ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΩΝ ΧΩΡΩΝ

Διονύσιος Στουφής

Διπλωματική Εργασία για Μ.Δ.Ε. στα Θεωρητικά Μαθηματικά

Επιβλέπων: Επίκουρος Καθηγητής Ανδρέας Αρβανιτογεώργος

ΠΑΤΡΑ 2011

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η θεωρία των συμμετρικών χώρων αποτελεί μια σπουδαία κλάση των ομογενών χώρων, με εφαρμογές σε πολλούς κλάδους των μααθηματικών, όπως στην αλγεβρική και την διαφορική γεωμετρία.
Σε αυτή την εργασία θα δώσουμε τον ορισμό των συμμετρικών χώρων, τα βασικά τους χαρακτηριστικά και την ταξινομησή τους.
Θα περιγράψουμε τους χώρους αυτούς κυριώς αλγεβρικά, οπότε δεν θεωρείται απαραίτητο από τον αναγνώστη να γνωρίζει εκτενώς την θεωρία της διαφορικής γεωμετρίας για να μπορέσει κατανοήσει πλήρως την εργασία.

Περιεχόμενα

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι συμμετρικοί χώροι αποτελούν μια σπουδαία κλάση ομογενών πολλαπλοτήτων Riemann με πολλές σημαντικές γεωμετρικές ιδιότητες, χρήσιμες σε πολλούς κλάδους των μαθηματικών όπως στην αλγεβρική γεωμετρία, διαφορική γεωμετρία, μαθηματική φυσική και θεωρία αναπαραστάσεων.

Η σημαντική αυτή θεωρία αναπτύχθηκε από τον Elie Cartan περί τα 1925-30 όταν του προσέλκησε το ενδιαφέρον μια ειδική κλάση πολλαπλοτήτων Riemann , των οποίων η συναλοίωτη παράγωγος ισούται με μηδέν.
Η μελέτη αυτών των αρχικών χώρων (espaces ε), όπως αρχικά τους είχε ονομάσει ο E. Cartan , και στη συνέχεια συμμετρικών χώρων ήταν αρχικά ένα πρόβλημα διαφορικής γεωμετρίας. Όμως με μια σειρά από μελέτες μεταξύ του 1926 και 1935 ο E. Cartan ανέδειξε την σύνδεση αυτών των χώρων με τις ημιαπλές ομάδες αυξάνοντας σημαντικά τις εφαρμογές τους σε ομάδες Lie .

Λόγω της πλούσιας συμμετρίας τους οι συμμετρικοί χώροι μπορούν να περιγραφούν αλγεβρικά αλλά και γεωμετρικά.
Σε αυτή την εργασία θα ασχοληθούμε περισσότερο με την αλγεβρική περιγραφή των συμμετρικών χώρων, αποδεικνύοντας την σχέση τους με τις άλγεβρες Lie , χωρίς όμως να παραλήψουμε τον γεωμετρικό ορισμό των (τοπικα) συμμετρικων χώρων.

Στο πρώτο κεφάλαιο της εργασίας θα διατυπώσουμε τον αλγεβρικό ορισμό των συμμετρικών χώρων μαζί με κάποιες σημαντικές ιδιότητες τους σε γαιωδαισιακές καμπύλες. Στη συνέχεια θα παραθέσουμε κάποια παραδείγματα συμμετρικών χώρων χρησιμοποιώντας τον ορισμό.
Στο δεύτερο κεφάλαιο, αφού περιγράψουμε την δομή ενός συμμετρικού χώρου και δείξουμε την σχέση του με τις άλγεβρες Lie , θα αποδείξουμε τον τύπο που μας δίνει τον τελεστή καμπυλότητας και θα αναφέρουμε τον γεωμετρικό ορισμό του συμμετρικού χώρου.
Τον τελεστή καμπυλότητας ενός συμμετρικού χώρου θα τον χρησιμοποιήσουμε και στο τρίτο κεφάλαιο όταν θα ορίσουμε τους συμμετρικούς χώρους συμπαγούς και μη συμπαγούς τύπου. Επιπλέον, θα ορίσουμε και την δυϊκότητα των δύο αυτών τύπων δίνοντας και ένα παράδειγμα.

Στο τέλος αυτής της εργασίας θα περιγράψουμε αναλυτικά το παράδειγμα του κύκλου S^1 ως συμμετρικού χώρου για την πλήρη κατανόηση όλων των προηγούμενων.

1. ΒΑΣΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ

Πριν περάσουμε στην αναλυτική παρουσίαση της θεωρίας των συμμετρικών χώρων θα χρησιμοποιήσουμε αυτό το εισαγωγικό κεφάλαιο για να δώσουμε κάποιους ορισμούς και προτάσεις που θα μας φανούν χρήσιμοι στο υπόλοιπο μέρος της εργασίας.

Ορισμός 1.1 Μια ομάδα Lie G είναι μια λεία πολλαπλότητα που έχει την δομή ομάδας. Δηλαδή η απεικόνιση $\phi : G \times G \mapsto G$ που ορίζεται από την σχέση $\phi(x, y) = x \cdot y^{-1}$ να είναι λεία.

Παραδείγματα

(1) Τα σύνολα $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ είναι ομάδες Lie με πράξη την πρόσθεση διανυσμάτων.

(2) Τα σύνολα $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{C}^*$ είναι ομάδες Lie με πράξη τον πολλαπλασιασμό.

(3) Το γινόμενο $G \times H$ δύο ομάδων Lie είναι και αυτό ομάδα Lie με πράξη τον πολλαπλασιασμό $(g_1, h_1)(g_2, h_2) = (g_1g_2, h_1h_2)$.

(4) Η γενική γραμμική ομάδα $GL_n\mathbb{R}$ όλων των $n \times n$ πραγματικών πινάκων με πράξη τον πολλαπλασιασμό.

Ορισμός 1.2 Αν H είναι κλειστη υποομάδα μιας ομάδας Lie G, τότε το H είναι υποπολλαπλότητα του G και άρα υποομάδα Lie του G.

Οπότε χρησιμοποιώντας τον παραπάνω ορισμό μπορούμε να δώσουμε και άλλα παραδείγματα ομάδων Lie :

(5) Η ειδική γραμμική ομάδα $SL_n\mathbb{R} = \{A \in GL_n\mathbb{R} : \det A = 1\}$

(6) Η ορθογώνια ομάδα $O(n) = \{A \in GL_n\mathbb{R} : AA^{-1} = I\}$

(7) Η ειδική ορθογώνια ομάδα $SO(n) = \{A \in O(n) : \det A = 1\}$

Ορισμός 1.3 Μια άλγεβρα Lie είναι ένας διανυσματικός χώρος V με μια απεικόνιση $[\ ,\ ] : V \times V \to V$ τέτοια ώστε να ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

(1) $[a_1V_1 + a_2V_2, W] = a_1[V_1, W] + a_2[V_2, W]$

(2) $[V,W]=-[W,V]$

(3) $[V_1,[V_2,V_3]]+[V_3,[V_1,V_2]]+[V_2,[V_3,V_1]]=0$

Η τελευταία σχέση είναι γνωστή ως ταυτότητα Jacobi .

Ας δούμε τώρα πως συνδέονται οι άλγεβρες Lie με τις ομάδες Lie .
Εαν G είναι μια ομάδα Lie , τότε για κάθε $g \in G$ έχουμε τις διαφορίσιμες αποικονίσεις:

$L_\alpha : G \to G$, $L_\alpha(g) = \alpha g$ (αριστερή μεταφορά)

$R_\alpha : G \to G$, $R_\alpha(g) = g\alpha$ (δεξιά μεταφορά)

Τότε ένα $V \in \chi(G)$ καλείται αριστερά αναλλοίωτο (αντίστοιχα δεξιά αναλλοίωτο) αν $dL_\alpha(V(g)) = V(\alpha g)$ (αντίστοιχα $dR_\alpha(V(g)) = V(g\alpha)$).
Εαν το V είναι αριστερά αναλλοίωτο τότε είναι μοναδικά ορισμένο από το στοιχείο $V(e)$, όπου e το ταυτοτικό στοιχείο του G.
Άρα από το $V \in G_e = \mathfrak{g}$ έχουμε ένα αριστερά αναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο $V(g) = dL_g(V(e))$. Γνωρίζουμε ότι ο πολλαπλασιασμός είναι λεία απεικόνιση στην G, οπότε θα είναι και το αριστερά αναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο. Άρα είναι υπόχωρος του$\chi(G)$.
Θα δείξουμε οτι το γινομενο Lie δύο αριστερά αναλλοιώτα διανυσματικών πεδιών παραμένει και αυτό αριστερά ανναλοίωτο. Πράγματι, έστω X, Y δύο αριστερά αναλλοίωτα διανυσματικά πεδία $\alpha, p \in G$ και f μια λεία απεικόνιση της G. Τότε:

$dL_\alpha[X,Y]_p f = [X,Y]_p(f \circ L_\alpha) = X_p(Y(f \circ L_\alpha)) - Y_p(X(f \circ L_\alpha)) =$

$X_p(dL_\alpha Y)f - Y_p(dL_\alpha X)f = X_pY(f) - Y_pX(f) =$

$(X_pY - Y_pX)f = [X,Y]_p f$

Άρα η $\mathfrak{g}$ είναι μία άλγεβρα Lie , η αλγεβρα Lie της G με διάσταση ίση με την διάσταση της G.

Ορισμός 1.4 Ένα διανυσματικό πεδίο X σε μία πολλαπλότητα Riemann θα λέγεται πεδίο *Killing* εαν ισχύει για κάθε διάνυσμα Y, Z

$$g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_Z X) = 0$$

όπου g η μετρική της πολλαπλότητας και ∇ η συνοχή Levi-Civita .

Δηλαδή είναι ένα διανυσματικό πεδίο που διατηρεί την μετρική.

Πόρισμα 1.5 Το γινόμενο Lie δύο πεδίων Killing είναι και αυτό πεδίο Killing . Άρα τα πεδία Killing σχηματίζουν μια υποάλγεβρα Lie της άλγεβρας Lie των διανυσματικών πεδίων στην πολλαπλότητα M.

Ορισμός 1.6 Για κάθε πεδίο Killing X ορίζουμε ως e^{tX}, την μονοπαραμετρική ομάδα ισομετριών που παράγονται από το διανυσματικό πεδίο X.

Λήμμα 1.7 Ένα διανυσματικό πεδίο X σε μια πολλαπλότητα M είναι πεδίο Killing εάν και μόνο εάν η μονοπαραμετρική ομάδα που παράγεται από το X αποτελείται από τοπικές ισομετρίες.

Ορισμός 1.8 Έστω M μια πολλαπλότητα Riemann και $c : I \to M$ μια γεωδαισιακή καμπύλη. Ένα διανυσματικό πεδίο X κατά μήκος της c καλείται πεδίο Jacobi αν ισχύει

$$\nabla_{\frac{d}{dt}} \nabla_{\frac{d}{dt}} X + R(x, c')c' = 0$$

όπου R ο τελεστής καμπυλότητας της πολλαπλότητας M.

Πρόταση 1.9 Κάθε πεδίο Killing X σε μια πολλαπλότητα M είναι και πεδίο Jacobi .

Έστω G μια ομάδα Lie και K μια κλειστή υποομάδα της G. Το σύνολο $\{\alpha K : \alpha \in G\}$ όλων των αριστερών συμπλόκων της K στην G, συμβολίζεται με G/K και εφοδιασμένο με την τοπολογία πηλίκο που ορίζει η κανονική προβολή

$$\pi : G \to G/K, \alpha \mapsto \alpha K$$

καλείται χώρος πηλίκο.
Ο χώρος πηλίκο G/K δέχεται μια μοναδική διαφορική δομή, έτσι ώστε η κανονική προβολή π να είναι μια υπεμβάπτιση, δηλαδή το διαφορικό $d\pi_\alpha$ να είναι επί για κάθε $\alpha \in G$.
Η λεία πολλαπλότητα που κατασκευάζεται με αυτόν τον τρόπο καλείται ομογενής χώρος.
Ισχύει $\dim G/K = \dim G - \dim K$

Ορισμός 1.10 Μια αριστερή δράση της G σε μια πολλαπλότητα M είναι μια λεία απεικόνιση:

$$\lambda : G \times M \to M$$

τέτοια ώστε $\lambda(e,m)=m$, όπου e το ουδέτερο στοιχείο της G και $m\in M$.
Ικανοποιεί επίσης τα εξής:

α) $\lambda(\alpha b,m)=\lambda(\alpha,\lambda(b,m))$

β) $\lambda(\alpha,m)=\alpha\cdot m$

Είναι άμεσο ότι η ομάδα Lie G δρα στην πολλαπλότητα κατά φυσικό τρόπο, δηλαδή:
$G\times G/K\to G/K$, $\alpha\cdot(gK)=\alpha gK$

Ορισμός 1.11 Ένας ομογενής χώρος είναι μια λεία πολλαπλότητα M στην οποία δρα μεταβατικά μια ομάδα Lie G.

