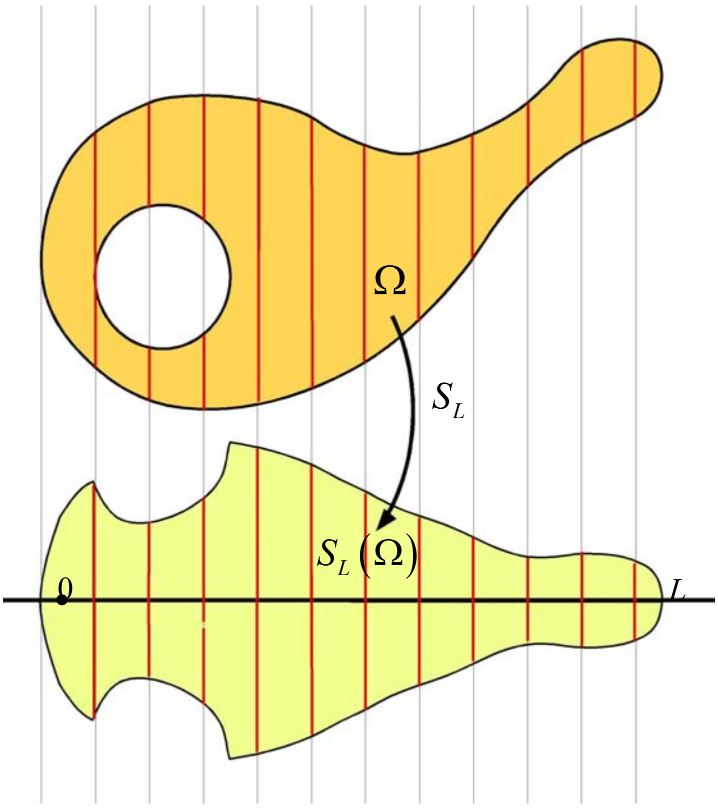
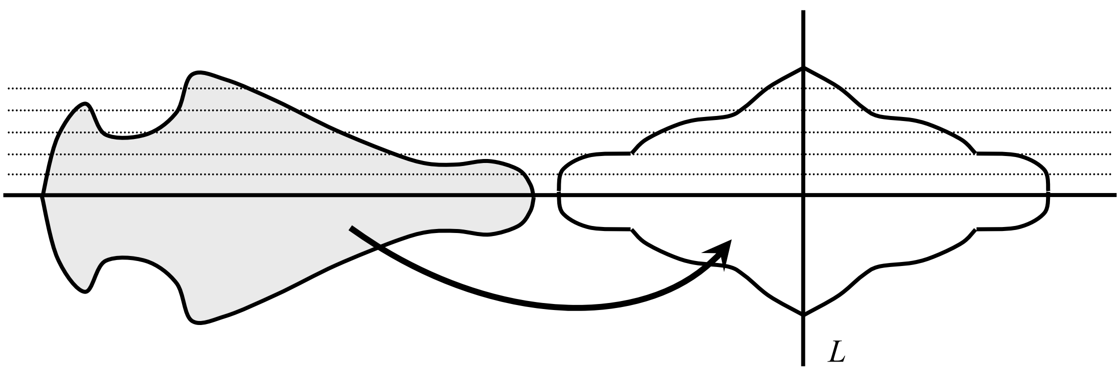
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ





Διπλωματική Εργασία για Μ.Δ.Ε. στα Θεωρητικά Μαθηματικά

ΝΙΚΟΛΙΝΑ Δ. ΚΑΒΑΛΙΕΡΑΤΟΥ

Επιβλέπων Καθηγητής: Αθανάσιος Κοτσιώλης

ΠΑΤΡΑ 2011

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η μετάλλαξη των συναρτήσεων είναι το κυρίως θέμα της παρούσας εργασίας που συνδυάζει τη γεωμετρία με τη θεωρία μέτρου και την ανάλυση με έναν ουσιώδη τρόπο. Δεδομένης μιας πραγματικής συνάρτησης f που ορίζεται σε ένα υποσύνολο Ω του $\mathbb{R}^n$, κατασκευάζεται μία καινούρια συνάρτηση f^*, η οποία έχει σημαντικές ιδιότητες. Οι εφαρμογές των θεωρημάτων που προκύπτουν είναι πολλές και ιδιαίτερα σημαντικές.

Ένα από τα βασικότερα θεωρήματα είναι η ανισότητα Hardy-Littlewood-Sobolev που αποδεικνύεται με τη βοήθεια της συμμετρικοποίησης. Στο θεώρημα αυτό έχουμε ότι οι συναρτήσεις που ελαχιστοποιούν αυτήν την ανισότητα και την καθιστούν ισότητα (ονομάζονται ακραίες συναρτήσεις) είναι σφαιρικά συμμετρικές συναρτήσεις. Επίσης, μία πολύ ενδιαφέρουσα και σημαντική εφαρμογή της συμμετρικοποίησης είναι η γνωστή ισοπεριμετρική ανισότητα (δηλαδή η μπάλα έχει την ελάχιστη επιφάνεια μεταξύ όλων των σωμάτων δοσμένου όγκου).

Στο κεφάλαιο 1 παρουσιάζονται κάποιες απαραίτητες έννοιες, ορισμοί και θεωρήματα από τη θεωρία μέτρου και ολοκλήρωσης, καθώς χρησιμοποιούνται συχνά στους ορισμούς και τις αποδείξεις των θεωρημάτων που αναπτύσσονται.

Στο κεφάλαιο 2 παρουσιάζεται η φθίνουσα μετάλλαξη συναρτήσεων που ορίζονται σε υποσύνολα Ω του $\mathbb{R}^n$. Θεωρώντας μια πραγματική συνάρτηση σε ένα τέτοιο σύνολο, κατασκευάζουμε μια νέα συνάρτηση, η οποία έχει πεδίο ορισμού τη μπάλα με κέντρο την αρχή των αξόνων, η οποία έχει το ίδιο μέτρο (όγκο) με το Ω και η νέα συνάρτηση έχει σημαντικές ιδιότητες. Γενικά, επιθυμούμε η νέα συνάρτηση να είναι ακτινική και ακτινικά φθίνουσα. Για να δοθεί ο ορισμός αυτός, πρώτα κατασκευάζουμε τη μονοδιάστατη φθίνουσα μετάλλαξη της δοσμένης συνάρτησης.

Στο κεφάλαιο 3 παρουσιάζονται ανισότητες για μεταλλαγμένες συναρτήσεις μεταξύ των οποίων η γνωστή ανισότητα του Riesz και η αναφερθείσα σημαντική ανισότητα Hardy- Littlewood-Sobolev.

Στο κεφάλαιο 4 δίνεται η συμμετρικοποίηση Steiner με μία πιο γεωμετρική σκοπιά καθώς ένα από τα πιο σημαντικά αποτελέσματά της είναι η γνωστή ισοπεριμετρική ανισότητα και άλλες πολύ ενδιαφέρουσες εφαρμογές.

Στο σημείο αυτό, θα ήθελα να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου και τις ειλικρινείς ευχαριστίες μου στον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Αθανάσιο Κοτσιώλη για την πολύτιμη βοηθειά του, την καθοδήγησή του, την υπομονή του και τη στήριξή του τόσο σε επιστημονικό όσο και σε ψυχολογικό επίπεδο.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή κ. Βασίλειο Παπαντωνίου για τις πολύτιμες συμβουλές του κατά τη διάρκεια των προπτυχιακών αλλά και των μεταπτυχιακών σπουδών μου.

Δε θα μπορούσα επίσης να μην ευχαριστήσω τον επίκουρο καθηγητή κ. Ανδρέα Αρβανιτογεώργο για τις εύστοχες παρατηρήσεις του, το ενδιαφέρον του και τις πολύτιμες συμβουλές του.

Κλείνοντας, ευχαριστώ την οικογένεια μου που πάντα με στηρίζει με οποιονδήποτε τρόπο και με οποιοδήποτε τίμημα σε όλη μου τη ζωή και βέβαια ευχαριστώ τον άνθρωπο της ζωής μου Θάνο για τη δική του υπομονή και τη βοήθειά του.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

1.1 Μέτρο και ολοκλήρωση

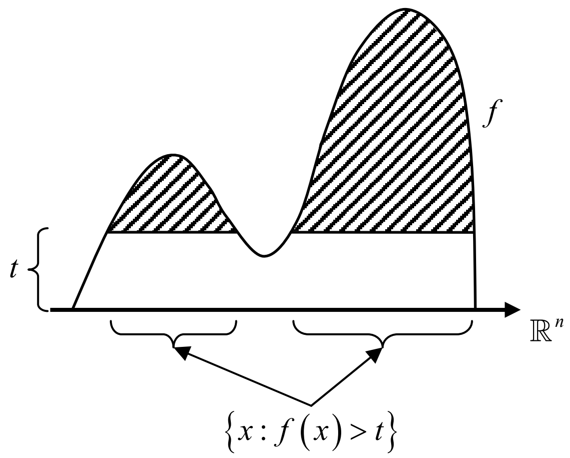
Ορισμός 1.1.1

Έστω $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ (όπου $\mathbb{K}$ είναι το $\mathbb{R}$ ή το $\mathbb{C}$) συνεχής συνάρτηση. Ο **φορέας** (support) της f είναι το κάλυμμα του συνόλου των $x \in \mathbb{R}^n$, στα οποία η $f(x)$ είναι μη μηδενική, δηλαδή το κάλυμμα του συνόλου $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}$ και συμβολίζεται με $\operatorname{supp}\{f\}$.

Ορισμός 1.1.2

Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ και $f:\Omega \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση. Ορίζουμε το **σύνολο στάθμης** της f το σύνολο:

$$S_f(t) := \{x \in \Omega : f(x) > t\}.$$



Ορισμός 1.1.3

Μια πραγματική συνάρτηση f καλείται **κάτω ημισυνεχής**, αν το σύνολο στάθμης της f, $S_f(t) := \{x \in \Omega : f(x) > t\}$ είναι ανοικτό και **άνω ημισυνεχής** αν το σύνολο $\{x \in \Omega : f(x) < t\}$ είναι ανοικτό.

Ορισμός 1.1.4

Έστω Σ μία διακεκριμένη συλλογή, υποσυνόλων του $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Η συλλογή Σ καλείται **Σ-άλγεβρα** αν ικανοποιούνται τα ακόλουθα αξιώματα:

1. Αν $A \in \Sigma$ τότε $A^c \in \Sigma$, όπου $A^c = \Omega \setminus A$.
2. Αν $A_1, A_2, \ldots \in \Sigma$ τότε $\cup_{\iota=1}^{\infty} A_\iota \in \Sigma$.
3. $\Omega \in \Sigma$.

Ορισμός 1.1.5

Έστω F μία οικογένεια υποσυνόλων του Ω. Θεωρούμε τις Σ-άλγεβρες που περιέχουν την F και παίρνουμε την τομή τους την οποία καλούμε Σ και είναι επίσης Σ-άλγεβρα. Μάλιστα είναι η μικρότερη Σ-άλγεβρα που περιέχει την F και ονομάζεται **Σ-άλγεβρα παραγόμενη από την F**. Ένα σημαντικό παράδειγμα είναι η **Σ-άλγεβρα** B, των συνόλων Borel του $\mathbb{R}^n$, η οποία προκύπτει από τα ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$, με άλλα λόγια η Σ-άλγεβρα B παράγεται από ανοιχτές μπάλες του $\mathbb{R}^n$.

Ορισμός 1.1.6

Ένα **μέτρο μ** ή **θετικό μέτρο μ**, ορισμένο πάνω σε μία Σ-άλγεβρα, λέγεται μία συνάρτηση από το Σ στους μη αρνητικούς πραγματικούς αριθμούς και τέτοια ώστε:

1. $\mu(\varnothing) = 0$
2. Αν $A_1, A_2, \ldots$ είναι μια ακολουθία ξένων συνόλων στην Σ, τότε

$\mu\left(\cup_{\iota=1}^{\infty} A_\iota\right) = \sum_{\iota=1}^{\infty} \mu(A_\iota)$ (αριθμήσιμη προσθετικότητα).

Ορισμός 1.1.7

Αν η Σ-άλγεβρα είναι η Σ-άλγεβρα B των συνόλων Borel του $\mathbb{R}^n$ τότε το μέτρο μ λέγεται **μέτρο Borel** και τα στοιχεία του Σ λέγονται **μετρήσιμα σύνολα**.

Ορισμός 1.1.8

Έστω $f:\Omega\to\mathbb{K}$ είναι μια συνάρτηση επί του Ω και Σ μια Σ-άλγεβρα. Η f καλείται **Σ-μετρήσιμη συνάρτηση** αν για κάθε t το σύνολο στάθμης $S_f(t):=\{x\in\Omega: f(x)>t\}$ είναι μετρήσιμο.

Ορισμός 1.1.9

Μετρήσιμος χώρος λέγεται η τριάδα (Ω,Σ,μ)που αποτελείται από ένα σύνολο Ω, μία Σ-άλγεβρα και ένα μέτρο μ.

Ορισμός 1.1.10

Έστω (Ω,Σ,μ) μετρήσιμος χώρος. Ο χώρος (Ω,Σ,μ) καλείται **Σ-πεπερασμένος** αν υπάρχει αριθμήσιμο πλήθος συνόλων $\mathrm{A}_1,\mathrm{A}_2,\ldots$ τέτοιο ώστε $\mu(\mathrm{A}_i)<\infty$ για κάθε $i=1,2,\ldots$ και τέτοιο ώστε $\Omega=\cup_{i=1}^{\infty}\mathrm{A}_i$.

Ορισμός 1.1.11

Έστω (Ω,Σ,μ) μετρήσιμος χώρος. Έστω $\mathrm{A}_1,\mathrm{A}_2,\ldots,\mathrm{A}_n\in\Sigma$, ακολουθία μετρήσιμων συνόλων, και $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ ακολουθία πραγματικών ή μιγαδικών αριθμών. Αν χ_{A_i} συμβολίζει την χαρακτηριστική συνάρτηση ορισμένη στο σύνολο A_i τότε **απλή** συνάρτηση ονομάζεται μια συνάρτηση $f:\Omega\to\mathbb{K}$ η οποία ορίζεται από την σχέση

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}a_k\chi_{\mathrm{A}_k}(x)$$

Ορισμός 1.1.12

Έστω $f:\Omega\to\mathbb{R}$, μη αρνητική, πραγματική, Σ-μετρήσιμη συνάρτηση στο Ω. Ορίζουμε $F_f(t)=\mu\left(S_f(t)\right)$.

Δηλαδή $F_f(t)$ είναι το μέτρο του συνόλου στάθμης της f. Η $F_f(t)$ μια μη αύξουσα συνάρτηση του t αφού $S_f(t_1)\subset S_f(t_2)$ όταν $t_1\geq t_2$.

Ισχύει ότι $\int_{\Omega} f(x)\mu(dx)=\int_0^{\infty}F_f(t)\,dt$

Η f καλείται **ολοκληρώσιμη** αν $\int_{\Omega} f(x)\mu(dx) < \infty$.

Μια εξήγηση του ορισμού 1.1.12 προκύπτει από τη συνάρτηση σκαλοπάτι του Heaviside

$$\Theta(s) = \begin{cases} 1, & \alpha\nu\ s > 0 \\ 0, & \alpha\nu\ s \le 0 \end{cases}.$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} F_f(t)dt &= \int_0^{\infty} \left\{ \int_{\Omega} \Theta\big(f(x) - t\big)\mu(dx) \right\} dt = \\ &= \int_{\Omega} \left\{ \int_0^{f(x)} dt \right\} \mu(dx) \\ &= \int_{\Omega} f(x)\mu(dx)). \end{aligned}$$

Ορισμός 1.1.13

Έστω $y \in \mathbb{R}^n$ τυχαίο αλλά σταθερό σημείο. Το **δ-μέτρο του Dirac** ορίζεται ως εξής:

$$\delta_y(A) = \begin{cases} 1, & \alpha\nu\ y \in A \\ 0, & \alpha\nu\ y \notin A \end{cases}.$$

Με άλλα λόγια, $\delta_y(A) = \chi_A(y)$.

Θεώρημα 1.1.1 (Μονότονης σύγκλισης)

Έστω $f^1, f^2, \ldots$ μια αύξουσα ακολουθία ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στον (Ω, Σ, μ) με $f(x) = \lim_{j\to\infty} f^j(x)$ και $I = \lim_{j\to\infty} I_j$, όπου $I_j = \int_{\Omega} f^j d\mu$. Τότε η f είναι μετρήσιμη και επιπλέον το I είναι πεπερασμένο αν και μόνο αν η f είναι ολοκληρώσιμη. Επιπλέον ισχύει η σχέση:

$$\lim_{j\to\infty} \int_{\Omega} f^j(x)\mu(dx) = \int_{\Omega} \lim_{j\to\infty} f^j(x)\mu(dx).$$

Το αριστερό μέλος της σχέσης είναι $+\infty$ όταν η f δεν είναι ολοκληρώσιμη.

Λήμμα 1.1.1 (Fatou)

Έστω $f^1, f^2, \ldots$ μια ακολουθία μη αρνητικών, ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στον (Ω, Σ, μ). Τότε η $f(x) = \liminf_{j\to\infty} f^j(x)$ είναι μετρήσιμη και ισχύει η ανισότητα:

$$\liminf_{j\to\infty} \int_{\Omega} f^j(x)\mu(dx) \geq \int_{\Omega} f(x)\mu(dx),$$

Με την παρατήρηση ότι το πεπερασμένο μέγεθος του αριστερού μέλους συνεπάγεται ότι, η f είναι ολοκληρώσιμη.

