



ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
«ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ
ΝΟΗΜΟΣΥΝΗ»

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**ΑΜΕΣΟΙ ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΠΙΛΥΣΗΣ
ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΛΟΓΙΣΜΟΥ ΤΩΝ
ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ**

ΣΙΜΑΓΙΑ ΣΤΑΥΡΟΥΛΑ Α.Μ 295

ΠΑΤΡΑ 2011

Επιβλέπων: Καθηγητής Χ. Ζαγούρας

Μέλη επιτροπής: Καθηγητής Χ. Ζαγούρας,

Επίκουρος Καθηγητής Δ. Καββαδίας,

Επίκουρη Καθηγήτρια Θ. Γράψα

Θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου προς τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κ. Χαράλαμπο Ζαγούρα για τη συνεργασία του καθ'όλη τη διάρκεια της παρούσας διπλωματικής εργασίας!

Ευχαριστώ, επίσης, θερμά τον κ. Άγγελο Μιμή του οποίου η βοήθεια και η συμπαράσταση ήταν χρήσιμες και πολύτιμες!

*Η εργασία αυτή αφιερώνεται στους γονείς μου
και τον Αχιλλέα !!!*

Περιεχόμενα

Περίληψη	7
Abstract	8
Κεφάλαιο 1	9
«Βασικές έννοιες»	9
1.1 Συναρτησιακό	9
1.2 Παραμετρική Μορφή	13
1.3 Γενίκευση στην περίπτωση περισσοτέρων αγνώστων μεταβλητών	14
1.3.1 Η κανονική μορφή του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων των Euler-Lagrange	16
1.4 Συναρτησιακά εξαρτώμενα από παραγώγους ανώτερης τάξης	20
1.5 Γενίκευση στην περίπτωση περισσότερων ανεξαρτήτων μεταβλητών	22
1.6 Προβλήματα Λογισμού Μεταβολών Με Δεσμούς	25
1.6.1 Δεσμοί της μορφής $j(x, y_1, \dots, y_n) = 0$	25
1.6.2 Δεσμοί της μορφής $j(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) = 0$	27
1.6.3 Ισοπεριμετρικά Προβλήματα	29
Κεφάλαιο 2	31
«Άμεσες Μέθοδοι »	31
2.1 Μέθοδος Πεπερασμένων Διαφορών του Euler	31
2.2 Μέθοδος του Ritz	33
2.3 Μέθοδος του Kantorovich	36
2.4 Μέθοδος Εύρεσης Ιδιοτιμών και Ιδιοσυναρτήσεων	39
2.5 Συμπεράσματα	41
Κεφάλαιο 3	42
«Εφαρμογή Άμεσων Μεθόδων»	42
3.1 Η γενική αριθμητική διαδικασία	42
3.2 Πρώτη Προσέγγιση	44
3.3 Δεύτερη Προσέγγιση	46
3.4 Τρίτη Προσέγγιση	47
3.5 Τέταρτη Προσέγγιση	48
3.6 Πέμπτη Προσέγγιση	50
3.7 Αριθμητικά Αποτελέσματα	50
3.8 Σύγκριση Μεθόδων	53
Κεφάλαιο 4	55
«Πρόσφατες Βελτιώσεις Άμεσων Μεθόδων »	55
4.1 Αριθμητική Επίλυση Προβλημάτων με χρήση Άμεσης Μεθόδου και Μη Κλασικής Παραμετροποίησης	55
4.2 Ένας νέος αλγόριθμος επίλυσης χρησιμοποιώντας τη θεωρία σύγκλισης του Wolfe	56
4.2.1 Αναδιατύπωση της θεωρίας σύγκλισης του Wolfe	57
4.2.2 Εφαρμογή του Αλγορίθμου	60
4.3 Συμπεράσματα	63
Κεφάλαιο 5	65
«Συμβολικά Συστήματα Και Λογισμός των Μεταβολών»	65
5.1 Πακέτο VariationalCalculus	65
5.2 Πακέτο VariationalMethods	75
«Συμπεράσματα»	80
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	81

Περίληψη

Στο πέρασμα των αιώνων, οι άνθρωποι αναζητούσαν νόμους που να περιγράφουν τα φαινόμενα του φυσικού κόσμου. Το 1744 ο Γάλλος επιστήμονας Pierre Louis Moreau de Maupertious έθεσε την αρχή ότι η φύση ενεργεί πάντα με τέτοιο τρόπο ώστε να ελαχιστοποιείται κάποια ποσότητα που ο ίδιος ονόμασε «δράση». Στη μαθηματική θεμελίωση της σχετικής θεωρίας των μεγίστων και ελαχίστων των βαθμωτών ποσοτήτων συνέβαλλε ο Ελβετός μαθηματικός Leonard Euler.

Στα προβλήματα του *Λογισμού των Μεταβολών* μελετάμε παραστάσεις που περιέχουν μία ή περισσότερες άγνωστες πραγματικές συναρτήσεις μιας ή περισσότερων πραγματικών μεταβλητών. Έτσι, αναζητούμε μια συνάρτηση που να δίνει στη συγκεκριμένη παράσταση μέγιστη ή ελάχιστη τιμή. Οι παραστάσεις αυτές ονομάζονται *συναρτησιακά* και αποτελούν μια γενίκευση της έννοιας της συνάρτησης.

Η διπλωματική αυτή εργασία αποτελεί μια βιβλιογραφική επισκόπηση των άμεσων μεθόδων που χρησιμοποιούνται στην επίλυση των προβλημάτων του λογισμού των μεταβολών. Κάτω από αυτό το πρίσμα, παρουσιάζονται οι προσεγγιστικές λύσεις, η εφαρμογή τους καθώς και οι πρόσφατες βελτιώσεις τους. Συγκεκριμένα, στο κεφάλαιο 1 αναφέρονται κάποιες βασικές έννοιες του λογισμού των μεταβολών. Στο κεφάλαιο 2 γίνεται λόγος για τέσσερις άμεσες μεθόδους επίλυσης συναρτησιακών προβλημάτων. Στο κεφάλαιο 3 περιγράφονται τέσσερις μέθοδοι, οι οποίες προσεγγίζουν τη λύση μη γραμμικών προβλημάτων του λογισμού των μεταβολών με ακρίβεια 2^{ns} τάξης ως συνάρτηση του μήκους βήματος. Στο κεφάλαιο 4 παρουσιάζονται κάποιες νέες τεχνικές επίλυσης των προβλημάτων που συζητήθηκαν. Στο κεφάλαιο 5 αναφέρεται η χρήση υποπρογραμμάτων (“packages”) που χρησιμοποιούνται μέσω συστημάτων λογισμικού όπως το Maple και το Mathematica.

Λέξεις κλειδιά: Λογισμός των μεταβολών, Άμεσες μέθοδοι.

Abstract

Over the centuries, people seeking laws that describe the phenomena of the natural world. In 1744 the French scientist Pierre Louis Moreau de Maupertious established the principle that nature always acts in such a way as to minimize a quantity he called 'action'. The Swiss mathematician Leonard Euler helped the mathematical foundations of the theory of maximum and minimum of the scalar quantities.

Problems of the *Calculus of Variations* contain unknown functions of one or more real variables. So, the aim is to find a function that maximizes an integral.

This project deals with direct methods which give approximate solutions to functional problems. Furthermore, their implementation and their recent improvements are described. Specifically, in Chapter 1 some basic concepts of calculus of variations are discussed. In chapter 2 four direct methods of solving functional problems are illustrated. In the chapter four methods which approximate the solution of nonlinear problems in the calculus of variations with second order accuracy in terms of the step length are described and some results are pointed out. Chapter 4 presents some new techniques to solve these problems. The chapter 5 refers the use of "packages" used by software systems such as Maple and Mathematica.

Key words: Calculus of variations, Direct methods.

Κεφάλαιο 1

«Βασικές έννοιες»

1.1 Συναρτησιακό

Έστω διάστημα $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$. Μια καμπύλη του χώρου \mathbb{R}^n είναι μια απεικόνιση

$$j : I \rightarrow \mathbb{R}^n$$

και είναι κλάσης C^k , δηλαδή με συνεχή παράγωγο k τάξης στο $[t_0, t_1]$, αν η j είναι κλάσης C^k . Το σύνολο των καμπύλων αυτών σημειώνεται $C^k(I, \mathbb{R}^n)$ και γενικά θα θεωρήσουμε καμπύλες σε ένα χώρο Banach E .

Για δοσμένη καμπύλη $j : I \rightarrow E$ κλάσης C^1 τέτοια ώστε

$$(x, j(x), j'(x)) \in U, \quad \forall x \in I \quad (1)$$

όπου $U \subset \mathbb{R} \times E \times E$, μπορούμε να ορίσουμε τον πραγματικό αριθμό

$$\int_a^b F(x, j(x), j'(x)) dx,$$

ο οποίος εξαρτάται από την j και τον σημειώνουμε $J[j]$.

Αν Ω είναι το σύνολο των καμπύλων j που ικανοποιούν την (1), ορίζουμε τη συνάρτηση κλάσης C^k

$$J : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

η οποία ονομάζεται συναρτησιακό επί του συνόλου Ω .

Ένα συναρτησιακό $L[j]$ που ικανοποιεί τις συνθήκες

$$i) L[cj] = cL[j], \text{ όπου } c \text{ σταθερή}$$

$$\text{ii) } L[j_1 + j_2] = L[j_1] + L[j_2]$$

ονομάζεται γραμμικό συναρτησιακό.

Θεωρούμε \bar{j} μια καμπύλη γειτονική της j . Η διαφορά $\bar{j} - j$ ονομάζεται μεταβολή της συνάρτησης j και συμβολίζεται dj .

Αν η μεταβολή ενός συναρτησιακού

$$\Delta J = J[j + dj] - J[j]$$

μπορεί να παρασταθεί με τη μορφή

$$\Delta J = L[j, dj] + e(j, dj) \max \|dj\|,$$

όπου $L[j, dj]$ είναι γραμμικό συναρτησιακό ως προς dj και $\max \|dj\|$ είναι η μέγιστη τιμή του $\|dj\|$ και

$$e(j, dj) \rightarrow 0, \text{ όταν } \max \|dj\| \rightarrow 0$$

τότε το $L[j, dj]$ λέγεται πρώτη μεταβολή του συναρτησιακού και σημειώνεται $dJ[j]$.

Η μεταβολή του συναρτησιακού $J[j]$ μπορεί να προσδιοριστεί ως η παράγωγος του συναρτησιακού $J[j + I dj]$ ως προς I στο σημείο $I = 0$.

Η συνάρτηση j_0 δίνει σχετικό ελάχιστο για το συναρτησιακό $J[j]$ αν ισχύει

$$\Delta J = J[j] - J[j_0] \geq 0$$

για όλες τις συναρτήσεις j που ανήκουν σε μια περιοχή της j_0 .

Αν $\Delta J = J[j] - J[j_0] \leq 0$ έχουμε σχετικό μέγιστο στην j_0 .

Θεώρημα

Αν j_0 είναι εσωτερικό σημείο του τύπου ορισμού του συναρτησιακού $J[j]$ το οποίο έχει στην j_0 μεταβολή $dJ[j_0]$ και παίρνει σχετικό μέγιστο ή ελάχιστο στην j_0 , τότε η μεταβολή $dJ[j_0]$ είναι μηδέν.

Δηλαδή, η μεταβολή ΔJ ενός συναρτησιακού J είναι μηδέν στις καμπύλες στις οποίες παίρνει σχετική μέγιστη ή ελάχιστη τιμή.

Θεώρημα

Έστω συνάρτηση F κλάσης C^1 ως προς x, y, y' στο U και υποθέτουμε ότι το συναρτησιακό J παίρνει σχετικό μέγιστο ή ελάχιστο στην $j_0 \in \Omega(y_1, y_2)$. Τότε

i) η $\frac{\partial F}{\partial y'}$ θεωρούμενη ως συνάρτηση του x έχει συνεχή παράγωγο στο I

και

$$\text{ii) } \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0, \quad \forall x \in I = [a, b]. \quad (2)$$

Η διαφορική εξίσωση (2) ονομάζεται διαφορική εξίσωση των Euler-Lagrange.

Παρατηρήσεις

i) Οι λύσεις της δ.ε των Euler-Lagrange που ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες $y(a) = y_1, y(b) = y_2$ ονομάζονται άκρες καμπύλες του συναρτησιακού $J[y]$. Σε όλες τις άκρες καμπύλες η πρώτη μεταβολή $dJ[y]$ μηδενίζεται όμως το συναρτησιακό $J[y]$ δεν παίρνει σχετικό ακρότατο υποχρεωτικά σε όλες.

ii) Η $F(x, y, y')$ δεν είναι πάντα γραμμική ως προς y και y' για αυτό η δ.ε των Euler-Lagrange είναι γενικά μια μη γραμμική δ.ε δεύτερης τάξης.

iii) Το συνοριακό πρόβλημα

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0, \quad y(a) = y_1, \quad y(b) = y_2$$

δεν έχει πάντα λύση και αν έχει λύση, μπορεί να μην είναι μοναδική.

iv) Στις εφαρμογές, μετά τη λύση της δ.ε των Euler-Lagrange, θα πρέπει να γίνεται έλεγχος ώστε να βρίσκουμε ποιες από τις λύσεις ικανοποιούν τις προϋποθέσεις του προβλήματος και αν το συναρτησιακό παίρνει σχετικό ακρότατο σε αυτές.

Υποθέτοντας ότι η $j_0''(x)$ υπάρχει για όλα τα $x \in I$ και η F είναι κλάσης C^2 ως προς x, y, y' στο U , από την (2) προκύπτει η δ.ε των Euler-Lagrange

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} j_0''(x) + \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y} j_0'(x) + \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Το πρόβλημα του βραχυστόχρονου¹

Να βρεθεί το σχήμα που πρέπει να έχει μια τσουλήθρα, η οποία ενώνει δύο σημεία A και B που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, ώστε ένα σώμα ολισθαίνοντας ελεύθερα επάνω σε αυτή, χωρίς αρχική ταχύτητα, να φτάσει από το ένα άκρο στο άλλο στον ελάχιστο δυνατό χρόνο.

Η ταχύτητα u του σώματος, λόγω διατήρησης της ενέργειας, είναι συνάρτηση μόνο του ύψους y και συγκεκριμένα

$$u = \frac{ds}{dt} = \sqrt{2gy}.$$

Οπότε, ο χρόνος που χρειάζεται το σώμα να φτάσει από το σημείο $A(0,0)$ στο σημείο $B(b, y_2)$, δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$t[y] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^b \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{y}} dx, \text{ όπου } y(0) = 0 \text{ και } y(b) = y_2.$$

Στο πρόβλημα αυτό η συνάρτηση F είναι πολύπλοκη και εξαρτάται τόσο από την y όσο και από την y' . Ύστερα από μερικές πράξεις η εξίσωση των Euler-Lagrange καταλήγει στη δ.ε

$$1 + (y')^2 + 2yy'' = 0,$$

στην οποία θέτουμε

¹ Το πρόβλημα αυτό τέθηκε την Πρωτοχρονιά του 1697 από τον Johann Bernoulli ως πρόκληση προς τους "καλύτερους μαθηματικούς όλου του κόσμου". Μη λαμβάνοντας απάντηση από τους γάλλους και τους ολλανδούς μαθηματικούς, ο Bernoulli απέστειλε το πρόβλημα στη Βασιλική Ακαδημία (Royal Society), η οποία στη συνέχεια το διαβίβασε στο Νεύτωνα. Ο Νεύτων έλυσε το πρόβλημα την ίδια κιόλας ημέρα και έστειλε τη σύντομη αλλά δυσνόητη λύση του ανωνύμως στον Bernoulli, ο οποίος αναγνώρισε από τον τρόπο επίλυσης του προβλήματος το συγγραφέα της λύσης, αναφωνώντας το περίφημο "εξ όνουχος τον λέοντα".

$$y' = p, \text{ \acute{a}\rho\alpha } y'' = p \frac{dp}{dy}.$$

Η δ.ε παίρνει τη μορφή

$$1 + p^2 + 2yp \frac{dp}{dy} = 0 \Rightarrow \frac{2pdp}{1+p^2} + \frac{dy}{y} = 0 \Rightarrow y(1+(y')^2) = c_1 = \text{σταθερά}.$$

Στη συνέχεια, θέτουμε $y' = sj s$, οπότε προκύπτει

$$y = \frac{c_1}{1+sj^2 s} = c_1 hm^2 s = \frac{c_1}{2}(1 - \sin 2s),$$

και

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{2c_1 hms \sin s}{sj s} ds = 2c_1 hm^2 s ds = c_1(1 - \sin 2s) ds.$$

Επομένως, παίρνουμε

$$x = c_1 \left(s - \frac{hm2s}{2} \right) + c_2 = \frac{c_1}{2}(2s - hm2s) + c_2,$$

όπου c_1, c_2 αυθαίρετες σταθερές.

1.2 Παραμετρική Μορφή

Σε αρκετές περιπτώσεις η λύση του προβλήματος εύρεσης άκρων τιμών ενός συναρτησιακού μπορεί να έχει τη μορφή κλειστής καμπύλης ή καμπύλης που τείνει να κλείσει επιστρέφοντας στις ίδιες τιμές του x . Για αυτό το λόγο μια λύση της μορφής $y = y(x)$ δεν είναι η καλύτερη δυνατή διότι μπορεί να μην είναι μονοσήμαντη.

Με τη χρήση, λοιπόν, τυχαίας παραμέτρου t το πρόβλημα εύρεσης άκρων τιμών του συναρτησιακού

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx, \quad y(a) = y_1, y(b) = y_2,$$

παίρνει τη μορφή

$$I[x, y] = \int_{t_0}^{t_1} F\left(x(t), y(t), \frac{\mathfrak{z}(t)}{\mathfrak{z}(t)}\right) \mathfrak{z}(t) dt,$$

όπου $x(t), y(t)$ συναρτήσεις κλάσης C^1 στο $[t_0, t_1]$ και

$$\begin{aligned} x(t_0) &= a, & x(t_1) &= b \\ y(t_0) &= y_1, & y(t_1) &= y_2. \end{aligned}$$

Η τελεία σημαίνει παράγωγο ως προς t .

Οι διαφορικές εξισώσεις των Euler-Lagrange είναι οι εξής

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F_0}{\partial \mathfrak{z}} \right) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F_0}{\partial \mathfrak{z}} \right) = 0$$

όπου $F_0 = F\left(x, y, \frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{z}}\right)$ και οι παράγωγοι $\frac{\partial F}{\partial \mathfrak{z}}, \frac{\partial F}{\partial \mathfrak{z}}$ θεωρούμενες ως συναρτήσεις

του t , έχουν συνεχή παράγωγο στο $[t_0, t_1]$.

Για τη λύση του προβλήματος επιλέγουμε μία από τις παραπάνω διαφορικές εξισώσεις σε συνδυασμό με τη σχέση που έχουμε επιλέξει για την παράμετρο t . Η επιλογή της δ.ε καθώς και της παραμέτρου γίνονται έτσι ώστε να προκύπτουν όσον το δυνατόν λιγότεροι και απλούστεροι υπολογισμοί. Αυτό, μάλιστα, επιτυγχάνεται διότι το ολοκλήρωμα του συναρτησιακού δεν αλλάζει με την αλλαγή της παραμέτρου.

1.3 Γενίκευση στην περίπτωση περισσοτέρων αγνώστων μεταβλητών

Θεωρούμε τη γενική μορφή του συναρτησιακού

$$J[y_1, y_2, \dots, y_n] = \int_a^b F(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n') dx,$$

με τις συνοριακές συνθήκες

$$y_1(a) = y_{1,1}, \quad y_2(a) = y_{2,1}, \quad \dots, \quad y_n(a) = y_{n,1}$$

$$y_1(b) = y_{1,2} \quad , \quad y_2(b) = y_{2,2} \quad , \dots , \quad y_n(b) = y_{n,2} .$$

Για την εύρεση των αναγκαίων συνθηκών έτσι ώστε το συναρτησιακό αυτό να παίρνει άκρα τιμή, θεωρούμε ότι μία μόνο από τις συναρτήσεις $y_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$ μεταβάλλεται ενώ οι υπόλοιπες μένουν αμετάβλητες. Επομένως, το συναρτησιακό $J[y_1, y_2, \dots, y_n]$ ανάγεται σε συναρτησιακό που εξαρτάται μόνο από μία συνάρτηση, π.χ. την $y_i(x)$, τότε $J = J_i[y_i]$. Προκύπτει ότι οι άκρες καμπύλες ικανοποιούν τη δ.ε των Euler-Lagrange

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y_i'} \right) = 0 .$$

Αναγόμεστε, επομένως, στο σύστημα δ.ε δεύτερης τάξης

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y_i'} \right) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n .$$

Ας θεωρήσουμε ότι το συναρτησιακό εξαρτάται μόνο από δύο συναρτήσεις, τις $y(x)$ και $z(x)$,

$$J[y, z] = \int_a^b F(x, y, z, y', z') dx ,$$

με συνοριακές συνθήκες

$$y(a) = y_1 \quad , \quad y(b) = y_2$$

$$z(a) = z_1 \quad , \quad z(b) = z_2 .$$

Οι καμπύλες $y = y(x)$ και $z = z(x)$, $x \in [a, b]$ στο χώρο (x, y, z) ικανοποιούν το σύστημα των δ.ε των Euler-Lagrange

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial z'} \right) = 0 .$$

1.3.1 Η κανονική μορφή του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων των Euler-Lagrange

Θεωρούμε το συναρτησιακό της μορφής

$$J[y, z] = \int_a^b F(x, y, z, y', z') dx$$

με το σύστημα των δ.ε των Euler-Lagrange

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial z'} \right) = 0.$$

Θέτουμε $u = \frac{\partial F}{\partial y'}$ και $w = \frac{\partial F}{\partial z'}$ και υποθέτουμε ότι οι εξισώσεις αυτές μπορούν να

λυθούν ως προς y' και z' , δηλαδή η Ιακωβιανή των $\frac{\partial F}{\partial y'}$, $\frac{\partial F}{\partial z'}$ ως προς y' και z'

είναι διάφορη του μηδενός.