Παράδειγμα Έστω G μια ομάδα Lie . Τότε $G=G/\{e\}=G\times G/G$.
Στην πρώτη έκγραση θεωρούμε ότι η G δρα στον εαυτό της μέσω των αριστερών μεταφορών $L_\alpha: G\to G, L_\alpha(h)=\alpha h, h\in G$.
Στην δεύτερη έκφραση το πηλίκο προέρχεται από την δράση του καρτεσιανού γινομένου $G\times G$ στην G μέσω των αριστερών και δεξιών μεταφορών, δηλαδή μέσω της απεικόνισης:
$(g,h)\cdot y=gyh$, όπου $g,h,y\in G$.

Ορισμός 1.12 Η τροχιά ενός $x\in X$ είναι το σύνολο $G\cdot x=\{g\cdot x|g\in G\}$.

Ορισμός 1.13 Η δράση της G στο X ονομάζεται μεταβατική αν για κάθε $x,y\in X$ υπάρχει $g\in G$ τέτοιο ώστε $g\cdot x=y$.
Η δράση καλείται απλά μεταβατική αν για κάθε $x,y\in X$ υπάρχει μοναδικό $g\in G$ τέτοιο ώστε $g\cdot x=y$.

Ορισμός 1.14 Έστω $x\in X$. Το σύνολο $G_x=\{g\in G|g\cdot x=x\}$ ονομάζεται ομάδα ισοτροπίας του στοιχείου x.

2. Ορισμός Συμμετρικού Χώρου

Ορισμός 1 Μια πολλαπλότητα Riemann ονομάζεται συμμετρικός χώρος αν για κάθε $x \in M$ υπάρχει μια ενέλιξη $s_x : M \to M$ η οποία είναι μια ισομετρία και το σήμειο x είναι ένα μεμονωμένο σταθερό σημείο της.
Ισοδύναμα θα καλούμε την M συμμετρικό χώρο, αν υπάρχει μια ισομετρία $s_x : M \to M$ με τις ιδιότητες:

$$s_x(x) = x \quad \kappa\alpha\iota \quad (ds_x)_x = -Id_{T_pM}$$

Αυτή η ισομετρία s_x καλείται συμμετρία στο σημείο x.

Λήμμα 1. Η απεικόνιση s_x έχει την ιδιότητα να αντιστρέφει τις γεωδαισιακές που διέρχονται από το σημείο x.
Αυτό σημαίνει οτι αν c: $(-\epsilon, \epsilon) \to S$ είναι μια γεωδαισιακή καμπύλη με $c(0) = x$, τότε

$$s_x(c(t)) = c(-t).$$

Απόδειξη:
Άφου η s_x είναι ισομετρία, τότε απεικονίζει γεωδαισιακές σε γεωδαισιακές. Αν η c είναι μια γεωδαισιακή καμπύλη που διέρχεται από το σημείο x με $c(0) = x$, τότε ισχύει

$$d(s_x(c'(0))) = (ds_x)c'(0) = -c'(0)$$

και ο ισχυρισμός προκύπτει επειδή μιά γεωδαισιακή καμπύλη ορίζεται κατά μοναδικό τρόπο από το αρχικό της σημείο και την ταχυτητά της.

Λήμμα 2. Έστω c μια γεωδαισιακή καμπύλη στον συμμετρικό χώρο S, με $c(0) = p$ και $c(r) = q$. Τότε $s_q s_p(c(t)) = c(t+2r)$ για όλα τα t για τα οποία ορίζονται οι $c(t)$, $c(t+2r)$. Αν $u \in T_{c(t)}S$ τότε το $ds_q ds_p(u) \in T_{c(t+2r)}S$ είναι ένα διάνυσμα στο σημείο $c(t + 2r)$ που προκύπτει από παράλληλη μεταφορά του u κατά μήκος της c.

Απόδειξη: Έστω $\tilde{c}(t) := c(t + r)$.
Τότε η $\tilde{c}$ είναι μια γεωδαισιακή καμπύλη με $\tilde{c}(0) = q$. Τότε θα έχω τα εξής :

$$s_q(s_p(c(t))) = s_q(c(-t)) = s_q(\tilde{c}(-t - r)) = \tilde{c}(t + r) = c(t + 2r).$$

Έστω $u \in T_pS$ και V ένα παράλληλο διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της c με $V(p) = u$. Αφού η s_p είναι ισομετρία θα ισχύει ότι ds_pV είναι ομοίως παράλληλο. Επίσης, $ds_pV(p) = -V(p)$. Συνεπώς,

$$ds_pV(c(t)) = -V(c(-t),$$

και

$$ds_q \circ ds_pV(c(t)) = V(c(t+2r)).$$

Πόρισμα 1. Σε έναν συμμετρικό χώρο κάθε γεωδαισιακή καμπύλη είναι πλήρης. Δηλαδή μπορεί να επεκταθεί επ'απειρον και στις δύο κατευθύνσεις της, δηλαδή μπορεί να οριστεί σε όλο το $\mathbb{R}$.

Απόδειξη: Προκύπτει άμεσα από το Λήμμα 2.

Πόρισμα 2. Σε ένα συμμετρικό χώρο οποιαδήποτε δύο σημεία μπορούν να ενωθούν από μια γεωδαισιακή καμπύλη.

Απο το Λήμμα 1, η δράση της s_p σε μια γεωδαισιακή καμπύλη μέσω του σημείου p δίνεται από μια αντιστροφή της κατεύθυνσης της καμπύλης. Επίσης, από το Πόρισμα 2, κάθε σημείο μπορεί να ενωθεί με το p μέσω μιας γεωδαισιακής καμπύλης, οπότε καταλήγουμε στο εξής:

Πόρισμα 3. Η s_p ορίζεται κατά μοναδικό τρόπο.

Ορισμός 2. Έστω S ένας συμμετρικός χώρος και $c : \mathbb{R} \to S$ μια γεωδαισιακή καμπύλη. Η μεταφορά κατά μήκος της c κατά $t \in \mathbb{R}$ είναι:

$$\tau_t := s_{c(t/2)} \circ s_{c(0)}$$

Από το Λήμμα 2 η τ_t απεικονίζει την $c(s)$ στην $c(s+t)$ και το $d\tau_t$ είναι παράλληλη μεταφορά κατά μήκος της c από το $c(s)$ στο $c(s+t)$.

Θεώρημα 1. Ένας συμμετρικός χώρος S είναι ομογενής χώρος, δηλαδή για κάθε δύο σημεία $p, q \in S$ υπάρχει μια ισομετρία που απεικονίζει το p στο q.

Απόδειξη: Αφού ο S είναι συμμετρικός χώρος κάθε δύο σημεία μπορούν να ενωθούν με μια γεωδαισιακή καμπύλη, δηλαδή υπάρχει ένα τμήμα μιας γεωδαισιακής καμπύλης c που ενώνει τα p, q. Έστω $m \in c$ το μέσον της, τότε $s_m(p) = q$.

Άρα η $G = I(S)$ δρα μεταβατικά.

Έστω ένα σημείο $p \in S$. Η κλειστή υποομάδα $G_p = \{g \in G : g(p) = p\}$ καλείται ομάδα ισοτροπίας και θα την συμβολίζουμε με K. Το διαφορικό στο p για κάθε $k \in K$ είναι ένας ορθογώνιος μετασχηματισμός του T_pS. Πράγματι, γνωρίζοντας ότι η ισομετρία k καθορίζεται από το διαφορικό της dk_p, μπορούμε να δούμε την K ως μια κλειστή υποομάδα της $O(T_pS)$, χρησιμοποιώντας την εμφύτευση $k \mapsto dk_p$.

Αντιστρόφως, αν S είναι ένας ομογενής χώρος, δηλαδή αν η ομάδα ισομετρίας G δρα μεταβατικά, τότε ο χώρος S είναι συμμετρικός αν και μόνο αν υπάρχει μια συμμετρία s_p που ικανοποιεί τις ιδιότητες :

$$s_p(p) = p \ , \ (ds_p)_p = -I$$

για κάποιο $p \in S$.
Η συμμετρία σε κάθε άλλο σημείο $q = g \cdot p$ δίνεται ως $s_q = g s_p g^{-1}$
Σύμφωνα με την γενική θεωρία συμμετρικών χώρων θα ταυτίζουμε τους ομογενείς χώρους S με τον χώρο πηλίκο G/K και θα ισχύει για την διάσταση του χώρου $\dim S = \dim G - \dim K$.

Παραδείγματα.

1. Ο ευκλείδιος χώρος Ο ευκλείδιος χώρος $\mathbb{R}^n$ είναι το πιό απλό παράδειγμα συμμετρικού χώρου. Η συμμετρία $s_p : R^n \to R^n$ στο σημείο $p \in R^n$ δίνεται ως : $s_p(x) = 2p - x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.

2. Η Σφαίρα Έστω $S = S^n$ η μοναδιαία σφαίρα στο R^{n+1} με το σύνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο. Η συμμετρία σε κάθε $x \in S^n$ δίνεται από την σχέση

$$s_x(y) = -y + 2 < y, x > x.$$

Σε αυτή την περίπτωση οι συμμετρίες παράγουν την ίδια ομάδα ισομετρίας που είναι η ορθογώνια ομάδα $O(n+1)$.

3. Η ορθογώνια ομάδα Έστω $S = O(n) = \{g \in R^{n \times n} : g^t g = I\}$. Αυτή είναι υποπολλαπλότητα του χώρου πινάκων $\mathbb{R}^{n \times n}$, επειδή το I είναι κανονικό σημείο της λείας απεικόνισης

$$\mathbb{R}^{n \times n} \to S(n) : x \mapsto x^t x,$$

οπού $S(n)$ συμβολίζει τον χώρο των συμμετρικών πινάκων. Η μετρική Riemann στην $O(n)$

επάγεται από το εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^{n\times n}$ από τον τύπο

$$< x,y >:= \mathrm{tr}(x^t y) = \sum x_{ij} y_{ij}.$$

Παρατηρούμε οτι οι δεξιοί και αριστεροί πολλαπλασιασμοί με ορθογώνιους πίνακες διατηρούν αυτό το εσωτερικό γινόμενο. Πράγματι, για κάθε $g \in O(n)$ και $x, y \in \mathbb{R}^{n\times n}$ έχουμε:

$$< gx, gy >= \mathrm{tr}((gx)^t gy) = \mathrm{tr}(x^t g^t gy) = \mathrm{tr}(x^t y) =< x,y >,$$
$$< xg, yg >= \mathrm{tr}(g^t x^t yg) = \mathrm{tr}(g^{-1} x^t yg) = \mathrm{tr}(x^t y) =< x,y > .$$

Επίσης, οι δεξιοί και αριστεροί πολλαπλασιασμοί με $g \in O(n)$ διατηρούν το υποσύνολο $O(n) \subset \mathbb{R}^{n\times n}$, άρα δρουν σαν ισομετρίες στον $O(n)$ κανοντάς τον ομογενή χώρο.

Έστω s_I γραμμική απεικόνιση στον $\mathbb{R}^{n\times n}$ με $s_I(x) = x^t$ η οποία είναι επίσης μια ισομετρία του $O(n)$ αφού διατηρεί τον $O(n) \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ και το εσωτερικό γινόμενο του $\mathbb{R}^{n\times n}$.
Επειδή η απεικόνιση σταθεροποιεί το $I \in O(n)$ και δρα σαν $-I$ στον εφαπτόμενο χώρο $T_I O(n) = \{u \in \mathbb{R}^{n\times n} : u^t = -u\}$, τότε είναι μία συμμετρία στο I. Η συμμετρία στο τυχαίο σημείο $g \in O(n)$ δίνεται από τον τύπο

$$s_g(x) = g(s_I(g^t x)) = gx^t g$$

Πράγματι, είναι $s_g(g) = g$ και για κάθε $gu \in T_g O(n) = gT_I O(n)$ έχω $ds_g(gu) = s_g(gu) = gu^t = -gu$.

