ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο: ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΙΑ ΤΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ BESSEL

1.1. ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ BESSEL ΚΑΙ Η ΓΕΝΙΚΗ ΛΥΣΗ ΤΗΣ – ΟΡΙΣΜΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ BESSEL 1ου ΚΑΙ 2ου ΕΙΔΟΥΣ

Η μη ομαλή γραμμική Συνήθης Διαφορική Εξίσωση:

$$x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2 - \nu^2)y(x) = 0\,, \text{με } x \in C\,, \nu \in C \qquad (1.1)$$

καλείται Διαφορική Εξίσωση Bessel και οι αναλυτικές (γραμμικώς ανεξάρτητες) λύσεις της $J_\nu(x)$ και $Y_\nu(x)$ ονομάζονται συναρτήσεις Bessel 1ου και 2ου είδους, αντίστοιχα, τάξεως ν. Η συνάρτηση $J_\nu(x)$ παριστάνεται υπό μορφή δυναμοσειράς [65] ως εξής:

$$J_\nu(x) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2r+\nu}}{\Gamma(r+1)\Gamma(r+\nu+1)}\,, \text{με } \nu \in C \qquad (1.2)$$

και η συνάρτηση $Y_\nu(x)$ ορίζεται [65] ως εξής:

$$Y_\nu(x) = \frac{\cos(\nu\pi)\,J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}\,, \text{με } \nu \in C \qquad (1.3)$$

Η γενική μορφή της λύσης της (1.1) δίνεται από τη σχέση:

$$y(x) = AJ_\nu(x) + BY_\nu(x)\,, \text{με } \nu \in C \qquad (1.4)$$

όπου A και B σταθερές.

1.2. ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΗ ΜΟΡΦΗ ΤΗΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ BESSEL ΚΑΙ Η ΓΕΝΙΚΗ ΛΥΣΗ ΤΗΣ

Η γενικευμένη μορφή της Συνήθους Διαφορικής εξίσωσης Bessel είναι η:

$$x^2y''(x) + (1-2a)xy'(x) + [\beta^2\gamma^2x^{2\gamma} + (a^2 - \nu^2\gamma^2)]y(x) = 0 \qquad (1.5)$$

και η γενική λύση της είναι:

$$y(x) = x^a[AJ_\nu(\beta x^\gamma) + BY_\nu(\beta x^\gamma)] \qquad (1.6)$$

όπου A και B σταθερές.

Παρατηρούμε ότι για $a = 0$, $\beta = 1$ και $\gamma = 1$, η (1.5) δίνει την (1.1) και η (1.6) την (1.4).

1.3. ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ BESSEL ΚΑΙ Η ΓΕΝΙΚΗ ΛΥΣΗ ΤΗΣ – ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ BESSEL 1ου ΚΑΙ 2ου ΕΙΔΟΥΣ

Η Τροποποιημένη Διαφορική Εξίσωση Bessel, που εμφανίζεται σε πολλά προβλήματα της Μαθηματικής Φυσικής και της Χημείας, είναι η:

$$x^2y''(x) + xy'(x) - (x^2 + \nu^2)y(x) = 0 \qquad (1.7)$$

η οποία προκύπτει από την (1.5) για $a = 0$, $\beta^2 = -1$ και $\gamma = 1$.

Η (1.7) έχει γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της, τις συναρτήσεις $I_\nu(x)$ και $K_\nu(x)$ που ονομάζονται Τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel 1ου και 2ου είδους, αντίστοιχα, τάξεως ν.

Η γενική λύση της (1.7) είναι:

$$y(x) = AI_\nu(x) + BK_\nu(x)\,, \text{με } \nu \in \mathrm{C} \qquad (1.8)$$

όπου A και B σταθερές.

Η Τροποποιημένη συνάρτηση Bessel 1^{ου} είδους $I_\nu(x)$ μπορεί να αναπαρασταθεί ως δυναμοσειρά [65] από την ακόλουθη σχέση:

$$I_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu} \frac{1}{n!\,\Gamma(\nu+n+1)} = \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} \frac{{}_0\mathrm{F}_1\left(\nu+1, \frac{x^2}{4}\right)}{\Gamma(\nu+1)} \tag{1.9}$$

όπου ${}_0\mathrm{F}_1$ είναι η υπεργεωμετρική σειρά και ορίζεται ως εξής:

$${}_0\mathrm{F}_1(a, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(a)_n} \frac{x^n}{n!} \tag{1.10}$$

με $(a)_0 = 1$, για $a \neq 0$ και $(a)_n = \alpha(\alpha-1)\cdot \ldots \cdot(\alpha+n-1) = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$, με $n = 1,2, \ldots$, είναι το γνωστό σύμβολο του Pochhammer.

Η Τροποποιημένη συνάρτηση Bessel 1^{ου} είδους $I_\nu(x)$ συνδέεται με τη συνάρτηση Bessel 1^{ου} είδους $J_\nu(x)$ μέσω της σχέσης:

$$I_\nu(x) = i^{-n} J_\nu(ix) \tag{1.11}$$

και όταν $\nu = n \in Z$ ισχύει:

$$I_n(x) = I_{-n}(x) \tag{1.12}$$

Η Τροποποιημένη συνάρτηση Bessel 2^{ου} είδους (ή αλλιώς συνάρτηση MacDonald) $K_\nu(x)$, ορίζεται [65] ως εξής:

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\sin \nu\pi} \tag{1.13}$$

και όταν $\nu = n \in Z$ τότε:

$$K_n(x) = \lim_{\nu \to n} K_\nu(x) = \lim_{\nu \to n} \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\sin n\pi} \tag{1.14}$$

1.4. ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

Οι Τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel 1ου και 2^{ου} είδους ικανοποιούν τις ακόλουθες αναδρομικές σχέσεις [65]:

$$\frac{d}{dx}\{x^n I_n(x)\} = x^n I_{n-1}(x) \qquad (1.15.i)$$

$$\frac{d}{dx}\{x^{-n} I_n(x)\} = x^{-n} I_{n+1}(x) \qquad (1.15.ii)$$

$$I_n'(x) = I_{n-1}(x) - \frac{n}{x} I_n(x) \qquad (1.15.iii)$$

$$I_n'(x) = \frac{n}{x} I_n(x) + I_{n+1}(x) \qquad (1.15.iv)$$

$$I_n'(x) = \frac{1}{2}\{I_{n-1}(x) + I_{n+1}(x)\} \qquad (1.15.v)$$

$$I_{n-1}(x) - I_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} I_n(x) \qquad (1.15.vi)$$

και

$$\frac{d}{dx}\{x^n K_n(x)\} = -x^n K_{n-1}(x) \qquad (1.16.i)$$

$$\frac{d}{dx}\{x^{-n} K_n(x)\} = -x^{-n} K_{n+1}(x) \qquad (1.16.ii)$$

$$K_n'(x) = -K_{n-1}(x) - \frac{n}{x} K_n(x) \qquad (1.16.iii)$$

$$K_n'(x) = \frac{n}{x} K_n(x) - K_{n+1}(x) \qquad (1.16.iv)$$

$$K_n'(x) = -\frac{1}{2}\{K_{n-1}(x) + K_{n+1}(x)\} \qquad (1.16.v)$$

$$K_{n-1}(x) - K_{n+1}(x) = -\frac{2n}{x} K_n(x) \qquad (1.16.vi)$$

αντίστοιχα.

1.5. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΤΡΟΠΟΙΗΜΕΝΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ BESSEL

Τις τελευταίες δεκαετίες πολλές ανισότητες και ιδιότητες μονοτονίας των συναρτήσεων $I_\nu(x)$ και $K_\nu(x)$ και αρκετών συνδυασμών τους έχουν μελετηθεί από πολλούς συγγραφείς λόγω της εμφάνισής τους σε πολλά προβλήματα σε διάφορες επιστήμες, όπως: Κυματομηχανική, Μηχανική των Ρευστών, Ηλεκτρομηχανική, Κβαντομηχανική, Βιοφυσική, Μαθηματική Φυσική, Πεπερασμένη Ελαστικότητα, Στατιστική/Πιθανότητες, Ειδική θεωρία Σχετικότητας και σε πολλές άλλες [18,19,22,25,34,43,53,54,55,59,64].

Ενδεικτικά, αναφέρουμε ότι ο λόγος $\frac{K_\nu(x)}{I_\nu(x)}$ χρησιμοποιήθηκε από τον Rosenthal (1962) [54] και αργότερα από τον Ross (1970) [55] στον καθορισμό της ευστάθειας της κίνησης των ρευστών. Η μονοτονία της συνάρτησης $\frac{I_\nu(x)}{K_\nu(x)}$ που εμφανίστηκε σε ένα πρόβλημα της βιοφυσικής, μελετήθηκε από τον Penfold (2006) [49].

Τα άνω και κάτω φράγματα του πηλίκου $\frac{I_\nu(x)}{I_\nu(y)}$ παίζουν σημαντικό ρόλο στη γενικευμένη Q-συνάρτηση του Marcum, που εμφανίζεται συχνά στην επεξεργασία σήματος των radar [10,16,17].

Επιπροσθέτως, τα φράγματα των πηλίκων $\frac{I_\nu(x)}{I_{\nu+1}(x)}, \frac{K_\nu(x)}{K_{\nu+1}(x)}$ παίζουν σημαντικό ρόλο στην πεπερασμένη ελαστικότητα (1984), καθώς επίσης και τα πηλίκα της μορφής $\frac{x}{y}\frac{I_\nu(x)}{I_{\nu+1}(x)}\frac{I_\nu(y)}{I_{\nu+1}(y)}$.

O Gronwall (1932) [26] εξήγαγε φράγματα για το λόγο $\frac{I_\nu{}'(x)}{I_\nu(x)}$ παρακινούμενος από προβλήματα της κυματομηχανικής. Επίσης, αναφέρονται αριθμητικά φράγματα για τα πηλίκα $x\frac{I_\nu{}'(x)}{I_\nu(x)}$ και $x\frac{K_\nu{}'(x)}{K_\nu(x)}$ που είναι χρήσιμα στον υπολογισμό των συναρτήσεων αυτών [57]. Δοθείσης μιας συνάρτησης $f(x)$, η ποσότητα $\left|x\frac{f'(x)}{f(x)}\right|$ παριστάνει το λόγο του σχετικού σφάλματος στον υπολογισμό των συναρτήσεων f προς το σχετικό σφάλμα στο x. Έτσι λοιπόν, μπορούμε να δούμε πως ένα σφάλμα αυξάνεται ή μειώνεται ως προς το σφάλμα της μεταβλητής. Η ποσότητα $\left|x\frac{f'(x)}{f(x)}\right|$ είναι εύκολα υπολογίσιμη για στοιχειώδεις συναρτήσεις, αλλά δεν είναι σίγουρο ότι αυστηρά άνω και κάτω φράγματα μπορούν να δοθούν για μη στοιχειώδεις συναρτήσεις.

Τέλος, φράγματα των κλασμάτων $\frac{I_{\nu+\frac{1}{2}}(x)}{I_{\nu-\frac{1}{2}}(x)}$ και $\frac{K_{\nu-\frac{1}{2}}(x)}{K_{\nu+\frac{1}{2}}(x)}$ χρησιμεύουν στην ποιοτική ανάλυση των εξισώσεων Riccatti.

Τα τελευταία χρόνια, υπάρχει ένα πρόσθετο ενδιαφέρον για τη μελέτη των ανισοτήτων τύπου Turán για ειδικές συναρτήσεις που περιέχουν Τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel. Πολλά φράγματα για τους λόγους και τις ανισότητες τύπου Turán είναι διαθέσιμα για τους λόγους των Τροποποιημένων συναρτήσεων Bessel και ειδικότερα του λόγου $\frac{I_{\nu}(x)}{I_{\nu-1}(x)}$ και έχουν αποδειχθεί χρησιμοποιώντας ποικίλες τεχνικές. Το βασικό εργαλείο που χρησιμοποιείται είναι οι 1ης τάξεως διαφορο - διαφορικές εξισώσεις (DDEs) που ικανοποιούνται από τις συναρτήσεις Bessel και τη σχετική αναδρομική σχέση τριών όρων, μαζί με την ανάλυση της ποιοτικής συμπεριφοράς των λύσεων των εξισώσεων Riccati που ικανοποιούνται από τους παραπάνω λόγους. Ακόμη πολλές από τις γνωστές μας ανισότητες μπορούν να βελτιωθούν ή να επεκταθούν, ώστε να γίνουν αποδεκτές. Αποδεικνύεται επίσης πώς να δημιουργούν επαναληπτικά άνω και κάτω φράγματα, που είναι συγκλίνουσες ακολουθίες στη περίπτωση των I - συναρτήσεων. Πολλές βελτιώσεις παρέχουν απλά και αποτελεσματικά άνω και κάτω φράγματα χρησιμοποιώντας φράγματα των κλασμάτων $\frac{I_{\nu}(x)}{I_{\nu-1}(x)}$ και $\frac{K_{\nu}(x)}{K_{\nu+1}(x)}$, αντίστοιχα. Χρησιμοποιώντας τα φράγματα αυτά, οι ανισότητες τύπου Turán που θεμελιώθηκαν επεκτείνουν το πεδίο ισχύος κάποιων γνωστών ανισοτήτων και αποδεικνύουν νέες ανισότητες. Για παράδειγμα, έχει αποδειχθεί ότι ισχύει η ανισότητα:

$$\frac{K_{\nu+1}(x)K_{\nu-1}}{[K_{\nu}(x)]^2} < \frac{|\nu|}{|\nu|-1}, \ \ \text{με } x > 0\,, \nu \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty)$$

που είναι η καλύτερη δυνατή.

1.6. ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Οι ορισμοί και οι προτάσεις που ακολουθούν για τη μονοτονία (πλήρη και απόλυτη) και τη λογαριθμική κυρτότητα [2,3,28,44,67] είναι βασικοί για την κατανόηση της εργασίας :

Ορισμοί:

- Μια συνάρτηση $f:(0,\infty)\to \mathrm{R}$ καλείται Πλήρως Μονότονη (Completely Monotonic) αν η f έχει παραγώγους κάθε τάξης και ικανοποιεί τη συνθήκη $(-1)^n f^{(n)}(x)\geq 0$, για κάθε $x>0$ και $n=0,1,2,\dots$
- Μια συνάρτηση $f:(0,\infty)\to \mathrm{R}$ καλείται Αυστηρά Πλήρως Μονότονη (Strictly Completely Monotonic) αν η f έχει παραγώγους κάθε τάξης και ικανοποιεί τη συνθήκη $(-1)^n f^{(n)}(x)>0$, για κάθε $x>0$ και $n=0,1,2,\dots$
- Μια συνάρτηση $f:(0,\infty)\to \mathrm{R}$ καλείται Απολύτως Μονότονη (Absolutely Monotonic) αν η f έχει παραγώγους κάθε τάξης και ικανοποιεί τη συνθήκη $f^{(n)}(x)\geq 0$, για κάθε $x>0$ και $n=0,1,2,\dots$
- Μια συνάρτηση $f:(0,\infty)\to \mathrm{R}$ καλείται Αυστηρά Απολύτως Μονότονη (Strictly Absolutely Monotonic) αν η f έχει παραγώγους κάθε τάξης και ικανοποιεί τη συνθήκη $f^{(n)}(x)>0$, για κάθε $x>0$ και $n=0,1,2,\dots$
- Μια θετική συνάρτηση $f:D\to \mathrm{R}$ (D υποσύνολο του R^n) είναι Λογαριθμικά Κυρτή (Log - Convex), αν η $\log f$ είναι Κυρτή (Convex), δηλαδή:

$$f(\theta x+(1-\theta)y)\leq f(x)^{\theta}f(y)^{1-\theta}$$

για κάθε $x,y\in D$ και $0\leq\theta\leq 1$.

Κυρτή (Convex) καλείται μια συνάρτηση f αν το πεδίο ορισμού της είναι κυρτό σύνολο και

$$f(\theta x+(1-\theta)y)\leq \theta f(x)+(1-\theta)f(y)$$

για κάθε $x,y\in D$ και $0\leq\theta\leq 1$.

Αυστηρή κυρτότητα έχουμε όταν:

$$f(\theta x+(1-\theta)y)< \theta f(x)+(1-\theta)f(y)$$

για κάθε $x,y\in D$ και $0<\theta<1$.

- Μια θετική συνάρτηση $f:D\to \mathrm{R}$ (D υποσύνολο του R^n) είναι λογαριθμικά κοίλη (Log - Concave), αν η $\log f$ είναι κοίλη (Concave), δηλαδή:

$$f(\theta x+(1-\theta)y)\geq f(x)^{\theta}f(y)^{1-\theta}$$

για κάθε $x,y\in D$ και $0\leq\theta\leq 1$.