Αντικαθιστούμε τη συνάρτηση F με τη συνάρτηση

$$G(x, y, z, u, w) = y'u + z'w - F = y' \frac{\partial F}{\partial y'} + z' \frac{\partial F}{\partial z'} - F,$$

η οποία υποθέτουμε τι εξαρτάται από τις νέες μεταβλητές u και w .

Έτσι, έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial y} &= \frac{dy'}{dy} u + \frac{dz'}{dy} w - \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{dy'}{dy} - \frac{\partial F}{\partial z'} \frac{dz'}{dy} \\ &= \frac{dy'}{dy} \frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{dz'}{dy} \frac{\partial F}{\partial z'} - \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{dy'}{dy} - \frac{\partial F}{\partial z'} \frac{dz'}{dy} \\ &= -\frac{\partial F}{\partial y}. \end{aligned}$$

Αντίστοιχα, βρίσκουμε

$$\frac{\partial G}{\partial z} = -\frac{\partial F}{\partial z} \quad , \quad \frac{\partial G}{\partial u} = y' \quad , \quad \frac{\partial G}{\partial w} = z' .$$

Ως αποτέλεσμα έχουμε ένα σύστημα τεσσάρων εξισώσεων πρώτης τάξης με συναρτήσεις τις y, z, u, w της ανεξάρτητης μεταβλητής x ,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial G}{\partial u} \quad , \quad \frac{dz}{dx} = \frac{\partial G}{\partial w} \quad , \quad \frac{du}{dx} = -\frac{\partial G}{\partial y} \quad , \quad \frac{dw}{dx} = -\frac{\partial G}{\partial z} .$$

Το σύστημα αυτό ονομάζεται κανονικό σύστημα των δ.ε των Euler-Lagrange και η συνάρτηση F σαν συνάρτηση της G γράφεται

$$F = u \frac{\partial G}{\partial u} + w \frac{\partial G}{\partial w} - G .$$

Γενικά, θεωρούμε το συναρτησιακό

$$J[y_1, y_2, \dots, y_n] = \int_a^b F(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) dx \quad (1)$$

και το αντίστοιχο σύστημα των δ.ε των Euler-Lagrange

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'_i} \right) = 0 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n .$$

Θέτουμε

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial y'_i}(x, j, j') \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

όπου $j = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ και υποθέτουμε ότι η Ιακωβιανή των $\frac{\partial F}{\partial y'_i}$ ως προς y'_i ,

$i = 1, 2, \dots, n$ είναι διάφορη του μηδενός.

Έστω ότι $y'_i = g_i(x, j, p)$, $i = 1, 2, \dots, n$ (3) όπου $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$,

άρα οι (2) γίνονται

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial y'_i}(x, \mathbf{j}, g(x, \mathbf{j}, p)) , \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \text{όπου } g = (g_1, g_2, \dots, g_n).$$

Από το σύστημα δ.ε των Euler-Lagrange παίρνουμε

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'_i} \right) = \frac{d}{dx} p_i = \frac{\partial F}{\partial y_i} \quad (4)$$

και επομένως λόγω των (2) και (3), αντικαθίσταται με τις δ.ε

$$\begin{aligned} \mathbf{j}' &= g(x, \mathbf{j}, p) \\ p' &= \frac{\partial F}{\partial y}(x, \mathbf{j}, g(x, \mathbf{j}, p)) . \end{aligned} \quad (5)$$

Χρησιμοποιώντας τη νέα συνάρτηση

$$\begin{aligned} H(x, \mathbf{j}, p) &= \sum_{i=1}^n g_i(x, \mathbf{j}, p) p_i - F(x, \mathbf{j}, g(x, \mathbf{j}, p)) \\ &= g(x, \mathbf{j}, p) p^T - F(x, \mathbf{j}, g(x, \mathbf{j}, p)) , \end{aligned}$$

όπου p^T πίνακας στήλη $n \times 1$, η λεγόμενη συνάρτηση του Hamilton, έχουμε

$$dH = g(dp)^T + p(d\mathbf{j})^T - dF .$$

Όμως,

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \sum_{k=1}^n \frac{\partial F}{\partial y_k} dy_k + \sum_{k=1}^n \frac{\partial F}{\partial y'_k} dg_k$$

και

$$g(dp)^T = \sum_{k=1}^n g_k dp_k , \quad p(d\mathbf{j})^T = \sum_{k=1}^n p_k dg_k , \quad p_k = \frac{\partial F}{\partial y'_k}$$

άρα

$$\begin{aligned}
 dH &= \sum_{k=1}^n g_k dp_k + \sum_{k=1}^n p_k dg_k - \frac{\partial F}{\partial x} dx - \sum_{k=1}^n \frac{\partial F}{\partial y_k} dy_k - \sum_{k=1}^n \frac{\partial F}{\partial y'_k} dg_k \\
 &= \sum_{k=1}^n g_k dp_k + \sum_{k=1}^n p_k dg_k - \frac{\partial F}{\partial x} dx - \sum_{k=1}^n \frac{\partial F}{\partial y_k} dy_k - \sum_{k=1}^n p_k dg_k \\
 &= \sum_{k=1}^n g_k dp_k - \frac{\partial F}{\partial x} dx - \sum_{k=1}^n \frac{\partial F}{\partial y_k} dy_k .
 \end{aligned}$$

Προκύπτουν οι σχέσεις

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial x} , \quad \frac{\partial H}{\partial y_k} = -\frac{\partial F}{\partial y_k} , \quad \frac{\partial H}{\partial p_k} = g_k \quad (6)$$

άρα το σύστημα (5) γίνεται

$$\begin{aligned}
 j' &= \frac{\partial H}{\partial p}(x, j, p) \\
 p' &= -\frac{\partial H}{\partial j}(x, j, p)
 \end{aligned}$$

και γράφεται αναλυτικά ως εξής

$$\frac{dy_i}{dx} = \frac{\partial H}{\partial p_i} , \quad \frac{dp_i}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial y_i} , \quad i = 1, 2, \dots, n$$

το οποίο ονομάζεται κανονικό σύστημα των δ.ε των Euler-Lagrange για το συναρτησιακό (1).

1.4 Συναρτησιακά εξαρτώμενα από παραγώγους ανώτερης τάξης

Θεωρούμε το συναρτησιακό

$$J[y] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) dx \quad (1)$$

όπου η συνάρτηση F είναι κλάσης C^{n+1} ως προς $x, y, y', \dots, y^{(n)}$ και τις συνοριακές συνθήκες

$$y(a) = y_1, \quad y'(a) = y'_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(a) = y_1^{(n-1)}$$

$$y(b) = y_2, \quad y'(b) = y'_2, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(b) = y_2^{(n-1)}. \quad (2)$$

Υποθέτουμε ότι το συναρτησιακό (1) παίρνει άκρα τιμή στην y_0 . Επομένως,

$$dJ[y_0] = \frac{d}{dI} J[y_0 + I dy] \Big|_{I=0}.$$

Άρα,

$$\begin{aligned} dJ[y_0] &= \left[\frac{d}{dI} \int_a^b F(x, y_0 + I dy, y'_0 + I dy', \dots, y_0^{(n)} + I dy^{(n)}) dx \right] \Big|_{I=0} \\ &= \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial y'} dy' + \dots + \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} dy^{(n)} \right] dx = 0. \end{aligned}$$

Ολοκληρώνουμε κατά παράγοντες και βρίσκουμε

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial y'} dy' dx = \frac{\partial F}{\partial y'} dy \Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) dy dx,$$

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial y''} dy'' dx = \frac{\partial F}{\partial y''} dy' \Big|_a^b - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y''} \right) dy \Big|_a^b + \int_a^b \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial y''} \right) dy dx,$$

.....

$$\begin{aligned} & \dots\dots \\ & \dots\dots \\ & \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} dy^{(n)} dx = \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} dy^{(n-1)} \Big|_a^b - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \right) dy^{(n-2)} \Big|_a^b + \dots + (-1)^n \int_a^b \frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \right) dy dx . \end{aligned}$$

Αν οι μεταβολές $dy, dy', dy'', \dots, dy^{(n-1)}$ εκλεγούν έτσι ώστε για $x=a$ και $x=b$ να είναι μηδέν, προκύπτει ότι

$$dJ = \int_a^b dy(x) \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial y''} \right) - \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \right) \right] dx = 0 \quad (3).$$

Λήμμα (Lagrange): Αν για κάθε συνεχή συνάρτηση $f(x)$ ισχύει

$$\int_a^b \Phi(x) f(x) dx = 0,$$

όπου η $\Phi(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[a, b]$, τότε είναι

$$\Phi(x) \equiv 0 \text{ στο } [a, b].$$

Στη σχέση (3) η μεταβολή $dy(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση, $dy(x) = y(x) - y_0(x)$, όπου η $y(x)$ είναι γειτονική συνάρτηση της $y_0(x)$ και ο όρος μέσα στην παρένθεση είναι συνεχής στην ίδια καμπύλη $y_0(x)$. Εφαρμόζοντας, επομένως, το παραπάνω λήμμα καταλήγουμε στην εξής δ.ε τάξης $2n$ των Euler-Poisson

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial y''} \right) - \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \right) = 0.$$

Η γενική της λύση θα περιέχει $2n$ αυθαίρετες σταθερές που θα προσδιορίζονται από τις δοσμένες συνοριακές συνθήκες του προβλήματος. Οι λύσεις που θα ικανοποιούν τις δοσμένες συνοριακές συνθήκες (2), ονομάζονται άκρες καμπύλες και πιθανώς το συναρτησιακό $J[y]$ να παίρνει σε αυτές άκρα τιμή.

1.5 Γενίκευση στην περίπτωση περισσότερων ανεξαρτήτων μεταβλητών

Θεωρούμε το συναρτησιακό

$$J[z] = \iint_D F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) dx dy,$$

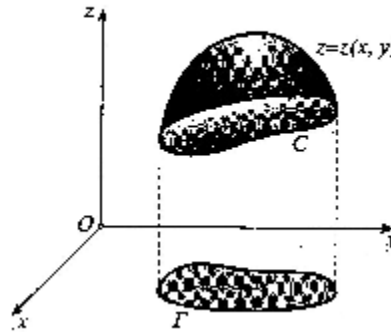
όπου οι τιμές της $z(x, y)$ είναι δοσμένες C_0 πάνω στο σύνορο Γ του τόπου D .

Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις F και $z(x, y)$ είναι κλάσης C^2 στον τόπο ορισμού τους. Το σύνολο των συναρτήσεων $z: D \rightarrow R$, που παίρνουν δοσμένες τιμές C_0 στο σύνορο Γ του D , το σημειώνουμε $W(\Gamma, C_0)$.

Αν z_0 είναι ένα τυχαίο στοιχείο του $W(\Gamma, C_0)$, κάθε άλλο στοιχείο του, z , γράφεται

$$z = z_0 + dz, \quad \text{όπου } dz \in W(\Gamma, 0).$$

Επομένως, από τις επιφάνειες $z = z(x, y)$ που διέρχονται από δοσμένη καμπύλη C του χώρου R^3 , ζητάμε εκείνη που δίνει άκρα τιμή στο συναρτησιακό $J[z]$.



Αν $z_0(x, y)$ είναι η ζητούμενη επιφάνεια τότε η μεταβολή $dJ[z_0]$ θα είναι μηδέν, όπου $dz(x, y) = 0$ στα σημεία (x, y) της καμπύλης Γ .

Όμως,

$$\frac{d}{dI} J[z_0 + I dz] \Big|_{I=0} = \iint_D \left[\frac{\partial F}{\partial z} dz + \frac{\partial F}{\partial p} dp + \frac{\partial F}{\partial q} dq \right] dx dy,$$

$$\text{όπου } p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad dp = \frac{\partial dz}{\partial x}, \quad dq = \frac{\partial dz}{\partial y}.$$

Άρα,

$$dJ[z_0] = \iint_D \left[\frac{\partial F}{\partial z} dz + \frac{\partial F}{\partial p} dp + \frac{\partial F}{\partial q} dq \right] dx dy = 0.$$

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \iint_D \left[\frac{\partial F}{\partial p} dp + \frac{\partial F}{\partial q} dq \right] dx dy &= \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial p} dz \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial q} dz \right) \right] dx dy - \\ &\quad - \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial p} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial q} \right) \right] dz dx dy, \end{aligned}$$

όπου

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial p} \right) = \frac{\partial^2 F}{\partial p \partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial p \partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial p^2} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial p \partial q} \frac{\partial q}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial q} \right) = \frac{\partial^2 F}{\partial q \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial q \partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial q \partial p} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial q^2} \frac{\partial q}{\partial y}.$$

Χρησιμοποιούμε τον τύπο του Green

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\Gamma} (Q dy + P dx)$$

και παίρνουμε

$$\iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial p} dz \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial q} dz \right) \right] dx dy = \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial F}{\partial p} dy - \frac{\partial F}{\partial q} dx \right) dz = 0,$$

λόγω του ότι στα σημεία της καμπύλης Γ είναι $dz = 0$.

Άρα, προκύπτει

$$\iint_D \left[\frac{\partial F}{\partial p} dp + \frac{\partial F}{\partial q} dq \right] dx dy = - \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial p} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial q} \right) \right] dz dx dy$$

και η αναγκαία συνθήκη για άκρα τιμή

$$\iint_D \left(\frac{\partial F}{\partial z} dz + \frac{\partial F}{\partial p} dp + \frac{\partial F}{\partial q} dq \right) dx dy = 0$$

γίνεται

$$\iint_D \left[\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial p} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial q} \right) \right] dz dx dy = 0.$$

Λήμμα (Ostrogradsky)

Αν $f(x, y)$ είναι συνεχής συνάρτηση στο D και το ολοκλήρωμα

$$\iint_D f(x, y) h(x, y) dx dy$$

μηδενίζεται για όλες τις συναρτήσεις $h(x, y)$ κλάσης C^1 στο D , που είναι μηδέν στο σύνορο Γ του τόπου D , τότε

$$f(x, y) \equiv 0, \forall (x, y) \in D.$$

Σύμφωνα με το παραπάνω λήμμα, θα είναι

$$\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial p} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial q} \right) = 0$$

στην επιφάνεια $z_0 = z_0(x, y)$ που δίνει άκρα τιμή στο συναρτησιακό. Η συγκεκριμένη δ.ε ονομάζεται διαφορική εξίσωση του Ostrogradsky, οι λύσεις της οποίας λέγονται άκρες επιφάνειες του συναρτησιακού $J[z]$, $w \in W(\Gamma, C_0)$.

Σε αυτές τις άκρες επιφάνειες η μεταβολή $dJ[z]$ μηδενίζεται αλλά το συναρτησιακό $J[z]$ δεν παίρνει αναγκαστικά σε όλες σχετικό μέγιστο ή ελάχιστο.

Θεωρούμε, τώρα, το συναρτησιακό

$$J[z] = \iint_D \dots \int F(x_1, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n,$$

όπου $z = z(x_1, x_2, \dots, x_n)$ και $p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}$.

Από τη βασική αναγκαία συνθήκη για άκρα τιμή $dJ = 0$, παίρνουμε την δ.ε Ostrogradsky

$$\frac{\partial F}{\partial z} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial F}{\partial p_i} \right) = 0,$$

που ικανοποιείται από κάθε συνάρτηση $z = z(x_1, x_2, \dots, x_n)$ που δίνει άκρα τιμή στο συναρτησιακό $J[z]$.

1.6 Προβλήματα Λογισμού Μεταβολών Με Δεσμούς

1.6.1 Δεσμοί της μορφής $j(x, y_1, \dots, y_n) = 0$

Θεωρούμε το συναρτησιακό

$$J[y_1, y_2, \dots, y_n] = \int_a^b F(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), y_1'(x), y_2'(x), \dots, y_n'(x))$$

και ζητάμε να βρούμε τη διανυσματική συνάρτηση $(y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))$, η οποία δίνει άκρα τιμή στο συναρτησιακό και ικανοποιεί τους δεσμούς

$$j_i(x, y_1, \dots, y_n) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m < n$$

και τις συνοριακές συνθήκες

$$y_j(a) = y_{j,1}, \quad y_j(b) = y_{j,2}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Υποθέτουμε ότι η F είναι κλάσης C^2 , οι j_i , $i = 1, 2, \dots, m$ είναι κλάσης C^1 και ανεξάρτητες στο $[a, b]$, δηλαδή

$$\frac{D(j_1, j_2, \dots, j_m)}{D(y_1, y_2, \dots, y_m)} \neq 0, \quad \forall x \in [a, b].$$

Θεώρημα

Αν i) οι συναρτήσεις $y_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$ δίνουν άκρα τιμή στο συναρτησιακό

$$J[y_1, \dots, y_n] = \int_a^b F(x, y_1(x), \dots, y_n(x), y_1'(x), \dots, y_n'(x)) dx,$$

$$y_j(a) = y_{j,1}, \quad y_j(b) = y_{j,2}, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

και ii) ικανοποιούν τους δεσμούς

$$j_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m < n$$

τότε

α) Οι συναρτήσεις $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ ικανοποιούν, για κατάλληλα εκλεγμένες συναρτήσεις $I_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, m$, το σύστημα των δ.ε των Euler-Lagrange το αντίστοιχο του συναρτησιακού

$$J^*[y_1, \dots, y_n] = \int_a^b \left[F + \sum_{i=1}^m I_i(x) j_i \right] dx = \int_a^b F^* dx,$$

$$\text{όπου } F^* = F + \sum_{i=1}^m I_i(x) j_i .$$

β) Οι συναρτήσεις $I_i(x)$ και $y_i(x)$ προσδιορίζονται από το σύστημα των δ.ε

$$\frac{\partial F^*}{\partial y_j} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F^*}{\partial y'_j} \right) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

τους δεσμούς

$$j_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m < n$$

και τις συνοριακές συνθήκες

$$y_j(a) = y_{j,1}, \quad y_j(b) = y_{j,2}, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

γ) Οι εξισώσεις $j_i = 0, i = 1, 2, \dots, m$ μπορούν να θεωρηθούν ως δ.ε των Euler-Lagrange για το συναρτησιακό J^* , αν θεωρήσουμε ως ανεξάρτητες μεταβλητές, όχι μόνο τις y_1, y_2, \dots, y_n , αλλά και τις $I_1(x), I_2(x), \dots, I_m(x)$.

1.6.2 Δεσμοί της μορφής $j(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) = 0$

Θεωρούμε το συναρτησιακό

$$J[y_1, y_2, \dots, y_n] = \int_a^b F(x, y_1(x), \dots, y_n(x), y'_1(x), \dots, y'_n(x)) dx$$

και θέλουμε να προσδιορίσουμε τις συναρτήσεις $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$, οι οποίες δίνουν άκρες τιμές στο συναρτησιακό και ικανοποιούν τους δεσμούς

$$j_i(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m < n.$$

Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις F, j_i είναι κλάσης C^2 και ισχύει

$$\frac{D(j_1, j_2, \dots, j_m)}{D(y'_1, y'_2, \dots, y'_m)} \neq 0.$$

Προκύπτουν οι διαφορικές εξισώσεις

$$y'_j = g_i(x, y_1, \dots, y_n, y'_{m+1}, \dots, y'_n), \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (1)$$

και αν οι συναρτήσεις $y_{m+1}, y_{m+2}, \dots, y_n$ θεωρηθούν ανεξάρτητες τότε οι εξισώσεις (1) αποτελούν σύστημα από το οποίο υπολογίζονται οι y_1, y_2, \dots, y_m .

Οι συναρτήσεις $y_{m+1}, y_{m+2}, \dots, y_n$ είναι αυθαίρετες και ανεξάρτητες συναρτήσεις κλάσης C^1 που έχουν μόνο τις συνοριακές συνθήκες καθορισμένες.

Οι συναρτήσεις $y(x_1), y(x_2), \dots, y(x_n)$ που αναζητούμε, οι οποίες δίνουν σχετικό μέγιστο ή ελάχιστο στο συναρτησιακό J , και οι πολλαπλασιαστές $I_1(x), I_2(x), \dots, I_m(x)$ πληρούν το σύστημα των $n \times m$ εξισώσεων

$$\frac{\partial F^*}{\partial y_j} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F^*}{\partial y'_j} \right) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$j_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m < n,$$

Δηλαδή πληρούν το σύστημα δ.ε των Euler-Lagrange του βοηθητικού συναρτησιακού

$$J^*[y_1, y_2, \dots, y_n, I_1, I_2, \dots, I_m] = \int_a^b F^* dx,$$

όπου

$$F^* = F + \sum_{i=1}^m I_i(x) j_i.$$

Από τις λύσεις επιθυμητές είναι εκείνες που ικανοποιούν τις δοσμένες συνοριακές συνθήκες και δεσμούς και οι οποίες ονομάζονται άκρες καμπύλες του συναρτησιακού J^* .

