ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ ΓΕΩΔΑΙΣΙΑΚΕΣ ΚΑΜΠΥΛΕΣ ΣΕ ΠΟΛΛΑΠΛΟΤΗΤΕΣ ΣΗΜΑΙΩΝ

Νικόλαος Παναγιώτης Σουρής

Επιβλέπων: Επίκουρος Καθηγητής Ανδρέας Αρβανιτογεώργος

Πάτρα 2012

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Στην παρούσα εργασία θα μελετήσουμε κάποιες συνθήκες υπό τις οποίες συγκεκριμένες κλάσεις πολλαπλοτήτων σημαιών (flag manifolds) δέχονται ομογενείς ισογεωδαισιακές καμπύλες.
Μια **λεία πολλαπλότητα** M διάστασης n είναι ένας Hausdorff και 2ος αριθμήσιμος τοπολογικός χώρος, τοπικά ομοιομορφικός με έναν Ευκλείδιο χώρο $\mathbb{R}^n$, εφοδιασμένος με μια διαφορική δομή. Ένα παράδειγμα τέτοιου χώρου είναι μια επιφάνεια στο $\mathbb{R}^3$ που αποτελεί λεία πολλαπλότητα διάστασης 2. Ο εφοδιασμός μιας λείας πολλαπλότητας M με μια μετρική g στον εφαπτόμενο χώρο κάθε σημείου της επιτρέπει την εισαγωγή γεωμετρικών ιδιοτήτων στην M. (μήκη καμπυλών, καμπυλότητα κλπ.).
Μια σημαντική κλάση καμπυλών σε μια πολλαπλότητα M είναι οι **γεωδαισιακές καμπύλες** που έχουν την ιδιότητα να ελαχιστοποιούν την απόσταση μεταξύ δύο αρκετά κοντινών σημείων της M. Επιπλέον, δεδομένου ενός σημείου p μιας πολλαπλότητας M και εφαπτόμενου διανύσματος v στο p, υπάρχει μοναδική γεωδαισιακή καμπύλη διερχόμενη από το p με κατεύθυνση το v.
Μια **ομάδα Lie** G είναι μια λεία πολλαπλότητα με δομή ομάδας, τέτοια ώστε οι πράξεις του πολλαπλασιασμού και αντιστροφής να είναι διαφορίσιμες. Μια τέτοια ομάδα είναι και η μοναδιαία σφαίρα S^1. Βασικό χαρακτηριστικό των ομάδων Lie είναι ότι η γεωμετρία τους παραμένει αναλλοίωτη σε όλα τα σημεία τους. Συνεπώς, η μελέτη της γεωμετρίας μιας ομάδας Lie G ανάγεται στην μελέτη της γεωμετρίας σε μια περιοχή του ουδετέρου στοιχείου της e, και συγκεκριμένα, στην μελέτη της **άλγεβρας Lie** $\mathfrak{g}$, δηλαδή τον εφαπτόμενο διανυσματικό χώρο της G στο e.
Οι πολλαπλότητες που γενικεύουν αυτή την ιδιότητα ονομάζονται **ομογενείς χώροι**. Ένας ομογενής χώρος είναι μια λεία πολλαπλότητα M στην οποία δρα με συγκεκριμένο τρόπο μια ομάδα Lie G. Η G ορίζει μια γεωμετρία στην M που είναι αναλλοίωτη σε κάθε σημείο της M. Αυτό επιτυγχάνεται με τον

ορισμό των G-**αναλλοίωτων μετρικών** στον ομογενή χώρο M. Στην περίπτωση που η G είναι συμπαγής και ημιαπλή, ο ομογενής χώρος M ονομαζεται **πολλαπλότητα σημαιών**.

Στο [12] οι O.Kowalski και J.Szenthe αποδεικνύουν ότι κάθε ομογενής χώρος M δέχεται **ομογενείς γεωδαισιακές καμπύλες**, δηλαδή γεωδαισιακές που αποτελούν τροχιές, μέσω της δράσης της G στην M, μιας κατηγορίας υποομάδων της G που ονομάζονται μονοπαραμετρικές υποομάδες. Επιπλέον στο [11], οι O.Kowalski και L.Vanhecke διατυπώνουν και αποδεικνύουν μια ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε μια καμπύλη να είναι ομογενής γεωδαισιακή σε έναν ομογενή χώρο εφοδιασμένο με μια $G-$αναλλοίωτη μετρική g (θεώρημα **5.5.1**). Στην παρούσα εργασία θα μελετήσουμε την ύπαρξη **ισογεωδαισιακών καμπυλών** σε πολλαπλότητες σημαιών, δηλαδή καμπυλών που είναι ομογενείς γεωδαισιακές ανεξάρτητα της G-αναλλοίωτης μετρικής που θα ορίσουμε στην πολλαπλότητα.

Τα κύρια αποτελέσματα της παρούσας εργασίας βασίζονται στις εργασίες [14], [15] των N.Cohen, L.Grama, C.Negreiros. Γίνεται χαρακτηρισμός των ισογεωδαισιακών καμπυλών στις πολλαπλότητες σημαιών τύπου A_l, καθώς επίσης και στις πολλαπλότητες σημαιών με δύο ισοτροπικούς προσθετέους. Το θέμα είναι ανοικτό για μελέτη σε πολλαπλότητες σημαιών διάφορες των κατηγοριών A_l, G_2, ή άνω των δύο ισοτροπικών προσθετέων.

Κεφάλαιο 2

Διαφορίσιμες Πολλαπλότητες και Γεωμετρία Riemann

Σε αυτό το κεφάλαιο θα εισάγουμε την έννοια της διαφορίσιμης πολλαπλότητας ως ένα σύνολο τοπικά ομοιομορφικό με έναν Ευκλείδιο χώρο. Μια διαφορίσιμη πολλαπλότητα εφοδιασμένη με μια μετρική στον εφαπτόμενο χώρο της λέγεται πολλαπλότητα Riemann και η ύπαρξη μιας τέτοιας μετρικής οδηγεί στη μελέτη γεωμετρικών ιδιοτήτων της πολλαπλότητας (μέτρηση αποστάσεων, εμβαδό, καμπυλότητες). Το κατα πόσο αποκλίνει η πολλαπλότητα από τον Ευκλείδειο χώρο μετράται με τις συναρτήσεις του Christoffel (στην περίπτωση του $\mathbb{R}^n$ οι συναρτήσεις αυτές μηδενίζονται). Ιδιαίτερη γεωμετρική σημασία έχουν οι γεωδαισιακές καμπύλες της πολλαπλότητας ως καμπύλες που ελαχιστοποιούν τοπικά την απόσταση μεταξύ δύο σημείων της (στην περίπτωση των ευκλείδιων χώρων οι γεωδαισιακές καμπύλες ταυτίζονται με τις ευθείες του χώρου). Σημαντικό ρόλο για την ύπαρξη αυτών των καμπυλών έχει η συνοχή Levi Civita, ως παραγώγιση στο σύνολο των διανυσματικών πεδίων της πολλαπλότητας που είναι χαρακτηριστική για την εκάστοτε μετρική της.

2.1 Διαφορίσιμες Πολλαπλότητες

Ορισμός 2.1.1. *Μια n-διάστατη διαφορίσιμη πολλαπλότητα M είναι ένας χώρος Hausdorff και 2ος αριθμήσιμος εφοδιασμένος με μια διαφορική δομή, δηλαδή μια οικογένεια $\{U_a, \phi_a\}$ όπου $\phi_a : U_a \subset \mathbb{R}^n \to M$ είναι ομοιομορφισμός επί του $\phi_a(U_a)$ και U_a είναι ανοικτό στον $\mathbb{R}^n$ με τις εξής ιδιότητες:*

1. $\bigcup_a \phi_a(U_a) = M$

2.Για κάθε a, b *με* $\phi_a(U_a) \cap \phi_b(U_b) = V, V \neq \emptyset$, *τα* $\phi_a^{-1}(V), \phi_b^{-1}(V)$ *είναι ανοικτά στον* $\mathbb{R}^n$ *και η απεικόνιση* $\phi_b^{-1} \circ \phi_a : \phi_a^{-1}(V) \to \phi_b^{-1}(V)$ *είναι διαφορίσιμη.*

Το ζεύγος (U_a, ϕ_a) ονομάζεται σύστημα συντεταγμένων ή παραμέτρηση της M στο $p \in U_a$. Επιπλέον, από τον παραπάνω ορισμό έχουμε οτι για κάθε $p \in M$ υπάρχει $V_a \subset M$ και V_a ανοικτο στο M με $p \in V_a$ και $V_a = {\phi_a}^{-1}(U_a)$ για κάποιο a. Το ζεύγος (V_a, ϕ_a^{-1}) ονομάζεται τοπικός χάρτης της M στο p και το σύνολο $A = \{V_a, \phi_a^{-1}\}$ ονομάζεται άτλαντας της M. Για κάθε $p \in M$ έχουμε $\phi_a^{-1}(p) = (x_1(p), ..., x_n(p))$ όπου x_i είναι οι συναρτήσεις συντεταγμένων του $\mathbb{R}^n$. Άρα μια διαφορίσιμη πολλαπλότητα είναι ένας τοπολογικός χώρος τοπικά ομοιομορφικός με έναν Ευκλείδειο χώρο έτσι ώστε σε κάθε σημείο του η συνάρτηση αλλαγής συντεταγμένων $\phi_b^{-1} \circ \phi_a : \phi_a^{-1}(V) \to \phi_b^{-1}(V)$ να είναι διαφορίσιμη απεικόνιση Ευκλείδειων χώρων.

Μια πολλαπλότητα μπορεί να επιδέχεται περισσότερες από μία διαφορικές δομές.

2.2 Διαφορίσιμες απεικονίσεις -Εφαπτόμενος χώρος

Γνωρίζουμε ότι μια απεικόνιση μεταξύ Ευκλείδιων χώρων $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ είναι διαφορίσιμη αν και μόνο αν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$ κάθε τάξης και είναι συνεχείς. Η έννοια της διαφορισιμότητας επεκτείνεται στις πολλαπλότητες ως εξής:

Ορισμός 2.2.1. *Έστω* M, N *διαφορίσιμες πολλαπλότητες διάστασης* m, n *αντίστοιχα. Η απεικόνιση* $f : M \to \mathbb{R}^k$ *ονομάζεται λεία ή διαφορίσιμη αν για οποιαδήποτε παραμέτρηση* ϕ_a *της* M *η απεικόνιση* $f \circ \phi_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ *είναι λεία απεικόνιση Ευκλείδιων χώρων.*
Αντίστοιχα η απεικόνιση $f : M \to N$ *ονομάζεται λεία ή διαφορίσιμη αν για οποιεσδήποτε παραμετρήσεις* $(U_a, \phi_a), (V_b, \psi_b)$ *των* M, N *αντίστοιχα με* $f(\phi_a(U_a)) \cap \psi_b(V_b) \neq \emptyset$, *η απεικόνιση* $\psi_b^{-1} \circ f \circ \phi_a : U_a \to V_b$ *είναι διαφορίσιμη απεικόνιση Ευκλείδιων χώρων.*

Παρατήρηση:Με τον παραπάνω ορισμό αποδεικνύεται ότι η σύνθεση λείων απεικονίσεων μεταξύ πολλαπλοτήτων είναι λεία απεικόνιση.

Ορισμός 2.2.2. *Μια λεία απεικόνιση f μεταξύ πολλαπλοτήτων ονομάζεται αμφιδιαφόριση αν είναι 1-1,επί και η αντίστροφη f^{-1} είναι λεία.*

Μέσω μιας αμφιδιαφόρισης ταυτίζουμε τοπικά τις διαφορικές δομές δύο πολλαπλοτήτων.
Επιπλέον,από τους ορισμούς **2.1.1, 2.2.1** βλέπουμε ότι κάθε χάρτης ϕ της M αποτελεί μια αμφιδιαφόριση της M με τον $\mathbb{R}^n$ διότι οι $\phi_a^{-1} \circ \phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\phi^{-1} \circ \phi_a$ είναι λείες απεικονίσεις Ευκλείδειων χώρων. Άρα οι ϕ, ϕ^{-1} είναι λείες. Οπότε μια πολλαπλότητα είναι τοπικά αμφιδιαφορική με έναν Ευκλείδειο χώρο.

Περνάμε στην έννοια της καμπύλης σε πολλαπλότητες καθώς και σε αυτήν του εφαπτόμενου διανύσματος που δίνεται ως εφαπτόμενο διάνυσμα αντίστοιχων καμπυλών.

Ορισμός 2.2.3. *Μια καμπύλη στην πολλαπλότητα M είναι μια διαφορίσιμη απεικόνιση $\gamma : I \to M$ όπου I είναι ανοικτό διάστημα του $\mathbb{R}$.*

Έστω $x_1, ..., x_n$ οι συναρτήσεις συντεταγμένων του $\mathbb{R}^n$, δηλαδή αν $r = (r_1, ..., r_n) \in \mathbb{R}^n$, έχουμε $x_i(r) = r_i$.
Λόγω της διαφορισιμότητας των χαρτών ϕ, αν $\gamma(t), t \in I$ είναι μια καμπύλη στην M τότε η $\phi \circ \gamma : I \to \mathbb{R}^n$ με $\phi(\gamma(t)) = (x_1(t), ..., x_n(t))$ αποτελεί καμπύλη στο $\mathbb{R}^n$.

Τώρα ας συμβολίσουμε με $F(M)$ το σύνολο των λείων συναρτήσεων $f : M \to \mathbb{R}$. Για το $p \in M$ θεωρούμε τον τοπικό χάρτη $\phi = (\phi_1, ..., \phi_n)$, με $\phi_i = x_i \circ \phi$ και το αντίστοιχο σύστημα συντεταγμένων ϕ^{-1}.
Τότε $p = \phi^{-1}(q)$, όπου $q = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$.
Έτσι έχουμε $f(p) = f \circ \phi^{-1}(q) = f \circ \phi^{-1}(x_1, ..., x_n)$ με $f \circ \phi^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Αν επιπλέον γ είναι καμπύλη στην M με $\gamma(0) = p$ τότε η απεικόνιση $\alpha = \phi \circ \gamma$ με $\alpha(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$ είναι καμπύλη στον $\mathbb{R}^n$.
Έστω $\dot{\alpha}(0)$ το εφαπτόμενο διάνυσμα της α στο $t = 0$ και υπολογίζουμε την παράγωγο της $f \circ \phi^{-1}$ στην κατεύθυνση του $\dot{\alpha}(0)$:

Είναι $\dot{\alpha}(0)(f \circ \phi^{-1}) = \frac{d}{dt}(f \circ \phi^{-1})(\alpha(t)) \big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(f \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ \gamma(t)) \,|_{t=0}$

$= \frac{d}{dt}(f \circ \gamma(t)) \,|_{t=o}$.

Ορίζουμε την απεικόνιση $\dot\gamma(0) : F(M) \to \mathbb{R}$, με $\dot\gamma(0)f = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma(t)) \mid_{t=o}$. Η απεικόνιση $\dot\gamma(0)$ ονομάζεται **εφαπτόμενο διάνυσμα** της καμπύλης $\gamma(t)$ στο σημείο της $\gamma(0) = p$.

Επίσης εχουμε $\frac{d}{dt}(f \circ \phi^{-1})(\alpha(t)) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(f \circ \phi^{-1})(x_1(t), ..., x_n(t)) \mid_{t=0}$

$= \sum_{i=1}^{n} \dot x_i(0) \frac{\partial f \circ \phi^{-1}}{\partial x_i} \Big|_{t=0} = \sum_{i=1}^{n} \dot x_i(0) \frac{\partial}{\partial \phi_i} \mid_p (f)$,

όπου $\frac{\partial}{\partial \phi_i} \mid_p : F(M) \to \mathbb{R}$ με $\frac{\partial}{\partial \phi_i} \mid_p (f) = \frac{\partial}{\partial x_i} \mid_{t=0} (f \circ \phi^{-1})$

είναι το εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης ϕ_i στην M.

Έτσι έχουμε $\dot\gamma(0) = \sum_{i=1}^{n} \dot x_i(0) \frac{\partial}{\partial \phi_i} \mid_p$.

Ο παραπάνω ορισμός, μέσω της λείας μετάβασης των ϕ_a, αποδεικνύεται ανεξάρτητος των τοπικών παραμετρήσεων στο $p \in M$. Σημειώνουμε επίσης οτι κάθε εφαπτόμενο διάνυσμα u_p στο p είναι γραμμική απεικόνιση στο $F(M)$ και ισχύει ο κανόνας Leibnitz, δηλαδή $u_p(fg) = u_p(f)g(p) + f(p)u_p(g)$

Ορισμός 2.2.4. *Εφαπτόμενος χώρος της M στο p είναι ο διανυσματικός χώρος $T_pM = \{\dot\gamma(0) : \gamma : I \to M, \gamma(0) = p\}$*

Έχοντας ορίσει εφαπτόμενο χώρο μπορούμε να ορίσουμε το διαφορικό απεικόνισης ως εξής:

Ορισμός 2.2.5. *Έστω $f : M_1 \to M_2$ μια λεία απεικόνιση μεταξύ των πολλαπλοτήτων M_1, M_2. Διαφορικό της f στο $p \in M$ ονομάζεται η απεικόνιση $df_p : T_pM_1 \to T_f(p)M_2$, με $df_p(\dot\gamma(0)) = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma(t)) \mid_{t=0}$*

Ουσιαστικά το διαφορικό μιας λείας απεικόνισης είναι η γραμμική συνάρτηση που απεικονίζει το εφαπτόμενο διάνυσμα στο p της καμπύλης $\gamma(t)$ στην M_1 στο εφαπτόμενο διάνυσμα στο $f(p)$ της καμπύλης $f \circ \gamma(t)$ στην M_2.
Σημειώνουμε ότι μέσω του θεωρήματος αντίστροφης απεικόνισης αποδεικνύεται ότι αν η f είναι αμφιδιαφόριση μεταξύ πολλαπλοτήτων, το διαφορικό της, df είναι ισομορφισμός των αντίστοιχων εφαπτόμενων χώρων.

2.3 Διανυσματικά πεδία

Ορισμός 2.3.1. *Ένα διανυσματικό πεδίο σε μια πολλαπλότητα M είναι μια απεικόνιση X που σε κάθε $p \in M$ αντιστοιχεί ένα εφαπτόμενο διάνυσμα $X_p \in$*

T_pM.

Ένα διανυσματικό πεδίο είναι απεικόνιση που ορίζεται τοπικά ως προς ένα σύστημα συντεταμένων στο $p \in M$. Έστω $\phi = (x_1, ..., x_n)$ χάρτης στην M. Βασικά διανυσματικά πεδία θεωρούμε τα $\frac{\partial}{\partial x_i}$ με τιμή στο $p \in M$ το διάνυσμα $\frac{\partial}{\partial x_i}|_p \in T_pM$.

Αν X, Y είναι διανυσματικά πεδία στην M θεωρούμε το διανυσματικό πεδίο $X + Y$ με $(X + Y)(p) = X_p + Y_p$ και για $a \in \mathbb{R}$ το aX με $aX(p) = aX_p$.
Έτσι μπορούμε να εκφράσουμε καθε διανυσματικό πεδίο σαν γραμμικό συνδυασμό των βασικών διανυσματικών πεδίων ως $X = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ όπου $a_i : M \to \mathbb{R}$ με $X_p = \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}|_p$.

Αν $f \in F(M)$, θεωρούμε την πραγματική συνάρτηση Xf με $Xf(p) = X_pf$. Θεωρούμε το πεδίο X **λείο** αν και μόνο αν η συνάρτηση Xf είναι λεία για οποιαδήποτε $f \in F(M)$.
Έστω $X(M)$ το σύνολο των λείων διανυσματικών πεδίων στην M. Σύμφωνα με τα παραπάνω το $X(M)$ είναι διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{R}$. Θεωρούμε τις εξής πράξεις:

$+ : X(M) \times X(M) \to X(M)$, με $+(X, Y) \to X + Y$

και $m : F(M) \times X(M) \to X(M)$, με $m(f, X) = fX$,
έτσι ώστε $(fX)(p) = f(p)X_p$.

Έτσι το σύνολο $X(M)$ αποκτά επιπλέον δομή ενός $F(M)$-προτύπου.