Κοίλη (Concave) καλείται μια συνάρτηση f, αν η $-f$ είναι κυρτή.

<u>Προτάσεις</u>:

- Το γινόμενο (πηλίκο) δύο αυστηρά πλήρως μονότονων συναρτήσεων είναι επίσης αυστηρά πλήρως μονότονη συνάρτηση.
- Αν η f είναι αυστηρά πλήρως μονότονη και η g μη αρνητική με αυστηρά πλήρως μονότονη παράγωγο, τότε η σύνθεση fog είναι επίσης αυστηρά πλήρως μονότονη συνάρτηση.
- Μια αυστηρά πλήρως μονότονη συνάρτηση είναι αυστηρά λογαριθμικά κυρτή.

Επιπλέον, αξίζει να αναφέρουμε και τα ακόλουθο βασικό Θεώρημα:

<u>Θεώρημα (Berstein - Widder)</u> <u>[67]</u>:

Μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι μια συνάρτηση $f(x)$ πλήρως μονότονη σε ένα διάστημα $c < x < \infty$ είναι:

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-xt}\, da(t)$$

όπου $a(t)$ είναι μια μη αρνητική συνάρτηση, έτσι ώστε το ολοκλήρωμα να συγκλίνει για $x > c$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{ο}: ΦΡΑΓΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΑ ΠΗΛΙΚΑ ΤΩΝ ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ BESSEL 1^{ου} ΕΙΔΟΥΣ

2.1. ΑΝΩ ΦΡΑΓΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΑ ΠΗΛΙΚΑ $\frac{I_\nu(x)}{I_\nu(y)}$

- $\frac{I_\nu(x)}{I_\nu(y)} < \left(\frac{x}{y}\right)^\nu$, με $0 < x < y$ και $\nu > -1$ (2.1)

Η ανισότητα (2.1) αποδείχθηκε από τον Baricz (2010) [12]. Η απόδειξή της βασίζεται στο γεγονός ότι η συνάρτηση $x^{-\nu} I_\nu(x)$ είναι αυστηρώς αύξουσα στο $(0, \infty)$ για $\nu > -1$, όπως μπορεί εύκολα να φανεί και από το ανάπτυγμα δυναμοσειράς της $I_\nu(x)$ εκ της (1.9). Πρωτίστως, είχε αποδειχθεί από τον Paris (1984) [48] για $\nu > -\frac{1}{2}$, από τον Robert (1990) [53] για $\nu \geq 0$, αλλά και από τους Joshi και Bissu (1991) [32] επίσης για $\nu > -\frac{1}{2}$. Προφανώς, το αποτέλεσμα της (2.1) βελτιώνει τα παραπάνω αποτελέσματα για $\nu > -\frac{1}{2}$ και για $\nu \geq 0$, αντίστοιχα.

<u>Σημείωση</u>:

Η συνάρτηση $x^{-\nu} I_\nu(x)$ δεν είναι μόνο αυστηρώς αύξουσα στο $(0, \infty)$ για $\nu > -1$, αλλά και αυστηρά απολύτως μονότονη στο $(0, \infty)$ για κάθε $\nu > -1$.

- $\frac{I_\nu(x)}{I_\nu(y)} < e^{y-x} \left(\frac{x}{y}\right)^\nu$, με $0 < x < y$ και $\nu > -1$ (2.2)

Η ανισότητα (2.2) αποδείχθηκε από τον Baricz (2010) [12] και βελτιώνει το άνω φράγμα που είχε αποδειχθεί από τους Bordelon [20] και Ross (1973) [56] για $\nu > 0$ και είχε επεκταθεί από τον Laforgia (1991) [36] για $\nu \geq -\frac{1}{2}$, σύμφωνα την ανάλυση της $I_\nu(x)$ σε δυναμοσειρά, εκ της σχέσης (1.9). Η απόδειξη της ανισότητας (2.2) στηρίζεται στο γεγονός ότι η συνάρτηση $e^{x}x^{-\nu}I_{\nu}(x)$ είναι αυστηρώς αύξουσα στο $(0,\infty)$ για κάθε $\nu > -1$.

<u>Σημείωση</u>:

Η συνάρτηση $e^{x}x^{-\nu}I_{\nu}(x)$ δεν είναι μόνο αυστηρά αύξουσα στο $(0,\infty)$ για $\nu > -1$, αλλά και αυστηρά απολύτως μονότονη.

- $\frac{I_{\nu}(x)}{I_{\nu}(y)} < e^{x-y}\left(\frac{y}{x}\right)^{\nu}$, με $0 < x < y$ και $\nu \geq \frac{1}{2}$ (2.3)

Η ανισότητα (2.3) αποδείχθηκε από τον Laforgia (1991) [36] χρησιμοποιώντας την ακόλουθη ανισότητα του Soni (1965) [62]:

$$I_{\nu}(x) > I_{\nu+1}(x)\,,\ \text{με}\ x > 0\ \text{και}\ \nu > -\frac{1}{2}$$

Την ανισότητα (2.3) απέδειξε και ο Baricz (2010) [12] αποδεικνύοντας ότι η συνάρτηση $e^{-x}x^{\nu}I_{\nu}(x)$ είναι αυστηρώς αύξουσα στο $(0,\infty)$ για κάθε $\nu \geq \frac{1}{2}$, κάτι που προκύπτει χρησιμοποιώντας την ακόλουθη ανισότητα του Gronwall (1932) [26]:

$$\frac{x\,I_{\nu}'(x)}{I_{\nu}(x)} > x - \frac{1}{2},\ \text{με}\ x > 0\ \text{και}\ \nu \geq \frac{1}{2}$$

- $\frac{I_{\nu}(x)}{I_{\nu}(y)} < e^{x-y}\left(\frac{y}{x}\right)^{1/2}$, με $0 < x < y$ και $\nu \geq \frac{1}{2}$ (2.4)

Η ανισότητα (2.4) αποδείχθηκε από τον Baricz (2010) [12] ακολουθώντας την ίδια ιδέα με την απόδειξη της (2.3), χρησιμοποιώντας δηλαδή την ανισότητα του Gronwall [26]. Απέδειξε με αυτό τον τρόπο ότι η συνάρτηση $e^{-x}x^{\frac{1}{2}}\,I_{\nu}(x)$ είναι αυστηρώς αύξουσα στο $(0,\infty)$ για κάθε $\nu \geq \frac{1}{2}$. Το άνω φράγμα της ανισότητας (2.4) είναι αυστηρότερο από το αντίστοιχο άνω φράγμα της ανισότητας (2.3).

➢ $\frac{I_\nu(x)}{I_\nu(y)} < e^{x-y}\left(\frac{y}{x}\right)^{\nu+1}$, με $0 < x < y$ και $\nu \geq 0$ (2.5)

Η ανισότητα (2.5) αποδείχθηκε από τους Baricz και Sun (2010) [17] στηριζόμενοι στο γεγονός ότι η συνάρτηση $x^{\nu+1}e^{-x}I_\nu(x)$ είναι αυστηρά αύξουσα στο $(0,\infty)$ για κάθε $\nu \geq 0$. Αν και το φράγμα της ανισότητας (2.5) είναι πιο ασθενές από το φράγμα της ανισότητας (2.3), η (2.5) ισχύει για κάθε $\nu \geq 0$ και όχι μόνο για $\nu \geq \frac{1}{2}$, όπως η (2.3).

➢ $\frac{I_\nu(x)}{I_\nu(y)} < \frac{\sin hx}{\sin hy}\left(\frac{y}{x}\right)^{\nu+1}$, με $0 < x < y$ και $\nu \geq 0$ (2.6)

Η ανισότητα (2.6) αποδείχθηκε από τον Baricz (2009) [10] χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η συνάρτηση $\frac{x^{\nu+1}I_\nu(x)}{\sin hx}$ είναι αυστηρά αύξουσα στο $(0,\infty)$ για κάθε $\nu \geq 0$. Για $\nu \geq \frac{1}{2}$, το άνω φράγμα της ανισότητας (2.6) είναι ακόμα πιο ασθενές από το άνω φράγμα της ανισότητας (2.3). Επιπλέον, το φράγμα της ανισότητας (2.6) αποτελεί βελτίωση του φράγματος της ανισότητας (2.5).

➢ $\frac{I_\nu(x)}{I_\nu(y)} < \left(\frac{x}{y}\right)^{\nu}\left(\frac{x^2+{j_{\nu,1}}^2}{y^2+{j_{\nu,1}}^2}\right)^{\frac{{j_{\nu,1}}^2}{4(\nu+1)}}$, με $0 < x < y$ και $\nu > -1$ (2.7)

όπου $j_{\nu,1}$ είναι η πρώτη θετική ρίζα ν - οστής τάξης της συνάρτησης Bessel 1ου είδους $J_\nu(x)$.

Η ανισότητα (2.7) αποδείχθηκε από τους Υφαντή και Σιαφαρίκα (1990) [29] χρησιμοποιώντας τελεστικές μεθόδους και αποτελεί μια βελτίωση της ανισότητας (2.1).

➢ $\frac{I_\nu(x)}{I_\nu(y)} < e^{\frac{x^2-y^2}{4(\nu+1)}-\frac{x^4-y^4}{32(\nu+1)^2(\nu+2)}}\left(\frac{x}{y}\right)^{\nu}$, με $0 < x < y$ και $\nu > -1$ (2.8)

Η ανισότητα (2.8) αποδείχθηκε από τους Joshi και Bissu (1996) [33] συνδυάζοντας κάποιες γνωστές αναδρομικές σχέσεις και ολοκληρώνοντας κατά μέλη στο διάστημα $[x, y]$. Το άνω φράγμα της ανισότητας (2.8) αν και είναι πιο αυστηρό από το άνω φράγμα της ανισότητας (2.1) είναι πιο δύσχρηστο.

- $\frac{I_\nu(x)}{I_\nu(y)} < \left(\frac{x}{y}\right)^\nu \left[\frac{x^2+4(\nu+1)(\nu+2)}{y^2+4(\nu+1)(\nu+2)}\right]^{\nu+2}$, με $0 < x < y$ και $\nu > -1$ (2.9)

Η ανισότητα (2.9) αποδείχθηκε από τον Sitnik (1995) [60]. Το άνω φράγμα του Sitnik στην ανισότητα (2.9) βελτιώνει το άνω φράγμα της ανισότητας (2.1).

<u>Σχόλιο:</u>

Χρησιμοποιώντας γνωστά άνω και κάτω φράγματα για την πρώτη ρίζα $j_{\nu,1}$ της συνάρτησης $J_\nu(x)$, μπορούμε να συγκρίνουμε τις (2.7) και (2.9).

- $\frac{I_\nu(x)}{I_\nu(y)} < \frac{\cos hx}{\cos hy}\left(\frac{x}{y}\right)^\nu$, με $0 < x < y$ και $\nu \in \left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ (2.10)

Η ανισότητα (2.10) αποδείχθηκε από τον Baricz (2010) [12] χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η συνάρτηση $\frac{x^{-\nu} I_\nu(x)}{\cosh x}$ είναι αυστηρά αύξουσα στο $(0, \infty)$ για $\nu < -\frac{1}{2}$. Όταν $\nu \in \left(-1, -\frac{1}{2}\right)$, η ανισότητα (2.10) αποτελεί βελτίωση της (2.1).

- $\frac{I_\nu(x)}{I_\nu(y)} < \frac{\sin hx}{\sin hy}\left(\frac{x}{y}\right)^{\nu-1}$, με $0 < x < y$ και $\nu \in \left(-1, \frac{1}{2}\right)$ (2.11)

Η ανισότητα (2.11) αποδείχθηκε από τον Baricz (2010) [12] χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η συνάρτηση $\frac{x^{-\nu} I_\nu(x)}{\cosh x}$ είναι αυστηρά αύξουσα στο $(0, \infty)$ για $\nu < \frac{1}{2}$. Όταν $\nu \in \left(-1, \frac{1}{2}\right)$, η ανισότητα (2.11) αποτελεί βελτίωση της (2.1).

Σχόλιο:

Συγκρίνοντας τις ανισότητες (2.10) και (2.11), συμπεραίνουμε ότι για $\nu \in \left(-1, \frac{1}{2}\right)$, το άνω φράγμα της ανισότητας (2.10) είναι καλύτερο από το αντίστοιχο άνω φράγμα της ανισότητας (2.11).

- $\frac{I_\nu(x)}{I_\nu(y)} < e^{x-y}\left(\frac{y}{x}\right)$, με $0 < x < y$ και $\nu > -1$ (2.12)

Η ανισότητα (2.12) αποδείχθηκε από τον Baricz (2010) [12] χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η συνάρτηση $xe^{-x}I_\nu(x)$ είναι αυστηρά αύξουσα στο $(0, \infty)$ για κάθε $\nu > -1$. Για $\nu \geq 1$, το άνω φράγμα της ανισότητας (2.12) βελτιώνει το άνω φράγμα της ανισότητας (2.3). Ωστόσο, για $\nu \geq \frac{1}{2}$, το άνω φράγμα της ανισότητας (2.12) είναι πιο ασθενές από το αντίστοιχο άνω φράγμα της ανισότητας (2.4) και για $\nu \geq 0$, το άνω φράγμα της ανισότητας (2.12) είναι πιο αυστηρό από το αντίστοιχο άνω φράγμα της ανισότητας (2.5). Επιπροσθέτως, αφού η συνάρτηση $\frac{x^\nu}{\sin hx}$ είναι αυστηρά φθίνουσα στο $(0, \infty)$ για κάθε $\nu \in [0,1]$, συμπεραίνουμε τότε ότι το άνω φράγμα της ανισότητας (2.6) είναι πιο αυστηρό από το αντίστοιχο άνω φράγμα της ανισότητας (2.12).

Σχόλιο:

Για $\nu > 1$, τα φράγματα των ανισότήτων (2.6) και (2.12) δεν είναι απευθείας συγκρίσιμα μεταξύ τους, αφού για $\nu > 1$, η παράγωγος της συνάρτησης $\frac{x^\nu}{\sin hx}$ αλλάζει πρόσημο στο $(0, \infty)$. Η ανισότητα (2.12) έχει την ιδιότητα ότι ισχύει για κάθε $\nu > -1$, ενώ άλλες όχι.

2.2. ΚΑΤΩ ΦΡΑΓΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΑ ΠΗΛΙΚΑ $\frac{I_\nu(x)}{I_\nu(y)}$

➢ $\frac{I_\nu(x)}{I_\nu(y)} > e^{x-y}\left(\frac{x}{y}\right)^\nu$, με $0 < x < y$ και $\nu \geq -\frac{1}{2}$ (2.13)

Η ανισότητα (2.13) αποδείχθηκε τον Laforgia (1991) [36]. Η απόδειξή της βασίστηκε στην ανισότητα του Soni [62]:

$$I_\nu(x) > I_{\nu+1}(x)\,,\ \text{με}\ x > 0\ \text{και}\ \nu > -\frac{1}{2}$$

που αποδείχθηκε του Soni (1965) και από τον Nasell (1974) [45], ο οποίος την επέκτεινε για $\nu \geq -\frac{1}{2}$. Επιπλέον, η ανισότητα (2.13) είχε αποδειχθεί ξεχωριστά από τους Bordelon [20] και Ross (1973) [56] για $\nu > 0$, από τον Paris (1984) [48] και από τους Joshi και Bissu (1991) [32] για $\nu > -\frac{1}{2}$.

➢ $\frac{I_\nu(x)}{I_\nu(y)} > e^{x-y}\left(\frac{y+\nu}{x+\nu}\right)^\nu\left(\frac{x}{y}\right)^\nu$, με $0 < x < y$ και $\nu > -1$ (2.14)

Η ανισότητα (2.14) αποδείχθηκε από τους Joshi και Bissu (1991) [32] χρησιμοποιώντας την ακόλουθη ανισότητα του Nasell (1974) [45]:

$$\left(1+\frac{\nu}{x}\right) I_{\nu+1}(x) < I_\nu(x),\ \text{με}\ x > 0\ \text{και}\ \nu > -1$$

που αποτελεί βελτίωση της ανισότητας του Soni [62], αποδεικνύοντας ότι η συνάρτηση $x^{-\nu}(x+\nu)^\nu e^{-x}\, I_\nu(x)$ είναι αυστηρά φθίνουσα στο $(0,\infty)$ για κάθε $\nu > -1$. Αν $\nu > 0$, το κάτω φράγμα της (2.14) είναι πιο αυστηρό από το κάτω φράγμα της (2.13).

