ΠΑΝΕΠΙΣΤΙΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΓΑΜΜΑ ΚΑΙ Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΖΗΤΑ ΤΟΥ *RIEMANN*

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟΣ ΦΟΙΤΗΤΗΣ:
Άγγελος Γιαννακούλιας
ΑΜ: 369

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ:
Δ. Ηλιόπουλος

ΔΙΛΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΓΙΑ Μ.Δ.Ε

ΠΑΤΡΑ 2011

Περιεχόμενα

1 Σύνοψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία έχει στόχο την μελέτη της Συνάρτησης Ζήτα του *Riemann* μέσω της Μιγαδικής Ανάλυσης, δηλαδή ως μία επέκταση αυτής από την ευθεία των Πραγματικών Αριθμών στο Μιγαδικό επίπεδο. Η σύνδεση της συνάρτησης αυτής με τους Πρώτους Αριθμούς, η διάσημη υπόθεση του *Riemann*, η συναρτησιακή εξίσωση, η αναλυτικότητά της εκτός ενός σημείου είναι μερικά αποτελέσματα αυτής της μελέτης.
Το αρχικό βήμα της εργασίας πρίν από την μελέτη της συνάρτησης ζήτα έιναι μια εκτενής αναφορά στην Συνάρτηση Γάμμα ως επεκτεινόμενη στο Μιγαδικό Επίπεδο, την αναλυτικότητά της και κάποιων βασικών ιδιοτήτων της. Κάτι τέτοιο ήταν αναγκαίο, διότι η Συνάρτηση Γάμμα αποτελεί ένα εργαλείο για την μελέτη της Συνάρτησης Ζήτα.
Για την πληρότητα του κειμένου έχουν αποδειχθεί οι περισσότερες χρησιμοποιούμενες προτάσεις, πέραν κάποιων βασικών θεωρημάτων της Μιγαδικής Ανάλυσης για τα οποία υπάρχει παραπομπή σε σχετική βιβλιογραφία.

Στόχος του κεφαλαίου 1 έναι ο ορισμός της Συνάρτησης Γάμμα ως μία αναλυτική συνάρτηση με πεδίο ορισμού $\{z \in \mathbb{C} : \ Rez > 0\}$ και σύνολο τιμών στο $\mathbb{C}$ καθώς και η αναλυτική επέκτασή της στο σύνολο $\mathbb{C} - \{0, -1, -2 \ldots\}$, δηλαδή σε όλο το Μιγαδικό Επίπεδο πλήν του μηδενός και των αρνητικών ακεραίων. Μετά την απόδειξη μιας σειράς λημμάτων που αφορούν την σύγκλιση Μιγαδικών Ολοκληρωμάτων και το κατά πόσο αυτά ορίζουν αναλυτική συνάρτηση φτάνουμε στον κλασικό ορισμό της Συνάρτησης Γάμμα ως

$$\Gamma : \{z \in \mathbb{C} : Rez > 0\} \longmapsto \mathbb{C}$$

με τύπο

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt.$$

Στην συνέχεια επεκτείνουμε αναλυτικά την Συνάρτηση Γάμμα στο $\mathbb{C} - \{0, -1, -2 \ldots\}$, αποδεικνύουμε οτι δεν έχει ρίζες και ότι η $\dfrac{1}{\Gamma}$ είναι ακέραια με ρίζες το μηδέν και τους αρνητικούς ακεραίους.

Στόχος του κεφαλαίου 2 είναι η μελέτη της Συνάρτησης Ζήτα του *Riemann*. Αποδεικνύουμε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

ορίζει μια αναλυτική συνάρτηση με πεδίο ορισμού $\{z \in \mathbb{C} : Rez > 1\}$ και ορίζουμε την συνάρτηση ζήτα του *Riemann* ως το άπειρο άθροισμα αυτό με πεδίο ορισμού ίδιο με το παραπάνω. Κατόπιν ορίζουμε την συνάρτηση του *Hankel* μία αρκετά βασική συνάρτηση, διότι μαζί με την Συνάρτηση Γάμμα θα μας επιτρέψουν να επεκτείνουμε αναλυτικά την Συνάρτηση Ζήττα του *Riemann* στο $\mathbb{C} - \{1\}$.
Έπειτα προχωρούμε στη απόδειξη κάποιων ιδιοτήτων της Συνάρτησης Ζήτα του *Riemann*, ορίζουμε το άπειρο γινόμενο Μιγαδικών Αριθμών και στη συνέχεια μελετάμε την σύγκλισή του με σκοπό την απόδειξη της σχέσης της Συνάρτησης Ζήτα με τους Πρώτους Αριθμούς.
Στη συνέχεια μελετούμε τις ρίζες της Συνάρτησης Ζήτα του *Riemann* και καταλήγουμε στην διατύπωση της περίφημης υπόθεσης του *Riemann* σχετικά με την ύπαρξη ριζών στην κρίσιμη λωρίδα

$$\{z \in \mathbb{C} : 0 < Re(z) < 1\}.$$

Τέλος με την βοήθεια διαφόρων λημμάτων και προτάσεων διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε το Θεώρημα Των Πρώτων Αριθμών.

2 Συνάρτηση Γάμμα

2.1 Ορισμός και αναλυτική επέκταση της Συνάρτησης Γάμμα

Η παρακάτω είναι μία γνωστή και βασική πρόταση της ανάλυσης την οποία αποδεικνύουμε για την πληρότητα του κειμένου (βλέπε για παράδειγμα [1]).

Πρόταση 2.1.1. Έστω $(X, \|\cdot\|_1)$,$(Y, \|\cdot\|_2)$ δύο χώροι με νόρμα και K συμπαγές υποσύνολο του X. Έστω $f : X \longrightarrow Y$ μία συνάρτηση η οποία είναι συνεχής στο K. Τότε η f θα είναι ομοιόμορφα συνεχής στο K.

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ τέτοιο ώστε αν

$$x, y \in K, \quad \|x - y\|_1 < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\|_2 < \epsilon.$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο K, για κάθε $x \in K$ και για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει $\delta_x > 0$, εξαρτώμενο από τα x, ϵ, τέτοιο ώστε αν $y \in K$ και

$$\|y - x\|_1 < \delta_x \Rightarrow \|f(x) - f(y)\|_2 < \frac{\epsilon}{2}. \quad (1)$$

Θεωρούμε το ανοικτό σύνολο

$$D\left(x, \frac{\delta_x}{2}\right) = \left\{y \in K : \|y - x\|_1 < \frac{\delta_x}{2}\right\}$$

και παρατηρούμε ότι

$$\bigcup_{x \in K} D\left(x, \frac{\delta_x}{2}\right)$$

είναι μια ανοικτή κάλυψη του K. Επειδή το K είναι συμπαγές θα υπάρχει πεπερασμένη ανοικτή υποκάλυψη. Δηλαδή θα υπάρχουν πεπερασμένα x_1,x_2,...,x_m τέτοια ώστε

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} D\left(x_j, \frac{\delta_{x_j}}{2}\right).$$

Θέτουμε

$$\delta = \min\{\delta_{x_1}, \ldots, \delta_{x_m}\} > 0$$

και σταθεροποιούμε $x, y \in K$ με $\|x - y\|_1 < \frac{\delta}{2}$. Επειδή $x \in K$, θα υπάρχει $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ τέτοιο ώστε $x \in D\left(x_j, \frac{\delta_{x_j}}{2}\right)$. Οπότε

$$\|x - x_j\|_1 < \frac{\delta_{x_j}}{2}.$$

Επίσης

$$\|y - x_j\|_1 = \|y - x + x - x_j\|_1 \le \|y - x\|_1 + \|x - x_j\|_1 \le \frac{\delta}{2} + \frac{\delta_{x_j}}{2} \le \frac{\delta_{x_j}}{2} + \frac{\delta_{x_j}}{2} = \delta_{x_j}.$$

Άρα έχουμε

$$\|f(x) - f(y)\|_2 = \|f(x) - f(x_j) + f(x_j) - f(y)\|_2 \le \|f(x) - f(x_j)\|_2 + \|f(x_j) - f(y)\|_2 \le \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

(Χρησιμοποιήσαμε την σχέση (1)).

$\square$

Το λήμμα που αναφέρουμε παρακάτω χρησημοποιείται αρκετά στις επόμενες σελίδες για την απόδειξη λημμάτων που χρειαζόμαστε (βλέπε για παράδειγμα [4]).

Λήμμα 2.1.1. *Έστω $\Omega \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό σύνολο και έστω $F : \Omega \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ συνάρτηση τέτοια ώστε:*
(α) Η $F(z,s)$ να είναι συνεχής στο $\Omega \times [0,1]$ και
(β) Για κάθε $s \in [0,1]$, η συνάρτηση $F(z,s)$ είναι αναλυτική στο Ω.
Τότε η συνάρτηση $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \int_0^1 F(z,s)ds$ είναι αναλυτική στο Ω.

Απόδειξη. Για κάθε $n \ge 1$ διαμερίζουμε το διάστημα $[0,1]$ ως εξής:

$$0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} ... < \frac{n}{n} = 1$$

και ορίζουμε το άθροισμα *Riemann*

$$\sum_{k=1}^{n} F\left(z, \frac{k}{n}\right)\left(\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n} F\left(z, \frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}$$

όπου όταν το n τείνει στο άπειρο το άθροισμα αυτό συγκλίνει στο ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 F(z,s)ds.$$

Ορίζουμε την ακολουθία

$$f_n(z) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} F\left(z, \frac{k}{n}\right).$$

Από την ιδιότητα (β) κάθε f_n είναι αναλυτική στο Ω. Θα δείξουμε ότι η ακολουθία $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f στα συμπαγή υποσύνολα του Ω. Έστω, λοιπόν, $K \subseteq \Omega$ συμπαγές. Θα δείξουμε ότι

$$\sup_{z \in K} |f_n(z) - f(z)| \longrightarrow 0, \quad n \to \infty$$

Έστω $\epsilon > 0$. Αρκεί να δείξουμε ότι $\exists n_0 \in \mathbb{N}$:

$$|f_n(z) - f(z)| < \epsilon, \quad \forall n \ge n_0, \quad \forall z \in K.$$

Ορίζουμε νόρμα στο σύνολο $\Omega \times [0,1]$ ως εξής:

$$\|(z,s)\| = \max\{|z|, |s|\}$$

για κάθε $(z,s) \in \Omega \times [0,1]$. Τότε το $K \times [0,1]$ θα είναι συμπαγές υποσύνολο του $\Omega \times [0,1]$. Λόγω του (α) η F θα είναι συνεχής στο $K \times [0,1]$ και επομένως ομοιόμορφα συνεχής στο $K \times [0,1]$. Δηλαδή για κάθε $\epsilon > 0$, θα υπάρχει $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ τέτοιο ώστε αν $(z_1, s_1), (z_2, s_2) \in K \times [0,1]$ με

$$\|(z_1, s_1) - (z_2, s_2)\| < \delta \Rightarrow |F(z_1, s_1) - F(z_2, s_2)| < \epsilon$$

δηλαδή

$$\max\{|z_1 - z_2|, |s_1 - s_2|\} < \delta \Rightarrow |F(z_1, s_1) - F(z_2, s_2)| < \epsilon.$$

Έστω $s_1, s_2 \in [0,1]$ τέτοια ώστε $|s_1 - s_2| < \delta$ τότε για κάθε $z \in K$

$$\|(z, s_1) - (z, s_2)\| = |s_1 - s_2|$$

Άρα

$$|F(z, s_1) - F(z, s_2)| < \epsilon \Rightarrow \max_{z \in K} |F(z, s_1) - F(z, s_2)| < \epsilon. \quad (1)$$

Για $n > \frac{1}{\delta}$ και $z \in K$ έχουμε:

$$|f_n(z) - f(z)| = \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} F\left(z, \frac{k}{n}\right) - \int_0^1 F(z,s)\, ds \right| =$$

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} F\left(z, \frac{k}{n}\right) - \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} F(z,s)\, ds \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} F\left(z, \frac{k}{n}\right) ds - \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} F(z,s)\, ds \right| =$$

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left[F\left(z, \frac{k}{n}\right) - F(z,s) \right] ds \right| \le \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left| F\left(z, \frac{k}{n}\right) - F(z,s) \right| ds < \sum_{k=1}^{n} \frac{\epsilon}{n} = \epsilon.$$

(Χρησιμοποιήσαμε την σχέση (1), αφού $z \in K$ και $\left|\frac{k}{n} - s\right| \le \left|\frac{k-1}{n} - \frac{k}{n}\right| = \frac{1}{n} < \delta$).

Εφόσον $\{f_n\} \longrightarrow f$ ομοιόμορφα στα συμπαγή και f_n αναλυτική σύμφωνα από γνωστό θεώρημα η f είναι επίσης αναλυτική.

$\square$

Παρατήρηση: Το παραπάνω λήμμα ισχύει ακόμα και αν το διάστημα $[0,1]$ αντικατασταθεί από οποιοδήποτε διάστημα της μορφής $[a,b]$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$. Πράγματι θεωρούμε την απεικόνηση

$$g : \Omega \times [0,1] \longrightarrow \Omega \times [a,b],$$

με τύπο

$$g(z,s) = (z, a + (b-a)s).$$

Η απεικόνηση αυτή είναι συνεχής και για κάθε $s \in [0,1]$ είναι αναλυτική στο Ω. Επίσης αντιστρέφεται και η αντιστροφή της ειναι επίσης συνεχής και αναλυτική για κάθε $s \in [a,b]$.
Θεωρούμε τώρα την συνάρτηση

$$\acute{F} : \Omega \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$$

έτσι ώστε

$$\acute{F} = F \circ g^{-1}.$$

Η $\acute{F}$ ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:
1) η $\acute{F}$ είναι συνεχής στο $\Omega \times [a,b]$
2) για κάθε $s \in [a,b]$ η $\acute{F}$ είναι αναλυτική στο Ω.
Θα δείξουμε ότι η $\acute{f} : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ με τύπο

$$\acute{f}(z) = \int_a^b \acute{F}(z,s)ds$$

είναι αναλυτική στο Ω
Αλλά

$$\acute{f}(z) = \int_a^b \acute{F}(z,s)ds = \int_a^b F \circ g^{-1} ds = \int_a^b F(z, \frac{s-a}{b-a})ds = \frac{1}{b-a}\int_0^1 F(z,t)dt = \frac{1}{b-a}f(z).$$

Στη συνέχεια αναφέρουμε ένα λήμμα που αφορά την σύγκλιση μιγαδικών ολοκληρωμάτων, το οποίο είναι ανάλογο με το γνωστό κριτήριο της απόλυτης σύγκλισης πραγματικών γενικευμένων ολοκληρωμάτων.

Λήμμα 2.1.2. *Έστω $f : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{C}$ μία συνεχής συνάρτηση. Αν το ολοκλήρωμα $\int_0^\infty |f(t)|\, dt$ συγκλίνει τότε θα συγκλίνει και το ολοκλήρωμα $\int_0^\infty f(t)dt$.*

Απόδειξη. Η f θα έχει την μορφή $f(t) = u(t) + iv(t)$ όπου u, v πραγματικές συναρτήσεις συνεχείς και ορισμένες στο $(0,+\infty)$. Άρα θα έχουμε

$$\int_0^\infty f(t)dt = \int_0^\infty u(t)dt + i\int_0^\infty v(t)dt$$

Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι τα ολοκληρώματα $\int_0^\infty u(t)dt, \int_0^\infty v(t)dt$ συγκλίνουν.
Θα δείξουμε ότι το $\int_0^\infty u(t)dt$ συγκλίνει (ομοίως αποδεικνύεται ότι και το ολοκλήρωμα $\int_0^\infty v(t)dt$ συγκλίνει).
Για $M > 0$ παρατηρούμε ότι:

$$\int_0^M |f(t)|\, dt = \int_0^M \sqrt{u^2(t)+v^2(t)}dt \geq \int_0^M |u(t)|\, dt.$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $g : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ με τύπο

$$g(M) = \int_0^M |u(t)|\, dt$$

και θα δείξουμε ότι είναι γνησίως αύξουσα και άνω φραγμένη. Πράγματι: αν $M_1 < M_2$ έχουμε

$$g(M_2) = \int_0^{M_2} |u(t)|\, dt = \int_0^{M_1} |u(t)|\, dt + \int_{M_1}^{M_2} |u(t)|\, dt = g(M_1) + \int_{M_1}^{M_2} |u(t)|\, dt$$

αλλά

$$\int_{M_1}^{M_2} |u(t)|\, dt \geq 0$$

Επομένως

$$g(M_2) \geq g(M_1).$$

Επίσης είναι φραγμένη επειδή

$$g(M) \leq \int_0^{\infty} |f(t)|\, dt$$

για κάθε $M \in (0, \infty)$.
Δείξαμε λοιπόν ότι η g είναι γνησίως αύξουσα και άνω φραγμένη επομένως υπάρχει το όριο

$$\lim_{M \to \infty} g(M)$$

και άρα το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_0^{\infty} u(t)dt$ συγκλίνει απολύτως, επομένως συγκλίνει.

□

Στη συνέχεια παραθέτουμε μια σειρά λημμάτων που θα μας οδηγήσουν στον ορισμό της συνάρτησης Γάμμα. Στα δύο παρακάτω λήμματα καθώς και στα λήμματα 2.1.7, 2.1.8, η σύγκλιση μιγαδικών ολοκληρωμάτων ανάγεται σε σύγκλιση γενικευμένων ολκληρωμάτων (βλέπε για παράδειγμα [2]).

Λήμμα 2.1.3. *Έστω $z_0 \in \mathbb{C}$. Τότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα*

$$\int_1^{\infty} t^{z_0 - 1} e^{-t} dt,$$

συγκλίνει.

Απόδειξη. Είναι γνωστό ότι:

$$\left| t^{z_0-1} e^{-t} \right| = t^{Re(z_0)-1} e^{-t}.$$

Επομένως προκύπτει η παρακάτω σχέση

$$\int_1^{\infty} \left| t^{z_0-1} e^{-t} dt \right| = \int_1^{\infty} t^{Re(z_0)-1} e^{-t} dt. \quad (1)$$

Σύμφωνα με το προηγούμενο λήμμα αρκεί να αποδείξουμε ότι το $\displaystyle\int_1^{\infty} t^{Rez_0 - 1} e^{-t} dt$ συγκλίνει.
Στο σημείο αυτό θα διακρίνουμε τις παρακάτω τρείς περιπτώσεις:

Περίπτωση 1η: Εάν $Re(z_0) > 1$. Τότε μπορούμε να δούμε εύκολα ότι

$$t^{Re(z_0)-1}e^{-t} < t^n e^{-t},\ t \geq 1$$

όπου n φυσικός για τον οποίον ισχύει η σχέση $n > Re(z_0) - 1$.
Επειδή το $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{t^n}{e^{\frac{t}{2}}} = 0$ για αρκετά μεγάλο t θα ισχύει η ανίσωση $t^n \leq e^{\frac{t}{2}}$, πράγματι:
από τον ορισμό του ορίου έχουμε ότι υπάρχει $\tilde{M} > 0$ τέτοιο ώστε αν $t > \tilde{M} \Rightarrow \left|\dfrac{t^n}{e^{\frac{t}{2}}}\right| < 1$.
Έστω $M > \tilde{M}$ τότε:

$$\int_1^\infty e^{-t}t^{Re(z_0)-1}dt = \int_1^M e^{-t}t^{Re(z_0)-1}dt + \int_M^\infty e^{-t}t^{Re(z_0)-1}dt.$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα είναι ένα ολοκλήρωμα *Riemann*.
Για το δεύτερο έχουμε:

$$\int_M^\infty e^{-t}t^{Re(z_0)-1}dt \leq \int_M^\infty e^{-t}e^{\frac{t}{2}}dt = \int_M^\infty e^{-\frac{t}{2}}dt \longmapsto \frac{1}{2}e^{-\frac{M}{2}}.$$

Άρα το ζητούμενο ολοκλήρωμα συγκλίνει στην περίπτωση που $Re(z_0) > 1$.
Περίπτωση 2η: Εάν $Re(z_0) < 1$ τότε:

$$\int_1^\infty t^{Re(z_0)-1}e^{-t}dt = \int_1^\infty \frac{1}{t^{1-Re(z_0)}e^t}dt.$$

Επιπλέον,

$$\frac{1}{t^{1-Re(z_0)}e^t} < \frac{1}{e^t},\ t \geq 1.$$

Επομένως θα έχουμε:

$$\int_1^\infty t^{Re(z_0)-1}e^{-t}dt \leq \int_1^\infty \frac{1}{e^t}dt \longmapsto \frac{1}{e}.$$

Άρα και πάλι, το ολοκλήρωμα συγκλίνει.
Περίπτωση 3η: Εάν $Re(z_0) = 1$ τότε θα έχουμε:

$$\int_1^\infty t^{Re(z_0)-1}e^{-t}dt = \int_1^\infty e^{-t}dt = \frac{1}{e}.$$

□

Παρατήρηση: Για κάθε $t \in \mathbb{R}$ και $z \in \mathbb{C}$ ορίζουμε:

$$t^z = e^{z\log t} = e^{x\log t}e^{i(y\log t)} = t^x e^{i(y\log t)}.$$

όπου το $z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}$ και επομένως έχουμε:

$$|t^z| = \left|t^x e^{i(y\log t)}\right| = |t^x|\left|e^{i(y\log t)}\right| = |t^x|\,1 = |t^x| = t^{Re(z)}$$

Λήμμα 2.1.4. *Έστω $z_0 \in \mathbb{C}$. Τότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα*

$$\int_1^\infty \frac{t^{z_0-1}e^{-t}}{1-e^{-t}}dt,$$

συγκλίνει.

Απόδειξη. Θέτουμε $\sigma = Re(z_0)$ και αρκεί να δείξουμε ότι το ολοκλήρωμα:

$$\int_1^\infty \left|\frac{t^{z_0-1}e^{-t}}{1-e^{-t}}dt\right| = \int_1^\infty \frac{t^{\sigma-1}e^{-t}}{1-e^{-t}}dt$$

συγκλίνει.
Γνωρίζουμε από τα κριτήρια σύγκλισης των Γενικευμένων Ολοκληρωμάτων πραγματικών συναρτήσεων ότι:
αν η $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ είναι φραγμένη στο $[a,\infty)$ και g φθίνουσα στο $[a,\infty)$ με $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$ τότε το $\displaystyle\int_a^\infty f(t)g(t)dt$ συγκλίνει.
Επίσης ότι το $\displaystyle\int_a^\infty f(t)dt$ συγκλίνει, όπου $f(t) \geq 0 \ \forall t \in [a,+\infty)$, τότε και μόνο τότε όταν η $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ είναι φραγμένη.
Θέτουμε λοιπόν:
1) $F(x) = \displaystyle\int_1^x t^{\sigma-1}e^{-t}dt$, η οποία είναι μία φραγμένη συνάρτηση στο $[1,\infty)$ εφόσον το $\displaystyle\int_1^\infty t^{\sigma-1}e^{-t}dt$ συγκλίνει.
2) $g(t) = \dfrac{1}{1-e^{-t}} - 1$ και παρατηρούμε ότι:

$$\lim_{t\to\infty} g(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{1-e^{-t}} - 1 = 1 - 1 = 0$$

και ότι για κάθε t που ανήκει στο $[1,\infty)$ ισχύει:

$$g'(t) = \frac{-(1-e^{-t})'}{(1-e^{-t})^2} = -\frac{e^{-t}}{(1-e^{-t})^2} < 0,$$

επομένως η g φθίνουσα στο $[1,\infty)$. Αρα το

$$\int_1^\infty f(t)g(t) = \int_1^\infty t^{\sigma-1}e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - 1\right) = \int_1^\infty \left[\frac{t^{\sigma-1}e^{-t}}{1-e^{-t}} - t^{\sigma-1}e^{-t}\right]dt$$

συγκλίνει. Συνεπώς προκύπτει ότι:

$$\int_1^\infty \frac{t^{\sigma-1}e^{-t}}{1-e^{-t}}dt = \int_1^\infty \left[\frac{t^{\sigma-1}e^{-t}}{1-e^{-t}} - t^{\sigma-1}e^{-t}\right]dt + \int_1^\infty t^{\sigma-1}e^{-t}dt$$

το οποίο συγκλίνει γιατί συγκλίνει το δεξιό μέλος της ισότητας.