4.Συμπαγείς ομάδες Lie Έστω $S = G$ μια συμπαγής ομάδα *Lie* εφοδιασμένη με μια αμφιαναλλοίωτη μετρική, δηλαδή ο αριστερός και δεξιός πολλαπλασιασμός $R_g, L_g : G \to G$ είναι ισομετρίες για κάθε $g \in G$. Τότε ο G είναι συμμετρικός χώρος με την συμμετρία σ-το ουδέτερο στοιχείο e να δίνεται από την αντίστροφη απεικόνιση $s_e(g) = g^{-1}$. Τότε ισχύει $s_e(e) = e$ και $ds_e u = -u$ για κάθε $u \in \mathfrak{g} = T_e G$.
Πρέπει να ελεγθεί οτι η s_e είναι ισομετρία για κάθε $g \in G$. Δηλαδή οτί η $(ds_e)_g$ διατηρεί την μετρική. Επειδή η μετρική είναι αμφιαναλλοίωτη ισχύει η σχέση :

$$s_e \circ L_g = R_g \circ s_e.$$

Άρα θα έχω :

$$(ds_e)_g \circ (dL_g)_e = (dR_g)_e \circ (ds_e)_g$$

Οπότε η $(ds_e)_g$ δαιτηρεί την μετρική αφου την διατηρούν και οι άλλες τρεις απεικονίσεις στην παραπάνω σχέση.

5.Θετικά ορισμένοι πίνακες Έστω $S = P(n)$, το σύνολο των θετικά ορισμένων πραγματικών συμμετρικών $n \times n$ πινάκων. Τότε το $P(n)$ θα είναι ανοικτό υποσύνολο του $S(n)$, του διανυσματικού χώρου όλων των συμμετρικών πινάκων. Ορίζουμε στο $P(n)$ την μετρική Riemann ως εξής : για κάθε $u, w \in T_pP(n) = S(n)$ ορίζουμε

$$< u, w >_p = \mathrm{tr}(up^{-1}wp^{-1}) = \mathrm{tr}(p^{-1}up^{-1}w)$$

Η ομάδα $G = GL(n, R)$ δρα στην $P(n)$ μέσω της απεικόνισης $g(p) := gpg^t$ για κάθε $g \in GL(n, \mathbb{R}), p \in P(n)$, και αυτή η δράση είναι ισομετρία ως προς αυτή την μετρική. Πράγματι, για κάθε $x \in T_pP(n)$ έχουμε $dg_px = gxg^t$ άρα

$$\begin{gathered} < dg_pu, dg_pw >_{g(p)} = \\ = \mathrm{tr}(gug^t)(gpg^t)^{-1}(gwg^t)(gpg^t)^{-1} = \\ = \mathrm{tr}(gup^{-1}wp^{-1}g^{-1}) = \\ =< u, w >_p, \end{gathered}$$

για κάθε $u, w \in T_pP(n)$.
Κάθε $p \in P(n)$ μπορεί να γραφτεί στην μορφή $p = g^tg = g(I)$, για κάποιο $g \in G$. Αυτή η δράση είναι μεταβατική και η ομάδα ισοτροπίας στον ταυτοτικό πίνακα $I \in P(n)$ είναι η $O(n)$. Επίσης, η αντίστροφη απεικόνιση $s_I(p) = p^{-1}$ είναι επίσης ισομετρία στον $P(n)$. Πράγματι, αφού $(ds_I)_px = -p^{-1}xp^{-1}$ έχουμε

$$< (ds_I)_pu, (ds_I)_pw >_{p^{-1}} = \mathrm{tr}(p^{-1}up^{-1}pp^{-1}wp^{-1}p) = \mathrm{tr}(p^{-1}up^{-1}w) =< u, w >_p$$

για κάθε $u, w \in T_pP(n)$.
Άρα αφού ισχύει $s_I(I) = I$ και $(ds_I)_I = -I$ η s_I είναι συμμετρία στο I. Η συμμετρία στο αυθαίρετο σημείο $p \in P(n)$ δίνεται από την σχέση $s_p(q) = pq^{-1}p$.

3. Η Δομή ενος Συμμετρικού χώρου

Έστω S ένας συμμετρικός χώρος και $p \in S$. Έστω $\mathfrak{g}$ η άλγεβρα Lie της ομάδας ισομετρίας G του S. Γνωρίζουμε οτι την $\mathfrak{g}$ μπορούμε να την θεωρήσουμε και ως διανυσματικό χωρο πεδίων Killing . Τότε ορίζουμε

$$\mathfrak{l} = \{X \in \mathfrak{g} : X_p = 0\} \ , \ \mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{g} : (\nabla X)_p = 0\}$$

Προφανώς $\mathfrak{l}$ είναι η άλγεβρα Lie της ομάδα ισοτροπίας $K = G_p$.

Θεώρημα 1. Ισχύουν τα εξής :

$$\mathfrak{l} + \mathfrak{p} = \mathfrak{g}$$
$$\mathfrak{l} \cap \mathfrak{p} = \{0\}$$

Απόδειξη: Έστω $X \in \mathfrak{g}$ με $X(p) \neq 0$. Θέτω $c(t) := exp_p tX(p)$ μια γεωδαισιακή καμπύλη με $c'(0) = X(p)$ και τ_t η απεικόνιση μεταφοράς κατά μήκος της c. Τότε το

$$Y(q) := \frac{d}{dt}\tau_t(q)|_{t=0}$$

είναι πεδίο Killing, επειδή η τ_t είναι ισομετρία.
Είναι

$$Y(p) = X(p)$$

Για $u \in T_pS$, έστω $\gamma(s)$ μια καμπύλη με $\gamma'(0) = u$. Τότε

$$\nabla_u Y(p) = \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial}{\partial t}\tau_t(\gamma(s))|_{s=t=0}$$

$$= \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial}{\partial s}\tau_t(\gamma(s))|_{s=t=0}$$
$$= \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} d\tau_t(u)|_{t=o}$$
$$= 0$$

επειδή από το Λήμμα 2 $d\tau_t$ είναι παράλληλη μεταφορά κατά μήκος της c, άρα το $d\tau_t(u)$ είναι παράλληλο διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της c.
Άρα καταλήγουμε οτι

$$X = (X - Y) + Y$$

με $X - Y \in \mathfrak{l}$ αφού $X(p) = Y(p) \Leftrightarrow (X - Y)(p) = 0$ και $Y \in \mathfrak{p}$.

Θα δείξουμε τώρα ότι $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{p} = \{0\}$. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι κάθε πεδίο Killing είναι πεδίο Jacobi , κατά μήκος κάποιας γεωδαισιακής καμπύλης, και τα πεδία Jacobi που μηδενίζονται σε κάποιο σημείο μαζί με την παραγώγο τους τότε μηδενίζονται ταυτοτικά. Τέλος χρησιμοποιώ το Πόρισμα 2 που μας λέει οτι κάθε δύο σημεία μπορούν να ενωθούν με μια γεωδαισιακή καμπύλη.

Άρα έχουμε ένα ευθύ άθροισμα διανυσματικών χώρων $\mathfrak{l} \oplus \mathfrak{p} = \mathfrak{g}$ το οποίο το ονομάζουμε διάσπαση *Cartan* .

Θεώρημα 2. Ο διανυσματικός χώρος $\mathfrak{p}$ είναι ισόμορφος με τον T_pS. Η μονοπαραμετρική υποομάδα των ισομετριών που παράγονται από κάποιο $Y \in \mathfrak{p}$ είναι η ομάδα των μεταφορών κατά μήκος της γεωδαισιακής καμπύλης $exp_p tY(p)$.

Απόδειξη : Έστω $w \in T_pS$. Θέτω $c(t) := exp_p tw$ η γεωδαισιακή καμπύλη με $c'(0) = w$. Έστω τ_t η ομάδα μεταφορών κατά μήκος της c. Τότε θέτουμε

$$Y(q) = \frac{d}{dt}\tau_t(q)|_{t=0}$$

για κάθε $q \in S$. Όμοια με την απόδειξη του Θεωρήματος 1 έχουμε

$$Y(p) = w, \ Y \in \mathfrak{p}.$$

Αυτό επάγει μια γραμμική απεικόνιση από το T_pS στο $\mathfrak{p}$. Η αντίστροφη απεικόνιση είναι ο περιορισμός που απεικονίζει το $Y \in \mathfrak{p}$ στο $Y(p) \in T_pS$. Άρα βρήκαμε μια αμφιμονοσήμαντη γραμμική απεικόνιση μεταξύ των T_pS και του $\mathfrak{p}$.

Θεωρούμε τώρα έναν ομομορφισμό

$$\sigma_p : G \to G$$

που δίνεται από τον τύπο

$$\sigma_p(g) = s_p \circ g \circ s_p$$

όπου s_p η συμμετρία στο σημείο p. Αφού ισχύει $s_p^2 = id$, η παραπάνω σχέση γίνεται

$$\sigma_p(g) = s_p \circ g \circ s_p^{-1}$$

Ορίζουμε την απεικόνιση

$$\theta_p : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$

με
$$\theta_p(X) := \frac{d}{dt}\sigma_p(e^{tX})|_{t=0}$$

Θεώρημα 3. Για την απεικόνιση θ που ορίσαμε προηγουμένος ισχύει ότι
$$\theta_{p|\mathfrak{l}} = id$$
$$\theta_{p|\mathfrak{p}} = -id.$$
Απόδειξη : Έστω $X \in \mathfrak{l}$, δηλαδή $X(p) = 0$. Τότε για κάθε t είναι
$$e^{tX}(p) = p.$$
Έστω c_1 μια γεωδαισιακή καμπύλη με $c_1(0) = p$. Τότε για κάθε t
$$c_2(s) := e^{tX}c_1(s)$$
ορίζει μια γεωδαισιακή καμπύλη με $c_2(0) = p$. Τότε
$$\begin{aligned}\sigma_p(e^{tX})c_1(s) &= s_p \circ e^{tX} \circ s_p c_1(s)\\ &= s_p \circ e^{tX} \circ c_1(-s)\\ &= s_p c_2(-s)\\ &= c_2(s)\end{aligned}$$
Άρα βρήκαμε ότι
$$\sigma_p(e^{tX})c_1(s) = e^{tX}c_1(s).$$
Αφού κάθε σημείο $q \in S$ μπορεί να ενωθεί με το p μέσω μιας γεωδαισιακής καμπύλης έχουμε ότι για κάθε $q \in S$ ισχύει :
$$\sigma_p(e^{tX})(q) = e^{tX}(q)$$
Συνεπώς $\sigma_p(e^{tX}) = e^{tX}$. Δηλαδή
$$\theta_p(X) = \frac{d}{dt}e^{tX}|_{t=0} = X$$
οπότε έχω
$$\theta_{p|\mathfrak{l}} = id$$
Έστω τώρα $Y \in \mathfrak{p}$. Από το Θεώρημα 2 και τον Ορισμό 2 της προηγούμενης παραγράφου βρίσκουμε ότι
$$e^{tY} = \tau_t = s_{c(\frac{t}{2})} \circ s_p$$

όπου $c(t) = exp(tY(p))$. Άρα

$$\sigma_p(e^{tY}) = s_p \circ s_{c(\frac{t}{2})} \circ s_p \circ s_p.$$

Όμως $s_p^2 = id$, άρα η ισότητά μου γίνεται

$$\begin{aligned}\sigma_p(e^{tY}) &= s_p \circ s_{c(\frac{t}{2})} \\ &= \tau_{-t}\end{aligned}$$

Η τελευταία ισότητα μπορεί να δειχθεί παίρνοντας σαν $q = c(\frac{t}{2})$, $\tilde{c}(s) = c(\frac{t}{2} - s)$. Τότε $p = \tilde{c}(\frac{t}{2})$, $\tilde{c}(0) = q$. Άρα :

$$s_p \circ s_{c(\frac{t}{2})} = s_{\tilde{c}(\frac{t}{2})} \circ s_{\tilde{c}(0)}$$

Άρα είναι η μεταφορά κατά μήκος της $\tilde{c}$ κατά t. Αφού η καμπύλη $\tilde{c}$ έχει αντίθετη κατεύθυνση από την c, είναι η ίδια μεταφορά κατά μήκος της c κατά $-t$. Άρα

$$\tau_{-t} = e^{-tY}$$

$$\sigma_p(e^{tY}) = e^{-tY}$$

$$\theta_p(Y) = -Y$$

Δηλαδή

$$\theta_{p|\mathfrak{p}} = -id$$

Λήμμα 1. Για την απεικόνιση θ ισχύει :

$$\theta_p[X, Y] = [\theta_p X, \theta_p Y]$$

για κάθε $X, Y \in \mathfrak{g}$. Άρα η θ_p είναι ομομορφισμός αλγεβρών Lie.