➢ $\frac{I_\nu(x)}{I_\nu(y)} > \frac{e^x+\lambda_\nu}{e^y+\lambda_\nu}\left(\frac{x}{y}\right)^\nu$, με $0 < x < y$ και $\nu \geq 0$ (2.15)

Η ανισότητα (2.15) αποδείχθηκε από τον Baricz (2009) [9] χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η συνάρτηση $\frac{x^{-\nu}\, I_\nu(x)}{e^x+\lambda_\nu}$ είναι αυστηρά φθίνουσα στο $(0,\infty)$ για κάθε $\nu \geq 0$, όπου $\lambda_\nu = f(\rho_\nu)$ η μεγαλύτερη θετική σταθερά, $f_\nu(x) = e^x\left[\frac{I_\nu(x)}{I_{\nu+1}(x)} - 1\right]$ και ρ_ν είναι η μοναδική θετική ρίζα της εξίσωσης $(x+2\nu+1)\, I_{\nu+1}(x) = x\, I_\nu(x)$. Το κάτω φράγμα της (2.15) είναι αυστηρότερο από το αντίστοιχο κάτω φράγμα της (2.13) για $\nu \geq 0$.

- $\frac{I_\nu(x)}{I_\nu(y)} > e^{x-y}\left(\frac{y}{x}\right)^\nu$, με $0 < x < y$ και $\nu \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right]$ (2.16)

Η ανισότητα (2.16) αποδείχθηκε από τον Baricz (2010) [12] χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι οι συναρτήσεις $e^{-x}x^\nu I_\nu(x)$ και $x^{2\nu}$ είναι αυστηρά πλήρως μονότονες, και συνεπώς αυστηρά φθίνουσες στο $(0,\infty)$ για κάθε $\nu \epsilon \left[-\frac{1}{2}, 0\right]$. Το κάτω φράγμα της ανισότητας (2.16) είναι πιο ασθενές από το αντίστοιχο κάτω φράγμα της ανισότητας (2.13).

- $\frac{I_\nu(x)}{I_\nu(y)} > e^{\frac{x^2-y^2}{4(\nu+1)}}\left(\frac{x}{y}\right)^\nu$, με $0 < x < y$ και $\nu > -1$ (2.17)

Η ανισότητα (2.17) αποδείχθηκε από τους Joshi και Bissu (1996) [33] χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η συνάρτηση $e^{\frac{x^2}{4(\nu+1)}}\, x^\nu I_\nu(x)$ είναι αυστηρά φθίνουσα στο $(0,\infty)$ για κάθε $\nu > -1$. Το κάτω φράγμα της ανισότητας (2.17) είναι πιο αυστηρό από το αντίστοιχο κάτω φράγμα της ανισότητας (2.13), αλλά είναι λιγότερο εύχρηστο.

- $\frac{I_\nu(x)}{I_\nu(y)} > \left(\frac{x}{y}\right)^\nu \left[\frac{x^2+2(\nu+1)(\nu+3)}{y^2+2(\nu+1)(\nu+3)}\right]^{\frac{(\nu+3)^2}{4(\nu+2)}} e^{\frac{x^2-y^2}{8(\nu+2)}}$, με $0 < x < y$ και $\nu > -1$ (2.18)

Η ανισότητα (2.18) αποδείχθηκε από τον Sitnik (1995) [60].

➢ $\frac{I_\nu(x)}{I_\nu(y)} > \frac{\cos hx}{\cos hy}\left(\frac{x}{y}\right)^\nu$, με $0 < x < y$ και $\nu > -\frac{1}{2}$ (2.19)

Η ανισότητα (2.19) αποδείχθηκε από τον Baricz (2010) [12] χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η συνάρτηση $\frac{x^{-\nu} I_\nu(x)}{\cos hx}$ είναι αυστηρά φθίνουσα στο $(0, \infty)$ για $\nu > -\frac{1}{2}$.

<u>Σχόλιο</u>:

Οι ανισότητες (2.15) και (2.19) δε μπορούν να συγκριθούν σ' ολόκληρο το διάστημα $(0, \infty)$ λόγω της διαφορετικής φύσης τους.

➢ $\frac{I_\nu(x)}{I_\nu(y)} > \frac{\sin hx}{\sin hy}\left(\frac{x}{y}\right)^{\nu-1}$, με $0 < x < y$ και $\nu > \frac{1}{2}$ (2.20)

Η ανισότητα (2.20) αποδείχθηκε από τον Baricz (2010) [12] χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η συνάρτηση $\frac{x^{1-\nu} I_\nu(x)}{\sin hx}$ είναι αυστηρά φθίνουσα στο $(0, \infty)$ για $\nu > \frac{1}{2}$. Αφού η συνάρτηση $e^{-x}x^{-1}\sin hx$ είναι φθίνουσα στο $(0, \infty)$, τότε το φράγμα της (2.20) είναι αυστηρότερο από το φράγμα της (2.13).

<u>Σχόλιο</u>:

Συγκρίνοντας τα κάτω φράγματα των ανισοτήτων (2.19) και (2.20), συμπεραίνουμε ότι, για $\nu > -\frac{1}{2}$, το κάτω φράγμα της (2.20) είναι αυστηρότερο από το αντίστοιχο κάτω φράγμα της (2.19).

2.3. ΑΝΩ ΦΡΑΓΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΑ ΠΗΛΙΚΑ $\frac{I_{\nu+1}(x)}{I_\nu(x)}$

- $I_\nu(x) > I_{\nu+1}(x)\,,\ \text{με}\ x > 0\ \text{και}\ \nu \geq -\frac{1}{2}$ (2.21)

Η ανισότητα (2.21) αποδείχθηκε από τον Soni (1965) [62] για $\nu > -\frac{1}{2}$ και επεκτάθηκε από τον Nasell (1974) [45] για $\nu \geq -\frac{1}{2}$. Επιπλέον, αποδείχθηκε από τον Gupta (1966) [27], αργότερα από τους De Sitter και Goovaerts (1972) [61] και τέλος, επεκτάθηκε από τον Lorch (1967) [41] στις συναρτήσεις Whittaker. Για $\nu \geq 0$, ισχυρότερα αποτελέσματα από την ανισότητα (2.21) δόθηκαν από τον Cochran (1967) [21] και από τους Jones [31] και Reudink (1968) [52]. Συγκεκριμένα, ο Jones (1968) απέδειξε ότι:

$$I_\nu(x) < I_\mu(x),\ \text{με}\ x > 0\ \text{και}\ \nu > \mu \geq 0$$

ενώ οι Cochran (1967) και Reudink (1968) απέδειξαν την ανισότητα:

$$\frac{\partial I_\nu(x)}{\partial \nu} < 0,\ \text{με}\ x, \nu > 0$$

<u>Σημείωση</u>:

Οι Joshi/Bissu και Laforgia στηρίχθηκαν στην ανισότητα (2.21) του Soni για να αποδείξουν το κάτω φράγμα της ανισότητας (2.13) για $\nu > -\frac{1}{2}$ και $\nu \geq -\frac{1}{2}$, αντίστοιχα.

- $\left(1 + \frac{\nu}{x}\right) I_{\nu+1}(x) < I_\nu(x)\,,\ \text{με}\ x > 0\ \ \text{και}\ \nu > -1$ (2.22)

Η ανισότητα (2.22) αποδείχθηκε από τον Nasell (1974) [45] και αποτελεί μια βελτίωση της ανισότητας (2.21) του Soni [62].

➢ $\frac{I_{\nu+1}(x)}{I_\nu(x)} < \frac{x}{2(\nu+1)}$, με $x > 0$ και $\nu > -1$ (2.23)

Η ανισότητα (2.23) αποδείχθηκε από τους Υφαντή και Σιαφαρίκα (1990) [29] χρησιμοποιώντας το ακόλουθο ανάπτυγμα Mittag-Leffler για τις Τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel 1[ου] είδους [65]:

$$\frac{I_{\nu+1}(x)}{xI_\nu(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{{j_{\nu,n}}^2 + x^2}$$

όπου $j_{\nu,n}$ είναι οι θετικές ρίζες της συνάρτησης Bessel 1[ου] είδους $J_\nu(x)$ και το ακόλουθο άθροισμα [65]:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{{j_{\nu,n}}^2} = \frac{1}{4(\nu+1)}$$

➢ $\frac{I_{\nu+1}(x)}{I_\nu(x)} < \tan hx < 1$, με $x > 0$ και $\nu > -\frac{1}{2}$ (2.24)

Η ανισότητα (2.24) αποδείχθηκε από τους Υφαντή και Σιαφαρίκα (1991) [30] και με διαφορετικό τρόπο από τον Baricz (2010) [12] χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η συνάρτηση $\frac{x^{-\nu}I_\nu(x)}{\cos hx}$ είναι αυστηρά αύξουσα στο $(0,\infty)$ για κάθε $\nu < -\frac{1}{2}$ και αυστηρά φθίνουσα στο $(0,\infty)$ για κάθε $\nu > -\frac{1}{2}$. Για $\nu > -\frac{1}{2}$, η ανισότητα (2.24) βελτιώνει την ανισότητα (2.21) του Soni.

➢ $\frac{I_{\nu+1}(x)}{I_\nu(x)} < \cot hx - \frac{1}{x} < \tan hx < 1$, με $x > 0$ και $\nu > \frac{1}{2}$ (2.25)

Η ανισότητα (2.25) αποδείχθηκε από τον Baricz (2010) [12] χρησιμοποιώντας γνωστές αναδρομικές σχέσεις για τις Τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel 1[ου] είδους $I_\nu(x)$. Ακόμη, έκανε χρήση του γεγονότος ότι η συνάρτηση $\frac{[2^\nu\Gamma(\nu+1)x^{-\nu}I_\nu(x)]^{(2k)}}{\sin hx}$ είναι αυστηρώς αύξουσα στο $(0,\infty)$ για $\nu < -\frac{1}{2}$ και αυστηρώς φθίνουσα στο $(0,\infty)$ για $\nu > -\frac{1}{2}$, καθώς επίσης και της ανισότητας:

$$x < \sin hx \cdot \cos hx, \text{ με } x > 0$$

Για $\nu > \frac{1}{2}$, το κάτω φράγμα της ανισότητας (2.25) βελτιώνει το αντίστοιχο κάτω φράγμα της ανισότητας (2.24).

<u>**Σχόλιο**</u>:

Τα φράγματα που δίνονται στις (2.24) και (2.25) είναι πιο αδύναμα από πολλά άλλα φράγματα, έχουν όμως το πλεονέκτημα ότι είναι πιο εύκολα υπολογίσιμα αριθμητικά, αφού δεν εξαρτώνται από το ν.

- $$\frac{I_{\nu+1}(x)}{I_\nu(x)} < -\frac{\nu+1}{x} + \sqrt{\frac{(\nu+1)^2}{x^2} + 1 + \frac{x^2}{4(\nu+1)^2(\nu+2)}},\ \text{με } x > 0 \text{ και } \nu > -1 \qquad (2.26)$$

Η ανισότητα (2.26) αποδείχθηκε από την Κοκολογιαννάκη (2012) [35] συνδυάζοντας τις γνωστές αναδρομικές σχέσεις (1.15.iii) και (1.15.iv) και τη μονοτονία της συνάρτησης $\frac{I_{\nu+1}(x)}{xI_\nu(x)}$ (αυστηρώς φθίνουσα καθώς $\nu > -1$).

- $$\frac{I_{\nu+1}(x)}{I_\nu(x)} < \frac{2x}{{j_{\nu,1}}^2+x^2} + \tanh x - \frac{8x}{\pi^2+4x^2},\ \text{με } x > 0 \text{ και } \nu > -\frac{1}{2} \qquad (2.27)$$

όπου $j_{\nu,1}$ είναι η πρώτη θετική ρίζα της συνάρτησης Bessel 1ου είδους $J_\nu(x)$.

Η ανισότητα (2.27) αποδείχθηκε από την Κοκολογιαννάκη (2012) [35] χρησιμοποιώντας τη μονοτονία της συνάρτησης $\frac{I_{\nu+1}(x)}{xI_\nu(x)} - \frac{2}{{j_{\nu,1}}^2+x^2}$ (φθίνουσα ως προς ν για σταθερό $x > 0$ και $\nu > -1$) και τις σχέσεις:

$$I_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sinh x,\ I_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cosh x,\ j_{-\frac{1}{2},1} = \frac{\pi}{2}$$

Το άνω φράγμα της ανισότητας (2.27) είναι αυστηρότερο από το αντίστοιχο άνω φράγμα της ανισότητας (2.24), αφού η $j_{\nu,n}$ είναι αυστηρά αύξουσα συνάρτηση ως προς ν, για $\nu > -1$.

- $\frac{I_{\nu+1}(x)}{I_\nu(x)} < \tanh x + \frac{x(2\nu+3)}{2(\nu+1)(\nu+2)} - \frac{4x}{3}$, με $x > 0$ και $\nu \in \left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ (2.28)

Η ανισότητα (2.28) αποδείχθηκε από την Κοκολογιαννάκη (2012) [35] χρησιμοποιώντας τη μονοτονία της συνάρτησης $\frac{I_{\nu+1}(x)}{xI_\nu(x)} - \frac{2\nu+3}{2(\nu+1)(\nu+2)}$ (αύξουσα ως προς ν για σταθερό $x > 0$ και $\nu > -1$) και τις σχέσεις [65]:

$$I_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sinh x,\ \ I_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cosh x$$

<u>Σχόλιο</u>:

Η ανισότητα (2.28) συμπληρώνει την ανισότητα (2.24), δηλαδή τα φράγματα του λόγου $\frac{I_{\nu+1}(x)}{I_\nu(x)}$ ως προς ν.

- $\frac{I_{\nu+1}(x)}{I_\nu(x)} < \tanh x + \frac{x}{\nu+1} - 2x$, με $x > 0$ και $\nu \in \left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ (2.29)

Η ανισότητα (2.29) αποδείχθηκε από την Κοκολογιαννάκη (2012) [35] χρησιμοποιώντας τη μονοτονία της συνάρτησης $\frac{I_{\nu+1}(x)}{xI_\nu(x)} - \frac{1}{\nu+1}$ (αύξουσα ως προς ν για σταθερό $x > 0$ και $\nu > -1$).

<u>Σχόλιο</u>:

Η ανισότητα (2.29) έχει πιο απλή μορφή από την ανισότητα (2.28), αλλά δε την βελτιώνει.

➢ $f_\nu(x) \le f_\nu(a_\nu) + f_\nu{}'(a_\nu)(x - a_\nu)$, με $x \in [0, a_\nu]$

και $\nu > -1$ (2.30)

όπου $f_\nu(x) = \frac{I_{\nu+1}(x)}{xI_\nu(x)}$ και $a_\nu = \frac{j_{\nu,1}}{\sqrt{3}}$, με $j_{\nu,1}$ την πρώτη θετική ρίζα της Τροποποιημένης συνάρτησης Bessel 1ου είδους $J_\nu(x)$.

Η ανισότητα (2.30) αποδείχθηκε από την Κοκολογιαννάκη (2012) [35] χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η εφαπτομένη της $f_\nu(x)$ στο $\left(a_\nu, f_\nu(a_\nu)\right)$ κείται κάτω από το γράφημα της $f_\nu(x)$ στο διάστημα $[0, a_\nu]$.

➢ $\frac{I_\nu(x)}{xI_{\nu-1}(x)} < \frac{1}{\nu-\frac{1}{2}+\sqrt{\left(\nu-\frac{1}{2}\right)^2+x^2}}$, με $x > 0$ και $\nu \ge \frac{1}{2}$ (2.31)

Η ανισότητα (2.31) αποδείχθηκε από τον Segura (2011) [57]. Συγκεκριμένα, απέδειξε ότι αν $l_\nu{}^{(0)}(x)$ και $u_\nu{}^{(0)}(x)$ είναι τέτοια ώστε:

$$0 < l_\nu{}^{(0)}(x) < \frac{I_\nu(x)}{xI_{\nu-1}(x)} < u_\nu{}^{(0)}(x), \text{ με } x > 0,\ \nu \ge \nu_0 > 0$$

και $l_\nu{}^{(k)}(x), u_\nu{}^{(k)}(x)$ αναδρομικές σχέσεις που ορίζονται από τους ακόλουθους τύπους:

$$l_\nu{}^{(k+1)}(x) = \frac{1}{2\nu + x^2 u_{\nu+1}{}^{(k)}(x)}$$

$$u_\nu{}^{(k+1)}(x) = \frac{1}{2\nu + x^2 l_{\nu+1}{}^{(k)}(x)}$$

τότε ισχύει ότι:

$$0 < l_\nu{}^{(k)}(x) < \frac{I_\nu(x)}{xI_{\nu-1}(x)} < u_\nu{}^{(k)}(x), \text{ με } x > 0,$$

$$\nu \ge \max\ \{\nu_0 - k, 0\} \text{ και } k = 0,1, \dots$$

Το φράγμα της ανισότητας (2.31) προκύπτει αν θέσουμε:

$$u_\nu{}^{(0)}(x) = \frac{1}{\nu - \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\nu - \frac{1}{2}\right)^2 + x^2}}$$

εφαρμόζοντας δηλαδή στον παραπάνω αναγωγικό τύπο $\nu_0 = \frac{1}{2}$ και $k = 0$.