Θεώρημα 1.1.2 (Κυρίαρχης σύγκλισης)

Έστω $f^1, f^2, \ldots$ μια ακολουθία μιγαδικών, ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στον (Ω, Σ, μ) και έστω ότι συγκλίνουν σημειακά σε μία συνάρτηση f σχεδόν παντού. Αν υπάρχει μία ολοκληρώσιμη μη αρνητική συνάρτηση $G(x)$ στον (Ω, Σ, μ) τέτοια ώστε

$$\left|f^j(x)\right| \leq G(x) \text{ για κάθε } j = 1,2,3,\ldots$$

τότε

$$\left|f(x)\right| \leq G(x) \text{ και } \lim_{j\to\infty} \int_{\Omega} f^j(x)\,\mu(dx) = \int_{\Omega} f(x)\,\mu(dx).$$

Θεώρημα 1.1.3 (Μέτρο γινόμενο)

Έστω $(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1), (\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$ δύο Σ-πεπερασμένοι μετρήσιμοι χώροι και A ένα μετρήσιμο σύνολο στον $\Sigma_1 \times \Sigma_2$. Για κάθε $x \in \Omega_2$ θέτουμε

$$f(x) = \mu_1(\mathrm{A}_1(x)) \text{ και για κάθε } y \in \Omega_1$$

θέτουμε

$$g(y) = \mu_2(\mathrm{A}_2(y)).$$

Τότε η f είναι Σ_2-μετρήσιμη και η g είναι Σ_1-μετρήσιμη. Επιπλέον ισχύει

$$(\mu_1 \times \mu_2)(\mathrm{A}) := \int_{\Omega_2} f(x)\mu_2(dx) = \int_{\Omega_1} g(y)\mu_1(dy)$$

Το $\mu_1 \times \mu_2$ είναι, το γινόμενο των μέτρων μ_1 και μ_2, ορισμένο από την ως άνω σχέση και το $\mu_1 \times \mu_2$ είναι ένα Σ-πεπερασμένο μέτρο στον $\Sigma_1 \times \Sigma_2$.

Θεώρημα 1.1.4 (Fubini)

Έστω δύο Σ-πεπερασμένοι, μετρήσιμοι χώροι $(\Omega_i, \Sigma_i, \mu_i), i = 1,2$ και έστω f μία $\Sigma_1 \times \Sigma_2$ μετρήσιμη συνάρτηση πάνω στο $\Omega_1 \times \Omega_2$. Αν $f \geq 0$, τότε τα τρία ολοκληρώματα που ακολουθούν είναι μεταξύ τους ίσα (υπό την έννοια ότι μπορεί και όλα να είναι άπειρα):

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x,y)(\mu_1 \times \mu_2)(dxdy),$$

$$\int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(x,y)\mu_2(dy) \right) \mu_1(dx),$$

$$\int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(x,y)\mu_1(dx) \right) \mu_2(dy).$$

Αν η f είναι μιγαδική τότε ισχύουν τα ως άνω αν υποθέσουμε επιπλέον ότι $\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} |f(x,y)|(\mu_1 \times \mu_2)(dxdy) < +\infty$

Θεώρημα 1.1.5 (Αναπαράσταση Layer cake ή Κέικ πολλαπλών στρώσεων)

Έστω ν είναι ένα μέτρο πάνω στα σύνολα Borel της θετικής ημιευθείας $[0,\infty)$ τέτοιο ώστε η συνάρτηση

$$\varphi(t) := \nu([0,t)) \qquad (1.1.1)$$

να είναι πεπερασμένη για κάθε $t > 0$ (σημειώνεται ότι το $\varphi(0) = 0$ και η φ είναι μονότονη αφού είναι μια συνάρτηση Borel μετρήσιμη).

Έστω (Ω, Σ, μ) ένας μετρήσιμος χώρος και f μία τυχούσα μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση πάνω στο Ω. Τότε

$$\int_{\Omega} \phi(f(x))\mu(dx) = \int_0^{\infty} \mu(\{x : f(x) > t\})\nu(dt). \qquad (1.1.2)$$

Ειδικότερα, επιλέγοντας $\nu(dt) = pt^{p-1}dt$ για $p > 0$ έχουμε

$$\int_{\Omega} f(x)^p \mu(dx) = p\int_0^{\infty} t^{p-1}\mu(\{x : f(x) > t\})dt. \qquad (1.1.3)$$

Επιλέγοντας το μ να είναι το $\delta-$ μέτρο Dirac σε κάποιο $x \in \mathbb{R}^n$ και με $p = 1$ ισχύει ότι

$$f(x)=\int_0^{\infty}\chi_{\{f>t\}}(x)\,dt\,. \qquad (1.1.4)$$

Ορισμός 1.1.11

Έστω Ω ένας μετρήσιμος χώρος, με θετικό μέτρο μ και έστω $1\le p<\infty$. Ορίζουμε το σύνολο $L^p(\Omega,d\mu)$ να είναι η ακόλουθη κλάση μετρήσιμων συναρτήσεων:

$$L^p(\Omega,d\mu)=\{f: f:\Omega\to\mathbb{K},\ f\ \mu\text{-μετρήσιμη και } |f|^p\ \mu\text{- ολοκληρώσιμη}.\}$$

Για κάθε $f\in L^p(\Omega)$ ορίζουμε τη **νόρμα**

$$\|f\|_p=\left(\int_{\Omega}|f(x)|^p\,\mu(dx)\right)^{\frac{1}{p}}\,.$$

Επίσης ορίζουμε το σύνολο $L^\infty(\Omega,d\mu)$ ως εξής:

$L^\infty(\Omega,d\mu)=\{f:\Omega\to\mathbb{K}$, όπου η f μ-μετρήσιμη και υπάρχει σταθερά K τέτοια ώστε $|f(x)|\le K$ σχεδόν για κάθε ως προς μ, $x\in\Omega\}$

Με $f\in L^\infty(\Omega)$ ορίζουμε τη νόρμα

$$\|f\|_\infty=\inf\{K:|f(x)|\le K \text{ σχεδόν για κάθε ως προς } \mu,\ x\in\Omega\}.$$

Η παραπάνω ποσότητα καλείται **essential supremun** και συμβολίζεται με $ess\sup_x|f(x)|$.

Ορισμός 1.1.12

Αν f,g είναι δύο συναρτήσεις πάνω στο $\mathbb{R}^n$ τότε, ορίζουμε τη **συνέλιξη** των f,g να είναι η συνάρτηση $f*g$ από τη σχέση

$$f*g(x)=\int_{\mathbb{R}^n}f(x-y)g(y)\,dy\,.$$

Θεώρημα 1.1.6 (Προσέγγιση με C^{∞} - συναρτήσεις)

Έστω j στον $L^1(\mathbb{R}^n)$ με $\int_{\mathbb{R}^n} j = 1$. Για $\varepsilon > 0$ ορίζουμε $j_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n} j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ έτσι ώστε $\int_{\mathbb{R}^n} j_\varepsilon = 1$ και $\|j_\varepsilon\|_1 = \|j\|_1$. Έστω $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ για κάποιο $1 \le p < \infty$ και ορίζουμε τη συνέλιξη $f_\varepsilon := j_\varepsilon * f$.

Τότε

$$f_\varepsilon \in L^p(\mathbb{R}^n) \text{ και } \|f_\varepsilon\|_p \le \|j\|_1 \|f\|_p, \text{ με } \|f_\varepsilon - f\|_p \underset{\varepsilon \to 0}{\to} 0.$$

Αν $j \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, τότε $f_\varepsilon \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ και $D^a f_\varepsilon = (D^a j_\varepsilon) * f$, όπου $D^a f$ συμβολίζει την παράγωγο με την έννοια των κατανομών μιας συνάρτησης f του L^p.

Ορισμός 1.1.13

Έστω $T \in D'(\Omega)$ είναι μια κατανομή ή γενικευμένη συνάρτηση (όπου $D'(\Omega)$ ο δυικός χώρος του $D(\Omega) \equiv C_c^{\infty}(\Omega)$ των συναρτήσεων ελέγχου), και έστω $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ είναι μη αρνητικοί ακέραιοι. Ορίζουμε ως παράγωγο της κατανομής T την συνάρτηση $\left[\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) a_1, ..., \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right) a_n\right] T$, η οποία συμβολίζεται με $D^a T$, από τη δράση της σε κάθε $\varphi \in D(\Omega)$ ως ακολούθως:

$$\left(D^a T\right)\varphi = (-1)^{|a|} T\left(D^a \varphi\right),$$

όπου

$$|a| = \sum_{i=1}^{n} a_i .$$

Το σύμβολο $\partial_i T$, συμβολίζει το $D^a T$ στην ειδική περίπτωση όπου $a_i = 1,\ a_j = 0$ για $i \ne j$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

2.1 Η Φθίνουσα Μετάλλαξη

Η *συμμετρικοποίηση* Schwarz (βλ. §2.3) είναι μια ειδική περίπτωση της *μετάλλαξης (rearrangement)* συναρτήσεων που ορίζονται σε υποσύνολα Ω του $\mathbb{R}^n$. Θεωρώντας μια πραγματική συνάρτηση σε ένα τέτοιο σύνολο, κατασκευάζουμε μια νέα συνάρτηση, με πεδίο ορισμού τη μπάλα με κέντρο την αρχή των αξόνων, και το μέτρο της μπάλας να είναι το ίδιο με το μέτρο του Ω. Γενικά, επιθυμούμε η νέα συνάρτηση να είναι ακτινική και ακτινικά φθίνουσα. Για να δοθεί ο ορισμός αυτός, πρώτα κατασκευάζουμε τη μονοδιάστατη φθίνουσα μετάλλαξη της δοσμένης συνάρτησης.

Έστω $\mathrm{E} \subset \mathbb{R}^n$, με $|\mathrm{E}|$ συμβολίζουμε το n-διάστατο μέτρο Lebesgue του E. Αν $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ είναι ένα φραγμένο, μετρήσιμο σύνολο και $u:\Omega \to \mathbb{R}$ μια μετρήσιμη συνάρτηση τότε για $t \in \mathbb{R}$, έχουμε το σύνολο στάθμης της u

$$\{u > t\} = \{x \in \Omega \mid u(x) > t\}.$$

Τα σύνολα $\{u < t\}, \{u \geq t\}, \{u = t\}$ ορίζονται με ανάλογο τρόπο. Η **συνάρτηση κατανομής της *u*** δίνεται από τη σχέση

$$\mu_u(t) = |\{u > t\}|.$$

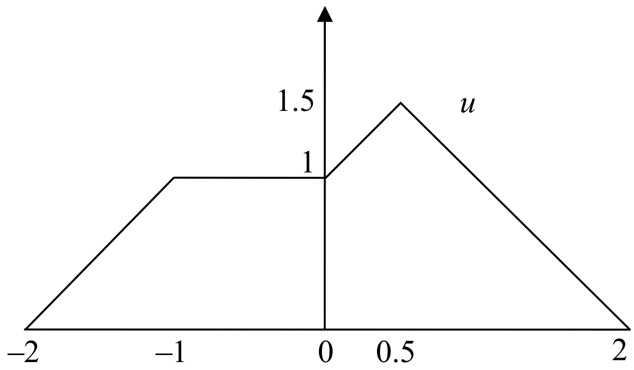
Αυτή η συνάρτηση είναι μονότονα φθίνουσα συνάρτηση του t και για $t \geq ess\sup(u)$, έχουμε ότι $\mu_u(t) = 0$, ενώ για $t \leq ess\inf(u)$, έχουμε ότι $\mu_u(t) = |\Omega|$. Το πεδίο τιμών της μ_u είναι το διάστημα $[0, |\Omega|]$.

Ορισμός 2.1.1

Αν $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ φραγμένο και $u:\Omega \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση, **μονοδιάστατη φθίνουσα μετάλλαξη της *u***, ορίζεται η πραγματική συνάρτηση $u^{\#}$, στο $[0, |\Omega|]$ και έχει τύπο

$$\left.\begin{aligned} u^{\#}(0) &= ess.\sup(u) \\ u^{\#}(s) &= \inf\{t \mid \mu_u(t) < s\}, s > 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2.1.1)$$

Παράδειγμα 2.1.1



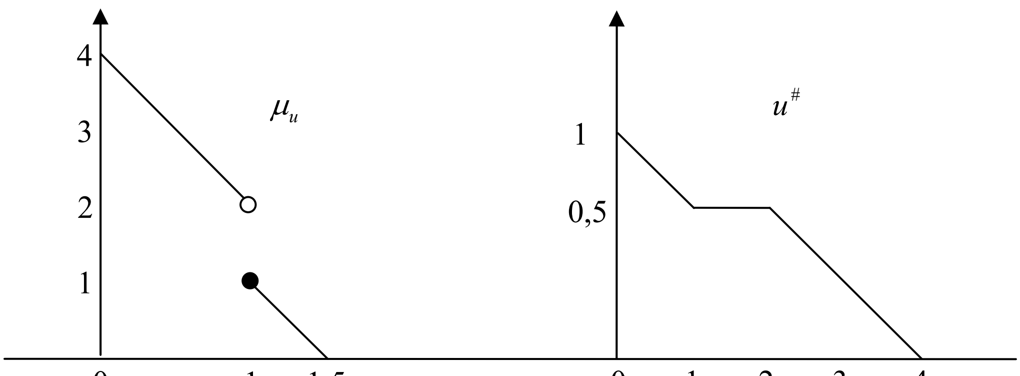
Έστω $\Omega = (-2,2) \subset \mathbb{R}$. Ορίζουμε την συνάρτηση η $u : \Omega \to \mathbb{R}$

$$u(y) = \begin{cases} 2+y, -2 \le y \le -1 \\ 1, -1 \le y \le 0 \\ 1+y, \quad 0 \le y \le 0.5 \\ 2-y, \ 0.5 \le y \le 2 \end{cases}$$

Και κατασκευάζουμε τις συναρτήσεις μ_u και $u^{\#}$ ως εξής:

$$\mu_u(t) = \begin{cases} 4-2t, \ 0 \le t < 1 \\ 3-2t, \ 1 \le t \le 1.5 \\ 0, \ t \ge 1.5 \end{cases}$$

$$u^{\#}(s) = \begin{cases} \dfrac{3-s}{2}, \ 0 \le s \le 1 \\ 1, \ 1 \le s \le 2 \\ \dfrac{4-s}{2}, \ 2 \le s \le 4 \end{cases}$$



Οι ακόλουθες ιδιότητες προκύπτουν από τον ορισμό.

Πρόταση 2.1.1

Έστω $u:\Omega\to\mathbb{R}$ όπου $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ φραγμένο. Τότε η $u^{\#}$ είναι μη αύξουσα και συνεχής από αριστερά.

Απόδειξη: Έστω $s_1<s_2$. Τότε η σχέση $\left|\{u>t\}\right|<s_1$ συνεπάγεται $\left|\{u>t\}\right|<s_2$. Συνεπώς,

$$\left\{t \mid \mu_u(t)<s_1\right\}\subset\left\{t \mid \mu_u(t)<s_2\right\}.$$

Από τον Ορισμό 2.1.1 προκύπτει ότι $u^{\#}(s_1)\geq u^{\#}(s_2)$.

Έστω $s\in(0,|\Omega|)$. Από τον ορισμό της $u^{\#}$, δοθέντος $\varepsilon>0$, υπάρχει ένα t τέτοιο ώστε $u^{\#}(s)\leq t\leq u^{\#}(s)+\varepsilon$ και $\mu_u(t)<s$. Έστω $h>0$ τέτοιο ώστε $\mu_u(t)<s-h<s$. Τότε για κάθε $0<h'\leq h$, έχουμε $\mu_u(t)<s-h'<s$ και έτσι $u^{\#}(s)\leq u^{\#}(s-h')\leq t<u^{\#}(s)+\varepsilon$. Δηλαδή η $u^{\#}$ συνεχής από αριστερά.

Πρόταση 2.1.2

Η απεικόνιση $u\mapsto u^{\#}$ είναι μη φθίνουσα, δηλαδή αν $u\leq \upsilon$ τότε $u^{\#}\leq\upsilon^{\#}$, όπου οι u,v είναι πραγματικές συναρτήσεις ορισμένες στο Ω.

Απόδειξη: Αφού $\{u>t\}\subset\{\upsilon<t\}$, έχουμε ότι $\left\{t \mid \left|\{\upsilon>t\}\right|<s\right\}\subset\left\{t \mid \left|\{u>t\}\right|<s\right\}$ οπότε το αποτέλεσμα προκύπτει από τον ορισμό.

Ορισμός 2.1.2

Δύο πραγματικές συναρτήσεις (που μπορεί να έχουν διαφορετικό πεδίο ορισμού) καλούνται **ισομετρήσιμες** αν έχουν την ίδια συνάρτηση κατανομής. Οι ισομετρήσιμες συναρτήσεις λέγονται **μετάλλαξη** η μια της άλλης.

Πρόταση 2.1.3

Οι συναρτήσεις $u:\Omega \to \mathbb{R}$ και $u^{\#}:\left[0,|\Omega|\right] \to \mathbb{R}$ είναι ισομετρήσιμες, δηλαδή για κάθε t ισχύει ότι

$$\left|\{u > t\}\right| = \left|\{u^{\#} > t\}\right|. \quad (2.1.2)$$

Απόδειξη: Αν $u^{\#}(s) > t$ τότε από τον ορισμό προκύπτει ότι $\left|\{u > t\}\right| \geq s$.

Έτσι, $\left\{s \mid u^{\#}(s) > t\right\} \subset \left\{s \mid \left|\{u > t\}\right| \geq s\right\}$.