$\square$

Το παρακάτω λήμμα είναι μία επέκταση της γνωστής ιδιότητας των ολοκληρωμάτων που λέει ότι το απόλυτο του ολοκληρώματος είναι μικρότερο ή ίσο από το ολοκλήρωμα του απολύτου. Θα το αποδείξουμε με δύο τρόπους. (Για την δεύτερη απόδειξη βλέπε [5] και για τον ορισμό του Μιγαδικού οκοληρώματος βλέπε [6]).

Λήμμα 2.1.5. *Αν η* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ *είναι συνεχής τότε*

$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|\, dt$$

Απόδειξη. (1) Θεωρούμε την καμπύλη $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ με τύπο $\gamma(t) = t$ η οποία είναι περατωμένης μεταβολής. Από τον ορισμό του ολοκληρώματος έχουμε ότι

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(t)dt.$$

Θεωρούμε $p = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b\}$ έναν διαχωρισμό του $[a,b]$ και τ_k ένα τυχαίο σημείο του διαστήματος $[t_{k-1}, t_k]$, με $k = 1, 2, \ldots, m$. Ορίζουμε το άθροισμα *stieltjes* ως προς την γ και τον διαχωρισμό p της f ως εξής:

$$S(p,f,\gamma) = \sum_1^m f(\tau_k)(\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})).$$

Από τον ορισμό του ολοκληρώματος των $Riemann - Stieltjes$ έχουμε ότι:
Δοθέντος $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε η ανισότητα

$$\|p\| = \max\{(t_k - t_{k-1}) : 1 \leq k \leq m\} < \delta$$

να συνεπάγει ότι

$$\left| \int_a^b f(t)dt - S(p,f,\gamma) \right| < \epsilon$$

οποιαδήποτε και αν είναι τα σημεία τ_k στο διάστημα $[t_k, t_{k-1}]$.
Θεωρούμε την διαμέριση p του $[a,b]$ μήκους $\dfrac{b-a}{n}$ για κάθε $n > 1$ ως εξής:

$$\left[a, a + \frac{b-a}{n}\right],\ \left[a + \frac{b-a}{n}, a + \frac{2(b-a)}{n}\right], \ldots, \left[a + \frac{(n-1)(b-a)}{n}, a + \frac{n(b-a)}{n}\right] =$$

$$\left[a + \frac{(n-1)(b-a)}{n}, b\right].$$

Τότε $\|p\| = \dfrac{b-a}{n}$.
Από τον ορισμό του ολοκληρώματος $Riemann - Stieltjes$ έχουμε ότι για κάθε $\epsilon_1 > 0$ υπάρχει $\delta_1 > 0$ τέτοιο ώστε η ανισότητα $\|p\| < \delta_1$ να συνεπάγει

$$\left| \int_a^b f(t)dt - S(p,f,\gamma) \right| < \epsilon_1.$$

Επίσης η f είναι συνεχής στο $[a,b]$ δηλαδή η $Re[f],\ Im[f]$ θα είναι συνεχής στο $[a,b]$ άρα και η

$$|f| = \sqrt{Re^2[f] + Im^2[f]}$$

θα είναι συνεχής στο $[a,b]$ άρα ολοκληρώσημη κατά *Riemann* στο $[a,b]$. Επομένως θα έχουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |f(\tau_k)|\,(t_k - t_{k-1}) = \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

Άρα για κάθε $\epsilon_2 > 0$ υπάρχει $N(\epsilon_2) > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $n > N(\epsilon_2)$

$$\left| \sum_{k=1}^{n} |f(\tau_k)|\,(t_{k-1k-1}) - \int_a^b |f(t)|\,dt \right| < \epsilon_2$$

θέτουμε $\delta_2 = \frac{1}{N(\epsilon_2)}$ και $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, $\epsilon = \max\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$. Επομένως θα έχουμε:

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| = \left|\int_a^b f(t)dt - S(p,f,\gamma) + S(p,f,\gamma)\right| \leq$$

$$\left|\int_a^b f(t)dt - S(p,f,\gamma)\right| + |S(p,f,\gamma)| \leq$$

$$\epsilon + |S(p,f,\gamma)| = \epsilon + \left|\sum_1^n f(\tau_k)(\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1}))\right| \leq$$

$$\epsilon + \sum_1^n |f(\tau_k)|\,(\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})) = \epsilon + \left|\sum_1^n |f(\tau_k)|\,(\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})) - \int_a^b |f(t)|\,dt + \int_a^b |f(t)|\right| dt \leq$$

$$\epsilon + \left|\sum_1^n |f(\tau_k)|\,(t_k - t_{k-1}) - \int_a^b |f(t)|\,dt\right| + \left|\int_a^b |f(t)|\,dt\right| \leq$$

$$\epsilon + \epsilon + \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

Καθώς το ϵ τείνει στο μηδέν έχουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα. □

Απόδειξη. (2) Είναι γνωστό ότι για κάθε $c \in \mathbb{C}$ ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$c\int_a^b f(t)dt = \int_a^b cf(t)dt.$$

Θέτοντας $c = e^{-i\theta}$ παρατηρούμε ότι:

$$Re\left[e^{-i\theta}\int_a^b f(t)dt\right] = \int_a^b Re\left[e^{-i\theta}f(t)\right]dt \leq \int_a^b |f(t)|\,dt \qquad (1).$$

Γνωρίζουμε ότι κάθε μιγαδικό αριθμό z μπορούμε να το γράψουμε στη μορφή $z = |z|\,e^{i\arg(z)}$, επομένως θα έχουμε την παρακάτω σχέση:

$$z = |z|\,e^{i\arg(z)} \Rightarrow ze^{-i\arg(z)} = |z| \Rightarrow Re\left[ze^{-i\arg(z)}\right] = Re\left[|z|\right] = |z|.$$

Άρα αν στην σχέση (1) θέσουμε

$$\theta = \arg\left(\int_a^b f(t)dt\right), \qquad z = \int_a^b f(t)dt$$

εχουμε την ζητούμενη σχέση. □

Το παρακάτω λήμμα καθώς και το λήμμα 2.1.9 είναι μία εφαρμογή του λήμματος 2.1.1 (βλέπε [4]).

Λήμμα 2.1.6. *Οι παρακάτω δύο συναρτήσεις είναι ακέραιες:*
(α) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \int_1^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$ *και*
(β) $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $g(z) = \int_1^\infty \frac{t^{z-1}e^{-t}}{1-e^{-t}}\, dt$.

Απόδειξη. (α) Έστω $D(0,r)$ ένας τυχαίος ανοικτός δίσκος στο $\mathbb{C}$ με κέντρο το μηδέν. Θα δείξουμε ότι η f είναι αναλυτική στο $D(0,r)$.
Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων

$$f_N(z) = \int_1^N e^{-t}t^{z-1}dt, \quad N = 1, 2, \ldots$$

και παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $e^{-t}t^{z-1}$ είναι συνεχής στο $D(0,r) \times [1,N]$ και αναλυτική στο $D(0,r)$ για κάθε $t \in [1,N]$. Από το λήμμα 2.1.1 η $f_N(z)$ είναι μια ακολουθία αναλυτικών συναρτήσεων.
Θα δείξουμε ότι η ακολουθία αυτή συγκλίνει ομοιόμορφα στην f στα συμπαγή υποσύνολα του $D(0,r)$.
Έστω $0 < r_1 < r$ τότε το $\overline{D(0,r_1)}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $D(0,r)$ και θα έχουμε:

$$|f(z) - f_N(z)| = \left|\int_1^\infty e^{-t}t^{z-1}dt - \int_1^N e^{-t}t^{z-1}dt\right| =$$

$$\left|\int_N^\infty e^{-t}t^{z-1}dt\right| \leq \int_N^\infty \left|e^{-t}t^{z-1}\right| dt \leq$$

$$\int_N^\infty e^{-t}t^{r_1-1}dt \leq \int_N^\infty e^{-t}e^{\frac{t}{2}}dt = \int_N^\infty e^{-\frac{t}{2}}dt = \left[-\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}\right]_N^\infty = \frac{1}{2}e^{\frac{-N}{2}} \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

για κάθε $z \in \overline{D(0,r_1)}$. Επομένως η f_N θα συγκλίνει ομοιόμορφα στην f στο $\overline{D(0,r_1)}$ και σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του $D(0,r)$ (βλέπε παρατήρηση).
Άρα η f θα είναι αναλυτική στο $D(0,r)$ και επειδή το r μπορεί να είναι όσο μεγάλο θέλουμε θα έχουμε ότι θα είναι αναλυτική σε όλο το $\mathbb{C}$ κατά συνέπεια θα είναι ακέραια.

(β) Δουλεύοντας ομοίως με το (α) θα έχουμε:

$$|g(z) - g_N(z)| = \left|\int_1^\infty \frac{t^{z-1}e^{-t}}{1-e^{-t}}dt - \int_1^N \frac{t^{z-1}e^{-t}}{1-e^{-t}}dt\right| = \left|\int_N^\infty \frac{t^{z-1}e^{-t}}{1-e^{-t}}dt\right| \leq$$

$$\int_N^\infty \left|\frac{t^{z-1}e^{-t}}{1-e^{-t}}\right| dt \leq \frac{1}{1-e^{-N}}\int_N^\infty e^{-t}t^{r_1-1}dt \leq \frac{1}{1-e^{-N}}\left[-\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}\right]_N^\infty = \frac{1}{1-e^{-N}}\left[\frac{1}{2}e^{\frac{-N}{2}}\right] \overset{N\to\infty}{\longmapsto} 0$$

□

Παρατηρηση: Γνωρίζουμε ότι αν (X, d) μετρικός χώρος και A,B ξένα υποσύνολα του X τέτοια ώστε A κλειστό και B συμπαγές τότε $d(A, B) > 0$ όπου $d(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A,\ b \in B\}$.
Έστω K τυχαίο συμπαγές υποσύνολο του $D(0, r)$, θέτωντας $\epsilon = d(K, D^c(0, r))$, $\epsilon > 0$ τότε το $K \subset \overline{D(0, r-\epsilon)}$.
Αν η f_n συγκλίνει ομοιόμορφα στην f στο $\overline{D(0, r-\epsilon)}$ αναγκαστικά θα συγκλίνει ομοιόμορφα και στο K. Γι' αυτό αρκεί να αποδείξουμε ομοιόμορφη σύγκλιση σε κλειστούς δίσκους.

Λήμμα 2.1.7. *Έστω $z_0 \in \mathbb{C}$, $Rez_0 > 0$. Τότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα*

$$\int_0^1 t^{z_0-1}e^{-t}dt,$$

συγκλίνει.

Απόδειξη. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:
Περίπτωση 1η: Εάν $Re(z_0) > 1$ τότε

$$\int_0^1 \left|t^{z_0-1}e^{-t}\right| dt = \int_0^1 t^{Re(z_0)-1}e^{-t}dt$$

το οποίο συγκλίνει διότι η συνάρτηση

$$t^{Re(z_0)-1}e^{-t}$$

είναι ολοκληρώσιμη κατα $Riemman$ στο διαστημα $[0, 1]$.

Περίπτωση 2η: Εάν το $0 < Re(z_0) < 1$ τότε παρατηρούμε ότι

$$0 \leq t \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -t \leq 0 \Leftrightarrow e^{-1} \leq e^{-t} \leq 1.$$

Επομένως θα έχουμε:

$$t^{Rez_0-1}e^{-1} \leq t^{Re(z_0)-1}e^{-t} \leq t^{Re(z_0)-1},\ t \in [0, 1].$$

Συνεπώς

$$\int_0^1 \left|e^{-t}t^{z_0-1}\right| dt = \int_0^1 t^{Re(z_0)-1}e^{-t}dt \leq \int_0^1 t^{Re(z_0)-1}dt = \lim_{\alpha\to 0}\int_\alpha^1 \frac{1}{t^{1-Re(z_0)}}dt =$$

$$\lim_{\alpha\to 0}\left[\frac{t^{Re(z_0)}}{Re(z_0)}\right]_\alpha^1 = \frac{1}{Re(z_0)} - \lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha^{Re(z_0)}}{Re(z_0)} = \frac{1}{Re(z_0)}.$$

Άρα συγκλίνει.

Περίπτωση 3η: Εάν το $Re(z_0) = 1$ έχουμε

$$\int_0^1 \left|e^{-t}t^{z_0-1}\right| dt = \int_0^1 t^{Re(z_0)-1}e^{-t}dt = \int_0^1 e^{-t}dt = 1 - \frac{1}{e}.$$

Με βάση λοιπόν τις περιπτώσεις αυτές έχουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα.

□

Λήμμα 2.1.8. *Έστω $z_0 \in \mathbb{C}$, $\quad Rez_0 > 1$. Τότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα*

$$\int_0^1 \frac{t^{z_0-1}e^{-t}}{1-e^{-t}}dt,$$

συγκλίνει.

Απόδειξη. Θέτουμε $\sigma = Re(z_0)$ και έχουμε:

$$\int_0^1 \left|\frac{t^{z_0-1}e^{-t}}{1-e^{-t}}\right| dt = \int_0^1 \frac{t^{\sigma-1}e^{-t}}{1-e^{-t}}dt = \int_0^1 \frac{t^{\sigma-1}}{e^t-1}dt.$$

Επειδή το

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{\frac{e^t-1}{t-0}} = 1$$

θα έχουμε ότι:

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta(\epsilon, 0) \ \tau.\omega \ \alpha\nu \, |t| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{\frac{e^t-1}{t-0}}\right| < 1+\epsilon.$$

Αναλύουμε το ζητούμενο ολοκλήρωμα ως εξης:

$$\int_0^1 \frac{t^{\sigma-1}}{e^t-1}dt = \int_0^\delta \frac{t^{\sigma-1}}{e^t-1}dt + \int_\delta^1 \frac{t^{\sigma-1}}{e^t-1}dt.$$

Το δεύτερο ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος της ισότητας είναι ολοκλήρωμα *Riemann* και για το πρώτο έχουμε την παρακάτω ανίσωση:

$$\int_0^\delta \frac{t^{\sigma-1}}{e^t-1}dt = \int_0^\delta \frac{t^{\sigma-2}}{\frac{e^t-1}{t}}dt \leq \int_0^\delta t^{\sigma-2}(1+\epsilon)dt.$$

Στο σημείο αυτό διακρίνουμε τις παρακάτω δύο περιπτώσεις:
Περίπτωση 1η: Εάν $\sigma > 2$ τότε:

$$\int_0^\delta t^{\sigma-2}(1+\epsilon)dt$$

είναι ολοκλήρωμα *Riemann*.
Περίπτωση 2η: Εάν $1 < \sigma < 2$ θα έχουμε:

$$\int_0^\delta t^{\sigma-2}(1+\epsilon)dt = \lim_{k\to 0}\int_k^\delta t^{\sigma-2}(1+\epsilon)dt = \lim_{k\to 0}(1+\epsilon)\left[\frac{t^{\sigma-1}}{\sigma-1}\right]_k^\delta = (1+\epsilon)\frac{\delta^{\sigma-1}}{\sigma-1}.$$

Άρα συγκλίνει. □

Λήμμα 2.1.9. *Οι παρακάτω δύο συναρτήσεις είναι αναλυτικές:*
(α) $f_1 : \{z \in \mathbb{C} : Rez > 0\} \to \mathbb{C}$, $f_1(z) = \int_0^1 t^{z-1}e^{-t}dt$ *και*
(β) $g_1 : \{z \in \mathbb{C} : Rez > 1\} \to \mathbb{C}$, $g_1(z) = \int_0^1 \frac{t^{z-1}e^{-t}}{1-e^{-t}}\, dt$.

Απόδειξη. (α) Αρκεί να αποδείξουμε ότι το ολοκλήρωμα ορίζει μία αναλυτική συνάρτηση στο $S_{\delta,M} = \{\delta < Re(z) < M\}$ όπου $0 < \delta < M < \infty$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε την ακολουθία

$$f_{1,n} = \int_{\frac{1}{n}}^{1} t^{z-1}e^{-t}dt.$$

Από το λήμμα 1 είναι μια ακολουθία αναλυτικών συναρτήσεων και επομένως είναι αρκετό να δείξουμε ότι συγκλίνει ομοιόμορφα στην f_1 στα συμπαγή υποσύνολα του $S_{\delta,M}$. Πράγματι:

$$|f_1 - f_{1,n}| = \left| \int_0^1 t^{z-1}e^{-t}dt - \int_{\frac{1}{n}}^{1} t^{z-1}e^{-t}dt \right| =$$

$$\left| \int_0^{\frac{1}{n}} t^{z-1}e^{-t}dt + \int_{\frac{1}{n}}^{1} t^{z-1}e^{-t}dt - \int_{\frac{1}{n}}^{1} t^{z-1}e^{-t}dt \right| =$$

$$\left| \int_0^{\frac{1}{n}} t^{z-1}e^{-t}dt \right| \leq \int_0^{\frac{1}{n}} \left| t^{z-1}e^{-t} \right| dt =$$

$$\int_0^{\frac{1}{n}} t^{Re(z)-1}e^{-t}dt \leq \int_0^{\frac{1}{n}} t^{Re(z)-1} \leq \int_0^{\frac{1}{n}} t^{M-1}dt =$$

$$\left[\frac{t^M}{M} \right]_0^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{M} \left(\frac{1}{n} \right)^M \longmapsto 0$$

όταν το n τείνει στο άπειρο για κάθε $t \in K$. Άρα η $f_{1,n}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f_1 μέσα στο K. Άρα και σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του K. Άρα η f_1 αναλυτική στο K.
(β) Δουλεύοντα όπως στο (α) θεωρούμε το $S_{\delta,M} = \{\delta < Re(z) < M\}$ όπου το $1 < \delta < M < \infty$ και την ακολουθία αναλυτικων συναρτήσεων

$$g_{1,n} = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{t^{z-1}e^{-t}}{1-e^{-t}}dt.$$

Θα έχουμε λοιπόν:

$$|g_1(z) - g_{1,n}(z)| = \int_0^{\frac{1}{n}} \left| \frac{t^{z-1}e^{-t}}{1-e^{-t}} \right| dt \leq$$

$$\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{t^{\delta_1-1}e^{-t}}{1-e^{-t}}dt \leq \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{t^{M-1}}{1-e^{-t}}dt \leq \int_0^{\frac{1}{n}} (1+\epsilon)t^{M-1}dt,$$

το οποίο συγκλίνει ομοιόμορφα στο μηδέν. Επομένως η g_1 είναι αναλυτική. □

Ορισμός 2.1.1. Ορίζουμε την συνάρτηση $\Gamma : \{z \in \mathbb{C} : Rez > 0\} \to \mathbb{C}$, με τύπο

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1}e^{-t}dt.$$

Με βάση τα προηγούμενα λήμματα, η συνάρτηση αυτή είναι καλά ορισμένη και αναλυτική ως άθροισμα αναλυτικών συναρτήσεων.

Παρακάτω αποδεικνύουμε μια βασική ιδιότητα της συνάρτησης Γάμμα (βλέπε: [3]).

Πρόταση 2.1.2. Αν $Rez > 0$, τότε:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

Απόδειξη. Από τον ορισμό της συνάρτησης Γ έχουμε:

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^{(z+1)-1} dt = \int_0^\infty e^{-t} t^z dt = [-t^z e^{-t}]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-t} z t^{z-1} dt = 0 + z\Gamma(z) = z\Gamma(z).$$

□

Παρατήρηση: $\Gamma(n) = (n-1)!,\ n \in \mathbb{N}$ πράγματι:

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) = (n-1)(n-2)\Gamma(n-2) = \ldots (n-1)(n-2)(n-3)\ldots 321\Gamma(1).$$

Αλλά από τον ορισμό της Γ έχουμε:

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = \left[-e^{-t}\right]_0^\infty = -\lim_{t\to\infty} e^{-t} + 1 = 1$$

Παραπάνω δώσαμε τον ορισμό της Γάμμα ως μία αναλυτική συνάρτηση με πεδίο ορισμού $\{z \in \mathbb{C} : Rez > 0\}$. Θα συνεχίσουμε με μία πολύ βασική πρόταση η οποία μας επιτρέπει να επεκτείνουμε την Γάμμα αναλυτικά στο $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$ (βλέπε [4]).

Πρόταση 2.1.3. Η συνάρτηση Γ επεκτείνεται αναλυτικά στο $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$. Στο μηδέν, καθώς και στους αρνητικούς ακέραιους έχει πόλο τάξης 1. Επιπλέον, $Res(\Gamma, 0) = 1 \;\; Res(\Gamma, -n) = \frac{(-1)^n}{n!}, \;\; n = 1, 2, \ldots.$

Απόδειξη. Ορίζουμε την συνάρτηση

$$F_m(s) = \frac{\Gamma(s+m)}{(s+m-1)(s+m-2)...s}$$

όπου $m \geq 1$ και θα δείξουμε επαγωγικά ότι αυτή είναι η **αναλυτική επέκταση** της Γ στο $\{s \in \mathbb{C} : Re(s) > -m\} \setminus \{0, -1, -2, ..., -m+1\}$.
Για $m = 1$ λοιπόν έχουμε ότι $Re(s) > -1$ και $F_1(s) = \dfrac{\Gamma(s+1)}{s}$. Παρατηρούμε ότι η $\Gamma(s+1)$ είναι αναλυτική στο ημιεπίπεδο $\{s \in \mathbb{C} : Re(s) > -1\}$ και η F_1 είναι μερόμορφη, αφού έχει μία μεμονωμένη ανωμαλία στο μηδέν όπου είναι απλός πόλος, πράγματι:

$$\lim_{s\to 0} sF_1(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{\Gamma(s+1)}{s} = \lim_{s\to 0} \Gamma(s+1) = \Gamma(1) = 1.$$

Επίσης το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της $F_1(s)$ θα είναι

$$Res(F_1, 0) = \lim_{s\to 0} sF_1(s) = 1.$$

Εάν $Re(s) > 0$ τότε από την πρόταση 2.1.2 έχουμε

$$F_1(s) = \frac{\Gamma(s+1)}{s} = \frac{s\Gamma(s)}{s} = \Gamma(s),$$

δηλαδή η F_1 είναι μία **αναλυτική επέκταση** της Γ στο σύνολο $\{s \in \mathbb{C} : Re(s) > -1\} \setminus \{0\}$.

Συνεχίζοντας την ίδια διαδικασία ισχυριζόμαστε ότι ισχύει στο $Re(s) > -m$ και θα αποδείξουμε ότι ισχύει και στο $Re(s) > -m-1$. Έχουμε λοιπόν ότι η συνάρτηση

$$F_{m+1} = \frac{\Gamma(s+m+1)}{(s+m)(s+m-1)...s},$$

όπου $m \geq -1$ είναι αναλυτική εκτός από τα σημεία $s = 0, -1, -2, ... -m$ που είναι απλοί πόλοι. Επομένως είναι μία μερόμορφη συνάρτηση και για $Re(s) > 0$ έχουμε ότι

$$F_{m+1} = \frac{\Gamma(s+m+1)}{(s+m)(s+m-1)...s} = \frac{(s+m)!\Gamma(s)}{(s+m)(s+m-1)...s} = \Gamma(s)$$

δηλαδή είναι **αναλυτική επέκταση** της Γ στο $\{s \in \mathbb{C} : Re(s) > -m-1\} \setminus \{0, -1, -2, ..., -m\}$.