Απόδειξη : Από τον ορισμό της θ_p, η $\theta_p(X)$ παράγει την μονοπαραμετρική ομάδα $e^{t\theta_p(X)}$. Δηλαδή

$$\sigma_p(e^{tX}) = e^{t\theta_p(X)}.$$

Έχουμε

$$\begin{aligned}[X, Y] &= \frac{d}{dt} de^{-tX} \circ Y \circ e^{tX}|_{t=o} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} e^{-tX} e^{sY} e^{tX}|_{t=s=0}\end{aligned}$$

Άρα

$$\theta_p[X, Y] = \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} s_p e^{-tX} e^{sY} e^{tX} s_p|_{t=s=0}$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} s_p e^{-tX} s_p^{-1} s_p e^{sY} s_p^{-1} s_p e^{tX} s_p|_{t=s=0}$$
$$= \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} \sigma_p(e^{-tX}) \sigma_p(e^{sY}) \sigma_p(e^{tX})|_{t=s=0}$$
$$= \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} e^{-t\theta_p(X)} e^{s\theta_p(Y)} e^{t\theta_p(x)}|_{t=s=0}$$
$$= [\theta_p(X), \theta_p(Y)]$$

Θεώρημα 4. Έστω S συμμετρικός χώρος, ένα σημείο $p \in S$ και μια διάσπαση Cartan $\mathfrak{g} = \mathfrak{l} + \mathfrak{p}$, όπου $\mathfrak{l}$ το σύνολο των πεδίων Killing που μηδενίζονται στο σημείο p και $\mathfrak{p}$ τα πεδία Killing που μηδενίζουν την συναλλοίωτη παράγωγο στο σημείο p. Τότε ισχύουν τα εξής:

$$[\mathfrak{l}, \mathfrak{l}] \subset \mathfrak{l}$$
$$[\mathfrak{l}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$$
$$[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{l}$$

Απόδειξη : Επειδή για την συνάρτηση θ_p ισχύει $\theta_p^2 = id$ συμπαιρένουμε ότι έχει δύο ιδιοτιμές, τις 1 και -1. Επίσης έχουμε δείξει ότι ισχύει $\theta_{p|\mathfrak{l}} = id$ και $\theta_{p|\mathfrak{p}} = -id$, άρα ο ιδιόχωρος $\mathfrak{l}$ θα έχει ιδιοτιμή το 1 και ο ιδιόχωρος $\mathfrak{p}$ θα έχει ιδιοτιμή το -1.

Αν έχω X, Y ιδιοδιάνυσματα με ιδιοτιμή λ και μ αντίστοιχα και επειδή δείξαμε ότι η συνάρτηση θ_p είναι ομομορφισμός αλγεβρών Lie το $[X, Y]$ θα είναι ένα ιδιοδιάνυσμα με ιδιοτιμή το λμ.

Άρα το $[\mathfrak{l}, \mathfrak{l}]$ έχει ιδιοτιμή το 1 οπότε θα ανήκει στον ιδιόχωρο $\mathfrak{l}$, το $[\mathfrak{l}, \mathfrak{p}]$ έχει ιδιοτιμή -1 και ανήκει στον ιδιόχωρο $\mathfrak{p}$ και τέλος το $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]$ έχει ιδιοτιμή 1 και ανήκει στον ιδιόχωρο $\mathfrak{l}$.

Πόρισμα 1. Ο χώρος $\mathfrak{l}$ είναι υποάλγεβρα Lie του χώρου $\mathfrak{g}$.

Απόδειξη : Ο χώρος $\mathfrak{l}$ είναι υπόχωρος του χώρου $\mathfrak{g}$ και κλειστός ως προς το γινόμενο *Lie* όπως δείξαμε στο προηγούμενο θεώρημα. Άρα είναι υποάλγεβρα Lie του $\mathfrak{g}$.

Έστω $G_\sigma = \{g \in G : \sigma(g) = g\}$ η κλειστή υποομάδα όλων τών σταθερών σημείων της σ, και έστω G_σ^o η συνεκτική συνιστώσα της G_σ, η οποία περιέχει το ταυτοτικό στοιχείο e της G. Τότε ισχύει :

Θεώρημα 5.

$$G_\sigma^o \subset K \subset G_\sigma$$

Απόδειξη : Έστω $k \in K$. Τότε το k μπορεί να θεωρηθεί ως μια ισομετρία του συμμετρικού χώρου S. Το ίδιο ισχύει και για το $\sigma(k) = s_p \circ k \circ s_p$. Το διαφορικό του $\sigma(k)$ στο σημείο p δίνεται ως

$$d\sigma(k)_p = ds_p \circ dk_p \circ ds_p$$

και επειδή ισχύει $ds_p = -I$ έχουμε

$$d\sigma(k)_p = dk_p$$

Οπότε οι ισομετρίες k , $\sigma(k)$ θα ταυτίζονται, δηλαδή

$$\sigma(k) = k$$

Άρα $K \subset G_\sigma$.
Θα δείξω τώρα οτι $G_\sigma^o \subset K$. Η G_σ^o είναι συνεκτική και παράγεται από μονοπαραμετρικές υποομάδες e^{tX} της G, όπου $X \in \mathfrak{g}$. Επειδή $\sigma(e^{tX}) = e^{tX}$ έχω ότι

$$s_p e^{tX} = e^{tX} s_p$$

αφού

$$\sigma(e^{tX}) = s_p \circ e^{tX} \circ s_p = e^{tX}$$

άρα

$$s_p e^{tX} = e^{tX} s_p^{-1} = e^{tX} s_p$$

και συνεπως

$$s_p(e^{tX} p) = e^{tX} s_p(p) = e^{tX} p$$

δηλαδή η s_p διατηρεί σταθερό το $e^{tX}p$. Όμως το p είναι ένα μεμονομένο σταθερό σημείο της s_p και άρα θα πρέπει να ισχύει ότι $e^{tX}p = p$ για κάθε t. Οπότε $e^{tX} \in K$ και άρα $G_\sigma^o \subset K$

Ορισμός 2. Αν υπάρχει αυτομορφισμός σ της G τέτοιος ώστε $\sigma^2 = id_G$ και $G_\sigma^o \subset K \subset G_\sigma$ τότε το ζεύγος (G, K) το καλούμε συμμετρικό ζεύγος.

Παραδείγμα 1. Έστω $G = O(n)$, $K = O(k) \times O(n-k)$ και

$$\sigma : O(n) \to O(n)$$

με

$$\sigma(A) = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & -I_{n-k} \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & -I_{n-k} \end{pmatrix}^{-1}$$

Τότε $G_\sigma = O(k) \times O(n-k) = K$ και ο συμμετρικός χώρος είναι η πολλαπλότητα Grassmann

Gr_kR^n.

Παράδειγμα 2. Έστω $G = O(n+1)$, $K = O(n)$ και

$$\sigma : O(n+1) \to O(n+1)$$

με

$$\sigma(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix}^{-1}$$

Τότε $G_\sigma = O(1) \times O(n)$, $G_\sigma^o = SO(n)$ και ο συμμετρικός χώρος είναι η σφαίρα S^n.

Παράδειγμα 3. Έστω G συμπαγής ομάδα Lie εφοδιασμένη με μια αμφιαναλλοίωτη μετρική. Τότε το Παράδειγμα 4 της προηγούμενης παραγράφου μας λέει ότι είναι συμμετρικός χώρος. Το συμμετρικό ζεύγος σε αυτή την περίπτωση είναι το

$$(G \times G, \Delta_G),$$

όπου

$$\Delta_G = \{(g, g) \in G \times G : g \in G\}$$

και ο αυτομορφισμός σ δίνεται από την σχέση $\sigma(g, h) = (h, g)$ όπου $g, h \in G$.

Θεώρημα 6. Κάθε συμμετρικός χώρος S ορίζει μία διάσπαση Cartan στις άλγεβρες Lie των πεδίων Killing . Αντίστροφα, σε οποιαδήποτε άλγεβρα Lie $\mathfrak{g}$ με μία διάσπαση Cartan $\mathfrak{g}=\mathfrak{l}+\mathfrak{p}$ υπάρχει ένας μοναδικός απλά συνεκτικός συμμετρικός χώρος $S = G/K$, οπού G είναι η απλά συνεκτική ομάδα Lie με την άλγεβρα Lie $\mathfrak{g}$ και K η συνεκτική οποομάδα με την άλγεβρα Lie $\mathfrak{l}$.

Πρόταση 1. Έστω S ένας συμμετρικός χώρος. Τότε ο τελεστής καμπυλότητας του S δίνεται από τον τύπο:

$$R(X, Y)Z(p) = -[[X, Y], Z](p),$$

για κάθε $X, Y, Z \in \mathfrak{p}$.

Απόδειξη: Έστω $X \in \mathfrak{g}$ και $Y \in \mathfrak{p}$. Η γεωδαισιακή καμπύλη $exp_p tY(p)$ ικανοποιεί την σχέση:

$$Y(c(t)) = c'(t),$$

για κάθε $t \in R$.

Τότε, αφού κάθε πεδίο Killing του S είναι πεδίο Jacobi κατά μήκος οποιασδήποτε γεωδαισιακής καμπύλης c του S έχουμε ότι

$$\nabla_Y \nabla_Y X + R(X,Y)Y = 0,$$

κατά μήκος της c, άρα και συγκεκριμένα στο p.
Τότε συνεπάγεται ότι για $Y, Z \in \mathfrak{p}$, αφού $Y + Z \in \mathfrak{p}$, ισχύει:

$$\nabla_Y \nabla_Z X + \nabla_Z \nabla_Y X + R(X,Y)Z + R(X,Z)Y = 0,$$

στο σημείο p.
Επίσης, γνωρίζουμε ότι ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$R(X,Z)Y = -R(Z,X)Y$$

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$$
$$R(Y,Z)X = \nabla_Y \nabla_Z X - \nabla_Z \nabla_Y X - \nabla_{[Z,Y]} X$$

Από το Θεώρημα 4 έχουμε ότι αφού $Y, Z \in \mathfrak{p}$ τότε $[Y,Z] \in \mathfrak{l}$, οπότε:

$$[Y,Z](p) = 0.$$

Άρα από τις προηγούμενες σχέσεις συνεπάγεται ότι:

$$\nabla_Y \nabla_Z X + R(X,Y)Z = 0,$$

στο p.

Οπότε για $X, Y, Z \in \mathfrak{p}$ έχουμε:

$$\begin{gathered} R(X,Y)Z(p) = \\ = -R(Y,Z)X(p) + R(X,Z)Y(p) = \\ = \nabla_Z \nabla_X Y(p) - \nabla_Z \nabla_Y X(p) = \\ = \nabla_Z [X,Y](p) = \\ = \nabla_{[X,Y]} Z(p) - [[X,Y],Z](p) = \\ = -[[X,Y],Z](p), \end{gathered}$$

αφού $[X,Y](p) = 0$.

Πόρισμα 2. Η καμπυλότητα τομής του επιπέδου T_pS που παράγεται από τα ορθοκανονικά διανύσματα $Y(p), Z(p)$, όπου $Y, Z \in \mathfrak{p}$ δίνεται από τον τύπο:

$$K(Y(p) \wedge Z(p)) = - < [[Y, Z], Z], Y > (p).$$

Απόδειξη: Προκύπτει άμεσα από την πρόταση 1 και από την σχέση

$$K(u, v) =< R(u, v)v, u >,$$

όπου u, v είναι ορθοκανονικά διανύσματα του T_pS.

Ορισμός 2. Μια πολλαπλότητα Riemann M, όχι απαραίτητα πλήρης, καλείται τοπικά συμμετρική αν ο τελεστής καμπυλοτητάς της είναι παράλληλος, δηλαδή αν ισχύει $\nabla R = 0$.

Θεώρημα 7. Μια πολλαπλότητα Riemann M είναι τοπικά συμμετρική αν και μόνον αν υπαρχει ένας συμμετρικός χώρος S τέτοιος ώστε η M να είναι τοπικά ισομετρική με τον S.

4. Συμμετρικοί Χώροι Συμπαγούς και Μη-Συμπαγούς Τύπου

Έστω G μια ομάδα Lie .
Κάθε στοιχείο $h \in G$ ορίζει έναν εσωτερικό αυτομορφισμό στην G μέσω της συζυγίας:

$$\mathrm{Int}(h) : G \to G$$

που δίνεται από τον τύπο:

$$\mathrm{Int}(h)(g) = hgh^{-1}.$$

Παρατηρούμε ότι αν θέσουμε $h = s_p$, τότε παίρνουμε την σ_p απεικόνιση της προηγούμενης παραγράφου.