Ορισμός 2.3.2. *Μια παραγώγιση στο $F(M)$ είναι μια γραμμική απεικόνιση $D : F(M) \to F(M)$ που ικανοποιεί τον κανόνα Leibnitz δηλαδή $D(fg) = D(f)g + fD(g)$.*

Με τον παραπάνω ορισμό βλέπουμε ότι κάθε διανυσματικό πεδίο X αποτελεί μια παραγώγιση στο $F(M)$.

Ορισμός 2.3.3. *Έστω $X, Y \in X(M)$. Το γινόμενο Lie $[X, Y]$ των X, Y είναι το λείο διανυσματικό πεδίο που ορίζεται ως $[X, Y](p) = [X_p, Y_p]$, με $([X, Y]f)(p) = X_p(fY) - Y_p(fX)$.*

Πρόταση 2.3.1. *Για το γινόμενο Lie $[X, Y]$ ισχύουν:*
1)Είναι αντισυμμετρικό, δηλαδή $[X, Y] = -[Y, X]$

2)Είναι $\mathbb{R}$-διγραμμικό, δηλαδή $[aX+bY,Z]=a[X,Z]+b[Y,Z]$ για κάθε $a,b\in\mathbb{R}$
3)Πληρεί την εξίσωση Jacobi, δηλαδή $[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0$

Η απόδειξη των ιδιοτήτων προκύπτει άμεσα από την εφαρμογή του ορισμού του γινομένου Lie.

Ορισμός 2.3.4. *Ένας διανυσματικός χώρος εφοδιασμένος με γινόμενο Lie ονομάζεται άλγεβρα Lie.*

Συμπεραίνουμε ότι ο χώρος $X(M)$ αποτελεί μια άλγεβρα Lie επί του $\mathbb{R}$.

2.4 Τοπικές ροές διανυσματικών πεδίων

Είδαμε ότι κάθε λείο διανυσματικό πεδίο X αντιστοιχίζει σε κάθε σημείο p της πολλαπλότητας M ένα εφαπτόμενο διάνυσμα του T_pM. Το παρακάτω θεώρημα εξασφαλίζει την ύπαρξη λείων καμπυλών στην M που ακολουθούν την ροή του X, δηλαδή το εφαπτόμενο διάνυσμα σε κάθε σημείο μιας τέτοιας καμπύλης είναι ένα διάνυσμα του πεδίου X.

Θεώρημα 2.4.1. *Έστω M πολλαπλότητα, $p\in M$ και $X\in X(M)$. Υπάρχει ανοικτή περιοχή U του p στην M, διάστημα $(-\epsilon,\epsilon)\subset\mathbb{R}$ και μια λεία απεικόνιση $\phi:(-\epsilon,\epsilon)\times U\to M$ τέτοια ώστε η καμπύλη $\gamma:(-\epsilon,\epsilon)\to M$, με $\gamma(t)=\phi(t,q), q\in U$ να είναι η μοναδική καμπύλη τέτοια ώστε $\frac{\partial\gamma}{\partial t}=X_{\gamma(t)}$ και $\gamma(0)=q$, για κάθε $q\in U$.*

Επομένως για κάθε σημείο p της M υπάρχει οικογένεια καμπυλών τέτοια ώστε για κάθε σημείο q εντός κατάλληλης γειτονιάς του p να μπορούμε να βρούμε καμπύλη με αρχή το q της οποίας το εφαπτόμενο διάνυσμα σε κάθε σημείο $\gamma(t)$ να συμπίπτει με την τιμη του πεδίου X σε αυτό, $X_{\gamma(t)}$. Οι παραπάνω απεικονίσεις ϕ ονομάζονται **ολοκληρωτικές** καμπύλες του X, ενώ οι καμπύλες $\gamma(t)$ ονομάζονται **τροχιές** του X που διέρχονται απ'το q.
Τώρα,για $t\in(-\epsilon,\epsilon)$, θεωρούμε την απεικόνιση $\phi_t:U\to M$, με $\phi_t(q)=\phi(t,q)$.
Η ϕ_t ονομάζεται τοπική ροή του X.
Η ύπαρξη και μοναδικότητα των καμπυλών αυτών προκύπτει από τη θεωρία των συνήθων διαφορικών εξισώσεων.

Πρόταση 2.4.1. *Για τις τοπικές ροές ισχύουν τα εξής: 1)$\phi_t\circ\phi_s=\phi_{s+t}$*
2)$\phi_t^{-1}=\phi_{-t}$
για κάθε $s,t\in(-\epsilon,\epsilon)$

Απόδειξη. Η πρώτη σχέση προκύπτει ως εξής: Αν σταθεροποιήσουμε ένα $s \in (-\epsilon, \epsilon)$, η $\phi_t \circ \phi_s(q) = \phi(t, \phi(s, q))$ είναι η μοναδική τοπική ροή του X η οποία για $t = 0$ διέρχεται απ' το $\phi(s, q) \in M$. Επιπλέον για την ροή ϕ_{s+t} είναι $\phi_{s+t}(q) = \phi(s + t, q)$, δηλαδή για $t = 0$ διέρχεται επίσης απ' το $\phi(s, q)$. Λόγω της μοναδικότητας έχουμε την πρώτη ισότητα.

Για την δεύτερη σχέση έχουμε: $\phi_t^{-1} \circ \phi_t = \mathrm{Id}_U$, όπου Id_U είναι η ταυτοτική απεικόνιση στην ανοικτή περιοχή U. Επομένως για κάθε $q \in U$ ισχύει
$\phi_t^{-1} \circ \phi_t(q) = q = \phi(0, q) = \phi_0(q)$. Λόγω της πρώτης σχέσης, αν $\phi_t^{-1} = \phi_s$ για κάποιο s, έχουμε $\phi_{s+t} = \phi_s \circ \phi_t = \phi_t^{-1} \circ \phi_t = \phi_0$ και λόγω της μοναδικότητας των ροών είναι $s + t = 0$, συνεπώς $s = -t$. Άρα $\phi_t^{-1} = \phi_s = \phi_{-t}$. □

Ισχύει η παρακάτω πρόταση:

Πρόταση 2.4.2. *Έστω $X, Y \in X(M), p \in M$ και ϕ_t η τοπική ροή του X στο p.*
Τότε $[X, Y](p) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[Y - d\phi_t Y](\phi_t(p))$

(Για μια απόδειξη του παραπάνω βλ.[8] σελ.28)

2.5 Η εφαπτόμενη δέσμη

Είδαμε ότι σε κάθε σημείο μιας πολλαπλότητας M ορίζεται ο χώρος T_pM. Το σύνολο $TM = \bigcup \{T_pM : p \in M\} = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_pM$ ονομάζεται εφαπτόμενη δέσμη της M. Θα αποδείξουμε ότι το TM επιδέχεται δομή λείας πολλαπλότητας. Η εφαπτόμενη δέσμη ανήκει σε μια κατηγορία συνόλων που ονομάζονται διανυσματικές δέσμες. Ένα τέτοιο σύνολο είναι τοπικά αμφιδιαφορικό με το γινόμενο $M \times \mathbb{R}^{\dim M}$ και όπως θα δούμε η διάσταση της πολλαπλότητας TM ισούται με $2 \dim M$. Ο λόγος για τον ορισμό ενός τέτοιου συνόλου είναι ότι περιέχει πολλές πληροφορίες για την γεωμετρία της M. Με τη χρήση της εφαπτόμενης δέσμης ορίζεται το εξής:
Αν $f : M \to N$ διαφορίσιμη απεικόνιση πολλαπλοτήτων μπορούμε να ορίσουμε την παράγωγο $Df : TM \to TN$ με $Df(p, X_p) = (f(p), df_p(X_p))$.

Αφού ορίσουμε τοπολογία στην TM, θα αποδείξουμε ότι είναι χώρος Hausdorff και 2ος αριθμήσιμος και έπειτα θα καθορίσουμε τη λεία δομή της.

Αρχικά θεωρούμε την προβολή $\pi : TM \to M$ με $\pi(p, X_p) = p$. Εαν U είναι υποσύνολο της M, θεωρούμε το $\pi^{-1}(U)$ ανοικτό στην TM αν και μόνο αν το

U είναι ανοικτό στην M. Θα αποδείξουμε ότι η TM είναι χώρος Hausdorff και 2ος αριθμήσιμος:
Έστω $(p, X_p), (q, X_q) \in TM$. Για τα $p, q \in M$ υπάρχουν $U_p, U_q \subset M$, αντίστοιχες ανοικτές περιοχές, με $U_p \cap U_q = \emptyset$. Τότε προφανώς $\pi^{-1}(U_p) \cap \pi^{-1}(U_q) = \emptyset$. Άρα τα $(p, X_p), (q, X_q)$ μπορούν να διαχωριστούν.
Έστω τώρα $\{U_a, \phi_a\}, \phi_a = (x_1, .., x_n)$ άτλαντας της M. Επιλέγουμε μια αριθμήσιμη βάση U_i της M. Τότε για κάθε U_a υπάρχει επιλογή $U_{a_i} \subset U_a$, συνεπώς και τα U_a είναι αριθμήσιμα το πλήθος. Δεδομένου ότι $TM = \bigcup_a \pi^{-1}(U_a)$ και ότι $\pi^{-1}(U_a) \cong \phi_a(U_a) \times \mathbb{R}^n \cong V \subset \mathbb{R}^{2n}$, έχουμε ότι η TM είναι 2ος αριθμήσιμος καθώς ο R^{2n} είναι 2ος αριθμήσιμος.

Τώρα θα ορίσουμε μια λεία δομή στην TM:
Έστω $B = \left\{\pi^{-1}(U_a), \bar{\phi_a}\right\}$, με $\bar{\phi_a} : \pi^{-1}(U_a) \subset TM \to \mathbb{R}^{2n}$, όπου $\bar{\phi_a}(p, X_p) = (x_1(p), ..., x_n(p), a_1, ..., a_n)$, με $a_i \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $X_p = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i}|_p$. Θα αποδείξουμε ότι το B είναι λείος άτλαντας της TM:
Αρχικά ισχύει ότι $TM = \bigcup_a \pi^{-1}(U_a)$. Επιπλέον, επειδή κάθε διάνυσμα X_p γράφεται κατά μοναδικό τρόπο στη μορφή $X_p = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i}|_p$ ως προς το σύστημα συντεταγμένων $\phi_a = (x_1, .., x_n)$ και σε συνδυασμό με το γεγονός ότι κάθε ϕ_a είναι ομοιομορφισμός επί του $\mathbb{R}^n$, έχουμε ότι η $\bar{\phi_a}$ είναι ομοιομορφισμός επί του $\phi_a(U_a) \times \mathbb{R}^n$ με αντίστροφη την $\bar{\phi_a}^{-1} : \phi_a(U_a) \times \mathbb{R}^n \to TM$ με $\bar{\phi_a}^{-1}(x_1(p), ..., x_n(p), a_1, ..., a_n) = (p, \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i}|_p)$. Μένει να ελέγξουμε τη λεία συμβατότητα των χαρτών:

Έστω $(\pi^{-1}(U_a), \bar{\phi_a})$ και $(\pi^{-1}(U_b), \bar{\phi_b}) \in B$, με $\pi^{-1}(U_a) \cap \pi^{-1}(U_b) \neq \emptyset$.

Για $p \in U_a \cap U_b$ και $X_p \in T_pM$ έχουμε $X_p = \sum_i a^i \frac{\partial}{\partial x_i^a}|_p = \sum_j b^j \frac{\partial}{\partial x_j^b}|_p$

ως προς τα συστήματα $\phi_a = (x_1^a, ..., x_n^a)$ και $\phi_b = (x_1^b, ..., x_n^b)$.

Είναι $X_p(x_k^a) = a^k = \sum_j b^j \frac{\partial x_k^a}{\partial x_j^b}|_p$ και $X_p(x_k^b) = b^k = \sum_i b^i \frac{\partial x_k^b}{\partial x_i^a}|_p$,

άρα για την $\bar{\phi_b} \circ \bar{\phi_a}^{-1} : \phi_a(U_a \cap U_b) \times \mathbb{R}^n \to \phi_b(U_a \cap U_b) \times \mathbb{R}^n$ είναι:

$\bar{\phi_b} \circ \bar{\phi_a}^{-1} : (x_1^a, ..., x_n^a, a^1, ..., a^n) \mapsto (\phi_b \circ \phi_a^{-1}(x_1^a, ..., x_n^a), b^1, ..., b^n)$, με

$b^k = \sum_i b^i \frac{\partial x_k^b}{\partial x_i^a}|_p$

Άρα η $\bar{\phi_b} \circ \bar{\phi_a}^{-1}$ είναι λεία. Όμοια και η $\bar{\phi_a} \circ \bar{\phi_b}^{-1}$.
Συνεπώς έχουμε το ζητούμενο.

2.6 Πολλαπλότητες Riemann

Όπως και στην περίπτωση των επιφανειών στον $\mathbb{R}^3$, έτσι και σε μια πολλαπλότητα M, η ύπαρξη μετρικής στον εφαπτόμενο χώρο T_pM στο $p \in M$ επιτρέπει την εισαγωγή γεωμετρικών χαρακτηριστικών και ιδιοτήτων της πολλαπλότητας και τον υπολογισμό μεγεθών όπως μήκη καμπυλών, καμπυλότητα κλπ. Μια πολλαπλότητα Riemann είναι μια λεία πολλαπλότητα εφοδιασμένη με μια λεία μετρική στον εφαπτόμενο χώρο της σε κάθε σημείο. Αποδεικνύεται ότι κάθε λεία πολλαπλότητα μπορεί να εφοδιαστεί με μια λεία μετρική που την καθιστά πολλαπλότητα Riemann.

Ορισμός 2.6.1. *Μια πολλαπλότητα Riemann (M, g) είναι μια λεία πολλαπλότητα M εφοδιασμένη με μια λεία μετρική g στο T_pM για κάθε $p \in M$, δηλαδή ένα λείο εσωτερικό γινόμενο $g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ στον T_pM.*
Έστω $X, Y \in X(M)$. Συμβολίζουμε το $g_p(X_p, Y_p) = \langle X_p, Y_p\rangle$ με $\langle X, Y\rangle_p$

Τώρα, αν $p \in M$ και $\phi = (x_1, ..., x_n)$ είναι ένας τοπικός χάρτης στο p έχουμε για $X_p, Y_p \in T_pM$:

$X_p = \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}|_p$, $Y_p = \sum_{j=1}^n \beta_j \frac{\partial}{\partial x_j}|_p$ και λόγω συμμετρικότητας και διγραμμικότητας του εσωτερικού γινομένου προκύπτει ότι:

$$g_p(X_p, Y_p) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i\beta_j \langle \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i\beta_j g_{ij}(p)\,,$$

όπου $g_{ij}(p) = \langle \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial x_j}|_p\rangle$

Είναι φανερό ότι ο καθορισμός μιας μετρικής Riemann ανάγεται στον προσδιορισμό των συναρτήσεων g_{ij}. Άρα η απεικόνιση g_p αντιστοιχεί σε έναν συμμετρικό πίνακα $[g_p] = (g_{ij}(p))$ ο οποίος λόγω της μη ιδιάζουσας μορφής του εσωτερικού γινομένου είναι αντιστρέψιμος, έστω $(g^{ij}(p))$ ο αντίστροφος πίνακας.

Παράδειγμα 2.6.1. *Ο Ευκλείδιος χώρος $\mathbb{R}^n$ εφοδιασμένος σε κάθε $T_p\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$ με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο είναι μια πολλαπλότητα Riemann με*

$$g_{ij} = \langle \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial x_j}|_p\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = \delta^i_j = \begin{cases} 1, i=j \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

όπου e_i είναι η συνήθης βάση του $\mathbb{R}^n$.

$$\textit{Άρα } [g_{ij}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ & & . & & \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα 2.6.2. *Η σφαίρα $S_r^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = r^2\}$ με παραμέτρηση*

$\phi : (0,2\pi)\times(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \subset \mathbb{R}^2 \to S_r^2$, *με* $\phi(u,v) = (r\cos u\cos v, r\sin u\cos v, r\sin v)$ *και το επαγόμενο σύνηθες εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$ του $\mathbb{R}^3$ είναι πολλαπλότητα Riemann.*
Έστω $p = \phi(u,v)$. Τότε $\frac{\partial}{\partial u}|_p = (-r\sin u\cos v, r\cos u\cos v, 0)$ και

$\frac{\partial}{\partial v}|_p = (-r\cos u\sin v, -r\sin u\sin v, r\cos v)$

Άρα $g_{11} = \langle\frac{\partial}{\partial u}|_p, \frac{\partial}{\partial u}|_p\rangle = r^2\cos^2 v$

$g_{12} = g_{21} = \langle\frac{\partial}{\partial u}|_p, \frac{\partial}{\partial v}|_p\rangle = 0$

$g_{22} = \langle\frac{\partial}{\partial v}|_p, \frac{\partial}{\partial v}|_p\rangle = r^2$

Επομένως, η μετρική στον T_pS^2 εκφράζεται ως $[g] = \begin{pmatrix} r^2\cos^2 v & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$

Ορισμός 2.6.2. *Έστω $(M,g),(N,h)$ πολλαπλότητες Riemann. Μια αμφιδιαφόριση $f : M \to N$ ονομάζεται ισομετρία αν για κάθε $p \in M$ και για κάθε $X_p, Y_p \in T_pM$ ισχύει $g(X_p,Y_p) = h(df_p(X_p), df_p(Y_p))$, δηλαδή η f διατηρεί τις αποστάσεις και τις γωνίες των εφαπτόμενων διανυσμάτων.*

Μια ισομετρία μεταξύ δύο πολλαπλοτήτων επάγει ταύτιση των γεωμετρικών ιδιοτήτων τους.

2.7 Διανυσματικά πεδία κατά μήκος καμπύλης - Συνοχές

Είδαμε ότι ο εφοδιασμός μιας λείας πολλαπλότητας με μια μετρική Riemann εισάγει γεωμετρικά χαρακτηριστικά σε μια λεία πολλαπλότητα. Ένα ερώτημα είναι το κατά πόσον μπορεί να οριστεί παράλληλη μεταφορά εφαπτόμενων διανυσμάτων κατά μήκος καμπύλης. Η δυσκολία αυτού του ορισμού έγκειται στον

τοπικό χαρακτήρα και την μη Ευκλείδεια φύση μιας λείας πολλαπλότητας.
Στον $\mathbb{R}^n$ η έννοια της παραγώγου κατά κατεύθυνση εκφράζει τη μεταβολή των τιμών μιας πραγματικής συνάρτησης $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ κατά μήκος ενός διανύσματος του $\mathbb{R}^n$.
Αντίστοιχα, αν γ είναι μια καμπύλη σε μια επιφάνεια S του R^3, η συναλλοίωτη παράγωγος $\nabla_\gamma \dot{\gamma}$ εκφράζει την μεταβολή του πεδίου $\dot{\gamma}$ κατά μήκος της καμπύλης γ υπολογίζοντας την προβολή του διανύσματος $\frac{d\dot{\gamma}}{dt}$, (δηλαδή της μεταβολής του $\dot{\gamma}$) στο εφαπτόμενο επίπεδο $T_{\gamma(t)}S$.
Δεδομένου ότι μπορούμε να αντιληφθούμε τη μετρική μιας επιφάνειας ως επαγόμενη μετρική του $\mathbb{R}^3$, η έννοια της παράλληλης μεταφοράς διανυσματικού πεδίου κατά μήκος καμπύλης έπεται εύκολα: Θεωρούμε το πεδίο X παράλληλο κατα μήκος της γ αν και μόνο αν $\nabla_{X_{\gamma(t)}\gamma(t)=0}$, δηλαδή αν και μόνο αν η συνιστώσα του πεδίου στο $T_{\gamma(t)}$ δε μεταβάλλεται (κάποιος που κινείται στην καμπύλη αντιλαμβάνεται την πορεία του ως ευθεία).
Η επέκταση της παράλληλης μεταφοράς δεν είναι άμεση στις πολλαπλότητες Riemann. Το ερώτημα είναι αν μπορεί κάτι τέτοιο να οριστεί καλά δηλαδή η παράλληλη μεταφορά να διατηρεί τις γωνίες μεταξύ των 'παράλληλων' διανυσμάτων και το επίπεδο στο οποίο κείνται. Η απάντηση δίνεται μέσω της συνοχής (μια επέκταση της έννοιας της συναλλοίωτης παραγώγου) Levi - Civita η οποία ορίζει μια 'συμβατότητα' με την εκάστοτε μετρική και λαμβάνει υπ'οψη την τοπική γεωμετρική συμπεριφορά της πολλαπλότητας (πόσο απέχει απ'το να είναι Ευκλείδεια), που είναι αποτυπωμένη στα σύμβολα του Christoffel.