Επομένως η Γ μέσω της F_m επεκτείνεται αναλυτικά στο $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$.
Τέλος θα υπολογίσουμε το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της F_m στο $s = -n, \ n < m$

$$Res(F_m, -n) = \lim_{s \to -n} (s+n) \frac{\Gamma(s+m)}{(s+m-1)(s+m-2)...(s+n)(s+n-1)...s} =$$

$$\lim_{s \to -n} \frac{\Gamma(s+m)}{(s+m-1)(s+m-2)...(s+n-1)...s} =$$

$$\frac{\Gamma(-n+m)}{(-n+m-1)(-n+m-2)...(-n+n-1)...(-n)} =$$

$$\frac{\Gamma(-n+m)}{(-n+m-1)!(-1)(-2)...(-n)} =$$

$$\frac{(m-n-1)!}{(-n+m-1)!(-1)(-2)...(-n)} = \frac{(-1)^n}{n!}$$

□

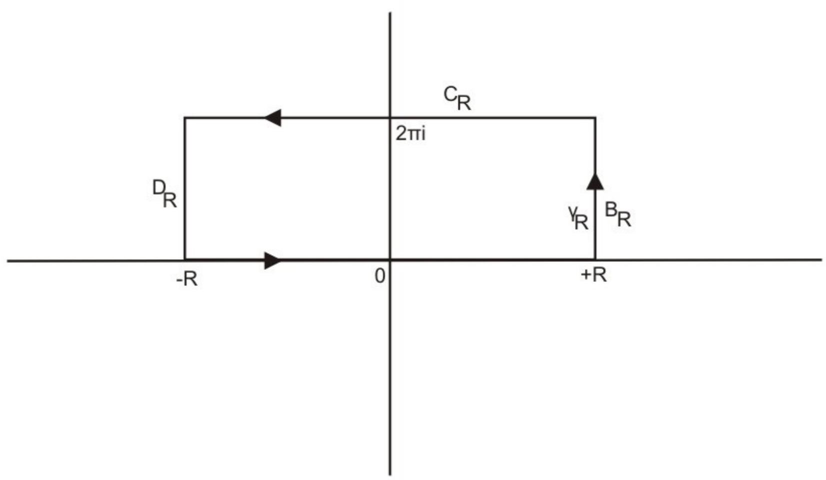
2.2 Βασικές ιδιότητες της Συνάρτησης Γάμμα

Στη συνέχεια αναφέρουμε δύο λήμματα τα οποία θα μας βοηθήσουν στη απόδειξη του παρακάτω θεωρήματος. (Βλέπε [4]).

Λήμμα 2.2.1. *Άν $0 < a < 1$ τότε το ολοκλήρωμα*

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

Απόδειξη. Θέτουμε $f(z) = \dfrac{e^{az}}{1+e^z}$, $z \neq i\pi + 2k\pi$, $k = 0, 1, 2, 3, ...$, $I_R = \displaystyle\int_{-R}^{+R} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx$
Θεωρούμε την παρακάτω καμπύλη γ_R με θετικό προσανατολισμό την αντιστροφη κίνηση του ρολογιού.



Η f θα είναι μερόμορφη στην καμπύλη γ_R και στο περιεχόμενο σε αυτήν χωρίο. Πράγματι, το σημείο $z_0 = i\pi$ είναι απλός πόλος διότι:

$$\lim_{z \to i\pi} (z - i\pi) \frac{e^{az}}{1+e^z} = \lim_{z \to i\pi} \frac{e^{az}}{\frac{e^z - e^{i\pi}}{z - i\pi}}$$
$$= -e^{a\pi i} = Res(f, i\pi)$$

Επομένως θα έχουμε:

$$\int_\gamma f(z) dz = -2\pi i e^{a\pi i}.$$

Θεωρούμε τα παρακάτω τμήματα της καμπύλης γ_R:
α) $B_R = \{R + it : 0 \leq t \leq 2\pi\}$
β) $-C_R = \{t + 2\pi i : -R \leq t \leq R\}$

γ) $-D_R = \{-R + it : 0 \leq t \leq 2\pi\}$

$$\int_{-C_R} f(z)dz = -\int_{-R}^{R} \frac{e^{a(t+2\pi i)}}{1+e^{t+2\pi i}}dt = -\int_{-R}^{R} \frac{e^{at}e^{2a\pi i}}{1+e^{t}e^{2\pi i}}dt$$

$$= -e^{2a\pi i}\int_{-R}^{R} \frac{e^{at}}{1+e^{t}}dt = -e^{2a\pi i}I_R.$$

$$\int_{B_R} f(z)dz = \int_{0}^{2\pi} \frac{e^{a(R+it)}}{1+e^{R+it}}idt$$

Παρατηρούμε ότι :

$$|f(z)| = \left|\frac{e^{a(R+it)}}{1+e^{R+it}}\right| \leq \frac{e^{aR}}{1-e^{R}} = \frac{e^{(a-1)R}}{e^{-R}-1}.$$

Επομένως

$$\left|\int_{B_R} f(z)dz\right| \leq \int_{0}^{2\pi} \left|\frac{e^{a(R+it)}}{1+e^{R+it}}\right|dt \leq \int_{0}^{2\pi} \frac{e^{(a-1)R}}{e^{-R}-1}dt = 2\pi\frac{e^{(a-1)R}}{e^{-R}-1} \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ομοίως το $\displaystyle\int_{-D_R} f(z)dz$ τείνει στο μηδέν όταν το R τείνει στο άπειρο.
Επομένως

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = \int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{B_R} f(z)dz + \int_{-C_R} f(z)dz + \int_{-D_R} f(z)dz, \tau o\upsilon\ R \to \infty,$$

έχουμε:

$$-2\pi i e^{a\pi i} = I\left(1 - e^{2a\pi i}\right),$$

δηλαδή

$$I = \frac{-2\pi i e^{a\pi i}}{1-e^{2a\pi i}} = \frac{-2\pi i}{e^{-a\pi i}-e^{a\pi i}} = \frac{2\pi i}{e^{a\pi i}-e^{-a\pi i}} = \frac{\pi}{\sin \pi a}.$$

□

Λήμμα 2.2.2. *Για $0 < a < 1$ ισχύει:*

$$\int_{0}^{\infty} \frac{v^{a-1}}{1+v}dv = \frac{\pi}{\sin \pi a}$$

Απόδειξη. Θέτουμε $v = e^x$, $dv = e^x dx$ και θα έχουμε:

$$\int_0^{\infty} \frac{v^{a-1}}{1+v} dv = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{(a-1)x}}{1+e^x} e^x dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx = \frac{\pi}{\sin \pi a}$$

$\square$

Παρακάτω θα αναφέρουμε χωρίς απόδειξη ένα Θεώρημα γνωστό ως το Θεώρημα της ταυτότητας το οποίο θα χρησιμοποιηθεί στην απόδειξη του παρακάτω θεωρήματος. (Για την απόδειξη βλέπε [1]).

Θεώρημα 2.2.1. *(Το Θεώρημα της ταυτότητας). Έστω $U \subset \mathbb{C}$ ανοικτό και συνεκτικό και $f, g : U \longrightarrow \mathbb{C}$ αναλυτικές συναρτήσεις. Θέτουμε*

$$A = \{z \in U : f(z) = g(z)\}.$$

Αν το A έχει σημείο συσσώρευσης στο U, τότε $f = g$ ταυτοτικά στο U.

Στη συνέχεια θα αναφέρουμε ένα βασικό Θεώρημα το οποίο μας δείχνει ότι για όλα τα $s \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}$$

αλλά πρώτα πρέπει να κάνουμε κάποιες παρατηρήσεις.
Έχουμε δείξει ότι η $\Gamma(s)$ μπορεί να επεκταθεί αναλυτικά σε όλο το μιγαδικό επίπεδο πλην του μηδενός και των αρνητικών ακεραίων που είναι απλοί πόλοι της $\Gamma(s)$. Ομοίως και η $\Gamma(1-s)$ επεκτείνεται αναλυτικά σε όλο το μιγαδικό επίπεδο πλην τους θετικούς ακεραίους που είναι απλοί πόλοι. Από αυτό συμπεραίνουμε ότι το γινόμενο $\Gamma(s)\Gamma(1-s)$ είναι αναλυτική συνάρτηση σε όλο το μιγαδικό επίπεδο πλην τους ακεραίους που είναι απλοί πόλοι. Δηλαδή πρόκειται για μία μερόμορφη συνάρτηση στο $\mathbb{C}$. Επίσης παρατηρούμε ότι την ιδιότητα αυτή έχει και το $\dfrac{\pi}{\sin(\pi s)}$ δηλαδή για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ έχουμε:

$$\lim_{s \to k} (s-k) \frac{\pi}{\sin(\pi s)} = \lim_{s \to k}) - 1)^k \pi \neq 0.$$

(Βλέπε [4]).

Θεώρημα 2.2.2. *Για όλα τα $s \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$ ισχύει η σχέση:*

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}.$$

Απόδειξη. Για την απόδειξη του θεωρήματος είναι αρκετό να δείξουμε ότι η σχέση αυτή ικανοποιείται στο $0 < s < 1$ και μέσω του Θεωρήματος της τουτότητας θα ισχύει σε όλο το $\mathbb{C} - \mathbb{Z}$.
Για $0 < s < 1$ λοιπόν θα έχουμε:

$$\Gamma(1-s) = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{(1-s)-1} du = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{-s} du.$$

Θέτουμε για κάθε $t > 0$ $vt = u \Rightarrow du = tdv$ και έχουμε:

$$\Gamma(1-s) = t\int_0^\infty e^{-vt}(vt)^{-s}dv.$$

Για την $\Gamma(s)$ θα έχουμε:

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t}t^{s-1}dt.$$

Άρα

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \int_0^\infty e^{-t}t^{s-1}\Gamma(1-s)dt =$$

$$\int_0^\infty e^{-t}t^{s-1}\left(t\int_0^\infty e^{-vt}(vt)^{-s}dv\right)dt = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-t}t^{s-1}te^{-vt}(vt)^{-s}dvdt =$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-t(1+v)}v^{-s}dvdt = \int_0^\infty \frac{v^{-s}}{1+v}dv = \frac{\pi}{\sin\pi(1-s)} = \frac{\pi}{\sin\pi s},$$

(θεωρημα Φυβινι).
Το $\mathbb{C}-\mathbb{Z}$ είναι ανοικτό σύνολο επειδή το $\mathbb{Z}$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και το $\mathbb{C}-\mathbb{Z}$ είναι συνεκτικό γιατί είναι κατα τόξα συνεκτικό. Επίσης οι συναρτήσεις $\Gamma(s)\Gamma(1-s)$ και $\frac{\pi}{\sin(\pi s)}$ είναι αναλυτικές στο $\mathbb{C}-\mathbb{Z}$. Άρα μέσω του Θεωρήματος της ταυτότητας έχουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα. □

Παρατήρηση: Από την σχέση αυτή προκύπτει εύκολα ότι η $\Gamma(s)$ δεν έχει ρίζες. Αν είχε ρίζες θα έπρεπε να έχε και η συνάρτηση $\frac{\pi}{\sin\pi s}$, η οποία δεν έχει.

Το Θεώρημα που αναφέρουμε παρακάτω είναι πολύ σημαντικό διότι αναφέρει ότι παρόλο που η Γ δεν είναι αναλυτική σε όλο το $\mathbb{C}$, η $\dfrac{1}{\Gamma}$ είναι αναλυτική σε όλο το $\mathbb{C}$ δηλαδή ακέραια (βλέπε [4]).

Θεώρημα 2.2.3. *Η $\frac{1}{\Gamma(s)}$ είναι μια συνάρτηση του s με απλές ρίζες στα σημεία $s = 0, -1, -2, -3, ...$ και δεν μηδενίζεται πουθενά αλλού.*

Απόδειξη. Από το προηγούμενο θεώρημα έχουμε ότι για κάθε $s \in \mathbb{C}-\mathbb{Z}$

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin\pi s} \Rightarrow \frac{1}{\Gamma(s)} = \Gamma(1-s)\frac{\sin\pi s}{\pi}.$$

Η $\Gamma(1-s)$ έχει απλούς πόλους στα σημεία $s = 1, 2, 3\ldots$ που όμως για το γινόμενο $\Gamma(1-s)\dfrac{\sin\pi s}{\pi}$, είναι απαλείψιμα, διότι:

για $s \leq 1$ από την αναλυτική επέκταση θεωρούμε την $\dfrac{\Gamma(1-s+1)}{1-s}$.

$$\lim_{s\to 1}\frac{\Gamma(1-s+1)}{1-s}\frac{\sin \pi s}{\pi} = \lim_{s\to 1}\frac{\Gamma(1-s+1)}{\pi}\frac{\sin \pi s}{1-s}$$

θέτω $1-s=u$

$$\lim_{s\to 1}\frac{\sin \pi s}{1-s} = \lim_{u\to 0}\frac{\sin \pi(1-u)}{u} =$$

$$\lim_{u\to 0}\frac{\sin(\pi-\pi u)}{u} = \lim_{u\to 0}\left(\frac{\sin \pi \cos \pi u}{u} - \frac{\sin \pi u \cos \pi}{u}\right) = -\lim_{u\to 0}\frac{\sin \pi u \cos \pi}{u} =$$

$$\lim_{u\to 0}\frac{\sin \pi u}{u} = \pi$$

Άρα το

$$\lim_{s\to 1}\frac{\Gamma(1-s+1)}{1-s}\frac{\sin \pi s}{\pi} = \frac{\Gamma(1)}{\pi}\pi = \Gamma(1) = 1$$

και επομένως ο πόλος στο $s=1$ εξαφανίζεται. Συνεχίζοντας επαγωγικά δεχόμαστε ότι ισχύει για $s \leq m$ και θα αποδείξουμε ότι ισχύει για $s=m+1$
Για $s \leq m+1$ έχουμε:

$$\lim_{s\to m+1}\frac{\Gamma(1-s+m+1)}{(1-s+m)(1-s+m-1)\dots(1-s)}\frac{\sin \pi s}{\pi} = \lim_{s\to m+1}\frac{\Gamma(1-s+m+1)}{(1-s+m-1)\dots(1-s)\pi}\frac{\sin \pi s}{(1-s+m)}.$$

Παίρνουμε το

$$\lim_{s\to m+1}\frac{\sin \pi s}{(1-s+m)}$$

και θέτουμε $1-s+m=u$ και έχουμε:

$$\lim_{u\to 0}\frac{\sin \pi(1+m-u)}{u} = \lim_{u\to 0}\frac{\sin(1+m)\pi \cos \pi u - \sin \pi u \cos(1+m)\pi}{u} \qquad (1).$$

Θα πάρουμε τις εξής περιπτώσεις:
1. Για $m=2k$ η (1) γίνεται:

$$\lim_{u\to 0}\frac{\sin \pi u}{u} = \pi$$

2. Για $m=2k+1$ η (1) γίνεται

$$\lim_{u\to 0}-\frac{\sin \pi u}{u} = -\pi$$

Άρα και στις δύο περιπτώσεις ο πόλος είναι απαλείψιμος.
Επίσης παρατηρούμε ότι από την ισότητα

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = \Gamma(1-s)\frac{\sin \pi s}{\pi}$$

η $\dfrac{1}{\Gamma}$ μηδενίζεται για τα $s = 0, -1, -2, -3, ...$ θα δείξουμε ότι δεν μηδενίζεται πουθενά αλλού. Πράγματι αν μηδενιζόταν σε κάποιο $s \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$ τότε θα έπρεπε το

$$\Gamma(1-s)\frac{\sin \pi s}{\pi} = 0 \Rightarrow \Gamma(1-s) = 0 \Rightarrow \Gamma(s)\Gamma(1-s) = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{\sin \pi s} = 0 \Rightarrow \pi = 0$$

το οποίο είναι άτοπο.

$\square$

3 Συνάρτηση Ζήτα

3.1 Ορισμός και αναλυτική επέκταση της Συνάρτηση Ζήτα

Το λήμμα που αναφέρουμε στη συνέχεια είναι γνωστό από την σύγκλιση σειρών (βλέπε [2]).

Λήμμα 3.1.1. *Για $s > 1$ η σειρά*
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$$
συγκλίνει.

Απόδειξη. Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $n \geq 1$, θεωρούμε την ακολουθία
$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s}.$$
Είναι αρκετό να δείξουμε ότι η ακολουθία αυτή είναι γνησίως αύξουσα και φραγμένη.

Θα δείξουμε ότι είναι γνησίως αύξουσα, πράγματι για $n_1,\ n_2 \in \mathbb{N}$ με $n_1 < n_2$ έχουμε

$A_{n_1} = \sum_{k=1}^{n_1} \frac{1}{k^s}$ και $A_{n_2} = \sum_{k=1}^{n_2} \frac{1}{k^s}$ αλλά
$$A_{n_2} = \sum_{k=1}^{n_2} \frac{1}{k^s} = \sum_{k=1}^{n_1} \frac{1}{k^s} + \sum_{k=n_1+1}^{n_2} \frac{1}{k^s} = A_{n_1} + \sum_{k=n_1+1}^{n_2} \frac{1}{k^s}$$
και $\sum_{k=n_1+1}^{n_2} \frac{1}{k^s} > 0$ Άρα έχουμε ότι $A_{n_1} < A_{n_2}$.

Θα δείξουμε ότι είναι φραγμένη.
Γνωρίζουμε ότι αν η f είναι συνεχής στο $[a,b]$ και $m \leq f(x) \leq M, \quad \forall x \in [a,b]$ τότε
$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Θεωρούμε τώρα την συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x^s}$ η οποία είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $(1,\infty)$ και το διάστημα $[n-1,n]$ όπου $n > 1, \quad n \in \mathbb{N}$.
Τότε για κάθε $x \in [n-1,n]$ θα ισχύει:
$$\frac{1}{n^s} \leq f(x) = \frac{1}{x^s} \Rightarrow \frac{1}{n^s}(n-(n-1)) \leq \int_{n-1}^{n} \frac{1}{x^s}dx \Rightarrow \frac{1}{n^s} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{1}{x^s}dx.$$
Με βάση αυτή τη σχέση και του ότι
$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \cdots + \frac{1}{n^s}$$

θα έχουμε

$$A_n \leq 1 + \int_1^2 \frac{1}{x^s}dx + \int_2^3 \frac{1}{x^s}dx + \cdots + \int_{n-1}^n \frac{1}{x^s}dx =$$

$$1 + \int_1^n \frac{1}{x^s}dx = 1 + \left[\frac{x^{-s+1}}{-s+1}\right]_1^n = 1 + \frac{1}{1-s}\left(\frac{1}{n^{s-1}} - 1\right) =$$

$$1 + \frac{1}{s-1}\left(1 - \frac{1}{n^{s-1}}\right) < 1 + \frac{1}{s-1} = \frac{s}{s-1}.$$

Άρα η A_n είναι φραγμένη.

□

Το επόμενο λήμμα είναι μία γενίκευση του προηγούμενου λήμματος στο μιγαδικό επίπεδο με την βοήθεια του οποίου θα ορίσουμε την συνάρτηση ζήτα του *Riemann* ως μια μιγαδική και αναλυτική συνάρτηση. (Βλέπε [3]).

Λήμμα 3.1.2. *Η σειρά*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

συγλίνει απόλυτα στο $\{z \in \mathbb{C} : \ Re(z) > 1\}$ *και ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του* $\{z \in \mathbb{C} : \ Re(z) > 1\}$.

Απόδειξη. Είναι γνωστό ότι

$$\frac{1}{n^z} = n^{-z} = e^{-z\log n}$$

επομένως η σειρά γίνεται

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-z\log n}$$

και άρα θα έχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|e^{-z\log n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{Re(z)}}$$

και από το προηγούμενο λήμμα η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{Re(z)}}$$

συγκλίνει για $Re(z) > 1$. Άρα θα συγκλίνει απόλυτα στο $\{z \in \mathbb{C} : \ Re(z) > 1\}$.
Θα δείξουμε τώρα την ομοιόμορφη σύγκλιση στα συμπαγή υποσύνολα του $\{z \in \mathbb{C} : \ Re(z) > 1\}$.
Έστω K τυχαίο συμπαγές υποσύνολο του $\{z \in \mathbb{C} : \ Re(z) > 1\}$, μπορούμε να βρούμε $m \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε, $1 < m$ και $K \subset \{z : m \leq Re(z)\}$. Πράγματι η συνάρτηση $z \longrightarrow Re(z)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{C}$ και επειδή το K είναι συμπαγές έχουμε ότι

$$\inf_{z \in K} Re(z) = Re(\xi) > 1$$

για κάποιο $\xi \in K$, δηλαδή $1 < Re(\xi) \leq Re(z)$. Θέτουμε $m = Re(\xi)$ και έχουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα.
Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων

$$u_n(z) = \frac{1}{n^z}, \ \ n \in \mathbb{N}, \ \ z \in \{z : m \leq Re(z)\}.$$

Θα δείξουμε ότι είναι φραγμένη σε αυτό το ημιεπίπεδο. Πράγματι έχουμε:

$$|u_n(z)| = \left|\frac{1}{n^z}\right| = \frac{1}{n^{Re(z)}} \leq \frac{1}{n^m}.$$

Και επειδή από το προηγούμενο λήμμα η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^m}$$

συγκλίνει, από το κριτήριο του $Weirstrass$ έπεται ότι η $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ συγλίνει ομοιόμορφα στο ημιεπίπεδο $\{m \leq Re(z)\}$ και επομένως και στο K. Άρα συγκλίνει ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του

$$\{z \in \mathbb{C} : Re(z) > 1\}.$$

□

Παρατήρηση: Η σειρά αυτή είναι μια σειρά αναλυτικών συναρτήσεων στο $\{z \in \mathbb{C} : \ Re(z) > 1\}$ η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα. Σύμφωνα με γνωστό θεώρημα θα συγκλίνει σε μια αναλυτική συνάρτηση στο $\{z \in \mathbb{C} : \ Re(z) > 1\}$.

Ορισμός 3.1.1. (Συνάρτηση ζητα του *Riemann*) Για $\{z \in \mathbb{C} : \ Re(z) > 1\}$ ορίζουμε ως συνάρτηση ζητα του *Riemann* την αναλυτική συνάρτηση

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}.$$

Η παρακάτω πρόταση είναι πολύ σημαντική διότι θα μας χρησιμεύσει στην απόδειξη της πρότασης 3.1.5 (βλέπε [3]).

Πρόταση 3.1.1. Για $Re(z) > 1$ ισχύει η σχέση:

$$\zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{\infty} \frac{t^{z-1}e^{-t}}{1 - e^{-t}} dt.$$

Απόδειξη. Από τα λήμματα 2.1.6, 2.1.9 προκύπτει ότι το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{t^{z-1}e^{-t}}{1 - e^{-t}} dt$ για $Re(z) > 1$ είναι μία αναλυτική συνάρτηση του z. Για την απόδειξη της ισότητας αυτής αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $z \in \{z \in \mathbb{C}, \ Re(z) > 1\}$ ισχύει

$$\zeta(z)\Gamma(z) = \int_0^{\infty} \frac{t^{z-1}e^{-t}}{1 - e^{-t}} dt.$$

Για $k = 1, 2, 3\cdots$ και $z_0 \in \{z \in \mathbb{C},\ Re(z) > 1\}$ τυχαίο θεωρούμε B συμπαγές υποσύνολο του $\{z \in \mathbb{C},\ Re(z) > 1\}$ και τέτοιο ώστε $z_0 \in B$. Παίρνουμε το το γινόμενο

$$k^{-z_0}\Gamma(z_0) = k^{-z_0}\int_0^\infty \tau^{z_0-1}e^{-\tau}d\tau.$$

Θέτουμε

$$kt = \tau \Rightarrow kdt = d\tau$$

το αντικαθιστούμε στο ολοκλήρωμα και έχουμε

$$k^{-z_0}\Gamma(z_0) = k^{-z_0}\int_0^\infty k^{z_0-1}t^{z_0-1}e^{-kt}kdt = \int_0^\infty t^{z_0-1}e^{-kt}dt.$$

Αθροίζοντας τώρα ως προς k και έχοντας υπόψη ότι το ολοκλήρωμα στο δεξιό μέρος συγκλίνει ομοιόμορφα στο B, μπορούμε να εναλλάξουμε σειρά με ολοκλήρωμα και θα έχουμε:

$$\zeta(z_0)\Gamma(z_0) = \sum_{k=1}^\infty k^{-z_0}\Gamma(z_0) = \sum_{k=1}^\infty \int_0^\infty t^{z_0-1}e^{-kt}dt = \int_0^\infty t^{z_0-1}\sum_{k=1}^\infty e^{-kt}dt =$$

$$\int_0^\infty t^{z_0-1}\sum_{k=1}^\infty (e^{-t})^k dt = \int_0^\infty t^{z_0-1}\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}dt$$

Και επειδή το z_0 τυχαίο έχουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα.