1.6.3 Ισοπεριμετρικά Προβλήματα

Ισοπεριμετρικά προβλήματα ονομάζονται τα προβλήματα όπου ζητείται ο προσδιορισμός ενός γεωμετρικού σχήματος με μέγιστο ή ελάχιστο εμβαδόν, δεδομένης της περιμέτρου του.

Θεώρημα

Αναγκαία συνθήκη για να παίρνει το συναρτησιακό

$$J[y_1, \dots, y_n] = \int_a^b F(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n') dx$$

$$y_j(a) = y_{j,1} \quad , \quad y_j(b) = y_{j,2}$$

άκρα τιμή και να ισχύουν οι δεσμοί (ισοπεριμετρικές συνθήκες)

$$\int_a^b f_i(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n') dx = l_i \quad , \quad i = 1, 2, \dots, m$$

όπου l_i είναι δοσμένες σταθερές και $m \in \mathbb{Z}$, είναι

$$\frac{\partial F_0^*}{\partial y_j} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F_0^*}{\partial y_j'} \right) = 0 \quad , \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (*)$$

όπου

$$F_0^* = F + \sum_{i=1}^m l_i f_i \quad \text{και} \quad F, f_i \quad , \quad i = 1, 2, \dots, m \quad \text{συναρτήσεις κλάσης } C^2.$$

Άρα, για τη λύση ενός ισοπεριμετρικού προβλήματος, απαιτείται η εύρεση διανυσματικής συνάρτησης $(y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))$. Οι $2n$ αυθαίρετες σταθερές της

λύσης του (*) καθώς και οι σταθερές I_1, I_2, \dots, I_m προσδιορίζονται από τις ιστοπεριμετρικές και συνοριακές συνθήκες.

Κεφάλαιο 2

«Άμεσες Μέθοδοι»

Σε πολλές περιπτώσεις η διαφορική εξίσωση των Euler-Lagrange του συναρτησιακού προβλήματος δεν μπορεί να λυθεί αναλυτικά. Για αυτό και οδηγηθήκαμε στην ιδέα των λεγόμενων άμεσων μεθόδων ([5],[12],[1]). Σύμφωνα με τις άμεσες μεθόδους το συναρτησιακό πρόβλημα θεωρείται σαν οριακή περίπτωση κάποιου προβλήματος άκρων τιμών συνάρτησης με πεπερασμένο πλήθος μεταβλητών. Λύνοντας το πρόβλημα, παίρνουμε προσεγγιστικές λύσεις και στην περίπτωση που υπάρχει το όριο, όταν $n \rightarrow \infty$, βρίσκουμε τη λύση του.

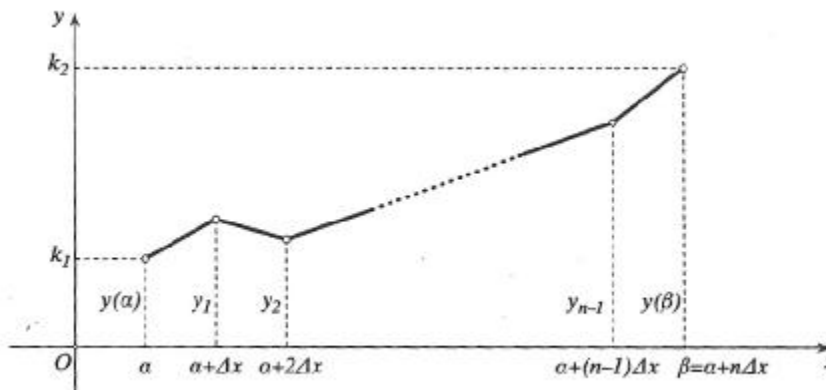
2.1 Μέθοδος Πεπερασμένων Διαφορών του Euler

$$\text{Θεωρούμε το συναρτησιακό } J[y] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x)) dx \quad (1)$$

και τις συνοριακές συνθήκες $y(a) = k_1$, $y(b) = k_2$ (2).

Με τη μέθοδο πεπερασμένων διαφορών του Euler ([12],[16],[1]), θεωρούμε τις τιμές του συναρτησιακού (1) σε πολυγωνικές καμπύλες (και όχι σε καμπύλες κλάσης C^1 στο $[a, b]$), που ενώνουν n δοσμένα σημεία στις συνιστώσες του x :

$$a + \Delta x, a + 2\Delta x, \dots, a + (n-1)\Delta x, \text{ όπου } \Delta x = \frac{b-a}{n}.$$



Σε αυτές τις πολυγωνικές καμπύλες, το συναρτησιακό (1) εξαρτάται από τα σημεία y_1, y_2, \dots, y_{n-1} ,

$$J[y] \cong \Phi(y_1, y_2, \dots, y_{n-1}),$$

τα οποία επιλέγονται έτσι ώστε η συνάρτηση να μπορεί να πάρει άκρα τιμή (σχετικό μέγιστο ή ελάχιστο) και τα οποία προσδιορίζονται από τις λύσεις των εξισώσεων

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_1} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y_2} = 0, \dots, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y_{n-1}} = 0. \quad (3)$$

Με τον τρόπο αυτό βρίσκουμε μια πολυγωνική καμπύλη, η οποία προσεγγίζει την άκρα καμπύλη του συναρτησιακού προβλήματος (1), (2).

Σε αυτές τις πολυγωνικές καμπύλες έχουμε, προσεγγιστικά, το ολοκλήρωμα

$$J[y] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x)) dx \cong \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a+k\Delta x}^{a+(k+1)\Delta x} F\left(x, y, \frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta x}\right) \Delta x,$$

που αντικαθίσταται με το άθροισμα

$$\sum_{i=0}^{n-1} F\left(x_i, y_i, \frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right) \Delta x,$$

όπου $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$, $x_i = a + i\Delta x$ ($x_0 = a$, $x_n = b$).

Επομένως, έχουμε

$$J[y] \cong \Phi(y_1, y_2, \dots, y_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} F\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}\right) \Delta x.$$

Το σημείο y_i υπάρχει μόνο στους εξής δύο όρους του αθροίσματος

$$F\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}\right) \Delta x \quad \text{και} \quad F\left(x_{i-1}, y_{i-1}, \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x}\right) \Delta x$$

για αυτό οι εξισώσεις $\frac{\partial \Phi}{\partial y_i} = 0$, $i = 1, 2, \dots, n-1$

παίρνουν τη μορφή

$$\begin{aligned} & \frac{\partial F}{\partial y} \left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x} \right) \Delta x + \frac{\partial F}{\partial y'} \left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x} \right) \left(-\frac{1}{\Delta x} \right) \Delta x + \\ & + \frac{\partial F}{\partial y'} \left(x_{i-1}, y_{i-1}, \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x} \right) \frac{1}{\Delta x} \Delta x = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \end{aligned}$$

ή

$$\frac{\partial F}{\partial y} \left(x_i, y_i, \frac{\Delta y_i}{\Delta x} \right) - \frac{\frac{\partial F}{\partial y'} \left(x_i, y_i, \frac{\Delta y_i}{\Delta x} \right) - \frac{\partial F}{\partial y'} \left(x_{i-1}, y_{i-1}, \frac{\Delta y_{i-1}}{\Delta x} \right)}{\Delta x} = 0,$$

ή ακόμη

$$\frac{\partial F}{\partial y} \left(x_i, y_i, \frac{\Delta y_i}{\Delta x} \right) - \frac{\Delta}{\Delta x} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Τέλος, παίρνουμε το όριο, όταν $n \rightarrow \infty$, και καταλήγουμε στη δ.ε των Euler-Lagrange

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0,$$

που πρέπει να ικανοποιείται από την άκρα καμπύλη $y(x)$, $x \in [a, b]$.

2.2 Μέθοδος του Ritz

Σύμφωνα με τη μέθοδο του Ritz ([5],[12],[1]) αναζητούμε άκρες καμπύλες του συναρτησιακού $J[y]$ μόνο σε όλους τους γραμμικούς συνδυασμούς των παραδεκτών συναρτήσεων της μορφής

$$y_n(x) = \sum_{i=1}^n a_i j_i(x), \quad (1)$$

και όχι μέσα σε όλο το χώρο των παραδεκτών συναρτήσεων, όπου τα a_i είναι σταθερές και οι συναρτήσεις $j_1(x), j_2(x), \dots, j_n(x)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες και

σχηματίζουν ένα πλήρες σύστημα συναρτήσεων στο χώρο που θεωρούμε. Επίσης, θα πρέπει να πληρούν τις καθορισμένες ιδιότητες και τις συνοριακές συνθήκες του συναρτησιακού προβλήματος.

Σε αυτούς τους γραμμικούς συνδυασμούς $y_n(x)$ το συναρτησιακό $J[y]$ γίνεται συνάρτηση των σταθερών a_i , δηλαδή

$$J[y_n] = \Phi(a_1, a_2, \dots, a_n) \quad (2)$$

και οι οποίες επιλέγονται έτσι ώστε η συνάρτηση $\Phi(a_1, a_2, \dots, a_n)$ να μπορεί να πάρει άκρα τιμή (σχετικό μέγιστο ή ελάχιστο).

Επομένως, οι σταθερές προσδιορίζονται από τις λύσεις των εξισώσεων

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial a_2} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial a_n} = 0. \quad (3)$$

Στη συνέχεια, παίρνουμε το όριο, για $n \rightarrow \infty$, αν αυτό υπάρχει, και βρίσκουμε τη συνάρτηση

$$y(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_j \cdot j_i(x),$$

η οποία μπορεί να είναι λύση του συναρτησιακού προβλήματος κάτω από ορισμένες συνθήκες.

Αν δεν πάρουμε το όριο, όταν $n \rightarrow \infty$, τότε η συνάρτηση $y_n(x)$ αποτελεί μια προσεγγιστική λύση του προβλήματος.

Με αυτόν τον τρόπο η προσέγγιση του απόλυτου ελαχίστου δίνει τιμή μεγαλύτερη του ακριβούς απόλυτου ελαχίστου, ενώ η προσέγγιση του απόλυτου μέγιστου δίνει τιμή μικρότερη του ακριβούς απόλυτου μέγιστου. Αυτό συμβαίνει διότι με τη συγκεκριμένη μέθοδο, περιοριζόμαστε σε ένα υποσύνολο του χώρου των παραδεκτών συναρτήσεων.

Σημειώνουμε ότι αν ισχύει

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J[y] = \text{μέγιστο ή ελάχιστο } J[y]$$

δεν προκύπτει ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$.

Το όριο y μπορεί να μην ανήκει στην κλάση των παραδεκτών συναρτήσεων.

Η επιτυχία της μεθόδου του Ritz εξαρτάται από την εκλογή των συναρτήσεων $j_1(x), j_2(x), \dots, j_n(x), \dots$.

Για τον εντοπισμό των άκρων τιμών του συναρτησιακού $J[z]$, όπου $z = z(x_1, x_2, \dots, x_n)$, εκλέγουμε ένα σύστημα συνιστωσών συναρτήσεων

$$j_1(x_1, x_2, \dots, x_n), j_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, j_m(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots$$

στο χώρο των παραδεκτών συναρτήσεων και αναζητούμε μια προσεγγιστική λύση του συναρτησιακού προβλήματος με μορφή

$$z_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^m a_k j_k(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

όπου a_k σταθερές.

Το συναρτησιακό $J[z]$ γίνεται συνάρτηση των a_1, a_2, \dots, a_m , δηλαδή

$$J[z_m] = \Phi(a_1, a_2, \dots, a_m),$$

όπου οι σταθερές επιλέγονται έτσι ώστε η συνάρτηση $J = \Phi(a_1, a_2, \dots, a_m)$ να μπορεί να πάρει άκρα τιμή και οι τιμές τους προσδιορίζονται από τις λύσεις των εξισώσεων

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial a_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial a_m} = 0.$$

Με τις τιμές αυτές των σταθερών a_1, a_2, \dots, a_m η συνάρτηση $z_m(x_1, x_2, \dots, x_n)$ αποτελεί μια προσεγγιστική λύση του συναρτησιακού προβλήματος.

Παρατηρήσεις

1) Αν οι συνοριακές συνθήκες είναι $y(a) = k_1$, $y(b) = k_2$ με $k_1 \neq 0$ ή $k_2 \neq 0$, αναζητούμε προσεγγιστική λύση της μορφής

$$y_n(x) = \sum_{i=1}^n a_i j_i(x) + j_0(x),$$

όπου η $j_0(x)$ επαληθεύει τις συνοριακές συνθήκες $j_0(a) = k_1$, $j_0(b) = k_2$ και οι $j_i(x)$ επαληθεύουν τις συνοριακές συνθήκες $j_i(a) = j_i(b) = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. Μπορούμε για τη συνάρτηση $j_0(x)$ να διαλέξουμε τη γραμμική εξίσωση

$$j_0(x) = \frac{k_2 - k_1}{b - a}(x - a) + k_1.$$

2) Αν η συνοριακή συνθήκη είναι $z|_{\Gamma} = c_0$, $c_0 \neq 0$, αναζητούμε προσεγγιστική λύση της μορφής

$$z_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^m a_k j_k(x_1, x_2, \dots, x_n) + j_0(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

όπου η $j_0(x_1, x_2, \dots, x_n)$ επαληθεύει τη συνοριακή συνθήκη $j_0|_{\Gamma} = c_0$ και οι επαληθεύουν τις συνοριακές συνθήκες $j_k|_{\Gamma} = 0$, $k = 1, 2, \dots, m$.

3) Αν οι συνοριακές συνθήκες είναι $y(a) = y(b) = 0$ τότε για το σύστημα των συνιστωσών συναρτήσεων εκλέγουμε τις συναρτήσεις

$$(x - a)(x - b)j_i(x),$$

όπου οι $j_i(x)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις

ή τις συναρτήσεις $hm \frac{ip(x-a)}{b-a}$, $i = 1, 2, \dots$.

2.3 Μέθοδος του Kantorovich

Σύμφωνα με τη μέθοδο του Kantorovich ([5],[12],[1]) αναζητούμε προσεγγίσεις των άκρων επιφανειών του συναρτησιακού $J[z]$, όπου $z = z(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $n \geq 2$ εκλέγοντας ένα σύστημα συνιστωσών συναρτήσεων

$$j_1(x_1, x_2, \dots, x_n), j_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, j_m(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Η διαφορά με τη μέθοδο του Ritz είναι ότι η προσεγγιστική λύση είναι της μορφής

$$z_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^m u_k(x_i) j_k(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

δηλαδή αντί να υπάρχουν σταθερές a_k , έχουμε συναρτήσεις $u_k(x_i)$ κάποιας μεταβλητής x_i .

Η μέθοδος του Kantorovich δίνει καλύτερες προσεγγιστικές λύσεις του συναρτησιακού προβλήματος από τη μέθοδο του Ritz αφού η κλάση των συναρτήσεων

$$z_m = \sum_{k=1}^m u_k(x_i) j_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

είναι μεγαλύτερη από την κλάση των συναρτήσεων

$$z_m = \sum_{k=1}^m a_k j_k(x_1, x_2, \dots, x_n), \text{ όπου } a_k \text{ σταθερές.}$$

Το συναρτησιακό $J[z]$ στην κλάση των συναρτήσεων $z_m = \sum_{k=1}^m u_k(x_i) j_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$ γίνεται

$$J[z_m] = J_1[u_1, u_2, \dots, u_m],$$

δηλαδή το συναρτησιακό $J[z]$ εξαρτάται από τις m συναρτήσεις $u_1(x_i), u_2(x_i), \dots, u_m(x_i)$, οι οποίες εκλέγονται έτσι ώστε να είναι άκρα καμπύλη του συναρτησιακού $J_1[u_1, u_2, \dots, u_m]$.

Παίρνουμε το όριο, όταν $m \rightarrow \infty$ και αν αυτό υπάρχει, βρίσκουμε τη συνάρτηση

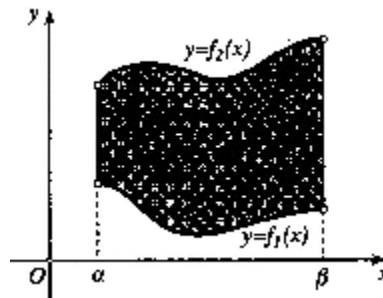
$$z(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x_i) j_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

η οποία μπορεί να είναι λύση του συναρτησιακού προβλήματος. Στην περίπτωση που δεν πάρουμε το όριο, όταν $m \rightarrow \infty$, τότε η συνάρτηση $z_m(x_1, x_2, \dots, x_n)$ αποτελεί μια πιο ακριβή προσεγγιστική λύση του συναρτησιακού προβλήματος απ'ότι εκείνη της μεθόδου του Ritz.

Στο παράδειγμα που ακολουθεί εξετάζουμε τις άκρες επιφάνειες του συναρτησιακού

$$J[z] = \iint_D F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) dx dy ,$$

όπου D είναι ο τόπος που περικλείεται από τις καμπύλες $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ και τις ευθείες $x = a$ και $x = b$. Επιπλέον, γνωρίζουμε τις τιμές της συνάρτησης $z(x, y)$ στο σύνορο Γ του τόπου D , δηλαδή $z|_{\Gamma} = c_0$.



Εκλέγουμε ένα σύστημα συνιστωσών συναρτήσεων

$$j_1(x, y), j_2(x, y), \dots, j_m(x, y), \dots \quad \text{όπου } j_i \in C^2(D, R), i = 1, 2, \dots$$

και αναζητούμε προσέγγιση των άκρων επιφανειών του συναρτησιακού της μορφής

$$z_m(x, y) = u_1(x)j_1(x, y) + u_2(x)j_2(x, y) + \dots + u_m(x)j_m(x, y) ,$$

όπου οι άγνωστες συναρτήσεις $u_1(x), u_2(x), \dots, u_m(x)$ προσδιορίζονται έτσι ώστε το συναρτησιακό $J_1[u_1, u_2, \dots, u_m]$ να μπορεί να πάρει άκρα τιμή.

Έχουμε, λοιπόν

$$\begin{aligned}
J[z_m] &= \iint_D F\left(x, y, z_m(x, y), \frac{\partial z_m}{\partial x}, \frac{\partial z_m}{\partial y}\right) dx dy = \\
&= \int_a^b dx \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} F\left(x, y, z_m(x, y), \frac{\partial z_m}{\partial x}, \frac{\partial z_m}{\partial y}\right) dy \int_a^b y^2(x) dx = 1. \\
&= \int_a^b \Phi(x, u_1(x), \dots, u_m(x), u_1'(x), \dots, u_m'(x)) dx = J_1[u_1, u_2, \dots, u_m].
\end{aligned}$$

Οι συναρτήσεις $u_i(x)$, $i=1,2,\dots,m$ εκλέγονται έτσι ώστε το συναρτησιακό $J_1[u_1, u_2, \dots, u_m]$ να μπορεί να πάρει άκρα τιμή. Επομένως, θα πρέπει να είναι λύση του συστήματος των δ.ε των Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_i'} \right) = 0, \quad i=1,2,\dots,m.$$

Οι αυθαίρετες σταθερές της λύσης του συστήματος των δ.ε εκλέγονται έτσι ώστε η συνάρτηση $z_m(x, y)$ να ικανοποιεί τη συνοριακή συνθήκη $z|_{\Gamma} = c_0$.

2.4 Μέθοδος Εύρεσης Ιδιοτιμών και Ιδιοσυναρτήσεων

Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d}{dx}(p(x)y') - q(x)y - Iy = 0, \quad x \in [a, b] \quad (1)$$

όπου η συνάρτηση $p(x)$ είναι κλάσης C^1 και θετική, $q(x)$ είναι συνεχής και I είναι πραγματικός ή μιγαδικός αριθμός. Η διαφορική εξίσωση (1) μαζί με τις συνοριακές συνθήκες $y(a)=0$, $y(b)=0$ (2) ονομάζεται πρόβλημα συνοριακών τιμών των Sturm-Liouville ([5],[12],[1]).

Το πρόβλημα συνοριακών τιμών των Sturm-Liouville έχει πάντα λύση, τη μηδενική λύση $y(x) \equiv 0$.

Οι τιμές της παραμέτρου $-I$, για τις οποίες το πρόβλημα έχει μη μηδενικές λύσεις $y(x) \neq 0$, ονομάζονται ιδιοτιμές και οι αντίστοιχες λύσεις ονομάζονται ιδιοσυναρτήσεις.

Έστω το συναρτησιακό

$$J[y] = \int_a^b [p(x)(y')^2 + q(x)y^2] dx \quad (3)$$

με τις συνοριακές συνθήκες $y(a) = 0$, $y(b) = 0$ (2) και την ισοπεριμετρική συνθήκη

$$\int_a^b y^2(x) dx = 1. \quad (4)$$

Παρατηρούμε ότι η διαφορική εξίσωση (1) είναι η διαφορική εξίσωση των Euler-Lagrange που αντιστοιχεί στο παραπάνω ισοπεριμετρικό πρόβλημα (3), (2), (4). Μια λύση του ισοπεριμετρικού προβλήματος θα είναι, επίσης, λύση του συνοριακού προβλήματος (1), (2).