➢ $\frac{I_\nu(x)}{I_{\nu-1}(x)} < \frac{x}{\nu+\sqrt{\nu^2+x^2\frac{\nu}{\nu+1}}}$, με $x > 0$ και $\nu \geq 0$ (2.32)

Η ανισότητα (2.32) αποδείχθηκε από τον Segura (2011) [57] χρησιμοποιώντας την ανισότητα:

$$\frac{I_\nu(x)}{xI_{\nu-1}(x)} < \frac{1}{\nu+\sqrt{\nu^2+x^2\frac{u_{\nu+1}{}^{(i)}(x)}{l_\nu{}^{(i+1)}(x)}}},\ \text{με } x > 0 \text{ και } \nu \geq 0$$

$$\text{και } k = 0,1,\ldots$$

η οποία προκύπτει χρησιμοποιώντας τις αναδρομικές σχέσεις που αναφέρθηκαν και παραπάνω, όπως στην απόδειξη της (2.31).

Η ανισότητα (2.32) προκύπτει θέτοντας στην παραπάνω ανισότητα $i = 0$ και $\nu_0 = 0$.

2.4. ΚΑΤΩ ΦΡΑΓΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΑ ΠΗΛΙΚΑ $\frac{I_{\nu+1}(x)}{I_\nu(x)}$

➢ $\frac{I_{\nu+1}(x)}{I_\nu(x)} > \frac{2x}{j_{\nu,1}{}^2+x^2}$, με $x > 0$ και $\nu > -1$ (2.33)

όπου $j_{\nu,1}$ είναι οι πρώτες θετικές ρίζες της συνάρτησης Bessel 1^{ου} είδους $J_\nu(x)$.

Η ανισότητα (2.33) αποδείχθηκε από τους Υφαντή και Σιαφαρίκα (1990) [29] χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα Mittag-Leffler για τις Τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel 1^{ου} είδους $J_\nu(x)$ [64]:

$$\frac{I_{\nu+1}(x)}{xI_\nu(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{j_{\nu,n}{}^2 + x^2}$$

όπου $j_{\nu,n}$ είναι οι θετικές ρίζες της συνάρτησης Bessel 1ου είδους και την ανισότητα:

$$j_{\nu,n}{}^2 + x^2 > j_{\nu,n}{}^2$$

- $\frac{I_{\nu+1}(x)}{I_\nu(x)} > \tan hx > 0,\ \text{με}\ x > 0\ \text{και}\ \nu \in \left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ (2.34)

Η ανισότητα (2.34) αποδείχθηκε από τον Baricz (2010) [12] χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η συνάρτηση $\frac{x^{-\nu} I_\nu(x)}{\cos hx}$ είναι αυστηρά αύξουσα στο $(0, \infty)$ για κάθε $\nu < -\frac{1}{2}$ και αυστηρά φθίνουσα για $\nu > -\frac{1}{2}$, αντίστοιχα.

- $\frac{I_{\nu+1}(x)}{I_\nu(x)} > \cot hx - \frac{1}{x} > 0,\ \text{με}\ x > 0\ \text{και}\ \nu \in \left(-1, \frac{1}{2}\right)$ (2.35)

Η ανισότητα (2.35) αποδείχθηκε από τον Baricz (2010) [12] χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η συνάρτηση $\frac{[2^\nu \Gamma(\nu+1) x^{-\nu} I_\nu(x)]^{(2k)}}{\cos hx}$ είναι αυστηρά αύξουσα στο $(0, \infty)$ για κάθε $\nu < -\frac{1}{2}$ και αυστηρά φθίνουσα για $\nu > -\frac{1}{2}$, αντίστοιχα. Επιπλέον, αποδείχθηκε και από την Κοκολογιαννάκη (2012) [35] κάνοντας χρήση της μονοτονίας της συνάρτησης $\frac{I_{\nu+1}(x)}{x I_\nu(x)}$ (αυστηρά φθίνουσα ως προς ν, για σταθερά $x > 0$).

- $\frac{I_{\nu+1}(x)}{I_\nu(x)} > -\frac{\nu+1}{x} + \sqrt{\frac{(\nu+1)^2}{x^2} + 1},\ \text{με}\ x > 0\ \text{και}\ \nu > -1$ (2.36)

Η ανισότητα (2.36) αποδείχθηκε από την Κοκολογιαννάκη (2012) [35] συνδυάζοντας τις γνωστές αναδρομικές σχέσεις (1.15.iii) και (1.15.iv), τη μονοτονία της συνάρτησης $\frac{I_{\nu+1}(x)}{x I_\nu(x)}$ (αυστηρώς φθίνουσα για $\nu > -1$), το ανάπτυγμα Mittag-Leffler για τις Τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel 1ου είδους $I_\nu(x)$ [65]:

$$\frac{I_{\nu+1}(x)}{xI_\nu(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{{j_{\nu,n}}^2 + x^2}$$

το ακόλουθο άθροισμα [65]:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{{j_{\nu,n}}^4} = \frac{1}{16(\nu+1)^2(\nu+2)}$$

και την ανισότητα:

$$\left({j_{\nu,n}}^2 + x^2\right)^2 > {j_{\nu,n}}^4$$

όπου $j_{\nu,n}$ είναι οι θετικές ρίζες της συνάρτησης Bessel 1[ου] είδους $J_\nu(x)$. Η ανισότητα (2.34) αποδείχθηκε με διαφορετικό τρόπο από τους Laforgia και Natalini (2010) [40] και από τον Segura (2011) [57].

➢ $\frac{I_{\nu+1}(x)}{I_\nu(x)} > \frac{2x}{{j_{\nu,1}}^2+x^2} + \tanh x - \frac{8x}{\pi^2+4x^2}$, με $x > 0$ και $\nu \in \left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ (2.37)

Η ανισότητα (2.37) αποδείχθηκε από την Κοκολογιαννάκη (2012) [35], όπως και για την ανισότητα (2.27) χρησιμοποιώντας τη μονοτονία της συνάρτησης $\frac{I_{\nu+1}(x)}{xI_\nu(x)} - \frac{2}{{j_{\nu,1}}^2+x^2}$ (φθίνουσα ως προς ν για σταθερό $x > 0$ και $\nu > -1$) και τις σχέσεις [65]:

$$I_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sinh x,\ \ I_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cosh x,\ j_{-1/2,1} = \frac{\pi}{2}$$

Το κάτω φράγμα της ανισότητας (2.37) είναι αυστηρότερο από το αντίστοιχο κάτω φράγμα της ανισότητας (2.34), αφού η συνάρτηση $j_{\nu,n}$ είναι αυστηρά αύξουσα ως προς ν, για $\nu > -1$.

➢ $\frac{I_{\nu+1}(x)}{I_\nu(x)} > \tanh x + \frac{x(2\nu+3)}{2(\nu+1)(\nu+2)} - \frac{4x}{3}$, με $x > 0$ και $\nu > -\frac{1}{2}$ (2.38)

Η ανισότητα (2.38) αποδείχθηκε από την Κοκολογιαννάκη (2012) [35] χρησιμοποιώντας, όπως ακριβώς και για την ανισότητα (2.28), τη μονοτονία της συνάρτησης $\frac{I_{\nu+1}(x)}{xI_\nu(x)} - \frac{2\nu+3}{2(\nu+1)(\nu+2)}$ (αύξουσα ως προς ν για σταθερό $x > 0$ και $\nu > -1$) και τις σχέσεις [65]:

$$I_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sinh x,\ \ I_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cosh x$$

Σχόλιο:

Η ανισότητα (2.38) συμπληρώνει την ανισότητα (2.34), δηλαδή τα φράγματα του λόγου $\frac{I_{\nu+1}(x)}{xI_\nu(x)}$ ως προς ν.

- $\frac{I_{\nu+1}(x)}{I_\nu(x)} > \tanh x + \frac{x}{\nu+1} - 2x,$ με $x > 0$ και $\nu > -\frac{1}{2}$ (2.39)

Η ανισότητα (2.39) αποδείχθηκε από την Κοκολογιαννάκη (2012) [35] χρησιμοποιώντας, όπως και στην ανισότητα (2.29), τη μονοτονία της συνάρτησης $\frac{I_{\nu+1}(x)}{xI_\nu(x)} - \frac{1}{\nu+1}$ (αύξουσα ως προς ν για σταθερό $x > 0$ και $\nu > -1$).

Σχόλιο:

Η ανισότητα (2.39) έχει πιο απλή μορφή από την ανισότητα (2.38), αλλά δε την βελτιώνει.

- $f_\nu(x) \geq f_\nu(a_\nu) + \frac{1}{a_\nu}\left[f_\nu(a_\nu) - \frac{1}{2(\nu+1)}\right](x - a_\nu),$ με $x \in [0, a_\nu]$ και $\nu > -1$ (2.40)

όπου $f_\nu(x) = \frac{I_{\nu+1}(x)}{xI_\nu(x)}$ και $a_\nu = \frac{j_{\nu,1}}{\sqrt{3}}$, με $j_{\nu,1}$ την πρώτη θετική ρίζα της συνάρτησης Bessel 1^{ου} είδους $J_\nu(x)$.

Η ανισότητα (2.40) αποδείχθηκε από την Κοκολογιαννάκη (2012) [35] χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η συνάρτηση $f_\nu(x)$ είναι κοίλη στο $x \in [0, a_\nu]$. Επομένως, το γράφημά της κείται κάτω από το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία $(0, f_\nu(0))$ και $(a_\nu, f_\nu(a_\nu))$, στο γράφημα της $f_\nu(x)$ στο $[0, a_\nu]$. Άρα λόγω του ακόλουθου αθροίσματος [65]:

$$f_\nu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{{j_{\nu,n}}^2 + x^2}$$

προκύπτει ότι:

$$\lim_{x\to 0} f_\nu(x) = \frac{1}{2(\nu+1)}$$

<u>Παρατήρηση</u>:

Έχει αποδειχθεί από την Κοκολογιαννάκη (2012) [35] ότι, για $\nu > -1$ και $x \in [0, j_{\nu,1}]$ η συνάρτηση $f_\nu{}'(x)$ ικανοποιεί την ακόλουθη διπλή ανισότητα:

$$f_\nu{}'(j_{\nu,1}) + f_\nu{}''(j_{\nu,1}) \le f_\nu{}'(x) \le \frac{x}{j_{\nu,1}} f_\nu{}'(j_{\nu,1})$$

όπου $f_\nu(x) = \frac{I_{\nu+1}(x)}{xI_\nu(x)}$, $j_{\nu,1}$ είναι η πρώτη θετική ρίζα της $J_\nu(x)$.

Η απόδειξη του παραπάνω Θεωρήματος στηρίχθηκε στο γεγονός ότι $f_\nu{}'''(x) > 0$, για $x \in (0, j_{\nu,1})$ ή αλλιώς $[f_\nu{}'(j_{\nu,1})]'' > 0$, για $x \in (0, j_{\nu,1})$, που σημαίνει ότι η συνάρτηση $f_\nu{}'(x)$ είναι κυρτή για κάθε $x \in (0, j_{\nu,1})$ και $\nu > -1$. Επομένως, η παραπάνω διπλή ανισότητα προκύπτει λαμβάνοντας υπόψη μας ότι:

$$\lim_{x\to 0} f_\nu{}'(x) = 0$$

- $\frac{I_\nu(x)}{xI_{\nu-1}(x)} > \frac{1}{\nu+\sqrt{\nu^2+x^2}}$, με $x > 0$ και $\nu \ge 0$ (2.41)

- $\frac{I_\nu(x)}{xI_{\nu-1}(x)} > \frac{1}{\nu-\frac{1}{2}+\sqrt{\left(\nu+\frac{1}{2}\right)^2+x^2}}$, με $x > 0$ και $\nu \ge 0$ (2.42)

Οι ανισότητες (2.41) και (2.42) αποδείχθηκαν από τον Segura (2011) [57] χρησιμοποιώντας τις ίδιες αναδρομικές σχέσεις όπως και στην απόδειξη της ανισότητας (2.31).

Οι ανισότητες αυτές προκύπτουν αν θέσουμε:

$$l_\nu{}^{(0)}(x) = \frac{1}{\nu + \sqrt{\nu^2 + x^2}}$$

$$l_\nu{}^{(1)}(x) = \frac{1}{\nu - \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\nu + \frac{1}{2}\right)^2 + x^2}}$$

εφαρμόζοντας δηλαδή στον αναγωγικό τύπο $\nu_0 = 0$ και $k = 0$ και 1, αντίστοιχα.

<u>Σχόλιο</u>:

Το κάτω φράγμα της ανισότητας (2.42) βελτιώνει το αντίστοιχο της ανισότητας (2.41), αφού:

$$l_\nu{}^{(1)}(x) > l_\nu{}^{(0)}(x),\ \text{με}\ x > 0\ \text{και}\ \nu \geq 0$$

Βεβαίως, μπορούμε συνεχώς να βελτιώνουμε την αναδρομική σχέση καθώς αυξάνουμε τις τιμές του k.

2.5. ΑΝΩ ΦΡΑΓΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΑ ΠΗΛΙΚΑ $\frac{I_\nu{}'(x)}{I_\nu(x)}$

- $\frac{I_\nu{}'(x)}{I_\nu(x)} < -\frac{1+\sqrt{x^2+(\nu+1)^2}}{x}$, $\text{με}\ x > 0\ \text{και}\ \nu > -1$ (2.43)

Η ανισότητα (2.43) αποδείχθηκε από την Κοκολογιαννάκη (2012) [35] χρησιμοποιώντας τη μονοτονία της συνάρτησης $\frac{I_{\nu+1}(x)}{xI_\nu(x)}$ (αυστηρώς φθίνουσα ως προς x), την αναδρομική σχέση (1.15.iv), καθώς και την Τροποποιημένη Διαφορική εξίσωση Bessel (1.7). Επιπλέον, η ανισότητα (2.43) είχε αποδειχθεί και από τον Segura (2011) [57] χρησιμοποιώντας τις αναδρομικές σχέσεις που αναφέραμε και στην απόδειξη της (2.31).

➢ $\frac{I_\nu'(x)}{I_\nu(x)} < \frac{\sqrt{\nu^2+x^2}}{x}$, με $x > 0$ και $\nu > -1$ (2.44)

Η ανισότητα (2.44) αποδείχθηκε από τον Segura (2011) [57] αποδεικνύοντας την ανισότητα:

$$\frac{I_\nu'(x)}{I_\nu(x)} < \frac{\frac{1}{l_\nu^{(i)}(x)}-\nu}{x}, \text{ με } x > 0,\ \nu \geq \max\ \{\nu_0 - i, 0\} \quad \text{και } i = 0,1, \dots$$

όπου $l_\nu^{(i)}(x)$ και $u_\nu^{(i)}(x)$ οι αναδρομικές σχέσεις που χρησιμοποιήθηκαν και στην απόδειξη της (2.31).

Η ανισότητα (2.44) αποδείχθηκε θέτοντας στην παραπάνω ανισότητα $i = 0$. Είχαμε αναφέρει και σε προηγούμενη Ενότητα ότι:

$$l_\nu^{(0)}(x) = \frac{1}{\nu + \sqrt{\nu^2 + x^2}}$$

Πρωτίστως, η ανισότητα (2.44) είχε αποδειχθεί από τον Gronwall (1932) [26], για $\nu > 0$. Επιπλέον, αποδείχθηκε από τους Phillips και Malin (1950) [51] για $\nu = n \geq 1$, θετικό ακέραιο. Για $\nu \geq 0$, η ανισότητα (2.44) ονομάζεται και ανισότητα του Amos (1974) [4], γιατί είχε αποδειχθεί από αυτόν.