Ορισμός 2.7.1. *Έστω M μια πολλαπλότητα Riemann. Μια συνοχή στην M είναι μια απεικόνιση $\nabla : X(M) \times X(M) \to X(M)$*
$(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$ τέτοια ώστε για κάθε $X, Y, Z \in X(M)$, $f, g \in F(M)$ ισχύουν:

1)$\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$

2)$\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$

3)$\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$

Η ιδιότητα 1 εξασφαλίζει την $F(M)-$γραμμικότητα της συνοχής η οποία αντιστοιχεί σε $\mathbb{R}$ γραμμικότητα ως εξής:

$$\nabla_{(fX+gY)(p)} Z = f(p)\nabla_{X_p} Z_p + g(p)\nabla_{Y_p} Z_p$$

Επιπλέον, με τις ιδιότητες 2,3 η απεικόνιση $\nabla_X : X(M) \to X(M)$ καθίσταται μια παραγώγιση στο $X(M)$ (θεωρώντας ότι $\nabla_X f = X(f)$).

Η λειτουργία μιας συνοχής στην M είναι να 'συνδέει' με λεία μεταφορά τους εφαπτόμενους χώρους στα σημεία της M. Αποτελεί μια παραγώγιση του Y στην 'διεύθυνση' του X. Στην περίπτωση $\nabla_X f = X(f)$ έχουμε απλά την παράγωγο της f στην κατεύθυνση του X.

Μάλιστα, αν θεωρήσουμε $X = \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}, Y = \sum_{j=1}^n \beta_j \frac{\partial}{\partial x_j}$
έχουμε με άμεση εφαρμογή των ιδιοτήτων της συνοχής ότι

$\nabla_X Y = \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \beta_j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \frac{\partial \beta_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}$

και θεωρώντας

$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}$,έχουμε

$\nabla_X Y = \sum_{k=1}^n (\sum_{i,j=1}^n \alpha_i \beta_j \Gamma_{ij}^k + X(\beta_k)) \frac{\partial}{\partial x_k}$

συμπεραίνουμε ότι η απεικόνιση $\nabla_X Y$ εξαρτάται γραμμικά απ'τις λείες συναρτήσεις α_i, β_j και τις παραγώγους τους $X(\beta_j)$.

Ορισμός 2.7.2. *Ένα διανυσματικό πεδίο X κατά μήκος της καμπύλης $\gamma : I \to M$ είναι μια λεία απεικόνιση που αντιστοιχίζει σε κάθε $t \in I$ το εφαπτόμενο διάνυσμα $X(t) \in T_{\gamma(t)}M$ της γ.*

Παράδειγμα
Το διανυσματικό πεδίο ταχύτητας V της γ, με $V(t) = \frac{d\gamma}{dt}$.

Θεώρημα 2.7.1. *Έστω M πολλαπλότητα Riemann με μια συνοχή ∇. Τότε υπάρχει μοναδική απεικόνιση $\frac{D}{dt} : X(M) \to X(M)$ που αντιστοιχίζει το διανυσματικό πεδίο X κατά μήκος της καμπύλης γ σε ένα διανυσματικό πεδίο $\frac{DX}{dt}$ κατά μήκος της γ τέτοια ώστε:*

1)$\frac{D}{dt}(X+Y) = \frac{DX}{dt} + \frac{DY}{dt}$

2)$\frac{D}{dt}(fX) = \frac{df}{dt}X + f\frac{DX}{dt}$

3)Αν το X επάγεται από κάποιο $Z \in X(M)$ δηλαδή $X(t) = Z_{\gamma(t)}$ τότε $\frac{DX}{dt} = \nabla_{\frac{d\gamma}{dt}} Z$

Η παραπάνω απεικόνιση ονομάζεται του X κατά μήκος της γ.

Απόδειξη. Έστω ότι η απεικόνιση D υπάρχει. Θα αποδείξουμε ότι είναι μοναδική.
Έστω X ένα διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της καμπύλης γ. Θεωρούμε έναν τοπικό χάρτη $\phi = (x_1, ..., x_n)$ στο $p = \gamma(t) \in M$. Έχουμε ότι

$X(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(\gamma(t)) \frac{\partial}{\partial x_i} \big|_{\gamma(t)}$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $\alpha_i(\gamma(t)) = \alpha_i(t)$

έχουμε ότι

$$\frac{DX}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{d\alpha_i(t)}{dt} + \alpha_i(t) \frac{D\frac{\partial}{\partial x_i}}{dt}\right) \tag{2.1}$$

Από την ιδιότητα 3 έχουμε

$\frac{D\frac{\partial}{\partial x_i}}{dt} = \nabla_{\frac{d\gamma}{dt}} \frac{\partial}{\partial x_i} = \nabla_{\sum_{j=1}^n \frac{dx_j}{dt} \frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n \frac{dx_j}{dt} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i}$

Άρα, η σχέση (2.1) συνεπάγεται ότι

$\frac{DX}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{d\alpha_i(t)}{dt} + \sum_{i,j=1}^n \alpha_i(t) \frac{dx_j}{dt} \nabla_{\frac{\theta}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i}$

Η παραπάνω έκφραση εξασφαλίζει τη μοναδικότητα της απεικόνισης D αφού το παραπάνω άθροισμα είναι γραμμική έκφραση των βασικών διανυσματικών πεδίων.
Για την ύπαρξη της D, αρκεί να ορίσουμε την D από το παραπάνω άθροισμα. Τότε οι ιδιότητες 1-3 ισχύουν και λόγω της μοναδικότητας η D είναι ανεξάρτητη του συστήματος συντεταγμένων που θα χρησιμοποιήσουμε. Επεκτείνουμε έτσι τον ορισμό σε ολόκληρη την πολλαπλότητα μεταβαίνοντας με λείο τρόπο σε κάθε σύστημα συντεταγμένων κάθε ανοικτής περιοχής της M. □

Ορισμός 2.7.3. *Έστω M μια λεία πολλαπλότητα με συνοχή ∇. Ένα διανυσματικό πεδίο X κατά μήκος της καμπύλης $\gamma : I \to M$ ονομάζεται παράλληλο αν $\frac{DX}{dt} = 0$ για κάθε $t \in I$.*

Πρόταση 2.7.1. *Έστω M μια πολλαπλότητα και $\gamma : I \to M$ μια καμπύλη. Τότε για κάθε διάνυσμα $X_0 \in T_{\gamma(t_0)}$, $t_0 \in I$, υπάρχει μοναδικό παράλληλο διανυσματικό πεδίο X κατά μήκος της γ, τέτοιο ώστε $X(t_0) = X_0$. Το $X(t)$ ονομάζεται παράλληλη μεταφορά του X_0 κατά μήκος της γ.*

Η απόδειξη της πρότασης γίνεται πρώτα τοπικά (σε κάποιο σύστημα συντεταγμένων) όπου η προς απόδειξη ισότητα ανάγεται σε γραμμικό σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων με αρχική συνθήκη που έχει μοναδική λύση. Έπειτα η λύση επεκτείνεται σε όλο το $\gamma(I)$. (βλ.[8])

2.8 Η συνοχή Levi-Civita

Είδαμε ότι με τη χρήση μιας συνοχής σε μια πολλαπλότητα M μπορούμε να παραγωγίσουμε διανυσματικά πεδία κατά μήκος καμπύλης και να ορίσουμε παράλληλα πεδία. Το ερώτημα είναι αν η έννοια του παράλληλου διανυσματικού πεδίου είναι καλώς ορισμένη. Θα θέλαμε στην περίπτωση που έχουμε δύο παράλληλα διανυσματικά πεδία X, Y κατά μήκος της καμπύλης γ, σε κάθε σημείο $\gamma(t)$, η γωνία των $X_{\gamma(t)}, Y_{\gamma(t)}$ να είναι σταθερή. Εκτός αυτού το επίπεδο που παράγεται από τα $X_{\gamma(t)}, Y_{\gamma(t)}$ δε θα πρέπει να περιστρέφεται κινούμενο κατά μήκος της καμπύλης.
Τις 'καλές ' αυτές ιδιότητες εξασφαλίζει η ύπαρξη μιας μοναδικής συνοχής σε κάθε πολλαπλότητα M που ονομάζεται συνοχή Levi-Civita.

Ορισμός 2.8.1. *Έστω (M, g) μια πολλαπλότητα Riemann. Μια συνοχή ∇ ονομάζεται συμβατή με τη μετρική $g = \langle .,. \rangle$ αν για κάθε λεία καμπύλη $\gamma : I \to M$ και για οποιαδήποτε παράλληλα διανυσματικά πεδία X, Y κατά μήκος της γ, το γινόμενο $\langle X_{\gamma(t)}, Y_{\gamma(t)} \rangle$ είναι σταθερό για κάθε $t \in I$*

Πρόταση 2.8.1. *Η συνοχή ∇ είναι συμβατή με τη μετρική αν και μόνο αν για οποιαδήποτε διανυσματικά πεδία X, Y κατά μήκος της $\gamma : I \to M$ ισχύει*

$$\frac{d}{dt}\langle X, Y \rangle = \langle \frac{DX}{dt}, Y \rangle + \langle X, \frac{DY}{dt} \rangle, t \in I \tag{2.2}$$

Απόδειξη. Αν ισχύει η σχέση (2.2) και X, Y είναι παράλληλα κατά μήκος της γ, τότε
$\frac{DX}{dt} = \frac{DY}{dt} = 0$. Άρα $\frac{d}{dt}\langle X, Y \rangle = 0$, οπότε το

$\langle X(t), Y(t) \rangle = \langle X_{\gamma(t)}, Y_{\gamma(t)} \rangle$ είναι σταθερό. Άρα η ∇ είναι συμβατή με τη μετρική

Τώρα,έστω ότι η ∇ είναι συμβατή με τη μετρική. Έστω $t_0 \in I$ και $\{e_1, ..., e_n\}$ μια ορθοκανονική βάση του $T_{\gamma(t_0)}$. Από την πρόταση **1.7.1** έχουμε ότι για οποιοδήποτε e_i υπάρχει $E_i(t)$ παράλληλο διανυσματικό πεδίο στην γ τέτοιο ώστε $E_i(t_0) = e_i$. Έτσι, από τον ορισμό της συμβατότητας έχουμε για κάθε $t \in I$:

$\langle E_i(t), E_j(t)\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = \delta^i_j$. Άρα το σύνολο $\{E_1, ..., E_n\}$ αποτελεί μια ορθοκανονική βάση του $T_{\gamma(t)}$, για κάθε $t \in I$.

Ας θεωρήσουμε τώρα X, Y παράλληλα διανυσματικά πεδία στην γ. Έχουμε $X(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(t)E_i(t)$ και $Y(t) = \sum_{j=1}^n \beta_j(t)E_j(t)$

Είναι $\langle \frac{DX}{dt}, Y\rangle + \langle X, \frac{DY}{dt}\rangle =$

$\langle \sum_i \frac{d\alpha_i(t)}{dt}E_i(t) + \sum_i \alpha_i(t)\frac{DE_i}{dt}, \sum_j \beta_j(t)E_j(t)\rangle$

$+\langle \sum_i \alpha_i(t)E_i(t), \sum_j \frac{d\beta_j(t)}{dt}E_j(t) + \sum_j \beta_j(t)\frac{DE_j(t)}{dt}\rangle$

κι επειδή $\frac{DE_i}{dt} = 0$, το παραπάνω ισούται με:

$\sum_{i,j} (\frac{d\alpha_i(t)}{dt}\beta_j(t) + \alpha_i(t)\frac{d\beta_j(t)}{dt})\langle E_i(t), E_j(t)\rangle$

$=\sum_{i,j} (\frac{d\alpha_i(t)}{dt}\beta_j(t) + \alpha_i(t)\frac{d\beta_j(t)}{dt})\delta^i_j$

$= \sum_i(\frac{d\alpha_i(t)}{dt}\beta_i(t) + \alpha_i(t)\frac{d\beta_i(t)}{dt})$

$= \frac{d}{dt}\sum \alpha_i(t)\beta_i(t) = \frac{d}{dt}\langle X(t), Y(t)\rangle$. □

Πρόταση 2.8.2. *Η συνοχή ∇ είναι συμβατή με τη μετρική αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $X, Y, Z \in X(M)$ ισχύει:*
$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$

Απόδειξη. Έστω $X \in X(M)$ και $p \in M$. Τότε υπάρχει καμπύλη $\gamma : I \to M$ με $\gamma(0) = p$ και $\frac{d\gamma}{dt}\mid_{t=0} = X_p$.
Για $Y, Z \in X(M)$ οι αντίστοιχες απεικονίσεις $Y(t) = Y_{\gamma(t)}$ και $Z(t) = Z_{\gamma(t)}$ αποτελούν διανυσματικά πεδία κατά μήκος της γ. Έχουμε για $p \in M$:

$X_p\langle Y, Z\rangle = \frac{d}{dt}\langle Y, Z\rangle \mid_{t=0}$

Τώρα, η συμβατότητα της ∇ ισοδυναμεί με :

$\frac{d}{dt}\langle Y,Z\rangle\,\big|_{t=0} = (\langle \frac{DY}{dt}, Z\rangle + \langle Y, \frac{DZ}{dt}\rangle)\,|_{t=0}$ και θεωρώντας

$Y(t) = Y(\gamma(t))$ έχουμε:

$\frac{DY}{dt} = \nabla_{\frac{d\gamma}{dt}} Y$, άρα για $t=0$ είναι $\frac{DY}{dt}\,|_{t=0} = \nabla_X Y(p)$. Οπότε

$\frac{d}{dt}\langle Y,Z\rangle\,\big|_{t=0} = (\langle \frac{DY}{dt}, Z\rangle + \langle Y, \frac{DZ}{dt}\rangle)\,|_{t=0}$

$= (\langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle)(p)$. Άρα έχουμε το ζητούμενο. □

Ορισμός 2.8.2. *Η στρέψη T μιας συνοχής ∇ δίνεται ως:*
$T = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$. *Μια συνοχή λέγεται ελεύθερη στρέψης αν $T=0$ για κάθε $X, Y \in X(M)$.*

Θεώρημα 2.8.1. *Σε κάθε πολλαπλότητα Riemann υπάρχει μοναδική συνοχή που είναι συμβατή με τη μετρική και έχει μηδενική στρέψη. Η συνοχή αυτή ονομάζεται συνοχή Levi-Civita.*

Η παραπάνω συνοχή μας επιτρέπει να ορίσουμε καλώς την έννοια της παραλληλίας.

Απόδειξη. Έστω ότι μια τέτοια συνοχή υπάρχει. Θα αποδείξουμε ότι είναι μοναδική.
Λόγω της συμβατότητας με τη μετρική έχουμε:

$X\langle Y,Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle X, \nabla_X Z\rangle$ **(α)**

$Y\langle Z,X\rangle = \langle \nabla_Y Z, X\rangle + \langle Z, \nabla_Y X\rangle$ **(β)**

$Z\langle X,Y\rangle = \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle$ **(c)**,

από την πρόταση **2.8.2**.
με πρόσθεση των **(α)**, **(β)**, **(c)** παίρνουμε ότι:

$X\langle Y,Z\rangle + Y\langle X,Z\rangle - Z\langle X,Y\rangle =$

$\langle \nabla_X Y + \nabla_Y X, Z\rangle + \langle \nabla_X Z - \nabla_Z X, Y\rangle + \langle \nabla_Y Z - \nabla_Z Y, X\rangle$

και λόγω της μηδενικότητας της στρέψης το άθροισμα ισούται με:

$\langle [X,Y],Z\rangle + \langle [X,Z],Y\rangle + \langle [Y,Z],X\rangle + 2\langle \nabla_Y X, Z\rangle$

Η παραπάνω ισότητα ισοδυναμεί με:

$$\langle \nabla_Y X, Z\rangle = \frac{1}{2}(X\langle Y,Z\rangle + Y\langle X,Z\rangle - Z\langle X,Y\rangle$$

-$\langle [X,Y],Z\rangle - \langle [X,Z],Y\rangle - \langle [Y,Z],X\rangle)(2.3)$

Άρα αν υπήρχε συνοχή ∇' με τις ίδιες ιδιότητες, θα καταλήγαμε ότι για κάθε $Z \in X(M)$ ισχύει $\langle \nabla_X Y, Z\rangle = \langle \nabla'_X Y, Z\rangle$, άρα $\nabla_X Y = \nabla'_X Y$.

Για την ύπαρξη ορίζουμε τη συνοχή μέσω της σχέσης (2.3). Η $\langle \nabla_Y X, Z\rangle$ είναι καλά ορισμένη για κάθε $Z \in X(M)$, οπότε έχουμε το ζητούμενο. □

Ορισμός 2.8.3. *Έστω (M,g) πολλαπλότητα Riemann και ∇ η συνοχή Levi-Civita. Οι συναρτήσεις $\Gamma_{ij}^k : M \to \mathbb{R}$ $(i,j,k = 1,...,n)$ που ορίζονται ως:*

$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}$

ονομάζονται σύμβολα του Christoffel.

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.3) όπου θέτουμε $X = \frac{\partial}{\partial x_i}, Y = \frac{\partial}{\partial x_j}, Z = \frac{\partial}{\partial x_k}$ και $\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\rangle = g_{ij}$ έχουμε:

$\sum_l \Gamma_{ij}^l g_{lk} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij})$

2.9 Γεωδαισιακές καμπύλες

Έστω M μια πολλαπλότητα Riemann με συνοχή Levi-Civita ∇

Ορισμός 2.9.1. *Μια λεία καμπύλη $\gamma : I \to M$ ονομάζεται γεωδαισιακή αν $\frac{D}{dt}(\frac{d\gamma}{dt}) = 0$ ή $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0$, δηλαδή το διανυσματικό πεδίο ταχύτητας είναι παράλληλο.*

Το διάνυσμα ταχύτητας μιας γεωδαισιακής καμπύλης έχει σταθερό μήκος διότι για $t \in I$ έχουμε

$\frac{D}{dt}\langle\frac{d\gamma}{dt},\frac{d\gamma}{dt}\rangle = 2\langle\frac{D}{dt}(\frac{d\gamma}{dt},\frac{d\gamma}{dt}\rangle = 0$

Η εύρεση των γεωδαισιακών καμπυλών σε μια πολλαπλότητα Riemann M ανάγεται στην επίλυση συστημάτων διαφορικών εξισώσεων ως προς τοπικά συστήματα συντεταγμένων ως εξής:
Αν $\phi = (x_1, ..., x_n)$ τοπικό σύστημα συντεταγμένων στο $\gamma(t)$ έχουμε ότι $\frac{d\gamma}{dt} = \sum \frac{dx_i(t)}{dt}\frac{\partial}{\partial x_i}$.

Οπότε η έκφραση $\frac{D}{dt}(\frac{d\gamma}{dt}) = 0$ ισοδυναμεί με:

$\sum_k(\frac{d^2x_k}{dt^2} + \sum_{i,j}\Gamma^k_{ij}\frac{dx_j}{dt}\frac{dx_i}{dt})\frac{\partial}{\partial x_k} = 0$, δηλαδή

$\frac{d^2x_k}{dt^2} + \sum_{i,j}\Gamma^k_{ij}\frac{dx_j}{dt}\frac{dx_i}{dt} = 0$ για κάθε $k = 1, ..., n$.

Η μελέτη και επίλυση αυτού του συστήματος μπορεί να γίνει και μέσω της εφαπτόμενης δέσμης TM.
Λόγω της διαφορικής δομής της TM, μια καμπύλη $\gamma : I \to M$ ορίζει μια καμπύλη $\bar{\gamma} : I \to TM$ που εκφράζεται τοπικά ως $(x_1(t), ..., x_n(t), \frac{dx_1}{dt}, ..., \frac{dx_n}{dt})$

Άρα το παραπάνω σύστημα διαφορικών εξισώσεων ανάγεται στο σύστημα

$\frac{dx_k}{dt} = y_k$

$\frac{dy_k}{dt} = -\sum_{ij}\Gamma^k_{ij}y_iy_j$

ως προς το σύστημα συντεταγμένων $(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n)$ στην TM.