Επομένως, οι ιδιοτιμές και οι ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος συνοριακών τιμών των Sturm-Liouville (1), (2) λέγονται, επίσης, οι ιδιοτιμές και οι ιδιοσυναρτήσεις του ισοπεριμετρικού προβλήματος (3), (2), (4).

Η ιδιοσυνάρτηση $y(x)$ λέγεται *κανονικοποιημένη*, αν ικανοποιεί τη συνθήκη

$$\int_a^b y^2(x) dx = 1.$$

Ιδιότητες των Ιδιοτιμών και των Ιδιοσυναρτήσεων

- 1) Αν I_m και I_n είναι δύο διαφορετικές ιδιοτιμές του συναρτησιακού (3), (2), (4) και $y_m(x)$ και $y_n(x)$ είναι οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις, τότε οι συναρτήσεις αυτές είναι ορθογώνιες, δηλαδή

$$\int_a^b y_m(x)y_n(x) dx = 0, \quad m \neq n$$

- 2) Όλες οι ιδιοτιμές του προβλήματος (3),(2),(4) είναι πραγματικοί αριθμοί,

$$I_1 < I_2 < I_3 < \dots < I_n < I_{n+1} < \dots \quad \text{με} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = +\infty.$$

- 3) Αν I_n είναι ιδιοτιμή του προβλήματος (3), (2), (4) και $y_n(x)$ είναι η αντίστοιχη ιδιοσυνάρτηση, τότε

$$J[y_n] = I_n.$$

- 4) Η μικρότερη ιδιοτιμή ταυτίζεται με την απόλυτη ελάχιστη τιμή του συναρτησιακού (3), (2), (4).

2.5 Συμπεράσματα

Συνοψίζοντας, όπως, αρχικά, αναφέρθηκε οι λεγόμενες άμεσες μέθοδοι δίνουν στα συναρτησιακά προβλήματα προσεγγιστικές λύσεις. Η χρήση τους είναι σημαντική αφού είναι πολλές οι περιπτώσεις στις οποίες η δ.ε των Euler-Lagrange δεν μπορεί να επιλυθεί αναλυτικά.

Η μέθοδος πεπερασμένης διαφοράς του Euler αναζητάει άκρες καμπύλες του συναρτησιακού $J[y]$ μέσα σε όλο το χώρο των παραδεκτών συναρτήσεων σε αντίθεση με τη μέθοδο του Ritz, η οποία αναζητάει άκρες καμπύλες αποκλειστικά και μόνο στους γραμμικούς συνδυασμούς των παραδεκτών συναρτήσεων της μορφής

$$y_n(x) = \sum_{i=1}^n a_i j_i(x), \text{ όπου τα } a_i \text{ είναι σταθερές και οι συναρτήσεις } j_i(x), i = 1, 2, \dots, n$$

είναι γραμμικώς ανεξάρτητες. Με τη συγκεκριμένη μέθοδο, λοιπόν, περιοριζόμαστε σε ένα υποσύνολο του χώρου των παραδεκτών συναρτήσεων.

Σύμφωνα, με τη μέθοδο του Kantorovich, αναζητούμε προσεγγίσεις των άκρων επιφανειών $J[z]$, όπου $z = z(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $n \geq 2$ όπου η διαφορά με τη μέθοδο του Ritz είναι ότι η προσεγγιστική λύση είναι της μορφής,

$$z_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^m u_k(x_i) j_k(x_1, x_2, \dots, x_n) (*),$$

δηλαδή αντί να υπάρχουν σταθερές a_k , έχουμε συναρτήσεις $u_k(x_i)$ κάποιας μεταβλητής x_i . Η μέθοδος του Kantorovich δίνει καλύτερες προσεγγιστικές λύσεις από τη μέθοδο του Ritz αφού η κλάση των συναρτήσεων (*) είναι μεγαλύτερη από την κλάση

$$z_m = \sum_{k=1}^m a_k j_k(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Κεφάλαιο 3

«Εφαρμογή Άμεσων Μεθόδων»

Στο κεφαλαίο αυτό περιγράφονται τέσσερις μέθοδοι [2] οι οποίες προσεγγίζουν τη λύση μη γραμμικών προβλημάτων του λογισμού των μεταβολών με ακρίβεια 2^{ns} τάξης ως συνάρτηση του μήκους βήματος.

Οι περισσότερες αναλυτικές και αριθμητικές μέθοδοι επίλυσης θεωρούν ότι το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με την επίλυση της εξίσωσης του Euler

$$\frac{d}{dx}(f_3) - f_2 = 0 \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad y''f_{33} + y'f_{23} + f_{13} - f_2 = 0.$$

Επιλύοντας το πρόβλημα αριθμητικά με αυτόν τον τρόπο παρουσιάζονται μειονεκτήματα, όπως

- i) συχνά η διαφορική εξίσωση έχει μια εξαιρετικά πολύπλοκη μορφή
- ii) η συνάρτηση f μπορεί να ορίζεται από αριθμητικά δεδομένα. Σε αυτήν την περίπτωση οι τύποι των μερικών παραγώγων θα λαμβάνονται από αρκετά επίπονες αριθμητικές διαδικασίες.

Επομένως, θα προσπαθήσουμε να λύσουμε το πρόβλημα άμεσα προσεγγίζοντας αριθμητικά το ολοκλήρωμα και όχι τη διαφορική εξίσωση. Θα περιγράψουμε μεθόδους με σφάλμα 2^{ns} τάξης ως συνάρτηση του μήκους βήματος.

3.1 Η γενική αριθμητική διαδικασία

Θα εξετάσουμε πέντε διαφορετικές προσεγγίσεις όπου η γενική αριθμητική διαδικασία είναι αρκετά όμοια σε κάθε περίπτωση. Χωρίζουμε το διάστημα (a, b) σε n ίσα υποδιαστήματα με μήκος βήματος

$$h = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}.$$

Θεωρούμε την τιμή της $y(x)$ μόνο στα σημεία x_i . Ονομάζουμε y_i την τιμή $y(x_i)$ και δίνονται τα σημεία $y(x_0) = y_0 = A$ και $y(x_n) = y_n = B$. Θεωρούμε τώρα το πρόβλημα σε μικρά διαστήματα μήκους $2h$ και το διάστημα (x_0, x_2) . Έχουμε, λοιπόν, τώρα να μεγιστοποιήσουμε το ολοκλήρωμα

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x, y(x), y'(x)) dx . \quad (3.1)$$

Μία από τις πέντε μεθόδους που περιγράφουμε στη συνέχεια, προσεγγίζει τις $y(x)$ και $y'(x)$ ως συνάρτηση των y_0, y_1, y_2 και το ολοκλήρωμα (3.1) από τη συνάρτηση $f(y_0, y_1, y_2)$. Θεωρούμε σταθερά τα y_0 και y_2 και επιλέγουμε το y_1 ώστε να μεγιστοποιήσουμε αυτή τη συνάρτηση.

Στις μεθόδους που έχουμε σχεδιάσει, έχουμε υποθέσει ότι μπορούμε να βρούμε μόνο τη συνάρτηση f . Επομένως, εάν ζητηθεί μια μερική παράγωγος της f , πρέπει να ληφθεί αριθμητικά. Άρα, για τη μεγιστοποίηση ως προς y_1 , πρέπει να βρούμε τη μερική παράγωγο της συνάρτησης αριθμητικά και να την εξισώσουμε με το μηδέν. Έτσι, γράφουμε

$$\frac{f(y_0, y_1 + e, y_2) - f(y_0, y_1, y_2)}{e} = 0 + O(e), \quad (3.2)$$

$$\text{ή} \quad \frac{f(y_0, y_1 + e, y_2) - f(y_0, y_1 - e, y_2)}{e} = 0 + O(e^2) . \quad (3.3)$$

Επιλέγουμε να χρησιμοποιήσουμε τη (3.3) επειδή είναι περισσότερο ακριβής. Έχουμε, τώρα να επιλέξουμε μια τιμή του e ώστε να εξομαλύνουμε την απώλεια ακρίβειας λόγω του σφάλματος στρογγυλοποίησης στην αφαίρεση και του σφάλματος αποκοπής στον τύπο (3.3).

Διαλέγουμε $e = 10^{-4}$ αφού ο αριθμός των σημαντικών ψηφίων που εργαζόμασταν ήταν 12 και οι τιμές της f και των παραγώγων της ήταν της τάξης της μονάδας. Αυτό θα σήμαινε ότι η απώλεια των σημαντικών ψηφίων λόγω του σφάλματος αποκοπής $O(e^2)$ θα ήταν περίπου 4 και η απώλεια λόγω του σφάλματος

στρογγυλοποίησης στην αφαίρεση θα ήταν ομοίως περίπου 4. Θα μπορούσαμε να περιμένουμε ότι η ακρίβεια θα μειωνόταν περίπου στα 8 δεκαδικά ψηφία.

Εάν είχαμε χρησιμοποιήσει τη (3.2), μια πιο κατάλληλη τιμή του e θα ήταν 10^{-6} και θα περιμέναμε η ακρίβεια να μειωνόταν στα 6 σημαντικά ψηφία.

Παρόμοιες σχέσεις μπορούν να ληφθούν σε άλλα διαστήματα δίνοντας $n-1$ σχέσεις για τις $n-1$ αγνώστους y_1, \dots, y_{n-1} . Έτσι, το πρόβλημα μπορεί να λυθεί.

Έχουμε, τώρα, το αριθμητικό πρόβλημα επίλυσης ενός συνόλου μη γραμμικών επαναληπτικών σχέσεων της μορφής

$$y_i(y_{i-1}, y_i, y_{i+1}) = 0 \quad \text{για } i = 1, 2, \dots, n-1,$$

με δοσμένα τα $y_0 = A$ και $y_n = B$.

Για την επίλυση αυτού του προβλήματος χρησιμοποιήθηκε η ακόλουθη καθιερωμένη τεχνική με δοκιμαστικές επαναλήψεις.

Ξεκινάμε με μια τιμή του y_1 . Στη συνέχεια, το y_2 πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση $y_i(y_0, y_1, y_2) = 0$. Η μέθοδος εσφαλμένης θέσης χρησιμοποιήθηκε για την επίλυση της μη γραμμικής εξίσωσης ως συνάρτηση του y_2 . Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο βρίσκουμε τιμές για τα y_3, \dots, y_n . Η τιμή του y_n εκτιμάται ότι θα είναι λανθασμένη αλλά τώρα η μέθοδος της εσφαλμένης θέσης χρησιμοποιείται σε όλο το πρόβλημα για να βρούμε τη σωστή τιμή του y_1 , η οποία δίνει πραγματική τιμή για το y_n .

3.2 Πρώτη Προσέγγιση

Εδώ χρησιμοποιούμε την απλούστερη δυνατή προσέγγιση

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x, y, y') dx = hf \left(x_0, y_0, \frac{y_1 - y_0}{h} \right) + hf \left(x_1, y_1, \frac{y_2 - y_1}{h} \right) + O(h^2), \quad (3.2.1)$$

η οποία χρησιμοποιήθηκε αρχικά από τον Euler και έτσι προέκυψε η εξίσωση του Euler. Έχουμε προσεγγίσει και το ολοκλήρωμα και τις παραγώγους έτσι ώστε να δίνουν σφάλματα $O(h)$. Η αριθμητική μερική παραγωγή ως προς y_1 δίνει την επαναληπτική σχέση

$$\begin{aligned}
& f\left(x_0, y_0, \frac{y_1 + e - y_0}{h}\right) - f\left(x_0, y_0, \frac{y_1 - e - y_0}{h}\right) + \\
& + f\left(x_1, y_1 + e, \frac{y_2 - y_1 - e}{h}\right) - f\left(x_1, y_1 - e, \frac{y_2 - y_1 + e}{h}\right) = 0, \quad (3.2.2)
\end{aligned}$$

η οποία έλυσε αριθμητικά το πρόβλημα όπως περιγράφηκε προηγουμένως.

Για να μελετήσουμε το σφάλμα στην παραπάνω επαναληπτική σχέση, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την επαναληπτική σχέση που λαμβάνεται επαναληπτικά. Η μερική παραγώγιση της (3.2.1) ως προς y_1 δίνει

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial y_1} \left\{ f\left(x_0, y_0, \frac{y_1 - y_0}{h}\right) + f\left(x_1, y_1, \frac{y_2 - y_1}{h}\right) \right\} = \\
& = \left\{ f_3\left(x_0, y_0, \frac{y_1 - y_0}{h}\right) - f_3\left(x_1, y_1, \frac{y_2 - y_1}{h}\right) \right\} / h + f_2\left(x_1, y_1, \frac{y_2 - y_1}{h}\right) = \\
& = \left\{ f_2\left(x_1, y_1, \frac{y_2 - y_1}{h}\right) - \frac{d}{dx} f_3\left(x_1, y_1, \frac{y_2 - y_1}{h}\right) \right\} + \\
& \quad + \frac{1}{2} h \frac{d^2}{dx^2} \left(f_3\left(x_1, y_1, \frac{y_2 - y_1}{h}\right) \right) + O(h^2) = \\
& = \left\{ f_2(x_1, y_1, y_1') - \frac{d}{dx} f_3(x_1, y_1, y_1') \right\} + \frac{1}{2} h y_1'' f_{23} \\
& \quad - \frac{1}{2} h y_1'' \frac{d}{dx} f_{33} - \frac{1}{2} h y_1''' f_{33} + \frac{1}{2} h \frac{d^2}{dx^2} f_3 + O(h^2) \quad (3.2.3)
\end{aligned}$$

Ο πρώτος είναι η εξίσωση του Euler. Έχουμε υποθέσει ότι υπάρχει και οδηγεί στη μοναδική λύση του προβλήματος. Επομένως, ο πρώτος όρος θα είναι μηδέν για μια τιμή του y_1 και έτσι οι άλλοι όροι αναπαριστούν το σφάλμα στην προσέγγιση, το οποίο γενικά είναι $O(h)$. Ωστόσο, όταν η παράσταση

$$\frac{1}{2}hy_1''\left(f_{23}-\frac{d}{dx}f_{33}\right)-\frac{1}{2}hy_1'''f_{33}+\frac{1}{2}h\frac{d^2}{dx^2}f_3$$

είναι μηδέν, θα έχουμε σφάλμα $O(h^2)$.

3.3 Δεύτερη Προσέγγιση

Εδώ, χρησιμοποιούμε την προσέγγιση

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x, y, y') dx = \frac{h}{3} f\left(x_0, y_0, \frac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h}\right) + \frac{4h}{3} f\left(x_1, y_1, \frac{y_2 - y_0}{2h}\right) + \frac{h}{3} f\left(x_2, y_2, \frac{y_0 - 4y_1 + 3y_2}{2h}\right) + O(h^5). \quad (3.3.1)$$

Έχουμε χρησιμοποιήσει τον κανόνα του Simpson ως τύπο ολοκλήρωσης και έχουμε προσεγγίσει τα y'_0, y'_1, y'_2 όσο το δυνατόν καλύτερα ως συνάρτηση των y_0, y_1, y_2 .

Η αναλυτική μερική παραγωγή δίνει

$$\frac{3}{4h} \frac{\partial}{\partial y_1} (\text{προσέγγιση της 3.3.1})$$

$$= -\left\{ f_3\left(x_2, y_2, \frac{y_0 - 4y_1 + 3y_2}{2h}\right) - f_3\left(x_0, y_0, \frac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h}\right) \right\} / 2h + f_2\left(x_1, y_1, \frac{y_2 - y_0}{2h}\right), \quad (3.3.2)$$

$$= f_2(x_1, y_1, y'_1) - \{f_3(x_2, y_2, y'_2) - f_3(x_0, y_0, y'_0)\} / 2h +$$

$$+ \frac{1}{6}h^2 y_1''' f_{23} + \left(\frac{1}{6}hy_1''' + \frac{1}{24}h^2 y_1^{iv}\right) f_{33}(x_2, y_2, y'_2)$$

$$\begin{aligned}
& -\left(\frac{1}{6}hy_1''' - \frac{1}{24}y_1^{iv}\right)f_{33}(y_0, y_0, y_0') + O(h^4), \\
& = \left\{f_2(x_1, y_1, y_1') - \frac{d}{dx}f_3(x_1, y_1, y_1')\right\} - \frac{1}{6}h^2 \frac{d^3}{dx^3}f_3 \\
& + \frac{1}{6}h^2 y_1''' f_{23} + \frac{1}{3}h^2 y_1''' \frac{d}{dx}f_{33} + \frac{1}{12}h^2 y_1^{iv} f_{33} + O(h^4). \quad (3.3.3)
\end{aligned}$$

Ο πρώτος όρος είναι ξανά η εξίσωση του Euler αλλά εδώ ο όρος σφάλματος είναι γενικά της τάξης h^2 .

3.4 Τρίτη Προσέγγιση

Η μέθοδος αυτή είναι αρκετά όμοια με την προηγούμενη μέθοδο με τη διαφορά ότι τώρα χρησιμοποιούμε τη μέθοδο ολοκλήρωσης Gauss 4^{ης} τάξης αντί του κανόνα του Simpson. Έτσι,

$$\begin{aligned}
& \int_{x_0}^{x_2} f(x, y, y') dx = \\
& = hf \left(x_1 - \frac{h}{\sqrt{3}}, \frac{y_0(1+\sqrt{3}) + 4y_1 + y_2(1-\sqrt{3})}{6}, \frac{-y_0(2+\sqrt{3}) + 4y_1 - y_2(2-\sqrt{3})}{2\sqrt{3}h} \right) \\
& + hf \left(x_1 + \frac{h}{\sqrt{3}}, \frac{y_0(1-\sqrt{3}) + 4y_1 + y_2(1+\sqrt{3})}{6}, \frac{y_0(2-\sqrt{3}) - 4y_1 + y_2(2+\sqrt{3})}{2\sqrt{3}h} \right) + O(h^5) \\
& \quad (3.4.1)
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο ολοκλήρωσης του Gauss στην ουσία μειώνεται ο συνολικός αριθμός των συναρτησιακών υπολογισμών κατά το ένα τρίτο. Η ολοκλήρωση έχει σφάλμα $O(h^5)$. Οι όροι

$$y\left(x_1 - \frac{h}{\sqrt{3}}\right), y\left(x_1 + \frac{h}{\sqrt{3}}\right), y'\left(x_1 - \frac{h}{\sqrt{3}}\right), y'\left(x_1 + \frac{h}{\sqrt{3}}\right)$$

έχουν προσεγγιστεί όσο το δυνατόν καλύτερα χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του Langrange ως συνάρτηση των y_0, y_1, y_2 . Τα αριθμητικά αποτελέσματα βρίσκονται πάλι λύνοντας την επαναληπτική σχέση που παίρνουμε από την (3.4.1) με αριθμητική μερική παραγωγή, όπου έχει σφάλμα $O(h^2)$. Η μέθοδός μας είναι ανάλογη με την εξίσωση του Euler όπου η ολική παράγωγος βρίσκεται, υπολογίζοντας την f_3 στα $x_1 - \frac{h}{\sqrt{3}}$ και $x_1 + \frac{h}{\sqrt{3}}$. Η f_2 αυτή τη φορά λαμβάνεται ως το μέσο άθροισμα των τιμών στα $x_1 - \frac{h}{\sqrt{3}}$ και $x_1 + \frac{h}{\sqrt{3}}$.

3.5 Τέταρτη Προσέγγιση

Η προσέγγιση εδώ είναι βασικά διαφορετική από τους προηγούμενους τύπους. Εδώ συγκεκριμένα χωρίζουμε το διάστημα σε δύο υποδιαστήματα και προσεγγίζουμε το ολοκλήρωμα σε κάθε τμήμα. Αυτό δίνει

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_2} f(x, y, y') dx &= hf \left(\frac{x_0 + x_1}{2}, \frac{y_0 + y_2}{2}, \frac{y_1 - y_0}{h} \right) \\ &+ hf \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{y_2 - y_1}{h} \right) + O(h^3), \end{aligned} \quad (3.5.1)$$

χρησιμοποιώντας τον κανόνα του μέσου σημείου επιμέρους στα διαστήματα (x_0, x_1) και (x_1, x_2) . Σε αντίθεση με τις προηγούμενες δύο μεθόδους μπορούμε να επεκτείνουμε την προσέγγιση σε ολόκληρο το διάστημα (a, b) . Έτσι,

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_2} f(x, y, y') dx &= \\ &= hf \left(a + \frac{h}{2}, \frac{y_0 + y_1}{2}, \frac{y_1 - y_0}{h} \right) + hf \left(a + \frac{3h}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{y_2 - y_1}{h} \right) + \end{aligned}$$

$$+\dots+hf\left(b-\frac{h}{2},\frac{y_{n-1}+y_n}{2},\frac{y_n-y_{n-1}}{h}\right)+O(h^2). \quad (3.5.2)$$

Δεν θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε την προσέγγιση αυτή στις δύο προηγούμενες μεθόδους καθώς τα διαστήματα θα επικαλύπτονταν. Αυτό θα μας έδινε την ευκαιρία να πραγματοποιήσουμε τη μεγιστοποίηση με μια διαφορετική διαδικασία. Για παράδειγμα, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε μια διαδικασία γενικής n -διάστατης μεγιστοποίησης ή δυναμικό προγραμματισμό. Τέτοιες μέθοδοι φαίνονται να είναι μη αποδοτικές για συναρτήσεις που έχουμε θεωρήσει. Στην πραγματικότητα τα αριθμητικά μας αποτελέσματα λαμβάνονται ακόμα επιλύοντας την επαναληπτική σχέση προερχόμενη από την (3.5.1) με αριθμητική μερική παραγωγή.