<u>Σημείωση</u>:

Χρησιμοποιώντας τις αναδρομικές σχέσεις (1.15.iii) και (1.15.iv), μπορούμε εύκολα να παρατηρήσουμε ότι η (2.44) είναι ισοδύναμη με την ακόλουθη ανισότητα τύπου Turán:

$$(\nu + 1) I_{\nu-1}(x)\, I_{\nu+1}(x) - \nu\, [I_\nu(x)]^2 > 0$$

➢ $\frac{I_\nu'(x)}{I_\nu(x)} < \frac{\sqrt{\left(\nu+\frac{1}{2}\right)^2+x^2}-\frac{1}{2}}{x}$, με $x > 0$ και $\nu \geq -\frac{1}{2}$ (2.45)

Η ανισότητα (2.45) αποδείχθηκε από τον Segura (2011) [57] αποδεικνύοντας την ανισότητα:

$$\frac{I_\nu'(x)}{I_\nu(x)} < \frac{x^2 u_{\nu+1}^{(i)}(x)+\nu}{x}, \text{ με } x > 0,\ \nu \geq \max\ \{\nu_0 - \mathrm{i}, 0\} \quad \text{και } i = 0,1, \dots$$

όπου $l_\nu{}^{(i)}(x)$ και $u_\nu{}^{(i)}(x)$ οι αναδρομικές σχέσεις που χρησιμοποιήθηκαν και στην απόδειξη της (2.31).

Η ανισότητα (2.45) αποδείχθηκε θέτοντας στην παραπάνω ανισότητα $i = 0$. Είχαμε αναφέρει σε προηγούμενη Ενότητα ότι:

$$u_\nu{}^{(0)}(x) = \frac{1}{\nu - \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\nu - \frac{1}{2}\right)^2 + x^2}}$$

Η ανισότητα (2.45) είναι πιο αυστηρή από την ανισότητα του Amos [4], για $\nu \geq 0$.

2.6. ΚΑΤΩ ΦΡΑΓΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΑ ΠΗΛΙΚΑ $\frac{I_\nu{}'(x)}{I_\nu(x)}$

- $\frac{x\, I_\nu{}'(x)}{I_\nu(x)} > x - \frac{1}{2}$, με $x > 0$ και $\nu \geq \frac{1}{2}$ (2.46)

Η ανισότητα (2.46) αποδείχθηκε από τον Gronwall (1932) [26].

<u>**Σημείωση**</u>:

Η ανισότητα (2.46) του Gronwall χρησιμοποιήθηκε από τον Laforgia για να θεμελιώσει τη σχέση (2.4), αποδεικνύοντας ότι η συνάρτηση $e^x x^\nu I_\nu(x)$ είναι αυστηρώς αύξουσα στο $(0, \infty)$ για κάθε $\nu \geq \frac{1}{2}$.

<u>**Σημείωση**</u>:

Για την απόδειξη της σχέσης (2.5) χρησιμοποιήθηκε εκ νέου η ανισότητα του Gronwall, αποδεικνύοντας ότι η συνάρτηση $e^x x^{\frac{1}{2}} I_\nu(x)$ είναι αυστηρώς αύξουσα στο $(0, \infty)$ για κάθε $\nu \geq \frac{1}{2}$.

- $\frac{I_\nu'(x)}{I_\nu(x)} > \frac{x-1}{x}, \text{ με } x > 0 \text{ και } \nu \geq 0$ (2.47)

Η ανισότητα (2.47) αποδείχθηκε από τους Baricz και Sun (2009) [16] χρησιμοποιώντας τις ανισότητες των Gronwall [26] και Nasell [45] και είναι πολύ σημαντική στην απόδειξη της (2.6).

<u>Σχόλιο</u>:

Η ανισότητα (2.46) είναι καλύτερη από την ανισότητα (2.47) για $\nu \geq \frac{1}{2}$, όμως η (2.47) ισχύει για $\nu \geq 0$.

- $\frac{I_\nu{}'(x)}{I_\nu(x)} > \frac{\nu}{x}, \text{ με } x > 0 \text{ και } \nu > -1$ (2.48)

Η ανισότητα (2.48) αποδείχθηκε από την Κοκολογιαννάκη (2012) [35] χρησιμοποιώντας την αναδρομική σχέση (1.15.iv) και το γεγονός ότι η συνάρτηση $\frac{I_{\nu+1}(x)}{xI_\nu(x)}$ είναι θετικώς ορισμένη, δηλαδή $\frac{I_{\nu+1}(x)}{xI_\nu(x)} > 0$. Η ανισότητα (2.48) δίνει φράγμα για το πηλίκο $\frac{xI_\nu{}'(x)}{I_\nu(x)}$ ανεξάρτητο του $x > 0$, εξαρτάται όμως μόνο από το ν, αλλά για $\nu > -1$.

- $\frac{I_\nu{}'(x)}{I_\nu(x)} > \frac{\sqrt{(\nu+1)^2+x^2}-1}{x}, \text{ με } x > 0 \text{ και } \nu > -1$ (2.49)
- $\frac{I_\nu{}'(x)}{I_\nu(x)} > \frac{\nu}{x} + \frac{x}{\nu+\frac{1}{2}+\sqrt{\left(\nu+\frac{3}{2}\right)^2+x^2}}, \text{ με } x > 0 \text{ και } \nu > -1$ (2.50)

Οι ανισότητες (2.49) και (2.50) αποδείχθηκαν από τον Segura (2011) [57] αποδεικνύοντας ανισότητες της μορφής:

$$\frac{I_\nu{}'(x)}{I_\nu(x)} < \frac{x^2 l_{\nu+1}{}^{(i)}(x)+\nu}{x}, \text{ με } x > 0,\ \nu \geq \max\ \{\nu_0 - \mathrm{i}, 0\}$$

$$\text{και } i = 0,1, \ldots$$

όπου $l_\nu{}^{(i)}(x)$ και $u_\nu{}^{(i)}(x)$ οι αναδρομικές σχέσεις που χρησιμοποιήθηκαν και στην απόδειξη της (2.31).

Συγκεκριμένα, απέδειξε τις ακόλουθες ανισότητες θέτοντας στον αναγωγικό τύπο $i = 0$ και 1, αντίστοιχα.

Η ανισότητα (2.49) αποδείχθηκε και από την Κοκολογιαννάκη (2012) [35] χρησιμοποιώντας τη μονοτονία της συνάρτησης $\frac{I_{\nu+1}(x)}{xI_\nu(x)}$ (αυστηρώς φθίνουσα ως προς x), την αναδρομική σχέση (1.15.iv), καθώς και την Τροποποιημένη Διαφορική εξίσωση Bessel (1.7). Αποδείχθηκε επίσης από τους Baricz (2009) [9] και Laforgia/Natalini (2010) [40] με διαφορετικούς τρόπους.

<u>Σχόλιο</u>:

Το κάτω φράγμα της ανισότητας (2.50) μπορεί συνεχώς να βελτιώνεται, αφού $l_\nu^{(1)}(x) > l_\nu^{(0)}(x)$.

- $\frac{I_\nu'(x)}{I_\nu(x)} > -\frac{\sqrt{\nu^2+x^2}}{x}$, με $x > 0$ και $\nu > -1$ (2.51)

Η ανισότητα (2.51) αποδείχθηκε από τον Segura (2011) [57] χρησιμοποιώντας τον αναδρομικό τύπο που είχε αναφερθεί στη προηγούμενη Ενότητα:

$$\frac{I_\nu(x)}{xI_{\nu-1}(x)} > xl_\nu^{(k)}(x)\,,\ \text{με}\ x > 0,\ \nu \geq \max\ \{\nu_0 - k, 0\}$$

$$\text{και}\ k = 0,1, \ldots$$

καθώς και την ανισότητα τύπου Turán:

$$I_{\nu-1}(x)I_{\nu+1}(x) < [I_\nu(x)]^2$$

για τις Τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel 1ου είδους $I_\nu(x)$.

- $\frac{I_\nu'(x)}{I_\nu(x)} > \frac{\sqrt{\nu^2+\frac{x^2\nu}{\nu+1}}}{x}$, με $x > 0$ και $\nu \geq 0$ (2.52)

Η ανισότητα (2.52) αποδείχθηκε από τους Phillips και Malin (1950) [51] χρησιμοποιώντας την ανισότητα τύπου Turán:

$$(\nu + 1)I_{\nu-1}(x)\, I_{\nu+1}(x) - \nu\, [I_\nu(x)]^2 > 0$$

η οποία αποδείχθηκε με διαφορετικούς τρόπους, από τους Thiruvenkatachar και Nanjundiah (1951), από τον Amos (1974) [4], από τους Joshi/Bissu (1991) [32] και πρόσφατα από τον Baricz (2010) [12].

<u>**Σχόλιο**</u>:

Η ανισότητα (2.49) ισχύει για $\nu > -1$ και βελτιώνει την ανισότητα (2.52) για $\nu \geq 0$.

- $\frac{I_\nu{}'(x)}{I_\nu(x)} > \frac{\sqrt{\left(\nu-\frac{1}{2}\right)^2+x^2}-\frac{1}{2}}{x}$, με $x > 0$ και $\nu > -1$ (2.53)

Η ανισότητα (2.53) αποδείχθηκε από τον Segura (2011) [57] αποδεικνύοντας ανισότητες της μορφής:

$$\frac{I_\nu{}'(x)}{I_\nu(x)} > \frac{\frac{1}{u_\nu{}^{(i)}(x)}-\nu}{x},\ \text{με}\ x > 0,\ \nu \geq \max\ \{\nu_0 - \mathrm{i}, 0\}$$

$$\text{και}\ i = 0,1, \ldots$$

όπου $l_\nu{}^{(i)}(x)$ και $u_\nu{}^{(i)}(x)$ οι αναδρομικές σχέσεις που χρησιμοποιήθηκαν και στην απόδειξη της (2.31).

Η ανισότητα (2.53) αποδείχθηκε θέτοντας στον αναγωγικό τύπο $i = 0$, όπου:

$$u_\nu{}^{(0)}(x) = \frac{1}{\sqrt{\left(\nu - \frac{1}{2}\right)^2 + x^2} - \frac{1}{2}}$$

όπως είχαμε αναφέρει και σε προηγούμενη Ενότητα.

2.7. ΦΡΑΓΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΑ ΠΗΛΙΚΑ $\dfrac{I_{\nu+\frac{1}{2}}(x)}{I_{\nu-\frac{1}{2}}(x)}$

- $\dfrac{I_{\nu+\frac{1}{2}}(x)}{I_{\nu-\frac{1}{2}}(x)} < \dfrac{x}{\nu+\sqrt{\nu^2+x^2}}$, με $x > 0$ και $\nu \geq 0$ (2.54)

Η ανισότητα (2.54) αποδείχθηκε από τον Segura (2011) [57] χρησιμοποιώντας τις αναδρομικές σχέσεις (1.15.iii) και (1.15.iv) και αποδεικνύοντας ότι ο λόγος $g_\nu(x) = \dfrac{I_{\nu+\frac{1}{2}}(x)}{I_{\nu-\frac{1}{2}}(x)}$ ικανοποιεί την ακόλουθη εξίσωση Riccati:

$$g_\nu{}'(x) = 1 - \frac{2\nu}{x} g_\nu(x) - [g_\nu(x)]^2$$

οπότε η μελέτη των ριζών της εξίσωσης αυτής δίνει το φράγμα (2.54).

<u>Σημείωση</u>:

Αναφέρουμε ότι για $x > 0$, η ανισότητα:

$$\frac{I_{\nu+\frac{1}{2}}(x)}{I_{\nu-\frac{1}{2}}(x)} > \frac{x}{\nu+\sqrt{\nu^2+x^2}}$$

δηλαδή η αντίστροφη μορφή της (2.54), ισχύει για αρνητικά ν αλλά μόνο αν $\nu = -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \ldots$.

2.8. ΑΝΩ ΦΡΑΓΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΑ ΠΗΛΙΚΑ $\frac{x}{y}\frac{I_\nu(x)}{I_{\nu+1}(x)}\frac{I_\nu(y)}{I_{\nu+1}(y)}$

- $\frac{x}{y}\frac{I_\nu(x)}{I_{\nu+1}(x)}\frac{I_\nu(y)}{I_{\nu+1}(y)} < \left(\frac{y}{x}\right)^{2\nu}$, με $0 < x < y$ και $\nu \geq \frac{1}{2}$ (2.55)

Η ανισότητα (2.55) αποδείχθηκε από τον Laforgia (1991) [36] συνδυάζοντας τις ανισοτήτες (2.3) και (2.13).

- $\frac{x}{y}\frac{I_\nu(x)}{I_{\nu+1}(x)}\frac{I_\nu(y)}{I_{\nu+1}(y)} < e^{y-x}\left(\frac{y}{x}\right)^{\nu}\frac{I_\nu(x)}{I_\nu(y)}$, με $0 < x < y$ και $\nu > -\frac{1}{2}$ (2.56)

Η ανισότητα (2.56) αποδείχθηκε από τους Joshi και Bissu (1996) [33] ολοκληρώνοντας κατά μέλη την αναδρομική σχέση (1.15.iv) και είναι αυστηρότερη της (2.55) για $\nu \geq \frac{1}{2}$. Αυτό αποδεικνύεται απευθείας χρησιμοποιώντας την ανισότητα (2.3).

- $\frac{x}{y}\frac{I_\nu(x)}{I_{\nu+1}(x)}\frac{I_\nu(y)}{I_{\nu+1}(y)} < \frac{e^x \cos hy}{e^y \cos hx}\left(\frac{y}{x}\right)^{\nu-\frac{1}{2}}$, με $0 < x < y$ και $\nu \geq \frac{1}{2}$ (2.57)

Η ανισότητα (2.57) αποδείχθηκε από τον Baricz (2010) [12] και προκύπτει από τον συνδυασμό των (2.4) και (2.19). Το άνω φράγμα της ανισότητας (2.57) είναι αυστηρότερο από το αντίστοιχο άνω φράγμα της ανισότητας (2.55), αφού η συνάρτηση $\frac{x^{\nu+\frac{1}{2}}e^x}{\cos hx}$ είναι αυστηρά αύξουσα.

Σχόλιο:

Αφού η παράγωγος της συνάρτησης $e^{-2x}\,x^{-\frac{1}{2}}\,I_{\nu}(x)\cos hx$ αλλάζει πρόσημο για $\nu \geq \frac{1}{2}$, οι ανισότητες (2.56) και (2.57) δεν είναι απευθείας συγκρίσιμες στο $(0,\infty)$.

➢ $$\frac{x}{y}\frac{I_{\nu}(x)}{I_{\nu+1}(x)}\frac{I_{\nu}(y)}{I_{\nu+1}(y)} < \frac{e^{x}\sin hy}{e^{y}\sin hx}\left(\frac{y}{x}\right)^{\nu-\frac{3}{2}}, \text{ με } 0 < x < y \text{ και } \nu \geq \frac{1}{2} \qquad (2.58)$$

Η ανισότητα (2.58) αποδείχθηκε από τον Baricz (2010) [12] και προκύπτει με συνδυασμό των ανισοτήτων (2.4) και (2.20). Επιπροσθέτως, η ανισότητα (2.58) αποτελεί βελτίωση της (2.57).

Σχόλιο:

Αφού η παράγωγος της συνάρτησης $e^{-2x}x^{-\frac{3}{2}}\,I_{\nu}(x)\sin hx$ αλλάζει πρόσημο για $\nu \geq \frac{1}{2}$, οι ανισότητες (2.56) και (2.58) δεν είναι απευθείας συγκρίσιμες στο $(0,\infty)$.

➢ $$\frac{x}{y}\frac{I_{\nu}(x)}{I_{\nu+1}(x)}\frac{I_{\nu}(y)}{I_{\nu+1}(y)} < \frac{e^{x}(e^{y}+\lambda_{\nu+1})}{e^{y}(e^{x}+\lambda_{\nu+1})}\left(\frac{y}{x}\right)^{\nu+\frac{1}{2}}, \text{ με } 0 < x < y \text{ και } \nu \geq \frac{1}{2} \qquad (2.59)$$

Η ανισότητα (2.59) αποδείχθηκε από τον Baricz (2010) [12] και προκύπτει με συνδυασμό των ανισοτήτων (2.6) και (2.15) αποδεικνύοντας ακόμη ότι η συνάρτηση $(1+\lambda_{\nu+1}e^{-x})^{-1}x^{\nu-\frac{1}{2}}$ είναι αυστηρά αύξουσα στο $(0,\infty)$ για $\nu \geq \frac{1}{2}$. Επιπλέον, η ανισότητα (2.59) αποτελεί βελτίωση της ανισότητας (2.55). Αφού η συνάρτηση

$(1+\lambda_{\nu+1}e^{-x})^{-1}x^{\nu-\frac{1}{2}}$ είναι αυστηρά αύξουσα στο $(0,\infty)$ για $\nu \geq \frac{1}{2}$, ως γινόμενο των αυξουσών συναρτήσεων $x^{\nu-\frac{1}{2}}$ και $(1+\lambda_{\nu+1}e^{-x})^{-1}$ προκύπτει ότι το άνω φράγμα της (2.59) είναι αυστηρότερο από το άνω φράγμα του Laforgia στην (2.56).