Στο παραπάνω σύστημα μπορούμε να ορίσουμε ένα μοναδικό διανυσματικό πεδίο $\bar{X}$ στην TM του οποίου οι τροχιές έχουν τη μορφή $\phi(t) = (\gamma(t), \frac{d\gamma}{dt})$. Λόγω της λείας δομής της TM και τη θεωρία των τοπικών ροών η λύση του παραπάνω συστήματος είναι μοναδική. Παρ όλα αυτά η ύπαρξή της εξασφαλίζεται τοπικά.

Τώρα, έστω $(p, X_p) \in TM$. Υπάρχει ανοικτή περιοχή U του (p, X_p) στην TM, $\epsilon > 0$ και λεία απεικόνιση $\phi : (-\epsilon, \epsilon) \times U \to TM$ τέτοια ώστε για κάθε

$(q, X_q) \in U$, η καμπύλη $\phi_{(q,X_q)} : (-\epsilon, \epsilon) \to TM$ με $\phi_{(q,X_q)}(t) = \phi(t, q, X_q)$ να είναι η μοναδική τροχιά του X με $\phi_{(q,X_q)}(t) = (q, X_q)$.

Το ανοικτό U στην TM αντιστοιχεί σε γινόμενο $V \times W$ όπου V είναι α-νοικτό σύνολο στην M και W είναι μια ανοικτή σφαίρα στον $\mathbb{R}^n$. Δηλαδή

$$U = \{(q, X_q) \in TM : q \in V, |X_p| < \delta\},\ \delta > 0.$$

Επιπλέον ισχύει $\pi \circ \phi_{(q,X_q)}(t) = \gamma(t)$.

Ερχόμαστε λοιπόν στο εξής γενικό αποτέλεσμα:

Πρόταση 2.9.1. *Για κάθε $p \in M$, υπάρχει ανοικτή περιοχή V του p στην M, $\epsilon > 0$ και λεία απεικόνιση $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \times U \to M$, $U = \{(q, X_q) : q \in V, X_q \in T_qM, |X_q| < \delta\}$, τέτοια ώστε η καμπύλη $\gamma_{(q,X_q)} : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ με $\gamma_{(q,X_q)}(t) = \gamma(t, q, X_q)$ να είναι η μοναδική γεωδαισιακή που για $t = 0$ διέρχεται από το q με ταχύτητα $|X_q|$.*

Όπως θα δούμε παρακάτω υπάρχει εξάρτηση των ϵ, δ:

Πρόταση 2.9.2. *Αν η γεωδαισιακή $t \to \gamma(t, q, X_q)$ είναι ορισμένη στο $(-\epsilon, \epsilon)$ τότε για κατάλληλο $\alpha > 0$, η γεωδαισιακή $t \to \gamma(t, q, \alpha X_q)$ είναι ορισμένη στο $(-\frac{\epsilon}{\alpha}, \frac{\epsilon}{\alpha})$ και ισχύει $\gamma(t, q, \alpha X_q) = \gamma(\alpha t, q, X_q)$.*

Απόδειξη. Για την καμπύλη $\bar{\gamma} : (-\frac{\epsilon}{\alpha}, \frac{\epsilon}{\alpha}) \to M$ με $\bar{\gamma}(t) = \gamma(\alpha t, q, X_q)$, ισχύει

$$\bar{\gamma}(0) = q \text{ και } \frac{d\bar{\gamma}}{dt}|_0 = \frac{d\gamma(\alpha t)}{d(\alpha t)}(\frac{d(\alpha t)}{dt})|_0 = \alpha X_q$$

$$\text{Επιπλέον } \frac{D}{dt}(\frac{d\bar{\gamma}}{dt}) = \alpha^2 \nabla_{\frac{d\gamma(\alpha t)}{dt}} \frac{d\gamma(\alpha t)}{dt} = 0.$$

Άρα σύμφωνα με την παραπάνω πρόταση η $\bar{\gamma}$ είναι η μοναδική γεωδαισιακή που για $t = 0$ διέρχεται από το q με ταχύτητα $|\alpha X_q|$.Οπότε έχουμε την ισότητα. □

Αποτέλεσμα αυτής της ιδιότητας είναι ο ορισμός της εκθετικής απεικόνισης.

Ορισμός 2.9.2. *Έστω $p \in M$ και $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \times U \to M$ με*
$U = \{(q, X_q) : q \in V, X_q \in T_qM, |X_q| < \delta\}$,
η μοναδική γεωδαισιακή που για $t = 0$ διέρχεται από το q με ταχύτητα $|X_q|$.
Η απεικόνιση $\exp : U \to M$ με $\exp(q, X_q) = \gamma(1, q, X_q) = \gamma(|X_q|, q, \frac{X_q}{|X_q|})$ ονομάζεται εκθετική απεικόνιση στο U.

Αντίστοιχα για $q \in V$ ορίζεται η $\exp_q : S(0,\delta) \subset T_qM \to M$, όπου
$S(0,\delta) = \{X_q \in T_qM : |X_q| < \delta\}$
με $\exp_q(X_q) = \exp(q, X_q)$, $\exp(0) = q$.

Η γεωμετρική ερμηνεία της εκθετικής απεικόνισης είναι η εξής:
Για $X_q \in S(0,\delta)$ είναι $\exp_q(X_q) = \gamma(|X_q|, q, \frac{X_q}{|X_q|}) \in M$ δηλαδή το $\exp_q(X_q)$ είναι το σημείο της M που προκύπτει αν κινηθούμε κατά μήκος της γεωδαισιακής γ απόσταση $|X_q|$ ξεκινώντας από το q στην κατεύθυνση του X_q με ταχύτητα 1. Επιπλέον η εκθετική απεικόνιση χρησιμοποιείται σαν τοπική χαρτογράφηση της πολλαπλότητας M. Ουσιαστικά αποτελεί μια τοπική αμφιδιαφόριση της
$S(0,\delta) \subset T_qM$ με την M όπου ένα σύστημα γεωδαισιακών που διέρχονται από το q αντιστοιχεί σε ένα σύστημα ευθειών στον T_qM που διέρχονται από το 0. Αυτό φαίνεται από τα ακόλουθα :
Η $\exp_q : S(0,\delta) \to M$ είναι μια λεία απεικόνιση καθώς η
$\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \times U \to M$ είναι λεία. Επιπλέον για το

$d(\exp_q)_0 : T_{X_q}(T_qM) \cong T_qM \to T_qM$ είναι:

$$d(\exp_q)_0(X) = \frac{d}{dt}|_0(\exp_q(tX)) = \frac{d}{dt}|_0(\gamma(1, q, tX)) = \frac{d}{dt}|_0(\gamma(t, q, X)) = X.$$

Άρα $d(\exp_q)_0 = \mathrm{Id}|_{T_qM}$, οπότε είναι αντιστρέψιμη και εφαρμόζοντας το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης έχουμε ότι η εκθετική απεικόνιση είναι μια τοπική αμφιδιαφόριση της $S(0,\delta) \subset T_qM$ με την M.
Η ανοικτή περιοχή V του $p \in M$ που είναι αμφιδιαφορική με την $S(0,\delta)$ ονομάζεται κανονική γειτονιά του p.
Επιπλέον για $X_q \in T_qM$ είναι $\exp_q(tX_q) = \gamma(1, q, tX_q) = \gamma(t, q, X_q)$.
Άρα η εκθετική απεικόνιση μετασχηματίζει τοπικά τις ευθείες σε γεωδαισιακές και αντίστροφα.

Τέλος, η χαρακτηριστική ιδιότητα των γεωδαισιακών καμπυλών είναι ότι ελαχιστοποιούν την απόσταση μεταξύ δύο άρκετά' κοντινών σημείων στην M. Παραθέτουμε τα εξής θεωρήματα χωρίς απόδειξη (βλ [8]):

Θεώρημα 2.9.1. *Έστω $p \in M$,U κανονική γειτονιά του $p \in M$ (δηλαδή αμφιδιαφορική μέσω της $\exp$ με μια ανοικτή σφαίρα $S(0,\delta)$), και έστω $S = S(p,\epsilon)$ κανονική σφαίρα κέντρου p στην M. Έστω τώρα $\gamma : [0,1] \to S$ γεωδαισιακό τμήμα με $\gamma(0) = p$. Αν η $c : [0,1] \to M$ είναι λεία ή κατά τμήματα λεία καμπύλη που ενώνει τα $\gamma(0), \gamma(1)$, τότε $l(\gamma) \leq l(c)$ όπου l η συνάρτηση μήκους καμπύλης. Επιπλέον , $l(\gamma) = l(c)$ αν και μόνο αν $\gamma|_{[0,1]} = c|_{[0,1]}$.*

Θεώρημα 2.9.2. *Αν μια κατά τμήματα λεία καμπύλη $\gamma : [a, b] \to M$ σταθερής ταχύτητας έχει μήκος μικρότερο από το μήκος οποιασδήποτε κατά τμήματα λείας καμπύλης που ενώνει τα σημεία $\gamma(a), \gamma(b)$, τότε η γ είναι γεωδαισιακή.*

Ουσιαστικά, η απόσταση δύο σημείων της M που βρίσκονται σε μια κανονική γειτονιά της M γίνεται ελάχιστη αν αυτά ενωθούν με μια γεωδαισιακή καμπύλη και αντίστροφα.
Το απλούστερο παράδειγμα αυτής της χαρακτηριστικής ιδιότητας είναι ότι οι γεωδαισιακές σε έναν Ευκλείδιο χώρο είναι όλες οι ευθείες του. Μάλιστα, στην περίπτωση του Ευκλείδιου χώρου το παραπάνω αποτέλεσμα ισχύει ολικά στον χώρο.
Οι γεωδαισιακές καμπύλες στη σφαίρα S^n είναι οι μέγιστοι κύκλοι της. Σε αυτή την περίπτωση, η ιδιότητά τους να ελαχιστοποιούν τις αποστάσεις είναι τοπική.

Κεφάλαιο 3

Ομάδες και άλγεβρες Lie

3.1 Ομάδες Lie

Ορισμός 3.1.1. *Μια ομάδα Lie G είναι μια λεία πολλαπλότητα με δομή ομάδας τέοια ώστε οι πράξεις*
1) $\mu : G \times G \to G$ με $\mu(g_1, g_2) = g_1 g_2$ και

2) $inv : G \to G$ με $inv(g) = g^{-1}$
να είναι λείες.

Παράδειγμα 3.1.1. *Η ομάδα $(\mathbb{R}^n, +)$*

Παράδειγμα 3.1.2. *Ο μοναδιαίος κύκλος (μοναδιαία σφαίρα διάστασης 1),*
$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \cong \{z \in \mathbb{C} : \|z\| = 1\}$
είναι ομάδα Lie διότι είναι λεία πολλαπλότητα και ομάδα ως προς το γινόμενο μιγαδικών με λείες τις πράξεις μ, inv.

Παράδειγμα 3.1.3. *Η γενική γραμμική ομάδα $Gl_n\mathbb{R} = \{A \in M_n\mathbb{R} : \det A \neq 0\}$, όπου*
$M_n\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^{n^2}$, ο διανυσματικός χώρος των $n \times n$ πινάκων με στοιχεία από το $\mathbb{R}$.
Θεωρούμε ως πράξη της $Gl_n\mathbb{R}$ το γινόμενο πινάκων.
Για να δούμε τη λεία δομή της $Gl_n\mathbb{R}$ έχουμε το εξής:
Η ομάδα $M_n\mathbb{R}$ είναι λεία πολλαπλότητα ως διανυσματικός χώρος ισόμορφος με τον $\mathbb{R}^{n^2}$. Θεωρούμε την απεικόνιση $\det : M_n\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $A \to \det A$.
Η $\det$ είναι συνεχής απεικόνιση κι επειδή το $\{0\}$ είναι κλειστό σύνολο στο $\mathbb{R}$ έχουμε ότι το σύνολο $Gl_n\mathbb{R} = M_n\mathbb{R} / \det^{-1}\{0\}$ είναι ανοικτό στο $M_n\mathbb{R}$. Άρα αποτελεί μια λεία πολλαπλότητα.
Θα αποδείξουμε ότι είναι και ομάδα Lie.
Αρχικά, ο πολλαπλασιασμός πινάκων στην $Gl_n\mathbb{R}$ είναι λεία απεικόνιση διότι αν

θεωρήσουμε $A, B \in Gl_n\mathbb{R}$ *με* $A = [a_{ij}]$ *και* $B = [b_{ij}]$ *έχουμε*
$AB = [\sum_k a_{ik}b_{kj}]$,*δηλαδή κάθε συνιστώσα του* AB *εκφράζεται πολυωνυμικά ως προς τις συνιστώσες των* A, B.
Για τον ίδιο λόγο και η απεικόνιση
$inv : Gl_n\mathbb{R} \to Gl_n\mathbb{R}$ *με* $inv(A) = A^{-1} = \frac{adj(A)}{\det A}$, *είναι λεία.*
Άρα οι $Gl_n\mathbb{R}$ *και αντίστοιχα* $Gl_n\mathbb{C}$ *είναι ομάδες Lie.*

3.2 Η άλγεβρα Lie μιας ομάδας Lie

Μια ομάδα Lie είναι μια λεία πολλαπλότητα, οπότε σε κάθε $g \in G$ ορίζεται ο εφαπτόμενος χώρος T_gG. Όπως θα δούμε, αρκεί να ορίσουμε τον εφαπτόμενο χώρο T_eG στο ουδέτερο στοιχείο e της G και μέσω μιας κατάλληλης αμφιδιαφόρισης, της αριστερής μεταφοράς μεταφέρουμε το T_eG στο T_gG.

Ορισμός 3.2.1. *Έστω* G *ομάδα Lie. Η απεικόνιση* $L_g : G \to G$ *με* $L_g(p) = gp$, $g \in G$ *ονομάζεται αριστερή μεταφορά.*

Η L_g είναι αντιστρέψιμη απεικόνιση με $L_g^{-1} = L_{g^{-1}}$ και αποτελεί αμφιδιαφόριση της G (Η διαφορισιμότητα των $L_g, L_{g^{-1}}$ προκύπτει από τη διαφορισιμότητα της $\mu : G \times G \to G$, $\mu(g,p) = gp$).

Ορισμός 3.2.2. *Ένα διανυσματικό πεδίο* X *στην* G *ονομάζεται αριστερά αναλλοίωτο αν* $dL_g(X) = X \circ L_g$, *δηλαδή αν για κάθε* $p \in G$ *ισχύει* $(dL_g)_p(X_p) = X_{gp}$, *όπου* $(dL_g)_p : T_pG \to T_{gp}G$.

Ένα τέτοιο πεδίο παραμένει αναλλοίωτο κατά την αριστερή μεταφορά οπότε ένα αριστερά αναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο X καθορίζεται από την τιμή του, X_e, στο ουδέτερο στοιχείο e της G ($X_g = (dL_g)_e(X_e)$).
Τώρα, έστω $\mathfrak{g}$ το σύνολο των αριστερά αναλλοίωτων διανυσματικών πεδίων στη G. Λόγω της γραμμικότητας του dL_g, το $\mathfrak{g}$ είναι διανυσματικός χώρος. Επιπλέον, το πεδίο $[X, Y]$ με $X, Y \in \mathfrak{g}$ είναι επίσης αριστερά αναλλοίωτο διότι αν $p \in G$ και $f \in F(G)$ έχουμε:

$$(dL_g)_p([X,Y]_p)(f) = [X,Y]_p(f \circ L_g) = X_p(Y(f \circ L_g)) - Y_p(X(f \circ L_g))$$

$$= X_p(dL_g(Y)f) - Y_p(dL_g(X)f)$$

$$= X_p(Yf) - Y_p(Xf) = (X_pY - Y_pX)(f) = [X,Y]_p(f)$$

Άρα για $X, Y \in \mathfrak{g}$ έχουμε $[X, Y] \in \mathfrak{g}$. Άρα το $\mathfrak{g}$ αποτελεί μια άλγεβρα Lie.

Παρακάτω, θα κάνουμε μια ταύτιση της άλγεβρας $\mathfrak{g}$ με τον εφαπτόμενο χώρο T_eG στο ουδέτερο, άρα και με τον εφαπτόμενο χώρο σε κάθε σημείο, T_gG. Η απεικόνιση $\mathfrak{g} \to T_eG$ που απεικονίζει το X στο X_e είναι ισομορφισμός διανυσματικών χώρων.

Αρχικά είναι γραμμική διότι $(aX + Y)_e = aX_e + Y_e$, από τον ορισμό των πράξεων αυτών στο $X(G)$.

Θα αποδείξουμε ότι είναι 1-1:
Έστω $X_e = 0 \in T_eG$. Επειδή για κάθε $g \in G$, η L_g είναι αμφιδιαφόριση, η $(dL_g)_p$ είναι ισομορφισμός εφαπτόμενων χώρων. Άρα για κάθε $g \in G$ είναι $X_g = (dL_g)_e(X_e) = 0$. Άρα $X = 0$.

Τέλος, θα αποδείξουμε ότι είναι επί:
Αν $u \in T_eG$ θεωρούμε το διανυσματικό πεδίο X^u ως εξής:
$X^u_p = (dL_p)_e(u) \in T_pG$.
Το X^u είναι το ζητούμενο αριστερά αναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο, διότι για κάθε $g \in G$ είναι:
$(dL_g)_p(X^u_p) = (dL_g)_p(dL_p)_e(u) = d(L_{gp})_e(u) = (dL_{gp})(u) = X^u_{gp}$.
Άρα, έχουμε την ταύτιση $\mathfrak{g} \cong T_eG$

Παράδειγμα 3.2.1. *Κάθε διανυσματικός χώρος, V, πεπερασμένης διάστασης είναι ισόμορφος με τον $\mathbb{R}^n$, επομένως είναι προσθετική ομάδα Lie. Η άλγεβρα Lie του V ταυτίζεται με τον V.*

Παράδειγμα 3.2.2. *Η ομάδα $G = GL_n\mathbb{R}$ των αντιστρέψιμων πινάκων $A \in M_n\mathbb{R}$.*
Είναι $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}l_n\mathbb{R} = T_I(Gl_n\mathbb{R}) = T_I(M_n\mathbb{R})$, όπου I ο ταυτοτικός πίνακας.
Αυτό συμβαίνει διότι η $Gl_n\mathbb{R}$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $M_n\mathbb{R}$. Επιπλέον $T_I(M_n\mathbb{R}) = M_n\mathbb{R}$ διότι ο $M_n\mathbb{R}$ είναι διανυσματικός χώρος. Άρα $\mathfrak{g}l_n\mathbb{R} = M_n\mathbb{R}$.

Ορισμός 3.2.3. *Έστω M, N πολλαπλότητες και $F : M \to N$ λεία απεικόνιση. Τα διανυσματικά πεδία $X \in X(M), Y \in X(N)$ λέγονται F-συσχετισμένα αν ισχύει $dF(X) = Y$ δηλαδή για κάθε $p \in M$ είναι $dF_p(X_p) = Y_{F(p)}$*

Πρόταση 3.2.1. *Έστω $F : M \to N$ μια αμφιδιαφόριση μεταξύ πολλαπλοτήτων και $X^1, X^2 \in X(M), Y^1, Y^2 \in X(N)$ τέτοια ώστε $dF(X^1) = Y^1$ και $dF(X^2) = Y^2$ (δηλαδή τα X^i, Y^i είναι $F-$συσχετισμένα). Τότε ισχύει $dF([X^1, X^2]) = [Y^1, Y^2]$ (δηλαδή τα $[X^1, X^2], [Y^1, Y^2]$ είναι $F-$συσχετισμένα).*

Απόδειξη. Έστω $p \in M$ και $q = F(p) \in N$. Για κάθε $f \in F(N)$ έχουμε:

$([Y^1, Y^2]f)(q) = [Y^1, Y^2]_q f = Y^1_q(Y^2 f) - Y^2_q(Y^1 f)$

$= dF_p(X^1_p)(Y^2 f) - dF_p(X^2_p)(Y^1 f)$

$$= X^1_p((Y^2 f) \circ F) - X^2_p((Y^1 f) \circ F) \tag{3.1}$$

Τώρα, για την $(Y^2 f) \circ F : M \to \mathbb{R}$ έχουμε:

$(Y^2 f) \circ F(p) = ((Y^2 f) \circ F)(F^{-1}(q)) = (Y^2 f)(q) = (dF(X^2)f)(q)$

$= (dF(X^2))_q(f) = dF_p(X^2_p)f = X^2_p(f \circ F) = (X^2(f \circ F))(p)$.