Ο χώρος $\mathfrak{g}$ σαν άλγεβρα Lie είναι διανυσματικός χώρος και συμβολίζουμε την ομάδα των αυτομορφισμών διανυσματικών χώρων με $GL(\mathfrak{g})$.

Ορισμός 1. Η συζυγής αναπαράσταση του G δίνεται από την σχέση:

$$\mathrm{Ad} : G \to GL(\mathfrak{g})$$

$$h \to d_e \, \mathrm{Int}(h)$$

όπου $e \in G$ είναι το ταυτοτικό στοιχείο.

Με τους συμβολισμούς της προηγούμενης παραγράφου έχουμε $\theta_P = \mathrm{Ad}(s_p)$

Λήμμα 1. Η απεικόνιση Ad είναι ένας ομομορφισμός ομάδων και για κάθε $h \in G$ η $\mathrm{Ad}(h) \in GL(\mathfrak{g})$ είναι ένας ομομορφισμός αλγεβρών Lie . Δηλαδή:

$$\mathrm{Ad}(h)[X, Y] = [\mathrm{Ad}(h)X, \mathrm{Ad}(h)Y],$$

για κάθε $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Απόδειξη: Ότι η Ad είναι ομομορφισμός ομάδων προκύπτει από:

$$\mathrm{Int}(h_1h_2)(g) = h_1h_2g(h_1h_2)^{-1} =$$

$$= h_1h_2gh_2^{-1}h_1^{-1} =$$

$$= h_1 \, \mathrm{Int}(h_2)(g)h_1^{-1} =$$

$$= \mathrm{Int}(h_1)\,\mathrm{Int}(h_2)(g)$$

για κάθε $g \in G$.

Ότι η $\mathrm{Ad}(h)$ είναι ομομορφοσμός αλγεβρών Lie προκύπτει όπως η απόδειξη του Λήμματος 1 της προηγούμενη παραγράφου.

Ορισμός 2. Η συζυγής αναπαράσταση του $\mathfrak{g}$ δίνεται από την σχέση:

$$\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}),$$

$$X \mapsto (d_e\,\mathrm{Ad})(X),$$

όπου $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ είναι ο χώρος των γραμμικών ενδομορφισμών του $\mathfrak{g}$.

Λήμμα 2. Ισχύει ότι $(\mathrm{ad}\,X)Y = -[X, Y]$.

Απόδειξη:

$$(\mathrm{ad}\,X)Y = \frac{d}{dt} d_e\,\mathrm{Int}(e^{tX})Y|_{t=0} =$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t \partial s}\,\mathrm{Int}(e^{tX})e^{sY}|_{t=s=0} = [-X, Y]$$

Πόρισμα 1.

$$(\mathrm{ad}\,X)[Z, Y] = [(\mathrm{adX})Y, Z] + [Y, (\mathrm{ad}\,X)Z]$$

Απόδειξη: Προκύπτει από το Λήμμα 2 και την ταυτότητα του Jacobi.

Πόρισμα 2.

$$e^{\mathrm{ad}\,X} = \mathrm{Ad}\,e^X,$$

για κάθε $X \in \mathfrak{g}$.

Απόδειξη:

$$\frac{d}{dt}e^{\mathrm{ad}\,tX}|_{t=0} = \mathrm{ad}\,X =$$

$$= (d_e\,\mathrm{Ad})X =$$

$$= \frac{d}{dt}\,\mathrm{Ad}\,e^{tX}|_{t=0} =$$

$$= \operatorname{Ad} e^X$$

Ορισμός 3. Η μορφή Killing του $\mathfrak{g}$ είναι μια διγραμμική μορφή

$$B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to R$$

$$(X, Y) \mapsto \operatorname{tr}(\operatorname{ad} X \circ \operatorname{ad} Y).$$

Ο $\mathfrak{g}$ καλείται ημιαπλός αν η μορφή Killing είναι μη εκφυλισμένη.

Λήμμα 3. Η μορφή Killing του $\mathfrak{g}$ είναι συμμετρική. Η B είναι αναλλοίωτη από τους αυτομορφισμούς του $\mathfrak{g}$. Συγκεκριμένα για κάθε $X, Y \in \mathfrak{g}$ και $g \in G$ έχουμε

$$B((\operatorname{Ad} g)X, (\operatorname{Ad} g)Y) = B(X, Y)$$

Επίσης για κάθε $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ έχουμε

$$B((\operatorname{ad} X)Y, Z) + B(Y, (\operatorname{ad} X)Z) = 0$$

Απόδειξη: Η συμμετρικότητα του B είναι άμεση συνέπεια από τον τύπο

$$\operatorname{tr}(AC) = \operatorname{tr}(CA)$$

για γραμμικούς ενδομορφισμούς σε έναν διανυσματικό χώρο.

Έστω τώρα σ ένας αυτομορφισμός του $\mathfrak{g}$. Τότε

$$(\operatorname{ad} \sigma X)(Y) = [\sigma(-X), Y]$$
$$= [\sigma(-X), \sigma\sigma^{-1}(Y)]$$
$$= \sigma[-X, \sigma^{-1}(Y)]$$
$$= (\sigma \circ \operatorname{ad} X \circ \sigma^{-1})(Y)$$

Οπότε

$$\operatorname{tr}(\operatorname{ad} \sigma X, \operatorname{ad} \sigma Y)$$
$$= \operatorname{tr}(\sigma \operatorname{ad} X \operatorname{ad} Y \sigma^{-1})$$
$$= \operatorname{tr}(\operatorname{ad} X \operatorname{ad} Y)$$

Δηλαδή
$$B(\sigma X, \sigma Y) = B(X, Y)$$

Άρα B είναι αναλλοίωτη από τους αυτομορφισμούς του $\mathfrak{g}$.
Αν θέσω τώρα $\sigma = \mathrm{Ad}(e^{tX})$, και διαφορίζοντας την τελευταία σχέση για $t = 0$ προκύπτει και το δεύτερο ζητούμενο. •

Οπότε τώρα έχουμε δύο βαθμωτά γινόμενα στον χώρο $\mathfrak{p}$. Είναι η μετρικη Riemann της πολλαπλότητας και η μορφή Killing που ορίσαμε. Άρα για $X, Y \in \mathfrak{p}$ ορίζουμε το $< Y(p), Z(p) >$ άλλα και το $B(Y, Z)$.
Θα συγκρίνουμε τα δύο αυτά γινόμενα.

Λημμα 4. Ο χώρος $\mathfrak{p}$ και το γινόμενο $< . \, , \, . >$ στον $\mathfrak{p}$ είναι $\mathrm{Ad}\, K$-ανναλοίωτα.

Απόδειξη: Έστω $k \in K$ και $Y \in \mathfrak{p}$, τότε $k(p) = p$ και η $\mathrm{Int}(k)$ απεικονίζει την γεωδαισιακή καμπύλη $\exp_p tY(p)$ που διέρχεται από το p σε μία άλλη γεωδαισιακή που διέρχεται επίσης από το σημείο p και παράγεται από την σύνθεση $dk \circ Y(k^{-1}(p)) = dkY(p)$.

Άρα, $(\mathrm{Ad}\, k)(Y) = dk \circ Y(k^{-1}) \in \mathfrak{p}$ (βλέπε απόδειξη Θεωρήματος 3 της προηγούμενης παραγράφου).

Έστω τώρα $Y, Z \in \mathfrak{p}$. Αφου k είναι ισομετρία ισχύουν τα παρακάτω:

$$\begin{aligned} < Y(p), Z(p) > &= < dk \circ Y(p), dk \circ Z(p) > \\ &= < dk \circ Y(k^{-1}(p)), dk \circ Z(k^{-1}(p)) > \\ &= < \mathrm{Ad}\, kY(p), \mathrm{Ad}\, kZ(p) > . \end{aligned}$$

Πόρισμα 3. Η μορφή Killing B είναι αρνητικά ορισμένη στον $\mathfrak{l}$.

Απόδειξη: Έστω $X \in \mathfrak{l}, Y, Z \in \mathfrak{p}$. Απο το προηγούμενο Λήμμα έχουμε:

$$< \mathrm{Ad}(e^{tX})Y(p), \mathrm{Ad}(e^{tX})Z(p) > = < Y(p), Z(p) > .$$

Διαφορίζοντας τώρα την τελευταία σχέση ως προς t έχουμε

$$< \mathrm{ad}(X)Y(p), Z(p) > + < Y(p), \mathrm{ad}(X)Z(p) > = 0.$$

Άρα $\mathrm{ad}(X)$ ορίζει μία γραμμική απεικόνιση στον $\mathfrak{p}$ και σύμφωνα με την προηγούμενη τελευταία σχέση προκύπει ότι η απεικόνιση αυτή είναι αντιμεταθετκή ως προς το βαθμωτό γινόμενο $<,>$ (p) στο $\mathfrak{p}$.
Διαλέγουμε μία ορθοκανονική βάση του $\mathfrak{p}$ ως προς το $<,>$ (p) στον $\mathfrak{p}$. Άρα έχουμε

$$\mathrm{ad}\, X = (\alpha_{ij})_{i,j=1,2,\ldots,n},$$

που είναι πίνακας ως προς την βάση που διαλέξαμε. Αφού $\mathrm{ad}\, X$ είναι αντισυμμετρική απεικόνιση έχουμε:

$$\alpha_{ij} = -\alpha_{ji} \ \ \gamma\iota\alpha \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Άρα

$$B(X, X) = \mathrm{tr}\, \mathrm{ad}\, X \circ \mathrm{ad}\, X = -\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}^2,$$

από το οποίο προκύπτει ότι η μορφη Killing είναι αρνητικά ορισμένη στον $\mathfrak{l}$.•

Έστω $S = G/K$ ένας μη αναγώγιμος συμμετρικός χώρος και $\mathfrak{g} = \mathfrak{l} + \mathfrak{p}$ μία διάσπαση Cartan . Αφου η Κ δρα μη αναγώγιμα στον $\mathfrak{p}$, οι δύο διγραμμικές μορφές που ορίσαμε στον $\mathfrak{p}$ θα πρέπει να διαφέρουν κατά έναν σταθερό όρο, έστω λ, δηλαδή $B = \lambda \cdot < . \, , \, . >$.
Το πρόσημο του σταθερού όρου λ καθορίζει τον τύπο του συμμετρικού χώρου.

Θεώρημα 1. Η καμπυλότητα τομής ενός μη αναγώγιμου συμμετρικού χώρου S ισούται με 0 για $\lambda = 0$, και για $\lambda \neq 0$ δίνεται ως

$$< R(x, y)y, x >= \lambda^{-1} B([x, y], [x, y]),$$

όπου $x, y \in \mathfrak{p}$ είναι ορθοκανονικά.

Απόδειξη: Έχουμε ήδη δείξει ότι η καμπυλότητα τομής δίνεται από τον τύπο $R(x, y)z = [z, [x, y]]$ για κάθε $x, y \in \mathfrak{p} = T_pS$. Άρα έχουμε:

$$\lambda < R(x, y)y, x >= B(x, R(x, y)y) = B(x, [y, [x, y]]) = B([x, y], [x, y]).$$

Αν $\lambda \neq 0$ τότε ισχύει το ζητούμενο. Αν $\lambda = 0$ τότε από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι $[x, y] = 0$ και αφού $x, y \in \mathfrak{p}$ έχουμε ότι $[x, y] \in \mathfrak{l}$ άρα $B([x, y], [x, y]) \leq 0$ και ισούται με το 0 μόνο όταν $[x, y] = 0$. Άρα σε αυτή την περίπτωση ο τελεστής καμπυλότητας μηδενίζεται.

Ορισμός 4. Ένας συμμετρικός χώρος $S = G/K$ καλείται **συμπαγούς** τύπου (αντίστοιχα **μη συμπαγούς** τύπου) αν $\lambda < 0$ (αντίστοιχα αν $\lambda > 0$). Αν $\lambda = 0$ τότε ο συμμετρικός χώρος καλείται Ευκλείδιου τύπου.

Αν ο συμμετρικός χώρος S είναι συμπαγούς τύπου, τότε η μορφή Killing B της $\mathfrak{g}$ είναι αρνητικά ορισμένη ενώ αν ο συμμετρικός χώρος είναι μη συμπαγούς τύπου, η μορφη killing B είναι αρνητικά ορισμένη στην $\mathfrak{l}$ και θετικά ορισμένη στον $\mathfrak{p}$.