Αφού η $u^{\#}$ είναι μη αύξουσα, έχουμε

$$\left|\{u^{\#} > t\}\right| = \sup\left\{s \mid u^{\#}(s) > t\right\} \leq \left|\{u > t\}\right|. \qquad (2.1.3)$$

Έστω ότι $\left|\{u^{\#} \geq t\}\right| = s$. Η $u^{\#}$ είναι συνεχής από αριστερά και μη αύξουσα άρα, $u^{\#}(s) = t$. Τότε από τον ορισμό $\left|\{u > t\}\right| \leq s$. Έτσι,

$$\left|\{u > t\}\right| \leq \left|\{u^{\#} \geq t\}\right|. \quad (2.1.4)$$

Εφαρμόζοντας τις σχέσεις $(2.1.3)$ και $(2.1.4)$ για $t+h$, έχουμε

$$\left|\{u^{\#} > t+h\}\right| \leq \left|\{u > t+h\}\right| \leq \left|\{u^{\#} \geq t+h\}\right|.$$

Παίρνοντας το όριο καθώς $h \to 0$ έχουμε

$$\left|\{u^{\#} > t\}\right| \leq \left|\{u > t\}\right| \leq \left|\{u^{\#} > t\}\right|.$$

Πόρισμα 2.1.1

Σύμφωνα με τους προηγούμενους συμβολισμούς ισχύουν τα εξής

$$\left.\begin{array}{l} \left|\{u > t\}\right| = \left|\{u^{\#} > t\}\right| \\ \left|\{u \geq t\}\right| = \left|\{u^{\#} \geq t\}\right| \\ \left|\{u < t\}\right| = \left|\{u^{\#} < t\}\right| \\ \left|\{u \leq t\}\right| = \left|\{u^{\#} \leq t\}\right| \end{array}\right\} \quad (2.1.5)$$

Πόρισμα 2.1.2

Αν $u \geq 0$ και $u \in L^p(\Omega)$ για $1 \leq p \leq \infty$, τότε $u^\# \in L^p\left(\left(0,|\Omega|\right)\right)$ και

$$\|u\|_{p,\Omega} = \|u^\#\|_{p,(0,|\Omega|)}.$$

Απόδειξη: Αν $p = \infty$, το αποτέλεσμα περιέχεται στον ορισμό της μετάλλαξης. Έστω $1 \leq p < \infty$. Από την ισομετρησιμότητα, οι $u, u^\#$ έχουν την ίδια συνάρτηση κατανομής μ και αφού είναι μη αρνητικές, έχουμε λόγω του θεωρήματος Fubini ότι

$$\|u\|_{p,\Omega}^p = p\int_0^\infty t^{p-1}\mu(t)\,dt = \|u^\#\|_{p,(0,|\Omega|)}^p.$$

Θεώρημα 2.1.1

Έστω $u:\Omega \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη, και $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια μη αρνητική Borel μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε

$$\int_\Omega F\left(u(x)\right)dx = \int_0^{|\Omega|} F\left(u^\#(s)\right)ds. \qquad (2.1.6)$$

Απόδειξη: Έστω $\mathrm{E} = [t,\infty)$ και $F(\xi) = \chi_{\mathrm{E}}(\xi)$, όπου χ_{E} είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση του E. Τότε,

$$\int_\Omega F\left(u(x)\right)dx = \left|\{u \geq t\}\right| = \left|\{u^\# \geq t\}\right| = \int_0^{|\Omega|} F\left(u^\#(s)\right)ds.$$

Το αποτέλεσμα ισχύει και όταν το E είναι οποιοδήποτε διάστημα, είτε ανοικτό σύνολο, είτε σύνολο Borel. Επίσης, ισχύει για οποιαδήποτε μη αρνητική απλή συνάρτηση F. Όταν η F είναι μια μη αρνητική συνάρτηση Borel, τότε αυτή μπορεί να εκφραστεί σαν όριο μίας αύξουσας ακολουθίας $\{F_n\}$, μη αρνητικών απλών συναρτήσεων. Δηλαδή, για κάθε n έχουμε

$$\int_\Omega F_n\left(u(x)\right)dx = \int_0^{|\Omega|} F_n\left(u^\#(s)\right)ds. \qquad (2.1.7)$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα μονότονης σύγκλισης περνάμε στο όριο, καθώς το $n \to \infty$, και βρίσκουμε την $(2.1.6)$.

Πόρισμα 2.1.3

Έστω $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση Borel και $u:\Omega\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $F\circ u\in L^1(\Omega)$. Τότε $F\circ u^{\#}\in L^1\left(\left(0,|\Omega|\right)\right)$ και ισχύει η $(2.1.6)$.

Απόδειξη: Η F γράφεται $F=F^{+}-F^{-}$ όπου οι F^{+},F^{-} είναι μη αρνητικές συναρτήσεις Borel και η $(2.1.6)$ ισχύει για κάθε μία από αυτές. Αν $F\circ u\in L^1(\Omega)$, τότε τα ολοκληρώματα $\int_\Omega F^{+}\left(u(x)\right)dx, \int_\Omega F^{-}\left(u(x)\right)dx$ είναι πεπερασμένα, οπότε με αφαίρεση παίρνουμε την $(2.1.6)$.

Πόρισμα 2.1.4

Έστω $u\in L^p(\Omega)$ για $1\le p<\infty$. Τότε $u^{\#}\in L^p\left(\left(0,|\Omega|\right)\right)$ και οι αντίστοιχες L^p νόρμες είναι ίσες.

Λήμμα 2.1.1

Έστω $u:[0,l]\to\mathbb{R}$ μη αύξουσα. Τότε $u=u^{\#}$ σχεδόν παντού.

Απόδειξη: Αν $t<u(s)$, τότε αφού η u είναι μη αύξουσα, έχουμε $\left|\{u>t\}\right|\ge s$. Έτσι, $u^{\#}(s)\ge t$ από τον ορισμό. Αυτό συνεπάγεται ότι

$$u^{\#}(s)\ge u(s) \quad (2.1.8)$$

για κάθε $s\in[0,l]$. Έστω s σημείο συνέχειας της u. Αφού η u είναι μη αύξουσα ,

$$\left|\{u>u(s-h)\}\right|\le s-h<s, \text{ για } h>0.$$

Έτσι, από τον ορισμό, $u^{\#}(s)\le u(s-h)$. Καθώς $h\to 0$, έχουμε από τη συνέχεια της u στο s ότι

$$u^{\#}(s)\le u(s). \qquad (2.1.9)$$

Από τις$(2.1.8),(2.1.9)$ έχουμε ότι $u^{\#}(s)=u(s)$ σε όλα τα σημεία συνέχειας της u.

Πρόταση 2.1.4

Έστω $\psi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια μη φθίνουσα συνάρτηση και $u:\Omega\to\mathbb{R}$, όπου $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ φραγμένο. Τότε ισχύει $\psi\circ u^{\#}=(\psi\circ u)^{\#}$, σχεδόν παντού.

Απόδειξη: Βήμα 1. Αν $v,w:[0,l]\to\mathbb{R}$ είναι ισομετρήσιμες και μη αύξουσες, τότε $v=w$ σχεδόν παντού. Επειδή οι v,w είναι μη αύξουσες, από το προηγούμενο λήμμα έχουμε ότι $v=v^{\#},w=w^{\#}$ σχεδόν παντού. Επίσης επειδή είναι ισομετρήσιμες, από τον ορισμό έχουμε ότι $v^{\#}=w^{\#}$.

Βήμα 2. Ο ισχυρισμός θα αποδειχθεί αν δείξουμε ότι οι $\psi\circ u^{\#}$ και $(\psi\circ u)^{\#}$ είναι ισομετρήσιμες και μη αύξουσες στο $\left[0,|\Omega|\right]$. Το ότι είναι μη αύξουσες προκύπτει από τον ορισμό της μετάλλαξης και το γεγονός ότι η ψ είναι μη φθίνουσα. Έχουμε,

$$\left|\left\{\psi\left(u^{\#}\right)>t\right\}\right|=\int_0^{|\Omega|}\chi_{\left\{\psi\left(u^{\#}\right)>t\right\}}(s)\,ds\overset{\Theta 2.1.1}{=}\int_\Omega\chi_{\{\psi(u)>t\}}(x)\,dx=$$
$$=\left|\left\{\psi(u)>t\right\}\right|=\left|\left\{\left(\psi(u)\right)^{\#}>t\right\}\right|.$$

Πόρισμα 2.1.5

A) Αν $u:\Omega\to\mathbb{R}$, τότε ισχύει $\left(u^{+}\right)^{\#}=\left(u^{\#}\right)^{+}$.

B) Αν $u,v:\Omega\to\mathbb{R}$ τότε οι $(u+v)^{\#}$ και $u^{\#}+v^{\#}$ δεν είναι ίσες. Ωστόσο, αν $c\in\mathbb{R}$ τότε ισχύει ότι $(u+c)^{\#}=u^{\#}+c$.

2.2 Μερικές Ανισότητες για τις μεταλλαγμένες συναρτήσεις.

Πρόταση 2.2.1

Έστω $p=1$ ή ∞. Τότε για $f,g\in L^p(\Omega)$ ισχύει

$$\left\|f^{\#}-g^{\#}\right\|_{p,(0,|\Omega|)}\leq\left\|f-g\right\|_{p,\Omega}. \qquad (2.2.1)$$

Απόδειξη: Έστω $p=\infty$. Σχεδόν για όλα τα $x\in\Omega$, έχουμε

$$\left|f(x)-g(x)\right|\le\|f-g\|_{\infty,\Omega}.$$

Έτσι,

$$f(x)-\|f-g\|_{\infty,\Omega}\le g(x)\le f(x)+\|f-g\|_{\infty,\Omega}.$$

Από τη μονοτονικότητα της μετάλλαξης και την τελευταία παρατήρηση, προκύπτει ότι

$$f^{\#}(s)-\|f-g\|_{\infty,\Omega}\le g^{\#}(s)\le f^{\#}(s)-\|f-g\|_{\infty,\Omega}$$

που αποδεικνύει την $(2.2.1)$ για $p=\infty$.

Έστω $p=1$ και $h=\max\{f,g\}$. Τότε αφού $f\le h$ και $g\le h$, έχουμε ότι $f^{\#}\le h^{\#}$ και $g^{\#}\le h^{\#}$. Επίσης,

$$\left|f^{\#}-g^{\#}\right|\le\left|f^{\#}-h^{\#}\right|+\left|h^{\#}-g^{\#}\right|=2h^{\#}-f^{\#}-g^{\#}.$$

Έτσι,

$$\begin{aligned}\int_0^{|\Omega|}\left|f^{\#}(s)-g^{\#}(s)\right|ds&\le\int_0^{|\Omega|}\left(2h^{\#}(s)-f^{\#}(s)-g^{\#}(s)\right)ds\\&=\int_\Omega\left(2h(x)-f(x)-g(x)\right)dx\\&=\int_\Omega\left|f(x)-g(x)\right|dx\end{aligned}$$

που αποδεικνύει το αποτέλεσμα για $p=1$.

Θεώρημα 2.2.1

Έστω $1\le p\le\infty$. Η απεικόνιση $u\mapsto u^{\#}$ είναι συνεχής από τον

$$L^p(\Omega) \text{ στον } L^p\left(\left(0,|\Omega|\right)\right).$$

Απόδειξη: Αν $p=1$ ή $p=\infty$ τότε το θεώρημα ισχύει από την προηγούμενη πρόταση. Έστω $1<p<\infty$. Έστω $u_n\to u$ στον $L^p(\Omega)$. Αφού το Ω είναι φραγμένο, προκύπτει ότι $u_n\to u$ στον $L^1(\Omega)$ και έτσι $u_n^{\#}\to u^{\#}$ στον $L^1\left(\left(0,|\Omega|\right)\right)$. Άρα για μία υπακολουθία , επίσης ισχύει ότι $u_{n_k}^{\#}\to u^{\#}$ σχεδόν παντού. Ωστόσο, $\left\|u_{n_k}^{\#}\right\|_{p,(0,|\Omega|)}=\left\|u_{n_k}\right\|_{p,\Omega}\to\|u\|_{p,\Omega}=\left\|u^{\#}\right\|_{p,(0,|\Omega|)}$.

Έτσι, προκύπτει ότι $u_{n_k}^{\#} \to u^{\#}$ στον $L^p\left(\left(0,|\Omega|\right)\right)$. Στην πραγματικότητα αφού το όριο είναι ανεξάρτητο της υπακολουθίας, προκύπτει ότι η ακολουθία $\{u_n^{\#}\}$ συγκλίνει στη $u^{\#}$ στον $L^p\left(\left(0,|\Omega|\right)\right)$ και η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί.

Πρόταση 2.2.2

Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ φραγμένο και έστω $u:\Omega \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη. Έστω $\mathrm{E} \subset \Omega$ μετρήσιμο υποσύνολο. Τότε

$$\int_{\mathrm{E}} u(x)dx \le \int_0^{|\mathrm{E}|} u^{\#}(s)ds . \qquad (2.2.2)$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν, $\left(u|_{\mathrm{E}}\right)^{\#} = u^{\#}\Big|_{[0,|\mathrm{E}|]}$, σχεδόν παντού.

Απόδειξη: Έστω $\upsilon = u|_{\mathrm{E}}$. Αν $s \in \left[0,|\mathrm{E}|\right]$ και αν $\left|\{u>t\}\right| < s$ τότε $\left|\{\upsilon > t\}\right| = \left|\{u>t\} \cap \mathrm{E}\right| < s$. Έτσι, $\left\{t \,|\, \left|\{u>t\}\right| < s\right\} \subset \left\{t \,|, \left|\{\upsilon>t\}\right| < s\right\}$ και έτσι $\upsilon^{\#}(s) \le u^{\#}(s)$. Επομένως,

$$\int_{\mathrm{E}} u(x)dx = \int_0^{|\mathrm{E}|} \upsilon^{\#}(s)\,ds \le \int_0^{|\mathrm{E}|} u^{\#}(s)ds . \qquad (2.2.3)$$

Αν ισχύει η ισότητα στην $(2.2.2)$, τότε έχουμε ισότητα στην $(2.2.3)$ και αυτό ισχύει αν και μόνο αν $\upsilon^{\#} = u^{\#}$ σχεδόν παντού στο E.

Λήμμα 2.2.1

Έστω $u:\Omega \to \mathbb{R}$ και έστω $t \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε

$$\mathrm{E}_t = \left\{x \in \Omega \,|\, u(x) > t\right\}$$

$$F_t = \left\{x \in \Omega \,|\, u(x) \le t\right\} = \Omega \setminus \mathrm{E}_t .$$

Ορίζουμε την $b:\mathbb{R}\times\Omega \to \mathbb{R}$

$$b(t,x) = \begin{cases} \chi_{\mathrm{E}_t}(x)\,\alpha\nu \;\; t \ge 0 \\ -\chi_{F_t}(x)\;\alpha\nu \;\; t < 0 \end{cases}$$

Τότε

$$u(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} b(t,x)\,dt . \qquad (2.2.4)$$

Απόδειξη: Αν $u(x) \geq 0$, τότε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} b(t,x)dt = \int_{0}^{u(x)} dt = u(x).$$

Αν $u(x) < 0$, τότε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} b(t,x)dt = -\int_{u(x)}^{0} dt = u(x).$$

Λήμμα 2.2.2

Έστω $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$, και η g ολοκληρώσιμη στο Ω. Έστω $a \leq f \leq b \leq +\infty$ με $a \in \mathbb{R}$. Τότε

$$\int_{\Omega} f(x)g(x)\,dx = a\int_{\Omega} g(x)\,dx + \int_{a}^{b}\left(\int_{\{f>t\}} g(x)\,dx\right)dt. \quad (2.2.5)$$

Απόδειξη: Έστω ότι $a \geq 0$. Αν θέσουμε $\mathrm{E}_t = \{f > t\}$ έχουμε από το προηγούμενο λήμμα,

$f(x) = \int_{0}^{b} \chi_{\mathrm{E}_t}(x)dt$. Έτσι, από το θεώρημα Fubini έχουμε

$$\int_{\Omega} f(x)g(x)\,dx = \int_{\Omega} g(x)\int_{0}^{b} \chi_{\mathrm{E}_t}(x)dtdx = \int_{0}^{b}\int_{\Omega} g(x)\,\chi_{\mathrm{E}_t}(x)\,dtdx$$

που δίνει ότι

$$\int_{\Omega} f(x)g(x)\,dx = \int_{0}^{a}\int_{\Omega} g(x)dxdt + \int_{a}^{b}\int_{E_t} g(x)dxdt$$

από την οποία η (2.2.5) προκύπτει άμεσα.

Θεώρημα 2.2.2 (Hardy-Littlewood)

Έστω $f \in L^p(\Omega), g \in L^q(\Omega)$ όπου $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, 1 \leq p, q \leq \infty$. Τότε

$$\int_{\Omega} f(x)g(x)\,dx \leq \int_{0}^{|\Omega|} f^{\#}(s)\,g^{\#}(s)\,ds. \quad (2.2.6)$$

Απόδειξη: Έστω ότι $f \in L^{\infty}(\Omega) \cap L^{p}(\Omega)$. Έστω a, b πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $a \le f \le b$. Τότε από το προηγούμενο λήμμα, έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} f(x) g(x)\, dx &= a \int_{\Omega} g(x)\, dx + \int_{a}^{b} \int_{\{f>t\}} g(x)\, dx dt = \\
&= a \int_{0}^{|\Omega|} g^{\#}(s) ds + \int_{a}^{b} \int_{\{f>t\}} g(x)\, dx dt \\
&\le a \int_{0}^{|\Omega|} g^{\#}(s) ds + \int_{a}^{b} \int_{0}^{|\{f>t\}|} g^{\#}(s) ds dt \\
&= a \int_{0}^{|\Omega|} g^{\#}(s) ds + \int_{a}^{b} \int_{0}^{|\{f>t\}|} g^{\#}(s) ds dt \\
&= \int_{0}^{|\Omega|} f^{\#}(s) g^{\#}(s)\, ds
\end{aligned}$$

Αν $1 \le p < \infty$ η γενική περίπτωση ολοκληρώνεται αφού η απεικόνιση $u \mapsto u^{\#}$ είναι συνεχής από τον $L^{p}(\Omega)$ στον $L^{p}\left((0,|\Omega|)\right)$.