Άρα ισχύει γενικά: $(Y^2 f) \circ F = X^2(f \circ F)$ και όμοια $(Y^1 f) \circ F = X^1(f \circ F)$

Οπότε (3.1)$= X^1_p((Y^2 f) \circ F) - X^2_p((Y^1 f) \circ F)$

$= X^1_p(X^2(f \circ F)) - X^2_p(X^1(f \circ F)) = [X^1, X^2]_p(f \circ F) = (dF([X^1, X^2])f)(p)$

και έτσι παίρνουμε το ζητούμενο. □

Με τη βοήθεια του παραπάνω θεωρήματος θα υπολογίσουμε τη μορφή του γινομένου Lie στην άλγεβρα $\mathfrak{gl}_n\mathbb{R}$:

Πρόταση 3.2.2. *Έστω $A, B \in \mathfrak{gl}_n\mathbb{R} = T_I Gl_n\mathbb{R}$. Τότε ισχύει $[A, B] = AB - BA$.*

Απόδειξη. Έστω $X^A, X^B \in X(Gl_n\mathbb{R})$ τα αντίστοιχα αριστερά αναλλοίωτα διανυσματικά πεδία των A, B, δηλαδή $X^A_I = A, X^B_I = B$. Δεδομένου ότι $X^A_g = (dL_g)_I(A), X^B_g = (dL_g)_I(B)$ έχουμε λόγω της πρότασης **2.2.1**:

$[A, B] = [X^A_I, X^B_I] = [(dL_I)_I A, (dL_I)_I B] = (dL_I)_I([A, B]) = [X^A, X^B]_I$
Έστω $\phi = (x_{ij})$ χάρτης στο $M_n\mathbb{R}$ ο οποίος είναι και ολικός.
Έστω $x_{ij} : M_n\mathbb{R}(= \mathfrak{gl}_n\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ με $x_{ij}(A) = A_{ij}$, η (i, j)-καταχώρηση του πίνακα A. Τότε $x_{ij}|_{Gl_n\mathbb{R}} \in F(Gl_n\mathbb{R})$

Θα υπολογίσουμε την (i,j)-συνιστώσα του $[X^A, X^B]_I$, δηλαδή το $[X^A, X^B]_I(x_{ij})$

(αν $X \in X(M)$ ειναι $X = \sum \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ άρα $X(x_i) = \alpha_i$)

Είναι

$$[X^A, X^B]_I(x_{ij}) = X_I^A X^B(x_{ij}) - X_I^B X^A(x_{ij}) = AX^B(x_{ij}) - BX^A(x_{ij}) \quad (3.2)$$

Υπολογίζουμε το $BX^A(x_{ij})$ και όμοια το $AX^B(x_{ij})$.

Για $p \in Gl_n\mathbb{R}$ είναι $X_p^A(x_{ij}) = (dL_p)_I(A)(x_{ij}) = A(x_{ij} \circ L_p)$

$= \frac{d}{dt}(x_{ij} \circ L_p)(I+tA)\,\big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(x_{ij}(pI + tpA))\,\big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(p_{ij} + t\sum_k p_{ik}A_{kj})\,|_{t=0}$

$= \sum_k p_{ik}A_{kj} = \sum_k x_{ik}(p)A_{kj}$.

Άρα $X^A(x_{ij}) = \sum_k x_{ik}A_{kj} \in F(Gl_n\mathbb{R})$, συνεπώς

$BX^A(x_{ij}) = \sum_k B(x_{ik})A_{kj}$. Επίσης,

$B(x_{ik}) = \frac{d}{dt}x_{ik}(I + tB)\,\big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\delta_k^i + tB_{ik})\,|_{t=0} = B_{ik}$

Άρα, από τη σχέση (3.2) έχουμε

$[X^A, X^B]_i(x_{ij}) = A\sum_k x_{ik}B_{kj} - B\sum_k x_{ik}A_{kj} = \sum_k A_{ik}B_{kj} - \sum_k B_{ik}A_{kj}$

$= (AB - BA)_{ij}$.

Επειδή τα παραπάνω ισχύουν για κάθε x_{ij}, έχουμε το ζητούμενο. □

3.3 Ομομορφισμοί ομάδων Lie

Ορισμός 3.3.1. *Έστω G, H ομάδες Lie. Μια απεικόνιση $\rho : G \to H$ ονομάζεται ομομορφισμός ομάδων Lie αν είναι ομομορφισμός ομάδων και ταυτόχρονα λεία απεικόνιση πολλαπλοτήτων.*

Παρατήρηση: Αν επιπλέον η απεικόνιση είναι αμφιδιαφόριση, τότε καλείται ισομορφισμός ομάδων Lie.

Ορισμός 3.3.2. *Έστω $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ άλγεβρες Lie. Μια απεικόνιση $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ ονομάζεται ομομορφισμός αλγεβρών Lie αν είναι λεία, γραμμική και ισχύει $\phi([X,Y]) = [\phi(X), \phi(Y)]$, για κάθε $X, Y \in \mathfrak{g}$.*

Το παρακάτω θεώρημα συνδέει τους ομομορφισμούς ομάδων Lie με τους ομομορφισμούς αλγεβρών Lie.

Θεώρημα 3.3.1. *Έστω $\rho : G \to H$ ομομορφισμός ομάδων Lie. Τότε η $(d\rho)_e : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ είναι ομομορφισμός αλγεβρών Lie.*

Απόδειξη. Η απεικόνιση $(d\rho)_e : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ είναι γραμμική. Επιπλέον ισχύει $\rho(g_1 g_2) = \rho(g_1)\rho(g_2)$, άρα $(\rho \circ L_{g_1})(g_2) = (L_{\rho(g_1)} \circ \rho)(g_2)$, δηλαδή $\rho \circ L_g = L_{\rho(g)}$, για κάθε $g \in G$.
Έστω $X_e \in \mathfrak{g}$ και X το αντίστοιχο αριστερά αναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο.

$$\text{Είναι } (d\rho)_g(X_g) = (d\rho)_g((dL_g)_e(X_e)) = (d(\rho \circ L_g)_e(X_e)$$

$$= (d(L_{\rho(g)} \circ \rho))_e(X_e) = (dL_{\rho(g)})_e \circ (d\rho)_e(X_e) = (dL_{\rho(g)})_e(Y_e) = Y_{\rho(g)}$$

όπου θεωρούμε $Y \in \mathfrak{h}$ το μοναδικό αριστερά αναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο στην $\mathfrak{h}$ με $Y(e) = Y_e = (d\rho)_e(X_e)$.
Επομένως, τα X, Y είναι $\rho-$συσχετισμένα, οπότε εφαρμόζοντας την πρόταση **3.2.1** έχουμε:

$$(d\rho)_e([X^1, X^2]_e) = [Y^1, Y^2]_e = [(d\rho)_e(X^1), (d\rho)_e(X^2)],$$

άρα η $(d\rho)_e$ αποτελεί ομομορφισμό αλγεβρών Lie. □

Ορισμός 3.3.3. *Έστω G μια ομάδα Lie. Μια υποομάδα H της G ονομάζεται υποομάδα Lie της G αν είναι ομάδα Lie και η απεικόνιση εγκλεισμού $i : H \to G$ είναι λεία.*
Έστω $\mathfrak{g}$ άλγεβρα Lie. Ένας γραμμικός υπόχωρος $\mathfrak{h}$ της $\mathfrak{g}$ ονομάζεται υποάλγεβρα Lie της $\mathfrak{g}$ αν για κάθε $X, Y \in \mathfrak{h}$ ισχύει $[X, Y] \in \mathfrak{h}$.

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, αν H είναι υποομάδα Lie της G τότε η άλγεβρα $\mathfrak{h}$ της H είναι υποάλγεβρα Lie της $\mathfrak{g}$. Αυτό συμβαίνει διότι η απεικόνιση $i : H \to G$ είναι ομομορφισμός ομάδων Lie οπότε το διαφορικό $(di)_e = \mathrm{Id}\,\mathfrak{g}\,|_{\mathfrak{h}} : \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ είναι ομομορφισμός αλγεβρών Lie.

3.4 Μονοπαραμετρικές υποομάδες

Είδαμε ότι για κάθε λείο διανυσματικό πεδίο σε μια πολλαπλότητα M και για κάθε $p \in M$ υπάρχει U ανοικτή γειτονιά του p στην M, $\epsilon > 0$ και λεία α-πεικόνιση $\phi : (-\epsilon, \epsilon) \times U \to M$, τέτοια ώστε η καμπύλη $\phi_q : (-\epsilon, \epsilon) \to M$, με $\phi_q(t) = \phi(t, q)$ να είναι η μοναδική καμπύλη για την οποία $\phi_q(0) = q$ και $\frac{\partial \phi_q}{\partial t} = X_{\phi_q(t)}$.
Επιπλέον η απεικόνιση $\phi_t : U \to M$ με $\phi_t(q) = \phi(t, q)$ λέγεται τοπική ροή του X και ισχύει $\phi_t^{-1} = \phi_{-t}$ και $\phi_s \circ \phi_t = \phi_{s+t}$.

Τώρα έστω G ομάδα Lie και $X \in \mathfrak{g}$ αριστερά αναλλοίωτο διανυσματικό πε-δίο.
Έστω $\phi_t : U \to G$ η τοπική ροή που αντιστοιχεί στο X_e, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Για κάθε $g \in G$, η λεία απεικόνιση $\phi_t^g = L_g(\phi_t)$ είναι η τοπική ροή του X στο g διότι

$\phi^g(0, g) = L_g(\phi(o, e)) = ge = g$ και

$\frac{\partial \phi^g}{\partial t} = (dL_g)\frac{\partial \phi}{\partial t} = (dL_g)(X_{\phi_t}) = X_{L_g(\phi_t)} = X_{\phi_t^g}$

Μπορούμε να επεκτείνουμε την ϕ_t σε όλο το G και το διάστημα $(-\epsilon, \epsilon)$ σε όλο το $\mathbb{R}$ ως εξής:

Αρχικά έχουμε $\phi_{t+s} = \phi_s \phi_t = L_{\phi_s} \phi_t$

Για να αποδείξουμε την παραπάνω σχέση έχουμε

$$\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s = \phi(t, \phi_s) = L_{\phi_s} \phi_t \tag{3.3}$$

Επιπλέον για $t \in \mathbb{R}$, έχουμε $\phi_e(t) = \phi_e(n\frac{t}{n}) = \phi_e(\frac{t}{n})^n \in G$, όπου $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\frac{t}{n} < \epsilon$. Σημειώνουμε ότι η τελευταία ισότητα ισχύει λόγω της σχέσης (3.3). Άρα μπορούμε να επεκτείνουμε την ϕ σε όλο το $\mathbb{R}$.

Τέλος, λόγω της αριστερής μεταφοράς, η ϕ_t επεκτείνεται σε όλη τη G κα-θώς αν ϕ_t^g είναι η ροή του $g \in G$ έχουμε $\phi_t = L_{g^{-1}} \phi_t^g$ οπότε το U επεκτείνεται σε όλο το G.
Συνεπώς σε μια ομάδα Lie οι ροές είναι ολικές.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, κάθε ολοκληρωτική καμπύλη $\phi^g : \mathbb{R} \to G$ είναι ομομορφισμός ομάδων Lie καθώς ισχύει $\phi^g(t+s) = \phi^g(t)\phi^g(s)$. Ένας ομομορφισμός ομάδων Lie, $\phi : \mathbb{R} \to G$ ονομάζεται μονοπαραμετρική υποομάδα της G.

Θεώρημα 3.4.1. *Υπάρχει 1-1,επί αντιστοιχία μεταξύ μονοπαραμετρικών υποομάδων και αριστερά αναλλοίωτων διανυσματικών πεδίων της G (Άρα και ολικών ροών της G).*

Απόδειξη. Είδαμε ότι σε κάθε $X \in \mathfrak{g}$ αντιστοιχεί η μοναδική καμπύλη $\phi_e : \mathbb{R} \to G$ με $\phi_e(t) = \phi(t, e)$ που αποτελεί μονοπαραμετρική υποομάδα της G. Τώρα, αν $\gamma : \mathbb{R} \to G$ είναι μονοπαραμετρική υποομάδα της G έχουμε $\gamma(0) = e$ και $\frac{d\gamma}{dt}|_{t=0} = X_e \in T_eG = \mathfrak{g}$. Άρα η $\phi : \mathbb{R} \times G \to G$ με $\phi(t, g) = \gamma(t)$ είναι η ζητούμενη ολοκληρωτική καμπύλη του αριστερά αναλλοίωτου διανυσματικού πεδίου X με $X(e) = X_e = \gamma\acute{}(0)$. □

3.5 Η εκθετική απεικόνιση

Ορισμός 3.5.1. *Έστω G ομάδα Lie και $\mathfrak{g}$ η αντίστοιχη άλγεβρα Lie. Εκθετική απεικόνιση λέγεται η απεικόνιση $\exp : \mathfrak{g} \to G$ με $\exp(X) = \phi^X(1)$, όπου $\phi^X : \mathbb{R} \to G$ είναι η μοναδική μονοπαραμετρική υποομάδα της G που αντιστοιχεί στο X.*

Είδαμε ότι η μοναδική μονοπαραμετρική υποομάδα που αντιστοιχεί στο διανυσματικό πεδίο tX, $t \in \mathbb{R}$, είναι η καμπύλη: $s \to \phi^{tX}(s) = \phi^X(st)$, διότι $\frac{\partial \phi^X(st)}{\partial s} = \frac{\partial \phi^X(st)}{\partial (st)} \frac{\partial (st)}{\partial s} = tX_{\phi^X(st)}$.

Οπότε $\exp(tX) = \phi^{tX}(1) = \phi^X(t)$. Άρα $\frac{d}{dt}\exp(tX)|_{t=0} = X$.
Επιπλέον, επειδή η $\phi^{tX}(1) = \phi^X(t)$ είναι ομομορφισμός ισχύει:

$$\exp(t+s)X = \exp(tX)\exp(sX) \text{ και } \exp^{-1}(tX) = \exp(-tX).$$

Από τη διαφορισιμότητα των μονοπαραμετρικών υποομάδων προκύπτει ότι η εκθετική απεικόνιση είναι λεία. Επιπλέον,

$$d(\exp)_0(X) = \frac{d}{dt}\exp(tX)|_{t=0} = X$$

Άρα το $d(\exp)_0 : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ ισούται με $\mathrm{Id}_{\mathfrak{g}}$. Επομένως, εφαρμόζοντας το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης, δεδομένου ότι η $d(\exp)_0$ είναι αντιστρέψιμη, η exp αποτελεί τοπική αμφιδιαφόριση μεταξύ μιας γειτονιάς του e στη G και του

0 στη $\mathfrak{g}$.

Μια βασική ιδιότητα της εκθετικής απεικόνισης που αναδεικνύει μια σχέση μεταξύ ομομορφισμών ομάδων Lie και αλγεβρών Lie είναι η εξής:

Θεώρημα 3.5.1. *Έστω H, G ομάδες Lie με αντίστοιχες άλγεβρες $\mathfrak{h}, \mathfrak{g}$ και ομομορφισμός $\phi : H \to G$. Τότε για κάθε $X \in \mathfrak{h}$ ισχύει $\phi(\exp_{\mathfrak{h}}(X)) = \exp_{\mathfrak{g}}((d\phi)_e X)$.*

Απόδειξη. Για $X \in \mathfrak{h}$ θεωρούμε τις λείες καμπύλες $a, b : \mathbb{R} \to G$ με
$a(t) = \phi(\exp_{\mathfrak{h}}(tX))$ και $b(t) = \exp_{\mathfrak{g}}((d\phi)_e(tX))$
Θα αποδείξουμε ότι $a(t) = b(t)$.

Αρχικά έχουμε ότι $a(t), b(t)$ είναι ομομορφισμοί διότι:
$a(t+s) = \phi(\exp_{\mathfrak{h}}(t+s)(X)) = \phi(\exp_{\mathfrak{h}}(tX)) \exp_{\mathfrak{h}}(sX))$

$= \phi(\exp_{\mathfrak{h}}(tX))\phi(\exp_{\mathfrak{h}}(sX)) = a(t)a(s)$.

Παρόμοια $b(t+s) = \exp_{\mathfrak{g}}((d\phi)_e(t+s)(X)) = \exp_{\mathfrak{g}}((t+s)d\phi_e(X))$

$= \exp_{\mathfrak{g}}(td\phi_e(X)) \exp_{\mathfrak{g}}(sd\phi_e(X)) = \exp_{\mathfrak{g}}(d\phi_e(tX)) \exp_{\mathfrak{g}}(d\phi_e(sX)) = b(t)b(s)$

Επιπλέον $a(0) = \phi(e) = e$ και $b(0) = \exp(o) = e$.

Τέλος, έχουμε $\frac{d}{dt}a(t)\Big|_{t=0} = \frac{d\phi(\exp_{\mathfrak{h}}(tX))}{dt}\Big|_{t=0} = d\phi_e(\frac{d}{dt}\exp_{\mathfrak{h}}(tX)\big|_{t=0}) = d\phi_e(X)$

και $\frac{d}{dt}b(t)\big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\exp_{\mathfrak{g}}((d\phi)_e(tX)))\big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\exp_{\mathfrak{g}}(t(d\phi)_e(X)))\big|_{t=0} = d\phi_e(X)$.

Άρα οι μονοπαραμετρικές ομάδες $a(t), b(t)$ ταυτίζονται λόγω μοναδικότητας (έχουν ίδιες αρχικές συνθήκες και $\frac{d}{dt}a(t)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}b(t)\big|_{t=0}$). Άρα ισχύει το ζητούμενο. □

Ως συμπέρασμα του παραπάνω θεωρήματος έχουμε ότι αν H είναι μια υποομάδα Lie της G (η οποία επάγει ένα λείο ομομορφισμό $i : H \to G$), και $\mathfrak{h}$ η αντίστοιχη άλγεβρα της H, τότε για κάθε $X \in \mathfrak{h}$ ισχύει:

$\exp_{\mathfrak{h}}(X) = i(\exp_{\mathfrak{h}}(X)) = \exp_{\mathfrak{g}}(di_e(X)) = \exp_{\mathfrak{g}}(X)$

Στην περίπτωση που $G = Gl_n R$, η εκθετική απεικόνιση δίνεται ως

$\exp(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!}$, $X \in M_n\mathbb{R}$,

δηλαδή η εκθετική απεικόνιση πινάκων. Είναι εύκολο να δούμε οτι η απεικόνιση αυτή πληρεί τις χαρακτηριστικές ιδιότητες της εκθετικής απεικόνισης.

Γενικά δεν ισχύει η ιδιότητα $\exp(X+Y) = \exp(X)\exp(Y)$. Παρακάτω θα δούμε τι ισχύει στην γενική περίπτωση. Παραθέτουμε το παρακάτω θεώρημα χωρίς απόδειξη.

Θεώρημα 3.5.2. *Για αρκετά μικρά* $X, Y \in \mathfrak{g}$ *ισχύει* $\exp(X)\exp(Y) = \exp(X + Y + \frac{1}{2}[X,Y] + \frac{1}{12}[X - Y, [X,Y]] + ...)$
όπου οι υπόλοιποι όροι εξαρτώνται από το γινόμενο Lie και είναι αμελητέοι.

Ο παραπάνω τύπος ονομάζεται τύπος Campbell-Baker-Hausdorff. Πολλές φορές συναντάμε τον παραπάνω τύπο με τη μορφή:
$\exp(tX)\exp(tY) = \exp(tX + tY + \frac{t^2}{2}[X,Y] + O(t^3))$, όπου $O(t^3)$ είναι φραγμένη συνάρτηση που εξαρτάται από το t^3.

3.6 Το θεώρημα της κλειστής υποομάδας

Έστω G μια ομάδα Lie. Παρακάτω έχουμε ένα θεώρημα που δίνει μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι μια υποομάδα H της G, υποομάδα Lie αυτής.