Συμμετρικοί χώροι συμπαγούς και μη συμπαγούς τύπου συνδέονται μέσω της δυϊκότητας: Από κάθε άλγεβρα Lie $\mathfrak{g}$ με μία διάσπαση Cartan $\mathfrak{g}$=$\mathfrak{l}$+$\mathfrak{p}$ ορίζουμε μία άλλη άλγεβρα Lie $\mathfrak{g}^*$ με το ακόλουθο γινόμενο Lie :
για κάθε $x, y \in \mathfrak{p}$ και $a, b \in \mathfrak{l}$ έχουμε

$$[a, b]^* = [a, b], \quad [a, x]^* = [a, x], \quad [x, y]^* = -[x, y]$$

Τότε η $\mathfrak{g}^*$ είναι μία αλγεβρα Lie με την ίδια διάσπαση Cartan , αλλά με αντίθετο τελεστή καμπυλότητας.
Δηλαδή από έναν συμμετρικό χώρο συμπαγούς τύπου παίρνουμε έναν μη συμπαγους τύπου που καλείται δυϊκός συμμετρικός χώρος και αντίθετα.

Ορισμός 5. Δύο συμμετρικοί χώροι $S = G/K$ και $S^* = G^*/K^*$ λέγονται δυϊκοι αν ισχύουν τα ακόλουθα:
(α) Υπάρχει ένας ισομορφισμός αλγεβρών Lie

$$\phi : \mathfrak{l} \to \mathfrak{l}^*$$

τέτοιος ώστε

$$B^*(\phi(a), \phi(b)) = -B(a, b)$$

για κάθε $a, b \in \mathfrak{l}$.
(β) Υπάρχει μια γραμμική ισομετρία

$$T : \mathfrak{p} \to \mathfrak{p}^*$$

τέτοια ώστε

$$[T(x), T(y)] = -\phi([x, y])$$

για κάθε $x, y \in \mathfrak{p}$.

Παράδειγμα: Ο δυϊκός χώρος της μοναδιαίας σφαίρας S^n είναι ο υπερβολικός χώρος $H^n = \{x \in R^{n+1} : q(x, x) = -1 \ \kappa\alpha\iota \ \ x_0 > 0\}$, όπου q η συμμετρική διγραμμική μορφή στον R^{n+1} που ορίζεται ως εξής: $q(x, y) = -x_0 y_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$. Η σφαίρα έχει καμπυλότητα τομής σταθερη $K = 1$, ενώ ο υπερβολικός χώρος $K = -1$.

Έστω $S = G/K$ ένας μη αναγώγιμος συμμετρικός χώρος μη συμπαγούς τύπου και $\mathfrak{g}$=$\mathfrak{l}$+$\mathfrak{p}$ η διάσπαση Cartan της άλγεβρας Lie $\mathfrak{g}$.
Θεωρούμε την μιγαδοποίηση $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} + i\mathfrak{g}$ της $\mathfrak{g}$ και έστω $G^{\mathbb{C}}$ η απλά συνεκτική μιγαδική ομάδα Lie που αντιστοιχεί στην $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$.
Αν η μιγαδοποίηση της $\mathfrak{g}$ είναι μια απλή μιγαδική άλγεβρα Lie , τότε ο συμμετρικός χώρος S καλείται Τύπου III , διαφορετικά καλείται Τύπου IV . Οι αντίστοιχοι συμπαγείς, μη αναγώγιμοι συμμετρικοί χώροι καλούνται Τύπου I και Τύπου II .

Πίνακας 1: Μη αναγώγιμοι συμμετρικοί χώροι $S = G/K$ Τύπου I

G ασυνήθιστη ομάδα Lie	G κλασική ομάδα Lie
$G_2/SO(4)$	$SU(p+q)/S(U(p) \times U(q)),\ (q \geq p \geq 1)$
$F_4/SO(9)$	$SO(p+q)/SO(p) \times SO(q),\ (q \geq p \geq 1)$
$F_4/Sp(3) \times SU(2)$	$Sp(p+q)/Sp(p) \times Sp(q),\ (q \geq p \geq 1)$
$E_6/Sp(4)$	$SU(2n)/Sp(n),\ (n \geq 2)$
$E_6/SU(6) \times SU(2)$	$SU(n)/SO(n),\ (n \geq 3)$
$E_6/SO(10) \times U(1)$	$SO(2n)/U(n),\ (n \geq 5)$
E_6/F_4	$Sp(n)/U(n),\ (n \geq 2)$
$E_7/SU(8)$	
$E_7/SO(12) \times SU(2)$	
$E_7/E_6 \times U(1)$	
$E_8/SO(16)$	
$E_8/E_7 \times SU(2)$	

Πίνακας 2: Μη αναγώγιμοι συμμετρικοί χώροι $S = G/K$ Τύπου II

G ασυνήθιστη ομάδα Lie	G κλασική ομάδα Lie
E_6	$SU(n)$
E_7	$SO(n)$
E_8	$Sp(n)$
F_4	
G_2	

Παρατήρηση: Η δυϊκοτητα εναλλάσει τους συμμετρικούς χώρους των Τύπων I και III καθώς και των Τύπων II και IV με την ίδια σειρά.

Πίνακας 3: Μη αναγώγιμοι συμμετρικοί χώροι $S = G/K$ Τύπου III

G ασυνήθιστη ομάδα Lie	G κλασική ομάδα Lie
$G_2^2/SO(4)$	$SU(p,q)/S(U(p)\times U(q)),\ \ (q\geq p\geq 1)$
$F_4^{-20}/SO(9)$	$SO(p,q)/SO(p)\times SO(q),\ \ (q\geq p\geq 1),(p+q\geq 7)$
$F_4^4/Sp(3)\times SU(2)$	$Sp(p,q)/Sp(p)\times Sp(q),\ \ (q\geq p\geq 1)$
$E_6^6/Sp(4)$	$sl(n,\mathbb{H})/Sp(n),\ \ (n\geq 2)$
$E_6^2/SU(6)\times SU(2)$	$sl(n,\mathbb{R})/so(n),\ \ (n\geq 3)$
$E_6^{-14}/SO(10)\times U(1)$	$SO(n,\mathbb{H})/U(n),\ \ (n\geq 5)$
E_6^{-26}/F_4	$Sp(n,\mathbb{R})/U(n),\ \ (n\geq 2)$
$E_7^7/SU(8)$	
$E_7^{-5}/SO(12)\times SU(2)$	
$E_7^{-25}/E_6\times U(1)$	
$E_8^8/SO(16)$	
$E_8^{-24}/E_7\times SU(2)$	

Πίνακας 4: Μη αναγώγιμοι συμμετρικοί χώροι $S = G/K$ Τύπου IV

G ασυνήθιστη ομάδα Lie	G κλασική ομάδα Lie
$E_6^{\mathbb{C}}/E_6$	$sl(n,\mathbb{C})/SU(n),\ \ (n\geq 2)$
$E_7^{\mathbb{C}}/E_7$	$SO(n,\mathbb{C})/SO(n),\ \ (n\geq 7)$
$E_8^{\mathbb{C}}/E_8$	$Sp(n,\mathbb{C})/Sp(n),\ \ (n\geq 2)$
$F_4^{\mathbb{C}}/F_4$	
$G_2^{\mathbb{C}}/G_2$	

5.Ο κύκλος $\mathbf{S}^1$ ως συμμετρικός χώρος.

Έστω $S^1 = \{(x,y) \in R : x^2 + y^2 = 1\}$ ο κύκλος με κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα 1. Γνωρίζουμε ότι ο κύκλος S^1 είναι μια διαφορίσιμη πολλαπλότητα διάστασης 1. Θα δείξουμε ότι υπάρχει μια ενέλιξη

$$s_p : S^1 \to S^1,$$

ώστε για κάθε $p \in S^1$ να ισχύουν τα εξής:

$$s_p(p) = p \quad , \quad (ds_p)_p = -I,$$

όπου I είναι ο 2×2 ταυτοτικός πίνακας.

Ενέλιξη ονομάζεται μια απεικόνιση s για την οποία ισχύει $s^2 = Id$. Για παράδειγμα ο πίνακας $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ είναι μια ενελικτική απεικόνιση του επιπέδου $\mathbb{R}^2$, επειδή

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Επίσης, η απεικόνιση:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

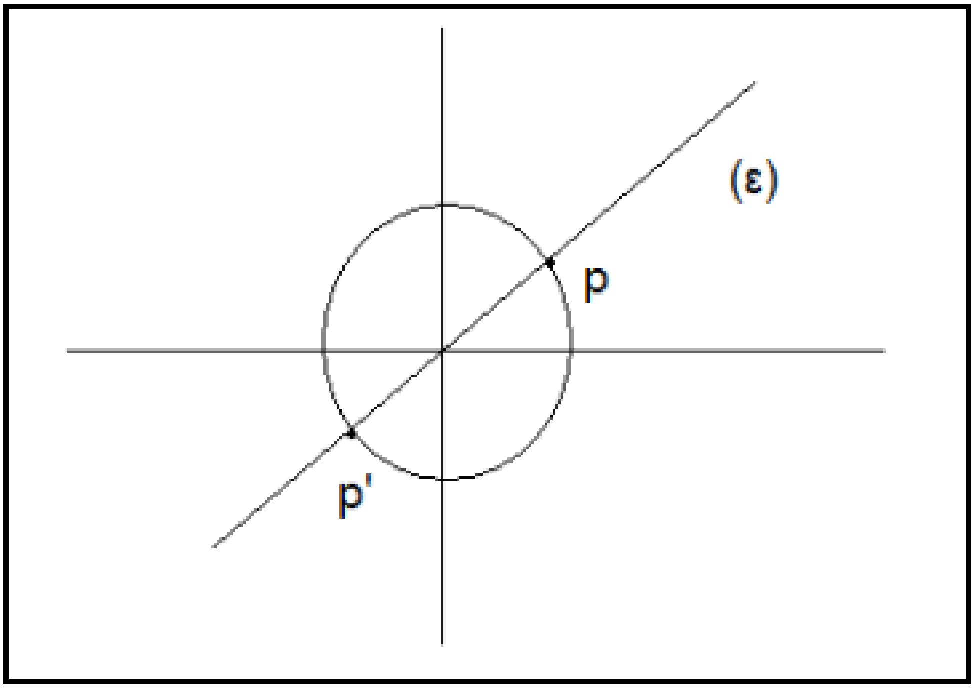
είναι μια ανάκλαση του $\mathbb{R}^2$ ως προς τον άξονα των $x'x$ η οποία διατηρει σταθερά τα σημεία της μορφής $(\alpha, 0)$. Άλλες ενελίξεις του $\mathbb{R}^2$ είναι οι απεικονίσεις με αντίστοιχους πίνακες:

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, ανάκλαση ως προς την ευθεία $y = x$ η οποία διατηρεί σταθερά τα σημεία (α, α).

$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ανάκλαση ως προς τον άξονα των $y'y$ η οποία διατηρεί σταθερά τα σημεία $(0, \alpha)$.

$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, στροφή 180° η οποία διατηρεί σταθερό μόνο το σημείο $O(0,0)$.

Έστω $p \in S^1$ και (ε) η ευθεία που διέρχεται από το p και την αρχή των αξόνων. Τότε η ανάκλαση του επιπέδου $\mathbb{R}^2$ ως προς την ευθεία (ε) είναι μια ενελικτική ισομετρία που σταθεροποιεί το σημείο p. Παρατηρούμε ότι υπάρχει και ένα δεύτερο σημείο που μένει σταθερό ως προς αυτή την ανάκλαση το οποίο είναι το αντιδιαμετρικό του p στον S^1, έστω p'. Συνεπώς ο κύκλος S^1 έχει μια ενελικτική ισομετρία σε κάθε σημείο του.



Ανακλάσεις στο επίπεδο.

Έστω ένα σημείο $u = (x_0, y_0)$ του οποίου παίρνουμε την ανακλασή του ως προς την ευθεία $y = mx$, όπου m η κλίση της, $m \in R$. Καλούμε αυτή την ανάκλαση R_m.
Η εικόνα του σημείου u ως προς την ανάκλαση R_m είναι το σημείο $u' = R_m(u)$ όπου η ευθεία μεταξυ των u και u' είναι κάθετη στην ευθεία $y = mx$ και το σημείο τομής των δύο ευθειών είναι το μέσον του τμήματος από το σημείο u στο u'.

