. Ingram, *A brief historical view of continuum theory*, Topology and its Applications 153 (2006), 1530-1539.

[12] C. Jordan, *Cours d'Analyse*, 2nd edition, 1893, vol.1.

[13] B. Knaster and K. Kuratowski, *Sur les ensembles connexes,* Fund. Math., 2(1921), 206-255.

[14] K. Kuratowski, *Topology, Vol. I*, New York, 1966.

[15] K. Kuratowski, *Topology, Vol. II*, New York, 1968.

[16] N. J. Lennes, *Curves in non-metrical analysis situs with applications in the calculus of variations,* Amer. J. Math., 33(1911), 287-326.

[17] K. Menger, *Kurventheorie*, Teubner Verlag, Leipzig and Berlin 1932 (reprinted by Chelsea Publ. Co., Bronx, NY 1967).

[18] K. Menger, *Ueber reguläre Baumkurven,* Math. Ann., 96, 1926, 572-582.

[19] K. Menger, *Zur allgemeinen Kurventheorie,*, Fund. Math. 10(1927), 96-115.

[20] S. B. Nadler, Jr. Continuum theory: An introduction, M. Dekker 1992.

[21] J. Nikiel, *A characterization of dendroids with uncountably many end points in the classical sence,* Houston J. Math.9 (1983), 421-432.

[22] J. Nikiel *On Gehman dendroid*, Glasnik Mat 20(40)(1985) 203-214.

[23] G. Nöbeling, *Eine Verschärfung des n-Beinsatzes*, Fund. Math. 18(1931), 23-38.

[24] F. Riesz, *Die Genesis des Raumbegriffes,* Math. u. Naturwiss, Berichte aus Ungarn, 24(1907), 309-353.

[25] N. E. Rutt, *Concerning the cut points of a continuous curve when the arc-curve, AB, contains exactly N independent arcs,* Amer. J. Math. 51 (1929), no. 2, 217-246.

[26] A. Schoenflies, *Beitra"ge zur Theorie der Punktmengen, I*, Math. Ann. 58 (1903), no. 1-2, 195-234.

[27] G. T. Whyburn, *On n-arc connectedness,* Trans. Amer. Math. Soc. 63, (1948). 452-456.

[28] T. Ważewski, *Sur les courbes de Jordan ne renfermant aucune courbe simple fermée de Jordan*, Annales de la Société Polonaise de Mathématique **2** (1923), 49-170.

[29] R. L. Wilder, *Evolution of the topological concept of "connected",* Amer. Math. Monthly 85 (1978), no. 9, 720-726.

[30] G. T. Whyburn, *Analytic Topology,* Amer. Math. Soc., 1942.

[31] L. Zippin, *Independent arcs of a continuous curve*, Ann. of Math., Vol. 34(1933), 95-113.

Ευρετήριο