Θεώρημα 3.6.1. *Έστω G ομάδα Lie και H μια υποομάδα αυτής (με την αλγεβρική έννοια). Η H είναι υποομάδα Lie της G εαν και μόνο εαν η H είναι κλειστό υποσύνολο της G.*

Απόδειξη. Έστω ότι η H είναι υποομάδα Lie της G. Θα αποδείξουμε ότι είναι κλειστή. Η H ως υποομάδα Lie της G είναι υποπολλαπλότητα της G, άρα είναι τοπικά κλειστό σύνολο στη G. Οπότε υπάρχει ανοικτή γειτονιά U του $e \in G$, τέτοια ώστε το $U \cap H$ να είναι κλειστό σύνολο στο U.
Έστω $y \in \bar{H}$. Θα αποδείξουμε ότι $y \in H$ (Άρα $H = \bar{H}$). Λόγω διαφορισιμότητας των απεικονίσεων inv, μ στη G και δεδομένου ότι το U είναι ανοικτό, έχουμε ότι το U^{-1} είναι ανοικτή γειτονιά του e στη G και το yU^{-1} είναι ανοικτή γειτονιά του y στη G.
Επειδή $y \in \bar{H}$, υπάρχει $x \in yU^{-1} \cap H$. Άρα $y \in xU$. Έχουμε ότι $y \in \bar{H} \cap xU$

και $x^{-1}y \in \bar{H} \cap U$. Αυτό θα αποδειχθεί ως εξής:
Προφανώς $x^{-1}y \in U$. Επιπλέον $x^{-1}y \in \bar{H}$, διότι για κάθε ανοικτή γειτονιά V του $x^{-1}y \in \bar{H}$, η xV είναι ανοικτή στη G και $y \in xV$, άρα δεδομένου ότι $y \in \bar{H}$, υπάρχει $k \in xV \cap H$, άρα $x^{-1}k \in V \cap H$, οπότε $V \cap H \neq \emptyset$ και συνεπώς $x^{-1}y \in \bar{H}$.
Επιπλέον $\bar{H} \cap U = H \cap U$.
(Η παραπάνω ισότητα ισχύει ως εξής:
Προφανώς έχουμε $H \cap U \subseteq \bar{H} \cap U$. Τώρα αν $x \in \bar{H} \cap U$, είναι $x \in \bar{H}$ και $x \in U$. Άρα για κάθε V_x ανοικτή περιοχή του x είναι $V_x \cap U \neq \emptyset$. Επιπλέον το $V_x \cap U$ είναι ανοικτή περιοχή του x, άρα $(V_x \cap U) \cap H \neq \emptyset$, δηλαδή $V_x \cap (U \cap H) \neq \emptyset$. Άρα $x \in \overline{H \cap U} = H \cap U$, (διότι $H \cap U$ κλειστό). Άρα $\bar{H} \cap U \subseteq H \cap U$.)
Τέλος είναι $x^{-1}y \in \bar{H} \cap U = H \cap U$, άρα $x^{-1}y \in H$, άρα $y \in H$. Οπότε $H = \bar{H}$.

Αντίστροφα, έστω ότι η H είναι κλειστή υποομάδα της G. Θα αποδείξουμε ότι είναι υποπολλαπλότητα της G. Προς αυτή την κατεύθυνση, αρκεί να δείξουμε ότι η H είναι τοπικά αμφιδιαφορική με έναν διανυσματικό υπόχωρο $\mathfrak{h}$ της $\mathfrak{g}$ (ο οποίος θα αποτελεί και την άλγεβρα Lie της H). Δηλαδή θα αποδείξουμε ότι για κάθε $h \in H$ υπάρχει ανοικτή περιοχή U στη $\mathfrak{g}$ τέτοια ώστε το σύνολο $U \cap \mathfrak{h}$ να είναι αμφιδιαφορικό με κάποιο σύνολο $V \cap H$, όπου V ανοικτή περιοχή του h στη G.
Θα αρκούσε $h = e$ διότι η αριστερή μεταφορά L_g είναι αμφιδιαφόριση και μια ανοικτή γειτονιά του e μεταφέρεται σε μια ανοικτή γειτονιά του τυχαίου h. Γνωρίζουμε ότι η απεικόνιση $\exp : \mathfrak{g} \to G$ ορίζει μια τοπική αμφιδιαφόριση της $\mathfrak{g}$ με τη G, άρα είναι ένας τοπικός χάρτης της G στο $e \in G$. Σύμφωνα με τα παραπάνω, αρκεί να βρούμε ανοικτή γειτονιά U του $0 \in \mathfrak{g}$ (οπότε $\exp(U)$ ανοικτή γειτονιά του $e \in G$), τέτοια ώστε
$\exp(U \cap \mathfrak{h}) = \exp(U) \cap H$.

Αρχικά θεωρούμε το σύνολο $\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} : \exp(tX) \in H\}$. Θα αποδείξουμε ότι ο $\mathfrak{h}$ είναι ο ζητούμενος διανυσματικός υπόχωρος του $\mathfrak{g}$:
Είναι $\mathfrak{h} \neq \emptyset$ διότι $0 \in \mathfrak{h}$.
Επιπλέον,από τον ορισμό του $\mathfrak{h}$, για $\lambda \in \mathbb{R}, X \in \mathfrak{h}$ είναι
$\lambda X \in \mathfrak{h}$.
Μένει να αποδείξουμε ότι $X + Y \in \mathfrak{h}$ για $X, Y \in \mathfrak{h}$. Πριν από αυτό όμως χρειάζεται να δούμε μια βασική ιδιότητα του $\mathfrak{h}$:

Έστω X_n ακολουθία στοιχείων του $\mathfrak{h}$ με $X_n \to 0$ (Μπορούμε να βρούμε μια τέτοια ακολουθία, π.χ. για $X \in \mathfrak{h}$ θεωρούμε $X_n = a_n X$ με $a_n \in \mathbb{R}$ και $a_n \to 0$.)
Θέτουμε $Y_n = \frac{X_n}{|X_n|} \in \mathfrak{h}$. Επειδή $|Y_n| = 1$, η ακολουθία Y_n είναι ακολουθία στη

μοναδιαία σφαίρα στο $\mathfrak{g}$, που είναι συμπαγές σύνολο. Άρα έχει συγκλίνουσα υπακολουθία Y_k, με $Y_k \to X \in \mathfrak{g}$. Θα αποδείξουμε ότι $X \in \mathfrak{h}$, ή ισοδύναμα ότι $\exp(tX) \in H$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$:
(Απόδειξη:)Είναι $X = \lim_{k\to\infty} \frac{X_k}{|X_k|}$. Έστω $t \in \mathbb{R}$.

Υπάρχει ακολουθία (z_k) του συνόλου $\mathbb{Z}$ με $z_k X_k \to t$.

Το παραπάνω ισχύει διότι αν επιλέξουμε $z_k = \max\left\{z \in \mathbb{Z} : z \leq \frac{|X_k|}{t}\right\}$,έχουμε

$|z_k|X_k| - t| = |z_k - \frac{t}{|X_k|}||X_k| \leq 1|X_k| = |X_k|$.

Άρα $|z_k|X_k| - t| \leq |X_k|$, με $|X_k| \to 0$, άρα για $k \to \infty$ είναι $z_k|X_k| \to t$.

Οπότε $\exp(z_k X_k) = \exp(z_k|X_k|\frac{X_k}{|X_k|}) \to \exp(tX)$ για $k \to \infty$.

Όμως $\exp(z_k X_k) = (\exp(X_k))^{z_k} \in H$ κι επειδή η H είναι κλειστή, το

$\lim_{k\to\infty}(\exp(X_k))^{z_k} = \exp(tX)$

ανήκει στην H.

Επιπλέον, αν θεωρήσουμε το σύνολο

$W = \left\{tX : X = \lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{|X_n|}, X_n \in \mathfrak{h}, |X_n| \to 0, t \in \mathbb{R}\right\}$ είναι

$W \subseteq \mathfrak{h}$. Επιπλέον, αν $X \in \mathfrak{h}$, είναι

$Y = \frac{X}{|X|} \in \mathfrak{h}$ και $\frac{t_n Y}{|t_n Y|} \to Y$, όπου $t_n \in \mathbb{R}^+$ και $t_n \to 0$.

Άρα $Y \in W$ συνεπώς $\frac{X}{|X|} \in W$, άρα $X \in W$ από τον ορισμό του W. Οπότε $\mathfrak{h} \subseteq W$, άρα $\mathfrak{h} = W$

Τώρα θα αποδείξουμε ότι $X + Y \in \mathfrak{h}$, για κάθε $X, Y \in \mathfrak{h}$:
Είδαμε από τον τύπο Campbell-Baker-Hausdorff ότι για αρκετά μικρά X, Y έχουμε $\exp(x)\exp(Y) = \exp(\mu(X,Y))$, όπου η $\mu(X,Y)$ είναι συνάρτηση που εξαρτάται από τα $X, Y, [X,Y]$.
Για $X, Y \in \mathfrak{h}$ και $t \in \mathbb{R}$ αρκετά μικρό, θεωρούμε την καμπύλη

$a(t) = \exp^{-1}(\exp(tX)\exp(tY)) = t\mu(X,Y)$ στην $\mathfrak{h}$, που ορίζεται στην U.

Η καμπύλη $\gamma(t) = \exp(tX)\exp(tY)$ είναι η αντίστοιχη καμπύλη στην H ($\exp^{-1}$ είναι χάρτης της G).

Οπότε είναι $a\acute{}(0) = \frac{da(t)}{dt}\Big|_{t=0} = \lim_{t\to 0^+}\frac{a(t)-a(0)}{t-0}$

$= \lim_{t\to 0^+}\frac{a(t)}{t}$.

Από την άλλη έχουμε $\frac{da(t)}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{d\exp^{-1}(\exp(tX)\exp(tY))}{dt}|_{t=0}$

$= \frac{dm(\exp(tX),\exp(tY))}{dt}|_{t=0} = dm_o(X,Y) = X+Y$.

(στην παραπάνω ισότητα χρησιμοποιήσαμε ότι $d(\exp)_0 = \mathrm{Id}_{\mathfrak{g}}$).

Άρα $\frac{a(t)}{t} \to X+Y$ για $t \to 0^+$.

Επιπλέον, $\frac{a(t)}{|a(t)|} = \frac{a(t)}{t}\frac{t}{|a(t)|} = \frac{a(t)}{t}|\frac{t}{|a(t)|}| \to \frac{X+Y}{|X+Y|}$ για $t \to 0^+$.

(στην παραπάνω ισότητα χρησιμοποιήσαμε ότι $t > 0$). Άρα $\frac{X+Y}{|X+Y|} \in \mathfrak{h}$ συνεπώς $X+Y \in \mathfrak{h}$.
Άρα ο $\mathfrak{h}$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathfrak{g}$.

Τέλος, θα αποδείξουμε ότι υπάρχει ανοικτή γειτονιά U του $0 \in \mathfrak{g}$ τέτοια ώστε $\exp(U\cap H) = \exp(U)\cap H$ ή ισοδύναμα

$$\exp(U)\cap H \subseteq \exp(U\cap\mathfrak{h}) \tag{3.4}$$

καθώς από τον ορισμό του $\mathfrak{h}$ ισχύει $\exp(U\cap\mathfrak{h}) \subseteq \exp(U)\cap H$.
Έστω αντίθετα ότι δεν υπάρχει τέτοια γειτονιά, δηλαδή για κάθε γειτονιά U δεν ισχύει η (3.4).
Τότε θεωρούμε μια αριθμήσιμη βάση $\{U_n\}$ ανοικτών περιοχών του $0 \in \mathfrak{g}$. Λόγω υπόθεσης, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $h_n \in \exp(U_n)\cap H$ και $h_n \notin \exp(U\cap\mathfrak{h})$.
Δεδομένου ότι ο $\mathfrak{h}$ είναι υπόχωρος του $\mathfrak{g}$ υπάρχει $\mathfrak{m}$ ορθογώνιος υπόχωρος του $\mathfrak{g}$ ως προς τον $\mathfrak{h}$. Για αρκετά μεγάλα n και κατά συνέπεια για αρκετά μικρά U_n, η απεικόνιση:

$\mathfrak{h} \times \mathfrak{m} \to G$ με $(X, Y) \to \exp(X)\exp(Y)$ αποτελεί αμφιδιαφόριση από την γειτονιά U_n σε μια γειτονιά του $e \in G$.
Έστω $h_n = \exp(X_n)\exp(Y_n)$ για $X_n \in U_n \cap \mathfrak{h}, Y_n \in U_n \cap \mathfrak{m}$.
Είναι $Y_n \neq 0$, διότι σε αντίθετη περίπτωση θα ίσχυε
$h_n = \exp(X_n) \in \exp(U_n \cap \mathfrak{h})$.

Επιπλέον $Y_n \to 0$ για $n \to \infty$ και

$$\exp(Y_n) = \exp^{-1}(X_n)h_n \in H \tag{3.5}$$

Συμπεραίνουμε ότι $|Y_n| \to 0$ και η ακολουθία $\frac{Y_n}{|Y_n|}$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία $\frac{Y_k}{|Y_k|}$, άρα υπάρχει Y με $\frac{Y_k}{|Y_k|} \to Y$.

Με μια παρόμοια διαδικασία με προηγουμένως και λόγω της σχέσης (3.5) έχουμε $\exp(tY) \in H$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$, συνεπώς $Y \in H$, πράγμα άτοπο.
Άρα ισχύει το ζητούμενο. □

3.7 Κλασικές ομάδες Lie

Παρακάτω θα δούμε κάποιες ομάδες πινάκων οι οποίες ως κλειστές υποομάδες της $Gl_n\mathbb{R}$ ή $Gl_n\mathbb{C}$ αποτελούν ομάδες Lie και θα περιγράψουμε σε κάθε μία την άλγεβρα Lie.

Παράδειγμα 3.7.1. *Τα σύνολα $Sl_n\mathbb{R} = \{A \in M_n\mathbb{R} : \det A = 1\}$ και $Sl_n\mathbb{C} = \{A \in M_n\mathbb{C} : \det A = 1\}$ είναι πολλαπλασιαστικές υποομάδες της $Gl_n\mathbb{R}$ ($\det(AB) = \det A \det B$).*
Για την $Sl_n\mathbb{R}$ (όμοια και για την $Sl_n\mathbb{C}$) ισχύει το εξής:
Είναι κλειστό σύνολο στο $M_n\mathbb{R}$ καθώς $Sl_n\mathbb{R} = \det^{-1}(\{1\})$, άρα είναι κλειστό σύνολο και στο $Gl_n\mathbb{R}$. Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα κλειστής υποομάδας είναι υποομάδα Lie της $Gl_n\mathbb{R}$. Η διάσταση της $Sl_n\mathbb{R}$ είναι $n^2 - 1$.

Για να περιγράψουμε την άλγεβρα της $Sl_n\mathbb{R}$ θεωρούμε $\dot{a}(0) \in T_I Sl_n\mathbb{R}$ όπου $a : \mathbb{R} \to Sl_n\mathbb{R}$ καμπύλη με $a(0) = I$.

Ισχύει $\det(a(t)) = 1$ άρα $\frac{d}{dt}\det(a(t))\,|_{t=0} = 0$,

συνεπώς
$$(d\det)_I(\dot{a}(0)) = 0 \tag{3.6}$$

Τώρα,για την λεία απεικόνιση $\det : M_n\mathbb{R} \to R$ *θεωρούμε την καμπύλη* $b(t) = \exp(t\dot{a}(0))$*, όπου* $\exp$ *είναι η εκθετική απεικόνιση πινάκων.*
Ισχύει $b(0) = I, \dot{b}(0) = \dot{a}(0)$*.Οπότε*

$(d\det)_I(\dot{a}(0)) = \frac{d}{dt}\det(\exp(t\dot{a}(0)))\,\big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\exp(t\,\mathrm{Tr}(\dot{a}(0)))\,|_{t=0} =$

$\mathrm{Tr}(\dot{a}(0))\exp(t\,\mathrm{Tr}(\dot{a}(0)))\,|_{t=0} = \mathrm{Tr}(\dot{a}(0))$

Άρα, λόγω της σχέσης (3.6) έχουμε ότι
$\mathfrak{sl}_n\mathbb{R} = T_I Sl_n\mathbb{R} \subseteq \{X \in M_n\mathbb{R} : \mathrm{Tr}(X) = 0\}$.

Τέλος, επειδή το σύνολο των πινάκων μηδενικού ίχνους είναι διανυσματικός χώρος διάστασης $n^2 - 1 =_n \mathbb{R}$*, έχουμε ταύτιση των χώρων αυτών.*

Άρα $\mathfrak{sl}_n\mathbb{R} = \{X \in M_n\mathbb{R} : Tr(X) = 0\}$.

Όμοια $\mathfrak{sl}_n\mathbb{C} = \{X \in M_n\mathbb{C} : Tr(X) = 0\}$.

Παράδειγμα 3.7.2. *Οι υποομάδες* $O(n), U(n)$ *με* $O(n) = \{A \in Gl_n\mathbb{R} : AA^T = I\}$ *και*
$U(n) = A \in Gl_n\mathbb{C} : A\bar{A}^T = I\}$*, όπου* A^T *είναι ο ανάστροφος του* A *και* $\bar{A}$ *ο συζυγής του* A*, είναι υποομάδες Lie των* $Gl_n\mathbb{R}, Gl_n\mathbb{C}$ *αντίστοιχα.*
Θα το δούμε για την $O(n)$ *και όμοια αποδεικνύεται για την* $U(n)$*.*
Αρχικά έχουμε ότι $O(n) = f^{-1}(I)$*, όπου* $f : Gl_n\mathbb{R} \to Gl_n\mathbb{R}$
με $f(A) = AA^T$*. Άρα η* $O(n)$ *είναι κλειστή υποομάδα της* $Gl_n\mathbb{R}$ *άρα και υποομάδα Lie αυτής. Η διάσταση της* $O(n)$ *υπολογίζεται εύκολα από τη μορφή των πινάκων* $A \in O(n)$ *και είναι* $\frac{n^2-n}{2}$*. Σημειώνουμε επίσης ότι για* $A \in O(n), U(n)$ *είναι* $\det A = 1$ *ή* $\det A = -1$*.*

Για την άλγεβρα $\mathfrak{o}(\mathfrak{n})$ *της* $O(n)$ *ακολουθούμε διαδικασία παρόμοια με προηγουμένως.*
Έστω $\dot{a}(0) \in \mathfrak{o}(\mathfrak{n})$ *όπου* $a(t)$ *καμπύλη στην* $O(n)$ *με* $a(0) = I$*.*

Ισχύει $a(t)a(t)^T = I$*, για κάθε* $t \in \mathbb{R}$*, άρα* $\frac{d}{dt}(a(t)a(t)^T)\,|_{t=0} = 0$ *άρα*

$$\dot{a}(0)a(0)^T + a(0)\dot{a(0)}^T = 0, \text{ οπότε } \dot{a}(0) + \dot{a}(0)^T = 0$$

Οπότε $\mathfrak{o}(\mathfrak{n}) \subseteq \{X \in M_n\mathbb{R} : X = -X^T\}$ *δηλαδή τον υπόχωρο των πραγματικών αντισυμμετρικών πινάκων. Επειδή όμως η διάσταση αυτού του υποχώρου είναι* $\frac{n^2-n}{2} = \dim O(n)$ *έχουμε ταύτιση των παραπάνω χώρων. Άρα*

$$\mathfrak{o}(\mathfrak{n}) = \{X \in M_n\mathbb{R} : X = -X^T\} \text{ και } \mathfrak{u}(\mathfrak{n}) = \{X \in M_n\mathbb{C} : X = -\bar{X}^T\}$$

Παράδειγμα 3.7.3. *Οι υποομάδες* $SO(n), SU(n)$ *με* $SO(n) = \{A \in O(n) : \det A = 1\}$ *και* $SU(n) = \{A \in U(n) : \det A = 1\}$ *είναι κλειστές υποομάδες των* $Gl_n\mathbb{R}, Gl_n\mathbb{C}$ *αντίστοιχα, άρα υποομάδες Lie αυτών.*
Επιπλέον, για τις αντίστοιχες άλγεβρες Lie είναι:

$$\mathfrak{so}(\mathfrak{n}) = \{X \in M_n\mathbb{R} : X = -X^T, Tr(X) = 0\}$$

$$\mathfrak{su}(\mathfrak{n}) = \{X \in M_n\mathbb{C} : X = -X^T, Tr(X) = 0\}$$

Πρόταση 3.7.1. *Η ομάδα* $U(n)$ *είναι συμπαγής.*

Απόδειξη. Η $U(n)$ είναι κλειστό υποσύνολο του $M_n\mathbb{C} \cong \mathbb{C}^{n^2} \cong \mathbb{R}^{2n^2}$. Επιπλέον για $A = (a_{ij}) \in U(n)$ έχουμε $A\bar{A}^T = I$, άρα $\sum_j a_{ij}\bar{a_{ij}} = 1$ οπότε $\sum_j |a_{ij}|^2 = 1$. Συνεπώς η $U(n)$ είναι επιπλέον φραγμένο υποσύνολο του R^{2n^2}. Άρα είναι συμπαγής. □

Προκύπτει ότι οι ομάδες $O(n), SO(n), SU(n)$ είναι συμπαγείς ως κλειστά υποσύνολα της $U(n)$.