<u>Σχόλιο</u>:

Αφού η παράγωγος της συνάρτησης $(e^{x}+\lambda_{\nu+1}e^{-2x})\, x^{\frac{1}{2}}\, I_\nu(x)$ αλλάζει πρόσημο για $\nu \geq \frac{1}{2}$, οι ανισότητες (2.56) και (2.59) δεν είναι απευθείας συγκρίσιμες στο $(0,\infty)$.

2.9. ΚΑΤΩ ΦΡΑΓΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΑ ΠΗΛΙΚΑ $\frac{x}{y}\frac{I_\nu(x)}{I_{\nu+1}(x)}\frac{I_\nu(y)}{I_{\nu+1}(y)}$

- $$\frac{x}{y}\frac{I_\nu(x)}{I_{\nu+1}(x)}\frac{I_\nu(y)}{I_{\nu+1}(y)} > \left(\frac{x}{y}\right)^{2(\nu+1)}, \text{ με } 0<x<y \text{ και } \nu \geq -\frac{1}{2} \qquad (2.60)$$

Η ανισότητα (2.60) αποδείχθηκε από τον Laforgia (1991) [36] χρησιμοποιώντας τις ανισότητες (2.3) και (2.13).

- $$\frac{x}{y}\frac{I_\nu(x)}{I_{\nu+1}(x)}\frac{I_\nu(y)}{I_{\nu+1}(y)} > \left(\frac{y}{x}\right)^{\nu}\frac{I_\nu(x)}{I_\nu(y)}, \text{ με } 0<x<y \text{ και } \nu > -\frac{1}{2} \qquad (2.61)$$

Η ανισότητα (2.61) αποδείχθηκε από τους Joshi και Bissu (1996) [33] χρησιμοποιώντας την αναδρομική σχέση (1.15.iv) και ολοκληρώνοντας στο διάστημα $[x,y]$.

Σχόλιο:

Οι Joshi και Bissu ισχυρίστηκαν ότι για κάθε $0 < x < y$ και $\nu \geq -\frac{1}{2}$, το κάτω φράγμα της (2.61) είναι πιο αυστηρό από το κάτω φράγμα της (2.60). Ο ισχυρισμός αυτός δεν ισχύει. Αρκεί λοιπόν να δειχθεί ότι η συνάρτηση $x^{-3\nu-2}I_\nu(x)$ είναι αυστηρά φθίνουσα στο $(0,\infty)$ για κάθε $\nu > -\frac{1}{2}$. Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x > 0$ η συνάρτηση $e^{-x}x^{-\nu}I_\nu(x)$ είναι αυστηρά φθίνουσα στο $(0,\infty)$. Όμως, αφού η συνάρτηση $e^x x^{-2(\nu+1)}$ είναι αυστηρά φθίνουσα για κάθε $\nu > -1$ και $x < 2(\nu+1)$, παίρνουμε όντως ότι η συνάρτηση $x^{-3\nu-2}I_\nu(x)$ είναι αυστηρά φθίνουσα για κάθε $\nu > -\frac{1}{2}$ και $x < 2(\nu+1)$. Συνεπώς, για μεγαλύτερες τιμές των x και y η (2.61) αλλάζει φορά.

- $\frac{x}{y}\frac{I_\nu(x)}{I_{\nu+1}(x)}\frac{I_\nu(y)}{I_{\nu+1}(y)} > \frac{e^y \cosh x}{e^x \cosh y}\left(\frac{x}{y}\right)^{\nu+\frac{3}{2}}$, με $0 < x < y$ και $\nu > -\frac{1}{2}$ (2.62)

Η ανισότητα (2.62) αποδείχθηκε από τον Baricz (2010) [12] και προκύπτει από τον συνδυασμό των ανισοτήτων (2.4) και (2.19). Για $\nu > -\frac{1}{2}$, το κάτω φράγμα της (2.62) είναι αυστηρότερο από το κάτω φράγμα της (2.60).

- $\frac{x}{y}\frac{I_\nu(x)}{I_{\nu+1}(x)}\frac{I_\nu(y)}{I_{\nu+1}(y)} > \frac{e^y \sinh x}{e^x \sinh y}\left(\frac{x}{y}\right)^{\nu+\frac{1}{2}}$, με $0 < x < y$ και $\nu > \frac{1}{2}$ (2.63)

Η ανισότητα (2.63) αποδείχθηκε από τον Baricz (2010) [12] προέκυψε με συνδυασμό των ανισοτήτων (2.4) και (2.20) και αποτελεί βελτίωση της (2.62).

- $\frac{x}{y}\frac{I_\nu(x)}{I_{\nu+1}(x)}\frac{I_\nu(y)}{I_{\nu+1}(y)} > \frac{e^y(e^x+\lambda_\nu)}{e^x(e^y+\lambda_\nu)}\left(\frac{x}{y}\right)^{\nu+\frac{3}{2}}$, με $0 < x < y$ και $\nu \geq 0$ (2.64)

Η ανισότητα (2.64) αποδείχθηκε από τον Baricz (2010) [12] και προκύπτει με συνδυασμό των (2.15) και (2.19). Η ανισότητα αυτή αποτελεί περαιτέρω βελτίωση της (2.60). Επιπλέον, για κάθε $\nu \geq 0$, η σταθερά λ_ν είναι αυστηρά θετική. Για $\nu \geq 0$, η ανισότητα (2.64) βελτιώνει σημαντικά την ανισότητα (2.62).

2.10.ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ ΤΥΠΟΥ TURAN

- $I_\nu{}^2(x) > I_{\nu-1}(x)I_{\nu+1}(x)$, με $x > 0$ και $\nu > -1$ (2.65)

Η ανισότητα (2.65) αποδείχθηκε από τον Baricz (2009) [6] για $\nu > -1$ χρησιμοποιώντας την μονοτονία της συνάρτησης $\frac{I_{\nu+1}(x)}{xI_\nu(x)}$ ως προς ν (αυστηρά φθίνουσα για σταθερά $x > 0$) και το ότι $\nu + 1 > \nu > -1$. Η ισότητα της παραπάνω ανισότητας ισχύει όταν $x = 0$. Η ανισότητα (2.65) είχε αποδειχθεί και από τους Thiruvenkatachar και Nanjundiah (1951) [63], Amos (1974) [4] και αργότερα από τους Joshi/Bissu (1991) [32]. Επιπλέον, ο Segura (2011) [57] κατέληξε στην ίδια ανισότητα για $\nu > -1$ χρησιμοποιώντας τις αναδρομικές σχέσεις που αναφέραμε στην απόδειξη της (2.31).

<u>Σχόλιο</u>:

Επίσης, ο Lorch (1994) [42] απέδειξε την ανισότητα (2.65) για κάθε $\nu > -\frac{1}{2}$ και εξήγαγε τη γενικευμένη ανισότητα Turán (generalized Turánian):

$I_\nu{}^2(x) > I_{\nu-a}(x)I_{\nu+a}(x)$, με $x > 0$, $\nu \in \left(-1, -\frac{1}{2}\right]$ και $a \in (0,1]$

Μπορούμε εύκολα να παρατηρήσουμε ότι η γενικευμένη ανισότητα Turán οδηγεί στην ανισότητα (2.65) θέτοντας $a = 1$.

➢ $(\nu+1)I_{\nu-1}(x)I_{\nu+1}(x)-\nu\,[I_\nu(x)]^2>0,$ με $x>0$ και $\nu\geq 0$ (2.66)

Η ανισότητα (2.66) αποδείχθηκε με διαφορετικούς τρόπους, από τους Thiruvenkatachar και Nanjundiah (1951) [63], από τον Amos (1974) [4], από τους Joshi και Bissu (1991) [32] και πιο πρόσφατα από τον Baricz (2010) [12] και από τον Segura (2011) [57].

<u>Σημείωση</u>:

Αφού ισχύει ότι $\lim_{x\to\infty}\frac{I_{\nu-1}(x)}{I_\nu(x)}\frac{I_{\nu+1}(x)}{I_\nu(x)}=\frac{\nu}{\nu+1}$, για κάθε $\nu\geq 0$, η ανισότητα Turán (2.66) είναι η καλύτερη δυνατή.

➢ $I_{\nu+1}(x)I_\mu(x)-I_{\mu+1}(x)I_\nu(x)>0,$ με $x>0$ και $\mu>\nu>-1$ (2.67)

Η ανισότητα (2.67) αποδείχθηκε από τον Baricz (2010) [12] χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η συνάρτηση $\frac{xI_\nu(x)}{I_{\nu+1}(x)}$ είναι αυστηρά φθίνουσα ως προς ν, για $\nu>-1$ και σταθερά $x>0$.

➢ ${I_{\nu+1}}^3(x)I_{\nu+3}(x)>I_\nu(x){I_{\nu+2}}^3(x),$ με $x>0$ και $\nu>-1$ (2.68)

Η ανισότητα (2.68) αποδείχθηκε από τον Baricz (2010) [12] χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η συνάρτηση $\frac{xI_\nu(x)}{I_{\nu+1}(x)}$ είναι λογαριθμικά κοίλη ως προς ν, για $\nu>-1$ και σταθερά $x>0$.

➢ $\frac{{l_{\nu+1}}^{(i)}(x)}{{u_\nu}^{(k)}(x)}<\frac{I_{\nu-1}(x)}{I_\nu(x)}\frac{I_{\nu+1}(x)}{I_\nu(x)}<\frac{{u_\nu}^{(i)}(x)}{{l_\nu}^{(k)}(x)},$ με $x>0$ και $\nu>0$

Ο Segura (2011) [57] χρησιμοποιώντας τις ακολουθίες ${l_\nu}^{(i)}(x)$, ${u_\nu}^{(i)}(x)$, όπως έχουν ορισθεί στην απόδειξη της ανισοτήτας (2.31) και χρησιμοποιώντας γνωστές αναδρομικές σχέσεις για τις συναρτήσεις

Bessel 1ου είδους $I_\nu(x)$ απέδειξε την ανωτέρω αναγωγική σχέση. Με αυτόν τον τρόπο βρίσκει διάφορα φράγματα για διάφορες τιμές των i και k. Τα φράγματα που αναφέρθηκαν στις ανισότητες (2.65) και (2.66) προέρχονται από τον παραπάνω αναγωγικό τύπο για $i = 0$ και $k = 0$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{ο}: ΦΡΑΓΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΑ ΠΗΛΙΚΑ ΤΩΝ ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ BESSEL 2^{ου} ΕΙΔΟΥΣ

3.1. ΑΝΩ ΚΑΙ ΚΑΤΩ ΦΡΑΓΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΑ ΠΗΛΙΚΑ $\frac{K_\nu(x)}{K_\nu(y)}$

- $\frac{K_\nu(x)}{K_\nu(y)} > e^{y-x}\left(\frac{x}{y}\right)^\nu$, με $0 < x < y$ και $\nu > -\frac{1}{2}$ (3.1)

Η ανισότητα (3.1) αποδείχθηκε από τον Laforgia (1991) [36] χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η συνάρτηση $x^{-\nu}e^x\,K_\nu(x)$ είναι αυστηρά φθίνουσα στο $(0,\infty)$ για κάθε $\nu > -\frac{1}{2}$. Η ανισότητα αυτή είχε αποδειχθεί και με διαφορετικούς τρόπους από τους Ross (1970) [55], Bordelon (1973) [20] και Paris (1984) [48].

<u>Σημείωση</u>:

Αφού η συνάρτηση $x^{-\nu}$ είναι αυστηρά πλήρως μονότονη στο $(0,\infty)$ για κάθε $\nu > 0$, έχουμε ότι η συνάρτηση $x^{-\nu}e^x\,K_\nu(x)$ δεν είναι μόνο αυστηρά φθίνουσα στο $(0,\infty)$, αλλά και αυστηρά πλήρως μονότονη για κάθε $\nu > 0$.

- $\frac{K_\nu(x)}{K_\nu(y)} > e^{y-x}$, με $0 < x < y$ και $\nu \in \mathrm{R}$ (3.2)

Η ανισότητα (3.2) αποδείχθηκε από τον Laforgia (1991) [36] χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η συνάρτηση $e^x K_\nu(x)$ είναι αυστηρά φθίνουσα για κάθε $\nu \in \mathrm{R}$, αφού ισχύει η σχέση $K_\nu(x) = K_{-\nu}(x)$, και ότι η συνάρτηση $K_\nu(x)$ είναι άρτια. Αν $\nu > 0$, τότε η (3.2) είναι αυστηρότερη από την (3.1).

➢ $\frac{K_\nu(x)}{K_\nu(y)} > e^{x-y}\left(\frac{x}{y}\right)^\nu$, με $0 < x < y$ και $\nu > -\frac{1}{2}$ (3.3)

Η ανισότητα (3.3) αποδείχθηκε από τους Joshi και Bissu (1991) [32] χρησιμοποιώντας την ανισότητα (2.1) και το γεγονός ότι η συνάρτηση $\frac{K_\nu(x)}{I_\nu(x)}$ είναι αυστηρά φθίνουσα στο $(0,\infty)$ για κάθε $\nu > -1$, ως πηλίκο δύο αυστηρά φθινουσών συναρτήσεων. Το κάτω φράγμα της ανισότητας (3.3) είναι ασθενέστερο από το αντίστοιχο κάτω φράγμα της ανισότητας (3.1).

Σημείωση:

Η συνάρτηση $x^{-\nu}e^{-x}\,K_\nu(x)$ δεν είναι μόνο αυστηρά φθίνουσα στο $(0,\infty)$ για κάθε $\nu > -\frac{1}{2}$, αλλά και αυστηρά πλήρως μονότονη, ως γινόμενο δύο αυστηρά πλήρων μονότονων συναρτήσεων και συγκεκριμένα των e^{-2x}και $x^{-\nu}e^{x}\,K_\nu(x)$.

➢ $\frac{K_\nu(x)}{K_\nu(y)} < e^{x-y}\left(\frac{x}{y}\right)^\nu$, με $0 < x < y$ και $\nu < -\frac{1}{2}$ (3.4)

Η ανισότητα (3.4) αποδείχθηκε από τους Joshi και Bissu (1991) [32] χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η συνάρτηση $x^{-\nu}e^{x}K_\nu(x)$ είναι αυστηρά αύξουσα στο $(0,\infty)$ για $\nu < -\frac{1}{2}$, λόγω της συμμετρικής σχέσης $K_\nu(x) = K_{-\nu}(x)$.

➢ $\frac{K_\nu(x)}{K_\nu(y)} > e^{y-x}\left(\frac{y}{x}\right)^\nu$, με $0 < x < y$ και $\nu \in \left(0,\frac{1}{2}\right)$ (3.5)

Η ανισότητα (3.5) αποδείχθηκε από τον Laforgia (1991) [36] και σχετίζεται, όπως παρατηρούμε με τα κάτω φράγματα των ανισοτήτων (3.1) και (3.2). Η ανισότητα αυτή βελτιώνει την (3.1) όταν $\nu \in \left(0,\frac{1}{2}\right)$. Επιπλέον, αφού η συνάρτηση $x^{-\nu}e^{x}K_\nu(x)$ είναι αυστηρά πλήρως μονότονη στο $(0,\infty)$ για κάθε $\nu > -\frac{1}{2}$, έχουμε λόγω συμμετρίας της $K_\nu(x)$ ότι και η συνάρτηση $x^{\nu}e^{x}\,K_\nu(x)$ είναι αυστηρά πλήρως μονότονη στο $(0,\infty)$ για κάθε $\nu < \frac{1}{2}$. Επομένως, στη πραγματικότητα, η ανισότητα (3.5) ισχύει για κάθε $\nu < \frac{1}{2}$.

Σημείωση:

Η συνάρτηση $K_\nu(x)$ είναι αυστηρά φθίνουσα στο $(0,\infty)$, για κάθε σταθερό $x > 0$. Επιπλέον, αφού ισχύει η συμμετρική σχέση $K_\nu(x) = K_{-\nu}(x)$, τότε η $K_\nu(x)$ είναι και αυστηρά φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$ για κάθε σταθερό $x > 0$.

- $\frac{K_\nu(x)}{K_\nu(y)} < e^{y-x}\left(\frac{y}{x}\right)^\nu$, με $0 < x < y$ και $\nu > \frac{1}{2}$ (3.6)

Η ανισότητα (3.6) αποδείχθηκε από τον Laforgia (1991) [36] χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Soni για τις Τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel 2ου είδους:

$$K_{\nu+1}(x) > K_\nu(x), \text{με } x > 0 \text{ και } \nu > -\frac{1}{2}$$

και το γεγονός ότι για κάθε $\nu > \frac{1}{2}$ η συνάρτηση $x^\nu e^x K_\nu(x)$ είναι αυστηρά αύξουσα στο $(0,\infty)$.