Θα υπολογίσουμε τώρα αυτή την ανάκλαση του $u = (x_0, y_0)$. Η κλίση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία u και u' είναι $-\dfrac{1}{m}$, άρα η εξίσωση αυτής της ευθείας ειναι

$$y - y_0 = -\frac{1}{m}(x - x_0) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{m}x + \frac{1}{m}x_0 + y_0$$

Το σημείο τομής της ευθείας που βρήκαμε με την ευθεία $y = mx$ είναι το σημειο (a, b) όπου

$$a = \frac{x_0 + my_0}{m^2 + 1}$$

και

$$b=\frac{mx_0+m^2y_0}{m^2+1}$$

Αν $u'=(x,y)$ τότε από τις συντεταγμένες μέσου τμήματος έχω $a=\dfrac{x+x_0}{2}$ και $b=\dfrac{y+y_0}{2}$. Άρα λύνοντας ως προς x,y έχω :

$$x=(\frac{-m^2+1}{m^2+1})x_0+(\frac{2m}{m^2+1})y_0$$

και

$$y=(\frac{2m}{m^2+1})x_0+(\frac{m^2-1}{m^2+1})y_0$$

Άρα τελικά η ανάκλαση δίνεται από τον τύπο :

$$R_m\binom{x_0}{y_0}=\frac{1}{m^2+1}\begin{pmatrix}-m^2+1 & 2m\\ 2m & m^2-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\frac{-m^2+1}{m^2+1})x_0+(\frac{2m}{m^2+1})y_0\\ \\ (\frac{2m}{m^2+1})x_0+(\frac{m^2-1}{m^2+1})y_0\end{pmatrix}$$

Για την συγκεκριμένη ανάκλαση είναι εύκολο να δειχθεί ότι ισχύει :
1.$R_m^2=Id\ ,\ \forall m$
2.$\det R_m=-1$.

Ας δούμε τώρα την δράση της R_m στον κύκλο S^1.
Έστω $p=(a,\sqrt{1-a^2})\ ,\ -1\leq a\leq 1$ ένα σημείο του κύκλου στο πρώτο ή το δεύτερο τεταρτημόριο.

Αν $a\neq 0$, η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και το σημείο p είναι $y=\dfrac{\sqrt{1-a^2}}{a}x$, δηλαδή η κλίση της είναι : $m=\dfrac{\sqrt{1-a^2}}{a}$.

Άρα η ανάκλαση που διατηρεί σταθερή την ευθεία είναι :

$$R_m=\frac{1}{m^2+1}\begin{pmatrix}-m^2+1 & 2m\\ 2m & m^2-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a^2-1 & 2a\sqrt{1-a^2}\\ \\ 2a\sqrt{1-a^2} & -2a^2+1\end{pmatrix}$$

επειδή

$$1-m^2=1-\left(\ \frac{\sqrt{1-a^2}}{a}\ \right)^2=\frac{2a^2-1}{a^2}$$

$$1+m^2 = 1+\left(\ \tfrac{\sqrt{1-a^2}}{a}\ \right)^2 = \frac{1}{a^2}$$

$$2m = 2\left(\ \tfrac{\sqrt{1-a^2}}{a}\ \right)^2 = \frac{2a^2-1}{a^2}.$$

Αν $a = 0$ τότε το σημείο είναι το $p = (0,1)$, δηλαδή ο βόρειος πόλος, και η ανάκλαση είναι η ανάκλαση ως προς τον άξονα των $y'y$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$.

Θα δείξουμε τώρα ότι η ανάκλαση R_a είναι ενελικτική, σταθεροποιεί κάθε σημείο $p = (a, \sqrt{1-a^2})$ του κύκλου S^1 και επίσης σταθεροποιεί και το αντιδιαμετρικο σημείο του p. Πράγματι,

$$R_aR_a = \begin{pmatrix} 2a^2-1 & 2a\sqrt{1-a^2} \\ 2a\sqrt{1-a^2} & -2a^2+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2a^2-1 & 2a\sqrt{1-a^2} \\ 2a\sqrt{1-a^2} & -2a^2+1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (2a^2-1)^2+4a^2(1-a^2) & (2a^2-1)2a\sqrt{1-a^2}+(-2a^2+1)2a\sqrt{1-a^2} \\ 2a\sqrt{1-a^2}(2a^2-1)+(-2a^2+1)2a\sqrt{1-a^2} & 4a^2(1-a^2)+(-2a^2+1)^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Άρα η R_a είναι ενελικτική.
Για το σημείο $p = (a, \sqrt{1-a^2})$, $-1 \leq a \leq 1$, έχουμε :

$$R_a\begin{pmatrix} a \\ \sqrt{1-a^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a^2-1 & 2a\sqrt{1-a^2} \\ \\ 2a\sqrt{1-a^2} & -2a^2+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ \sqrt{1-a^2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a(2a^2-1)+2a(1-a^2) \\ \\ 2a^2\sqrt{1-a^2}+(-2a^2+1)\sqrt{1-a^2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a \\ \\ \sqrt{1-a^2} \end{pmatrix}.$$

Άρα η R_a διατηρεί σταθερό το σημείο p. Όμοια δείχνουμε ότι διατηρεί σταθερό και το αντιδιαμετρικό σημείο του p.
Δηλαδή η R_a είναι μια ενελικτική ισομετρία για κάθε σημείο του κύκλου S^1.

Δράση της ενέλιξης στον εφαπτόμενο χώρο.

Είναι γνωστό ότι ο εφαπτόμενος χώρος σε ένα σημείο p μιας πολλαπλότητας M είναι ένας διανυσματικός χώρος διάστασης n που παράγεται από όλα τα εφαπτόμενα διανύσματα της M στο σημείο p.
Για τον κύκλο S^1 ο εφαπτόμενος χώρος σε ένα σημείο είναι η εφαπτόμενη ευθεία του κύκλου στο συγκεκριμένο σημείο. Θα δείξουμε ότι η ενέλιξη R_a στο σημείο $p = (a, \sqrt{1-a^2})$, $-1 \leq a \leq 1$, δρα σαν $-Id$ στον εφαπτόμενο χώρο.
Η εξίσωση του κύκλου είναι $x^2 + y^2 = 1$. Με χρήση πεπλεγμένης παραγώγισης έχουμε ότι:

$$xdx + ydy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$$

δηλαδή η κλίση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο p είναι :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-a}{\sqrt{1-a^2}}$$

Άρα η εφαπτομένη στο σημείο p είναι παράλληλη στην ευθεία $y = \dfrac{-a}{\sqrt{1-a^2}}x$, που διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Η ευθεία αυτή είναι ένας διανυσματικός χώρος διάστασης 1, δηλαδή το σύνολο των διανυσμάτων $\begin{pmatrix} x \\ \frac{-a}{\sqrt{1-a^2}}x \end{pmatrix}$. Τότε έχουμε :

$$R_a \begin{pmatrix} x \\ \frac{-a}{\sqrt{1-a^2}}x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a^2-1 & 2a\sqrt{1-a^2} \\ \\ 2a\sqrt{1-a^2} & -2a^2+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \frac{-a}{\sqrt{1-a^2}}x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}x \end{pmatrix}$$

που είναι

$$R_a \begin{pmatrix} x \\ \frac{-a}{\sqrt{1-a^2}}x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \frac{-a}{\sqrt{1-a^2}}x \end{pmatrix}$$

Οπότε, παρατηρούμε ότι στο σημείο p η ανάκλαση διατηρεί την εφαπτόμενη ευθεία αλλά της αλλάζει κατεύθυνση.
Αν $a = 1$, η ανάκλαση που σταθεροποιεί το σημείο $(1, 0)$ είναι η ανάκλαση ως προς τον άξονα των $x'x$ που ορίσαμε προηγουμένως. Το ίδιο ισχύει και για το σημείο $(-1, 0)$.

Κάθε ανάκλαση του κύκλου $\mathbf{S^1}$ παράγει την ομάδα $\mathbf{SO(2)}$.

Η ορθογώνια ομάδα $O(2)$ είναι το σύνολο όλων των 2×2 πραγματικών πινάκων που διατηρούν το μήκος διανυσματων, δηλαδή αν $A \in O(2) \Leftrightarrow |A\vec{x}| = |\vec{x}|.(1)$
Θα βρούμε μία αναλυτική περιγραφή των στοιχείων της $O(2)$.

Έστω $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O(2)$ και $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Τότε η (1) ισοδυναμεί με :

$$|\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}| = |\begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}| = \sqrt{(ax+by)^2 + (cx+dy)^2} = \sqrt{x^2+y^2}$$

Άρα :

$x^2 + y^2 = (ax + by)^2 + (cx + dy)^2 = a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2 + c^2x^2 + 2cdxy + d^2y^2 =$
$= (a^2 + c^2)x^2 + 2(ab + cd)xy + (b^2 + d^2)y^2$

Οπότε έχουμε :

$a^2 + c^2 = 1 \Rightarrow c = \pm\sqrt{1 - a^2}$

$b^2 + d^2 = 1 \Rightarrow b = \pm\sqrt{1 - d^2}$

$ab + cd = 0 \Rightarrow b = \dfrac{-cd}{a}$
Οπότε από τις τρεις παραπάνω σχέσεις παίρνουμε :

$\sqrt{1 - d^2} = \dfrac{-\sqrt{1 - a^2}d}{a}$

$1 - d^2 = \dfrac{(1 - a^2)d^2}{a^2}$

$a^2 - a^2d^2 = d^2 - a^2d^2$

$a^2 = d^2$

$a = \pm d$

Επίσης, ισχύει : $|a| \leq 1$, $|b| \leq 1$, $|c| \leq 1$ και $|d| \leq 1$.

Οπότε $O(2) = \begin{pmatrix} a & \pm\sqrt{1-a^2} \\ \pm\sqrt{1-a^2} & \pm a \end{pmatrix}$.

Συνεπώς προκύπτουν οι εξής πίνακες πίνακες :

(1) $\begin{pmatrix} a & -\sqrt{1-a^2} \\ \sqrt{1-a^2} & a \end{pmatrix}$, στροφή κατά την θετική φορά

(2) $\begin{pmatrix} a & \sqrt{1-a^2} \\ -\sqrt{1-a^2} & a \end{pmatrix}$, στροφή κατά την αρνητική φορά

(3) $\begin{pmatrix} a & \sqrt{1-a^2} \\ \\ \sqrt{1-a^2} & -a \end{pmatrix}$, ανάκλαση ως προς την ευθεία με κλίση $m = \sqrt{\frac{1-a}{1+a}}$

(4) $\begin{pmatrix} a & -\sqrt{1-a^2} \\ \\ -\sqrt{1-a^2} & -a \end{pmatrix}$, ανάκλαση ως προς την ευθεία με κλίση $m = \sqrt{\dfrac{1-a}{1+a}}$

Οι Πίνακες (1)-(2) έχουν ορίζουσα 1 ενώ οι Πίνακες (3)-(4) έχουν ορίζουσα -1.
Έστω τώρα $A \in O(2)$. Θα δείξουμε ότι ισχύει $A^tA = Id$, όπου A^t είναι ο ανάστροφος πίνακας του A.

Πράγματι, αν $A = \begin{pmatrix} a & -\sqrt{1-a^2} \\ \\ \sqrt{1-a^2} & a \end{pmatrix}$, έχουμε :

$$A^tA = \begin{pmatrix} a & -\sqrt{1-a^2} \\ \\ \sqrt{1-a^2} & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \sqrt{1-a^2} \\ \\ -\sqrt{1-a^2} & a \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a^2 + (\sqrt{1-a^2})^2 & a\sqrt{1-a^2} - a\sqrt{1-a^2} \\ a\sqrt{1-a^2} - a\sqrt{1-a^2} & (\sqrt{1-a^2})^2 + a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Το ίδιο αποτέλεσμα θα προέκυπτε και για οποιαδήποτε από τις άλλες μορφές των στοιχείων της $O(2)$.

Ορίζουμε τώρα την ειδική ορθογώνια ομάδα $SO(2)$, που είναι όλα τα στοιχεία της $O(2)$ τα οποία έχουν ορίζουσα 1. Τότε τα στοιχεία της $SO(2)$ θα είναι όλοι οι πίνακες της μορφής (1)-(2).
Ένας άλλος τρόπος γραφής των στοιχείων της $SO(2)$,όπως γνωρίζουμε από την γραμμική άλγεβρα, είναι :

(1) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, στροφή προς την θετική φορά κατά γωνία θ

(2) $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, στροφή προς την αρνητική φορά κατά γωνία θ , όπου $\theta = \arccos a$.