3.8 Αναπαραστάσεις ομάδων και αλγεβρών Lie

Ορισμός 3.8.1. *Μια αναπαράσταση μιας ομάδας Lie* G *είναι ένας ομομορφισμός ομάδων Lie* $\rho : G \to Gl(V)$, *όπου* V *είναι διανυσματικός χώρος και* $Gl(V)$ *είναι το σύνολο των γραμμικών και αντιστρέψιμων απεικονίσεων* $T : V \to V$. *Ως διάσταση μιας αναπαράστασης ορίζουμε τη διάσταση του* V.

Δηλαδή για κάθε $g \in G$, το $\rho(g)$ είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός στο V και έχουμε για κάθε $g_1, g_2 \in G, v \in V$ ότι
$\rho(g_1, g_2)v = (\rho(g_1)\rho(g_2))v = \rho(g_1)(\rho(g_2)v)$ και $\rho(e)v = \mathrm{Id}\, v = v$.

Ένα κλασικό παράδειγμα αναπαράστασης είναι η $\rho : Gl(V) \to Gl(V)$ με $\rho(A)v = Av$ όπου Av είναι το διάνυσμα που προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό του διανύσματος v με τον πίνακα $A \in Gl(V)$.

Ορισμός 3.8.2. *Μια αναπαράσταση αλγεβρών Lie είναι ένας ομομορφισμός αλγεβρών Lie* $\rho : \mathfrak{g} \to V$. *Δηλαδή ισχύει για κάθε* $X, Y \in \mathfrak{g}, v \in V$ *ότι* $\rho([X,Y])v = [\rho(X)v, \rho(Y)v]$ *και* $\rho(0)v = 0$.

Από το θεώρημα **3.3.1** συμπεραίνουμε ότι αν η ρ είναι αναπαράσταση ομάδων Lie, τότε η $(d\rho)_e$ είναι αναπαράσταση αλγεβρών Lie.

Τώρα θα δούμε ένα κριτήριο για το πότε δύο αναπαραστάσεις ομάδων Lie θεωρούνται ισοδύναμες. Άν θεωρήσουμε V, W διανυσματικούς χώρους, ορίζουμε $\mathrm{Hom}(V,W)$ το σύνολο των γραμμικών απεικονίσεων $T : V \to W$.

Ορισμός 3.8.3. *Δυο αναπαραστάσεις* $(\rho_1, V), (\rho_2, W)$ *με* $\dim V = \dim W$, *μιας ομάδας Lie* G *ονομάζονται ισοδύναμες αν υπάρχει ισομορφισμός* $T \in \mathrm{Hom}(V,W)$ *τέτοιο ώστε* $T \circ \rho_1 = \rho_2 \circ T$ *ή ισοδύναμα αν για κάθε* $g \in G, v \in V$ *ισχύει* $T(\rho_1(g)v) = \rho_2(g)(Tv)$.
Μια τέτοια απεικόνιση ονομάζεται $G-$*απεικόνιση και το σύνολο των* $G-$ *απεικονίσεων συμβολίζεται με* $\mathrm{Hom}_G(V,W)$.

Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι η έννοια των ισοδύναμων αναπαραστάσεων είναι καλώς ορισμένη και ότι το σύνολο $\mathrm{Hom}_G(V,W)$ αποτελεί διανυσματικό χώρο.

Ορισμός 3.8.4. *Έστω* (ρ, V) *μια αναπαράσταση μιας ομάδας Lie* G. *Ένας υπόχωρος* U *του* V *ονομάζεται* G*-αναλλοίωτος αν* $\rho(G)U \subseteq U$ *δηλαδή αν για κάθε* $g \in G, u \in U$ *ισχύει* $\rho(g)u \in U$.
Μια αναπαράσταση ονομάζεται μη αναγώγιμη αν οι μόνοι G*-αναλλοίωτοι υπόχωροι του* V *είναι οι* $\{0\}, V$.

Θεώρημα 3.8.1. *(Λήμμα του Schur) Έστω* $(\rho_1, V), (\rho_2, W)$ *μιγαδικές μη αναγώγιμες αναπαραστάσεις πεπερασμένης διάστασης μιας ομάδας Lie* G.
Αν $V \cong W$ *τότε* $\dim(\mathrm{Hom}_G(V,W)) = 1$ *και*
αν $V \neq W$ *τότε* $\dim(\mathrm{Hom}_G(V,W)) = 0$.

Απόδειξη. Έστω $T \in \mathrm{Hom}_G(V,W)$. Τότε ο πυρήνας $\ker(T)$ είναι G-αναλλοίωτος διανυσματικός υπόχωρος του V καθώς για κάθε $g \in G$ και $v \in \ker(T)$ ισχύει $T(\rho_1(g)v) = \rho_2(g)(Tv) = \rho_2(g)0 = 0$. Άρα $\rho_1(g)v \in \ker(T)$.

Το ίδιο ισχύει και για την εικόνα $Im(T)$ που είναι $G-$αναλλοίωτος χώρος του W, καθώς είναι $\rho_2(g)TV = T(\rho_1(g)V)$.
Τώρα, αν $V \neq W$ έχουμε $\ker(T) \neq \{0\}$ οπότε $\ker(T) = V$, λόγω της μη αναγωγιμότητας και όμοια $Im(T) = \{0\}$.
Άρα $T = 0$ συνεπώς $\dim(\mathrm{Hom}_G(V,W)) = 0$. Αν $V \cong W$ τότε αναγκαστικά ισχύει $\ker(T) = 0$ και $Im(T) = W$.

Για να αποδείξουμε ότι η διάσταση είναι 1 σε αυτή την περίπτωση πρέπει να αποδείξουμε ότι κάθε άλλη G-απεικονιση εκφράζεται ως πολλαπλάσιο του T.
Έστω $T_1 \neq T \in \mathrm{Hom}_G(V,W)$.
Ισχύει $T \circ T_1^{-1} \in \mathrm{Hom}_G(V,W)$.
Έστω λ μια ιδιοτιμή του $T \circ T_1^{-1}$ (ο V είναι μιγαδικός χώρος).
Άρα $\ker(T \circ T_1^{-1} - \lambda I) \neq 0$. Επιπλέον ο $\ker(T \circ T_1^{-1} - \lambda I)$ είναι G-αναλλοίωτος υπόχωρος του V, άρα $\ker(T \circ T_1^{-1} - \lambda I) = V$.
Οπότε $T \circ T_1^{-1} = \lambda I$, συνεπώς $T = \lambda T_1$.
Οπότε $\mathrm{Hom}_G(V,W) = span_{\mathbb{C}} T$ και $\dim(\mathrm{Hom}_G(V,W)) = 1$. □

Ορισμός 3.8.5. *Μια αναπαράσταση πεπερασμένης διάστασης ονομάζεται πλήρως αναγώγιμη αν γράφεται ως ευθύ άθροισμα μη αναγώγιμων υποχώρων.*

Ορισμός 3.8.6. *Έστω (ρ, V) αναπαράσταση μιας ομάδας Lie G. Ένα εσωτερικό γινόμενο*
$(,) : V \times V \to \mathbb{C}$ *ονομάζεται G-αναλλοίωτο αν* $(\rho(g)v_1, \rho(g)v_2) = (v_1, v_2)$
για κάθε $g \in G, v_1, v_2 \in V$.
Μια αναπαράσταση καλείται μοναδιαία αν υπάρχει G-αναλλοίωτο εσωτερικό γινόμενο στο V.

Θα δούμε κάποια αποτελέσματα για τις αναπαραστάσεις συμπαγών ομάδων Lie:

Θεώρημα 3.8.2. *Κάθε αναπαράσταση μιας συμπαγούς ομάδας Lie είναι μοναδιαία.*

Δε θα παραθέσουμε απόδειξη για αυτό το θεώρημα,απλά αναφέρουμε ότι η μορφή αυτή δίνεται ως $(v_1, v_2) = \int_G (\rho(g)v_1, \rho(g)v_2) dg$ και μπορούμε να την ορίσουμε σε κάθε συμπαγή ομάδα Lie G (βλ.[16]).

Θεώρημα 3.8.3. *Κάθε πεπερασμένης διάστασης αναπαράσταση μιας συμπαγούς ομάδας Lie G είναι πλήρως αναγώγιμη.*

Απόδειξη. Έστω (ρ, V) μια αναπαράσταση της G. Έστω $(,)$ ένα G-αναλλοίωτο εσωτερικό γινόμενο. Αν $W \subset V$ ένας G-αναλλοίωτος υπόχωρος διάφορος του τετριμμένου τότε $V = W \oplus \tilde{W}$, όπου $\tilde{W}$ είναι ο ορθογώνιος υπόχωρος του W ως προς τη μορφή $(,)$. Επιπλέον έχουμε ότι ο $\tilde{W}$ είναι G-αναλλοίωτος καθώς για $w \in W, w_1 \in \tilde{W}, g \in G$ ισχύει

$$(\rho(g)w_1, w) = (\rho(g)w_1, \rho(gg^{-1})w) = (\rho(g)w_1, \rho(g)(\rho(g^{-1})w))$$

$= (w_1, \rho(g^{-1}w)) = 0$. Άρα $\rho(g)w_1 \in \tilde{W}$ οπότε ο $\tilde{W}$ είναι $G-$αναλλοίωτος.

Τώρα για να αποδείξουμε την πρόταση εφαρμόζουμε επαγωγή στη διάσταση του V υποθέτοντας ότι το θεώρημα ισχύει για μικρότερες διαστάσεις. Άρα ισχύει και για τους χώρους $W, \tilde{W}$ ως αναπαραστάσεις της G, οπότε επαγωγικά προκύπτει και η διάσπαση του V. □

Οπότε έχουμε την ανάλυση $V = \oplus_{i=1}^{N} n_i V_i$, όπου V_i είναι οι $G-$αναλλοίωτοι υπόχωροι του V και $n_i \in \mathbb{N}$.

3.9 Η συζυγής αναπαράσταση

Έστω G ομάδα Lie. Θεωρούμε τον αυτομορφισμό $c_g : G \to G$ με $c_g(x) = gxg^{-1}$. Είναι $c_g(e) = e$ και έχουμε ότι ο $(dc_g)_e : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ είναι αυτομορφισμός της $\mathfrak{g}$.
Θεωρούμε την αναπαράσταση $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ με $\mathrm{Ad}(g) = (dc_g)_e$ δηλαδή για $X_e \in \mathfrak{g}$ είναι $\mathrm{Ad}(g)(X_e) = (dc_g)_e(X_e)$.
Η απεικόνιση Ad είναι πράγματι λείος ομομορφισμός διότι

$\mathrm{Ad}(g_1)\,\mathrm{Ad}(g_2) = (dc_{g_1})_e \circ (dc_{g_2})_e = (d(c_{g_1} \circ c_{g_2}))_e$ και ισχύει

$$(c_{g_1} \circ c_{g_2})(x) = g_1(g_2 x g_2^{-1})g_1^{-1} = (g_1 g_2)x(g_1 g_2)^{-1} = c_{g_1 g_2}(x).$$

Άρα $\mathrm{Ad}(g_1)\,\mathrm{Ad}(g_2) = \mathrm{Ad}(g_1 g_2)$.

Η Ad ονομάζεται **συζυγής αναπαράσταση** της G. Αντίστοιχα θεωρούμε την συζυγή αναπαράσταση της $\mathfrak{g}$ ως:

$\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to End(\mathfrak{g})$ με $\mathrm{ad}(X)Y = (d\,\mathrm{Ad})_e(X)(Y)$

Πρόταση 3.9.1. *Έστω* $X, Y \in \mathfrak{g}$. *Ισχύει* $\mathrm{ad}(X)(Y) = [X, Y]$.

Απόδειξη. Για την απόδειξη αυτή θεωρούμε $R_g : G \to G$ την απεικόνιση δεξιάς μεταφοράς με $R_g(x) = xg$, η οποία ,όπως και η αριστερή μεταφορά αποτελεί αμφιδιαφόριση.

Έχουμε $\mathrm{ad}(X)(Y) = (d\,\mathrm{Ad}_e(X))Y = \frac{d}{dt}\mathrm{Ad}(\exp(tX))Y\,|_{t=0}$.

Επιπλέον $c_g(x) = (R_{g^{-1}} \circ L_g)(x)$

Άρα $\mathrm{ad}(X)(Y) = \frac{d}{dt}(dR_{\exp^{-1}(tX)} \circ dL_{\exp(tX)})_e Y\,|_{t=0}$

$= \frac{d}{dt}(dR_{\exp(-tX)e} \circ dL_{exp(tX)e}Y)\,\big|_{t=0} = \frac{d}{dt}dR_{\exp(-tX)}Y_{\exp(tX)}\,|_{t=0}$

(διότι το Y είναι αριστερά αναλλοίωτο.)
Επιπλέον,η ροή ϕ_t^X του X στο $g \in G$ δίνεται ως

$\phi_t^X(g) = \phi^X(t, g) = L_g(\phi^X(t, e)) = g\exp(tX) = R_{\exp(tX)}(g)$

Άρα συνεχίζοντας την ισότητα έχουμε $\mathrm{ad}(X)(Y) = \frac{d}{dt}d\phi_{-t}^X Y(\phi_t^X(e))\,|_{t=0}$

$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(d\phi_{-t}^X Y(\phi_t^X(e)) - Y_e) = [X, Y]$, όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από την πρόταση **2.4.2** □

3.10 Η μορφή Killing

Είδαμε ότι για κάθε αναπαράσταση συμπαγούς ομάδας Lie υπάρχει μια $G-$αναλλοίωτη μορφή $(,)$. Στην περίπτωση της συζυγούς αναπαράστασης έχουμε τη μορφή Killing.

Ορισμός 3.10.1. *Η μορφή Killing της άλγεβρας Lie* $\mathfrak{g}$ *είναι η απεικόνιση* $B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ *με* $B(X, Y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\,X \circ \mathrm{ad}\,Y)$
δηλαδή το ίχνος του πίνακα του μετασχηματισμού $\mathrm{ad}\,X \circ \mathrm{ad}\,Y : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$
με

$$\mathrm{ad}\,X \circ \mathrm{ad}\,Y(Z) = [X, [Y, Z]] \tag{3.7}$$

.

Πρόταση 3.10.1. *Η μορφή Killing έχει τις εξής ιδιότητες:*

1)Είναι διγραμμική συμμετρική μορφή.

Απόδειξη. Η διγραμμικότητα προκύπτει εύκολα από τη σχέση (3.7) και το γεγονός ότι $\mathrm{Tr}(kA+B) = k\,\mathrm{Tr}(A)+\mathrm{Tr}(B)$ δηλαδή τη γραμμικότητα της συνάρτησης $\mathrm{Tr} : \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$.

Για τη συμμετρικότητα, αν A, B είναι οι πίνακες των μετασχηματισμών $\mathrm{ad}\,X : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ και $\mathrm{ad}\,Y : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ αντίστοιχα, τότε ο πίνακας του μετασχηματισμού $\mathrm{ad}\,X \circ \mathrm{ad}\,Y : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ είναι ο AB. Επιπλέον
$B(X,Y) = \mathrm{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n}(AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(A)_{ik}(B)_{ki}$

$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(B)_{ki}(A)_{ik} = \sum_{k=1}^{n}(BA)_{kk} = \mathrm{Tr}(BA) = B(Y,X)$.

(Γενικότερα ισχύει $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.) □

2)Η μορφή Killing είναι $\mathrm{Ad}(g)$-αναλλοίωτη για κάθε $g \in G$.

Απόδειξη. Είναι

$$B(\mathrm{Ad}(g)X, \mathrm{Ad}(g)Y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(\mathrm{Ad}(g)X) \circ \mathrm{ad}(\mathrm{Ad}(g)Y)) \qquad (3.8)$$

Επιπλέον, για οποιονδήποτε ομομορφισμό αλγεβρών Lie, ϕ, ισχύει:

$\mathrm{ad}(\phi(X))Y = [\phi(X), Y] = [\phi(X), \phi(\phi^{-1}(Y))] = \phi([X, \phi^{-1}(Y)])$

$= \phi((\mathrm{ad}(X)(\phi^{-1}(Y))) = (\phi(\mathrm{ad}\,X)\phi^{-1})(Y)$.

Άρα $\mathrm{ad}(\phi(X)) = \phi \circ \mathrm{ad}\,X \circ \phi^{-1}$.

Άρα για $\phi = \mathrm{Ad}(g)$

$(3.8) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Ad}(g) \circ \mathrm{ad}\,X \circ (\mathrm{Ad}(g))^{-1} \circ \mathrm{Ad}(g) \circ \mathrm{ad}\,Y \circ (\mathrm{Ad}(g))^{-1})$

$= \mathrm{Tr}(\mathrm{Ad}(g) \circ (\mathrm{ad}\,X \circ \mathrm{ad}\,Y) \circ (\mathrm{Ad}(g))^{-1})$

$= \mathrm{Tr}((\mathrm{Ad}(g))^{-1} \circ \mathrm{Ad}(g) \circ (\mathrm{ad}\, X \circ \mathrm{ad}\, Y))$

$= \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\, X \circ \mathrm{ad}\, Y) = B(X, Y)$ □

3)Ο τελεστής $\mathrm{ad}\, Z$, $Z \in \mathfrak{g}$ είναι αντισυμμετρικός ως προς τη μορφή Killing δηλαδή:
$B(\mathrm{ad}(Z)X, Y) = -B(X, \mathrm{ad}(Z)Y)$.

Απόδειξη. Από την ιδιότητα 2) για $g = \exp(tZ)$ έχουμε

$B(\mathrm{Ad}(\exp(tZ))X, \mathrm{Ad}(\exp(tZ))Y) = B(X, Y)$ άρα παραγωγίζοντας έχουμε:

$\frac{d}{dt} B(\mathrm{Ad}(\exp(tZ))X, \mathrm{Ad}(\exp(tZ))Y) \,|_{t=0} = 0$ δηλαδή

$B(\frac{d}{dt} \mathrm{Ad}(\exp(tZ))X \,\Big|_{t=0}, \mathrm{Ad}(\exp(0Z))Y) + B(\mathrm{Ad}(\exp(0Z))X, \frac{d}{dt} \mathrm{Ad}(\exp(tZ))Y \,|_{t=0})$

$= B(d(\mathrm{Ad})_e(Z)X, \mathrm{Ad}(e)Y) + B(\mathrm{Ad}(e)X, d(\mathrm{Ad})_e(Z)Y)$

$= B(\mathrm{ad}(Z)X, Y) + B(X, \mathrm{ad}(Z)Y) = 0.$ □

Κεφάλαιο 4

Ημιαπλές άλγεβρες Lie και θεωρία ριζών

4.1 Ημιαπλές άλγεβρες

Σε αυτό το κεφάλαιο θα δούμε συνοπτικά τη βασική θεωρία των ημιαπλών αλγεβρών Lie και πώς αυτή συνδέεται με την θεωρία ριζών (για αποδείξεις των περισσότερων θεωρημάτων και προτάσεων του κεφαλαίου παραπέμπουμε στο [10].

Έστω $\mathfrak{g}$ μια άλγεβρα Lie. Θεωρούμε την ακολουθία $D^n\mathfrak{g}$ που ορίζεται ως εξής:
$D^0\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$ και $D^{n+1}\mathfrak{g} = [D^n\mathfrak{g}, D^n\mathfrak{g}]$.
Σημειώνουμε ότι κάθε $D^k\mathfrak{g}$ αποτελεί ιδεώδες της $\mathfrak{g}$.