Πόρισμα 2.2.1

Α) Έστω $u : \Omega \to \mathbb{R}$. Ισχύει ότι

$$\left(\chi_{\{u>t\}}\right)^{\#} = \chi_{\{u^{\#}>t\}}$$

Β) Έστω $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$. Ισχύει ότι

$$\int_{\Omega} u(x) \chi_{\{v>t\}}(x)\, dx \ge \int_{0}^{|\Omega|} u^{\#}(s) \chi_{\{v^{\#}>t\}}(s)\, ds .$$

Θεώρημα 2.2.3

Έστω $f, g \in L^{p}(\Omega)$, όπου $1 < p < \infty$. Τότε

$$\left\| f^{\#} - g^{\#} \right\|_{p,(0,|\Omega|)} \le \left\| f - g \right\|_{p,\Omega} . \qquad (2.2.7)$$

Απόδειξη:

Έστω $J(t) = |t|^{p}$. Ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$J_{+}(t) = \begin{cases} 0 & , \alpha\nu\ t \le 0 \\ |t|^{p} & , \alpha\nu\ t < 0 \end{cases}$$

και

$$J_-(t)=\begin{cases}|t|^p, & \alpha\nu\ t\le 0\\ 0, & \alpha\nu\ t>0\end{cases}$$

ώστε $J=J_++J_-$. Οι συναρτήσεις J_+,J_- είναι κυρτές και διαφορίσιμες. Έτσι,

$$J_+\big(f(x)-g(x)\big)=\int_{g(x)}^{f(x)}J_+'\big(f(x)-t\big)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}J'\big(f(x)-t\big)\chi_{\{g\le t\}}(x)dt .$$

Έτσι, με εφαρμογή του θεωρήματος Fubini, έχουμε

$$\int_\Omega J_+\big(f(x)-g(x)\big)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_\Omega J_+'\big(f(x)-t\big)\chi_{\{g\le t\}}(x)dxdt \qquad (2.2.8)$$

Παρόμοια έχουμε

$$\int_0^{|\Omega|}J_+\big(f^\#(s)-g^\#(s)\big)ds=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{|\Omega|}J_+'\big(f^\#(s)-t\big)\chi_{\{g^\#\le t\}}(s)dsdt . \quad (2.2.9)$$

Αφού η J_+ είναι κυρτή, η J_+' είναι μη φθίνουσα. Από την πρόταση 2.2.4 και το πόρισμα 2.1.5 έχουμε

$$\big(J_+'\big(f(x)-t\big)\big)^\#(s)=J_+'\big(f^\#(s)-t\big).$$

Από το πόρισμα 2.2.1 έχουμε

$$\int_\Omega J_+'\big(f(x)-t\big)\chi_{\{g\le t\}}(x)dx\ge\int_0^{|\Omega|}J_+'\big(f^\#(s)-t\big)\chi_{\{g^\#\le t\}}(s)ds .$$

Από τις $(2.2.8)$ και $(2.2.9)$ έχουμε

$$\int_\Omega J_+\big(f(x)-g(x)\big)dx\ge\int_0^{|\Omega|}J_+\big(f^\#(s)-g^\#(s)\big)ds .$$

Όμοια ισχύουν ανάλογες σχέσεις για την J_-.

2.3 Συμμετρικοποίηση Schwarz

Έστω $\mathrm{E}\subset\mathbb{R}^n$ είναι ένα μετρήσιμο σύνολο, πεπερασμένου μέτρου. Συμβολίζουμε με E^*, την ανοικτή μπάλα με κέντρο την αρχή των αξόνων, και με μέτρο το ίδιο με το μέτρο του E, δηλαδή $|\mathrm{E}|=|\mathrm{E}^*|$. Συμβολίζουμε την ευκλείδεια νόρμα του $x\in\mathbb{R}^n$ με $|x|$. Τέλος, με ω_n συμβολίζουμε τον όγκο της μοναδιαίας μπάλας του $\mathbb{R}^n$. Ισχύει ότι

$\omega_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$, όπου $\Gamma(s)$ η γνωστή συνάρτηση γάμμα.

Ορισμός 2.3.1

Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ είναι ένα φραγμένο σύνολο, και $u:\Omega \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. **Συμμετρικοποίηση Schwarz** της συνάρτησης u, ή **σφαιρικά συμμετρική και φθίνουσα μετάλλαξη** της u, λέγεται η συνάρτηση $u^* : \Omega^* \to \mathbb{R}$ που ορίζεται από τη σχέση

$$u^*(x) = u^{\#}\left(\omega_n |x|^n\right).$$

Αν R είναι η ακτίνα του Ω^*, τότε

$$\begin{aligned}\int_{\Omega^*} u^*(x)dx &= \int_{\Omega^*} u^{\#}\left(\omega_n |x|^n\right)dx \\ &= \int_0^R u^{\#}\left(\omega_n r^n\right) n\omega_n r^{n-1} dr \\ &= \int_0^{|\Omega^*|} u^{\#}(s)\, ds\end{aligned}$$

Ισχύουν οι εξής ιδιότητες [Lieb – Loss]:

1. Η u^* είναι ακτινικά συμμετρική και φθίνουσα.

2. Οι $u, u^{\#}, u^*$ είναι ισομετρήσιμες.

3. Αν $F:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι μια Borel μετρήσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε είτε $F \geq 0$ είτε $F \circ u \in L^1(\Omega)$, τότε

$$\int_{\Omega^*} F\left(u^*(x)\right)dx = \int_{\Omega} F\left(u(x)\right)dx. \qquad (2.3.1)$$

Ειδικότερα, οι u, u^* έχουν τις ίδιες L^p νόρμες και

$$\int_{\Omega} u(x)dx = \int_{\Omega^*} u^*(x)dx,$$

όταν η u είναι ολοκληρώσιμη στο Ω.

4. Αν $\psi:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι μια μη φθίνουσα συνάρτηση, τότε $(\psi \circ u)^* = \psi \circ u^*$.

5. Η απεικόνιση $u \mapsto u^*$ είναι μια μη επεκτάσιμη απεικόνιση από τον $L^p(\Omega)$ στον $L^p(\Omega^*)$ για $1 \le p \le \infty$.

6. Αν $\mathrm{E} \subset \Omega$ είναι ένα μετρήσιμο υποσύνολο, τότε

$$\int_{\mathrm{E}} u(x)dx \le \int_0^{|\mathrm{E}|} u^{\#}(s)ds = \int_{\mathrm{E}^*} u^*(x)dx. \quad (2.3.2)$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν, $(u|_{\mathrm{E}})^* = u^*|_{\mathrm{E}^*}$.

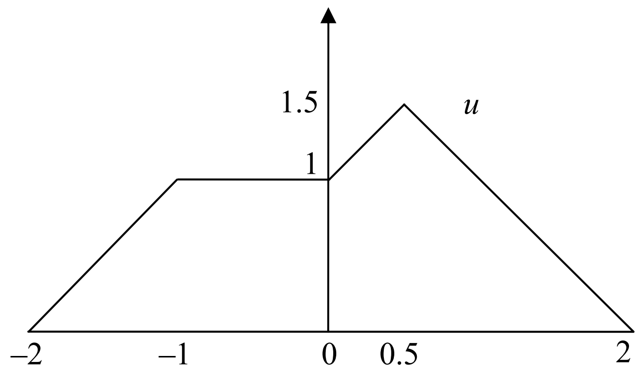
7. (Hardy-Littlewood) Αν $f \in L^p(\Omega), g \in L^q(\Omega)$, όπου $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, τότε

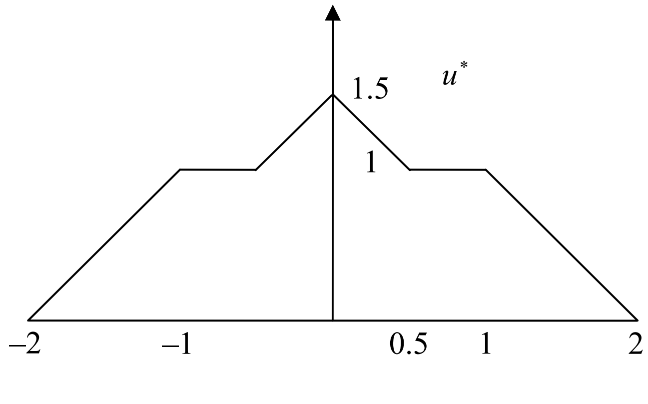
$$\int_{\Omega} f(x)g(x)\,dx \le \int_0^{|\Omega|} f^{\#}(s)g^{\#}(s)\,ds = \int_{\Omega^*} f^*(x)g^*(x)\,dx. \qquad (2.3.3)$$

Παράδειγμα 2.3.1

Έστω $\Omega = (-2,2) \subset \mathbb{R}$ και έστω $u:\Omega \to \mathbb{R}$ όπως στο παράδειγμα 2.1.1. Τότε $\Omega^* = (-2,2)$ και η u^* δίνεται από τον τύπο

$$u^*(-x) = u^*(x) = \begin{cases} \frac{3}{2} - x, & 0 \le x \le 0.5 \\ 1, & 0.5 \le x \le 1 \\ 2 - x, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$





ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

3.1 Ανισότητες για μεταλλαγμένες συναρτήσεις

Ορισμός 3.1.1

Αν $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ είναι μια Borel μετρήσιμη συνάρτηση, τότε λέμε ότι **η** f **μηδενίζεται στο άπειρο** αν το μέτρο Lebesgue,

$$L^n\left(\left\{x:\left|f(x)\right|>t\right\}\right)=\left|\left\{x:\left|f(x)\right|>t\right\}\right|$$

είναι πεπερασμένο για κάθε $t>0$.

3.2 Μεταλλάξεις συνόλων και συναρτήσεων

Αν $A\subset\mathbb{R}^n$ είναι ένα σύνολο Borel, πεπερασμένου μέτρου Lebesgue, τότε συμβολίζουμε με A^* τη συμμετρική μετάλλαξη του A, και ορίζουμε να είναι η ανοικτή μπάλα στον $\mathbb{R}^n$ με κέντρο την αρχή των αξόνων, και να έχει τον ίδιο όγκο (μέτρο Lebesgue) με το σύνολο A. Έτσι,

$$A^*=\left\{x:|x|<r\right\} \text{ με } \frac{\left|S^{n-1}\right|}{n}r^n=L^n(A),\ \left|S^{n-1}\right|=\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

όπου $\left|S^{n-1}\right|$ το εμβαδό της επιφάνειας της μοναδιαίας S^{n-1} στον $\mathbb{R}^n$.

Συμμετρικά φθίνουσα μετάλλαξη της χαρακτηριστικής συνάρτησης ενός συνόλου A ορίζεται η συνάρτηση:

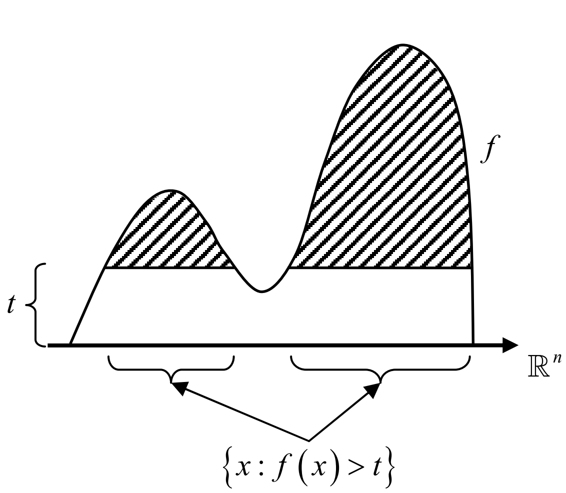
$$\chi_A^* := \chi_{A^*}.$$

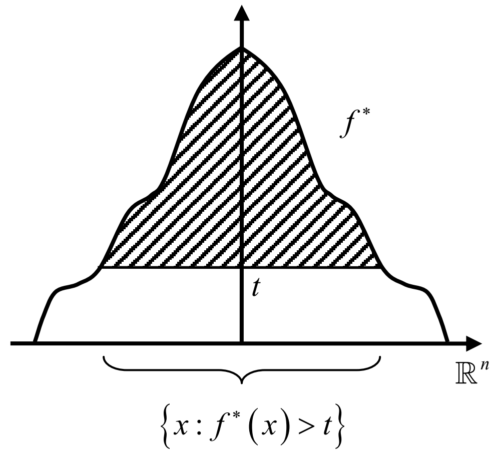
Αν $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ είναι μια Borel μετρήσιμη συνάρτηση που μηδενίζεται στο άπειρο, ορίζουμε την μετάλλαξη της f να είναι η συνάρτηση f^* με

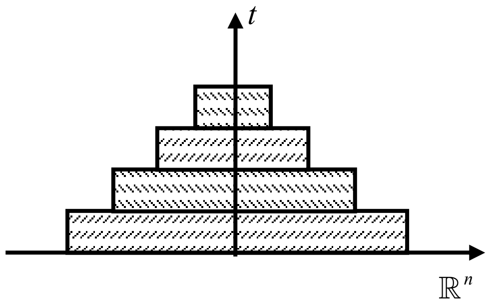
$$f^*(x)=\int_0^\infty \chi_{\{|f|>t\}}^*(x)\,dt, \qquad (3.2.1)$$

όπου σύμφωνα με το θεώρημα 1.1.5 (layer cake)

$$\left|f(x)\right|=\int_0^\infty \chi_{\{|f|>t\}}(x)\,dt \qquad (3.2.2)$$







Αναπαράσταση
Layer cake

Η f^* έχει τις εξής ιδιότητες:

1. Η $f^*(x)$ είναι μη αρνητική

2. Η $f^*(x)$ είναι ακτινικά συμμετρική και μη αύξουσα, δηλαδή

$$f^*(x) = f^*(y) \text{ αν } |x| = |y|$$

και

$$f^*(x) \geq f^*(y) \text{ αν } |x| \leq |y|.$$

Λέμε ότι η f^* είναι γνησίως συμμετρικά φθίνουσα, αν $f^*(x) > f^*(y)$ για $|x| < |y|$. Ειδικότερα ισχύει ότι $f^*(x) > 0$ για όλα τα x.

3. Η $f^*(x)$ είναι μία κάτω ημισυνεχής συνάρτηση διότι τα σύνολα $\{x : f^*(x) > t\}$ είναι ανοικτά για κάθε $t > 0$. Ειδικότερα η f^* είναι μετρήσιμη.

4. Τα σύνολα στάθμης της f^* είναι οι μεταλλάξεις των συνόλων στάθμης της $|f|$, δηλαδή

$$\{x : f^*(x) > t\} = \{x : |f(x)| > t\}^*.$$

Συνέπεια του παραπάνω είναι η ισομετρησιμότητα των $|f|$ και f^*, δηλαδή

$$L^n\left(\{x : |f(x)| > t\}\right) = L^n\left(\{x : f^*(x) > t\}\right)$$

για κάθε $t > 0$.

Λαμβάνοντας υπ' όψιν και το θεώρημα 1.1.5 η ισομετρησιμότητα συνεπάγεται την σχέση :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi\left(|f(x)|\right)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \phi\left(f^*(x)\right)dx \qquad (3.2.3)$$

για κάθε συνάρτηση $\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, η οποία γράφεται ως διαφορά δύο μονότονων συναρτήσεων ϕ_1, ϕ_2 τέτοιες ώστε τουλάχιστον ένα από τα ολοκληρώματα $\int_{\mathbb{R}^n} \phi_1\left(|f(x)|\right)dx$ και $\int_{\mathbb{R}^n} \phi_2\left(|f(x)|\right)dx$ να είναι πεπερασμένο.

Ειδικότερα έχουμε ότι για $f \in L^p\left(\mathbb{R}^n\right)$,

$$\|f\|_p = \|f^*\|_p$$

για κάθε $1 \le p \le \infty$.

Απόδειξη: $\|f\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty \chi_{\left\{|f(x)|^p > t\right\}} dt dx =$

$$= \int_0^\infty L^n\left(\left\{x : |f(x)|^p > t\right\}\right)dt = \int_0^\infty L^n\left(\{x : |f(x)| > s\}\right) \cdot p \cdot s^{p-1} ds =$$

$$= \int_0^\infty \mu_{|f|}(s) \cdot p \cdot s^{s-1} ds = \int_0^\infty \mu_{f^*}(s) \cdot p \cdot s^{-1} ds =$$

$$= \int_0^\infty L^n\left(\left\{x : f^*(x) > s\right\}\right) \cdot p \cdot s^{p-1} ds = \int_0^\infty L^n\left(\left\{x : \left(f^*(x)\right)^p > t\right\}\right) dt =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty \chi_{\left\{\left(f^*(x)\right)^p > t\right\}} dx dt = \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty \chi^*_{\left\{\left|f(x)\right|^p > t\right\}} dx dt = \int_{\mathbb{R}^n} \left|f^*(x)\right|^p dx = \left\|f^*\right\|_p^p$$

5. Αν η συνάρτηση $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, είναι μη φθίνουσα, τότε $\left(\varphi \circ |f|\right)^* = \varphi \circ f^*$ δηλαδή $\left(\varphi\left|f(x)\right|\right)^* = \varphi\left(f^*(x)\right)$. Αυτή η παρατήρηση αποτελεί μία απόδειξη για τη σχέση $(3.2.3)$. Από την ισομετρησιμότητα των $\left(\varphi \circ |f|\right)^*, \varphi \circ f$ έχουμε τη σχέση $(3.2.3)$ για όλες τις μονότονες μη φθίνουσες συναρτήσεις φ και επίσης για τις διαφορές των μονότονα μη αυξουσών συναρτήσεων φ.