Έχουμε, λοιπόν

$$\frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial y_1} (\text{pros } \acute{e}\text{ggish thV } 3.5.1)$$

$$= \left\{ f_2 \left(\frac{x_0+x_1}{2}, \frac{y_0+y_1}{2}, \frac{y_1-y_0}{h} \right) + f_2 \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{y_2-y_1}{h} \right) \right\} / 2$$

$$- \left\{ f_3 \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{y_2-y_1}{h} \right) - f_3 \left(\frac{x_0+x_1}{2}, \frac{y_0+y_1}{2}, \frac{y_1-y_0}{h} \right) \right\} / h, \quad (3.5.3)$$

$$= \left(1 + \frac{1}{8} h^2 \frac{d^2}{dx^2} \right) f_2 \left(x_1, y_1 + \frac{1}{8} h^2 y_1'', y_1' + \frac{1}{12} h^2 y_1''' \right)$$

$$- \left(\frac{d}{dx} + \frac{1}{12} h^2 \frac{d^3}{dx^3} \right) f_3 \left(x_1, y_1 + \frac{1}{8} h^2 y_1'', y_1' + \frac{1}{12} h^2 y_1''' \right) + O(h^4),$$

$$= \left(1 + \frac{1}{8} h^2 \frac{d^2}{dx^2} \right) \left(f_2 - \frac{d}{dx} f_3 \right) + \frac{1}{24} h^2 \frac{d^3}{dx^3} f_3$$

$$+ \frac{1}{8} h^2 y_1'' f_{22} + \frac{1}{12} h^2 y_1''' f_{23} - \frac{1}{8} h^2 y_1''' f_{32} - \frac{1}{12} h^2 y_1^{iv} f_{33} - \frac{1}{8} h^2 y_1'' \frac{d}{dx} f_{32}$$

$$-\frac{1}{12}h^2 y_1''' \frac{d}{dx} f_{33} + O(h^4). \quad (3.5.4)$$

3.6 Πέμπτη Προσέγγιση

Όπως στην προηγούμενη προσέγγιση, διαιρούμε το διάστημα σε δύο υποδιαστήματα αλλά τώρα υπολογίζουμε τα ολοκληρώματα χρησιμοποιώντας τον κανόνα του τραπεζίου. Έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned} 2 \int_{x_0}^{x_2} f(x, y, y') dx &= hf \left(x_0, y_0, \frac{y_1 - y_0}{h} \right) \\ &+ hf \left(x_1, y_1, \frac{y_1 - y_0}{h} \right) + hf \left(x_1, y_1, \frac{y_2 - y_1}{h} \right) \\ &+ hf \left(x_2, y_2, \frac{y_2 - y_1}{h} \right) + O(h^3). \end{aligned} \quad (3.6.1)$$

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα του τραπεζίου αντί τον κανόνα του μέσου, σημαίνει ότι έχουμε διπλασιάσει το πλήθος των συναρτησιακών υπολογισμών που απαιτούνται για την επίλυση του προβλήματος. Η μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί άμεσα σε όλο το διάστημα (a, b) .

3.7 Αριθμητικά Αποτελέσματα

Οι μέθοδοι έχουν δοκιμαστεί για τα ακόλουθα 4 προβλήματα με τις συγκεκριμένες συνοριακές τιμές.

$$(i) \quad f = (y')^2 + 12xy, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1$$

$$(ii) \quad f = (y')^2 - y^2 - 2xy, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = \sin(1) - 1$$

$$(iii) \quad f = (1.05 - \exp(1 - 4y')) \frac{(1 - y)}{(1 + y^2)} \cdot \left(\frac{1}{1 + x \exp(-6(x - 0.4)^2)} \right)$$

$$\left(2 - \frac{1}{2(1-y)(1+x \exp(-6(x-0.4)^2))} \right) \quad y(0) = 0.5, \quad y(1) = 0$$

$$(iv) \quad f = 4 \left(3 + \sin p \left(\frac{1}{2} - x \right) \right) \left(-\frac{1}{2} y'^2 - 3y' \right) - \left(\frac{4}{3} y \right)^4 \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 0.$$

Τα προβλήματα (i) και (ii) οδηγούν σε γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με λύσεις x^3 και $\sin x - x$ αντίστοιχα και χρησιμοποιήθηκαν επομένως περισσότερο για τη δοκιμή των μεθόδων ως προς τα λάθη προγραμματισμού παρά για τη σύγκριση της αποτελεσματικότητάς τους. Ιδιαίτερα, τα προβλήματα αυτά ανήκουν στην ειδική περίπτωση όπου η προσέγγιση δίνει σφάλμα $O(h^2)$ όπως προκύπτει από τη (3.2.3).

Οι μέθοδοι 2 έως 5 έδωσαν προβλεπόμενα αποτελέσματα. Αφού η λύση του (ii) είναι x^3 , όλες οι μέθοδοι έδωσαν ακριβή αποτελέσματα (με σφάλμα στρογγυλοποίησης) για οποιαδήποτε τιμή του h . Όπως αναμενόταν, φάνηκε να είναι αμελητέο και συγκεκριμένα μόνο ελάχιστα μεγαλύτερο από το τελευταίο ψηφίο των δεκαδικών.

Το πρόβλημα (iii) προκύπτει από το πώς ένα πλοίο θα πρέπει να χρησιμοποιήσει τα καύσιμά του προκειμένου να διασχίσει τον ωκεανό στον ελάχιστο χρόνο. Ο τρόπος που το πρόβλημα προκύπτει, μας διαβεβαιώνει για μια καλώς ορισμένη λύση. Η εξίσωση του Euler για αυτή τη συνάρτηση είναι αρκετά μεγάλη και περίπλοκη με αποτέλεσμα η αριθμητική λύση να είναι πολύ δύσκολη.

Στον πίνακα 1 φαίνονται τα σφάλματα στο $x = 0.5$ για τις διάφορες μεθόδους και για διαφορετικές τιμές του βήματος. Τα σφάλματα είναι μόνο προσεγγιστικά. Το σφάλμα για $h = 0.1$ δεν υπολογίστηκε για την πρώτη προσέγγιση.

Πίνακας 1

	h=0.1	h=0.05	h=0.025	h=0.0125
1 ^η προσέγγιση		-0.000900	-0.000400	-0.000200
2 ^η προσέγγιση	-0.000245	-0.000061	-0.000014	-0.000004
3 ^η προσέγγιση				

	0.000072	0.000021	0.000007	0.000001
4 ^η προσέγγιση	0.000078	0.000022	0.000007	0.000002
5 ^η προσέγγιση	-0.000295	-0.000072	-0.000016	-0.000004

Το πρόβλημα (iv) αναπαριστά ένα πρόβλημα απογραφής. Αυτό μας διαβεβαιώνει για μια καλώς ορισμένη λύση. Σε αυτήν την περίπτωση η εξίσωση του Euler είναι συγκριτικά απλή και οι μέθοδοί μας συγκρίθηκαν με μια καθιερωμένη μέθοδο επίλυσης διαφορικών εξισώσεων χρησιμοποιώντας τον τύπο των κεντρικών διαφορών

$$y_i'' = \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} \quad \text{και} \quad y_i' = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} .$$

Στον πίνακα 2 φαίνονται τα σφάλματα στο $x = 0.5$ για τρεις τιμές του h . Ξανά το σφάλμα για μεγαλύτερες τιμές του h δεν υπολογίστηκε με την πρώτη προσέγγιση. Σφάλματα σε άλλα σημεία ήταν αρκετά όμοια αν και το σφάλμα της εξίσωσης του Euler ήταν μικρότερο σε μερικά σημεία.

Δοκιμάστηκαν αρκετές τιμές του e και διαπιστώθηκε ότι τιμές στο διάστημα $10^{-5} \leq |e| \leq 10^{-4}$ έδωσαν σχεδόν ταυτόσημα αποτελέσματα για κάθε μέθοδο και συνάρτηση. Σε κάθε στάδιο η επαναληπτική σχέση λύθηκε με ακρίβεια 10 δεκαδικών ψηφίων, περισσότερο επαρκής για την τελική ακρίβεια που θέλαμε να πετύχουμε. Για τις συναρτήσεις αυτές χρειάστηκαν 5 ή 6 δοκιμαστικές επαναλήψεις πριν βρεθεί η σωστή τιμή του y_1 που θα έδινε τη σωστή συνοριακή συνθήκη στο y_n . Το πλήθος των δοκιμαστικών επαναλήψεων ήταν ανεξάρτητο της μεθόδου.

Πίνακας 2

	h=0.05	h=0.025	h=0.0125
1 ^η προσέγγιση			0.001000
2 ^η προσέγγιση			

	0.000644	0.000157	0.000038
3 ^η προσέγγιση	-0.000240	-0.000073	-0.000019
4 ^η προσέγγιση	-0.000293	-0.000083	-0.000023
5 ^η προσέγγιση	0.000574	0.000142	0.000032
Εξίσωση του Euler	-0.000369	-0.000093	-0.000025

3.8 Σύγκριση Μεθόδων

Συγκρίνοντας την ακρίβεια παρατηρούμε ότι η πρώτη προσέγγιση (του Euler) θα ήταν μη αποτελεσματική για τα περισσότερα προβλήματα. Για να συγκρίνουμε την αποτελεσματικότητα, ωστόσο, πρέπει επίσης να συγκρίνουμε το πλήθος των υπολογισμών που γίνονται σε κάθε μέθοδο.

Όπως αναφέραμε, προηγουμένως, ο αριθμός των δοκιμαστικών επαναλήψεων με διαφορετικές τιμές του y_1 είναι ανεξάρτητος της μεθόδου, επομένως συγκρίνουμε την εργασία που πραγματοποιείται σε κάθε στάδιο. Η πρώτη στήλη του πίνακα 3 δείχνει το πλήθος των συναρτησιακών υπολογισμών που απαιτούνται για να υπολογίσουμε την επαναληπτική σχέση. Συνήθως, απαιτούνται 3 υπολογισμοί των επαναληπτικών σχέσεων για να λυθούν, έτσι η δεύτερη στήλη (τρεις φορές η πρώτη) δείχνει τον αριθμό των συναρτησιακών υπολογισμών ανά βήμα. Ωστόσο, οι μέθοδοι δεν προγραμματίστηκαν τόσο αποτελεσματικά όσο θα μπορούσαν καθώς μερικές φορές ο υπολογισμός μιας συνάρτησης διπλασιάζεται αφού υπολογίζεται ξανά η επαναληπτική σχέση. Η τρίτη στήλη εμφανίζει το πλήθος εάν έχει γίνει αυτή η εξοικονόμηση. Η τέταρτη στήλη δείχνει τον υπολογισμό των συναρτησιακών υπολογισμών που απαιτούνται εάν είχαμε προσεγγίσει τη μερική παραγωγή από τη (3.2). Μια τέτοια μέθοδος, ωστόσο, οδήγησε σε σημαντικό σφάλμα στρογγυλοποίησης.

Σαφώς, η τέταρτη προσέγγιση είναι η καλύτερη από τις άμεσες μεθόδους όσον αφορά το πλήθος των συναρτησιακών υπολογισμών και την ακρίβεια.

Εξακολουθεί να υπάρχει η σύγκριση της τέταρτης προσέγγισης με καθιερωμένες μεθόδους επίλυσης διαφορικών εξισώσεων με συνοριακές τιμές. Η σχετική

αποτελεσματικότητα εξαρτάται αρκετά από τη μορφή της συνάρτησης f . Εάν η f οδηγεί σε μια συγκριτικά απλή διαφορική εξίσωση τότε είναι καλύτερο να τη χρησιμοποιήσουμε. Για μια συνάρτηση όπως η (iii), η απόκτηση της εξίσωσης του Euler είναι κουραστική και η συνάρτηση που προκύπτει, απαιτεί περισσότερο από πέντε φορές για να υπολογιστεί. Σε τέτοιες περιπτώσεις και σε προβλήματα όπου η f ορίζεται τουλάχιστον εν μέρει από αριθμητικά δεδομένα, οι άμεσες μέθοδοι φαίνονται να είναι χρήσιμοι.

Πίνακας 3

Πλήθος συναρτησιακών υπολογισμών

1 ^η προσέγγιση	4	12	8	5
2 ^η προσέγγιση	6	18	18	12
3 ^η προσέγγιση	4	12	12	8
4 ^η προσέγγιση	4	12	8	5
5 ^η προσέγγιση	8	24	16	10
Εξίσωση του Euler	q	3q	3q	3q

Κεφάλαιο 4

«Πρόσφατες Βελτιώσεις Άμεσων Μεθόδων»

Όπως αναφέραμε και στο κεφάλαιο 2, μερικές δημοφιλείς μέθοδοι για την επίλυση προβλημάτων του λογισμού των μεταβολών είναι οι άμεσες μέθοδοι, οι οποίες μετατρέπουν το πρόβλημα μεταβολών σε ένα μαθηματικό πρόβλημα προγραμματισμού, χρησιμοποιώντας είτε την τεχνική της διακριτοποίησης ([16], [11]) ή την τεχνική της παραμετροποίησης ([9],[10]). Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε κάποιες νέες τεχνικές επίλυσης των προβλημάτων που συζητήθηκαν.

4.1 Αριθμητική Επίλυση Προβλημάτων με χρήση Άμεσης Μεθόδου και Μη Κλασικής Παραμετροποίησης

Στην κλασική παραμετροποίηση, οι μεταβλητές του προβλήματος υπολογίζονται χρησιμοποιώντας σειρές πεπερασμένου μήκους κλασικών ορθογωνίων πολυωνύμων του Chebyshev, του Legendre κτλ με άγνωστες παραμέτρους ([11],[10]).

Η προτεινόμενη μέθοδος [13] που απαιτεί τον καθορισμό των σημείων παρεμβολής και μη κλασικών ορθογωνίων πολυωνύμων, παρουσιάζει τα εξής πλεονεκτήματα

- α) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για χρονικά μεταβαλλόμενα και μη γραμμικά προβλήματα μεταβολών,
- β) ο αριθμός των αγνώστων παραμέτρων που πρέπει να καθοριστεί είναι μικρότερος απ'ότι στην τεχνική της διακριτοποίησης,
- γ) μετατρέπει το πρόβλημα με μη τετραγωνικό συναρτησιακό σε μια αλληλουχία τετραγωνικών προβλημάτων προγραμματισμού ενώ παράλληλα δίνει πληροφορίες για την Έσσιανή και την κλίση χωρίς να χρησιμοποιήσουμε παραγωγή ή τη μέθοδο πεπερασμένων διαφορών.

Η τεχνική της κλασικής παραμετροποίησης ([9],[10]) προσεγγίζει τη συνάρτηση $f \in L^2[-1,1]$ με μια σειρά πεπερασμένου μήκους κλασικών ορθογωνίων πολυωνύμων με άγνωστες παραμέτρους

$$f^N(\hat{t}) \cong \sum_{j=0}^N a_j P_j(\hat{t}), \quad \hat{t} \in [-1,1],$$

όπου a_j οι άγνωστες παράμετροι και $P_j(\hat{t})$ το κλασικό ορθογώνιο πολυώνυμο j τάξης. Η μέθοδος που προτείνεται, επεκτείνει τη συνάρτηση χρησιμοποιώντας weighted παρεμβολές N βαθμού της μορφής ([17],[4])

$$f^N(t) \equiv F_N(t) = \sum_{j=0}^N \frac{W(t)}{W(t_j)} L_j(t) f(t_j) \quad , t \in [a, b] \quad (1)$$

όπου t_j το σύνολο των διακριτών κόμβων παρεμβολής στο $[a, b]$, $W(t)$ θετική συνάρτηση βάρους και $L_j(t)$ το σύνολο των συναρτήσεων παρεμβολής που ικανοποιούν τη σχέση $L_j(t_k) = d_{jk}$.

Προσεγγίζουμε τις μεταβλητές $x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$ χρησιμοποιώντας την εξίσωση (1), οπότε παίρνουμε

$$x_i(t) = \sum_{j=0}^N \frac{W(t)}{W(t_j)} L_j(t) a_{ij} = a_i^T P(t) \quad , i = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

όπου $a_i = [a_{i0}, a_{i1}, \dots, a_{iN}]^T$, $i = 1, 2, \dots, n$ είναι ένα $(N+1) \times 1$ διάνυσμα των αγνώστων παραμέτρων με την ιδιότητα $a_{ij} = x_i(t_j)$ και $P(t) = [P_0(t), P_1(t), \dots, P_N(t)]^T$ είναι ένα $(N+1) \times 1$ διάνυσμα με

$$P_j(t) = \frac{W(t)}{W(t_j)} L_j(t) \quad , j = 1, 2, \dots, N.$$

Τότε,

$$\mathbf{x}'(t) = a_i^T P'(t) \quad , i = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

όπου $P'(t)$ είναι το διάνυσμα παράγωγος του $P(t)$. Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (2) και (3) στη γενική μορφή του προβλήματος μεταβολών

$$J[x_1, x_2, \dots, x_n] = \int_{t_0}^{t_1} F[x_1, x_2, \dots, x_n, \mathbf{x}', \mathbf{x}', \dots, \mathbf{x}', t] dt \quad ,$$

το συναρτησιακό J γίνεται ένα μη γραμμικό μαθηματικό πρόβλημα προγραμματισμού με άγνωστες παραμέτρους a_{ij} , όπου $i = 1, 2, \dots, n$ και $j = 0, 1, \dots, N$. Επομένως, για την εύρεση άκρων τιμών του J , λύνουμε το σύστημα

$$\frac{\partial J}{\partial a_{ij}} = 0 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 0, 1, \dots, N. \quad (4)$$

4.2 Ένας νέος αλγόριθμος επίλυσης χρησιμοποιώντας τη θεωρία σύγκλισης του Wolfe

Στα πλαίσια του λογισμού των μεταβολών, η θεωρία σύγκλισης του Wolfe ([6],[7],[18],[19]) στη βελτιστοποίηση αναδιατυπώνεται. Βασισμένος στις αναδιατυπωμένες συνθήκες του Wolfe [20], ο προτεινόμενος αλγόριθμος εγγυάται πεπερασμένο τερματισμό και ολική σύγκλιση. Η κατεύθυνση ανίχνευσης που βρίσκεται από αυτόν τον αλγόριθμο είναι διαφορετική από αυτή που βρίσκουμε

επιλύνοντας τη διακριτή μορφή του προβλήματος. Οι αναδιατυπωμένες συνθήκες του Wolfe είναι περισσότερο κατάλληλες για το διακριτό πρόβλημα απ'ότι για το αρχικό. Αξίζει, επίσης, να σημειωθεί ότι ο αλγόριθμος μπορεί εύκολα να τροποποιηθεί για την επίλυση προβλημάτων με διαφορετικές συνοριακές συνθήκες από εκείνες του αρχικού προβλήματος.

4.2.1 Αναδιατύπωση της θεωρίας συγκλίσεως του Wolfe

Αναφέρουμε, πρώτα, το αρχικό θεώρημα του Wolfe ([6],[7],[18],[19]).

Θεώρημα 4.2.1

Έστω συνάρτηση $f: R^n \rightarrow R^1$ με φραγμένες δεύτερες παραγώγους και υποθέτουμε ότι $r \in R^n$ και $q \in R^n$ είναι χρονικά αμετάβλητα διανύσματα. Υποθέτουμε ότι μια επαναληπτική σχέση της μορφής $r_{k+1} = r_k + sq$ εφαρμόζεται στη $f(r)$ σε κάθε επανάληψη k , όπου q είναι η κατεύθυνση ανίχνευσης και s το μήκος βήματος. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι σε κάθε επανάληψη οι επόμενες σχέσεις ικανοποιούνται για θετικά βαθμωτά μεγέθη u_0, u_1, u_2 και u_3 :

Συνθήκη 1:

$$q^T f_r(r_k) \leq -u_0 \|q\| \|f_r(r_k)\| \quad (1)$$

Συνθήκη 2:

$$|f(r_{k+1}) - f(r_k) - sq^T f_r(r_k)| > u_1 s |q^T f_r(r_k)| \quad (2)$$

ή

$$-q^T f_r(r_{k+1}) \leq u_2 |q^T f_r(r_k)| \quad (3)$$

Συνθήκη 3:

$$f(r_{k+1}) - f(r_k) \leq u_3 sq^T f_r(r_k) \quad (4)$$

Τότε, για κάθε $e_0 > 0$, η διαδικασία εντοπίζει ένα σημείο \hat{r} , τέτοιο ώστε $\|f_r(\hat{r})\| < e_0$, σ'ένα πεπερασμένο αριθμό επαναλήψεων.