□

Ορισμός 3.1.2. Θεωρούμε την συνάρτηση

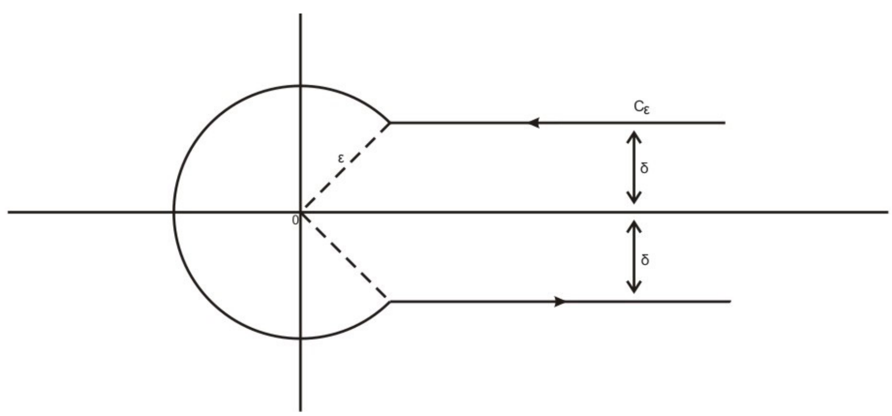
$$u : \mathbb{C} - \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad -\pi < arg(-w) < \pi$$

$$w \longrightarrow \frac{(-w)^{z-1}e^{-w}}{1-e^{-w}}.$$

Για $0 < \epsilon \neq 2k\pi$ θεωρούμε το περίγραμμα $Hankel$, $C_\epsilon = C_\epsilon(\delta)$ με θετικό προσανατολισμό την αντίθετη κίνηση από αυτήν του ρολογιού και δ η απόσταση των ημιευθειών από τον άξονα x. Ορίζουμε τις συνάρτησεις

$$H_\epsilon(z) = \int_{C_\epsilon} u(w)dw,$$

οι οποίες λέγονται και συναρτήσεις $Hankel$.



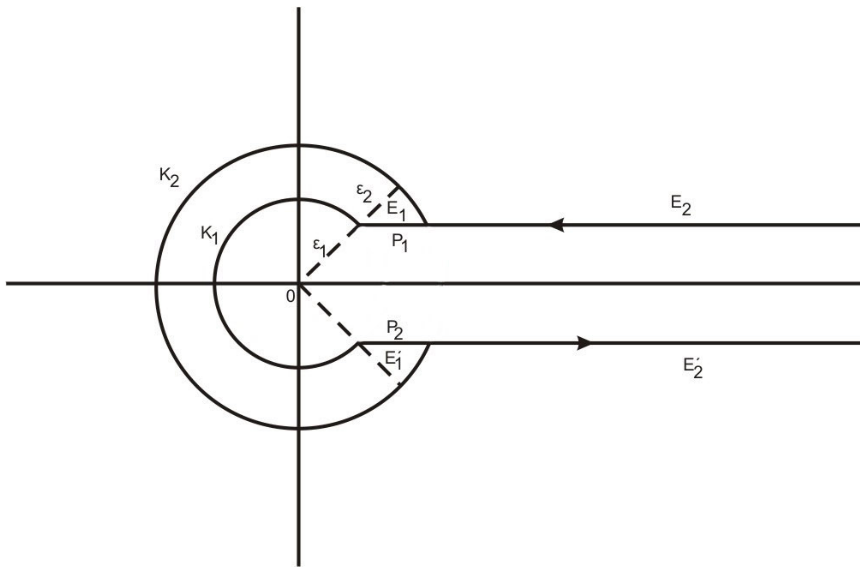
Παρατήρηση: Η συνάρτηση u είναι αναλυτική ως πηλίκο αναλυτικών συναρτήσεων πράγματι, ο παρονομαστής στο $\mathbb{C} - \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ είναι μία αναλυτική συνάρτηση η οποία δεν μηδενίζεται. Επίσης η συνάρτηση

$$(-w)^{z-1} = e^{(z-1)Log(-w)}$$

είναι αναλυτική ως σύνθεση αναλυτικών συναρτήσεων, εφόσον είναι γνωστό ότι η συνάρτηση $Log(-w)$ (πρωτεύον κλάδος του λογαρίθμου) είναι αναλυτική στο $\mathbb{C} - \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$. Άρα και ο αριθμητής είναι μία αναλυτική συνάρτηση ως γινόμενο αναλυτικών συναρτήσεων.

Πρόταση 3.1.2. Ο ορισμός αυτός είναι ανεξάρτητος του ϵ για κάποιο σταθερό δ τ.ω $0 < \delta \leq \epsilon$.

Απόδειξη. Πράγματι, για $0 < \epsilon_1 < \epsilon_2 < 2\pi$ θεωρούμε τις εξής καμπύλες του περιγράμματος:



K_1 το τόξο ακτίνας ϵ_1
E_1 η πάνω ημιευθεία που ενώνεται με το K_1
E_1' η κάτω ημιευθεία που ενώνεται με το K_1
K_2 το τόξο ακτίνας ϵ_2
E_2 η πάνω ημιευθεία που ενώνεται με το K_2.
E_2' η κάτω ημιευθεία που ενώνεται με το K_2.
P_1 το πάνω κομματι που ενώνει τα K_1 ,K_2
P_2 το κάτω κομματι που ενώνει τα K_1 ,K_2.

Οι καμπύλες $C_{\epsilon_1}(\delta)$ και $C_{\epsilon_2}(\delta)$, αν τις δούμε στο $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, είναι ομότοπες στο χωρίο όπου η συνάρτηση είναι αναλυτική. Δηλαδή η συνάρτηση δεν έχει ανώμαλα σημεία στο χωρίο που είναι μεταξύ των $C_{\epsilon_1}(\delta)$, $C_{\epsilon_2}(\delta)$. Άρα το αποτέλεσμα είναι φανερό. όμως δίνουμε μια λεπτομερέστερη απόδειξη.

Απομονώνουμε το περίγραμμα $K_2P_2K_1P_1$ με θετικό προσανατολισμό την αντίθετη κίνηση αυτής του ρολογιού. Το σύνολο $\mathbb{C}-\{x\in\mathbb{R}:x\geq 0\}$ είναι ανοικτό και η u είναι αναλυτική σε αυτό επίσης περιέχει το περίγραμμα $K_2P_2K_1P_1$ και το $n(K_2P_2K_1P_1,z)=0$ για κάθε $z\notin\mathbb{C}-\{x\in\mathbb{R}:x\geq 0\}$. Επομένως από το θεώρημα του $Cauchy$ έχουμε ότι

$$\int_{K_2P_2K_1P_1}u(w)dw=0\Rightarrow\int_{k_2}u(w)dw+\int_{p_2}u(w)dw-\int_{k_1}u(w)dw-\int_{p_1}u(w)dw=0\quad(1).$$

Επίσης ισχύει ότι:

$$H_{\epsilon_1}=\int_{C_{\epsilon_1}}u(w)dw=\int_{E_1}u(w)dw+\int_{K_1}u(w)dw-\int_{E_1'}u(w)dw=$$

$$\int_{E_2}u(w)dw+\int_{P_1}u(w)dw+\int_{K_1}u(w)dw-\int_{P_2}u(w)dw-\int_{E_2'}u(w)dw=\qquad(2).$$

Απο σχέση (1) η (2) γίνεται:

$$H_{\epsilon_1}=$$

$$\int_{E_2}u(w)dw+\int_{P_1}u(w)dw+\int_{K_2}u(w)dw+\int_{P_2}u(w)dw-\int_{P_1}u(w)dw-\int_{P_2}u(w)dw-\int_{E_2'}u(w)dw=$$

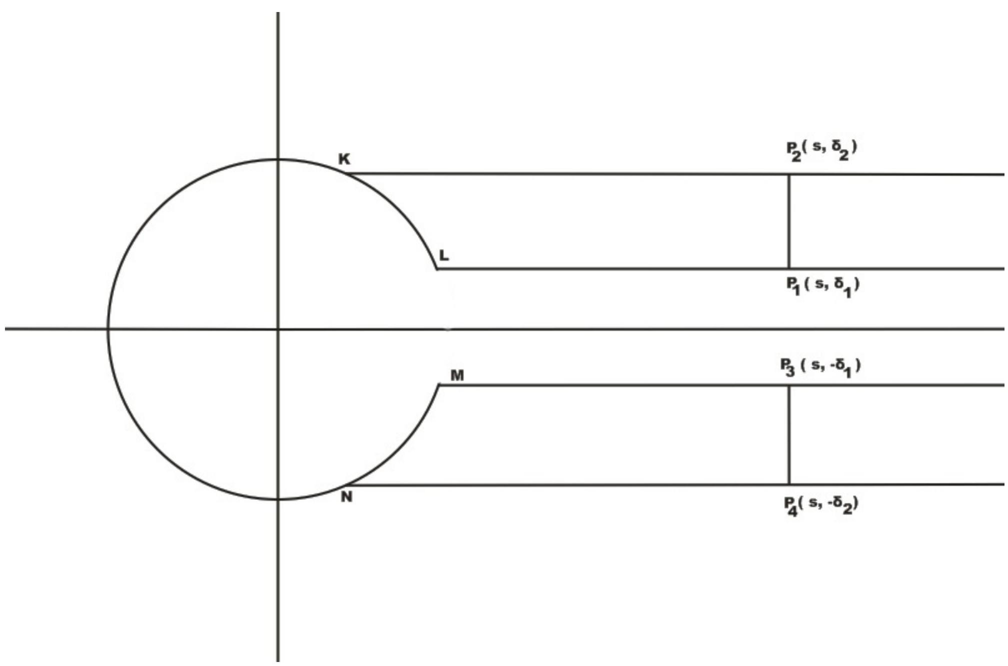
$$\int_{E_2}u(w)dw+\int_{K_2}u(w)dw-\int_{E_2'}u(w)dw=\int_{C_{\epsilon_2}}u(w)=$$

$$H_{\epsilon_2}$$

□

Πρόταση 3.1.3. Για δωθέν ϵ η συνάρτηση H_ϵ είναι ανεξάρτητη του δ αν $0<\delta\leq\epsilon$.

Απόδειξη. Θεωρούμε το παρακάτω σχήμα με θετικό προσανατολισμό την αντίθετη κίνηση των δεικτών του ρολογιού.



Για κάποιο $z \in \mathbb{C}$ τυχαίο θέτουμε

$$H_\epsilon(z) = \int_{C_\epsilon(\delta_1)} u(w)dw$$

και

$$H'_\epsilon(z) = \int_{C_\epsilon(\delta_2)} u(w)dw$$

και είναι αρκετό να δείξουμε ότι

$$H_\epsilon(z) = H'_\epsilon(z).$$

Παρατηρούμε ότι από το θεώρημα του $Cauchy$ τα ολοκληρώματα

$$\int_{P_2KlP_1P_2} u(w)dw = \int_{P_3MNP_4P_3} u(w)dw = 0.$$

Άρα προκύπτουν οι εξής σχέσεις

$$\int_{P_1P_2} u(w)dw = \int_{KP_2} u(w)dw + \int_{LK} u(w)dw + \int_{P_1L} u(w)dw$$

$$\int_{P_4P_3} u(w)dw = \int_{MP_3} u(w)dw + \int_{NM} u(w)dw + \int_{P_4N} u(w)dw$$

Επομένως θα έχουμε:

$$\left|\int_{P_1LMP_3} u(w)dw - \int_{P_2KNP_4} u(w)dw\right| = \left|\int_{P_1P_2} u(w)dw + \int_{P_4P_3} u(w)dw\right| =$$

$$\left|\int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{(-s-it)^{z-1}e^{-s-it}}{1-e^{-s-it}} idt - \int_{\delta_2}^{\delta_1} \frac{(-s+it)^{z-1}e^{-s+it}}{1-e^{-s+it}} idt\right| =$$

$$\left|\int_{\delta_1}^{\delta_2} \left(\frac{(-s-it)^{z-1}e^{-s-it}}{1-e^{-s-it}} + \frac{(-s+it)^{z-1}e^{-s+it}}{1-e^{-s+it}}\right) dt\right| \leq$$

$$\int_{\delta_1}^{\delta_2} \left(\left|\frac{(-s-it)^{z-1}e^{-s-it}}{1-e^{-s-it}}\right| + \left|\frac{(-s+it)^{z-1}e^{-s+it}}{1-e^{-s+it}}\right|\right) dt. \qquad (1)$$

$$\left|\frac{(-s-it)^{z-1}e^{-s-it}}{1-e^{-s-it}}\right| \leq \frac{\left|(-s-it)^{z-1}\right| e^{-s}}{1-e^{-s}} = \frac{\sqrt{s^2+t^2}^{Re(z)-1} e^{-Im(z)Arg(-s-it)} e^{-s}}{1-e^{-s}} =$$

$$\frac{\sqrt{s^2+t^2}^{Re(z)-1} e^{-Im(z)Arg(-s-it)}}{e^s-1}.$$

Ομοίως το

$$\left|\frac{(-s+it)^{z-1}e^{-s+it}}{1-e^{-s+it}}\right| \leq \frac{\sqrt{s^2+t^2}^{Re(z)-1} e^{-Im(z)Arg(-s+it)}}{e^s-1}.$$

Άρα η (1) γίνεται

$$\left|\int_{P_1LMP_3} u(w)dw - \int_{P_2KNP_4} u(w)dw\right| \leq$$

$$\frac{1}{e^s-1}\int_{\delta_1}^{\delta_2}\sqrt{s^2+t^2}^{Rez-1}\left(e^{-Im(z)Arg(-s-it)}+e^{-Im(z)(2\pi-Arg(-s-it))}\right)dt=$$

$$\frac{e^{-2\pi Im(z)}}{e^s-1}\int_{\delta_1}^{\delta_2}\sqrt{s^2+t^2}^{Re(z)-1}dt+\frac{1}{e^s-1}\int_{\delta_1}^{\delta_2}\sqrt{s^2+t^2}^{Re(z)-1}\left(e^{-Im(z)Arg(-s-it)}+e^{Im(z)Arg(-s-it)}\right)dt. \quad (2)$$

Παρατηρούμε ότι $-\pi\leq Arg(-s-it)\leq -\frac{\pi}{2}$ και θα πάρουμε τις παρακάτω δύο περιπτώσεις:

1. αν $Im(z)>0$ τότε

$$e^{Im(z)\frac{\pi}{2}}\leq e^{-Im(z)Arg(-s-it)}\leq e^{\pi Im(z)}$$

και

$$e^{-\pi Im(z)}\leq e^{Im(z)Arg(-s-it)}\leq e^{-\frac{\pi}{2}Im(z)}$$

και επομένως η σχέση (2) γίνεται:

$$\left|\int_{P_1LMP_3}u(w)dw-\int_{P_2KNP_4}u(w)dw\right|\leq$$

$$\frac{e^{-2\pi Im(z)}}{e^s-1}\int_{\delta_1}^{\delta_2}\sqrt{s^2+t^2}^{Re(z)-1}dt+\frac{1}{e^s-1}\int_{\delta_1}^{\delta_2}\sqrt{s^2+t^2}^{Re(z)-1}\left(e^{\pi Im(z)}+e^{-\frac{\pi}{2}Im(z)}\right)dt\leq$$

$$\frac{e^{-2\pi Im(z)}}{e^s-1}(\delta_2-\delta_1)\max_{\delta_1\leq t\leq\delta_2}\sqrt{s^2+t^2}^{Re(z)-1}+\frac{e^{\pi Im(z)}+e^{-\frac{\pi}{2}Im(z)}}{e^s-1}(\delta_2-\delta_1)\max_{\delta_1\leq t\leq\delta_2}\sqrt{s^2+t^2}^{Re(z)-1}=$$

$$\frac{e^{-2\pi Im(z)}}{e^s-1}(\delta_2-\delta_1)\sqrt{s^2+\delta_2^2}^{Re(z)-1}+\frac{e^{\pi Im(z)}+e^{-\frac{\pi}{2}Im(z)}}{e^s-1}(\delta_2-\delta_1)\sqrt{s^2+\delta_2^2}^{Re(z)-1}\leq$$

$$G\frac{s^{Re(z)-1}}{e^s-1}+G'\frac{s^{Re(z)-1}}{e^s-1}$$

όπου G,G' σταθερές. Παίρνοντας τώρα το όριο για $s\to\infty$ το δεξιό μέρος της ανισότητας τείνει στο μηδέν και επομένως έχουμε ότι

$$H_\epsilon(z)=\int_{C_\epsilon(\delta_1)}u(w)dw=\int_{C_\epsilon(\delta_2)}u(w)dw=H'_\epsilon(z).$$

2. Αν $Im(z)\leq 0$ καταλήγουμε στο ίδιο συμπέρασμα δουλεύοντας ομοίως με παραπάνω.

□

Παρατήρηση: Από τα δύο προηγούμενα λήμματα προκύπτει ότι η συνάρτηση H_ϵ είναι ανεξάρτητη από τα $\epsilon,\ \delta$ αν $0<\delta\leq\epsilon$.

Πρόταση 3.1.4. Η H_ϵ είναι αναλυτική σε όλο το $\mathbb{C}$.

Απόδειξη. Από την παραμετρικοποίηση της καμπύλη C_ϵ προκύπτουν τα εξής:
Η πάνω ημιευθεία θα έχει την μορφή

$$t+i\delta,\quad \tilde{\epsilon}\leq t<\infty$$

Το τόξο θα έχει την μορφή

$$\epsilon e^{i\theta},\quad \tilde{\delta}<\theta\leq 2\pi-\tilde{\delta}$$

Η κάτω ημιευθεία θα έχει την μορφή:

$$t - i\delta, \quad \tilde{\epsilon} \leq t < \infty.$$

Παρατηρούμε ότι

$$H_\epsilon(z) = \int_{C_\epsilon} \frac{(-w)^{z-1}e^{-w}}{1-e^{-w}}dw = \int_\infty^{\tilde{\epsilon}} \frac{(-(t+i\delta))^{z-1}e^{-(t+i\delta)}}{1-e^{-(t+i\delta)}}dt - \int_\infty^{\tilde{\epsilon}} \frac{(-(t-i\delta))^{z-1}e^{-(t-i\delta)}}{1-e^{-(t-i\delta)}}dt +$$

$$+ \int_{\tilde{\delta}}^{2\pi-\tilde{\delta}} \frac{(-\epsilon e^{i\theta})^{z-1}e^{-\epsilon e^{i\theta}}}{1-e^{-\epsilon e^{i\theta}}} i\epsilon e^{i\theta} d\theta$$

και είναι αρκετό να δείξουμε ότι η H_ϵ είναι αναλυτική στον ανοικτό δίσκο $D(0,r), \quad \forall r > 0$. Δηλαδή αρκεί να δείξουμε ότι τα ολοκληρώματα είναι αναλυτικές συναρτήσεις στο $D(0,r)$. Θα δείξουμε την αναλυτικότητα του πρώτου και του τρίτου ολοκληρόματος, το δεύτερο προκύπτει ομοίως με το πρώτο.
Για το τρίτο ολοκλήρωμα θεωρούμε την συνάρτηση

$$F : D(0,r) \times [\tilde{\delta}, 2\pi - \tilde{\delta}] \longrightarrow \mathbb{C}$$

με τύπο

$$F(z,\theta) = \frac{(-\epsilon e^{i\theta})^{z-1}e^{-\epsilon e^{i\theta}}}{1-e^{-\epsilon e^{i\theta}}} i\epsilon e^{i\theta}$$

η οποία ικανοποιεί τις προυποθέσεις του λήμματος 2.1.1 επομένως το ολοκλήρωμα είναι μια αναλυτική συνάρτηση στον ανοικτό δίσκο $D(0,r)$.
Για τον ίδιο λόγο και το ολοκλήρωμα

$$\int_k^{\tilde{\epsilon}} \frac{(-(t+i\delta))^{z-1}e^{-(t+i\delta)}}{1-e^{-(t+i\delta)}}dt, \quad k \in \mathbb{N}$$

είναι μια αναλυτική συνάρτηση στο $D(0,r)$. Έστω τώρα $D(0,r_1)$ ένα συμπαγές υποσύνολο του $D(0,r)$ και

$$f_k(z) = \int_k^{\tilde{\epsilon}} \frac{(-(t+i\delta))^{z-1}e^{-(t+i\delta)}}{1-e^{-(t+i\delta)}}dt, \quad k \in \mathbb{N}$$

μια ακολουθία αναλυτικών συναρτήσεων στο $D(0,r_1)$, θα δείξουμε ότι συγκλίνει ομοιόμορφα στην

$$f(z) = \int_\infty^{\tilde{\epsilon}} \frac{(-(t+i\delta))^{z-1}e^{-(t+i\delta)}}{1-e^{-(t+i\delta)}}dt$$

στο $D(0,r_1)$ και επομένως η f θα είναι αναλυτική στο $D(0,r)$.
Πράγματι

$$\sup_{z\in D(0,r_1)} |f_k(z) - f(z)| = \sup_{z\in D(0,r_1)} \left| \int_k^{\tilde{\epsilon}} \frac{(-(t+i\delta))^{z-1}e^{-(t+i\delta)}}{1-e^{-(t+i\delta)}}dt - \int_\infty^{\tilde{\epsilon}} \frac{(-(t+i\delta))^{z-1}e^{-(t+i\delta)}}{1-e^{-(t+i\delta)}}dt \right| =$$

$$\sup_{z\in D(0,r_1)} \left| \int_k^\infty \frac{(-(t+i\delta))^{z-1}e^{-(t+i\delta)}}{1-e^{-(t+i\delta)}}dt \right| \leq \sup_{z\in D(0,r_1)} \int_k^\infty \frac{\left|(-t-i\delta)^{z-1}\right|}{e^t - 1}dt. \quad (1)$$

Παρατηρούμε ότι

$$\left|(-t-i\delta)^{z-1}\right| = \left|e^{(z-1)Log(-t-i\delta)}\right| = \sqrt{t^2+\delta^2}^{Re(z)-1}\left|e^{-Im(z)Arg(-t-i\delta)}\right|.$$

Επίσης παρατηρούμε ότι $-r_1 \leq Im(z) \leq r_1$ και $-\pi < Arg(z) < \pi$ και θα πάρουμε τις εξής περιπτώσεις:
1. Αν $0 < Im(z) \leq r_1$, $Arg(z) > 0$ τότε θα έχουμε

$$-r_1 \leq -Im(z) < 0 \Rightarrow -r_1 Arg(z) < -Im(z)Arg(z) < 0.$$

Αν $Arg(z) \leq 0$ τότε θα έχουμε

$$0 \leq -Im(z)Arg(z) \leq -r_1 Arg(z) < r_1\pi$$

2. Αν $-r_1 \leq Im(z) \leq 0$, $Arg(z) > 0$ τότε

$$0 \leq -Im(z) \leq r \Rightarrow 0 \leq -Im(z)Arg(z) \leq rArg(z) < r\pi.$$

Αν $Arg(z) \leq 0$

$$0 \leq -Im(z) \leq r_1 \Rightarrow r_1 Arg(z) \leq -Im(z)Arg(z) \leq 0$$

Επομένως και για τις δύο περιπτώσεις θα ισχύει ότι

$$\left|e^{-Im(z)Arg(-t-i\delta)}\right| \leq e^{r_1\pi}$$

Επανερχόμστε λοιπόν στην (1) και θα έχουμε:

$$\sup_{z\in D(0,r_1)} |f_k(z)-f(z)| \leq e^{r_1\pi} \sup_{z\in D(0,r_1)} \int_k^\infty \frac{\sqrt{t^2+\delta^2}^{Re(z)-1}}{e^t-1}dt \leq$$

$$e^{r_1\pi}\int_k^\infty \frac{\sqrt{t^2+\delta^2}^{r-1}}{e^t-1}dt \leq C\int_k^\infty \frac{t^{r-1}}{e^t-1} \longrightarrow 0$$

όταν το $k \to \infty$ και C σταθερά (βλέπε λήμμα 2.1.3). Άρα η f είναι αναλυτική στο $D(0,r)$.