6. Η μετάλλαξη διατηρεί τη διάταξη, δηλαδή αν f, g είναι μη αρνητικές συναρτήσεις στον $\mathbb{R}^n$, οι οποίες μηδενιζονται στο άπειρο και ικανοποιούν τη σχέση $f(x) \le g(x)$ για όλα τα x στον $\mathbb{R}^n$, τότε για τις μεταλλάξεις αυτών των συναρτήσεων διατηρείται η ανισότητα $f^*(x) \le g^*(x)$ για όλα τα x στον $\mathbb{R}^n$. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι ο ισχυρισμός η “$f(x) \le g(x)$ ισχύει για κάθε x”, είναι ισοδύναμος με τον ισχυρισμό ότι τα σύνολα στάθμης της g περιέχουν τα σύνολα στάθμης της f.

3.3 Θεώρημα (Μια απλή ανισότητα για τις μεταλλαγμένες συναρτήσεις)

Έστω f, g μη αρνητικές συναρτήσεις του $\mathbb{R}^n$, οι οποίες μηδενίζονται στο άπειρο και έστω f^*, g^* οι συμμετρικά φθίνουσες μεταλλάξεις τους αντίστοιχα. Τότε ισχύει η ανισότητα:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) g(x) dx \le \int_{\mathbb{R}^n} f^*(x) g^*(x) dx, \qquad (3.3.1)$$

όπου αν το αριστερό ολοκλήρωμα απειρίζεται, τότε το ίδιο ισχύει και για το δεξιό.

Αν η f είναι γνησίως συμμετρικά φθίνουσα (βλέπε $3.2(2)$, τότε η ισότητα στην σχέση $(3.3.1)$ ισχύει αν και μόνο αν $g = g^*$.

Απόδειξη: Ακολούθως θα χρησιμοποιηθεί συχνά το θεώρημα Fubini. Θα χρησιμοποιήσουμε την αναπαράσταση layer cake (θεώρημα $1.1.5$) για τις f, g, f^* και g^*. Η προηγούμενη ανισότητα γράφεται

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\{f>t\}}(x)\chi_{\{g>s\}}(x)dxdsdt \le \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \chi^*_{\{f>t\}}(x)\chi^*_{\{g>s\}}(x)dxdsdt .$$

Η γενική περίπτωση της $(3.3.1)$ προκύπτει άμεσα στην περίπτωση όπου οι f, g είναι χαρακτηριστικές συναρτήσεις συνόλων πεπερασμένου μέτρου Lebesgue. Έτσι, πρέπει να δείξουμε ότι για μετρήσιμα σύνολα A, B του $\mathbb{R}^n$ ότι ισχύει

$$\int \chi_A \chi_B \le \int \chi^*_A \chi^*_B$$

ή ισοδύναμα ότι $L^n(A \cap B) \le L^n(A^* \cap B^*)$. Έστω ότι $L^n(A) \le L^n(B)$. Τότε $A^* \subset B^*$ και $L^n(A^* \cap B^*) = L^n(A^*) = L^n(A)$. Όμως, $L^n(A \cap B) \le L^n(A)$ και έτσι η $(3.3.1)$ έχει αποδειχθεί.

Η απόδειξη για το δεύτερο μέρος του θεωρήματος, στην περίπτωση που η f είναι γνησίως συμμετρική και φθίνουσα, είναι λίγο πιο περίπλοκη. Για να έχουμε ισότητα στην $(3.3.1)$ πρέπει σχεδόν για κάθε $s > 0$ ως προς το μέτρο Lebesgue να ισχύει

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\chi_{\{g>s\}} = \int_{\mathbb{R}^n} f\chi^*_{\{g>s\}} \qquad (3.3.2)$$

Ισχυριζόμαστε ότι αυτό συνεπάγεται ότι $\chi_{\{g>s\}} = \chi^*_{\{g>s\}}$ σχεδόν για κάθε $s > 0$ και έτσι $g = g^*$ (από την αναπαράσταση layer cake). Αφού η f είναι γνησίως συμμετρικά φθίνουσα, κάθε μπάλα $B_{0,r}$, είναι ένα σύνολο στάθμης της f. Στην πραγματικότητα, υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση $r(t)$ τέτοια ώστε $\{x : f(x) > t\} = B_{0,r(t)}$. Αυτό συνεπάγεται ότι η συνάρτηση $F_C(t) := \int \chi_{\{f>t\}}(x)\chi_C(x)dx$ είναι μια συνεχής συνάρτηση του t για κάθε μετρήσιμο σύνολο C.

Θεωρούμε τώρα ένα σταθερό $s>0$ για το οποίο ισχύει η $(3.3.2)$ και έστω $C=\{x:g(x)>s\}$. Από την $(3.3.1)$ έχουμε ότι $F_C(t)\le F_{C^*}(t)$. Από την $(3.3.2)$ έχουμε ότι $\int F_C(t)dt=\int F_{C^*}(t)dt$ και έτσι $F_C(t)=F_{C^*}(t)$ σχεδόν για κάθε $t>0$. Από τη συνέχεια των F_C και F_{C^*}, συμπεραίνουμε ότι $F_C(t)=F_{C^*}(t)$ για κάθε $t>0$. Όπως προηγουμένως, αυτό συνεπάγεται ότι για κάθε $r>0$ είτε $C\subset B_{0,r}$ είτε $C^*\subset B_{0,r}$ ή αλλιώς $C\supset B_{0,r}$ και $C^*\supset B_{0,r}$. Έτσι, με ακρίβεια συνόλου μηδενικού μέτρου L^n έχουμε ότι $C=C^*$. Άρα $g=g^*$.

Παρατήρηση 3.3.1

Ισχύει και η αντίστροφη ανισότητα η οποία λαμβάνει πιο απλή μορφή για τις χαρακτηριστικές συναρτήσεις g. Δηλαδή η αντίστροφη ανισότητα (για f,g μη αρνητικές) είναι

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\chi_{\{g\le s\}} \ge \int_{\mathbb{R}^n} f^*\chi_{\{g^*\le s\}} \qquad (3.3.3)$$

(Σημειώνουμε ότι $g\le s$ στη θέση της σχέσης $g>s$)

Ένας τρόπος για να το αποδείξουμε είναι να γράψουμε $\chi_{\{g\le s\}}=1-\chi_{\{g>s\}}$ και να χρησιμοποιήσουμε την $(3.3.1)$ υποθέτοντας ότι η f είναι ολοκληρώσιμη. Ωστόσο, η $(3.3.3)$ ισχύει ακόμα και όταν η f δεν είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση και η απόδειξη είναι επανάληψη της απόδειξης της $(3.3.1)$. Πάλι η ισότητα στην $(3.3.3)$ για κάθε s στην περίπτωση που η f είναι γνησίως συμμετρικά φθίνουσα, συνεπάγεται ότι $g=g^*$.

Παρατήρηση 3.3.2

Η παρακάτω ανισότητα για τις μεταλλάξεις συγκεκριμενοποιεί την $(3.3.1)$ και χρησιμοποιεί την $(3.3.3)$. Πράγματι έστω f και g μη αρνητικές συναρτήσεις στον $L^2(\mathbb{R}^n)$. Τότε η διαφορά τους ικανοποιεί την ανισότητα

$$\|f^*-g^*\|_2\le\|f-g\|_2 \qquad (3.3.4)$$

Διότι η διαφορά τετραγώνων του αριστερού και δεξιού μέρους της $(3.3.4)$ αποτελεί διπλάσια διαφορά του αριστερού και δεξιού μέρους της $(3.3.1)$.

Η γενίκευση της παραπάνω σχέσης είναι

$$\left\|f^* - g^*\right\|_p \leq \|f - g\|_p \qquad (3.3.5)$$

για κάθε $1 \leq p \leq \infty$, που σημαίνει βάσει ορισμού ότι η μετάλλαξη αποτελεί μια μη επεκτάσιμη απεικόνιση στον $L^p\left(\mathbb{R}^n\right)$. Εδώ το κρίσιμο σημείο είναι ότι η $|t|^p$ είναι μια κυρτή συνάρτηση του $t \in \mathbb{R}$.

Η επόμενη ανισότητα αποδεικνύει την $(3.3.5)$ και την γενικεύει για την περίπτωση των τυχόντων (όχι κατ' ανάγκη συμμετρικών) κυρτών συναρτήσεων J.

3.4 Θεώρημα (Μη επεκτασιμότητα της μετάλλαξης)

Έστω $J : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι μία μη αρνητική, κυρτή συνάρτηση τέτοια ώστε $J(0) = 0$. Έστω f και g μη αρνητικές συναρτήσεις του $\mathbb{R}^n$, που μηδενίζονται στο άπειρο. Τότε

$$\int_{\mathbb{R}^n} J\left(f(x)^* - g(x)^*\right)dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} J\left(f(x) - g(x)\right)dx. \qquad (3.4.1)$$

Αν υποθέσουμε ότι η J είναι γνησίως κυρτή, $f = f^*$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα, τότε η ισότητα στην $(3.4.1)$ συνεπάγεται ότι $g = g^*$.

Απόδειξη: Μπορούμε να γράψουμε

$$J = J_+ + J_-$$

όπου $J_+(t) = 0$ για $t \leq 0$ και $J_+(t) = J(t)$ για $t \geq 0$ και ανάλογα για την J_-. Είναι και οι δύο κυρτές, άρα αρκεί να δείξουμε το θεώρημα για τις J_+ και J_- χωριστά. Αφού η J_+ είναι κυρτή, είναι παραγωγίσιμη από δεξιά, δηλαδή υπάρχει η J'_+, για κάθε t και η J_+ είναι το ολοκλήρωμα της $J_+{}'$, δηλαδή $J_+(t) = \int_0^t J_+{}'(s)\,ds$. Η κυρτότητα της J_+ συνεπάγεται ότι η $J_+{}'(t)$ είναι μη φθίνουσα συνάρτηση του t. Η γνήσια κυρτότητα της J_+ για

$t>0$ θα μπορούσε να συνεπάγεται ότι η $J_+'(t)$ είναι γνησίως αύξουσα για $t>0$. Μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} J_+\left(f(x)-g(x)\right) &= \int_{g(x)}^{f(x)} J_+'\left(f(x)-s\right)ds \\ &= \int_0^{\infty} J_+'\left(f(x)-s\right)\chi_{\{g\le s\}}(x)\,ds \end{aligned} \tag{3.4.2}$$

Ολοκληρώνουμε την παραπάνω σχέση στον $\mathbb{R}^n$ και από το θεώρημα Fubini προκύπτει η εναλλαγή των ολοκληρώματων ως προς s,x. Από τη σχέση $(3.3.3)$ και την ιδιότητα $5(3.2)$ προκύπτει ότι για κάθε σταθερό s, το ολοκλήρωμα στον $\mathbb{R}^n$ δεν αυξάνεται όταν η f αντικατασταθεί από την f^* και η g από την g^*. Ανάλογοι συλλογισμοί για την J_- μας δίνουν την $(3.4.1)$.

Υποθέτουμε τώρα ότι $f=f^*$, όπου η f είναι γνησίως φθίνουσα και η J_+' είναι γνησίως αύξουσα για $t>0$. Αν η $(3.4.1)$ γίνεται ισότητα τότε πρέπει να έχουμε σχεδόν παντού για κάθε s

$$\int_{\mathbb{R}^n} J_+'\left(f(x)-s\right)\chi_{\{g\le s\}}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} J_+'\left(f(x)-s\right)\chi_{\{g^*\le s\}}(x)\,dx .$$

Αφού η J_+' είναι γνησίως αύξουσα έχουμε ότι όπως και στην απόδειξη του θεωρήματος 3.3, σχεδόν παντού για $r\ge s$ είτε $F_r\supset G_s$ είτε $F_r\subset G_s$, όπου $F_r=\{x: f(x)>r\}$ και $G_s=\{x: g(x)>s\}$. Ανάλογα για την J_-, συμπεραίνουμε ότι για σχεδόν όλα τα $r<s$ είτε $F_r\supset G_s$ είτε $F_r\subset G_s$. Αφού τα σύνολα F_r είναι μπάλες με κέντρο την αρχή των αξόνων, των οποίων οι ακτίνες εξαρτώνται συνεχώς ως προς r (διότι f γνησίως φθίνουσα), συμπεραίνουμε ότι τα G_s είναι μπάλες με κέντρο την αρχή σχεδόν για κάθε s (επιλέγοντας r τέτοιο ώστε $|F_r|=|G_s|$) .

3.5 Λήμμα (Η ανισότητα Riesz για μεταλλάξεις στη μία διάσταση)
Έστω f,g,h μη αρνητικές πραγματικές συναρτήσεις που μηδενίζονται στο άπειρο. Συμβολίζουμε το $\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)g(x-y)h(y)\,dxdy$ με $I(f,g,h)$.

Τότε

$$I(f,g,h)\le I\left(f^*,g^*,h^*\right),$$

όπου $I\left(f^*,g^*,h^*\right)=\infty$ αν $I(f,g,h)=\infty$

Απόδειξη: Με χρήση της αναπαράστασης layer cake και του θεωρήματος Fubini μπορούμε να περιοριστούμε στην περίπτωση κατά την οποία οι f,g,h είναι χαρακτηριστικές συναρτήσεις μετρήσιμων συνόλων, πεπερασμένου μέτρου. Συμβολίζουμε αυτές τις συναρτήσεις με F,G,H και θα χρησιμοποιήσουμε τα ίδια σύμβολα για τα αντίστοιχα σύνολα. Από την εξωτερική ομαλότητα του μέτρου Lebesgue, (δηλαδή για κάθε Borel σύνολο A, $L^n(A)=\inf\left\{L^n(\mathrm{O}): A<\mathrm{O},\ \mathrm{O}\text{ ανοικτό}\right\}$), υπάρχει μια ακολουθία ανοικτών συνόλων F_k, με $F\subset F_k\subset F_{k-1}$ για κάθε k και $\lim\limits_{k\to\infty}L^1(F_k)=L^1(F_k)$. Ειδικότερα όλα τα F_k έχουν πεπερασμένο μέτρο. Ανάλογα επιλέγουμε τα G_k και H_k. Το θεώρημα κυρίαρχης σύγκλισης δίνει ότι

$$\lim_{k\to\infty}I(F_k,G_k,H_k)=I(F,G,H).$$

Οπότε

$$\lim_{k\to\infty}I\left(F_k^*,G_k^*,H_k^*\right)=I\left(F^*,G^*,H^*\right).$$

Έτσι αρκεί να αποδείξουμε το λήμμα στην περίπτωση που τα F,G,H είναι ανοικτά σύνολα πεπερασμένου μέτρου.

Κάθε ανοικτό υποσύνολο F της πραγματικής ευθείας είναι η ένωση αριθμήσιμου πλήθους μη τεμνομένων διαστημάτων. Συμβολίζουμε αυτά τα διαστήματα με $I_1,I_{2,\ldots}$ όπου η αρίθμηση είναι τέτοια ώστε $L^1(I_{k+1})\le L^1(I_k)$. Αν θέσουμε

$$F_m=\bigcup_{k=1}^{m}I_k$$

έχουμε ότι

$$\lim_{m\to\infty} L^1(F_m) = \sum_{k=1}^{\infty} L^1(I_k) = L(F)$$

και από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης έχουμε ότι

$$\lim_{m\to\infty} I(F_m, G_m, H_m) = I(F, G, H)$$

και έτσι

$$\lim_{m\to\infty} I\left(F_m^{\ *}, G_m^{\ *}, H_m^{\ *}\right) = I\left(F^*, G^*, H^*\right).$$

Το νόημα όλων αυτών είναι ότι αρκεί να αποδείξουμε το λήμμα για συναρτήσεις F, G, H που είναι χαρακτηριστικές συναρτήσεις πεπερασμένων ενώσεων ανοικτών μη τεμνόμενων διαστημάτων. Έτσι μπορούμε να γράψουμε

$$F(x) = \sum_{j=1}^{k} f_j\left(x - a_j\right)$$

όπου η f_j είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση ενός διαστήματος με κέντρο την αρχή των αξόνων και a_j είναι πραγματικοί αριθμοί. Ανάλογα γράφουμε

$$G(x) = \sum_{j=1}^{l} g_j\left(x - b_j\right) \text{ και } H(x) = \sum_{j=1}^{m} h_j\left(x - c_j\right).$$

Το $I(F, G, H)$ είναι ένα άθροισμα όρων της μορφής

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x-a) g(x-y-b) h(y-c)\, dx dy.$$

Θέλουμε να δείξουμε ότι το $I(F, G, H)$ γίνεται μέγιστο αν ενώσουμε κάθε οικογένεια διαστημάτων σε ένα διάστημα του οποίου το κέντρο θα βάλουμε στην αρχή των αξόνων. Γι' αυτό θεωρούμε την οικογένεια συναρτήσεων $F_t(x), G_t(x), H_t(x)$ όπου το $f_j\left(x - a_j\right)$ έχει αντικατασταθεί από το $f_j\left(x - ta_j\right), 0 \le t \le 1$ κλπ. Τώρα,

$$\begin{aligned} I_{jkl}(t) &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f_j(x - ta) g_k(x - y - tb) h_l(y - tc)\, dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f_j(x) g_k(x - y) h_l\left(y + (a - b - c)t\right) dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} u_{jk}(y) h_l\left(y + (a - b - c)t\right) dy \end{aligned}$$

όπου $u_{jk}(y) = \int f_j(x) g_k(x - y)\, dx$ είναι μια συμμετρικά φθίνουσα συνάρτηση.