- $\frac{K_\nu(x)}{K_\nu(y)} > \left(\frac{y}{x}\right)^\nu$, με $0 < x < y$ και $\nu > -\frac{1}{2}$ (3.7)

Η ανισότητα (3.7) αποδείχθηκε από τους Joshi και Bissu (1996) [33]. Για $0 < \nu < \frac{1}{2}$, το κάτω φράγμα της ανισότητας (3.5) είναι αυστηρότερο από το αντίστοιχο κάτω φράγμα της (3.7).

Σημείωση:

Η μονοτονία της συνάρτησης $x^\nu K_\nu(x)$ για κάθε $\nu \in \mathrm{R}$ προκύπτει άμεσα από τον ακόλουθο αναγωγικό τύπο των Τροποποιημένων συναρτήσεων Bessel 2ου είδους $K_\nu(x)$:

$$[x^\nu K_\nu(x)]' = -x^\nu K_{\nu-1}(x)$$

- $\frac{K_\nu(x)}{K_\nu(y)} > e^{y-x}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{2}}$, με $0 < x < y$ και $\nu \in \mathrm{R}$ (3.8)

Η ανισότητα (3.8) αποδείχθηκε από τον Baricz (2010) [12] χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η συνάρτηση $x^{-\frac{1}{2}} e^x K_\nu(x)$ είναι αυστηρά πλήρως μονότονη στο $(0,\infty)$ για κάθε $\nu \in \mathrm{R}$, αφού η συνάρτηση $x^{-\frac{1}{2}}$ είναι αυστηρά πλήρως μονότονη στο $(0,\infty)$. Επίσης, η ίδια ανισότητα αποδείχθηκε από τους Weniger και Cizek (1989) [66] χρησιμοποιώντας την ολοκληρωτική αναπαράσταση [24]:

$$K_\nu(x) = \frac{x^{\frac{1}{2}}\, e^{-x}}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)} \int_0^\infty \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{x+t} e^{-t} K_\nu(x)\, dt$$

που ισχύει για $x > 0$ και $\nu \in \left(0,\frac{1}{2}\right)$. Για $\nu > \frac{1}{2}$, το κάτω φράγμα της (3.8) είναι αυστηρότερο από το αντίστοιχο της ανισότητας (3.1), αλλά είναι πιο ασθενές για $|\nu| < \frac{1}{2}$.

- $\frac{K_\nu(x)}{K_\nu(y)} < e^{y-x}\left(\frac{x}{y}\right)^{\nu}$, με $0 < x < y$ και $\nu < -\frac{1}{2}$ (3.9)

Η ανισότητα (3.9) αποτελεί την αντίστροφη μορφή της (3.8).

- $\frac{K_\nu(x)}{K_\nu(y)} > e^{y-x}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$, με $0 < x < y$ και $|\nu| > \frac{1}{2}$ (3.10)

Η ανισότητα (3.10) αποδείχθηκε από τους Miller και Samko (2001) [44] χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η συνάρτηση $x^{\frac{1}{2}} e^x K_\nu(x)$ είναι αυστηρά πλήρως μονότονη στο $(0,\infty)$ για κάθε $\nu > \frac{1}{2}$. Το κάτω φράγμα της ανισότητας (3.10) είναι αυστηρότερο από το αντίστοιχο κάτω φράγμα του Laforgia στην ανισότητα (3.5), για $\nu < -\frac{1}{2}$. Ωστόσο, στη περίπτωση όπου $\nu > \frac{1}{2}$, η ανισότητα (3.10) ολοκληρώνει την ανισότητα (3.5) και μας θυμίζει τη μορφή της ανισότητας (2.5) των τροποποιημένων συναρτήσεων Bessel $1^{ου}$ είδους $I_\nu(x)$. Για $|\nu| > \frac{1}{2}$, το κάτω φράγμα της ανισότητας (3.10) βελτιώνει το αντίστοιχο κάτω φράγμα της ανισότητας (3.8).

Σημείωση:

Χρησιμοποιώντας τη συμμετρική σχέση:

$$K_\nu(x) = K_{-\nu}(x)$$

αποδεικνύεται ότι η συνάρτηση $x^{\frac{1}{2}} e^x K_\nu(x)$ είναι αυστηρά πλήρως μονότονη στο $(0, \infty)$ για κάθε $\nu < -\frac{1}{2}$.

3.2. ΑΝΩ ΚΑΙ ΚΑΤΩ ΦΡΑΓΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΑ ΠΗΛΙΚΑ $\frac{K_\nu(x)}{K_{\nu+1}(x)}$

- $K_{\nu+1}(x) > K_\nu(x)$, με $x > 0$ και $\nu > -\frac{1}{2}$ (3.11)

Η ανισότητα (3.11) αποδείχθηκε, όπως είδαμε και στις Τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel 1^ου^ είδους από τον Soni (1965) [62].

- $\frac{K_\nu(x)}{K_{\nu+1}(x)} \le x$, με $x > 0$ και $\nu \ge -\frac{1}{2}$ (3.12)

Η ανισότητα (3.12) αποδείχθηκε από τον Segura (2011) [57] χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η συνάρτηση $K_\nu(x)$ είναι αυστηρά αύξουσα για $\nu \ge 0$. Για $\nu \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right)$, λόγω της συμμετρικής σχέσης $K_\nu(x) = K_{-\nu}(x)$, έχουμε ότι:

$$\frac{K_{\nu+1}(x)}{K_\nu(x)} = \frac{K_{\nu+1}(x)}{K_{-\nu}(x)} \ge 1$$

Η ισότητα ισχύει όταν $\nu = -\frac{1}{2}$.

- $\frac{K_\nu(x)}{K_{\nu+1}(x)} < \frac{x}{\nu+\sqrt{\nu^2+x^2}}$, με $x > 0$ και $\nu \in \mathrm{R}$ (3.13)

- $\frac{K_\nu(x)}{K_{\nu+1}(x)} \leq \frac{x}{\nu+\frac{1}{2}+\sqrt{\left(\nu-\frac{1}{2}\right)^2+x^2}}$, με $x > 0$ και $\nu \geq \frac{1}{2}$ (3.14)

- $\frac{K_\nu(x)}{K_{\nu+1}(x)} \geq \frac{x}{\nu+\frac{1}{2}+\sqrt{\left(\nu+\frac{1}{2}\right)^2+x^2}}$, με $x > 0$ και $\nu \in \mathrm{R}$ (3.15)

- $\frac{K_\nu(x)}{K_{\nu+1}(x)} > \frac{x}{\nu+1+\sqrt{(\nu-1)^2+x^2}}$, με $x > 0$ και $\nu \geq \frac{1}{2}$ (3.16)

Οι ανισότητες (3.13) - (3.16) αποδείχθηκαν από τον Segura (2011) [57] χρησιμοποιώντας αναγωγικούς τύπους της μορφής:

$$xL_\nu{}^{(i)}(x) \leq \frac{K_\nu(x)}{K_{\nu+1}(x)} < xU_\nu{}^{(i)}(x),\ \text{με}\ x > 0, \nu \geq \max\ \{\nu_0 - i, 0\}$$

$$\text{και}\ i = 0,1, \dots$$

όπου $L_\nu{}^{(i+1)}(x)$ και $U_\nu{}^{(i+1)}(x)$ ακολουθίες που ορίζονται από τους παρακάτω τύπους:

$$L_\nu{}^{(i+1)}(x) = \frac{1}{2\nu + x^2 U_{\nu+1}{}^{(i)}(x)}$$

$$U_\nu{}^{(i+1)}(x) = \frac{1}{2\nu + x^2 L_{\nu+1}{}^{(i)}(x)}$$

Οι ανισότητες (3.13) και (3.14) αποδείχθηκαν θέτοντας στον παραπάνω αναγωγικό τύπο $\nu_0 \to -\infty$ και $i = 0$ και 1, αντίστοιχα, ενώ οι ανισότητες (3.15) και (3.16) αποδείχθηκαν θέτοντας στον παραπάνω αναγωγικό τύπο $\nu_0 = -\frac{1}{2}$ και $i = 0$ και 1, αντίστοιχα.

Το άνω φράγμα της (3.13) ισχύει για κάθε $\nu \in \mathrm{R}$, αλλά είναι αυστηρό μόνο για $\nu > 0$.

Η ισότητα της (3.14) ισχύει μόνο όταν $\nu = \frac{1}{2}$, ενώ η ισότητα για την (3.15) ισχύει όταν $\nu = -\frac{1}{2}$.

Σχόλιο:

Επιπλέον, αξίζει να αναφέρουμε ότι το ${U_\nu}^{(2)}(x)$ ισχύει για κάθε $\nu \geq 0$, το ${L_\nu}^{(3)}(x)$ ισχύει για κάθε $\nu \geq 1$, το ${U_\nu}^{(4)}(x)$ ισχύει για κάθε $\nu \geq 2$ κτλ.

Σχόλιο:

Οι ανισότητες που προκύπτουν για τα ${L_\nu}^{(i)}(x)$, $i = 0,2,4,\ldots$γίνονται ισότητες όταν $\nu = -\frac{1}{2} + i$.

- $\frac{K_\nu(x)}{K_{\nu+1}(x)} > \frac{\nu+\sqrt{\nu^2+x^2\frac{\nu}{\nu-1}}}{x}$, με $x > 0$ και $\nu \geq 1$ (3.17)

Η ανισότητα (3.17) αποδείχθηκε από τον Segura (2011) [57] θεωρώντας τις ακολουθίες που αναφέρονται και παραπάνω και χρησιμοποιώντας αναδρομικές σχέσεις για τις Τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel 2ου είδους $K_\nu(x)$.

Σχόλιο:

Το άνω φράγμα της ανισότητας (3.16) βελτιώνει το αντίστοιχο άνω φράγμα της (3.17).

3.3. ΑΝΩ ΚΑΙ ΚΑΤΩ ΦΡΑΓΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΑ ΠΗΛΙΚΑ $\frac{K_{\nu-\frac{1}{2}}(x)}{K_{\nu+\frac{1}{2}}(x)}$

➢ $\frac{K_{\nu-\frac{1}{2}}(x)}{K_{\nu+\frac{1}{2}}(x)} \geq \frac{x}{\sqrt{x^2+\nu^2}+\nu}$, με $x > 0$ και $\nu > 0$ (3.18)

Η ανισότητα (3.18) αποδείχθηκε από τον Segura (2011) [57], χρησιμοποιώντας αρχικά τις αναδρομικές σχέσεις (1.16.iii) και (1.16.iv) και αποδεικνύοντας ότι ο λόγος $h_\nu(x) = \frac{K_{\nu-\frac{1}{2}}(x)}{K_{\nu+\frac{1}{2}}(x)}$ ικανοποιεί την ακόλουθη εξίσωση Riccatti:

$$h_\nu{}'(x) = -1 + \frac{2\nu}{x} h_\nu(x) + [h_\nu(x)]^2$$

οπότε η μελέτη των ριζών της εξίσωσης αυτής δίνει το φράγμα (3.18).

Για $\nu = 0$ ισχύει η ισότητα της (3.18).

➢ $\frac{K_{\nu-\frac{1}{2}}(x)}{K_{\nu+\frac{1}{2}}(x)} < \frac{x}{\sqrt{x^2+\nu^2}+\nu}$, με $x > 0$ και $\nu < 0$ (3.19)

Η ανισότητα (3.19) αποτελεί την αντίστροφη μορφή της (3.18).

3.4. ΑΝΩ ΚΑΙ ΚΑΤΩ ΦΡΑΓΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΑ ΠΗΛΙΚΑ $\frac{K_\nu{}'(x)}{K_\nu(x)}$

- $\frac{K_\nu{}'(x)}{K_\nu(x)} < -\frac{\sqrt{\left(\nu-\frac{1}{2}\right)^2+x^2}+\frac{1}{2}}{x}$, με $x > 0$ και $\nu \geq 1$ (3.20)

Η ανισότητα (3.20) αποδείχθηκε από τον Segura (2011) [57] χρησιμοποιώντας αναγωγικούς τύπους της μορφής:

$$\frac{K_\nu{}'(x)}{K_\nu(x)} > -\frac{x^2 U_{\nu-1}{}^{(i)}(x)+\nu}{x}, \text{ με } x > 0, \nu \geq \max\ \{\nu_0 - \mathrm{i}, 0\}$$

και $i = 0,1, \ldots$

όπου $L_\nu{}^{(i+1)}(x)$ και $U_\nu{}^{(i+1)}(x)$ ακολουθίες που ορίζονται από τους τύπους που αναφέραμε και στην απόδειξη των (3.13) – (3.16).

Η ανισότητα (3.22) προκύπτει θέτοντας στον παραπάνω αναγωγικό τύπο $i = 0$.

- $\frac{K_\nu{}'(x)}{K_\nu(x)} < -\frac{\sqrt{\nu^2+x^2}}{x}$, με $x > 0$ και $\nu \geq 0$ (3.21)

Η ανισότητα (3.21) αποδείχθηκε από τον Segura (2011) [57] χρησιμοποιώντας αναγωγικούς τύπους της μορφής:

$$\frac{K_\nu{}'(x)}{K_\nu(x)} < -\frac{\frac{1}{U_\nu{}^{(i)}(x)}-\nu}{x}, \text{ με } x > 0, \nu \geq \max\ \{\nu_0 - \mathrm{i}, 0\}$$

και $i = 0,1, \ldots$

όπου $L_\nu{}^{(i+1)}(x)$ και $U_\nu{}^{(i+1)}(x)$ ακολουθίες που ορίζονται από τους τύπους που αναφέραμε και στην απόδειξη των (3.13) – (3.16).

Η ανισότητα (3.21) προκύπτει θέτοντας στον παραπάνω αναγωγικό τύπο $i = 0$.

<u>**Σημείωση**</u>:

Το άνω φράγμα της ανισότητας (3.20) είναι αυστηρότερο από το αντίστοιχο φράγμα της ανισότητας (3.21), όμως αυτό της ανισότητας (3.20) ισχύει αλλά σε μια πιο περιορισμένη κλίμακα του ν.

- $\frac{K_\nu'(x)}{K_\nu(x)} > -\frac{\sqrt{(\nu-1)^2+x^2}+1}{x}$, με $x > 0$ και $\nu \geq 1$ (3.22)

Η ανισότητα (3.22) αποδείχθηκε από τον Segura (2011) [57] χρησιμοποιώντας αναγωγικούς τύπους της μορφής:

$$\frac{K_\nu'(x)}{K_\nu(x)} > -\frac{x^2 U_{\nu-1}{}^{(i)}(x)+\nu}{x}, \text{ με } x > 0,$$

$$\nu \geq \max \ \{\nu_0 - \mathrm{i}, 0\} \text{ και } i = 0,1, \ldots$$

όπου $L_\nu{}^{(i+1)}(x)$ και $U_\nu{}^{(i+1)}(x)$ ακολουθίες που ορίζονται από τους τύπους που αναφέραμε και στην απόδειξη των (3.13) – (3.16).

Η ανισότητα (3.22) προκύπτει θέτοντας στον παραπάνω αναγωγικό τύπο $i = 0$.

- $\frac{K_\nu'(x)}{K_\nu(x)} > -\frac{\sqrt{\left(\nu+\frac{1}{2}\right)^2+x^2}+\frac{1}{2}}{x}$, με $x > 0$ και $\nu \geq 0$ (3.23)

Η ανισότητα (3.23) αποδείχθηκε από τον Segura (2011) [57] χρησιμοποιώντας αναγωγικούς τύπους της μορφής:

$$\frac{K_\nu'(x)}{K_\nu(x)} > -\frac{\frac{1}{L_\nu{}^{(i)}(x)}-\nu}{x}, \text{ με } x > 0,$$

$$\nu \geq \max \ \{\nu_0 - \mathrm{i}, 0\} \text{ και } i = 0,1, \ldots$$

όπου $L_\nu{}^{(i+1)}(x)$ και $U_\nu{}^{(i+1)}(x)$ ακολουθίες που ορίζονται από τους τύπους που αναφέραμε και στην απόδειξη των (3.13) – (3.16).

Η ανισότητα (3.23) προκύπτει θέτοντας στον παραπάνω αναγωγικό τύπο $i = 0$.

➢ $\frac{K_\nu'(x)}{K_\nu(x)} > -\frac{\sqrt{\nu^2+x^2\frac{\nu}{\nu-1}}}{x}$, με $x>0$ και $\nu \geq 0$ (3.24)

Η ανισότητα (3.24) αποδείχθηκε από τον Segura (2011) [57] θεωρώντας τις ακολουθίες που αναφέρονται και παραπάνω και αναδρομικές σχέσεις για τις Τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel 2ου είδους $K_\nu(x)$.