□

Από την επόμενη πρόταση προκύπτει ότι η ζ επεκτείνεται αναλυτικά στο $\mathbb{C}-\{1\}$ (βλέπε [3]).

Πρόταση 3.1.5. Για $0 < \epsilon < 2\pi$ και για $Re(z) > 1$ έχουμε ότι:

$$\zeta(z) = \frac{-H_\epsilon(z)}{2i\sin(\pi z)\Gamma(z)}$$

Απόδειξη. Παραμετρικοποιούμε την καμπύλη C_ϵ και έχουμε τα εξής αποτελέσματα:
Η πάνω ημιευθεία θα έχει την μορφή

$$t+i\delta,\quad \tilde{\epsilon} \leq t < \infty$$

Το τόξο θα έχει την μορφή
$$\epsilon e^{i\theta}, \quad \tilde{\delta} < \theta \leq 2\pi - \tilde{\delta}$$

Η κάτω ημιευθεία θα έχει την μορφή:
$$t - i\delta, \qquad \tilde{\epsilon} \leq t < \infty.$$

Επομένως θα έχουμε:
$$\int_{C_\epsilon} \frac{(-w)^{z-1}e^{-w}}{1-e^{-w}}dw = \int_{\infty}^{\tilde{\epsilon}} \frac{(-(t+i\delta))^{z-1}e^{-(t+i\delta)}}{1-e^{-(t+i\delta)}}dt - \int_{\infty}^{\tilde{\epsilon}} \frac{(-(t-i\delta))^{z-1}e^{-(t-i\delta)}}{1-e^{-(t-i\delta)}}dt +$$
$$\int_{\tilde{\delta}}^{2\pi-\tilde{\delta}} \frac{(-\epsilon e^{i\theta})^{z-1}e^{-\epsilon e^{i\theta}}}{1-e^{-\epsilon e^{i\theta}}} i\epsilon e^{i\theta}d\theta =$$
$$\int_{\infty}^{\tilde{\epsilon}} \frac{e^{(z-1)(\log(-(t+i\delta)))}e^{-(t+i\delta)}}{1-e^{-(t+i\delta)}}dt + \int_{\infty}^{\tilde{\epsilon}} \frac{e^{(z-1)(\log(-(t-i\delta)))}e^{-(t-i\delta)}}{1-e^{-(t-i\delta)}}dt +$$
$$\int_{\tilde{\delta}}^{2\pi-\tilde{\delta}} \frac{(-\epsilon e^{i\theta})^{z-1}e^{-\epsilon e^{i\theta}}}{1-e^{-\epsilon e^{i\theta}}} i\epsilon e^{i\theta}d\theta.$$

Θα υπολογίσουμε τα ολοκληρώματα ξεχωριστά. Παίρνουμε πρώτα το τρίτο ολοκλήρωμα και παρατηρούμε για την υπο-ολοκλήρωση συνάρτηση το εξής:
για $z = x + iy$
$$\left|\frac{(-\epsilon e^{i\theta})^{z-1}e^{-\epsilon e^{i\theta}}}{1-e^{-\epsilon e^{i\theta}}} i\epsilon e^{i\theta}\right| = \epsilon^{Re(z)-1}\left|e^{-\theta y}\right| \left|\frac{\epsilon e^{-\epsilon e^{i\theta}}}{1-e^{-\epsilon e^{i\theta}}}\right| =$$
$$\epsilon^{Re(z)-1}\left|e^{-\theta y}\right| \left|\frac{\epsilon}{e^{\epsilon e^{i\theta}}-1}\right| = \epsilon^{Re(z)-1}\left|e^{-\theta y}\right| \left|\frac{1}{\frac{e^{\epsilon e^{i\theta}}-1}{\epsilon}}\right|.$$

Θεωρούμε την συνάρτηση
$$f(\epsilon) = \frac{1}{\frac{e^{\epsilon e^{i\theta}}-1}{\epsilon}}$$
και την επεκτείνουμε έτσι ώστε στο μηδέν να παίρνει την τιμή
$$\frac{1}{e^{i\theta}}.$$

Είναι συνεχής στο μηδέν και από τον ορισμό της συνέχειας σε μία γειτονιά του μηδενός που εξαρτάται από την τιμή 1 θα έχουμε:
$$\left|\frac{1}{\frac{e^{\epsilon e^{i\theta}}-1}{\epsilon}} - \frac{1}{e^{i\theta}}\right| < 1 \Rightarrow \left|\left|\frac{1}{\frac{e^{\epsilon e^{i\theta}}-1}{\epsilon}}\right| - \left|\frac{1}{e^{i\theta}}\right|\right| < 1 \Rightarrow$$
$$\left|\frac{1}{\frac{e^{\epsilon e^{i\theta}}-1}{\epsilon}}\right| < 1 + \left|\frac{1}{e^{i\theta}}\right| = 2$$

Επομένως για το ολοκλήρωμα τώρα θα έχουμε:

$$\left|\int_{\tilde{\delta}}^{2\pi-\tilde{\delta}} \frac{(-\epsilon e^{i\theta})^{z-1}e^{-\epsilon e^{i\theta}}}{1-e^{-\epsilon e^{i\theta}}} i\epsilon e^{i\theta} d\theta\right| \leq \int_{\tilde{\delta}}^{2\pi-\tilde{\delta}} \left|\frac{(-\epsilon e^{i\theta})^{z-1}e^{-\epsilon e^{i\theta}}}{1-e^{-\epsilon e^{i\theta}}} i\epsilon e^{i\theta}\right| d\theta \leq$$

$$2\pi \max_{\theta} \left|\frac{(-\epsilon e^{i\theta})^{z-1}e^{-\epsilon e^{i\theta}}}{1-e^{-\epsilon e^{i\theta}}} i\epsilon e^{i\theta}\right| < 4\pi C e^{Re(z)-1}\epsilon^{Re(z)-1} \overset{\epsilon\to 0}{\to} 0,$$

$C = \max_{\theta} \left|e^{-\theta y}\right|.$

Παίρνουμε τώρα τα ολοκληρώματα

$$\int_{\infty}^{\tilde{\epsilon}} \frac{e^{(z-1)(\log(-(t+i\delta)))}e^{-(t+i\delta)}}{1-e^{-(t+i\delta)}} dt + \int_{\tilde{\epsilon}}^{\infty} \frac{e^{(z-1)(\log(-(t-i\delta)))}e^{-(t-i\delta)}}{1-e^{-(t-i\delta)}} dt =$$

$$\int_{\infty}^{\tilde{\epsilon}} \frac{e^{(z-1)[\log\hat{t}+i(-\pi+\acute{\delta})]}e^{-t-i\delta}}{1-e^{-t-i\delta}} dt + \int_{\tilde{\epsilon}}^{\infty} \frac{e^{(z-1)[\log\hat{t}+i(\pi-\bar{\delta})]}e^{-t+i\delta}}{1-e^{-t+i\delta}} dt. \qquad (1)$$

Όπου

$$\hat{t} = |-(t+i\delta)| = |-t-i\delta|\sqrt{t^2+\delta^2}, \qquad -\pi+\acute{\delta} = Arg(-(t+i\delta)),$$
$$\pi-\bar{\delta} = Arg(-(t-i\delta)).$$

Θέτουμε

$$f_\delta(t) = \frac{e^{(z-1)[\log\hat{t}+i(-\pi+\acute{\delta})]}e^{-t-i\delta}}{1-e^{-t-i\delta}}$$

και

$$f(t) = \frac{e^{(z-1)[\log t - i\pi]}e^{-t}}{1-e^{-t}}$$

$$g_\delta(t) = \frac{e^{(z-1)[\log\hat{t}+i(\pi-\bar{\delta})]}e^{-t+i\delta}}{1-e^{-t+i\delta}}$$

και

$$g(t) = \frac{e^{(z-1)[\log t + i\pi]}e^{-t}}{1-e^{-t}}.$$

Έστω $M > 0$, Θα δείξουμε ότι η f_δ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f για κάθε $\tilde{\epsilon} \leq t \leq M$ και ομοίως αποδεικνύεται ότι και η g_δ συγκλίνει ομοιόμορφα στην g.
Από τον ορισμό λοιπόν αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\lim_{\delta\to 0} \sup_{\tilde{\epsilon}\leq t\leq M} |f_\delta(t) - f(t)| = 0. \qquad (2)$$

$$|f_\delta(t) - f(t)| = \left|\frac{e^{(z-1)[\log\hat{t}+i(-\pi+\acute{\delta})]}e^{-t-i\delta}}{1-e^{-t-i\delta}} - \frac{e^{(z-1)[\log t - i\pi]}e^{-t}}{1-e^{-t}}\right| =$$

$$\left|\frac{\hat{t}^{z-1}e^{(z-1)i(-\pi+\acute{\delta})}e^{-t-i\delta}}{1-e^{-t-i\delta}} - \frac{t^{z-1}e^{-(z-1)i\pi}e^{-t}}{1-e^{-t}}\right| =$$

$$\left|\frac{\hat{t}^{z-1}e^{(z-1)i(-\pi+\acute{\delta})}e^{-t-i\delta}}{1-e^{-t-i\delta}}+\frac{t^{z-1}e^{(z-1)i(-\pi+\acute{\delta})}e^{-t}}{1-e^{-t}}-\frac{t^{z-1}e^{(z-1)i(-\pi+\acute{\delta})}e^{-t}}{1-e^{-t}}-\frac{t^{z-1}e^{-(z-1)i\pi}e^{-t}}{1-e^{-t}}\right|\leq$$

$$\left|e^{(z-1)i(-\pi+\acute{\delta})}\right|\left|\frac{\hat{t}^{z-1}e^{-t-i\delta}}{1-e^{-t-i\delta}}-\frac{t^{z-1}e^{-t}}{1-e^{-t}}\right|+\left|\frac{t^{z-1}e^{-t}}{1-e^{-t}}\right|\left|e^{(z-1)i(-\pi+\acute{\delta})}-e^{-(z-1)i\pi}\right| \qquad (3).$$

$$\left|\frac{\hat{t}^{z-1}e^{-t-i\delta}}{1-e^{-t-i\delta}}-\frac{t^{z-1}e^{-t}}{1-e^{-t}}\right|=\left|\frac{\hat{t}^{z-1}e^{-t-i\delta}}{1-e^{-t-i\delta}}-\frac{t^{z-1}e^{-t-i\delta}}{1-e^{-t-i\delta}}+\frac{t^{z-1}e^{-t-i\delta}}{1-e^{-t-i\delta}}-\frac{t^{z-1}e^{-t}}{1-e^{-t}}\right|\leq$$

$$\left|\frac{e^{-t-i\delta}}{1-e^{-t-i\delta}}\right|\left|\hat{t}^{z-1}-t^{z-1}\right|+\left|t^{z-1}\right|\left|\frac{e^{-t-i\delta}}{1-e^{-t-i\delta}}-\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\right|\leq$$

$$\left|\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\right|\left|\hat{t}^{z-1}-t^{z-1}\right|+\left|t^{z-1}\right|\left|\frac{e^{-t-i\delta}}{1-e^{-t-i\delta}}-\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\right| \qquad (4).$$

Αντικαθιστώντας την σχέση (4) στην (3) και παίρνοντας τον τύπο (2) έχουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα.
Γυρίζουμε τώρα στην σχέση (1) και παίρνουμε το όριο για $\delta \to 0$ οπότε έχουμε:

$$\lim_{\delta\to 0}\int_M^{\tilde{\epsilon}}\frac{e^{(z-1)[\log\hat{t}+i(-\pi+\acute{\delta})]}e^{-t-i\delta}}{1-e^{-t-i\delta}}dt+\lim_{\delta\to 0}\int_{\tilde{\epsilon}}^{M}\frac{e^{(z-1)[\log\hat{t}+i(\pi-\bar{\delta})]}e^{-t+i\delta}}{1-e^{-t+i\delta}}dt=$$

$$\int_M^{\tilde{\epsilon}}\lim_{\delta\to 0}\frac{e^{(z-1)[\log\hat{t}+i(-\pi+\acute{\delta})]}e^{-t-i\delta}}{1-e^{-t-i\delta}}dt+\int_{\tilde{\epsilon}}^{M}\lim_{\delta\to 0}\frac{e^{(z-1)[\log\hat{t}+i(\pi-\bar{\delta})]}e^{-t+i\delta}}{1-e^{-t+i\delta}}dt=$$

$$\int_M^{\tilde{\epsilon}}\frac{e^{(z-1)[\log t-i\pi]}e^{-t}}{1-e^{-t}}dt+\int_{\tilde{\epsilon}}^{M}\frac{e^{(z-1)[\log t+i\pi]}e^{-t}}{1-e^{-t}}dt.$$

Παίρνουμε και το όριο για $M \to \infty$ και έχουμε ότι:

$$\int_\infty^{\tilde{\epsilon}}\frac{e^{(z-1)[\log t-i\pi]}e^{-t}}{1-e^{-t}}dt+\int_{\tilde{\epsilon}}^{\infty}\frac{e^{(z-1)[\log t+i\pi]}e^{-t}}{1-e^{-t}}dt=$$

$$-\int_{\tilde{\epsilon}}^{\infty}\frac{e^{(z-1)[\log t-i\pi]}e^{-t}}{1-e^{-t}}dt+\int_{\tilde{\epsilon}}^{\infty}\frac{e^{(z-1)[\log t+i\pi]}e^{-t}}{1-e^{-t}}dt=$$

$$\int_{\tilde{\epsilon}}^{\infty}\left[\frac{e^{(z-1)[\log t+i\pi]}e^{-t}}{1-e^{-t}}-\frac{e^{(z-1)[\log t-i\pi]}e^{-t}}{1-e^{-t}}\right]dt=-(e^{i\pi z}-e^{-i\pi z})\int_{\tilde{\epsilon}}^{\infty}\frac{t^{z-1}e^{-t}}{1-e^{-t}}dt=$$

$$-2i\sin\pi z\int_{\tilde{\epsilon}}^{\infty}\frac{t^{z-1}e^{-t}}{1-e^{-t}}dt. \qquad (5)$$

Παίρνουμε και το όριο για $\tilde{\epsilon} \to 0$ και έχουμε ότι

$$(5)=-2i\sin(\pi z)\Gamma(z)\zeta(z).$$

Επομένως θα έχουμε ότι:

$$H(z)=\lim_{\epsilon\to 0}H_\epsilon(z)=-2i\sin(\pi z)\Gamma(z)\zeta(z).$$

□

Πόρισμα 3.1.1. Η συνάρτηση ζ επεκτείνεται αναλυτικά στο $\mathbb{C} - \{1\}$. Δηλαδή στα εμφανιζόμενα ανώμαλα σημεία, εκτός του 1, έχει όριο στο $\mathbb{C}$, οπότε είναι απαλείψιμα.

Απόδειξη. Πράγματι έχουμε δείξει ότι $\dfrac{1}{\Gamma}$ είναι ακέραια και ότι έχει ρίζες στα σημεία $\{0, -1, -2, \cdots\}$ και

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Με βάση αυτά και το προηγούμενο λήμμα θα έχουμε ότι για $Re(z) > 1$ η

$$\zeta(z) = \frac{-H_\epsilon(z)}{2i \sin \pi z \Gamma(z)} = \frac{-H_\epsilon(z)}{\frac{2i\pi}{\Gamma(1-z)}} \quad (1).$$

Επίσης επειδή η συνάρτηση

$$\frac{-H_\epsilon(z)}{\frac{2i\pi}{\Gamma(1-z)}}$$

θα είναι αναλυτική σε όλο το μιγαδικό επίπεδο πλην τους θετικούς ακεραίους ως πηλίκο αναλυτικών συναρτήσεων, θα έχουμε ότι η συνάρτηση

$$\frac{-H_\epsilon(z)}{\frac{2i\pi}{\Gamma(1-z)}}$$

θα είναι αναλυτική στο $\mathbb{C} - \{1\}$ και επομένως μέσω της εξίσωσης (1) η ζ θα επεκτείνεται αναλυτικά στο $\mathbb{C} - \{1\}$.

$\square$

Παρακάτω θα αναφέρουμε ένα θεώρημα γνωστό από την Μιγαδική ανάλυση το οποίο θα μας χρησιμεύσει στην απόδειξη της πιο κάτω πρότασης (για απόδειξη βλέπε [6] ή [1]).

Θεώρημα 3.1.1. *Έστω $G \subset \mathbb{C}$ ανοικτό σύνολο και $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ μια αναλυτική συνάρτηση. Έστω $D(a,\epsilon) = \{z \in \mathbb{C} : \ |z-a| < \epsilon\}$ και ας υποθέσουμε ότι $\bar{D}(a,\epsilon) \subset G$. Εάν $r(\theta) = a + \epsilon e^{i\theta}, \ 0 < \theta < 2\pi$, τότε για κάθε $z \in D$ έχουμε*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_r \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

Πρόταση 3.1.6. Η συνάρτηση ζ έχει απλό πόλο στο σημείο $z = 1$ με ολοκληρωτικό υπόλοιπο 1 ($Res(\zeta, 1) = 1$).

Απόδειξη. Από την πρόταση 3.1.5 έχουμε ότι

$$\zeta(z) = \frac{-H_\epsilon(z)}{2i\sin(\pi z)\Gamma(z)}.$$

Άρα

$$Res(\zeta, 1) = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{-H_\epsilon(z)}{2i\sin(\pi z)\Gamma(z)} = \lim_{z\to 1} \frac{-H_\epsilon(z)}{\Gamma(z)} \frac{1}{\frac{2i\sin(\pi z)}{z-1}}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{z\to 1} \frac{1}{\frac{2i\sin(\pi z)}{z-1}} = -\frac{1}{2\pi i}$$

και

$$\lim_{z\to 1} \Gamma(z) = \Gamma(1) = 1.$$

Μένει λοιπόν να υπολογίσουμε το $\lim_{z\to 1} H_\epsilon(z)$. Από την απόδειξη της πρότασης 3.1.5 παρατηρούμε ότι επειδή για $z = 1$ το $\sin(\pi z) = 0$ θα έχουμε ότι τα δύο ολοκληρώγματα πάνω στις δύο ημιευθείες θα είναι μηδέν. Επίσης το ολοκλήρωμα πάνω στο τόξο για $z = 1$ θα παίρνει την μορφή

$$\int_{\tilde{\delta}}^{2\pi-\tilde{\delta}} \frac{e^{-\epsilon e^{i\theta}}}{1-e^{-\epsilon e^{i\theta}}} i\epsilon e^{i\theta} d\theta$$

και όταν το $\delta \to 0$ το ολοκλήρωμα θα παίρνει την μορφή

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{-\epsilon e^{i\theta}}}{1-e^{-\epsilon e^{i\theta}}} i\epsilon e^{i\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{i\epsilon e^{i\theta}}{e^{\epsilon e^{i\theta}}-1} d\theta.$$

Γνωρίζουμε ότι

$$e^{\epsilon e^{i\theta}} = 1 + \epsilon e^{i\theta} + \frac{(\epsilon e^{i\theta})^2}{2!} + \cdots + \frac{(\epsilon e^{i\theta})^n}{n!} + \cdots = 1 + \epsilon e^{i\theta} + R.$$

Όπου το

$$|R| \leq \epsilon^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} = c\epsilon^2.$$

Επομένως τώρα το ολοκλήρωμα θα παίρνει την μορφή

$$\int_0^{2\pi} \frac{i\epsilon e^{i\theta}}{1+\epsilon e^{i\theta}+R-1} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{i\epsilon e^{i\theta}}{\epsilon e^{i\theta}+R} d\theta$$

Εφαρμόζουμε το προηγούμενο θεώρημα για $a = 0$ και $G = D(a, 2\epsilon)$, $\epsilon < \frac{1}{c}$ και θεωρούμε την αναλυτική συνάρτηση

$$f : G \longrightarrow \mathbb{C}$$

με τύπο

$$f(z) = 1$$

τότε $|R| \leq c\epsilon^2 = c\epsilon\epsilon < c\frac{1}{c}\epsilon = \epsilon$. Επομένως θα έχουμε ότι

$$f(R) = 1 = \frac{1}{2\pi i} \int_r \frac{1}{w-R} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{i\epsilon e^{i\theta}}{\epsilon e^{i\theta}+R} d\theta = 2\pi i$$

Άρα $H_\epsilon(z) \to 2\pi i$ όταν $z \to 1$ και το $Res(\zeta, 1) = 1$. □

3.2 Σύνδεση της Συνάρτησης Ζήτα με τους Πρώτους Αριθμούς

Ένα άπειρο γινόμενο μιγαδικών αριθμών $p_1 p_2 p_3 \cdots p_n \cdots = \prod_{n=1}^{\infty} p_n$ είναι το όριο $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = \lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} p_n$ και συγκλίνει αν το όριο αυτό υπάρχει.
Στα επόμενα θα θεωρούμε ότι ένα άπειρο γινόμενο συγκλίνει αν και μόνο αν το πολύ ένα πεπερασμένο πλήθος παραγόντων είναι μηδέν και αν το γινόμενο των άπειρων μη μηδενικών παραγόντων τείνει σε ένα πεπαρασμένο όριο διάφορο του μηδενός. Εξαιρούνται δηλαδή περιπτώσεις όπως

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n!} \longrightarrow 0, \; n \to \infty.$$

Στη συνέχεια θα αναφέρουμε κάποια βασικά κριτήρια σύγκλισης των άπειρων γινόμενων τα οποία θα μας βοηθήσουν στην απόδειξη μιας πολύ βασικής ιδιότητας της συνάρτησης ζήτα που δείχνει πως σχετίζεται με τους πρώτους αριθμούς.(Για την απόδειξη της παρακάτω Πρότασης καθώς και του θεωρήματος 3.2.1 βλέπε [5])

Πρόταση 3.2.1. Εάν ένα άπειρο γινόμενο συγκλίνει τότε ο γενικός όρος του p_n τείνει στο 1 όταν το n τείνει στο άπειρο.

Απόδειξη. Πράγματι εφόσον τα p_n είναι διάφορα του μηδενός μπορούμε να γράψουμε $p_n = \dfrac{P_n}{P_{n-1}}$ και εφόσον η ακολουθία P_n συγκλίνει θα είναι $Cauchy$ και άρα το $p_n \to 1$. □

Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε ένα άπειρο γινόμενο στην μορφή

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$$

και το $a_n \to 0$ όταν το $n \to \infty$ να είναι μια απαραίτητη προυπόθεση για να συγκλίνει.