Η $I_{jkl}(t)$ είναι μη φθίνουσα καθώς το t παίρνει τιμές από το 1 μέχρι το 0. Έτσι η $I(F_t, G_t, H_t)$ είναι μη φθίνουσα καθώς το t παίρνει τιμές από το 1 μέχρι το 0 (θεώρημα 3.3). Καθώς το t φθίνει, τα διαστήματα που αντιστοιχούν στα F_t, G_t και H_t κινούνται κατά μήκος της ευθείας προς την αρχή του άξονα. Αν δύο τυχόντα διαστήματα που σχετίζονται στην ίδια συνάρτηση ακουμπήσουν μεταξύ τους, τότε σταματάμε τη διαδικασία και ξαναορίζουμε την συνάρτηση ενώνοντας τα δύο διαστήματα σε ένα.

Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία πεπερασμένο αριθμό φορών, θα έχουμε τελικά τρία διαστήματα κάθε ένα από τα οποία έχει κέντρο την αρχή των αξόνων.

Η διαδικασία αυτή δεν αλλάζει το ολικό μέτρο αυτών των συνόλων και τελικά το $I(F, G, H)$ δεν μειώνεται.

Παρατήρηση 3.5.1

1. $I(f,g,h) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)(g*h)(x)\,dx$.

2. Ορίζοντας $h_R(x) := h(-x)$, έχουμε

$$I(f,g,h) = I(f,h,g) = I(g,f,h_R) = I(h,g_R,f) = I(h,f,g_R) = I(g,h_R,f).$$

3.6 Θεώρημα (Ανισότητα του Riesz για τις μεταλλάξεις)

Έστω f, g, h μη αρνητικές συναρτήσεις του $\mathbb{R}^n$. Τότε το ολοκλήρωμα

$$I(f,g,h) := \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x-y)h(y)\,dxdy,$$

Ικανοποιεί την ανισότητα

$$I(f,g,h) \le I\left(f^*, g^*, h^*\right), \qquad (3.6.1)$$

όπου $I\left(f^*, g^*, h^*\right) = \infty$ αν $I(f,g,h) = \infty$.

Απόδειξη: Ορίζουμε πρώτα τη συμμετρικοποίηση Steiner μιας μετρήσιμης συνάρτησης f ως προς κάποια κατεύθυνση e στον $\mathbb{R}^n$ (με $|e| = 1$). Περιστρέφουμε τον $\mathbb{R}^n$ κατά μια στροφή ρ τέτοια ώστε $\rho e=(1,0,0,...,0)$. Έστω $(\rho f)(x):=f\left(\rho^{-1}x\right)$. Αντικαθιστούμε το $(\rho f)(x_1,...,x_n)$ με το $(\rho f)^{*1}(x_1,...,x_n)$, το οποίο ορίζεται να είναι η μονοδιάστατη, συμμετρικά φθίνουσα μετάλλαξη του (ρf) ως προς x_1, κρατώντας τα $x_2,...,x_n$ σταθερά. Το τελικό βήμα είναι να κάνουμε την περιστροφή ρ^{-1} του χώρου $\mathbb{R}^n$. Η συνάρτηση που προκύπτει είναι η $\rho^{-1}\left((\rho f)^{*1}\right)$, η οποία είναι η ζητούμενη συμμετρικοποίηση Steiner της συνάρτησης f και συμβολίζεται με f^{*e}. Ισοδύναμα, μπορούμε να πούμε ότι μεταλλάσουμε την f κατά μήκος οποιασδήποτε ευθείας στον $\mathbb{R}^n$, που είναι παράλληλη στον e-άξονα. Η συμμετρικοποίηση Steiner ενός μετρήσιμου συνόλου, F^{*e}, είναι το σύνολο που αντιστοιχεί στην μεταλλαγμένη χαρακτηριστική συνάρτηση χ_F^{*e}. Κάθε σύνολο F^{*e} (άρα και η κάθε συνάρτηση f^{*e}) είναι μετρήσιμο για τον ακόλουθο λόγο:

Αρχικά, αρκεί να δείξουμε ότι το F^{*1} μπορεί να θεωρηθεί σαν γράφημα μιας συνάρτησης m του $\mathbb{R}^{n-1}$ που ορίζεται από τη σχέση

$$m(x_2,...,x_n):=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\chi_F^{*1}(x_1,x_2,...,x_n)dx_1.$$

Αυτή είναι μετρήσιμη αφού

$$m(x_2,...,x_n)=\hat{m}(x_2,...,x_n):=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\chi_F(x_1,x_2,...,x_n)dx_1$$

(από τον ορισμό της μετάλλαξης) και η $\hat{m}$ είναι μετρήσιμη (από το θεώρημα Fubini).

Ανάλογα με τη συμμετρικοποίηση Steiner, ορίζεται η συμμετρικοποίηση Schwarz για σύνολα και συναρτήσεις. Αντί να αντικατασταθεί η (ρf) από τη μονοδιάστατη συμμετρικά φθίνουσα μετάλλαξή της, η (ρf) αντικαθίσταται για κάθε τιμή του x_1, από την $n-1$-διάστατη μετάλλαξή της ως προς τις μεταβλητές $x_2,...,x_n$, με σταθερό το x_1.

Για κάθε e μπορούμε να θεωρήσουμε τα σύνολα F^{*e},G^{*e},H^{*e}. Από το λήμμα 3.5 και το θεώρημα Fubini έχουμε $I(F,G,H)\le I\left(F^{*e},G^{*e},H^{*e}\right)$. Στις αποδείξεις που ακολουθούν, σκοπός είναι να βρούμε μια ακολουθία αξόνων $e_1, e_2, \ldots$ τέτοια ώστε η επαναλαμβανόμενη συμμετρικοποίηση Steiner (ως προς $e_1, e_2, \ldots$) του F να συγκλίνει στη μπάλα F^*.

Σημειώνουμε ότι τα σύνολα G, H επίσης μεταλλάσσονται μαζί με το F. Θεωρώντας μια υπακολουθία, μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι ακολουθίες των G, H συγκλίνουν σε κάποια σύνολα. Μετά από αυτό, το supremum του $I(F,G,H)$ όλων των συνόλων δοσμένων μέτρων $L^n(F), L^n(G), L^n(H)$ επιτυγχάνεται όταν $F = F^*$. Όμοια συμπεραίνουμε ότι $G = G^*$ και $H = H^*$.

Απόδειξη συμπάγειας. Έστω ότι $L^2(F) = 1$. Με ένα απλό επιχείρημα προσέγγισης και με χρήση του θεωρήματος μονότονης σύγκλισης, αρκεί να δείξουμε το θεώρημα για φραγμένα σύνολα μόνο. Αν $F \neq F^*$, τότε $L^2(F \cap F^*) = \int \chi_F \chi_F^* = P < 1$. Θέλουμε να επιλέξουμε έναν e_1-άξονα τέτοιον ώστε με $F_1 := F^{*e_1}$ και $\chi_1 := \chi_{F_1}$, το ολοκλήρωμα $\int \chi_1 \chi_F^* = P + \delta$ με $\delta > 0$. Για το λόγο αυτό, θέτουμε $A = \chi_F^*(1 - \chi_F)$, $B = (1 - \chi_F^*)\chi_F$ και θεωρούμε τη συνέλιξη $C(x) = \int A(x-y)B(-y)dy$. Έτσι $\int C = (1-P)^2$, η C είναι μη μηδενική συνάρτηση. Υπάρχει τότε ένα $x \neq 0$ τέτοιο ώστε $C(x) > 0$ και θέτουμε $e_1 = \frac{x}{|x|}$. Το αποτέλεσμα προκύπτει με $\delta \geq C(x)$.

Το supremum όλων των δ, συμβολίζεται με $\overline{\delta}_1 > 0$ και θέτουμε για βελτίωση $\delta_1 \geq \frac{1}{2}\overline{\delta}_1$, το οποίο μπορεί να επιτευχθεί για κάποια επιλογή του e_1. Έτσι, $\int \chi_1 \chi_F^* = P + \delta_1$. Στη συνέχεια παρουσιάζουμε μια συμμετρικοποίηση Steiner παράλληλη στον x_1-άξονα, $(1,0)$, που ακολουθείται από μια συμμετρικοποίηση παράλληλη στον x_2-άξονα, $(0,1)$. Αυτό δεν μπορεί να μειώσει το $\int \chi_1 \chi_F^*$. Μετά τις τελευταίες δύο συμμετρικοποιήσεις, το σύνολο F_1 βρίσκεται μεταξύ μιας μη αρνητικής και συμμετρικά φθίνουσας συνάρτησης, $x_2 = S_1(x_1)$ και της ανάκλασης της, $x_2 = -S_1(x_1)$.

Έχοντας κάνει αυτό, επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία, θεωρώντας έναν e_2-άξονα, τέτοιον ώστε με $\chi_2 := \chi_{F_2}$, να έχουμε $\int \chi_2 \chi_F^* \geq P + \delta_1 + \delta_2$ και $\delta_2 > \frac{1}{2}\overline{\delta}_2$, όπου $\overline{\delta}_2 > 0$ είναι το supremum όλων των πιθανών αυξήσεων.

Αυτή η συμμετρικοποίηση ακολουθείται όπως προηγουμένως από δύο συμμετρικοποιήσεις στα δύο συστήματα αξόνων και προκύπτει μια νέα συμμετρικά φθίνουσα συνάρτηση $x_2 = S_2(x_1)$.

Αυτή η διαδικασία επαναλαμβάνεται επ' αόριστον, δίνοντας μια ακολουθία συνόλων $F_1, F_2, F_3, \ldots$ και συναρτήσεων $S_1, S_2, S_3, \ldots$ οι οποίες σχηματίζουν τα σύνορα αυτών των συνόλων. Αφού το F είναι φραγμένο, περιέχεται σε κάποια μπάλα με κέντρο την αρχή τον αξόνων. Από την $3.2(6)$ έχουμε ότι όλα τα F_j περιέχονται στην ίδια μπάλα και έτσι οι συναρτήσεις S_j είναι ομοιόμορφα φραγμένες και έχουν φορέα (support) σε ένα σταθερό διάστημα. Ισχυριζόμαστε ότι το $\int \chi_j \chi_F^*$ συγκλίνει στο 1.

Για να αποδειχθεί αυτό, ισχυριζόμαστε το αντίθετο, δηλαδή $\int x_j x_F^* \to Q < 1$. Από την ακολουθία συναρτήσεων S_j, μπορούμε να επιλέξουμε μια υπακολουθία, την οποία επίσης συμβολίζουμε με S_j, τέτοια ώστε να συγκλίνει σημειακά σε μια συμμετρικά φθίνουσα συνάρτηση S (Αφού οι S_j είναι ομοιόμορφα φραγμένες και έχουν φορέα σε ένα σταθερό διάστημα, μπορούμε να βρούμε μια υπακολουθία που συγκλίνει σε όλους τους ρητούς $x_1 \neq 0$, αφού είναι αριθμήσιμοι στο πλήθος. Αφού οι S_j είναι συμμετρικά φθίνουσες συναρτήσεις συγκλίνουν και για άρρητους x_1 επίσης). Η υπακολουθία συγκλίνει στον $L^1(\mathbb{R}^1)$ στην S από το θεώρημα κυρίαρχης σύγκλισης και έτσι, αν με W συμβολίσουμε το σύνολο που βρίσκεται μεταξύ S και $-S$, έχουμε ότι

$$\int \chi_W \chi_F^* = \lim_{j \to \infty} \int \chi_j \chi_F^* = Q,$$

ενώ $\int \chi_W = 1$.

Για να έχουμε την αντίφαση, σημειώνουμε ότι από το επιχείρημα της συνέλιξης, που δόθηκε στην αρχή της απόδειξης, υπάρχει ένα $\delta > 0$ και ένας άξονας e, τέτοιος ώστε $W_* := W^{*e}$, με τη χαρακτηριστική συνάρτηση χ_{W_*} να ικανοποιεί την $\int \chi_W \chi_F^* > Q + \delta$. Από την άλλη μπορούμε να βρούμε έναν ακέραιο J τέτοιον ώστε το F_J να ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

1. $\int F_J \chi_F^* > Q - \frac{\delta}{8}$

2. $\left\| \chi_{F_J} - \chi_w \right\|_2 < \frac{\delta}{4}$

Έστω $F_{J*} := F_J^{*e}$. Από το θεώρημα 3.4 ή τη σχέση $(3.3.4)$, έχουμε ότι $\left\| \chi_{F_J} - \chi_{W_*} \right\|_2 < \frac{\delta}{4}$. Από την τριγωνική ανισότητα και την ανισότητα Schwarz έχουμε ότι $\int \chi_{F_J} \chi_F^* > Q + \frac{3\delta}{4}$. Αυτό συνεπάγεται ότι η μέγιστη βελτίωση στο J βήμα, $\overline{\delta}_J$ είναι μεγαλύτερη από $\frac{3\delta}{4}$. Από την άλλη,

$$Q > \int \chi_{F_{J+1}} \chi_F^* \geq \int \chi_{F_J} \chi_F^* + \frac{1}{2}\overline{\delta}_J > Q - \frac{1}{8}\delta + \frac{1}{2}\overline{\delta}_J,$$

που συνεπάγεται ότι $\overline{\delta}_J < \frac{\delta}{4}$, το οποίο είναι η αντίφαση.

Για την περίπτωση $n > 2$ η απόδειξη είναι ίδια. Απλά χρησιμοποιούμε τη συμμετρικοποίηση Schwarz στη θέση της τρίτης συμμετρικοποίησης Steiner, ώστε οι συναρτήσεις $S_1, S_2, S_3, \ldots$ να είναι συμμετρικά φθίνουσες συναρτήσεις των $x_1, \ldots, x_{n-1}$. Η εισαγωγή του n χρησιμοποιείται για να εξασφαλίσει ότι η $n-1$-διάστατη συμμετρικοποίηση Schwarz αυξάνει το ολοκλήρωμα $I(F, G, H)$. Κατά τα υπόλοιπα η απόδειξη ταυτίζεται με εκείνη για την περίπτωση $n = 2$.

Απόδειξη συμμετρικότητας. Για δοσμένα σύνολα F, G και H θα κατασκευάσουμε ακολουθίες συνόλων F_k, G_k και H_k, οι οποίες συγκλίνουν σε μπάλες και τέτοιες ώστε το $I(F_k, G_k, H_k)$ να είναι μια αύξουσα ακολουθία. Το δύσκολο μέρος της απόδειξης είναι και πάλι το βήμα από τη μία στις δύο διαστάσεις, όπως στην προηγούμενη απόδειξη. Η γενίκευσή για τις περισσότερες διαστάσεις ισχύει. Στην παρούσα εστιάζουμε στις δύο διαστάσεις.

Σταθεροποιούμε μια στροφή R_a, με a να συμβολίζει τη γωνία. Επιλέγουμε το a να είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π. Στη συνέχεια, για ένα δοσμένο σύνολο $F \subset \mathbb{R}^2$, πεπερασμένου μέτρου Lebesgue, σχηματίζουμε το σύνολο $F_1 = TSRaF$, όπου S είναι η συμμετρικοποίηση Steiner περί τον άξονα των x και T περί τον άξονα των y. Το F_1 και το F είναι σύνολα με τι ίδιο μέτρο Lebesgue. Η συμμετρική ανάκλαση του F_1 περί των αξόνων x και y και του τμήματος του F_1 που βρίσκεται στο θετικό ημιεπίπεδο, βρίσκεται κάτω από το γράφημα μιας συμμετρικά, μη αύξουσας συνάρτησης, την οποία επιλέγουμε αυθαίρετα να είναι ασθενώς ημισυνεχής. Αυτή η συνάρτηση, δεν είναι απαραίτητα φραγμένη. Τα σύνολα F_k, G_k, H_k προκύπτουν εφαρμόζοντας την $TSRa$, k φορές στα F, G, H.

Θέλουμε να δείξουμε ότι αυτές οι ακολουθίες συγκλίνουν στον $L^2\left(\mathbb{R}^2\right)$ σε μπάλες με τον ίδιο όγκο. Σημειώνουμε τις ανισότητες

$$\|T\chi_F - T\chi_G\|_2 \le \|\chi_F - \chi_G\|_2, \quad \|S\chi_F - S\chi_G\|_2 \le \|\chi_F - \chi_G\|_2 \qquad (3.6.2)$$

και την ισότητα

$$\|R_a\chi_F - R_a\chi_G\|_2 \le \|\chi_F - \chi_G\|_2 \qquad (3.6.3)$$

οι οποίες ισχύουν για δύο οποιαδήποτε σύνολα πεπερασμένου μέτρου. Οι δύο πρώτες προκύπτουν από την $(3.3.4)$ και η τελευταία προκύπτει από το γεγονός ότι οι στροφές διατηρούν το μέτρο. Από αυτό συμπεραίνουμε ότι αρκεί να δείξουμε τη σύγκλιση για φραγμένα σύνολα. Για $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε ένα $\tilde{F}$ που να περιέχεται σε μια μπάλα με κέντρο την αρχή, τέτοια ώστε $\left\|\chi_{F_k} - \chi_{\tilde{F}_k}\right\|_2 < \varepsilon$. Από την $(3.6.2)$ έχουμε ότι $\left\|\chi_{F_k} - \chi_{\tilde{F}_k}\right\|_2 < \varepsilon$ για κάθε k και έτσι τα F_k συγκλίνουν αφού τα $\tilde{F}_k$ συγκλίνουν. Έτσι, μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα F, G, H ως φραγμένα σύνολα περιέχονται σε κάποια μπάλα. Από την $(3.2(3))$ γνωρίζουμε ότι τα F_k, G_k, H_k περιέχονται στην ίδια μπάλα.