Οι ανισότητες (1)-(4) είναι γνωστές ως οι τρεις συνθήκες του Wolfe. Το παραπάνω θεώρημα αναδιατυπώνεται στα πλαίσια του λογισμού των μεταβολών ως εξής,

Θεώρημα 4.2.2

Υποθέτουμε ότι για το πρόβλημα του λογισμού των μεταβολών

$$\min \int_{t_0}^{t_1} f(x, \dot{x}, t) dt, \quad (4.1)$$

όπου

$$x(t) \in R^n \text{ με } x(t_0) = a \text{ και } x(t_1) = b, \quad (4.2)$$

ισχύει

$$\left| \int_{t_0}^{t_1} (p, \mathbf{x})^T H_{x\mathbf{x}}(f)(p, \mathbf{x}) dt \right| \leq m \|(p, \mathbf{x})\|^2 \quad (A.2)$$

για κάθε $p(t) \in R^n$ όπου $p(t_0) = p(t_1) = 0$ και m ένα βαθμωτό μέγεθος.

Εάν μια επαναληπτική σχέση της μορφής $x_{k+1} = x_k + sp$ εφαρμόζεται στο

$\int_{t_0}^{t_1} f(x, \mathbf{x}, t) dt$ (A.1) όπου σε κάθε επανάληψη k , ισχύουν οι ακόλουθες συνθήκες για

θετικά βαθμωτά μεγέθη u_0, u_1, u_2 και u_3 :

Συνθήκη 1:

$$\int_{t_0}^{t_1} E^T(x_k) p dt \leq -u_0 \|(p, \mathbf{x})\| \left| \int_{t_0}^{t_1} E(x_k) dt \right| \quad (5)$$

Συνθήκη 2:

$$\left| \int_{t_0}^{t_1} f(x_{k+1}, \mathbf{x}_{k+1}, t) dt - \int_{t_0}^{t_1} f(x_k, \mathbf{x}_k, t) dt - s \int_{t_0}^{t_1} f_{x_k}^T p dt - s \int_{t_0}^{t_1} f_{\mathbf{x}_k}^T \mathbf{x} dt \right| > u_1 s \left| \int_{t_0}^{t_1} E^T(x_k) dt \right| \quad (6)$$

ή

$$-\int_{t_0}^{t_1} E^T(x_{k+1}) p dt \leq u_2 \left| \int_{t_0}^{t_1} E^T(x_k) p dt \right| \quad (7)$$

Συνθήκη 3:

$$\int_{t_0}^{t_1} f(x_{k+1}, \mathbf{x}_{k+1}, t) dt - \int_{t_0}^{t_1} f(x_k, \mathbf{x}_k, t) dt \leq u_3 s \int_{t_0}^{t_1} E^T(x_k) p dt \quad (8)$$

όπου

$$x_k(t_0) = a, \quad x_k(t_1) = b \quad (9)$$

και

$$p(t_0) = p(t_1) = 0 \quad (10)$$

Τότε, για κάθε $e_0 > 0$, η διαδικασία θα τερματίζει σ'ένα σημείο $\hat{x}(t)$, τέτοιο ώστε

$\|E(\hat{x})\| \leq e_0$ σ'ένα πεπερασμένο αριθμό επαναλήψεων.

Ο παρακάτω αλγόριθμος [20] προτίθεται να λύσει το πρόβλημα ελαχιστοποίησης (4.1),(4.2) :

Βήμα 0: Διαλέγουμε ένα $x_0(t)$ έτσι ώστε $x_0(t_0) = a$ και $x_0(t_1) = b$. Επιλέγουμε θετικά βαθμωτά μεγέθη e_0, u_0, u_1 και u_3 έτσι ώστε $u_1 + u_3 < 1$.

Βήμα 1: Θέτουμε $m = 0$.

Βήμα 2: Ελέγχουμε ότι οι ιδιοτιμές του $H_{x_k}(f(x_k)) + mI$ είναι θετικά ορισμένες, όπου I είναι ο ταυτοτικός πίνακας. Εάν ναι, προχωράμε στο βήμα 3, διαφορετικά θέτουμε $m = 10(m + 0.1)$ και πηγαίνουμε στο βήμα 2.

Βήμα 3: Λύνουμε προσεγγιστικά το τετραγωνικό πρόβλημα λογισμού των μεταβολών

$$\min_p \int_{t_0}^{t_1} \left[(p, \mathbf{1})^T \begin{pmatrix} f_{x_k x_k} + mI & f_{x_k} \\ f_{x_k} & f_{x_k x_k} + mI \end{pmatrix} (p, \mathbf{1}) + (f_{x_k}, f_{x_k})^T (p, \mathbf{1}) \right] dt \quad (11)$$

$$\text{με συνοριακές συνθήκες } p(t_0) = p(t_1) = 0 \quad (12)$$

καθορίζοντας μια κατεύθυνση p έτσι ώστε

$$\|E(x_k) + E'(x_k, p) + mp - m\mathbf{1}\| \leq e_k \quad \text{και} \quad p(t_0) = p(t_1) = 0, \quad (13)$$

όπου

$$e_k = e_0 \left\| \int_{t_0}^{t_1} E(x_k) dt \right\|.$$

Βήμα 4: Ελέγχουμε αν η κατεύθυνση ανίχνευσης p ικανοποιεί την (5). Εάν ναι, προχωράμε στο βήμα 5, διαφορετικά, θέτουμε $m = 10(m + 0.1)$ και πηγαίνουμε στο βήμα 3.

Βήμα 5: Βρίσκουμε ένα μήκος βήματος που να ικανοποιεί τις συνθήκες (6) και (8). Θέτουμε $x_{k+1} = x_k + sp$ και ελέγχουμε αν

$$\|E(x_{k+1})\| \leq e_0.$$

Εάν ναι, προχωράμε στο βήμα 6, αλλιώς θέτουμε $k = k + 1$ και πηγαίνουμε στο βήμα 1.

Βήμα 6: Σταματάμε.

Λόγω των αναδιατυπωμένων συνθηκών του Wolfe, ο αλγόριθμος είναι ένας αλγόριθμος 'καθοδικού' τύπου. Θα πρέπει να σημειωθεί, επιπλέον, ότι αν και ο αλγόριθμος χρησιμοποιεί τη βασική ιδέα της μεθόδου Levenberg-Marquardt [8], δεν την εφαρμόζει αυστηρά. Διαφορετικά, μόνο ο όρος mp θα εμφανιζόταν στο αριστερό

μέλος της (13). Η προσθήκη του όρου mp είναι να επιβεβαιώσει ότι η Εσσιανή του

$$(p, \mathbf{p})^T \begin{pmatrix} f_{x_k x_k} + mI & f_{x_k \mathbf{x}_k} \\ f_{\mathbf{x}_k x_k} & f_{\mathbf{x}_k \mathbf{x}_k} + mI \end{pmatrix} (p, \mathbf{p}) + (f_{x_k}, f_{\mathbf{x}_k})^T (p, \mathbf{p}),$$

είναι θετικά ορισμένη.

4.2.2 Εφαρμογή του Αλγορίθμου

Όπως, αναφέρθηκε αρχικά, ο προτεινόμενος αλγόριθμος εγγυάται πεπερασμένο τερματισμό και ολική σύγκλιση. Στη συνέχεια προτείνεται μια πρακτική και λεπτομερή εφαρμογή του αλγορίθμου [21], η οποία χρησιμοποιεί κυβικές splines για να παρεμβάλλει τη λύση του τετραγωνικού υποπροβλήματος (11), (12) όπου οι αριθμοί και η θέση των κόμβων ποικίλουν σε κάθε επανάληψη. Η βασική ιδέα είναι να χρησιμοποιήσουμε όσο το δυνατό λιγότερο αριθμό κόμβων ώστε να μειωθεί ο χρόνος υπολογισμού. Πριν δώσουμε τα λεπτομερή βήματα της εφαρμογής, αναδιατυπώνουμε το πρόβλημα ως εξής,

$$\min_p \int_{t_0}^{t_1} \left[u^T R u + \frac{1}{2} p^T C p - w p + \Psi u \right] dt \quad (1)$$

με

$$\mathbf{p} = A p + u \quad \text{και} \quad p(t_0) = p(t_1) = 0, \quad (2)$$

όπου

$$A = (f_{\mathbf{x}_k \mathbf{x}_k} + mI)^{-1} f_{x_k \mathbf{x}_k}, \quad C = 2(f_{x_k x_k} + mI) - 2f_{x_k \mathbf{x}_k} (f_{\mathbf{x}_k \mathbf{x}_k} + mI)^{-1} f_{\mathbf{x}_k x_k}$$

$$w = f_{\mathbf{x}_k x_k} (f_{\mathbf{x}_k \mathbf{x}_k} + mI)^{-1} f_{\mathbf{x}_k} - f_{x_k}, \quad R = mI + f_{\mathbf{x}_k \mathbf{x}_k}, \quad \Psi = f_{\mathbf{x}_k}.$$

Χρησιμοποιώντας μια παραλλαγή της backward sweep μεθόδου του Reynolds [14], έστω

$$p = Y I + h \quad (3)$$

όπου I είναι η συζυγής μεταβλητή του προβλήματος (2), Y είναι ένας πίνακας $n \times n$ και h είναι διάνυσμα n τάξης. Βασιζόμενοι στην Maximum Principle ,

$$\mathbf{p} = A p + I u \quad (4)$$

$$\mathbf{I} = -C p - A^T I - w^T \quad (5)$$

και εξισώνοντας την Χαμιλτώνια με το μηδέν,

$$2u^T R + I^T + \Psi^T = 0 \quad (6)$$

όπου

$$B = -0.5(f_{\mathbb{R}\mathbb{R}} + m)^{-1}.$$

Αντικαθιστούμε την εξίσωση (6) στην (4), οπότε προκύπτει

$$\mathbb{R} = Ap + BI + u \quad (7)$$

όπου

$$u = -0.5(f_{\mathbb{R}\mathbb{R}} + m)^{-1} f_{\mathbb{R}}.$$

Παραγωγίζουμε την (3) και με τη βοήθεια των (3),(5),(7) έχουμε

$$\mathbb{Y} = YA + A^T Y + YCY + B \quad (8)$$

$$\mathbb{H} = (YC + A^T)h + u + Yw \quad (9)$$

$$\mathbb{I} = -(A^T + YC)I - w - Ch. \quad (10)$$

Στη συνέχεια, παρουσιάζουμε τα αναλυτικά βήματα της εφαρμογής,

Βήμα 0: (i) Θέτουμε τον αριθμό των επαναλήψεων $k = 0$ και επιλέγουμε ένα

αρχικό $x_0(t)$ έτσι ώστε $x_0(t_0) = a$ και $x_0(t_1) = b$,

(ii) διαλέγουμε θετικά e_0, u_1 και u_3 έτσι ώστε $u_0 < 0.28$, $u_1 + u_3 < 1$ και

(iii) επιλέγουμε $m (= 4)$ κόμβους $\{t_1, \dots, t_m\}$ σε ίσα διαστήματα στο $[t_0, t_1]$.

Βήμα 1: Παρεμβάλουμε τη x_k χρησιμοποιώντας κυβικές splines με κόμβους τους

$\{t_1, \dots, t_m\}$. Ελέγχουμε εάν $\|E(x_k)\| < e_0$. Εάν ναι, σταματάμε αλλιώς

πηγαίνουμε στο βήμα 2.

Βήμα 2: Θέτουμε $m = 0$.

Βήμα 3: Ελέγχουμε εάν οι ιδιοτιμές του

$$\begin{pmatrix} f_{xx} + mI & f_{x\mathbb{R}} \\ f_{\mathbb{R}} & f_{\mathbb{R}\mathbb{R}} + mI \end{pmatrix}$$

είναι θετικές. Εάν ναι, πηγαίνουμε στο βήμα 5, διαφορετικά πηγαίνουμε στο βήμα 4.

Βήμα 4: Θέτουμε $m = 10(m + 0.1)$ και πηγαίνουμε στο βήμα 3.

Βήμα 5: Επιλύουμε το αρχικό πρόβλημα τιμών στα Y και h με ανοχή b ,

$$\mathbb{Y}(t) = Y(t)A(t) + A^T(t)Y(t) + Y(t)C(t)Y(t) + B(t) \quad (11)$$

$$\dot{x}(t) = (Y(t)C(t) + A^T(t))h(t) + u(t) + Y(t)w(t) \quad (12)$$

όπου A, B, C, u και w δίνονται αντίστοιχα

$$A = (f_{x_k x_k} + mI)^{-1} f_{x_k x_k}, \quad B = -0.5(f_{x_k x_k} + mI)^{-1},$$

$$C = 2(f_{x_k x_k} + mI) - 2f_{x_k x_k} (f_{x_k x_k} + mI)^{-1} f_{x_k x_k}, \quad u = -0.5(f_{x_k x_k} + mI)^{-1} f_{x_k},$$

$$w = f_{x_k x_k} (f_{x_k x_k} + mI)^{-1} f_{x_k} - f_{x_k},$$

και οι τελικές συνθήκες είναι $Y(t_1) = 0$ και $h(t_1) = 0$. Χρησιμοποιούμε την 3^{ης} τάξης μέθοδο Runge-Kutta με ευέλικτο μέγεθος βήματος για την ολοκλήρωση της (11) και έπειτα της (12). Συμβολίζουμε με $\{t'_1, \dots, t'_m\}$ το σύνολο των κόμβων που διορθώνονται από τη μέθοδο Runge-Kutta.

Βήμα 6: Παίρνοντας το σύνολο $\{t'_1, \dots, t'_m\}$ ως κόμβους, προσεγγίζουμε τα Y και h με κυβικές splines και βρίσκουμε τους συντελεστές της spline. Προχωράμε στο επόμενο βήμα.

Βήμα 7: Ολοκληρώνουμε

$$\dot{x}(t) = -(C(t)Y(t) + A^T(t))I(t) - C(t)h(t) - w(t) \quad (13)$$

$$I(t_0) = -Y^{-1}(t_0)h(t_0)$$

με την 3^{ης} τάξης μέθοδο Runge-Kutta με ευέλικτο μέγεθος βήματος και ανοχή b . Συμβολίζουμε με $\{t''_1, \dots, t''_m\}$ το σύνολο των κόμβων που διορθώνονται από τη μέθοδο Runge-Kutta.

Βήμα 8: Παίρνουμε το σύνολο $\{t''_1, \dots, t''_m\}$ των κόμβων, χρησιμοποιούμε κυβικές splines για να προσεγγίσουμε το I και βρίσκουμε τους συντελεστές της spline.

Βήμα 9: Θέτουμε $e_k = e_0 \left\| \int_{t_0}^{t_1} E(x_k) dt \right\|$ και χρησιμοποιούμε παρεμβολές που

ορίζονται στα βήματα 6 και 8 για να υπολογίσουμε

$$p(t) = Y(t)I(t) + h(t). \text{ Ελέγχουμε εάν}$$

$$\|E(x_k) + E'(x_k, P) + mp - m\| \leq e_k. \text{ Εάν ναι, πηγαίνουμε στο βήμα 10,}$$

αλλιώς μειώνουμε το b και πηγαίνουμε στο βήμα 5.

Βήμα 10: Ελέγχουμε εάν το p ικανοποιεί την συνθήκη 1 του Wolfe. Εάν ναι, προχωράμε στο βήμα 11, αλλιώς θέτουμε $m = 10(m + 0.1)$ και πηγαίνουμε στο βήμα 4.

Βήμα 11: Υπολογίζουμε το s που ικανοποιεί τις συνθήκες 2-3 του Wolfe.

Βήμα 12: Θέτουμε $x_{k+1} = x_k + sp$.

Βήμα 13: (i) Αναταξινομούμε το σύνολο των κόμβων $\{t_1, \dots, t_m\}$

των x_k , $\{t'_1, \dots, t'_m\}$ του Y και h , και $\{t''_1, \dots, t''_m\}$ του I με αύξουσα σειρά $\{t'''_1, \dots, t'''_m\}$.

(ii) Βρίσκουμε τους συντελεστές της spline παρεμβάλλοντας τα x_{k+1} στους κόμβους $\{t'''_1, \dots, t'''_m\}$ χρησιμοποιώντας τη σχέση $x_{k+1} = x_k + sp$.

(iii) Ελέγχουμε αν οι συντελεστές της spline x_{k+1} στα γειτονικά διαστήματα είναι «κοντά» με την έννοια των ελαχίστων τετραγώνων. Εάν ναι, μεταθέτουμε τους φραγμένους κόμβους ανάμεσα στα γειτονικά διαστήματα. Επαναλαμβάνουμε αυτή την εργασία έως ότου όλοι οι περιποί κόμβοι να μετακινηθούν.

Βήμα 14: Ελέγχουμε εάν $\|E(x_{k+1})\| < e_0$. Εάν ναι, πηγαίνουμε στο βήμα 15, αλλιώς θέτουμε $k = k + 1$ και πηγαίνουμε στο βήμα 1.

Βήμα 15: Σταματάμε.

4.3 Συμπεράσματα

Συνοψίζοντας αν και υπάρχουν ποικίλες αριθμητικές μέθοδοι για την επίλυση προβλημάτων λογισμού των μεταβολών ([3],[15]), καμία δεν εγγυάται πεπερασμένο τερματισμό. Στο κεφάλαιο αυτό ένας νέος αλγόριθμος που εγγυάται πεπερασμένο τερματισμό και ολική σύγκλιση, προτίθεται να λύσει προβλήματα αυτού του είδους. Στην περίπτωση της βελτιστοποίησης οι τρεις συνθήκες του Wolfe χρησιμοποιούνται για να εξασφαλίσουν ότι ο αλγόριθμος τερματίζει σε ένα ορισμένο πλήθος βημάτων σε μια 'γειτονιά' του σημείου ισορροπίας του (4.1). Εδώ, οι τρεις συνθήκες του Wolfe αναδιατυπώνονται και συμφωνείται ότι είναι περισσότερο κατάλληλες για το διακριτό πρόβλημα απ'ότι για το αρχικό.

Προτείνεται μια πρακτική εφαρμογή του αλγορίθμου, η οποία χρησιμοποιεί κυβικές splines για να παρεμβάλει τη λύση του τετραγωνικού υποπροβλήματος όπου οι αριθμοί και οι θέσεις των κόμβων ποικίλουν σε κάθε επανάληψη. Χρησιμοποιούνται όσο το δυνατόν λιγότεροι κόμβοι για να μειωθεί ο χρόνος υπολογισμού. Η εφαρμογή αυτή καλείται τυχαίας διάστασης και είναι περισσότερο αποτελεσματική απ' ότι άλλες μέθοδοι που καθορίζουν εκ των προτέρων τον αριθμό και τη θέση των κόμβων.

Τονίζεται, ιδιαίτερα, ότι ο προτεινόμενος αλγόριθμος και η εφαρμογή του εκμεταλλεύονται τη δυναμική φύση του προβλήματος. Είναι κατ'ουσίαν διαφορετικός από οποιαδήποτε μη γραμμική μέθοδο προγραμματισμού η οποία λύνει τη διακριτή μορφή του προβλήματος.

Κεφάλαιο 5

«Συμβολικά συστήματα και Λογισμός των Μεταβολών»

Οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές έχουν μετατραπεί σε πολύτιμα εργαλεία για την επίλυση προβλημάτων με κύριο και βασικό αντικείμενο τις συναρτήσεις. Μπορούν να επεξεργαστούν γρήγορα και αποτελεσματικά τη γραφική παράσταση, την παράγωγο και το αόριστο ολοκλήρωμα δοσμένων συναρτήσεων, η μελέτη των οποίων είναι πρωταρχικής σημασίας και η οποία επιτυγχάνεται μέσω συστημάτων (πακέτων) λογισμικού όπως το Maple, το Mathematica κ.α.

Τα πακέτα αυτά ονομάζονται συστήματα συμβολικών ή αλγεβρικών υπολογισμών επειδή ο ηλεκτρονικός υπολογιστής “καταλαβαίνει” έννοιες ανώτερων μαθηματικών και με μεγάλη ταχύτητα τις μελετάει και τις υπολογίζει. Στις πιο πρόσφατες εκδόσεις τους μπορούμε να βρούμε υποπρογράμματα (“packages”) που χρησιμοποιούνται σε ειδικούς τομείς των μαθηματικών και των εφαρμογών τους.

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, το βασικό πρόβλημα στο λογισμό των μεταβολών είναι, να βρούμε τη συνάρτηση $x(t)$ που δίνει άκρα τιμή στο συναρτησιακό

$$J = \int_a^b f(t, x(t), x'(t)) dt.$$

Γενικά, μπορούν να υπάρχουν περισσότερες από μία ανεξάρτητες μεταβλητές και η ολοκλήρουσα συνάρτηση f μπορεί να εξαρτάται από αρκετές συναρτήσεις και τις παραγώγους τους. Αφού αρκετές συνήθειες και μερικές διαφορικές εξισώσεις που λαμβάνουν χώρα στη φυσική και στη μηχανική μπορούν να προκύψουν ως οι εξισώσεις Euler-Lagrange για κατάλληλα συναρτησιακά, οι μέθοδοι του λογισμού των μεταβολών είναι γενικής χρησιμότητας.

5.1 Πακέτο VariationalCalculus

Το σύστημα λογισμικού Maple χρησιμοποιεί το πακέτο VariationalCalculus το οποίο περιέχει εντολές που εκτελούν υπολογισμούς του λογισμού των μεταβολών. Το πακέτο αυτό εκτελεί διάφορους υπολογισμούς για τον χαρακτηρισμό των άκρων τιμών των συναρτησιακών. Κάθε εντολή στο πακέτο αυτό μπορεί να προσπελαστεί χρησιμοποιώντας είτε τη “μεγάλη” μορφή είτε τη “σύνομη” μορφή του ονόματος της εντολής.