Θεώρημα 3.2.1. *Το άπειρο γινόμενο $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$ με $1 + a_n \neq 0$ συγκλίνει συγχρόνως με την σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} Log(1+a_n)$ όπου οι όροι της αντιπροσωπεύουν τις τιμές του κύριου κλάδου του λογαρίθμου.*

Απόδειξη. Θέτουμε $S_n = \sum_{k=1}^{n} Log(1 + a_n)$ και θα δείξουμε ότι αν $S_n \to S$ τότε $P_n \to P$, Πράγματι επειδή η εκθετική συνάρτηση είναι συνεχής θα έχουμε ότι $e^{S_n} \to e^{S}$ και επειδή $P_n = e^{S_n}$ θέτοντας $P = e^{S}$ έχουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Θα δείξουμε τώρα ότι αν $P_n \to P$ τότε $S_n \to S$, πράγματι εφόσον $\dfrac{P_n}{P} \to 1$ θα έχουμε ότι $Log \dfrac{P_n}{P} \to 0$.
Γνωρίζουμε ότι για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ ισχύουν οι σχέσεις

$$Log \frac{P_n}{P} = \log \left| \frac{P_n}{P} \right| + iArg\left(\frac{P_n}{P}\right), \quad -\pi < Arg\left(\frac{P_n}{P}\right) \leq \pi$$

$$Log(P_n) = \log|P_n| + iArg(P_n), \quad -\pi < Arg(P_n) \leq \pi$$

$$Log(P) = \log|P| + iArg(P), \quad -\pi < Arg(P) \leq \pi.$$

Επομένως θα ισχύουν οι ισότηττες

$$Log\frac{P_n}{P} = LogP_n - LogP + k2\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}$$

και

$$S_n = Log(P_n) + l2\pi i, \quad l \in \mathbb{Z}$$

δηλαδή μπορούμε να πούμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$Log\frac{P_n}{P} = S_{n+1} - LogP + h_n 2\pi i, \quad h_n \in \mathbb{Z}$$

και

$$Log\frac{P_{n+1}}{P} = S_n - LogP + h_{n+1}2\pi i, \quad h_{n+1} \in \mathbb{Z}.$$

Θα δείξουμε ότι η ακολουθία h_n συγκλίνει. Παρατηρούμε ότι

$$(h_{n+1} - h_n)\, 2\pi i = Log\frac{P_{n+1}}{P} - Log\frac{P_n}{P} - Log(1 + a_{n+1}).$$

Επίσης επειδή η ακολουθία $Log\frac{P_n}{P}$ συκλίνει έπεται ότι θα είναι μια ακολουθία $Cauchy$ και επειδή η μιγαδική συνάρτηση Log είναι συνεχής θα συνεπάγεται ότι και η ακολουθία $Log(1 + a_{n+1})$ θα τείνει στο μηδέν αφου η ακολουθία a_n τείνει στο μηδέν. Άρα θα υπάρχει ένα $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για όλα να $n > n_0$ να ισχύουν τα παρακάτω:

$$\left| Log\frac{P_{n+1}}{P} - Log\frac{P_n}{P} \right| \leq \frac{1}{2}$$

και

$$|Log(1 + a_{n+1})| \leq \frac{1}{2}.$$

Επομένως για όλα τα $n > n_0$ θα έχουμε

$$|h_{n+1} - h_n|\, 2\pi \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

και

$$|h_{n+1} - h_n| \leq \frac{1}{2\pi} < 1$$

και επειδή η h_n είναι ακολουθία ακεραίων θα έχουμε ότι για όλα τα $n > n_0$ $h_{n+1} = h_n = h$ δηλαδή θα καταλήγει σε μια σταθερή ακολουθία και επομένως θα συγκλίνει.
Έχουμε δείξει λοιπόν ότι για $n > n_0$

$$Log\frac{P_n}{P} = S_n - LogP + h2\pi i$$

και επομένως όταν το $n \to \infty$ θα έχουμε

$$S_n \to LogP - h2\pi i.$$

$\square$

Θεώρημα 3.2.2. *Το άπειρο γινόμενο* $\prod_{1}^{\infty}(1+a_n)$ *συγκλίνει απόλυτα αν και μόνο αν η σειρά* $\sum_{1}^{\infty}|a_n|$ *συγκλίνει.*

Απόδειξη. Αντί για το άπειρο γινόμενο μπορούμε να ελέγξουμε τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|Log(1+a_n)\right|.$$

Γνωρίζουμε ότι

$$\lim_{z\to 0}\frac{Log(1+z)}{z}=1$$

θέτουμε $z=a_n$ και παρατηρούμε ότι για να συγκλίνουν και οι δύο σειρές θα πρέπει αναγκαστικά $a_n\to 0$. Από τον ορισμό λοιπόν θα έχουμε ότι

$$\forall\epsilon>0,\ \ \exists N(\epsilon)=N \quad \tau\omega \quad \forall n>N(\epsilon)$$

$$\left|\frac{Log(1+a_n)}{a_n}-1\right|<\epsilon\Leftrightarrow$$

$$(1-\epsilon)\left|a_n\right|<\left|Log(1+a_n)\right|<(1+\epsilon)\left|a_n\right|.$$

Από το κριτήριο σύγκρισης των πραγματικών σειρών έχουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα. □

Θεώρημα 3.2.3. *Το άπειρο γινόμενο* $\prod_{j=1}^{\infty}(1+|a_j|)$ *συγκλίνει τότε και μόνο τότε όταν η σειρά* $\sum_{j=1}^{\infty}|a_j|$ *συγκλίνει.*

Απόδειξη. Αντί για το άπειρο γινόμενο θα ελεγξουμε την σερά $\sum_{j=1}^{\infty}Log(1+|a_j|)$ δηλαδή θα συγρίνουμε τις δύο σειρές. Αλλα επειδή

$$\lim_{j\to\infty}\frac{Log(1+|a_j|)}{|a_j|}=1$$

οι δύο σειρές θα συγκλίνουν συγχρόνως. □

Πόρισμα 3.2.1. Αν το άπειρο γινόμενο $\prod_{j=1}^{\infty}(1+|a_j|)$ συγκλίνει τότε συγκλίνει και το $\prod_{j=1}^{\infty}(1+a_j)$.

Απόδειξη. Προκύπτει από τον συνδιασμό των προηγούμενων θεωρημάτων. □

Εφόσον ορίσαμε το άπειρο γινόμενο και είδαμε κάποιες βασικές ιδιοτητές του μπορούμε να διατυπώσουμε και να σποδείξουμε την παρακάτω πρόταση που συνδέει την συνάρτηση ζήτα με τους πρώτους αριθμούς (βλέπε [3]).

Πρόταση 3.2.2. Για $Re(z)>1$ το άπειρο γινόμενο

$$\prod_{p\in P}\left(1-\frac{1}{p^z}\right)$$

συγκλίνει και

$$\frac{1}{\zeta(z)}=\prod_{p\in P}\left(1-\frac{1}{p^z}\right).$$

Όπου $P=\{2,3,5,7,11\cdots\}$ το σύνολο των θετικών πρώτων αριθμών.

Απόδειξη. Το άπειρο γινόμενο συγκλίνει επειδή συγκλίνει η σειρά $\sum_{p=1}^{\infty}\left|\frac{1}{p^z}\right|$.
Για το δύτερο μέρος της απόδειξης γνωρίζουμε ότι

$$\zeta(z) = 1 + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + \frac{1}{4^z} + \frac{1}{5^z} + \cdots$$

και ότι η σειρά αυτή συγκλίνει απόλυτα, από το κριτήριο του $Caychy$ θα έχουμε ότι

$$\forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon) = N \ \ \tau\omega, \quad \sum_{n=N+1}^{\infty}\left|\frac{1}{n^z}\right| < \epsilon.$$

Σταθεροποιούμε ένα $z \in \{\in \mathbb{C} : Rez > 1\}$ και διαλέγουμε ένα ϵ και ένα n_0 έτσι ώστε να ισχύει το παραπάνω. Θέτουμε p_{n_0} να είναι ο μέγιστος πρώτος αριθμός που είναι μικρότερος η ίσος του n_0.
Παρατηρούμε ότι

$$\left(1 - \frac{1}{2^z}\right)\zeta(z) = 1 + \frac{1}{3^z} + \frac{1}{5^z} + \frac{1}{7^z} + \frac{1}{9^z} + \frac{1}{11^z}\cdots$$

δηλαδή μπορούμε να πούμε ότι από την ζ έχουμε αφαιρέσει όλους τους αριθμούς που είναι πολλαπλάσια του $\frac{1}{2^z}$ ή ότι από το άθροισμα $1 + \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^z}$ έχουμε αφαιρέσει όλους τους αριθμούς που διαιρούνται με το $\frac{1}{2^z}$. Προχωρόντας θα έχουμε

$$\left(1 - \frac{1}{3^z}\right)\left(1 - \frac{1}{2^z}\right)\zeta(z) = 1 + \frac{1}{5^z} + \frac{1}{7^z} + \frac{1}{11^z}\cdots$$

δηλαδή από το άθροισμα $1 + \sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{n^z}$ έχουμε αφαιρέσει όλους τους αριθμούς που διαιρούνται με $\frac{1}{2^z}$, $\frac{1}{3^z}$ και συνεχίζοντας θα έχουμε ότι:

$$\left(1 - \frac{1}{(p_{n_0})^z}\right)\left(1 - \frac{1}{(p_{n_0-1})^z}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{3^z}\right)\left(1 - \frac{1}{2^z}\right)\zeta(z) = 1 + \sum_{n=n_0+1}^{\bar{\infty}}\frac{1}{n^z},$$

όπου με το $p_{n_0} - 1$ ενοούμε τον αμέσως μικρότερο πρώτο από το p_{n_0} και ούτω καθε εξής επίσης με το άθροισμα $\sum_{n=n_0+1}^{\bar{\infty}}\frac{1}{n^z}$ συμβολίζουμε το άθροισμα που προκύπτει από το $\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\frac{1}{n^z}$ αν αφαιρέσουμε όλους τους αριθμούς που διαιρούνται με $\frac{1}{2^z}$, $\frac{1}{3^z}$, $\cdots$, $\frac{1}{p_{n_0}^z}$. Επομένως θα έχουμε

$$\left(1 - \frac{1}{(p_{n_0})^z}\right)\left(1 - \frac{1}{(p_{n_0-1})^z}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{3^z}\right)\left(1 - \frac{1}{2^z}\right)\zeta(z) - 1 =$$

$$\sum_{n=n_0+1}^{\bar{\infty}}\frac{1}{n^z} \Rightarrow$$

$$\left|\left(1 - \frac{1}{(p_{n_0})^z}\right)\left(1 - \frac{1}{(p_{n_0-1})^z}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{3^z}\right)\left(1 - \frac{1}{2^z}\right)\zeta(z) - 1\right| =$$

$$\left|\sum_{n=n_0+1}^{\bar{\infty}} \frac{1}{n^z}\right| \leq \left|\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{n^z}\right| \leq \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \left|\frac{1}{n^z}\right| < \epsilon.$$

Εφόσον λοιπόν το ϵ ήταν τυχαίο από τον ορισμό της συγκλίνουσας ακολουθίας όταν το $n_0 \to \infty$ θα έχουμε ότι

$$\prod_{p \in P} \left(1 - \frac{1}{p^z}\right) \zeta(z) = 1 \Rightarrow \prod_{p \in P} \left(1 - \frac{1}{p^z}\right) = \frac{1}{\zeta(z)}$$

$\square$

3.3 Υπόθεση του *Riemann*

Για την απόδειξη του παρακάτω θεωρήματος θα χρησιμοποιήσουμε ένα πολύ γνωστό θεώρημα από την Μιγαδική Ανάλυση για τον υπολογισμό Μιγαδικών ολοκληρωμάτων (για την απόδειξη βλέπε [6]).

Θεώρημα 3.3.1. *Έστω $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ αναλυτική συνάρτηση στο χωρίο G εκτός από ένα πεπερασμένο πλήθος μεμονωνένων ανώμαλων σημείων $z_1, z_2, \cdots, z_n$. Έστω γ μία κλειστή ευθυγραμμίσιμη καμπύλη στο G η οποία δεν διέρχεται από τα ανώμαλα σημεία z_k, $(k = 1, \cdots, n)$, και τέτοια ώστε $\gamma - 0$ στο G. Τότε:*

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} n(\gamma, z_k) Res(f, z_k).$$

Η παρακάτω εξίσωση είναι γνωστή ως Συναρτησιακή Εξίσωση και μέσω αυτής θα προκύψουν διάφοφορα αποτελέσματα σχετικά με τις ρίζες της συναρτησης ζήτα (βλέπε [3]).

Θεώρημα 3.3.2. *(Συναρτησιακή Εξίσωση) Για όλα τα $z \in \mathbb{C}$ ισχύει η παρακάτω εξίσωση:*

$$\zeta(1-z) = 2\zeta(z)\Gamma(z)\cos(\frac{\pi}{2}z)(2\pi)^z$$

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε πρώτα ότι η εξίσωση αυτή ισχύει όταν το z διατρέχει το μηδέν και τους αρνητικούς ακεραίους και έπειτα όταν το $z \in \mathbb{C} - \{0, -1, -2, \cdots\}$.

Η εξίσωση αυτή μπορεί να γραφτεί στην μορφή

$$\frac{\zeta(1-z)}{\Gamma(z)} = 2\zeta(z)\cos(\frac{\pi}{2}z)(2\pi)^z$$

και παρατηρούμε ότι το δεξιό μέρος της ισότητας λόγω της επέκτασης της ζ μπορεί να γταφτεί ως εξής:

$$-2\frac{H_\epsilon(z)}{2i\sin\pi z\Gamma(z)}\cos(\frac{\pi}{2}z)(2\pi)^z = -2\frac{H_\epsilon(z)}{4i\sin\frac{\pi}{2}z\cos\frac{\pi}{2}z\Gamma(z)}\cos(\frac{\pi}{2}z)(2\pi)^z =$$

$$-\frac{H_\epsilon(z)}{2i\sin\frac{\pi}{2}z\Gamma(z)}(2\pi)^z.$$

Με βάση την αναλυτική επέκταση της συνάρτησης ζήτα συμπερένουμε ότι η $\zeta(1-z)$ είναι αναλυτική στο $\mathbb{C} - \{0\}$ και το μηδέν θα είναι απλός πόλος. Άρα θά έχουμε ότι

$$\lim_{z\to 0}\zeta(1-z) = \infty$$

και

$$\lim_{z\to o} -\frac{H_\epsilon(z)}{2i\sin\frac{\pi}{2}z}(2\pi)^z = \infty$$

δηλαδή η ισότητα ισχύει στο $z = 0$.

Τώρα για $z = k$ όπου k αρνητικός ακέραιος η συνάρτηση $\dfrac{1}{\Gamma(z)}$ είναι μηδέν και επομένως θα έχουμε

$0=0$ και πάλι ισχύει η ισότητα.
Επίσης για $z=1$ θα έχουμε

$$\lim_{z\to 1}\zeta(z)=\infty$$

και

$$\lim_{z\to 1}(2\pi)^z\frac{1}{2\cos\left(\frac{\pi}{2}z\right)}\frac{\zeta(1-z)}{\Gamma(z)}=\infty$$

Έστω τώρα ότι το $z\in\mathbb{C}-\{1,0,-1,-2,\cdots\}$ θα δείξουμε πρώτα ότι η εξίσωση ισχύει στο

$$\mathbb{C}-\{1,0,-1,-2,\cdots\}\cap\{z\in\mathbb{C}:Re(z)<0\}$$

και μέσω του Θεωρήματος της Ταυτότητας θα επεκτείνεται η ισότητα στο $\mathbb{C}-\{1,0,-1,-2,\cdots\}$ και επομένως σε όλο το $\mathbb{C}$.

Θεωρούμε $0<\epsilon<2\pi$ και $n\in\mathbb{N}$ και παίρνουμε τις συναρτήσεις $Hankel$ $H_{(2n+1)\pi}$, H_ϵ όπου το περίγραμμα $Hankel$ ορίζεται για το ίδιο δ.
Παρατηρούμε ότι

$$\frac{1}{2\pi i}\left[H_{(2n+1)\pi}-H_\epsilon\right]=\frac{1}{2\pi i}\left[\int_{C_{(2n+1)\pi}}u(w)dw-\int_{C_\epsilon}u(w)dw\right]=\frac{1}{2\pi i}\int_C u(w)dw,$$

$C=C_{(2n+1)\pi}-C_\epsilon$ και ότι οι πόλοι της u είναι απλοί στα σημεία $\pm 2\pi i,\pm 4\pi i,\cdots,\pm 2n\pi i$, πράγματι έχουμε για $0<k\leq n$

$$\lim_{w\to\pm 2k\pi i}(w\mp 2k\pi i)u(w)=\lim_{w\to\pm 2k\pi i}(w\mp 2k\pi i)\frac{(-w)^{z-1}e^{-w}}{1-e^{-w}}=$$

$$\lim_{w\to\pm 2k\pi i}(-w)^{z-1}\lim_{w\to\pm 2k\pi i}(w\mp 2k\pi i)\frac{e^{-w}}{1-e^{-w}}.$$

Όμως

$$\lim_{w\to\pm 2k\pi i}(w\mp 2k\pi i)\frac{e^{-w}}{1-e^{-w}}=\lim_{w\to\pm 2k\pi i}\frac{w\mp 2k\pi i}{e^w-1}=\lim_{w\to\pm 2k\pi i}\frac{1}{\frac{e^w-1}{w\mp 2k\pi i}}=1$$

και

$$\lim_{w\to\pm 2k\pi i}(-w)^{z-1}=(\pm 2k\pi i)^{z-1}=e^{(z-1)Log(\mp 2k\pi i)}=e^{(z-1)(\log(2k\pi i)\mp\frac{\pi}{2}i)}=$$

$$(2k\pi)^{z-1}e^{\mp i(z-1)\frac{\pi}{2}}=\left(\cos{(z-1)}\frac{\pi}{2}\mp i\sin{(z-1)}\frac{\pi}{2}\right)(2k\pi)^{z-1}.$$

Άρα το

$$Res(u,\pm 2k\pi i)=\left(\cos{(z-1)}\frac{\pi}{2}\mp i\sin{(z-1)}\frac{\pi}{2}\right)(2k\pi)^{z-1}.$$

Με βάση λοιπόν τώρα το προηγούμενο θεώρημα και του γεγονότος ότι η τιμή της συνάρτηση του $Hankel$ είναι ανεξάρτητη για οποιοδήποτε δ θετικό και οσοδήποτε μικρό θα έχουμε ότι όταν το $\delta\to 0$ $n(u,\pm 2k\pi i)=1$ και ότι

$$H_{(2n+1)\pi}-H_\epsilon=2\pi i\sum_{k=1}^{n}Res(u,\pm 2k\pi i)=4\pi i\cos{(z-1)}\frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{n}(2k\pi)^{z-1}.$$

Επίσης σταθεροποιόντας ένα $z \in \mathbb{C} - \{1, 0, -1, -2, \cdots\} \cap \{z \in \mathbb{C} : Re(z) < 0\}$ παρατηρούμε ότι

$$H_{(2n+1)\pi}(z) = \int_{C_{(2n+1)\pi}} u(w)dw = \int_{C_{(2n+1)\pi}} \frac{(-w)^{z-1}e^{-w}}{1-e^{-w}}dw =$$

$$\int_{C_{(2n+1)\pi}} \frac{(-w)^{z-1}}{e^{w}-1}dw.$$

Επίσης έχουμε ότι

$$\left|H_{(2n+1)\pi}(z)\right| = \left|\int_{C_{(2n+1)\pi}} \frac{(-w)^{z-1}e^{-w}}{1-e^{-w}}dw\right| \leq$$

$$\int_{C_{(2n+1)\pi}} \left|\frac{(-w)^{z-1}e^{-w}}{1-e^{-w}}dw\right| = \int_{C_{(2n+1)\pi}} \frac{|w|^{Re(z)-1} e^{-Im(z)arg(-w)}}{|e^{w}-1|}|dw|$$

αλλά $-\pi < arg(-w) < \pi$ και z σταθερό άρα μπορούμε να πούμε ότι υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τ.ω

$$\frac{|w|^{Re(z)-1} e^{-Im(z)arg(-w)}}{|e^{w}-1|} \leq \frac{|w|^{Re(z)-1} c}{|e^{w}-1|}.$$

Ακόμα λόγω του περιγράμματος του $Hankel$ θα έχουμε ότι όταν το $n \to \infty$ συνεπάγεται ότι $|w| \to \infty$ και ότι $Re(w) \to \pm\infty$

και

$$\lim_{Re(w)\to\pm\infty} \frac{1}{|e^{w}-1|} \leq \lim_{Re(w)\to\pm\infty} \frac{1}{\left|e^{Re(w)-1}\right|} \leq 0 \text{ ή } 1,$$

$$\lim_{|w|\to\infty} |w|^{Re(z)-1} = 0$$

γιατι $Re(z) - 1 < 0$. Άρα η υποολοκλήρωση συνάρτηση όταν το $n \to \infty$ γίνεται μηδέν και άρα θα έχουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} H_{(2n+1)\pi}(z) = 0.$$

Επομένως για $z \in \mathbb{C} - \{1, 0, -1, -2, \cdots\} \cap \{z \in \mathbb{C} : Re(z) < 0\}$ θα έχουμε

$$-H_{\epsilon}(z) = 4\pi i \cos\left(\frac{\pi}{2}(z-1)\right)(2\pi)^{z-1}\sum_{k=1}^{\infty} k^{z-1} = 4\pi i(2\pi)^{z-1}\cos\left(\frac{\pi}{2}z\right)\zeta(1-z).$$

Αντικαθιστούμε τώρα την σχέση αυτή στην σχέση

$$\zeta(z) = \frac{-H_{\epsilon}(z)}{2i\sin(\pi z)\Gamma(z)}$$

και έχουμε

$$\zeta(z) = \frac{4\pi i(2\pi)^{z-1}\cos\left(\frac{\pi}{2}z\right)\zeta(1-z)}{2i\sin(\pi z)\Gamma(z)} \Rightarrow$$

$$\zeta(z) = (2\pi)^{z}\frac{1}{2\cos\left(\frac{\pi}{2}z\right)}\frac{\zeta(1-z)}{\Gamma(z)}.$$

□

Πόρισμα 3.3.1. Οι μόνες ρίζες της συνάρτησης Ζήτα που δεν περιλαμβάνονται στο σύνολο $\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq Re(z) \leq 1\}$ είναι τα σημεία $-2, -4, -6 \cdots$

Απόδειξη. Από την συναρτησιακή εξίσωση έχουμε ότι

$$\zeta(1-z) = 2\zeta(z)\Gamma(z)\cos\left(\frac{\pi}{2}z\right)(2\pi)^{-z}$$

και γνωρίζουμε ότι για $Re(z) > 1$ οι συνάρτησεις $\zeta(z)$ και $\Gamma(z)$ δεν μηδενίζοντε.
Επίσης παρατηρούμε ότι για $Re(z) > 1$ το $1 - Re(z) < 0$ και θέτοντας $u = 1 - z$ θα βρούμε όλες τις ρίζες της $\zeta(u)$ για $Re(u) < 0$.
Επομένως θα έχουμε ότι η $\zeta(u)$ θα μηδενίζεται όπου μηδενίζεται το $\cos\left(\frac{\pi}{2}z\right)$ δηλαδή για $z = 3, 5, 7, \cdots$
Άρα οι ρίζες της $\zeta(u)$ για $Re(u) < 0$ θα είναι τα σημεία $-2, -4, -6 \cdots$ και θα είναι και όλες οι ρίζες της συνάρτησης ζ έξω από την λωρίδα $\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq Re(z) \leq 1\}$. □

Σκοπός μας στη συνέχεια αυτού του κεφαλαίου είναι η μελέτη των ριζών της συνάρτησης Ζήτα στην κρίσημη λωρίδα

$$\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq Re(z) \leq 1\}.$$

Παρακάτω αποδεικνύουμε κάποιες προτάσεις οι οποίες θα μας βοηθήσουν να μελετήσουμε την ύπαρξη ριζών της συνάρτησης Ζήτα πάνω στις ευθείες $Re(z) = 1$ και $Re(z) = 0$ (βλέπε [3]).