Το θετικό τμήμα του F_k είναι φραγμένο από το γράφημα μιας συμμετρικά, μη αύξουσας, ασθενώς ημισυνεχούς συνάρτησης h_k, η οποία είναι ομοιόμορφα φραγμένη. Όπως στην προηγούμενη απόδειξη, υπάρχει μια υπακολουθία $h_{k(l)}(x)$ που συγκλίνει παντού σε μια ασθενώς ημισυνεχή συνάρτηση h, η οποία φράσσει το θετικό τμήμα ενός συνόλου D. Το πρόβλημα είναι να δείξουμε ότι το D είναι δίσκος. Θεωρούμε μια συνάρτηση g, η οποία είναι γνησίως συμμετρικά φθίνουσα για παράδειγμα $g(x)=e^{-|x|^2}$) και ορίζουμε το $\Delta_k=\left\|g-\chi_{F_k}\right\|_2$. Σημειώνουμε ότι $Tg=Sg=R_a g=g$. Έτσι, από το θεώρημα 3.3 η Δ_k είναι μη αύξουσα και έχει όριο Δ. Από την προηγούμενη υπόθεση, γνωρίζουμε ότι η $\chi_{F_{k(l)}}$ συγκλίνει σημειακά σχεδόν παντού στη χαρακτηριστική χ_D της D. Αφού η $\chi_{F_{k(l)}}$ δίνεται από τη χαρακτηριστική συνάρτηση μιας μπάλας με κέντρο την αρχη, από το θεώρημα κυρίαρχης σύγκλισης συμπεραίνουμε ότι

$$\Delta=\left\|g-\chi_D\right\|_2 .$$

Από τις $(3.6.2)$, $(3.6.3)$ έχουμε ότι

$$\left\|\chi_{F_{k(l)+1}}-TSR_a\chi_D\right\|_2=\left\|TSR_a\chi_{F_{k(l)}}-TSR_a\chi_D\right\|_2\to 0 \text{ καθώς } l\to\infty .$$

Από τη μονοτονικότητα της Δ_k, $\Delta=\left\|g-TSR_a\chi_D\right\|_2$. Από την άλλη, αφού η g είναι αναλλοίωτη ως προς τη στροφή, $\left\|g-R_a\chi_D\right\|_2=\left\|g-\chi_D\right\|_2=\Delta$. Έτσι

$$\left\|g-TSR_a\chi_D\right\|_2=\left\|g-R_a\chi_D\right\|_2 .$$

Αφού η g είναι γνησίως φθίνουσα, από το θεώρημα 3.3 και το θεώρημα Fubini έχουμε ότι $TSR_a\chi_D=R_a\chi_D$ σχεδόν παντού. Γενικά η $R_a\chi_D$ είναι συμμετρική ως προς την ανάκλαση p ως προς τον άξονα των x και έτσι, $R_a\chi_D=PR_a\chi_D=R_{-a}P\chi_D=R_{-a}\chi_D$, σχεδόν παντού, $R_{2a}\chi_D=\chi_D$, ή η χ_D είναι αναλλοίωτη κατά τη στροφή R_{2a}. Η γωνία $\beta=2a$, είναι από την υπόθεση άρρητο πολλαπλάσιο του 2π και είναι γνωστό ότι κάθε αριθμός $0\le\theta<2\pi$ μπορεί να προσεγγιστεί από τα πολλαπλάσια του $\beta \bmod 2\pi$. Έτσι η συνάρτηση $\mu(\theta):=\left\|\chi_D-R_\theta\chi_D\right\|_2$ έχει μηδενικά που είναι πυκνά στο διάστημα $[0,2\pi)$. Θα δείξουμε ότι η μ είναι συνεχής, οπότε συνεπάγεται ότι $\chi_D=R_\theta\chi_D$ σχεδόν παντού για κάθε θ. Έτσι, $D=F^*$.

Αρκεί να δείξουμε ότι η $\int \chi_D R_\theta \chi_D = r(\theta)$ είναι συνεχής. Από το θεώρημα $(1.1.6)$ υπάρχει ακολουθία διαφορίσιμων συναρτήσεων u_k τέτοιων ώστε $\delta_k = \|\chi_D - u_k\|_2 \to 0$ καθώς το $k \to 0$. Από την ανισότητα Schwarz

$$\left|\int (\chi_D - u_k) R_\theta \chi_D\right| \le \delta_k \|\chi_D\|_2,$$

από την οποία προκύπτει ότι οι συναρτήσεις $r_k(\theta) = \int u_k R_\theta \chi_D$ συγκλίνουν στην $r(\theta)$ ομοιόμορφα. Όμως, $r_k(\theta) = \int (R_{-\theta} u_k) \chi_D$ η οποία είναι συνεχής και έτσι η $r(\theta)$ είναι συνεχής.

Μια υπακολουθία της χ_{F_k} συγκλίνει σημειακά σχεδόν παντού στη χ_D και έτσι κάθε σύνολο F_k περιέχεται σε μια μπάλα με κέντρο την αρχή των αξόνων. Ωστόσο, για αυτή την υπακολουθία, η $\|\chi_D - \chi_{F_k}\|_2$ συγκλίνει στο μηδέν από την κυρίαρχη σύγκλιση. Από το θεώρημα 3.4, η ακολουθία $\|\chi_D - \chi_{F_k}\|_2$ είναι φθίνουσα. Αφού η υπακολουθία συγκλίνει στο μηδεν, η ακολουθία θα συγκλίνει στο μηδέν.

Τα ίδια ακριβώς εφαρμόζονται στα G_k, H_k και έτσι οι $\chi_{F_k}, \chi_{G_k}, \chi_{H_k}$ συγκλίνουν στον $L^2(\mathbb{R}^2)$ στις $\chi_{F^*}, \chi_{G^*}, \chi_{H^*}$. Από αυτό προκύπτει ότι

$$\lim_{k\to\infty} I(F_k, G_k, H_k) = I(F^*, G^*, H^*).$$

Από την ανισότητα του Riesz στη μία διάσταση, το $I(F_k, G_k, H_k)$ είναι μη φθίνουσα ακολουθία και το θεώρημα έχει αποδειχθεί.

Η γενίκευση στις περισσότερες διαστάσεις αποδεικνύεται με επαγωγή. Το T αντιστοιχεί στη συμμετρικοποίηση Steiner κατά μήκος του n-άξονα και το S είναι η συμμετρικοποίηση Schwarz κάθετα στον n-άξονα. Η ακολουθία που θεωρούμε είναι η $\left\{(TSR)^k \chi_F\right\}$, όπου R είναι κάθε στροφή που στρέφει τον n-άξονα κατά 90°. Ακολουθώντας τα ίδια βήματα για τις δύο διαστάσεις, λαμβάνουμε σαν όριο, ένα σύνολο D, το οποίο έχει τις ακόλουθες ιδιότητες: είναι συμμετρικό ως προς τη στροφή του n-άξονα και η RD επίσης. Δηλαδή, το D είναι συμμετρικό ως προς τις στροφές των δύο κάθετων αξόνων και οι αντίστοιχες διαγώνιες τομές είναι $n-1$-διάστατες μπάλες. Για να γίνει σαφές ότι το D είναι μπάλα, θεωρούμε την $\chi_\varepsilon = j_\varepsilon * \chi_D$ όπου $j_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ και το $j(x)$ είναι λεία ακτινική συνάρτηση με $\int_{\mathbb{R}^n} j = 1$. Γνωρίζουμε από το θεώρημα $(1.1.6)$ ότι η χ_ε είναι λεία και $\chi_\varepsilon \to \chi_D$ στον $L^2(\mathbb{R}^n)$ καθώς το $\varepsilon \to 0$. Επιπλέον, η χ_ε έχει τις ίδιες ιδιότητες συμμετρία με την χ_D. Έτσι, θέτοντας $\rho^2 = x_1^2 + ... + x_{n-2}^2$ έχουμε ότι

$$\chi_\varepsilon(x_1,...,x_n) = f\left(\sqrt{\rho^2 + x_{n-1}^2}, x_n\right) = g\left(\sqrt{\rho^2 + x_n^2}, x_{n-1}\right)$$

για συνεχείς συναρτήσεις f, g. Έχουμε επιλέξει τον $n-1$-άξονα σαν άλλο άξονα συμμετρίας.
Θέτοντας $x_n = 0$ λαμβάνουμε

$$g(\rho, x_{n-1}) = f\left(\sqrt{\rho^2 + x_{n-1}^2}, 0\right) \text{ για κάθε } \rho > 0,$$

οπότε

$$\chi_\varepsilon(x_1,...,x_n) = f\left(\sqrt{x_1^2 + ...x_n^2}, 0\right)$$

σχεδόν παντού, όπου η χ_ε είναι ακτινική. Έτσι η χ_D είναι επίσης ακτινική ως όριο ακτινικών συναρτήσεων.

3.7 Θεώρημα (Hardly – Littlewood – Sobolev ανισότητα)

Έστω $p, r > 1$ και $0 < \lambda < n$ με $\frac{1}{p} + \frac{\lambda}{n} + \frac{1}{r} = 2$.

Έστω $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ και $h \in L^r(\mathbb{R}^n)$. Τότε υπάρχει μία βέλτιστη σταθερά $C(n, \lambda, p)$ η οποία δεν εξαρτάται από τις f και g και τέτοια ώστε

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) |x-y|^{-\lambda} h(y) dx dy \right| \le C(n, \lambda, p) \|f\|_p \|h\|_r.$$

Η βέλτιστη σταθερά ικανοποιεί την παρακάτω σχέση:

$$C(n, \lambda, p) \le \frac{n}{n-\lambda} \left(\frac{|S^{n-1}|}{n} \right)^{\frac{\lambda}{n}} \cdot \frac{1}{p \cdot r} \left[\left(\frac{\frac{\lambda}{n}}{1 - \frac{1}{p}} \right)^{\frac{\lambda}{n}} + \left(\frac{\frac{\lambda}{n}}{1 - \frac{1}{r}} \right)^{\frac{\lambda}{n}} \right]. \quad (3.7.1)$$

Αν $p = r = \frac{2n}{2n-\lambda}$, τότε

$$C(n,\lambda,p)=C(n,\lambda)=\pi^{\frac{\lambda}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}-\frac{\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(n-\frac{\lambda}{2}\right)}\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(n)}\right\}^{-1+\frac{\lambda}{n}}. \qquad (3.7.2)$$

Σε αυτή την περίπτωση η $(3.7.1)$ γίνεται ισότητα αν και μόνο αν $h\equiv(const.)f$ και $f(x)=\mathrm{A}\left(\gamma^2+|x-a|\right)^{\frac{-(2n-\lambda)}{2}}$ για κάποιο $\mathrm{A}\in\mathbb{C},\ 0\neq\gamma\in\mathbb{R}$ και $a\in\mathbb{R}^n$.

Παρατήρηση 3.7.1

Η ανισότητα $(3.7.1)$ αποδείχθηκε στα [Hardly – Littlewood, 1928, 1930] και [Sobolev, 1938]. Η εκδοχή για την βέλτιστη σταθερά που δίνεται από τη σχέση $(3.7.2)$ αποδείχθηκε στο [Lieb, 1983].

Βλέπε [Lieb –Loss, Lieb]

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

4.1 Συμμετρικοποίηση Steiner

Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ μία φραγμένη περιοχή. Έστω $L^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ ένα υπερεπίπεδο που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Περιστρέφουμε τον χώρο έτσι ώστε το L να είναι το $x_n = 0$ υπερεπίπεδο.

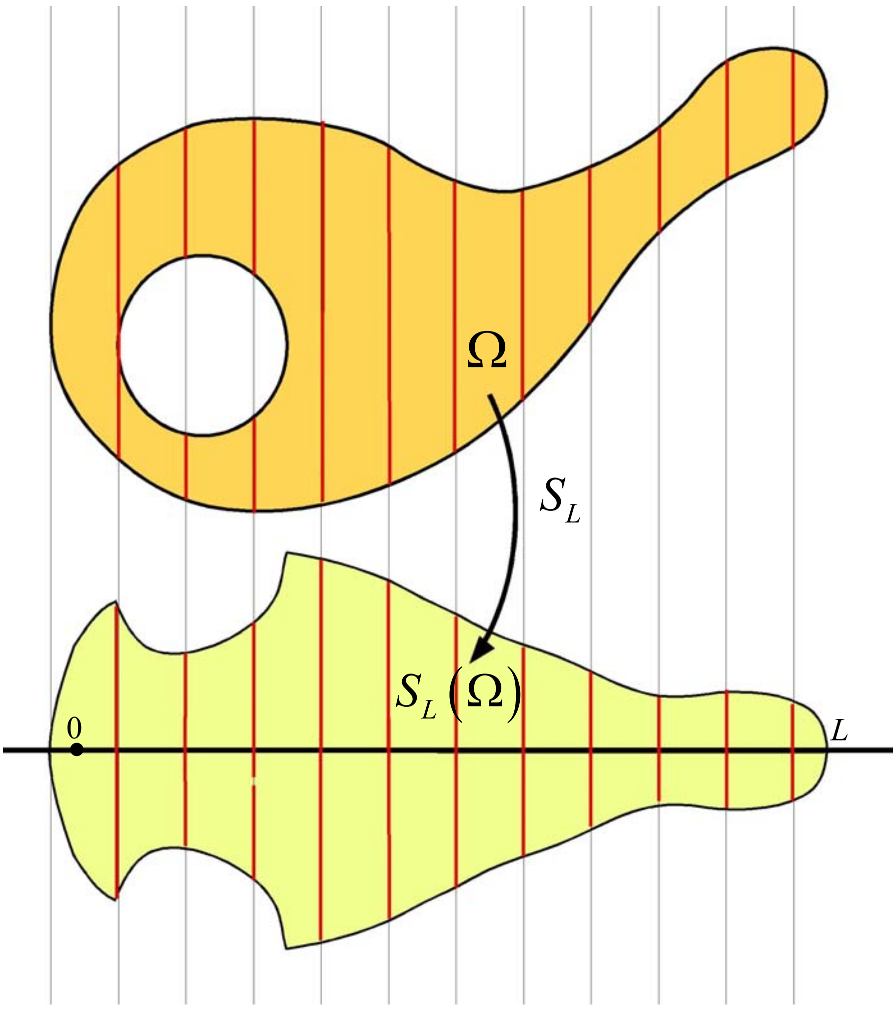
Ορίζουμε για κάθε $\boldsymbol{x} \in L$ το σύνολο $G_x = \{\boldsymbol{x} + \lambda e_n : \lambda \in \mathbb{R}\}$ να είναι η κάθετη ευθεία στο L που διέρχεται από το $\boldsymbol{x}$.

Έστω $m_x = |\Omega \cap G_x|$ είναι το μέτρο (μέγιστο μήκος) της τομής.

Αντικαθιστούμε τις τομές με διαστήματα κέντρου πάνω στο L και ιδίου μήκους. Τότε προκύπτει η συμμετρικοποιημένη περιοχή.

$$S_L(\Omega) = \left\{ \boldsymbol{x} + \lambda e_n : \boldsymbol{x} + \mu e_n \in \Omega \text{ για κάποια } \mu \in \mathbb{R} \text{ και} -\frac{1}{2} m_x \leq \lambda \leq \frac{1}{2} m_x \right\}$$

Αν $\Pi : \mathbb{R}^n \to L$ είναι η ορθογώνια προβολή



τότε $\omega = \Pi(\Omega)$ είναι η προβολή του Ω πάνω στο L. Έχουμε $(x,\lambda) \in S(\Omega) \underset{o\rho\sigma}{\Leftrightarrow} x \in L$ και $x + \lambda e_n \in S_L(\Omega)$.

Πρόταση.

Η Συμμετρικοποίηση Steiner διατηρεί τον όγκο.

Το αποτέλεσμα προκύπτει από το θεώρημα Fubini.

$$\begin{aligned} V(\Omega) &= \int_{(x_1,\dots,x_{n-1})\in\omega} \left(\int_{x_n \in G \cap \Omega} dx_n \right) dx_1 dx_2 \dots dx_{n-1} \\ &= \int_{(x_1,\dots,x_{n-1})\in\omega} m_{(x_1,\dots,x_{n-1},0)} dx_1 dx_2 \dots dx_{n-1} \\ &= \int_{(x_1,\dots,x_{n-1})\in\omega} \left(\int_{x_n \in G_x \cap S(\Omega)} dx_n \right) dx_1 dx_2 \dots dx_{n-1} \\ &= V\left(S_L(\Omega)\right) \end{aligned}$$

Η διάμετρος του Ω είναι η μεγαλύτερη απόσταση ανάμεσα στα σημεία του Ω δηλαδή

$$diam(\Omega) = \sup_{x,y\in\Omega} d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$

Πρόταση.

Η συμμετρικοποίηση Steiner μειώνει τη διάμετρο.

Θεωρούμε (x,λ) και (y,μ) δύο σημεία στο $S(\Omega)$ και θα δείξουμε ότι η μεταξύ τους απόσταση είναι το πολύ $diam(\Omega)$.