<u>Σχόλιο</u>:

Το κάτω φράγμα της (3.23) βελτιώνει το αντίστοιχο κάτω φράγμα της ανισότητας (3.24).

3.5. ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ ΤΥΠΟΥ TURAN

➢ $\frac{L_{\nu-1}{}^{(i)}(x)}{U_\nu{}^{(k)}(x)} \leq \frac{K_{\nu-1}(x)}{K_\nu(x)}\frac{K_{\nu+1}(x)}{K_\nu(x)} < \frac{U_{\nu-1}{}^{(i)}(x)}{L_\nu{}^{(k)}(x)}$, με $x>0$ και $\nu \geq 0$ (3.25)

Ο Segura (2011) [57] χρησιμοποιώντας τις ακολουθίες $L_\nu{}^{(i+1)}(x)$ και $U_\nu{}^{(i+1)}(x)$, όπως έχουν ορισθεί στην απόδειξη των αναγωγικών τύπων, που αναφέραμε σε προηγούμενες ενότητες και χρησιμοποιώντας γνωστές αναδρομικές σχέσεις για τις συναρτήσεις Bessel 1ου είδους $I_\nu(x)$, απέδειξε την ανωτέρω αναγωγική σχέση.

➢ $\frac{K_{\nu-1}(x)K_{\nu+1}(x)}{[K_\nu(x)]^2} > 1$, με $x>0$ και $\nu \in R$ (3.26)

Η ανισότητα (3.26) αποδείχθηκε από τον Segura (2011) [57] θεωρώντας αρχικά τις ακολουθίες $L_\nu{}^{(i+1)}(x)$, $U_\nu{}^{(i+1)}(x)$ δείχνοντας ότι για $\nu \geq \frac{1}{2}$:

$$\frac{K_{\nu-1}(x)}{K_\nu(x)}\frac{K_{\nu+1}(x)}{K_\nu(x)} > \frac{L_{\nu-1}{}^{(0)}(x)}{U_\nu{}^{(1)}(x)} = 1 + L_{\nu-1}{}^{(0)}(x) > 1$$

Αλλά, λόγω της συμμετρικής ιδιότητας $K_\nu(x) = K_{-\nu}(x)$ για κάθε ν και του γεγονότος ότι η $K_\nu(x)$ είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς ν, όταν $\nu \geq 0$, η ανισότητα (3.26) θα ισχύει για κάθε $\nu \in \mathrm{R}$.

<u>Σημείωση</u>:

Αν $\nu \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ η ανισότητα Turán ισχύει αφού:

$$\frac{K_{\nu-1}(x)}{K_\nu(x)} = \frac{K_{1-\nu}(x)}{K_\nu(x)}$$

όπου $1 - \nu > \nu > 0$ και η $K_\nu(x)$είναι αύξουσα ως συνάρτηση του ν. Είναι προφανές τότε ότι η ανισότητα τύπου Turán ισχύει για κάθε $\nu \geq 0$. Αλλά τότε ισχύει για πραγματικά ν, αφού $K_\nu(x) = K_{-\nu}(x)$.

<u>Σχόλιο</u>:

Αφού $\lim_{x\to\infty} \frac{K_\nu(x)}{K_\mu(x)} = 1$, για κάθε μ, ν η ανισότητα είναι η καλύτερη διότι δεν εξαρτάται από το x.

- $\frac{K_{\nu-1}(x)}{K_\nu(x)} \frac{K_{\nu+1}(x)}{K_\nu(x)} < \frac{|\nu|}{|\nu|-1}$, με $x > 0$ και $\nu \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ (3.27)

Η ανισότητα (3.27) αποδείχθηκε από τον Segura (2011) [57] δείχνοντας ότι:

$$\frac{K_{\nu-1}(x)}{K_\nu(x)} \frac{K_{\nu+1}(x)}{K_\nu(x)} = 1 + \frac{2}{\nu - 1 + \sqrt{(\nu-1)^2 + x^2}} > 1 - \frac{1}{\nu + 1}$$

το οποίο ισχύει για $\nu \geq \frac{1}{2}$. Όμως έχουμε ότι:

$$\frac{K_{\nu-1}(x)}{K_\nu(x)} \frac{K_{\nu+1}(x)}{K_\nu(x)} < 1 + \frac{1}{\nu - 1}, \text{για } \nu > 1$$

Για $\nu < -1$, η ανισότητα αποδεικνύεται με τη χρήση της συμμετρικής σχέσης $K_\nu(x) = K_{-\nu}(x)$, $\nu \in \mathrm{R}$.

<u>Σχόλιο</u>:

Αφού $\lim_{x\to\infty}\frac{K_{\nu-1}(x)}{K_\nu(x)}\frac{K_{\nu+1}(x)}{K_\nu(x)}=\frac{|\nu|}{|\nu|-1}$, $|\nu|\geq 1$, τότε η ανισότητα (3.27) είναι η καλύτερη δυνατή και δεν εξαρτάται από το x.

- $$(\nu-1)K_{\nu-1}(x)K_{\nu+1}(x)<(2\nu-1)[K_\nu(x)]^2,\ \text{με}\ x>0\ \text{και}\ \nu\geq 0 \qquad (3.28)$$

Η ανισότητα (3.28) αποδείχθηκε από τον Segura (2011) [57]. Έχει, όμως ήδη αποδειχθεί για $\nu>1$. Αλλά:

$$\frac{2\nu-1}{\nu-1}>\frac{\nu}{\nu-1},\text{αν}\ \nu>1$$

Για $\nu\in\left[\frac{1}{2},1\right]$ είναι προφανές το αποτέλεσμα, διότι η συνάρτηση K είναι θετική. Τελικά, για $\nu\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$, η ανισότητα γίνεται:

$$\frac{K_\nu(x)}{K_{\nu-1}(x)}\frac{K_\nu(x)}{K_{\nu+1}(x)}<1+\frac{\nu}{1-2\nu}$$

- $$(\nu+1)K_{\nu-1}(x)K_{\nu+1}(x)>(2\nu+1)[K_\nu(x)]^2\ ,\ \text{με}\ x>0\ \text{και}\ \nu\leq 0 \qquad (3.29)$$

Η ανισότητα (3.29) αποδείχθηκε από τον Segura (2011) [57] και βασίζεται στην απόδειξη της (3.28), αφού ισχύει η συμμετρική σχέση $K_\nu(x)=K_{-\nu}(x),\ \nu\in\mathrm{R}$.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] M. ABRAMOWITZ AND I. A. STEGUN, Handbook of Mathematical functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables, National Bureau of Standards (1964)

[2] H. ALZER AND C. BERG, Some classes of completely monotonic functions, Annales Acad. Sci. Fenn. Math. **27**(2) (2002), 445-460

[3] H. ALZER AND C. BERG, Some classes of completely monotonic functions, II, Ramanujan J. **11**(2) (2006), 225-248

[4] D. E. AMOS, Computation of modified Bessel functions and their ratios, Math. Comput. **28** (1974), 239-251

[5] S. ANDRAS AND A. BARICZ, Monotonicity property of generalized and normalized Bessel functions of complex order, Complex variables Ellipt. Eqns **54**(7) (2009), 689-696

[6] A. BARICZ, Turán-type inequalities for generalized complete elliptic integrals, Math. Z. **256**(4) (2007), 1202-1213

[7] A. BARICZ, Turán-type inequalities for hypergeometric functions, Proc. Am. Math. Soc. **136**(9) (2008), 3223-3229

[8] A. BARICZ, Functional inequalities involving Bessel and modified Bessel functions of the first kind, Expo. Math. **26**(3) (2008), 279-293

[9] A. BARICZ, On a product of modified Bessel functions, Proc. Am. Math. Soc. **137**(1) (2009), 189-193

[10] A. BARICZ, Tight bounds for the generalized Marcum Q-function, J. Math. Anal. Appl. **360**(1) (2009), 265-277

[11] A. BARICZ, Turán-type inequalities for some probability density functions, Studia Sci. Math. Hungar. **47**(2) (2010), 175-189

[12] A. BARICZ, Bounds for modified Bessel functions of the first and second kinds, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society (2010) **53**, 575-599

[13] A. BARICZ, Generalized Bessel functions of the first kind, Lecture Notes in Math. vol. 1994, Springer-Verlag, Berlin, 2010

[14] A. BARICZ, Turán-type inequalities for modified Bessel functions, Bull. Aust. Math. Soc. **82**(2) (2010), 254-264

[15] A. BARICZ AND E. NEUMAN, Inequalities involving modified Bessel functions of the first kind, II, J. Math. Analysis Applic. **332**(1) (2007), 265-271

[16] A. BARICZ AND Y. SUN, New bounds for the generalized Marcum Q-function, IEEE Trans. Inform. Theory **55**(7) (2009), 3091-3100

[17] A. BARICZ AND Y. SUN, Bounds for the generalized Marcum Q-function, Appl. Math. Computat. **217** (2010), 2238-2250

[18] S. K. BHATTACHARYA, Bayesian approach to life testing and reliability estimation, J. Amer. Statist. Assoc., 62 (1967), pp. 48–62

[19] M. BOCHER, On certain methods of Sturm and their application to the roots of Bessel's functions, Bull. Am. Math. Soc. **3** (1987), 205-213

[20] D. J. BORDELON, Problem 72-15, inequalities for special functions, SIAM Rev. **15** (1973), 665-668

[21] J. A. COCHRAN, The monotonicity of modified Bessel functions with respect to their order, J. Math. Phys. **46** (1967), 220-222

[22] L. DEVROYE, Simulating Bessel random variables, Statist. Probab. Lett., 57,(2002), pp. 249–257

[23] A. ELBERT, Concavity of the zeros of Bessel functions, Studia Sci. Math. Hungar. **12** (1977), 81-88

[24] I. GARGANTINI AND P. HENRICI, A continued fraction algorithm for the computation of higher transcendental functions in the complex plane, Math. Comp. **21** (1967), 18-29

[25] A. GIL AND J. SEGURA AND N.M. TEMME, Numerical Methods for Special Functions, SIAM, Philadelphia (2007)

[26] T. H. GRONWALL, An inequality for the Bessel functions of the first kind with imaginary argument, Annals Math. **33** (1932), 275-278

[27] S. L. GUPTA, On an inequality for modified Bessel functions, Univ. Roorkee Res. J. **9** (1966), 17-19

[28] F. HAUSDORFF, Summationsmethoden und Momentfolgen, I, Math. Z. **9** (1921), 74-109

[29] E. K. IFANTIS AND P. D. SIAFARIKAS, Inequalities involving Bessel and modified Bessel functions, J. Math. Analysis Applic. **147**(1) (1990), 214-227

[30] E. K. IFANTIS AND P. D. SIAFARIKAS, Bounds for modified Bessel functions, Rend. Circ. Mat. Palermo II XL (1991), 347-356

[31] L. JONES, An extension of an inequality involving modified Bessel functions, J. Math. Phys. **47** (1968), 220-221

[32] C. M. JOSHI AND S. K. BISSU, Some inequalities of Bessel and modified Bessel functions, J. Austral. Math. Soc. A **50**(2) (1991), 333-342

[33] C. M. JOSHI AND S. K. BISSU, Inequalities for some special functions, J. Computat. Appl. Math. **69**(2) (1996), 251-259

[34] P. A. KHAZRON AND I. W. SELEZNICK, Bayesian estimation of Bessel K form, Random vectors in AWGN, IEEE Signal Processing Letters, Vol. 15, 2008

[35] C. G. KOKOLOGIANNAKI, Bounds for functions involving ratios of Modified Bessel functions, J. Math. Anal. Appl. 385 (2012), 737-742

[36] A. LAFORGIA, Bounds for modified Bessel functions, J. Computat. Appl. Math. **34**(3) (1991), 263-267

[37] A. LAFORGIA AND P. NATALINI, On some Turán-type inequalities, J. Inequal. Appl. (2006), 29828

[38] A. LAFORGIA AND P. NATALINI, Turán-type inequalities for some special functions, JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math., 7 (2006) article 22

[39] A. LAFORGIA AND P. NATALINI, Inequalities and Turánians for some special functions, S. Elaydi (Ed.) *et al.*, Difference Equations, Special Functions and Orthogonal Polynomials, Proceedings of the International Conference, Munich, Germany, July 25–30, 2005, World Scientific, Hackensack, NJ (2007), 422–431

[40] A. LAFORGIA AND P. NATALINI, Some inequalities for modified Bessel functions, J. Inequal. Appl. 2010 (2010), 253035

[41] L. LORCH, Inequalities for some Whittaker functions, Arch. Math. (Brno) **3** (1967), 1-9

[42] L. LORCH, Monotonicity of the zeros of a cross product of Bessel functions, Math. Applic. Analysis **1**(1), (1994), 75-80

[43] A. LUSHNIKOV AND J. S. BHATT AND I. G. FORD, Stochastic approach to chemical kinetics in ultrafine aerosols, Aerosol Science 34 (2003), 1117-1133

[44] K. S. MILLER AND S. G. SAMKO, Completely monotonic functions, Integr.Transf. Special Funct. **12**(4) (2001), 389-402

[45] I. NASELL, Inequalities for modified Bessel functions, Math. Comp. **28** (1974), 253-256

[46] I. NASELL, Rational bounds for ratios of modified Bessel functions, SIAM J. Math. Analysis **9**(1) (1978), 1-11

[47] E. NEUMAN, Inequalities involving modified Bessel functions of the first kind, J. Math. Analysis Applic. **171**(2) (1992), 532-536

[48] R. B. PARIS, An inequality for the Bessel function $J_\nu(\nu x)$, SIAM J. Math. Analysis **15**(1) (1984), 203-205

[49] R. PENFOLD AND J.-M. VANDEN-BROECK AND S.GRANDISON, Monotonicity of some modified Bessel function products, Integ. Transf. Special Funct. **18** (2007), 139-144

[50] E. PETROPOULOU, Bounds for ratios of modified Bessel functions, Integ. Transf. Special Funct. **9**(4) (2000), 293-298

[51] R. S. PHILLIPS AND H. MALIN, Bessel function approximants, American Journal of Mathematics, Vol. 72, No. 2 (1950), 407-418

[52] D. O. REUDINK, On the signs of the ν-derivatives of the modified Bessel functions $I_\nu(x)$ and $K_\nu(x)$, J. Res. Nat. Bur. Standards B **72** (1968), 279-280

[53] C. ROBERT, Modified Bessel functions and their applications in probability and statistics, Statist. Prob. Lett. **9**(2) (1990), 155-161

[54] D. K. ROSENTHAL, The shape and stability of a bubble at the axis of a rotating liquid, J. Fluid. Mech. **12** (1962), 358-366

[55] D. K. ROSS, The stability of a column of liquid to torsial oscillations, Z. Angrew. Math. Phys. **21** (1970), 137-140

[56] D. K. ROSS, Problem 72-15, Inequalities for special functions, SIAM Rev. **15** (1973), 668-670

[57] J. SEGURA, Bounds for ratios of modified Bessel functions and associated Turán-type inequalities, J. Math. Anal. Appl. 374 (2011), 516-528

[58] H. C. SIMPSON AND S. J. SPECTOR, Some monotonicity results for ratios of modified Bessel functions, Q. Appl. Math. **42**(1) (1984), 95-98

[59] H. C. SIMPSON AND S. J. SPECTOR, On barreling for a special material in finite elasticity, Q. Appl. Math. **42**(1) (1984), 99-105

[60] S. M. SITNIK, Inequalities for Bessel functions, Dokl. Acad. Nauk SSSR **340**(1) (1995), 29-32

[61] J. M. DE SITTER AND M. J. GOOVAERTS, On two inequalities satisfied by Bessel functions, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin **46** (1972), 159-164

[62] R. P. SONI, On an inequality for modified Bessel functions, J. Math. Phys. **44** (1965), 406-407

[63] V. K. THIRUVENKATACHAR AND T. S. NANJUNDIAH, Inequalities concerning Bessel functions and orthogonal polynomials, Proc. Indian Nat. Acad. Part A 33 (1951), 373–384

[64] G. S. WATSON, Statistics on spheres (John Wiley & Sons, New York, 1983)

[65] G. N. WATSON, A treatise on the theory of Bessel functions (Cambridge University Press, 1944)

[66] E. J. WENIGER AND J. CIZEK, Rational approximations for the modified Bessel function of the second kind, Comput. Phys. Commun. **59**(3) (1990), 471-493

[67] D. V. WIDDER, The Laplace transform, (Princeton University Press, 1941)