Ορισμός 3.3.1. Έστω P το σύνολο των Πρώτων Αριθμών, ορίζουμε την συνάρτηση

$$\Lambda : \{n \in \mathbb{Z} : n > 0\} \longmapsto \mathbb{R}$$

έτσι ώστε:

$$\Lambda(m) = \begin{cases} \log p, \ \text{εάν } m = p^k, \ p \in P, \ 0 < k \in \mathbb{Z} \\ 0, \ \text{αλλού} \end{cases}$$

Πρόταση 3.3.1. Για $Re(z) > 1$, ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$\sum_{n \geq 2} \Lambda(n) e^{-z \log n} = -\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}$$

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι για $Re(z) > 1$ ισχύει ότι

$$\frac{1}{\zeta(z)} = \prod_{p \in P}\left(1 - \frac{1}{p^z}\right) = \prod_{p \in P}\left(1 - p^{-z}\right) = \prod_{p \in P}\left(1 - e^{-z \log p}\right) \Rightarrow$$

$$Log\left(\frac{1}{\zeta(z)}\right) = Log\left(\prod_{p \in P}\left(1 - e^{-z \log p}\right)\right) \Rightarrow$$

$$-Log\left(\zeta(z)\right) = \sum_{p \in P} Log\left(1 - e^{-z \log p}\right) + 2k\pi i, \qquad k \in \mathbb{Z} \text{ (βλέπε άπειρο γινόμενο)}$$

παραγωγίζουμε και έχουμε

$$-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = \sum_{p\in P} \frac{\left(1-e^{-z\log p}\right)'}{1-e^{-z\log p}} =$$

$$\sum_{p\in P} \frac{(\log p)\, e^{-z\log p}}{1-e^{-z\log p}}.$$

Παρατηρούμε ότι ο όρος

$$\frac{e^{-z\log p}}{1-e^{-z\log p}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(e^{-z\log p}\right)^k$$

και ότι η δυναμοσειρά συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του συνόλου $\{z\in\mathbb{C} : Re(z) > 1\}$ άρα θα έχουμε

$$-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = \sum_{p\in P} \log p \sum_{k=1}^{\infty} \left(e^{-z\log p}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{p\in P} \log p \left(e^{-z\log p}\right)^k =$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{p\in P} \log p \left(e^{-z\log p^k}\right) = \sum_{n=2}^{\infty} \Lambda(n) e^{-z\log n}$$

(η εναλαγή των σειρών έγινε λόγο ομοιόμορφης σύγκλισης). □

Πρόταση 3.3.2. Εάν Φ είναι μία αναλυτική συνάρτηση σε μία γειτονιά του $p\in\mathbb{R}$, η οποία δεν είναι ταυτοτικά μηδέν και $\Phi(p) = 0$ τότε:

$$Re\left(\frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)}\right) > 0,$$

για $z\in\mathbb{R}$ το οποίο είναι κοντά και δεξία του p.

Απόδειξη. Εφόσον η Φ είναι αναλυτική στο p θα μπορεί να γραφτεί σε μορφή δυναμοσειράς γύρω από μία μικρή περιοχή του p άρα θα έχουμε

$$\Phi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-p)^n.$$

Επίσης αν υποθέσουμε ότι το p είναι ρίζα πολαπλότητας $k \geq 1$ τότε από τον ορισμό θα έχουμε ότι $a_n = 0,\ n < k$ και η δυναμοσειρά θα παίρνει την μορφή

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n (z-p)^n = a_k (z-p)^k + a_{k+1}(z-p)^{k+1} + \cdots =$$

$$(z-p)^k \left[a_k + a_{k+1}(z-p) + \cdots\right].$$

Παραγωγίζοντας την Φ έχουμε:

$$\Phi'(z) = k a_k (z-p)^{k-1} + (k+1) a_{k+1} (z-p)^{k+1} + \cdots =$$

$$(z-p)^{k-1}\left[ka_k+(k+1)a_{k+1}(z-p)+\cdots\right].$$

Άρα

$$\frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)}=\frac{ka_k+(k+1)a_{k+1}(z-p)+\cdots}{a_k(z-p)+a_{k+1}(z-p)^2+\cdots}\Rightarrow$$

$$Re\left(\frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)}\right)=Re\left[\frac{ka_k+(k+1)a_{k+1}(z-p)+\cdots}{a_k(z-p)+a_{k+1}(z-p)^2+\cdots}\right]=Re\left[\frac{P_1(z)}{P_2(z)}\right]=$$

$$\frac{Re[P_1]Re[P_2]+Im[P_1]Im[P_2]}{|P_2|^2}>0,$$

για $z\in\mathbb{R}$ κοντά και δεξιά του p εφόσον το $Re[P_1]$ είναι ομόσημο με το $Re[P_2]$ και το $Im[P_1]$ ομόσημο με το $Im[P_2]$.

□

Θεώρημα 3.3.3. *Η συνάρτηση ζ του Riemann δεν έχει ρίζες πάνω στις ευθείες* $Re(z)=1$ *και* $Re(z)=0$.

Απόδειξη. Θα μελετήσουμε πρώτα την συνάρτηση ζήτα του *Riemann* πάνω στην ευθεία $\{z\in\mathbb{C}:Re(z)=1\}$ και ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ρίζα δηλαδή υπάρχει ένα $t_0\in\mathbb{R},\ t_0\neq 0$ τ.ω $\zeta(1+it_0)=0$. Θέτουμε

$$\Phi(z)=\zeta^3(z)\zeta^4(z+it_0)\zeta(z+i2t_0)$$

και παρατηρούμε ότι αφού

$$\zeta(1+it_0)=0\Rightarrow\zeta^4(z+it_0)=(z-1)^4g(z),$$

όπου το $g(1)\neq 0$, σε μία μικρή περιοχή του $1+it_0$.
Επομένως θα έχουμε ότι

$$\lim_{z\to 1}\Phi(z)=\lim_{z\to 1}\zeta^3(z)\zeta^4(z+it_0)\zeta(z+i2t_0)=$$

$$\lim_{z\to 1}(z-1)^3\zeta^3(z)(z-1)g(z)\zeta(z+i2t_0)=0=\Phi(1)$$

Άρα η $\Phi(z)$ έχει ρίζα στο σημείο $z=1$ και από την προηγούμενη πρόταση θα έχουμε ότι

$$Re\left[\frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)}\right]>0,\quad 1<x<1+\epsilon_0,\ \epsilon_0>0.$$

Επίσης ισχύει ότι

$$Log(\Phi(z))=3Log\zeta(z)+4Log\zeta(z+it_0)+Log\zeta(z+2it_0)+2k\pi i,\ \text{για κάποιο}\ k\in\mathbb{Z}$$

παραγωγίζουμε και έχουμε

$$\frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)} = 3\frac{\zeta'(x)}{\zeta(x)} + 4\frac{\zeta'(x+it_0)}{\zeta(x+it_0)} + \frac{\zeta'(x+2it_0)}{\zeta(x+2it_0)} =$$

$$\sum_{n\geq 2} \Lambda(n) \left\{ -3e^{-x\log n} - 4e^{-(x+it_0)\log n} - e^{-(x+2it_0)\log n} \right\}.$$

Άρα

$$Re\left[\frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)}\right] = \sum_{n\geq 2} \Lambda(n) e^{-x\log n} \left\{3 - 4\cos(t_0 \log n) - \cos(2t_0 \log n)\right\} =$$

$$\sum_{n\geq 2} \Lambda(n) e^{-x\log n} \left\{3 - 4\cos(t_0 \log n) - (2\cos^2(t_0\log n) - 1)\right\} =$$

$$-2\sum_{n\geq 2} \Lambda(n) e^{-x\log n} (\cos(t_0 \log n) + 1)^2 \leq 0.$$

Το οποίο είναι άτοπο και άρα η συνάρτηση ζήτα του *Riemann* δεν έχει ρίζες στη ευθεία $Re(z) = 1$. Από την Συναρτησιακή Εξίσωση τώρα έχουμε ότι

$$\zeta(1-z) = 2\zeta(z)\Gamma(z)\cos\left(\frac{\pi}{2}z\right)(2\pi)^{-z}$$

επομένως αφού στην ευθεία $Re(z) = 1$ η συνάρτηση ζήτα δεν έχει ρίζες προκύπτει ότι δεν θα έχει ρίζες και στην ευθεία $1 - Re(z) = 1 \Rightarrow Re(z) = 0$.

$\square$

Στη συνέχεια αναφέρουμε την Υπόθεση του *Riemann* ένα άλυττο μέχρι σήμερα πρόβλημα της Θεωρίας Αριθμών.

Υπόθεση του *Riemann* : Μέσα στην κρίσημη λωρίδα $0 < Re(z) < 1$ η συνάρτηση ζ του *Riemann* μηδενίζεται μόνο πάνω στην ευθεία

$$Re(z) = \frac{1}{2}.$$

3.4 Το Θεώρημα των Πρώτων Αριθμών

Το 1896 ο *Jacques Hadamard* και ο *Charles – Jeans De La Vallee Poussin* απέδειξαν το Θεώρημα των Πρώτων Αριθμών βασιζόμενοι στο γεγονός ότι η Συνάρτηση Ζήτα του *Riemann* είναι Μερόμορφη και δεν μηδενίζεται στο σύνολο

$$\{Re(z) \geq 1\}.$$

Έπειτα πολλοί Μαθηματικοί βελτίωσαν αυτήν τη απόδειξη. Το 1949 ο *Later Selberg* και ο *Erdos* δίνουν μια νέα απόδειξη του Θεωρήματος των Πρώτων Αριθμών χωρίς καμία χρήση της Μιγαδικής Ανάλυσης.
Μερικά χρόνια αργότερα ο *D.J. Newman* βρήκε μια πιο απλή απόδειξη του Θεωρήματος Των Πρώτων Αριθμών χρησιμοποιώντας το επιχείρημα του *Tauberian* για το Αναλυτικό Θεώρημα.
Αυτήν την απόδειξη θα παρουσιάσουμε σε αυτήν την εργασία.

Ορισμός 3.4.1. Για κάθε $x \in \mathbb{R}^+$ ορίζουμε την συνάρτηση $\pi(x)$ να είναι το πλήθος των πρώτων αριθμών που είναι μικρότεροι ή ισοι από το x δηλαδή

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1,$$

$p \in P$ και με P συμβολίζουμε το σύνολο των Πρώτων Θετικών Ακεραίων.

Ορισμός 3.4.2. Εάν $x > 0$ και $p \in P$,
1. ορίζουμε την συνάρτηση

$$m_x : P \longrightarrow \mathbb{Z}$$

$$p \longrightarrow m_x(p) = m(p)$$

και $m(p)$ να είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος k για τον οποίον $p^k \leq x$

2. ορίζουμε την συνάρτηση $\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$.

Το Θεώρημα των Πρώτων Αριθμών λέει ότι

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log(x)}} = 1$$

για την απόδειξη όμως αυτού του θεωρήματος χρειαζόμαστε μια σειρά λημμάτων και προτάσεων που θα αναφέρουμε παρακάτω.

Ξεκινάμε με ένα πολύ βασικό θεώρημα το οποίο ξεκίνησε ως εικάσια το 1845 διατυπομένη από τον *JosephBertrand* και αποδείχτηκε από τον *Chebyshev* το 1850. Μία πιο απλή απόδειξη ήρθε αργότερα από τον *Ramanujan* χρησιμοποιώντας την συνάρτηση Γάμμα.

Θεώρημα 3.4.1. (*Bertrand postulate*) *$\forall n \in \mathbb{Z}^+$ υπάρχει p πρώτος τέτοιος ώστε*

$$n < p \leq 2n$$

Στη συνέχεια αναφέρουμε ένα Λήμμα με το οποίο θα μπορέσουμε να ανάγουμε το Θεώρημα των Πρώτων Αριθμών στην απόδειξη του ορίου στο πόρισμα 3.4.1.(Βλέπε [3])

Λήμμα 3.4.1. *Για $x \geq 3$ ισχύει η παρακάτω διπλή ανισότητα:*

$$\frac{\psi(x)}{x} \leq \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}} \leq \frac{1}{\log x} + \frac{\psi(x)}{x}\left(\frac{\log x}{\log x - 2\log\log x}\right)$$

Απόδειξη. Από τον ορισμό της συνάρτησης $m_x(p)$ έχουμε ότι $m_x(p) \leq \log_p(x) = \frac{\log(x)}{\log(p)}$.
Επίσης παρατηρούμε ότι

$$\psi(x) = \sum_{n\leq x} \Lambda(n) = \sum_{p^k \leq x} \log(p) + 0$$

Θεωρούμε τώρα ένα τυχαίο πρώτο $p \leq x$ και έστω l ο μεγαλύτερος θετικός ακέραιος για τον οποίον $p^l \leq x$ τότε $l = m_p(x)$ και παρατηρούμε ότι

$$\sum_{k=1}^{m_p(x)} \log p = m_p(x) \log p$$

αθροίζουμε όλα τα p και έχουμε

$$\sum_{p^k\leq x} \log p = \sum_{p\leq x} \sum_{k=1}^{m_p(x)} \log p = \sum_{p\leq x} m_p(x) \log p \leq$$

$$\sum_{p\leq x} \frac{\log(x)}{\log(p)} \log(p) = \log(x) \sum_{p\leq x} 1 = \pi(x)\log(x).$$

Για την δεύτερη ανίσωση παρατηρούμε ότι για κάθε $0 < y < x$ τότε

$$\pi(x) = \pi(y) + \sum_{y<p\leq x} 1 \leq \pi(y) + \sum_{y<p\leq x} \frac{\log(p)}{\log(y)} \leq$$

$$\pi(y) + \frac{1}{\log(y)} \sum_{p\leq x} \log(p) \leq \pi(y) + \frac{\psi(x)}{\log(y)}.$$

Θέτουμε $y = \frac{x}{\log^2(x)} < x$ και έχουμε

$$\pi(x) \leq \pi\left(\frac{x}{\log^2(x)}\right) + \frac{\psi(x)}{\log(x) - 2\log\log(x)} < \frac{x}{\log^2(x)} + \frac{\psi(x)}{\log(x)}\left(\frac{\log(x)}{\log(x) - 2\log\log(x)}\right).$$

$\square$

Λήμμα 3.4.2. *Υπάρχει $C > 0$ τέτοιο ώστε*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} \leq C$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι για κάθε $x \geq 2$ υπάρχει $m \in \mathbb{Z}^+$ τέτοιο ώστε

$$2^m < x \leq 2^{m+1}$$

επομένως θα έχουμε

$$\psi(x) = \psi(2^m) + \psi(x) - \psi(2^m) \leq \psi(2^m) + \psi(2^{m+1}) + \psi(2^m) = \sum_{p^k \leq 2^m} \log p + \sum_{2^m < p^k \leq 2^{m+1}} \log p. \quad (1)$$

Έστω $n \in \mathbb{Z}^+$ από το Θεώρημα 3.4.1 υπάρχει p πρώτος έτσι ώστε $n < p \leq 2n$ τότε ο p θα διαιρεί τον αριθμό $\frac{2n!}{n!}$ εφόσον

$$\frac{2n!}{n!} = (n+1)(n+2)\dots 2n$$

και το p ανήκει στο γινόμενο αυτό.
Επίσης γνωρίζουμε ότι $\binom{2n}{n} n! = \dfrac{2n!}{n!}$ και επειδή ο p δεν διαιρεί το $n!$ θα έχουμε ότι ο p θα διαιρεί το $\binom{2n}{n}$.
Αν τώρα πάρουμε το γινόμενο όλων αυτών των πρώτων που είναι στο διάστημα $(n, 2n]$ παρατηρούμε ότι

$$\prod_{n<p\leq 2n} p \leq \frac{2n!}{n!}$$

και το $\displaystyle\prod_{n\leq p<2n} p$ διαιρεί το $\frac{2n!}{n!}$ και άρα θα διαιρεί και $\binom{2n}{n}$ επομένως θα έχουμε

$$\prod_{n<p\leq 2n} p \leq \binom{2n}{n} < \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} = (1+1)^{2n} = 2^{2n}$$

λογαριθμίζουμε και παίρνουνε την παρακάτω σχέση

$$\sum_{n<p\leq 2n} \log p < 2n \log 2$$

και αν θέσουμε $n = 2^m$ τελικά θα ισχύει ότι

$$\sum_{2^m<p\leq 2^{m+1}} < 22^m \log(2) \quad (2).$$

Επίσης παρατηρούμε ότι

$$\sum_{p\leq 2^m} \log p = \sum_{k=1}^{m} \sum_{2^{k-1}<p<2^k} \log(p) <$$

$$\sum_{k=1}^{m} 2^k \log(2) = \log(2) \sum_{k=1}^{m} 2^k = \log(2) \frac{2(2^m-1)}{1} < 2^{m+1} \log(2) \quad (3).$$

Επίσης ισχύει ότι

$$\sum_{p^k\le 2^m}\log(p)=\sum_{p\le 2^m}\log(p)+\sum_{k=2}\sum_{p^k\le 2^m}\log(p)<\sum_{p\le 2^m}\log(p)+\sum_{k=2}\sum_{p\le 2^m}\frac{\log(2^m)}{\log(p)}\log(p)=$$

$\left(\textit{Επειδή } 1<\dfrac{\log(2^m)}{\log(p)}\right)$

$$\sum_{p\le 2^m}\log(p)+m\log(2)\sum_{k=2}\sum_{p\le 2^{\frac{m}{k}}}1=\sum_{p\le 2^m}\log(p)+m\log(2)\sum_{k=2}\pi\left(2^{\frac{m}{k}}\right)<$$

$$\sum_{p\le 2^m}\log(p)+m\log(2)\sum_{k=2}^{m}\pi\left(2^{\frac{m}{k}}\right)<\sum_{p\le 2^m}\log(p)+m^2\log(2)2^{\frac{m}{2}}$$

και λόγω της σχέσης (3) θα έχουμε

$$\sum_{p^k\le 2^m}\log(p)<\log(2)2^{m+1}+m^2\log(2)2^{\frac{m}{2}}\qquad (4).$$

Ομοίως για το άλλο άθροισμα θα έχουμε

$$\sum_{2^m<p^k\le 2^{m+1}}\log(p)=\sum_{2^m<p\le 2^{m+1}}\log(p)+\sum_{k=2}\sum_{2^m<p^k\le 2^{m+1}}\log(p)\le$$

$$\sum_{2^m<p\le 2^{m+1}}\log(p)+\sum_{k=2}\sum_{2^m<p^k\le 2^{m+1}}\frac{\log\left(2^{m+1}\right)}{\log(p)}\log(p)<$$

$$\sum_{2^m<p\le 2^{m+1}}\log(p)+(m+1)\log(2)\sum_{k=2}^{m}\pi\left(2^{\frac{m+1}{k}}\right)<$$

$$\sum_{2^m<p\le 2^{m+1}}\log(p)+(m+1)^2\log(2)2^{\frac{m+1}{2}}$$

και λόγο της σχέσης (2) θα έχουμε

$$\sum_{2^m<p^k\le 2^{m+1}}\log p<2^{m+1}\log 2+(m+1)^2\log(2)2^{\frac{m+1}{2}}\qquad (5).$$

Από την σχέση (1) με βάση τις σχέσεις (4) και (5) θα έχουμε ότι $2^m<x\le 2^{m+1}$

$$\psi(x)<\log(2)2^{m+1}+m^2\log(2)2^{\frac{m}{2}+2^{m+1}\log(2)+(m+1)^2\log(2)2^{\frac{m+1}{2}}}=$$

$$2\log(2)2^m+2\log(2)2^m+m^2 2^{m-\frac{m}{2}}\log(2)+(m+1)^2 2^{m+1-\frac{m+1}{2}}\log(2)<$$

$$2\log(2)x+2\log(2)x+m^2\frac{\log(2)}{2^{\frac{m}{2}}}x+2(m+1)^2\frac{\log(2)}{2^{\frac{m+1}{2}}}x=$$

$$x\log(2)\left(4+\frac{m^2}{2^{\frac{m}{2}}}+\frac{2(m+1)^2}{2^{\frac{m+1}{2}}}\right)$$

Θέτουμε

$$C_m = \log(2)\left(4 + \frac{m^2}{2^{\frac{m}{2}}} + \frac{2(m+1)^2}{2^{\frac{m+1}{2}}}\right)$$

και παρατηρούμε ότι

$$\lim_{m\to\infty} C_m = 4\log(2).$$

Πόρισμα 3.4.1. Θέτουμε $K(u) = \psi(e^u)e^{-u}$, τότε η απόδειξη του Θεωρήματος των Πρώτων αριθμών είναι ισοδύναμη με τη απόδειξη του παρακάτω ορίου

$$\lim_{u\to\infty} K(u) = 1$$

Απόδειξη. Παίρνοντας το όριο για $x \to \infty$ στην ανίσωση του Λήμματος 3.4.1 και έχοντας υπόψη ότι,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\log(x)} = 0$$

και

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{\log x - 2\log\log x} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{1 - 2\frac{\log\log(x)}{\log(x)}} = \lim_{y\to\infty} \frac{1}{1 - 2\frac{\log(y)}{y}} = 1$$

(όπου θέσαμε ότι $y = \log(x)$) γιατί το $\lim\limits_{y\to\infty} \dfrac{\log(y)}{y} = 0$,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} \leq \lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}} \leq \lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x}.$$

Δηλαδή

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x}$$

και επομένως αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1,$$

θέτοντας $x = e^u$ έχουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα. □

Η παρακάτω πρόταση καθώς και το επόμενο λήμμα έχουν συμαντικό ρόλο στην απόδειξη του Θεωρήματος Των Πρώτων Αριθμών (Βλέπε [3]).