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}^2 &= d\left((x,\lambda),(y,\mu)\right)^2 = (X_1 - Y_1)^2 + \dots + (X_{n-1} - Y_{n-1})^2 \\ &= (x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_{n-1} - y_{n-1})^2 + (\lambda - \mu)^2 < \left\| (x-y)^2 \right\| + (\lambda - \mu)^2 \le \\ &\le \|x - y\|^2 + \left(\frac{m_x + m_y}{2} \right)^2 \\ &\le \sup_{\substack{p \in G_x \cap \Omega, \\ q \in G_y \cap \Omega}} d(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})^2 \\ &= \delta^2 \\ &\le diam(\Omega)^2 \end{aligned}$$

Επίσης έχουμε το ίδιο αποτέλεσμα με την προηγούμενη πρόταση αποδεικνύοντας ότι $\tilde{\delta} \le \delta^2$ (βλ. σχήμα)

Πράγματι αν

$$a = \min(G_x \cap \Omega),$$

$$b = \max(G_x \cap \Omega),$$

$$c = \min\left(G_y \cap \Omega\right),$$

$$d = \max\left(G_y \cap \Omega\right)$$

τότε

$$\delta^2 = \left(b-c\right)^2 + \left\|x-y\right\|^2 \le diam\left(\Omega\right)^2.$$

Πράγματι η διαγώνιος δ έχει το μεγαλύτερο μήκος έτσι ώστε

$$\left(b-c\right)^2 \ge \left(d-a\right)^2.$$

Με συμμετρικοποίηση,

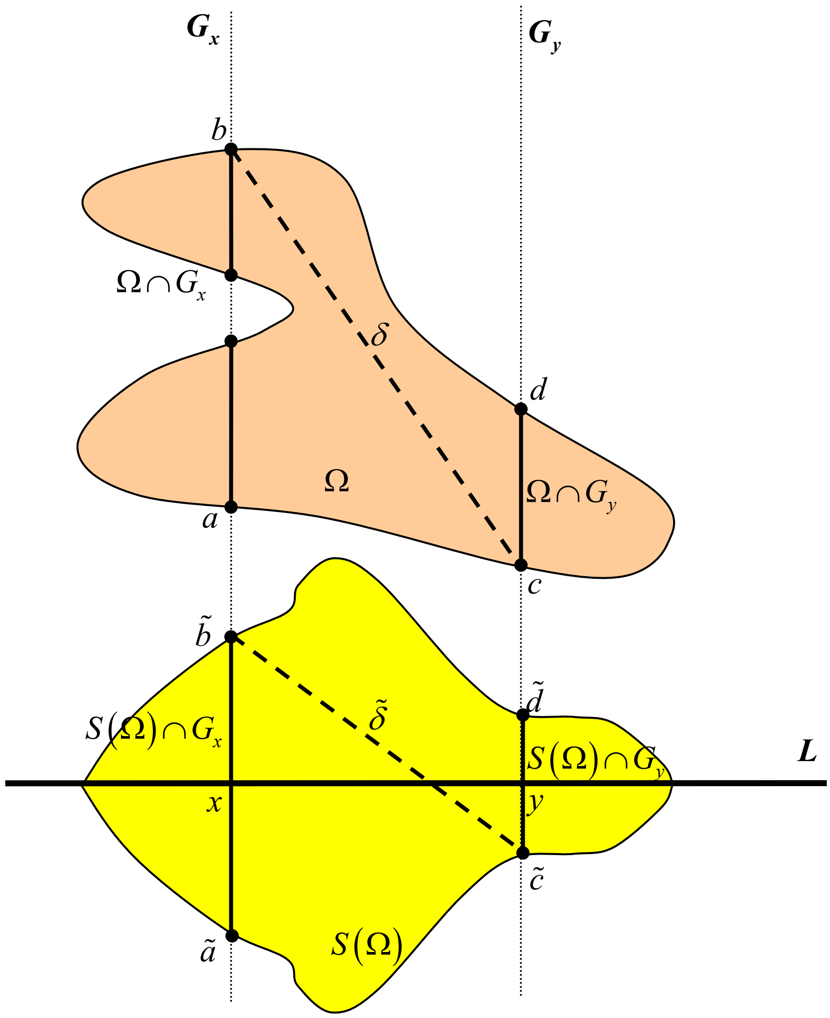
$$2\tilde{b} = -2\tilde{a} = m_x \le b-a \text{ και}$$

$$2\tilde{d} = -2\tilde{c} = m_y \le d-c$$

Ώστε

$$\tilde{\delta}^2 = \left(\frac{m_x+m_y}{2}\right)^2 + \left\|x-y\right\|^2 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} 4\tilde{\delta}^2 &= \left(2\tilde{b}+2\tilde{d}\right)^2 + 4\left\|x-y\right\|^2 \\ &\le \left(b-a+d-c\right)^2 + 4\left\|x-y\right\|^2 \\ &\le \left(2\left[b-c\right]\right)^2 + 4\left\|x-y\right\|^2 = 4\delta^2. \end{aligned}$$



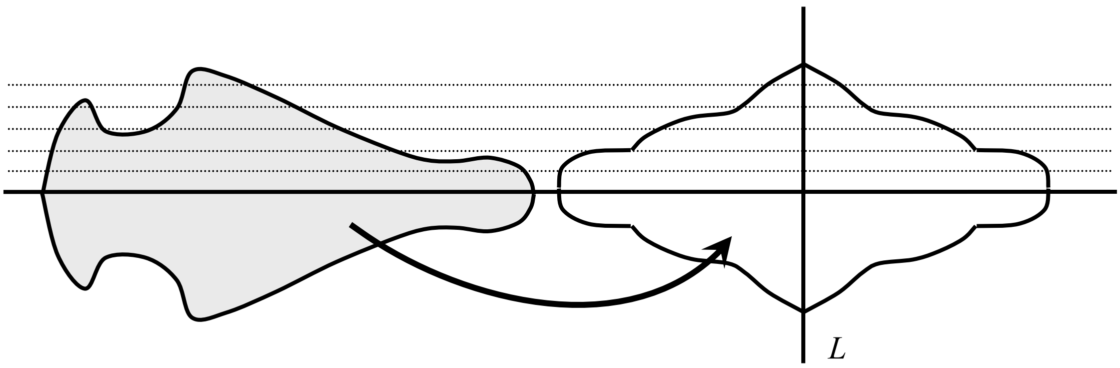
Εφαρμογές

Θεώρημα 4.1.1(Ισοδιαμετρική ανισότητα Bieberbach, 1915)

Έστω $K \subset \mathbb{R}^n$ μια συμπαγής περιοχή. Τότε ο όγκος ικανοποιεί τη σχέση:

$$K \leq \frac{|B_1| diam(\Omega)^n}{2^n}$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν η K είναι μια κλειστή σφαίρα ακτίνας $\frac{1}{2} diam(\Omega)$.



4.1.2 Θεώρημα (ισοπεριμετρική ανισότητα)

Έστω $\gamma \subset E^2$ μια απλή κλειστή κυρτή καμπύλη σε ένα επίπεδο της οποίας το μήκος είναι L και περιέχει μια περιοχή A. Τότε ισχύει η παρακάτω ανισότητα

$$4\pi A \leq L^2 \qquad (4.1.1)$$

Αν στην $(4.1.1)$ ισχύει η ισότητα τότε η καμπύλη γ είναι κύκλος.

Πράγματι η περιφέρεια του δίσκου A είναι ένας κύκλος με ακτίνα r και μήκος $L = 2\pi r$. Το εμβαδόν του $A = \pi r^2 = \frac{L^2}{4\pi}$.

4.1.3 Θεώρημα

Έστω $K \in \mathbb{R}^n$ συμπαγές σύνολο και S_L η συμμετρικοποίηση Seiner ως προς το υπερεπίπεδο L. Τότε:

1. Αν $K_1 \subseteq K_2$ τότε $S_L(K_1) \subseteq S_L(K_2)$.

2. Αν $0 \in L$ τότε $S_L(B_r(0)) = B_r(0)$.

3. Αν $0 \in L$ και $\lambda > 0$ τότε $S_L(\lambda K) \subseteq \lambda S_L(K)$.

4. Αν K κυρτό τότε $S_L(K)$ κυρτό.

5. Αν K είναι ένα πολύεδρο τότε και το $S_L(K)$ είναι επίσης.

6. Αν K έχει σημειακά λείο σύνορο τότε και το $S_L(K)$ έχει επίσης.

4.1.4 Θεώρημα (εναλλάσσουσα συμμετρικοποίηση Steiner)

Έστω Sym_1 και Sym_2 δύο ($k-1$)-διάστατες συμμετρικοποιήσεις Steiner στον $\mathbb{R}^n$, όπου $2 \le k \le n$ έτσι ώστε τα συμμετρικά επίπεδα T_1 και T_2 να έχουν τομή ένα ($n-k$)-διάστατο επίπεδο και η γωνία γ μεταξύ των δύο συμμετρικών επιπέδων είναι ένα άρρητο πολλαπλάσιο του π.

Τότε

$$f = Sym_2 \circ Sym_1$$

είναι ένας συγκλίνων μετασχηματισμός συνόλου.

(Συγκλίνων μετασχηματισμός συνόλου λέγεται μια συνάρτηση

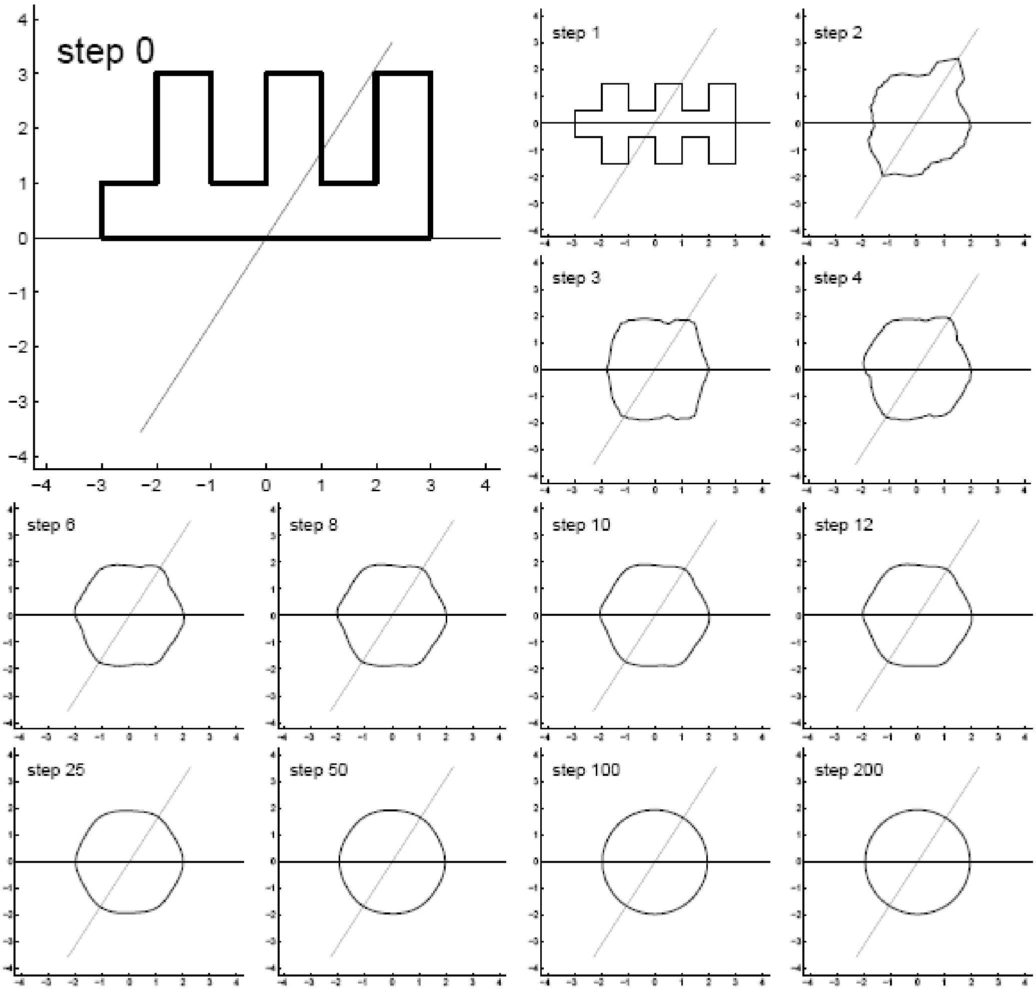
$$f : \mathcal{A} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$$

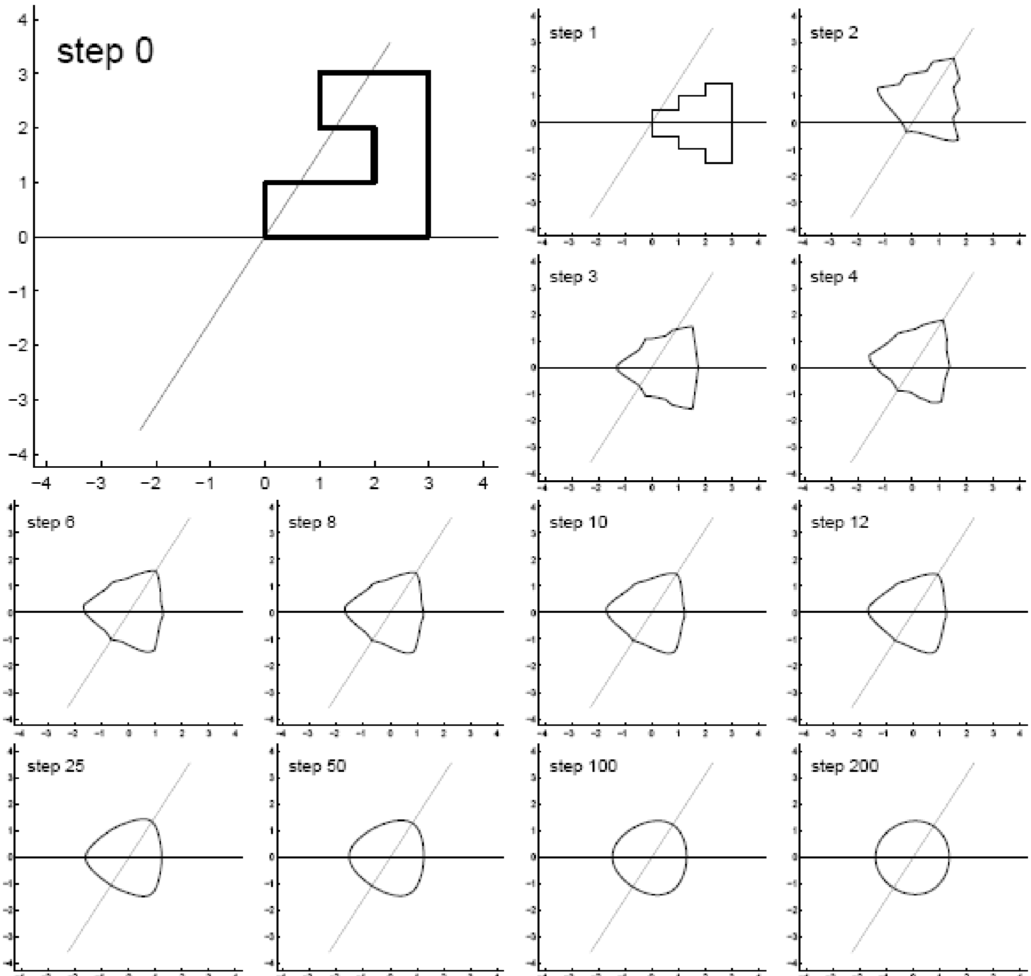
για την οποία ισχύουν:

1. Αν $\mathcal{F}$ είναι το σύνολο των συμπαγών συνόλων $F \in \mathcal{F}$ όπου $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ έτσι ώστε $(\mathcal{F} \cup \{\varnothing\}) \subseteq \mathcal{A}$, $f(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{F}$ και $f(\varnothing) = \varnothing$

2. $\lim\limits_{i\to\infty} f^i(F)$ υπάρχει όπου $f^i = f \circ f^{i-1}$, $i \in \mathbb{N}_+$ είναι η επαγωγική σχέση της σχέσης $f \circ f = f^2$).

Επιπλέον, έστω Sym η k-διάστατη συμμετρικοποίηση Steiner στον $\mathbb{R}^n$ που ορίζεται από το συμμετρικό επίπεδο $T = T_1 \cap T_2$. Τότε για κάθε $F \in \mathcal{F}$ $\lim\limits_{i\to\infty} f^i(F) = Sym(F)$


step 0
step 1
step 2
step 3
step 4
step 6
step 8
step 10
step 12
step 25
step 50
step 100
step 200


step 0
step 1
step 2
step 3
step 4
step 6
step 8
step 10
step 12
step 25
step 50
step 100
step 200

Βιβλιογραφία

[1] *Burchard Almut, "Rearrangement inequalities". 47 pages. Lecture notes, Department of Mathematics ,University of Toronto, (2009).*

[2] *Hardy, G. H., Littlewood, J. E., and Pólya, G. Inequalities, Cambridge University Press, (1959).*

[3] *Kawohl, B. Rearrangements and Convexity of Level sets in PDE, Lecture Notes in Mathematics, 1150, Springer-Verlag (1985).*

[4] *Kesavan, S. "Symmetrization and Applications", Series in Analysis, Volume 3,World Scientific (2006).*

[5] *Lieb, E. H., Sharp constants in the Hardy – Littlewood – Sobolev and related inequalities, Ann. of Math. 18, 349 – 374, (1983).*

[6] *Lieb, E. H. and Loss, M. Analysis, Graduate Stydies in Mathematics, 14, American Mathematical Society (2001).*

[7] *Petersen S., "Symmetrizations and Isoperimetric Inequalities", Master's Thesis, Department of Mathematical Sciences, Göteborg University, (2008).*

[8] *Polya, G. and Szego, G., Isoperimetric inequalities in mathematical physics, Princeton University Press, Princeton, (1951).*

[9] *Sobolev, S. L., On a theorem of functional analysis, Mat. Sb. (N.S.) 4, 471 – 479,(1938), English transl., A.M.S. Transl. Ser. 2, vol. 34, pp. 39-68, (1963).*

[10] *Talenti, G. Best constant in Sobolev inequality, Ann. Mat. Pura Appl. 110, 353-372, (1976).*

[11] *Treibergs Andrejs, Steiner Symmetrization and Applications, http://www.math.utah.edu/treiberg/Steiner/SteinerSlides.pdf, University of Utah (2008).*