Υπεθυμίζουμε ότι η $SO(2)$ έχει την δομή αβελιανής ομάδας με ταυτοτικό στοιχείο τον πίνακα $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Θα δείξουμε τώρα ότι η ανάκλαση του κύκλου S^1 παράγει την $SO(2)$. Δηλαδή θα δείξουμε ότι για κάθε δύο σημεία του κύκλου το γινόμενο των αντίστοιχων ενελίξεων ως προς το κάθε σημείο ανήκει στην $SO(2)$. Πράγματι, για κάθε σημείο $p = (\cos\theta, \sin\theta) \in S^1$ έχουμε δείξει ότι υπάρχει μια ενελικτική ισομετρία ,

$R_\theta = \begin{pmatrix} 2\cos^2\theta - 1 & 2\cos\theta\sin\theta \\ 2\cos\theta\sin\theta & -2\cos^2\theta + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$, που σταθεροποιεί το σημείο p και το αντιδιαμετρικό του p'. Παρατηρούμε ότι η ορίζουσα της ανάκλασης είναι -1.

Έστω $Q = (\cos a, \sin a)$ ένα άλλο σημείο του S^1. Τότε η ενέλιξη ως προς το σημείο Q είναι

$R_a = \begin{pmatrix} \cos 2a & \sin 2a \\ \sin 2a & -\cos 2a \end{pmatrix}$, $0 \leq a, \theta \leq 2\pi$.

Οπότε $R_a R_\theta = \begin{pmatrix} \cos 2a \cos 2\theta + \sin 2a \sin 2\theta & \cos 2a \sin 2\theta - \sin 2a \cos 2\theta \\ \sin 2a \cos 2\theta - \cos 2a \sin 2\theta & \sin 2a \sin 2\theta + \cos 2a \cos 2\theta \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \cos(2a-2\theta) & -sin(2a-2\theta) \\ \sin(2a-2\theta) & \cos(2a-2\theta) \end{pmatrix} \in SO(2)$, και είναι η στροφή προς την θετική φορά κατά γωνία $2(a-\theta)$.
Άρα είδαμε ότι το γινόμενο $R_a R_\theta$ παράγει την $SO(2)$.

$\mathbf{SO(2) = S^1}$

Γεωμετρικά η $SO(2)$ δρα στον S^1 ως μια ομάδα περιστροφών, κάθε στοιχείο της $SO(2)$ περιστρέφει τον κύκλο. Η τροχιά ενός σημείου $p \in S^1$ είναι ο τόπος των σημείων που στέλνει το p η δράση όλων των στοιχείων της $SO(2)$.

Η τροχιά του $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ως προς την δράση της $SO(2)$ είναι ο S^1.
Πράγματι, $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$.
Η δράση του $SO(2)$ στον S^1 είναι μεταβατική, αλλά όχι απλά μεταβατική.
Πράγματι, αν έχω $p = (\cos a, \sin a)$, $q = (\cos b, \sin b)$, δυό σημεία του S^1 τότε έχω :

$$\begin{pmatrix} \cos(a-b) & -\sin(a-b) \\ \sin(a-b) & \cos(a-b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos a \\ \sin a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos b \\ \sin b \end{pmatrix}$$

Όμως αυτή η περιστροφή δεν είναι μοναδική αφού γνωρίζουμε ότι ισχύει :

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta+2n\pi) & -\sin(\theta+2n\pi) \\ \sin(\theta+2n\pi) & \cos(\theta+2n\pi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

όπου $n \in \mathbb{Z}$.

Η ομάδα ισοτροπίας του $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ως προς την δράση της $SO(2)$ είναι :

$$SO(2)_1 = \{ \begin{pmatrix} \cos(0+2n\pi) & -\sin(0+2n\pi) \\ \sin(0+2n\pi) & \cos(0+2n\pi) \end{pmatrix} \ , \ n \in \mathbb{Z} \}.$$

Ο χώρος πηλίκο $SO(2)/SO(2)_1$ έχει στοιχεία της μορφής

$$\begin{pmatrix} \cos(a+2k\pi) & -\sin(a+2k\pi) \\ \sin(a+2k\pi) & \cos(a+2k\pi) \end{pmatrix}.$$

Ενα στοίχειο $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ ανήκει στην ίδια κλάση ισοδυναμίας με το $\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$ αν ισχύει :

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(0+2k\pi) & -\sin(0+2k\pi) \\ \sin(0+2k\pi) & \cos(0+2k\pi) \end{pmatrix},$$

δηλαδή $\theta = \phi - 2k\pi$.

Ο χώρος πηλίκο $SO(2)/SO(2)_1$ είναι ομάδα.

Πράγματι, αν $A = \begin{pmatrix} \cos(a+2k\pi) & -\sin(a+2k\pi) \\ \sin(a+2k\pi) & \cos(a+2k\pi) \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} \cos(b+2k\pi) & -\sin(b+2k\pi) \\ \sin(b+2k\pi) & \cos(b+2k\pi) \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} \cos(c+2k\pi) & -\sin(c+2k\pi) \\ \sin(c+2k\pi) & \cos(c+2k\pi) \end{pmatrix}$ τρία στοιχεία του χώρου πηλίκου τότε :

$A \cdot B = \begin{pmatrix} \cos(a+b)+2(2k\pi) & -\sin(a+b)+2(2k\pi) \\ \sin(a+b)+2(2k\pi) & \cos(a+b)+2(2k\pi) \end{pmatrix}$, που ανήκει στον χώρο πηλίκο.

$(A \cdot B)\cdot C = A \cdot (B \cdot C) = \begin{pmatrix} \cos(a+b+c)+2(3k\pi) & -\sin(a+b+c)+2(3k\pi) \\ \sin(a+b+c)+2(3k\pi) & \cos(a+b+c)+2(3k\pi) \end{pmatrix}$.

Για κάθε στοιχείο $A \in SO(2)/SO(2)_1$ υπάρχει $e = \begin{pmatrix} \cos(0+2k\pi) & -\sin(0+2k\pi) \\ \sin(0+2k\pi) & \cos(0+2k\pi) \end{pmatrix} \in SO(2)/SO(2)_1$,

τέτοιο ώστε $A \cdot e = e \cdot A = A$

Τέλος, για καθε $A \in SO(2)/SO(2)_1$ υπάρχει $A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(-a+2k\pi) & -\sin(-a+2k\pi) \\ \sin(-a+2k\pi) & \cos(-a+2k\pi) \end{pmatrix}$ τέτοιο ώστε :

$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} \cos(0+2(2k\pi)) & -\sin(0+2(2k\pi)) \\ \sin(0+2(2k\pi)) & \cos(0+2(2k\pi)) \end{pmatrix}$, όπου $\begin{pmatrix} \cos(0+2n\pi) & -\sin(0+2n\pi) \\ \sin(0+2n\pi) & \cos(0+2n\pi) \end{pmatrix}$ το ταυτοτικό στοιχείο του χώρου πηλίκου.

Άρα ο $SO(2)/SO(2)_1$ είναι ομάδα.

Θεώρημα. $SO(2)/SO(2)_1 \cong S^1$

Απόδειξη: Ορίζουμε την απεικόνιση :

$$f : SO(2) \to S^1$$

με

$$f(\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}) \to (\cos\theta, \sin\theta).$$

Η απεικόνιση αυτή είναι 1-1 και επί και ο πυρήνας της είναι :

$$\ker f = \{A \in SO(2) | f(A) = e_{S^1}\} = \begin{pmatrix} \cos(0+2k\pi) & -\sin(0+2k\pi) \\ \sin(0+2k\pi) & \cos(0+2k\pi) \end{pmatrix} = SO(2)_1.$$

Άρα θα ισχύει ότι $SO(2)/SO(2)_1 \cong S^1$.

Έστω $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in SO(2)$.
Τα στοιχεία της $SO(2)/SO(2)_1$ είναι της μορφής:

$$A + SO(2)_1 = \begin{pmatrix} \cos(\theta+2k\pi) & -\sin(\theta+2k\pi) \\ \sin(\theta+2k\pi) & \cos(0\theta+2k\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = SO(2).$$

Άρα ισχύει $S^1 \cong SO(2)$.

Θα δείξουμε τώρα ότι ο $S^1 \cong SO(2)$ είναι ομάδα Lie.
Ομάδα Lie ονομάζεται ένα μη κενό σύνολο που είναι συγχρόνως διαφορίσιμη παλλαπλότητα και ομάδα. Γνωρίζουμε ότι ο S^1 είναι πολλαπλότητα και ότι είναι ισόμορφος με την ομάδα $SO(2)$.

Αφού ισχύει : $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta+a) & -\sin(\theta+a) \\ \sin(\theta+a) & \cos(\theta+a) \end{pmatrix}$

μπορούμε να ορίσουμε έναν πολλαπλασιασμό στον S^1 :

$$(\cos\theta, \sin\theta) * (\cos a, \sin a) = (\cos(\theta+a), \sin(\theta+a)).$$

Τότε η S^1 με αυτόν τον παλλαπλασιασμό έχει την δομή αμάδας με ταυτοτικό στοιχείο το $(\cos 0, \sin 0) = (1, 0)$ και αντίστροφο στοιχείο $(\cos\theta, \sin\theta)^{-1} = (\cos(-\theta), \sin(-\theta))$.

Τότε έχουμε την απεικόνιση

$$\Theta : S^1 \times S^1 \to S^1$$

με τύπο

$$\Theta[(\cos\theta, \sin\theta), (\cos a, \sin a)] = (\cos\theta, \sin\theta) * (\cos a, \sin a)^{-1} = (\cos(\theta - a), \sin(\theta - a)).$$

Για να ελεγχθεί ότι αυτή η απεικόνιση είναι διαφορίσιμη θα χρησιμοποιήσουμε τις απεικονίσεις της στερεογραφικής προβολής ϕ_1 και ϕ_2,όπου $\phi_i : U_i \to (-1, 1)$ με $\phi_i(x, y) = x$ $(i = 1, 2)$, και θα δείξουμε ότι η απεικόνιση :

$$\phi_1 \circ \Theta \circ (\phi_1^{-1} \times \phi_1^{-1}) : R^2 \to R$$

είναι διαφορίσιμη.

$$\begin{array}{ccccc}
S^1 & \times & S^1 & \overset{\Theta}{\to} & S^1 \\
\phi_1^{-1}\uparrow & & \phi_1^{-1}\uparrow & & \downarrow\phi_1 \\
a & & b & & \dfrac{\alpha b + \alpha - b + 1}{\alpha b - \alpha + b + 1}
\end{array}$$

Έχουμε $f(\alpha, b) = \phi_1 \circ \Theta \circ (\phi_1^{-1} \times \phi_1^{-1})(\alpha, b) = \dfrac{\cos(\theta - a)}{1 - \sin(\theta - a)} = \dfrac{\alpha b + \alpha - b + 1}{\alpha b - \alpha + b + 1}$,
όπου $\cos\theta = \dfrac{2\alpha}{\alpha^2 + 1}$ και $\cos a = \dfrac{2b}{b^2 + 1}$.
Θα δείξουμε τώρα ότι η $f(\alpha, b)$ είναι διαφορίσιμη υπολογίζοντας τα $\dfrac{\partial f}{\partial \alpha}$ και $\dfrac{\partial f}{\partial b}$.
Έχουμε :

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = \frac{(b+1)(\alpha b - \alpha + b + 1) - (b-1)(\alpha b + \alpha - b + 1)}{(\alpha b - \alpha + b + 1)^2} = \frac{2(b^2-1)(\alpha b + 1)(b - \alpha)}{(\alpha b - \alpha + b + 1)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial b} = \frac{2(\alpha^2-1)(\alpha b+1)(b-\alpha)}{(\alpha b-\alpha+b+1)^2}$$

που είναι διαφορίσιμες εκτός από το σημείο $(-\frac{b+1}{b-1}, 1)$.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] S. Helgason, *Differential Geometry and Symmetric Spaces*,
Academic Press - 1962

[2] B. O'neil, *Semi-Riemannian Geometry*,
Academic Press - 1983

[3] J.H. Eschenburg, *Lecture Notes on Symmetric Spaces*

[4] J. Jost, *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*,
Springer - 2008

[5] A. Arvanitoyeorgos, *An Introduction to Lie Groups and the Geometry oh Homogenous Spaces*,
AMS - 2003

[6] U. Magnea, *An Introduction to Symmetric Spaces*,
University of Torino - 2002

[7] S.P. Peterson, *Circles and Spheres as Symmetric Spaces*,
Mathematical Reflection - 2007