Πρόταση 3.4.1. Για $Re(z) > 1$, θέτουμε

$$G(z) = -\left[\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} + \frac{z}{z-1}\right]\frac{1}{z}$$

τότε

$$G(z) = \int_0^\infty (K(u) - 1)\, e^{-(z-1)u} du.$$

Απόδειξη. Από την Πρόταση 3.3.1 γνωρίζουμε ότι

$$-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = \sum_{n\geq 2} \Lambda(n) e^{-z\log(n)} = \sum_{n\geq 2} \left(\psi(n) - \psi(n-1)\right) e^{-z\log(n)} =$$

$$\sum_{n\geq 2} \psi(n) e^{-z\log(n)} - \sum_{n\geq 2} \psi(n-1) e^{-z\log(n)} = \sum_{n\geq 2} \psi(n) e^{-z\log(n)} - \sum_{n\geq 1} \psi(n) e^{-z\log(n+1)} =$$

$$\sum_{n\geq 2} \psi(n) e^{-z\log(n)} - \sum_{n\geq 2} \psi(n) e^{-z\log(n+1)} - 0 = \sum_{n\geq 2} \psi(n) \left[e^{-z\log(n)} - e^{-z\log(n+1)}\right] =$$

$$\sum_{n\geq 2} \psi(n) \int_{\log(n)}^{\log(n+1)^-} z e^{zu} du = z \sum_{n\geq 2} \int_{\log(n)}^{\log(n+1)^-} \psi(n) e^{zu} du =$$

$$z \sum_{n\geq 2} \int_{\log(n)}^{\log(n+1)^-} \psi(e^u) e^{zu} du = z \int_{\log(2)}^{\infty} \psi(e^u) e^{zu} du =$$

$$z \left[\int_0^{\log(2)^-} \psi(e^u) e^{zu} du + \int_{\log(2)}^{\infty} \psi(e^u) e^{zu} du\right] =$$

$$z \int_0^{\infty} \psi(e^u) e^{zu} du,$$

όπου με το σύμβολο $\displaystyle\int_{\log(n)}^{\log(n+1)^-}$ ενοούμε το ολοκλήρωμα πάνω στο διάστημα $[\log(n), \log(n+1))$ και η συνάρτηση $\psi(e^u)$ στο διάστημα αυτό είναι σταθερή και ίση με $\psi(n)$ και επομένως θα είναι κατά τμήματα συνεχής και άρα κατά τμήματα ολοκληρώσιμη. Επίσης σύμφωνα με αυτά και με βάση τον ορισμό της συνάρτησης ψ θα έχουμε ότι το ολοκλήρωμα στο διάστημα $[0, \log(2))$ θα είναι μηδέν. Επομένως θα έχουμε

$$G(z) = \left[z \int_0^{\infty} \psi(e^u) e^{-zu} du - \frac{z}{z-1}\right] \frac{1}{z} =$$

$$\int_0^{\infty} \psi(e^u) e^{-zu} du - \frac{1}{z-1} = \int_0^{\infty} \psi(e^u) e^{-zu} du - \int_0^{\infty} e^{-(z-1)u} du =$$

$$\int_0^{\infty} \left[\psi(e^u) e^{-u} - 1\right] e^{-(z-1)u} du = \int_0^{\infty} \left[k(u) - 1\right] e^{-(z-1)u} du.$$

□

Λήμμα 3.4.3. *Η συνάρτηση G είναι αναλυτική πάνω στο σύνολο $\{z \in \mathbb{C} : Re(z) \geq 1\}$.*

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι

$$G(z) = -\left[\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} + \frac{z}{z-1}\right] \frac{1}{z}$$

επίσης η συνάρτηση ζ είναι αναλυτική στο $\mathbb{C} - \{1\}$ και στο σημείο $z = 1$ έχει απλό πόλο με $Res(\zeta, 1) = 1$. Ακόμα γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση ζ δεν έχει ριζές στο σύνολο $\{z \in \mathbb{C} : Re(z) \geq 1\}$. Άρα η συνάρτηση G θα είναι αναλυτική στο σύνολο $\{\{z \in \mathbb{C}: \ Re(z) \geq 1\} - \{1\}\}$. Θα δείξουμε την αναλυτικότητα στο σημείο $z = 1$. Σε μία μικρή περιοχή του 1 η συνάρτηση ζ αναπτύσεται σαν μία δυναμοσειρά *lourent* με της εξής μορφή:

$$\zeta(z) = \frac{1}{z-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-1)^n,$$

θέτουμε

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-1)^n$$

η οποία είναι μία αναλυτική συνάρτηση στην περιοχή αυτή και επομένως θα έχουμε

$$\zeta(z) = \frac{1}{z-1} + h(z) \Rightarrow$$

$$\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = \frac{-\left(\frac{1}{(z-1)^2} - h'(z)\right)}{\frac{1}{z-1} + h(z)} =$$

$$-\frac{1}{z-1} \frac{1 - h'(z)\,(z-1)^2}{1 + (z-1)\,h(z)}.$$

Θέτουμε

$$g(z) = \frac{1 - h'(z)\,(z-1)^2}{1 + (z-1)\,h(z)}$$

και παρατηρούμε ότι η g είναι αναλυτική σε αυτήν την περιοχή του 1. Επομένως

$$\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = -\frac{1}{z-1} g(z).$$

Άρα θα έχουμε

$$G(z) = -\left[\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} + \frac{z}{z-1}\right]\frac{1}{z} = -\frac{1}{z}\left[-\frac{1}{z-1}g(z) + \frac{z}{z-1}\right] =$$

$$-\frac{1}{z}\left[\frac{z-1}{z-1}g(z) - \frac{z}{z-1}g(z) + \frac{z}{z-1}\right] = -\frac{g(z)}{z} - \frac{1}{z}\left[-\frac{z}{z-1}\,(g(z)-1)\right] =$$

$$-\frac{g(z)}{z} + \frac{1}{z-1}\,(g(z)-1) \qquad (1)$$

Αλλά

$$g(z) - 1 = \frac{1 - h'(z)\,(z-1)^2}{1 + (z-1)\,h(z)} - 1 = (z-1)\,\frac{h'(z)\,(z-1) - h(z)}{1 + (z-1)\,h(z)}$$

θέτουμε

$$k(z) = \frac{h'(z)\,(z-1) - h(z)}{1 + (z-1)\,h(z)}$$

η οποία είναι αναλυτική στην περιοχή του 1. Αντικαθιστούμε την σχέση αυτή στη (1) και έχουμε

$$G(z) = -\frac{g(z)}{z} + k(z).$$

Επομένως η G είναι αναλυτική στο σημείο $z = 1$. □

Θεώρημα 3.4.2. (*Touberian*) *Έστω F φραγμένη και κατά τμήματα συνεχής συνάρτηση στο $[0, \infty)$ και ότι η συνάρτηση*

$$G(z) = \int_0^\infty F(t) e^{-zt} dt$$

υπάρχει και είναι αναλυτική στο σύνολο

$$\{z \in \mathbb{C} : Re(z) > 0\}.$$

Έστω επίσης ότι η G μπορεί να επεκταθεί αναλυτικά στο $Re(z) \geq 0$. Τότε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^\infty F(t) dt$$

υπάρχει και είναι ίσο με το $G(0)$. Δηλαδή το ολοκλήρωμα

$$\int_0^\infty F(t) e^{-iyt} dt = G(iy), \ \forall y \in \mathbb{R}.$$

Απόδειξη. Επειδή η G μπορεί να επεκταθεί αναλυτικά στο $Re(z) \geq 0$ αυτό σημαίνει ότι για κάθε z_0 για το οποίο $Re(z_0) = 0$ υπάρχει μια ανοικτή περιοχή που περιέχει το z_0 και στη οποία η G είναι αναλυτική. Δηλαδή υπάρχει ένα U ανοικτό σύνολο που περιέχει την ευθεία $Re(z) = 0$ και η G θα είναι αναλυτική στο $U \cup \{z \in \mathbb{C} : Re(z) > 0$. Επίσης η F είναι φραγμένη, αυτό σημαίνει ότι θα υπάρχει ένα $M > 0$ πεπερασμένο τ.ω
$|F(t)| \leq M, \ \forall t > 0.$
Θεωρούμε $0 < \lambda < \infty$ και ορίζουμε

$$G_\lambda(z) = \int_0^\lambda F(t) e^{-zt} dt$$

το ολοκλήρωμα αυτό υπάρχει επειδή η F είναι κατά τμήματα συνεχής και η συνάρτηση e^{-zt} είναι συνεχής στο $[0, \lambda]$ $\forall z \in \mathbb{C}$ (Βλεπε λήμμα 2.1.1) και είναι αναλυτική στο $\mathbb{C}$ ως άθροισμα αναλυτικών συναρτήσεων.
Για την απόδειξη του θεωρήματος αρκεί να δείξουμε ότι

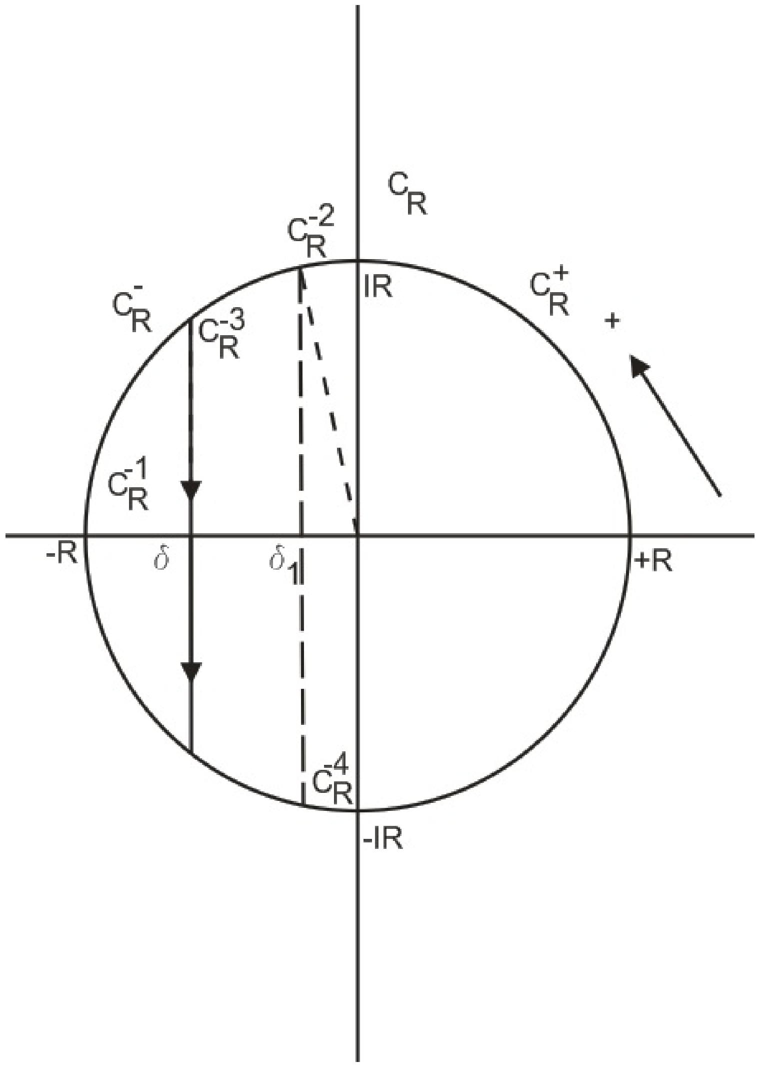
$$\lim_{\lambda \to \infty} G_\lambda(0) = G(0).$$

Για κάθε $R > 0$ επιλέγουμε ένα $0 < \delta(R)$ και τέτοιο ώστε $\delta(R) \to 0$ όταν $R \to \infty$
και θεωρούμε το παρακάτω κλειστό μονοπάτι C_R το οποίο περιέχεται στο ανοικτό σύνολο $U \cup \{z \in \mathbb{C} : Re(z) > 0$ και αποτελείται από δύο τμήματα το

$$C_R^+ = C_R \cap \{z : Re(z) > 0$$

και

$$C_R^- = C_R \cap \{z : Re(z) < 0\}$$



Από τον ολοκληρωτικό τύπο του $Caychy$ (βλέπε θεώρημα 3.1.1) θα έχουμε

$$G(0) - G_\lambda(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} \frac{G(z) - G_\lambda(z)}{z} dz.$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε $z \in C_R^+$ ισχύει:

$$\left|\frac{G(z) - G(z)}{z}\right| = \left|\frac{1}{z}\right| \left|\int_\lambda^\infty F(t) e^{-zt} dt\right| \leq$$

$$\frac{1}{R}\int_\lambda^\infty |F(t)|\, e^{-Re(z)t} dt \leq \frac{M}{R}\int_\lambda^\infty e^{-Re(z)t} dt = \frac{M}{R}\frac{e^{-Re(z)}}{Re(z)} \leq \frac{M}{R}\frac{1}{Re(z)} \quad (1)$$

και το $\lim\limits_{Re(z)\to 0} \dfrac{1}{Re(z)} = \infty$. Για να αποφύγουμε αυτή την δυσκολία μετατρέπουμε κατάλληλα την υποολοκλήρωση συνάρτηση στον ολοκληρωτικό τύπο του $Caychy$.
Θέτουμε λοιπόν

$$\bar{G}(z) = (G(z) - G_\lambda(z))\, e^{\lambda z}\left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)$$

και παρατηρούμε ότι η $\bar{G}$ είναι αναλυτική στο $Re(z) \geq 0$ και πάνω στην καμπύλη C_R επίσης ισχύει ότι

$$\bar{G}(0) = G(0) - G_\lambda(0).$$

Από τον ολοκληρωτικό τύπο του $Caychy$ θα έχουμε

$$\bar{G}(0) = G(0) - G_\lambda(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{\bar{G}(z)}{z}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{\left(G(z) - G_\lambda(z)\right)e^{\lambda z}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)}{z}dz =$$
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\left(G(z) - G_\lambda(z)\right)e^{\lambda z}\left(\frac{1}{z}+\frac{z}{R^2}\right)dz \Rightarrow$$
$$|G(0) - G_\lambda(0)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\left(G(z) - G_\lambda(z)\right)e^{\lambda z}\left(\frac{1}{z}+\frac{z}{R^2}\right)dz\right| \Rightarrow$$
$$|G(0) - G_\lambda(0)| \leq \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R^+}\left(G(z) - G_\lambda(z)\right)e^{\lambda z}\left(\frac{1}{z}+\frac{z}{R^2}\right)dz\right| + \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R^-}\left(G(z) - G_\lambda(z)\right)e^{\lambda z}\left(\frac{1}{z}+\frac{z}{R^2}\right)dz\right| \leq$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_{C_R^+}\left|\left(G(z) - G_\lambda(z)\right)e^{\lambda z}\left(\frac{1}{z}+\frac{z}{R^2}\right)dz\right| + \frac{1}{2\pi}\int_{C_R^2}\left|\left(G(z) - G_\lambda(z)\right)e^{\lambda z}\left(\frac{1}{z}+\frac{z}{R^2}\right)dz\right| \qquad (2).$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε $z \in C_R^+$ ισχύει ότι

$$\left|\frac{1}{z}+\frac{z}{R^2}\right| = \left|\frac{\bar{z}}{|z|^2}+\frac{z}{R^2}\right| = 2\frac{Re(z)}{R^2}.$$

Άρα για το πρώτο ολοκλήρωμα της σχέσης (2) και με την βοήθεια της σχέσης (1)θα έχουμε

$$\frac{1}{2\pi}\int_{C_R^+}\left|\left(G(z) - G_\lambda(z)\right)e^{\lambda z}\left(\frac{1}{z}+\frac{z}{R^2}\right)dz\right| \leq \frac{1}{2\pi}\frac{M}{Re(z)}e^{-\lambda Re(z)}e^{\lambda Re(z)}\frac{2Re(z)}{R^2}\pi R = \frac{M}{R}.$$

Θα βρούμε τώρα μια ανίσωση για το δεύτερο ολοκλήρωμα της σχέσης (2) έχουμε λοιπόν

$$\frac{1}{2\pi}\int_{C_R^2}\left|\left(G(z) - G_\lambda(z)\right)e^{\lambda z}\left(\frac{1}{z}+\frac{z}{R^2}\right)dz\right| \leq$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_{C_R^{-2}}\left|G(z)e^{\lambda z}\left(\frac{1}{z}+\frac{z}{R^2}\right)dz\right| + \frac{1}{2\pi}\int_{C_R^{-2}}\left|G_\lambda(z)e^{\lambda z}\left(\frac{1}{z}+\frac{z}{R^2}\right)dz\right| = N_1(R) + N_2(R).$$

Θα υπολογίσουμε πρώτα το $N_2(R)$, αλλα πρώτα θα κάνουμε κάποιες παρατηρήσεις. Επειδή η συνάρτηση G_λ είναι αναλυτική στο $Re(z) < 0$ τότε θα είναι αναλυτική και η συνάρτηση

$$G_\lambda(z)e^{\lambda(z)}\left(\frac{1}{z}+\frac{z}{R}\right).$$

Άρα θα έχουμε ότι

$$\int_{C_R^{-1}} G_\lambda(z)e\lambda(z)\left(\frac{1}{z}+\frac{z}{R}\right)dz = 0 \Rightarrow$$

$$\int_{C_R^-} G_\lambda(z)e\lambda(z)\left(\frac{1}{z}+\frac{z}{R}\right)dz = \int_{C_R^{-2}} G_\lambda(z)e\lambda(z)\left(\frac{1}{z}+\frac{z}{R}\right)dz.$$

Με βάση αυτό για το $N_2(R)$ έχουμε:

$$N_2(R) = \frac{1}{2\pi}\int_{C_R^{-2}}\left|G_\lambda(z)e^{\lambda z}\left(\frac{1}{z}+\frac{z}{R^2}\right)dz\right| =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{C_R^-}\left|G_\lambda(z)e^{\lambda(z)}\left(\frac{1}{z}+\frac{z}{R}\right)dz\right| \leq \frac{1}{2\pi}\frac{M}{|Re(z)|}e^{-\lambda Re(z)}e^{\lambda Re(z)}2\frac{|Re(z)|}{R^2}\pi R = \frac{M}{R}.$$

Θα υπολογίσουμε τώρα το $N_1(R)$, παρατηρούμε ότι επειδή η G επεκτείνεται αναλυτικά στο $Re(z) \geq 0$ θα είναι φραγμένη στο συμπαγές C_R^{-2} και έστω M_R' το άνω φράγμα. Επιλέγουμε ένα δ_1 με $0 < \delta_1 < \delta$ και σπάμε το $N_1(R)$ στα δύο παρακάτω μέροι

$$C_R^{-3} = C_R^{-2} \cap \{z \in \mathbb{C} : Re(z) < -\delta_1\}, \quad C_R^{-4} = C_R^{-2} \cap \{z \in \mathbb{C} : Re(z) \geq \delta_1\}$$

και θα έχουμε:

$$N_1(R) \leq \frac{1}{2\pi}\int_{C_R^{-3}}\left|G(z)e^{\lambda z}\left(\frac{1}{z}+\frac{z}{R^2}\right)dz\right| + \frac{1}{2\pi}\int_{C_R^{-4}}\left|G(z)e^{\lambda z}\left(\frac{1}{z}+\frac{z}{R^2}\right)dz\right|.$$

Αλλά

$$\frac{1}{2\pi}\int_{C_R^{-3}}\left|G(z)e^{\lambda z}\left(\frac{1}{z}+\frac{z}{R^2}\right)dz\right| \leq \frac{M'}{2\pi}e^{-\lambda\delta_1}\left(\frac{1}{\delta_1}+\frac{\delta_1}{R^2}\right)\pi R$$

και παρατηρούμε ότι για κάποιο σταθερό $R > 0$ το ολοκλήρωμα αυτό τείνει στο μηδέν όταν το λ τείνει στο άπειρο.

Για το δεύτερο ολοκλήρωμα έχουμε

$$\frac{1}{2\pi}\int_{C_R^{-4}}\left|G(z)e^{\lambda z}\left(\frac{1}{z}+\frac{z}{R^2}\right)dz\right| \leq$$

$$\frac{M_R'}{2\pi}1\left(\frac{1}{R}+\frac{R}{R^2}\right)R2Arcsin\left(\frac{\delta_1}{R}\right) = 2\frac{M_R'}{\pi}Arcsin\left(\frac{\delta_1}{R}\right).$$

Άρα για το δεύτερο ολοκλήρωμα της σχέσης (2) θα έχουμε ότι

$$\frac{1}{2\pi}\int_{C_R^2}\left|\left(G(z)-G_\lambda(z)\right)e^{\lambda z}\left(\frac{1}{z}+\frac{z}{R^2}\right)dz\right| \leq 2\frac{M_R'}{\pi}Arcsin\left(\frac{\delta_1}{R}\right) + \frac{M_R'}{2\pi}e^{-\lambda\delta_1}\left(\frac{1}{\delta_1}+\frac{\delta_1}{R^2}\right)\pi R + \frac{M}{R}.$$

Αντικαθιστούμε τα αποτελέσματα αυτά στην σχέση (2) και έχουμε ότι

$$|G(0)-G_\lambda(0)| \leq 2\frac{M}{R} + 2\frac{M_R'}{\pi}Arcsin\left(\frac{\delta_1}{R}\right) + \frac{M_R'}{2\pi}e^{-\lambda\delta_1}\left(\frac{1}{\delta_1}+\frac{\delta_1}{R^2}\right)\pi R$$

σταθεροποιούμε ένα $R > 0$ και πέρνουμε το όριο για $\lambda \to \infty$ και έχουμε

$$\lim_{\lambda\to\infty}|G(0)-G_\lambda(0)| \leq 2\frac{M}{R} + 2\frac{M_R'}{\pi}Arcsin\left(\frac{\delta_1}{R}\right)$$

και επειδή η παραπάνω σχέση ισχύει για κάθε $R > 0$ παίρνουμε το όριο για $R \to \infty$ και έχουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα. (Εφόσον το δ_1 εξαρτάται από το R μπορούμε να θέσουμε $\delta_1 = \dfrac{1}{M_R'R}$) $\square$

Πόρισμα 3.4.2. Το ολοκλήρωμα

$$\int_0^\infty (k(u)-1)\,du$$

συγκλίνει.

Απόδειξη. Επειδή η G ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος 3.4.2 συνεπάγεται ότι το ολοκλήρωμα

$$\int_0^\infty (k(u)-1)\,du = G(1)$$

και επομένως θα συγκλίνει. □

Θεώρημα 3.4.3. *(Το Θεώρημα των Πρώτων Αριθμών)*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}} = 1$$

Απόδειξη. Από το λήμμα 3.4.1 αρκεί να δείξουμε ότι $\lim_{u\to\infty} k(u) = 1$ ή $\lim_{x\to\infty}\frac{\psi(x)}{x} = 1$. Από το προηγούμενο πόρισμα γνωρίζουμε ότι το ολοκλήρωμα

$$\int_0^\infty (k(u)-1)\,du$$

συγκλίνει και παρατηρούμε ότι

$$\int_0^\infty (k(u)-1)\,du = \int_0^\infty \big(\psi(e^u)e^{-u}-1\big)\,du = \int_1^\infty \frac{\psi(t)-t}{t^2}dt$$

όπου θέσαμε $x = e^u$
Από το θεώρημα του *Cauchy* θα έχουμε ότι για $x_1 < x_2$

$$\lim_{x_1,x_2\to\infty}\int_{x_1}^{x_2}\frac{\psi(t)-t}{t^2}dt = 0$$

Ας υποθέσουμε ότι για κάθε $x > 0$ και αρκετά μεγάλο

$$\frac{\psi(x)}{x} > 1+\epsilon$$

για κάποιο $\epsilon > 0$ τότε

$$\int_x^{(1+\epsilon)x}\frac{\psi(t)-t}{t^2}dt \geq \int_x^{(1+\epsilon)x}\frac{(1+\epsilon)x-t}{t^2}dt = \int_1^{1+\epsilon}\frac{1+\epsilon-u}{u^2}du > 0$$

όπου θέσαμε $u = \frac{t}{x}$ και παίρνοντας το όριο για $x\to\infty$ καταλήγουμε σε άτοπο από το θεώρημα του *Cauchy*. Ομοίως για $\psi(x) < 1-\epsilon$ θα έχουμε

$$\int_{(1-\epsilon)x}^{x}\frac{\psi(t)-t}{t^2}dt \leq \int_{(1-\epsilon)x}^{x}\frac{(1-\epsilon)x-t}{t^2}dt = \int_{1-\epsilon}^{1}\frac{1-\epsilon-u}{u^2} < 0$$

καταλήγουμε σε άτοπο και επομένως θα πρέπει

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\psi(x)}{x} = 1.$$

□

Αναφορές

[1] Δημήτριος Μπετσάκος, Εισαγωγή στην Πραγματική Ανάλυση, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Τμήμα Μαθηματικών, Θεσσαλονίκη 2005.

[2] Δημήτριος Στρατηγόπουλος, Πραγματική Ανάλυση 2, Πανεπιστήμιο Πατρών, Τμήμα Μαθηματικών, Πάτρα 2002.

[3] *RobertE. Green and StevenG. Krantz*, *Fuction Theory of One Complex Variable.*

[4] *Elias M.Stein and Rami Shakarchi*, *Complex Analysis*, *Prinseton University Press*, *Prinseton and Oxford*, 20 *October* 2007.

[5] *L.Ahlfors*, *Complex Analysis*, 3*rd Edition*, *McGraw – Hill*, *New York*, 1979.

[6] Νικόλαος Κ. Αρτεμιάδης, Μιγαδική Ανάλυση.

[7] *Matt Baker and Dennis Clark*, *Prime Number Theorem Lecture Notes*, 6 *January*, 2002.

[8] *D. Zagier*, *Short Proof of the Prime Number Theorem*, *American Math. October* 1997. *pp.* 705 – 708.