Συγκεκριμένα, το πακέτο VariationalCalculus περιέχει τις εντολές: *ConjugateEquation*, *Convex*, *EulerLagrange*, *Jacobi* και *Weierstrass*. Αναφέρουμε, παρακάτω, αναλυτικά τι λειτουργία κάθε εντολής.

- $\text{ConjugateEquation}(\text{extremals}, \text{parms}, \text{parm_values}, t, t_0)$

Παράμετροι :

extremals	λίστα των άκρων τιμών ή αλγεβρική έκφραση των άκρων τιμών
parms	λίστα ονομάτων των παραμέτρων
parm_values	λίστα των συνοριακών τιμών
t	ανεξάρτητη μεταβλητή
t_0	ένα τελικό σημείο της ανεξάρτητης μεταβλητής

ü Η εντολή $\text{ConjugateEquation}(\text{extremals}, \text{parms}, \text{parm_values}, t, t_0)$

υπολογίζει μια αλγεβρική εξίσωση, της οποίας οι ρίζες είναι συζυγή σημεία.

ü Οι άκρες τιμές μπορούν να προσδιοριστούν ως μια λίστα.

ü Οι άκρες τιμές μπορούν, επίσης, να εκφραστούν αλγεβρικά.

ü Εάν υπάρχουν n άκρες τιμές, πρέπει να υπάρχουν $2n$ παράμετροι.

ü Το t_0 είναι ένα τελικό σημείο της ανεξάρτητης μεταβλητής, για παράδειγμα, το αριστερό σημείο.

- $\text{Convex}(f, t, x(t))$

Παράμετροι :

f	έκφραση των $t, x(t)$ και $x'(t)$
t	ανεξάρτητη μεταβλητή
$x(t)$	άγνωστη συνάρτηση (ή λίστα συναρτήσεων)

ü Η εντολή $\text{Convex}(f, t, x(t))$ προσδιορίζει εάν η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι κυρτή.

ü Εάν η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι κυρτή, το συναρτησιακό J παίρνει ολική ελάχιστη τιμή από τις άκρες τιμές (λύσεις των εξισώσεων Euler-Lagrange).

ü Για μια κυρτή ολοκληρωτέα συνάρτηση, η “έξοδος” αποτελείται από

- την Εσσιανή μήτρα $\frac{\partial^2}{\partial x \partial x'} f$ και
- τη λογική έκφραση “true”, εάν η εσσιανή είναι θετικά ημιορισμένη, το το οποίο αποδεικνύει ότι το J γίνεται ελάχιστο.

ü Εάν η ολοκληρωτέα συνάρτηση δεν είναι κυρτή, το σύστημα λογισμικού επιστρέφει τη λογική έκφραση “false”.

- $\text{EulerLagrange}(f, t, x(t))$

Παράμετροι :

f	έκφραση των t, x(t) και x'(t)
t	ανεξάρτητη μεταβλητή
x(t)	άγνωστη συνάρτηση (ή λίστα συναρτήσεων)

ü Η εντολή EulerLagrange(f, t, x(t)) υπολογίζει τις εξισώσεις Euler-Lagrange του συναρτησιακού J με x(a) = A και x(b) = B .

ü Εάν οι εξισώσεις Euler-Lagrange δεν μπορούν να υπολογιστούν τότε, επίσης, επιστρέφονται τα πρώτα ολοκληρώματα

ü Για συναρτησιακά υψηλότερης τάξης, για παράδειγμα, f(x, y(t), y'(t), y''(t)), η εντολή χρησιμοποιεί μεταβλητές για να αναπαραστήσει τις παραγώγους. Για παράδειγμα, θέτουμε x1(t) = y(t) και x2(t) = y'(t) και υπολογίζουμε τις εξισώσεις Euler-Lagrange του συναρτησιακού f + L*(x1'(t) - x2(t))^2. Για να βρούμε τις εξισώσεις προβλημάτων υψηλότερης τάξης, αντικαθιστούμε x2(t) = x1'(t) στο αποτέλεσμα.

Παράδειγμα

> with(VariationalCalculus)

[ConjugateEquation, Convex, EulerLagrange, Jacobi, Weierstrass]

$$> f := \left(\left(\frac{d}{dt} x(t) \right)^2 + \left(\frac{d}{dt} y(t) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$f := \sqrt{\left(\frac{d}{dt} x(t) \right)^2 + \left(\frac{d}{dt} y(t) \right)^2}$$

> EulerLagrange(f,t,[x(t),y(t)])

$$\frac{\frac{1}{2} \left(\frac{d}{dt} x(t) \right) \left(2 \left(\frac{d}{dt} x(t) \right) \left(\frac{d^2}{dt^2} x(t) \right) + 2 \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) \left(\frac{d^2}{dt^2} y(t) \right) \right)}{\left(\left(\frac{d}{dt} x(t) \right)^2 + \left(\frac{d}{dt} y(t) \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\frac{d^2}{dt^2} x(t)}{\sqrt{\left(\frac{d}{dt} x(t) \right)^2 + \left(\frac{d}{dt} y(t) \right)^2}},$$

$$\frac{\frac{1}{2} \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) \left(2 \left(\frac{d}{dt} x(t) \right) \left(\frac{d^2}{dt^2} x(t) \right) + 2 \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) \left(\frac{d^2}{dt^2} y(t) \right) \right)}{\left(\left(\frac{d}{dt} x(t) \right)^2 + \left(\frac{d}{dt} y(t) \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$- \frac{\frac{d^2}{dt^2} y(t)}{\sqrt{\left(\frac{d}{dt} x(t) \right)^2 + \left(\frac{d}{dt} y(t) \right)^2}},$$

$$\frac{\frac{d}{dt} x(t)}{\sqrt{\left(\frac{d}{dt} x(t) \right)^2 + \left(\frac{d}{dt} y(t) \right)^2}} = K_1, \quad \frac{\frac{d}{dt} y(t)}{\sqrt{\left(\frac{d}{dt} x(t) \right)^2 + \left(\frac{d}{dt} y(t) \right)^2}} = K_2,$$

$$\sqrt{\left(\frac{d}{dt} x(t) \right)^2 + \left(\frac{d}{dt} y(t) \right)^2} - \frac{\left(\frac{d}{dt} x(t) \right)^2}{\sqrt{\left(\frac{d}{dt} x(t) \right)^2 + \left(\frac{d}{dt} y(t) \right)^2}} - \frac{\left(\frac{d}{dt} y(t) \right)^2}{\sqrt{\left(\frac{d}{dt} x(t) \right)^2 + \left(\frac{d}{dt} y(t) \right)^2}} = K_3.$$

$$> g := \frac{\left(1 + \left(\frac{d}{dt} y(t) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}}{y(t)^{\frac{1}{2}}}$$

$$g := \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{d}{dt} y(t) \right)^2}}{\sqrt{y(t)}}$$

> EulerLagrange(g,t,y(t))

$$-\frac{1}{2} \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{d}{dt} y(t) \right)^2}}{y(t)^{3/2}} + \frac{\left(\frac{d}{dt} y(t) \right)^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} y(t) \right)}{\left(1 + \left(\frac{d}{dt} y(t) \right)^2 \right)^{3/2} \sqrt{y(t)}} +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{d}{dt} y(t)\right)^2}{\sqrt{1+\left(\frac{d}{dt} y(t)\right)^2} y(t)^{3/2}} - \frac{\frac{d^2}{dt^2} y(t)}{\sqrt{1+\left(\frac{d}{dt} y(t)\right)^2} y(t)}, \\
 & \frac{\sqrt{1+\left(\frac{d}{dt} y(t)\right)^2}}{\sqrt{y(t)}} - \frac{\left(\frac{d}{dt} y(t)\right)^2}{\sqrt{1+\left(\frac{d}{dt} y(t)\right)^2} \sqrt{y(t)}} = K_1.
 \end{aligned}$$

- Jacobi (f, t, x(t), X(t), h, a)

Παράμετροι :

f	ολοκληρωτέα συνάρτηση
t	ανεξάρτητη μεταβλητή
x(t)	εξαρτώμενη συνάρτηση (ή λίστα συναρτήσεων)
X(t)	έκφραση των άκρων τιμών (οι οποίες βρίσκονται από τις εξισώσεις Euler-Lagrange
h	όνομα της άγνωστης συνάρτησης στην εξίσωση Jacobi
a	αρχικό σημείο (το αριστερό σημείο του διαστήματος)

• Η εντολή Jacobi(f, t, x(t), X(t), h, a) βρίσκει την εξίσωση Jacobi και προσπαθεί να βρει τις λύσεις της, οι οποίες είναι συζυγή σημεία.

• Το υποπρόγραμμα δίνει την εξίσωση Jacobi και τις λύσεις που βρίσκουμε με τη βοήθεια της εντολής dsolve .
Εάν η εντολή dsolve αντιμετωπίζει κάποιο πρόβλημα τότε επιστρέφεται ένα μήνυμα σφάλματος.
Ενώ αν η εντολή dsolve αποτύχει να βρει λύση τότε επιστρέφεται μόνο η εξίσωση Jacobi.

- Weierstrass (f, t, x(t), p)

Παράμετροι :

f	έκφραση των $t, x(t)$ και $x'(t)$
t	ανεξάρτητη μεταβλητή
x(t)	άγνωστη συνάρτηση (ή λίστα συναρτήσεων)
p	το διάνυσμα $p[1, \dots, n]$

• Η εντολή Weierstrass (f, t, x(t), p) υπολογίζει τη συνάρτηση Weierstrass

$$E(t, x, x', p) = L(t, x, x') - L(t, x, p) - (x' - p)L_p(t, x, p).$$

• Η έξοδος δεν είναι απλοποιημένη. Υπάρχουν αρκετές τεχνικές που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να απλοποιήσουν το αποτέλεσμα,

όπως : *factor, collect, combine* ή *complete the square*.

ü Εάν η συνάρτηση $E(t, x, x', p)$ είναι θετική όταν το x είναι άκρα τιμή, εκτός όταν $x' = p$, η άκρα τιμή παρέχει ένα “δυνατό” τοπικό ελάχιστο. Η ανισότητα Cauchy-Schwarz μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να καθοριστεί το πρόσημο της έκφρασης.

Εφαρμογές

(1) Ένα από τα παλαιότερα προβλήματα του λογισμού των μεταβολών είναι το πρόβλημα του βραχυστόχρονου.

Όπως έχει ήδη αναφερθεί στο κεφάλαιο 1, ο χρόνος που χρειάζεται το σώμα να φτάσει από το σημείο $A(0,0)$ στο σημείο $B(x_1, y_1)$ είναι

$$T = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+(y')^2} dx}{\sqrt{2gy}}$$

> $F := \text{sqrt}(1 + \text{diff}(y(x), x)^2) / \text{sqrt}(y(x))$

$$F := \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx} y(x)\right)^2}}{\sqrt{y(x)}}$$

> $\text{eq} := \text{simplify}(\text{EulerLagrange}(F, x, y(x)))$

$$\text{eq} := \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx} y(x)\right)^2} \sqrt{y(x)}} = K_1, -\frac{1}{2} \frac{1 + \left(\frac{d}{dx} y(x)\right)^2 + 2\left(\frac{d^2}{dx^2} y(x)\right) y(x)}{y(x)^{(3/2)} \left(1 + \left(\frac{d}{dx} y(x)\right)^2\right)^{(3/2)}} \right\}$$

Όπως παρατηρούμε, η εντολή EulerLagrange δίνει δύο αποτελέσματα. Το πρώτο ολοκλήρωμα παράγεται στην πρώτη έκφραση της παραπάνω εξόδου όπου K_1 η σταθερά ολοκλήρωσης. Η δεύτερη έκφραση είναι το αριστερό μέλος της εξίσωσης Euler-Lagrange. Θα εργαστούμε με το πρώτο ολοκλήρωμα.

> $\text{eq2} := \text{select}(\text{has}, \text{eq}, K[1]) [1]$

$$\text{eq2} := \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx} y(x)\right)^2} \sqrt{y(x)}} = K_1$$

Η εντολή *dsolve* χρησιμοποιείται για να λύσει αναλυτικά την eq2 για τη $y(x)$.

> $\text{sol} := \text{dsolve}(\text{eq2}, y(x), \text{parametric})$

$$\text{sol} := [y(_T) = \frac{1}{K_1^2(1+_T^2)},$$

$$x(_T) = \frac{-_T - \arctan(_T) - \arctan(_T)_T^2 + _C1K_1^2 + _C1K_1^2_T^2}{K_1^2(1+_T^2)}]$$

Οι τύποι των x και y δίνονται ως προς την παράμετρο $_T$. Η ποσότητα $_C1$ είναι η δεύτερη σταθερά ολοκλήρωσης. Εισάγουμε μια νέα παράμετρο q θέτοντας $_T = \cos(q/2)/\sin(q/2)$. Η σταθερά K_1 τίθεται ίση με $1/\sqrt{a}$.

$$> _T := \cos(\text{theta} / 2) / \sin(\text{theta} / 2): K[1] := 1/\text{sqrt}(a):$$

Το δεξιό μέλος της δεύτερης έκφρασης της sol απλοποιείται,

$$> x := \text{simplify}(\text{rhs}(\text{sol}[2]), \text{trig}, \text{symbolic})$$

$$x := -\cos\left(\frac{q}{2}\right)a \sin\left(\frac{q}{2}\right) - \arctan\left(\frac{\cos\left(\frac{q}{2}\right)}{\sin\left(\frac{q}{2}\right)}\right)a + _C1$$

$$> x := \text{combine}(x, \text{trig})$$

$$x := -\frac{1}{2}a \sin(q) - \arctan\left(\frac{\cos\left(\frac{q}{2}\right)}{\sin\left(\frac{q}{2}\right)}\right)a + _C1$$

Πρέπει να διαλέξουμε τη σταθερά $_C1$ με τέτοιο τρόπο ώστε οι δύο τελευταίοι όροι της παραπάνω εξόδου να μειωθούν στο $a q/2$. Για να το πετύχουμε, η παράμετρος q πρέπει να έχει την τιμή 0 όταν $x=0$. Για $q=0$, ο πρώτος όρος είναι 0, ενώ ο δεύτερος όρος δίνει $-a \arctan(\infty)$ ή $-a p/2$. Επομένως, για να δημιουργήσουμε $q=0$ στο $x=0$, πρέπει να διαλέξουμε $_C1 = a p/2$.

$$> \text{subs}(\{_C1 = a * \text{Pi} / 2, \cos(\text{theta} / 2) = \cot(\text{theta} / 2) * \sin(\text{theta} / 2)\}, x)$$

$$x := -\frac{1}{2}a \sin(q) - \arctan(\cot\left(\frac{q}{2}\right))a + \frac{ap}{2}$$

Εφαρμόζοντας την εντολή combine με την τριγωνομετρική επιλογή και κάνοντας την αντικατάσταση $(\cot(q/2)) = q/2$, παίρνουμε την επιθυμητή τελική μορφή του x .

$$> \text{combine}(x, \text{trig})$$

$$x := -\frac{1}{2}a \sin(q) + a \text{arc cot}(\cot\left(\frac{q}{2}\right))$$

$$> x := \text{subs}(\text{arc cot}(\cot(\text{theta} / 2)) = \text{theta} / 2, x)$$

$$x := -\frac{1}{2}a \sin(q) + \frac{aq}{2}$$

Με αντίστοιχη διαδικασία παίρνουμε την επιθυμητή μορφή του y ,

> $y := \text{simplify}(\text{rhs}(\text{sol}[1]), \text{trig}, \text{symbolic})$

$$y := a \sin\left(\frac{q}{2}\right)^2$$

> $y := \text{combine}(y, \text{trig})$

$$y := \frac{a}{2} - \frac{1}{2}a \cos(q)$$

Με τις παραμετρικές μορφές των x και y , ο ελάχιστος χρόνος καθόδου του σώματος μπορεί να υπολογιστεί. Πρώτα, σημειώνουμε ότι ο χρόνος καθόδου είναι

$$T = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy(x)}{dx}\right)^2} dx}{\sqrt{2gy(x)}} = \int_0^{q_1} \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy(q)/dq}{dx(q)/dq}\right) \left(\frac{dx(q)}{dq}\right) dq}}{\sqrt{2dy(q)}},$$

όπου q_1 είναι η τιμή του q στο τελικό σημείο B . Το τελευταίο ολοκλήρωμα, τώρα, υπολογίζεται και απλοποιείται, υποθέτοντας ότι $q > 0$.

> $\text{integrand} := \text{simplify}(\text{sqrt}(1 + (\text{diff}(y, \text{theta}) / \text{diff}(x, \text{theta}))^2) * \text{diff}(x, \text{theta}) / \text{sqrt}(2 * g * y)) \text{ assuming } \text{theta} > 0$

$$\text{integrand} := \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{ga}}$$

> $T := \text{int}(\text{integrand}, \text{theta} = 0.. \text{theta}1)$

$$T := \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}aq_1}{\sqrt{ga}}$$

(2) Θεωρούμε μια υδροηλεκτρική γραμμή, μήκους $L = 1.5 \text{ km}$ και γραμμικής πυκνότητας μάζας $e = 1000 \text{ kg / km}$, σ'ένα βαθύ μεγάλο φαράγγι. Ως προς την πηγή του κάτω μέρους του φαραγγιού, οι δύο πύργοι από τους οποίους θα κρεμαστεί το καλώδιο, βρίσκονται στα σημεία $(-a/2, b)$ και $(a/2, b)$, όπου $a = 1.25 \text{ km}$ και $b = 1 \text{ km}$. Υποθέτοντας ότι το σχήμα ισορροπίας του καλωδίου είναι τέτοιο ώστε να ελαχιστοποιείται η δυναμική ενέργεια, θα καθορίσουμε το σχήμα του καλωδίου. Επιπλέον, θα αναζητήσουμε την απόσταση μεταξύ του χαμηλότερου σημείου του καλωδίου και του κάτω μέρους του φαραγγιού.

Εάν το μήκος τόξου $ds = \sqrt{1+(y')^2} dx$ του καλωδίου σε ένα σημείο x είναι η απόσταση $y(x)$ πάνω από τον πυθμένα του φαραγγιού, η δυναμική ενέργεια όλου του καλωδίου είναι

$$V = \int eds gy = \int_{-a/2}^{a/2} e g y \sqrt{1+(y')^2} dx .$$

> restart : with(VariationalCalculus) :

> F := epsilon * g * y(x) * sqrt(1 + diff(y(x), x) ^ 2

$$F := e g y(x) \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx} y(x)\right)^2}$$

Η συνθήκη υπό όρους είναι ότι το μήκος του καλωδίου πρέπει να είναι L , δηλαδή

$$\int ds = \int_{-a/2}^{a/2} \sqrt{1+(y')^2} dx = L$$

επιπλέον, σχηματίζουμε τη $FF = F + IG$, όπου I είναι ο πολλαπλασιαστής Lagrange,

> G := sqrt(1 + diff(y(x), x) ^ 2

$$G := \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx} y(x)\right)^2}$$

> FF := simplify(F + lambda * G)

$$FF := \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx} y(x)\right)^2} (e g y(x) + I)$$

> eq := simplify(EulerLagrange(FF, x, y(x)))

$$eq := \left\{ \frac{e g y(x) + I}{\sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx} y(x)\right)^2}} = K_1, \right. \\ \left. \frac{e g + e g \left(\frac{d}{dx} y(x)\right)^2 - \left(\frac{d^2}{dx^2} y(x)\right) e g y(x) - \left(\frac{d^2}{dx^2} y(x)\right) I}{\left(1 + \left(\frac{d}{dx} y(x)\right)^2\right)^{3/2}} \right\}$$

> eq2 := select(has, eq, K[1])[1]

$$eq2 := \frac{e g y(x) + I}{\sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx} y(x)\right)^2}} = K_1$$

Η σ.δ.ε στην eq2 λύνεται αναλυτικά ως προς $y(x)$, υποθέτοντας ότι $e > 0$, $g > 0$.

```
> sol:=dsolve(eq2,y(x)) assuming epsilon>0,g>0
> Y:=simplify(rhs(sol[2]))
```

$$Y := \frac{1}{2} \frac{(K_1^2 + e^{\left(\frac{-2eg(x-C1)}{K_1}\right)} - 2e^{\left(\frac{-eg(x-C1)}{K_1}\right)} I) e^{\left(\frac{eg(x-C1)}{K_1}\right)}}{eg}$$

```
> Y2:=combine(convert(Y,trig))
```

$$Y2 := \frac{1}{2} (K_1^2 \cosh\left(\frac{eg(x-C1)}{K_1}\right) + K_1^2 \sinh\left(\frac{eg(x-C1)}{K_1}\right) + \cosh\left(\frac{eg(x-C1)}{K_1}\right) - \sinh\left(\frac{eg(x-C1)}{K_1}\right) - 2I) / (eg)$$

```
> Y3:=collect(Y2,[cosh,sinh])
```

$$Y3 := \frac{1}{2} \frac{(1+K_1^2) \cosh\left(\frac{eg(x-C1)}{K_1}\right)}{eg} + \frac{1}{2} \frac{(K_1^2-1) \sinh\left(\frac{eg(x-C1)}{K_1}\right)}{eg} - \frac{I}{eg}$$

Για να υπολογιστούν οι σταθερές $K_1, C1$ και I απαιτούνται τρεις συνθήκες. Δεδομένου ότι το καλώδιο θα κρεμαστεί συμμετρικά, η κλίση στο κέντρο του καλωδίου πρέπει να είναι μηδέν (συννοριακή συνθήκη bc1). Το τελικό σημείο $(a/2, b)$ εισάγεται ως bc2.

```
> bc1:=eval(diff(Y3,x),x=0)=0: bc2:=eval(Y3,x=a/2)=b:
> sol2:=solve({bc1,bc2},{lambda,_C1}): assign(sol2):
```

Το σχήμα του καλωδίου δίνεται από την $Y4$,

```
> Y4:=expand(Y3)
```

$$Y4 := \frac{\cosh\left(\frac{egx}{K_1}\right) K_1}{eg} - \frac{\cosh\left(\frac{1}{2} \frac{aeg}{K_1}\right) K_1}{eg} + b$$

Πρέπει να υπολογιστεί η σταθερά K_1 . Η συνθήκη $\int_{-a/2}^{a/2} G dx = L$ εφαρμόζεται στην bc3. Για το ολοκλήρωμα υποθέτουμε ότι $a > 0$, $e > 0$, $g > 0$ και $K_1 > 0$.

```
> bc3:=simplify(int(eval(G,y(x)=Y4),x=-a/2..a/2))=L
      assuming a>0,epsilon>0,g>0,K[1]>0,
```

$$bc3 := \frac{e^{\left(-\frac{1}{2}\frac{aeg}{K_1}\right)} K_1 \left(-1 + e^{\left(\frac{aeg}{K_1}\right)}\right)}{e g} = L$$

(υπερβατική εξίσωση η οποία πρέπει να λυθεί αριθμητικά ως προς K_1).

```
> epsilon:=1000: L:=1.5: a:=1.25: b:=1: g:=9.8/1000
> K1:=fsove(bc3,K[1]=0..10)
> Y5:=eval(Y4,K[1]=K1)
```

$$K_1 := 5.751883654$$

$$Y5 := 0.5869269033 \cosh(1.703789678x) + 0.0476433492$$

Το σχήμα ισορροπίας $Y5$ καλείται αλυσοειδής και υπολογίζοντάς το στο $x=0$, το χαμηλότερο σημείο του καλωδίου

```
> height:=eval(Y5,x=0)
height := 0.6345702525
```

είναι περίπου 0.635 km ή 635 m πάνω από τον πυθμένα του φαραγγιού.

5.2 Πακέτο VariationalMethods

Το σύστημα λογισμικού Mathematica χρησιμοποιεί το πακέτο VariationalMethods το οποίο παρέχει της παρακάτω εντολές,

- $\text{VariationalD}[f, x(t), t]$, $\text{VariationalD}[f, x[t_1, t_2, \dots], \{t_1, t_2, \dots\}]$
Δίνουν την πρώτη παράγωγο του συναρτησιακού J που ορίζεται από την f , η οποία εξαρτάται από μία συνάρτηση x και μία ανεξάρτητη μεταβλητή t ή της ανεξάρτητες μεταβλητές t_1, t_2, \dots .
- $\text{VariationalD}[f, \{x[t_1, t_2, \dots], y[t_1, t_2, \dots], \dots\}, \{t_1, t_2, \dots\}]$
Δίνει της πρώτες παραγώγους του συναρτησιακού J που ορίζονται από την f , η οποία εξαρτάται από της συναρτήσεις x, y, \dots και της ανεξάρτητες μεταβλητές t_1, t_2, \dots .
- $\text{EulerEquations}[f, x[t], t]$, $\text{EulerEquations}[f, x[t_1, t_2, \dots], \{t_1, t_2, \dots\}]$
Δίνουν την εξίσωση Euler για την f , η οποία εξαρτάται από μία συνάρτηση x και μία ανεξάρτητη μεταβλητή t ή της ανεξάρτητες μεταβλητές t_1, t_2, \dots .
- $\text{EulerEquations}[f, \{u[x, y, \dots], v[x, y, \dots], \dots\}, \{x, y, \dots\}]$

Δίνει της εξισώσεις Euler-Lagrange για την f , η οποία εξαρτάται από της συναρτήσεις x, y, \dots και της ανεξάρτητες μεταβλητές t_1, t_2, \dots .

In[1]:= <<VariationalMethods`

In[2]:= VariationalD[$y[x]\sqrt{1+y'[x]^2}$, $y[x], x$]

$$\text{Out[2]} = \frac{1 + y'[x] - y[x]y''[x]}{(1 + y'[x]^2)^{3/2}}$$

- FirstIntegrals[$f, x[t], t$], FirstIntegrals[$f, \{x[t], y[t], \dots\}, t$]

Δίνουν τα πρώτα ολοκληρώματα όταν η f είναι ανεξάρτητη μιας ή περισσότερων συναρτήσεων $\{x[t], y[t], \dots\}$ ή ανεξάρτητη του t .

Ύ Όταν υπάρχει μόνο μία ανεξάρτητη μεταβλητή t , η εντολή FirstIntegrals δίνει σταθερές ποσότητες της ακόλουθες περιπτώσεις:

- (1) εάν η f δεν εξαρτάται αυστηρά από την x τότε η x αναφέρεται ως μια συντεταγμένη που “αγνοείται” και η αντίστοιχη εξίσωση του Euler διαθέτει ένα προφανές πρώτο ολοκλήρωμα, και
- (2) εάν η f εξαρτάται από της x, y, \dots και της πρώτες παραγώγους της μόνο και δεν εξαρτάται από τη μεταβλητή t , η εντολή FirstIntegrals επιστρέφει, της, το πρώτο ολοκλήρωμα που αντιστοιχεί στη Χαμιλτονιανή.

Παράδειγμα

Η Λαγκρατζιανή για την κεντρική δύναμη κίνησης έχει μια συντεταγμένη f που “αγνοείται” και είναι ανεξάρτητη του χρόνου t . Η FirstIntegrals δίνει και το πρώτο ολοκλήρωμα που αντιστοιχεί στη συντεταγμένη f και το πρώτο ολοκλήρωμα που αν αντιστοιχεί στη Χαμιλτονιανή.

In[3]:= FirstIntegrals[$\frac{1}{2}m(r'[t]^2 + r[t]^2 \text{phi}'[t]^2) - U[r], \{r[t], \text{phi}[t]\}, t$]

Out[3]= {FirstIntegral[phi] $\rightarrow -mr[t]^2 \text{phi}'[t]$,
FirstIntegral[t] $\rightarrow \frac{1}{2}(2U[r] + m(r[t]^2 \text{phi}'[t]^2 + r'[t]^2))$ }

Η αρχή μεταβολών του Ritz παρέχει μια ισχυρή τεχνική για την προσεγγιστική λύση

(1) των προβλημάτων των ιδιοτιμών $Ax = \lambda wx$ όπου A είναι της τελεστής και $w(t_1, t_2, \dots)$ είναι μια συνάρτηση βάρους, και

(2) των προβλημάτων της μορφής $Bx(t_1, t_2, \dots) = h(t_1, t_2, \dots)$ όπου B είναι της θετικά ορισμένος τελεστής και η συνάρτηση $h(t_1, t_2, \dots)$ είναι δοσμένη. Και της δύο περιπτώσεις δίνεται μια συνετή επιλογή για τη δοκιμαστική συνάρτηση η οποία ικανοποιεί συνοριακές συνθήκες και εξαρτάται από της παραμέτρους $\{k, l, \dots\}$.

Για την (1), η εντολή

$$\text{VariationalBound}[\{f, g\}, x[t_1, t_2, \dots], \{t_1, t_{1,\min}, t_{1,\max}\}, \{t_2, t_{2,\min}, t_{2,\max}\}, \dots], \\ x_u, \{k, k_{\min}, k_{\max}\}, \{l, l_{\min}, l_{\max}\}, \dots]$$

δίνει άκρα τιμή στο $\left(\int_{t_{1,\min}}^{t_{1,\max}} dt_1 \int_{t_{2,\min}}^{t_{2,\max}} dt_2 \dots f \right) / \left(\int_{t_{1,\min}}^{t_{1,\max}} dt_1 \int_{t_{2,\min}}^{t_{2,\max}} dt_2 \dots g \right)$ όπου $f = xAx$ και $g = xwx$. Το αποτέλεσμα είναι ένα άνω όριο της αντίστοιχης ιδιοτιμής και βέλτιστες τιμές για της παραμέτρους.

Για την (2), η εντολή

$$\text{VariationalBound}[f, x[t_1, t_2, \dots], \{t_1, t_{1,\min}, t_{1,\max}\}, \{t_2, t_{2,\min}, t_{2,\max}\}, \dots], \\ x_u, \{k, k_{\min}, k_{\max}\}, \{l, l_{\min}, l_{\max}\}, \dots]$$

δίνει άκρα τιμή στο συναρτησιακό $J = \int_{t_{1,\min}}^{t_{1,\max}} dt_1 \int_{t_{2,\min}}^{t_{2,\max}} dt_2 \dots f$ με $f = xBx - 2xh$ και δίνει την τιμή του συναρτησιακού καθώς και της βέλτιστες παραμέτρους.

Συνοψίζοντας,

- $\text{VariationalBound}[\{f, g\}, x[t_1, t_2, \dots], \{t_1, t_{1,\min}, t_{1,\max}\}, \{t_2, t_{2,\min}, t_{2,\max}\}, \dots], \\ x_u, \{k, k_{\min}, k_{\max}\}, \{l, l_{\min}, l_{\max}\}, \dots]$

Δίνει ένα άνω όριο για την ιδιοτιμή και της βέλτιστες τιμές των k, l, \dots στο διάστημα $\{\{k_{\min}, k_{\max}\}, \{l_{\min}, l_{\max}\}, \dots\}$.

- $\text{VariationalBound}[f, x[t_1, t_2, \dots], \{t_1, t_{1,\min}, t_{1,\max}\}, \{t_2, t_{2,\min}, t_{2,\max}\}, \dots], \\ x_u, \{k, k_{\min}, k_{\max}\}, \{l, l_{\min}, l_{\max}\}, \dots]$

Δίνει την τιμή του συναρτησιακού και βέλτιστες τιμές των k, l, \dots .

- $\text{NVariationalBound}[\{f, g\}, x[t_1, t_2, \dots], \{t_1, t_{1,\min}, t_{1,\max}\}, \{t_2, t_{2,\min}, t_{2,\max}\}, \dots], \\ x_u, \{k, k_0, k_{\min}, k_{\max}\}, \{l, l_0, l_{\min}, l_{\max}\}, \dots]$

Υπολογίζει αριθμητικά ένα άνω όριο για την ιδιοτιμή και τις βέλτιστες τιμές των k, l, \dots στο διάστημα $\{\{k_{\min}, k_{\max}\}, \{l_{\min}, l_{\max}\}, \dots\}$ ενώ έχουν δοθεί οι αρχικές τιμές k_0, l_0, \dots .

- $\text{NVariationalBound}[f, x[t_1, t_2, \dots], \{\{t_1, t_{1,\min}, t_{1,\max}\}, \{t_2, t_{2,\min}, t_{2,\max}\}, \dots\}, x_0, \{k, k_0, k_{\min}, k_{\max}\}, \{l, l_0, l_{\min}, l_{\max}\}, \dots]$

Υπολογίζει αριθμητικά την τιμή του συναρτησιακού και της βέλτιστες τιμές των k, l, \dots ενώ έχουν δοθεί οι αρχικές τιμές k_0, l_0, \dots .

Παράδειγμα

Το πρόβλημα στρέψης μιας τετραγωνικής ράβδου περιλαμβάνει την επίλυση της εξίσωσης $\Delta^2 u = -1$ όπου η u εξαφανίζεται στο όριο. Η εντολή `VariationalBound` δίνει βέλτιστες τιμές των παραμέτρων για την προσεγγιστική λύση,

```
In[4]:=VariationalBound[-u[x,y](∂{x,2}u[x,y]+∂{y,2}u[x,y])-2u[x,y],u[x,y],
  {{x,-a,a},{y,-a,a}},(x2-a2)(y2-a2)(a1+a2(x2+y2)),{a1},{a2}]
```

```
Out[4]={-0.561572a4, {a1 →  $\frac{0.292193}{a^2}$ , a2 →  $\frac{0.0592283}{a^4}$ }}
```

Συνοψίζοντας

Το πακέτο `VariationalCalculus` του `Maple`, όπως αναφέρθηκε αρχικά, περιλαμβάνει πέντε εντολές με ξεχωριστή λειτουργία η κάθε μία, οι οποίες εκτελούν υπολογισμούς του λογισμού των μεταβολών. Το πακέτο αυτό εκτελεί διάφορους υπολογισμούς για τον χαρακτηρισμό των άκρων τιμών των συναρτησιακών.

Συγκεκριμένα,

- η εντολή `ConjugateEquation` υπολογίζει μια αλγεβρική εξίσωση της οποίας οι λύσεις είναι συζυγή σημεία,
- η εντολή `Convex` προσδιορίζει εάν η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι κυρτή,
- η εντολή `EulerLagrange` υπολογίζει τις εξισώσεις των Euler-Lagrange ενός συναρτησιακού,
- η εντολή `Jacobi` βρίσκει την εξίσωση Jacobi και προσπαθεί να βρει τις λύσεις της, οι οποίες είναι συζυγή σημεία.
- η εντολή `Weierstrass` υπολογίζει τη συνάρτηση Weierstrass.

Το πακέτο `VariationalMethods` του `Mathematica` περιλαμβάνει τις παρακάτω εντολές.

Συγκεκριμένα,

- η εντολή `VariationalD` δίνει την πρώτη παράγωγο ενός συναρτησιακού,
- η εντολή `EulerEquations` δίνει τις εξισώσεις των Euler-Lagrange ενός συναρτησιακού,
- οι εντολές `FirstIntegral`, `FirstIntegrals` δίνουν τα πρώτα ολοκληρώματα συναρτησιακών,
- η εντολή `VariationalBound` δίνει ένα άνω όριο για την ιδιοτιμή καθώς και τις βέλτιστες τιμές των παραμέτρων αλλά και την τιμή το συναρτησιακού,

η εντολή `NVariationalBound` υπολογίζει αριθμητικά ένα άνω όριο για την ιδιοτιμή και τις βέλτιστες τιμές των παραμέτρων αλλά και υπολογίζει αριθμητικά την τιμή του συναρτησιακού.

«Συμπεράσματα»

Συνοψίζοντας, όπως, αρχικά, αναφέρθηκε οι λεγόμενες άμεσες μέθοδοι δίνουν στα συναρτησιακά προβλήματα προσεγγιστικές λύσεις. Η χρήση τους είναι σημαντική αφού είναι πολλές οι περιπτώσεις στις οποίες η δ.ε των Euler-Lagrange δεν μπορεί να επιλυθεί αναλυτικά.

Στη βιβλιογραφική επισκόπηση που παρουσιάζεται δίνονται τέσσερις άμεσες μεθόδους επίλυσης συναρτησιακών προβλημάτων που παρουσιάζουν κυρίως ιστορικό ενδιαφέρον. Σε αυτές περιλαμβάνονται οι μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών του Euler, η μέθοδος του Ritz, η μέθοδος του Kantorovich και η μέθοδος εύρεσης ιδιοτιμών και ιδιοσυναρτήσεων.

Στη συνέχεια, περιγράφονται τέσσερις μέθοδοι, οι οποίες προσεγγίζουν τη λύση μη γραμμικών προβλημάτων του λογισμού των μεταβολών με ακρίβεια 2^{ns} τάξης ως συνάρτηση του μήκους βήματος. Συγκεκριμένα, προσπαθούμε να λύσουμε το πρόβλημα άμεσα προσεγγίζοντας αριθμητικά το ολοκλήρωμα και όχι τη διαφορική εξίσωση των Euler-Lagrange, χρησιμοποιώντας πέντε προσεγγίσεις. Η πρώτη προσέγγιση χρησιμοποιήθηκε αρχικά από τον Euler. Στη δεύτερη προσέγγιση έχουμε χρησιμοποιήσει τον κανόνα του Simpson ως τύπο ολοκλήρωσης. Η τρίτη προσέγγιση είναι αρκετά όμοια με την προηγούμενη με τη διαφορά ότι έχουμε χρησιμοποιήσει τη μέθοδο ολοκλήρωσης του Gauss 4^{ns} τάξης. Η τέταρτη προσέγγιση χρησιμοποιεί τον κανόνα του μέσου σημείου ενώ η πέμπτη προσέγγιση χρησιμοποιεί τον κανόνα του τραπεζίου .

Έπειτα, παρουσιάζεται ένας νέος αλγόριθμος που εγγυάται πεπερασμένο τερματισμό και ολική σύγκλιση και ο οποίος προτίθεται να λύσει προβλήματα αυτού του είδους. Δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στο ότι ο προτεινόμενος αλγόριθμος και η εφαρμογή του εκμεταλλεύεται τη δυναμική φύση των προβλημάτων. Είναι, ωστόσο, διαφορετικός από οποιαδήποτε μη γραμμική μέθοδο προγραμματισμού η οποία λύνει τη διακριτή μορφή του προβλήματος.

Εν τέλει, παρουσιάζονται τα πακέτα VariationalCalculus και VariationalMethods των συστημάτων λογισμικού Maple και Mathematica αντίστοιχα. Αναφέρονται οι εντολές κάθε πακέτου καθώς και οι λειτουργίες τους.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Κυβεντίδης, Θ. Α. (1994). *Λογισμός Μεταβολών*, Εκδόσεις Ζήτη.
- [2] Allen, B. T. (1966). An Investigation into Direct Methods for solving some calculus of variations problems, *The Computer Journal*, Vol.9, pp.205-210.
- [3] Bryson, Jr. and Ho, Y. C. (1975). *Applied Optimal Control, Optimization, Estimation and Control*, Hemisphere Publishing Corporation, New York.
- [4] Chen, H. and Shizgal B.D.(2001). A spectral solution of the Sturm-Liouville equation: Comparison of classical and nonclassical basis sets, *J. Comput. Appl. Math.*, Vol. 136, pp. 17-35.
- [5] Craggs, J. W. (1973). *Calculus of variations*, London, George Allen&Unwin Ltd.
- [6] Dixon, L. C. W. (1974). *Nonlinear Optimisation: A survey of Art*, In: Software for Numerical Mathematics, Edited by Evans, D. J., Academic Press, London.
- [7] Dixon, L. C. W. (1980). *Introduction to numerical optimization*, In: Nonlinear Optimisation: Theory and Algorithms, Edited by Dixon, L. C. W., Spedicato, E. and Szego, G. P., Birkhuaser
- [8] Gill, P. E., Murray, W. and Wright, M.H. (1981). *Practical Optimization*, Academic Press.
- [9] Goh, C.J. and Teo, K.L. (1988). Control parameterization: A unified approach to optimal control problems with general constraints, *Automatica*, Vol. 24, pp. 3-18.
- [10] Jaduu, H. (2002). *Direct solution of nonlinear optimal control problems using quasilinearization and Chebyshev polynomials*, J. Franklin Inst.339, pp. 479-498.

- [11] Kraft, D. (1985). On converting optimal control problems into nonlinear programming problems, in: K. Schittkowski (Ed.), *Computational Mathematical Programming*, vol. F15, Springer, Berlin, pp. 261-280.
- [12] Krasnof, M. L., Makarenko, G. I. and Kiselev, A. I., (1975). *Problems and Exercises in the calculus of variations*, Mir Publishers
- [13] Maleki, M. and Mashali-Firouzi, M. (2010). A numerical solution of problems in calculus of variation using direct method and nonclassical parameterization, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 234, pp. 1364-1373.
- [14] Mcreynolds, D. (1970). *The Computation and Theory of Optimal Control*, Academic Press, New York.
- [15] Miele, A. and Pritchard, R. E. (1972). Numerical solutions in the simplest problem of the calculus of variations, *SIAM Review*, Vol. 14, pp. 385-398
- [16] Stryk, O. and Bulirsch, R. (1992). Direct and indirect methods for trajectory optimization, *Ann. Oper. Res.*, Vol. 37, pp. 357-373.
- [17] Weidman, J.A.C. (1999). *Spectral methods based on nonclassical orthogonal Polynomials, approximations and computation of orthogonal polynomials*, in : International Series of Numerical Mathematics, vol. 131, Birkhauser, Basel, pp. 239-251.
- [18] Wolfe, P. (1969). Convergence conditions for ascent methods, *SIAM Review*, Vol. 11, pp. 226-235.
- [19] Wolfe, P. (1971). Convergence conditions for ascent methods. II Some corrections, *SIAM Review*, Vol. 13, pp. 185-188.
- [20] Zhou, W. and Chalabi, Z. S. (1996). A new algorithm to solve calculus of variations problems using Wolfe's convergence theory, Part I: Theory and Algorithm. *Optimization*, Vol. 37(3), pp. 253-265.

- [21] Zhou, W. and Chalabi, Z. S. (1996). A new algorithm to solve calculus of variations problems, Part II: Implementation. *Optimization*, Vol. 37(3), pp. 267-277.