Ορισμός 4.1.1. *Μια άλγεβρα Lie $\mathfrak{g}$ ονομάζεται επιλύσιμη αν $D^n\mathfrak{g} = 0$ για κάποιο n ή ισοδύναμα, αν υπάρχει ακολουθία $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{g}^1 \supset \cdots \supset \mathfrak{g}^n = \{0\}$ με $\mathfrak{g}^{k+1}$ ιδεώδες στην $\mathfrak{g}^k$.*

Ορισμός 4.1.2. *Θεωρούμε την ακολουθία $D^n\mathfrak{g}$ με $D^0\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$ και $D^{n+1}\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, D^n\mathfrak{g}]$.*
Η $\mathfrak{g}$ ονομάζεται μηδενοδύναμη αν υπάρχει n με $D^n\mathfrak{g} = 0$ ή ισοδύναμα αν υπάρχει ακολουθία ιδεωδών $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{g}^1 \supset \cdots \supset \mathfrak{g}^n = \{0\}$ με $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^k] \subset \mathfrak{g}^{k+1}$.

Συμπερασματικά, ισχύει ότι αν η $\mathfrak{g}$ είναι μηδενοδύναμη, τότε είναι επιλύσιμη. Μια επιλύσιμη άλγεβρα είναι άρκετά κοντά στο να γίνει αβελιανή.

Δύο σημαντικά θεωρήματα είναι τα εξής:

Θεώρημα 4.1.1. *(Lie) Έστω $\mathfrak{g}$ μια μιγαδική επιλύσιμη άλγεβρα Lie και (ρ, V) μια αναπαράσταση της $\mathfrak{g}$ πεπερασμένης διάστασης. Τότε υπάρχει κοινό ιδιοδιάνυσμα v όλων των απεικονίσεων $\rho(X) \in Gl(V)$, $X \in \mathfrak{g}$.*
Ισοδύναμα, υπάρχει βάση του V ως προς την οποία όλοι οι ενδομορφισμοί $\rho(X)$ παρίστανται από άνω τριγωνικούς πίνακες.

Θεώρημα 4.1.2. *(Engel) Έστω V μιγαδικός διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης και άλγεβρα Lie $\mathfrak{g}$ με $\mathfrak{g} \subset Gl(V)$ που αποτελείται από μηδενοδύναμους τελεστές $\operatorname{ad} X$ (Για κάθε $X \in \mathfrak{g}$ υπάρχει n με $(\operatorname{ad} X)^n = 0$). Τότε η $\mathfrak{g}$ είναι μηδενοδύναμη και υπάρχει $v \in V$ με $Xv = 0$ για κάθε $X \in \mathfrak{g}$.*
Ισοδύναμα, υπάρχει βάση του V ως προς την οποία όλοι οι ενδομορφισμοί X παρίστανται από άνω τριγωνικούς πίνακες με 0 στην κύρια διαγώνιο.

Ορισμός 4.1.3. *Μια άλγεβρα Lie $\mathfrak{g}$ ονομάζεται ημιαπλή αν δεν περιέχει μη μηδενικά επιλύσιμα ιδεώδη.*

Ουσιαστικά, μια ημιαπλή άλγεβρα άπέχει΄ όσο το δυνατόν περισσότερο από το να είναι αβελιανή.

Ορισμός 4.1.4. *Μια άλγεβρα Lie ονομάζεται απλή αν δεν είναι αβελιανή και δεν περιέχει γνήσια ιδεώδη.*

Ισχύει ότι κάθε απλή άλγεβρα είναι ημιαπλή.
Επιπλέον κάθε ημιαπλή άλγεβρα Lie αποτελεί ευθύ άθροισμα απλών αλγεβρών Lie.

Τα παρακάτω θεωρήματα ονομάζονται κριτήρια του Cartan.

Θεώρημα 4.1.3. *Μια άλγεβρα Lie $\mathfrak{g}$ είναι επιλύσιμη αν και μόνο αν $B([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \mathfrak{g}) = 0$, όπου B η μορφή Killing στην $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$.*

Θεώρημα 4.1.4. *Μια άλγεβρα Lie $\mathfrak{g}$ είναι ημιαπλή αν και μόνο αν η μορφή Killing στην $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ είναι μη ιδιάζουσα.*

Μια σημαντική ιδιότητα των ημιαπλών αλγεβρών Lie είναι η εξής:

Θεώρημα 4.1.5. *Κάθε αναπαράσταση μιας ημιαπλής άλγεβρας Lie είναι πλήρως αναγώγιμη.*

Κάθε μιγαδική ημιαπλή άλγεβρα Lie περιέχει μια **Cartan υποάλγεβρα** $\mathfrak{h}$, δηλαδή μια μέγιστη αβελιανή υποάλγεβρα η οποία συμπίπτει με την κεντρικοποιούσα ομάδα αυτής, δηλαδή $\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} : [X, \mathfrak{h}] = 0\}$.
Αν η $\mathfrak{g}$ είναι η άλγεβρα Lie μιας συμπαγούς ομάδας Lie G, τότε η άλγεβρα $\mathfrak{h}$ αποτελεί άλγεβρα μιας μέγιστης αβελιανής συνεκτικής και συμπαγούς υποομάδας T της G. Μια τέτοια υποομάδα T ονομάζεται μέγιστος δακτύλιος της G.

Παράδειγμα 4.1.1. *Μέγιστος δακτύλιος στην $U(n), SU(n)$.*
Έστω $T = \{X \in U(n) : X = (e^{i\theta_1}, ..., e^{i\theta_n}), \theta_i \in \mathbb{R}\}$.
Τότε $T \cong S^1 \times ... \times S^1$, άρα είναι μια αβελιανή, συμπαγής και συνεκτική υποομάδα της $U(n)$. Θα αποδείξουμε ότι είναι μέγιστη ως προς αυτές τις ιδιότητες, άρα είναι μέγιστος δακτύλιος στην $U(n)$.

Έστω T_1 δακτύλιος με $T \subset T_1$ και $Y \in T_1$. Θα αποδείξουμε ότι $Y \in T$. Από τον ορισμό του, το Y αντιμετατίθεται με όλα τα στοιχεία του T.
Έστω $e_i = (0, ..., 1, ..., 0) \in \mathbb{C}^n$ και $X_i = (0, ..., 1, ..., 0) \in T$, όπου το 1 βρίσκεται στην $i-$θέση.

Έχουμε $X_i(Ye_i) = Y(X_ie_i) = Ye_i$.
Άρα το Ye_i είναι ιδιοδιάνυσμα του X_i. Οπότε $Ye_i = \lambda e_i$ με $|\lambda| = 1$. Συνεπώς, $Ye_i = e^{-\theta_k}e_i$, οπότε $Y = (e^{i\theta_{1,...,}e^{i\theta_k}})$, δηλαδή $Y \in T$.

Συνεπώς, το T είναι μέγιστος δακτύλιος στην $U(n)$. Η αντίστοιχη Cartan υποάλγεβρα, δηλαδή η άλγεβρα της T, είναι ο χώρος
$\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{u}_n : X = (i\theta_1, ..., i\theta_n)\}$.

Όμοια η υποομάδα $\{(e^{i\theta_1}, ..., e^{i\theta_n}) : \theta_1 + \cdots + \theta_n = 0\}$ είναι μέγιστος δακτύλιος της $SU(n)$ με αντίστοιχη υποάλγεβρα Cartan της $\mathfrak{su}(n)$ το χώρο
$\{(i\theta_1, ..., i\theta_n) : \theta_1 + \cdots + \theta_n = 0\}$.

Τώρα, σε περίπτωση που η άλγεβρα $\mathfrak{g}$ είναι πραγματική, δηλαδή είναι διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{R}$, μπορούμε να θεωρήσουμε την μιγαδοποίηση αυτής ως εξής:
Έστω V ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος. Μια **σχεδόν μιγαδική δομή** στον V είναι ένας $\mathbb{R}$-γραμμικός ενδομορφισμός J του V τέτοιος ώστε $J^2 = -\operatorname{Id}$, όπου Id είναι ο ταυτοτικός ενδομορφισμός.
Μπορούμε με αυτό τον τρόπο να μετατρέψουμε τον V σε μιγαδικό διανυσματικό χώρο θέτοντας για $a, b \in \mathbb{R}$ και $v \in V$:
$(a + bi)v = av + bJv$.

Έστω $V^{\mathbb{C}} = V \oplus iV$ ο μιγαδικός χώρος που προκύπτει. Τότε, η πραγματική διάσταση του V ισούται με τη μιγαδική διάσταση του $V^{\mathbb{C}}$. Ο $V^{\mathbb{C}}$ ονομάζεται **μιγαδοποίηση** του V.
Αν τώρα $\mathfrak{g}$ είναι μια πραγματική άλγεβρα Lie και J μια σχεδόν μιγαδική δομή στην $\mathfrak{g}$, απαιτούμε επιπλέον τη συνθήκη

$$[X, JY] = J[X, Y] \tag{4.1}$$

για $X, Y \in \mathfrak{g}$

Ονομάζουμε **μιγαδοποίηση** της $\mathfrak{g}$, τον μιγαδοποιημένο διανυσματικό χώρο $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ που πληροί επιπλέον τη συνθήκη (4.1).

Παράδειγμα 4.1.2. *Θεωρούμε την άλγεβρα* $\mathfrak{gl}_n\mathbb{R} = M_n\mathbb{R}$. *Τότε η άλγεβρα* $\mathfrak{gl}_n\mathbb{R}^{\mathbb{C}} = \{X_1 + iX_2 : X_1, X_2 \in \mathfrak{gl}_n\mathbb{R}\}$ *ταυτίζεται με την άλγεβρα* $\mathfrak{gl}_n\mathbb{C}$. *Άρα η μιγαδοποίηση της* $\mathfrak{gl}_n\mathbb{R}$ *είναι η* $\mathfrak{gl}_n\mathbb{C}$.

Παράδειγμα 4.1.3. *Για* $X \in \mathfrak{gl}_n\mathbb{C}$ *έχουμε* $X = \frac{X-\bar{X}^T}{2} + i\frac{X+\bar{X}^T}{2i}$

όπου η παραπάνω έκφραση είναι μοναδική.

Όμως $\frac{X-\bar{X}^T}{2}, i\frac{X+\bar{X}^T}{2i} \in \mathfrak{u}(n)$ *οπότε*

$\mathfrak{gl}_n\mathbb{C} = \{X_1 + iX_2 : X_1, X_2 \in \mathfrak{u}(n)\} = \mathfrak{u}(n)^{\mathbb{C}}$.
Όμοια αποδεικνύεται ότι $\mathfrak{su}(n)^{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}_n\mathbb{C}$.

4.2 Ριζική διάσπαση

Έστω $\mathfrak{g}$ μια ημιαπλή άλγεβρα Lie και $\mathfrak{h}$ μια Cartan υποάλγεβρα αυτής. Θεωρούμε τις γραμμικές απεικονίσεις $a \in \mathfrak{h}^*$ και τους αντίστοιχους υποχώρους $\mathfrak{g}^a$ της $\mathfrak{g}$ τέτοιους ώστε $\mathfrak{g}^a = \{X \in \mathfrak{g} : \mathrm{ad}(H)X = [H, X] = a(H)X\}$. Μια τέτοια απεικόνιση ονομάζεται **ρίζα** της $\mathfrak{g}$ και οι χώροι $\mathfrak{g}^a$ ονομάζονται **ριζικοί υπόχωροι**. Έστω R το σύνολο των ριζών της $\mathfrak{g}$. Τότε η $\mathfrak{g}$ εκφράζεται ως ευθύ άθροισμα:

$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{a\in R} \mathfrak{g}^a$

Το παραπάνω αποτέλεσμα προκύπτει εν μέρει από το γεγονός ότι οι ενδομορφισμοί $\mathrm{ad}(H), H \in \mathfrak{h}$ είναι ταυτόχρονα διαγωνοποιήσιμοι.

Ισχύουν οι εξής ιδιότητες:
1)$[\mathfrak{g}^a, \mathfrak{g}^b] \subset \mathfrak{g}^{a+b}$, αν $a+b \in R$ (το άθροισμα $a+b$ δεν είναι απαραίτητα ρίζα της $\mathfrak{g}$).
2)Αν $a \in R$ τότε $-a \in R$
3)Οι χώροι $\mathfrak{g}^a, \mathfrak{g}^b$ είναι ορθογώνιοι ως προς τη μορφή Killing για $a+b \neq 0$.
4)Οι χώροι $\mathfrak{g}^a$ είναι μονοδιάστατοι.

Σημειώνουμε επιπλέον ότι η μορφή Killing περιορισμένη στον $\mathfrak{h}$ είναι μη ιδιάζουσα, οπότε επάγει έναν ισομορφισμό του $\mathfrak{h}$ με τον $\mathfrak{h}^*$. Άρα σε κάθε $a \in R$ αντιστοιχεί μοναδικό διάνυσμα $H_a \in \mathfrak{h}$. Για $a, b \in R$, θεωρούμε $B(a,b) = B(H_a, H_b)$. Θέτουμε $\mathfrak{h}_a = \frac{2H_a}{B(a,a)}$. Τότε τα στοιχεία $\mathfrak{h}_a$ παράγουν τον χώρο $\mathfrak{h}$ ενώ τα στοιχεία του R παράγουν τον δυϊκό χώρο $\mathfrak{h}^*$. Ως συμπέρασμα αυτού έχουμε ότι αν $\mathfrak{h}^{\mathbb{R}} = span_{\mathbb{R}} \{H_a, a \in R\}$, τότε

$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}^{\mathbb{R}} \oplus i\mathfrak{h}^{\mathbb{R}}$ και $\mathfrak{h}^* = (\mathfrak{h}^{\mathbb{R}})^* \oplus i(\mathfrak{h}^{\mathbb{R}})^*$

Στο παρακάτω παράδειγμα θα χαρακτηρίσουμε το σύστημα ριζών της άλγεβρας Lie $\mathfrak{sl}_n\mathbb{C}$.

Παράδειγμα 4.2.1. *Η άλγεβρα $\mathfrak{sl}_n\mathbb{C}$ είναι ημιαπλή καθώς η μορφή Killing σε αυτή είναι μη ιδιάζουσα. Είδαμε ότι μια υποάλγεβρα Cartan της $\mathfrak{su}(n)$ έχει τη μορφή*

$$\mathfrak{h}^{\mathbb{R}} = \{diag(i\theta_1, ..., i\theta_n) : \theta_i \in \mathbb{R}, \theta_1 + \cdots + \theta_n = 0\}.$$

Συνεπώς, μια υποάλγεβρα Cartan της $\mathfrak{sl}_n\mathbb{C} = \mathfrak{su}(n)^{\mathbb{C}}$ έχει τη μορφή $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}^{\mathbb{R}} \oplus i\mathfrak{h}^{\mathbb{R}}$ δηλαδή

$$\mathfrak{h} = \{(h_1, ..., h_n) : h_i \in \mathbb{C}, h_1 + \cdots + h_n = 0\}.$$

Θεωρούμε τις απεικονίσεις $e^i : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ με $e^i((h_1, ..., h_n)) = h_i$.

Θεωρούμε επίσης τους πίνακες $E_{ij}, E_{ii} - E_{jj}$ με $i \neq j$,όπου E_{ij} ο $n \times n$ πίνακας με μονάδα στην (i, j) θέση και 0 αλλού. Το σύνολο των παραπάνω πινάκων αποτελεί βάση της $\mathfrak{sl}_n\mathbb{C}$.

Αν $H \in \mathfrak{h}$ με $H = (h_1, ..., h_n)$ έχουμε

$\mathrm{ad}(H)E_{ij} = [H, E_{ij}] = (h_i - h_j)E_{ij} = (e^i - e^j)(H)E_{ij}$ *(Σημειώνουμε* *ότι το σύνολο των πινάκων της μορφής $E_{ii} - E_{jj}$ αποτελεί βάση του $\mathfrak{h}$ και* $\mathrm{ad}(H)(E_{ii} - E_{jj}) = 0$*).*

Συνεπώς οι πίνακες E_{ij} αποτελούν ιδιοδιανύσματα των ενδομορφισμών $\mathrm{ad}(H)$. *Άρα οι ρίζες της $\mathfrak{sl}_n\mathbb{C}$ είναι οι απεικονίσεις $e^i - e^j, i \neq j$.*

Οπότε $R = \{e^i - e^j : i \neq j\}$, και

$\mathfrak{sl}_n\mathbb{C} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{e^i - e^j \in R} \mathfrak{g}^{e^i - e^j}$ *όπου $\mathfrak{g}^{e^i - e^j}$ είναι οι αντίστοιχοι ριζικοί υπόχωροι.*

Το σύνολο ριζών μιας ημιαπλής άλγεβρας Lie ανήκει σε μια γενικότερη κατηγορία συστημάτων που ονομάζονται ριζικά συστήματα. Δε θα επεκταθούμε στη θεωρία ριζικών συστημάτων, θα αναφέρουμε όμως τα βασικότερα θεωρήματα που θα χρησιμοποιηθούν στην παρούσα εργασία.

Αρχικα, είδαμε ότι αν $a \in R$ τότε $-a \in R$. Γενικότερα μπορούμε να διαχωρίσουμε τις ρίζες ενός συστήματος σε **θετικές και αρνητικές ρίζες**. Ο ορισμός των θετικών ριζών γίνεται μέσω των Weyl Chambers και παραπέμπουμε στο [10] επιπλέον μελέτη. Έστω R^+ το σύστημα των θετικών ριζών. Τότε

$\mathfrak{g}^{\mathbb{R}} = \mathfrak{h}^{\mathbb{R}} \oplus \sum_{a \in R^+} \mathfrak{g}^a$

Ορισμός 4.2.1. *Μια θετική ρίζα $a \in R^+$ ονομάζεται απλή αν δε μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δύο ή περισσοτέρων ριζών.*

Αποδεικνύεται ότι κάθε σύστημα ριζών αποτελείται από $l = \dim \mathfrak{h}$ το πλήθος απλές ρίζες.
Επιπλέον, το σύνολο $\Pi = \{a_1, ..., a_l\}$ των απλών ριζών αποτελεί βάση του συνόλου R με την έννοια ότι κάθε $a \in R$ γράφεται με μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός απλών ριζών με ακέραιους συντελεστές.
Δηλαδή $a = \sum_{1 \leq i \leq l}^{c_i a_i}$ με $c_i \in \mathbb{Z}$.

Ορισμός 4.2.2. *Μέγιστη ρίζα του R ονομάζεται η θετική ρίζα $\mu = \sum_{1 \leq i \leq l} d_i a_i$ τέτοια ώστε για οποιαδήποτε ρίζα $a = \sum_{1 \leq i \leq l} c_i a_i$ ισχύει $d_i \geq c_i$ για κάθε i. Ο αριθμός d_i ονομάζεται ύψος της απλής ρίζας a_i.*

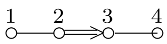
Στο παράδειγμα της $\mathfrak{sl}_n\mathbb{C}$, οι απλές ρίζες είναι της μορφής $e^i - e^{i+1}$ ενώ η ρίζα $e^1 - e^3 = e^1 - e^2 + e^2 - e^3$ δεν είναι απλή.
Η κατηγοριοποίηση των ριζικών συστημάτων γίνεται με τη βοήθεια των απλών

ριζών. Η κωδικοποιήση των ιδιοτήτων ενός ριζικού συστήματος γίνεται με τη βοήθεια των **διαγραμμάτων Dynkin** των απλών ριζών. Δε θα επεκταθούμε στον τρόπο κατασκευής των διαγραμμάτων. Παρακάτω παραθέτουμε τα διαγράμματα Dynkin κάποιων ημιαπλών αλγεβρών Lie που θα χρησιμοποιήσουμε παρακάτω.

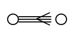
$A_l \leftrightarrow \mathfrak{sl}_{2l+1}\mathbb{C} \leftrightarrow$.

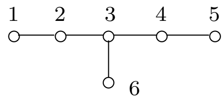
$B_l \leftrightarrow \mathfrak{so}_{2l+1}\mathbb{C} \leftrightarrow$ 

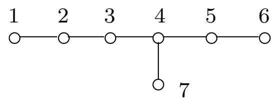
$C_l \leftrightarrow \mathfrak{sp}_l\mathbb{C} \leftrightarrow$ 

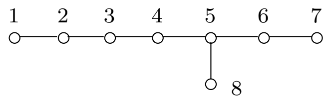
$F_4 \leftrightarrow$ 

.

$G_2 \leftrightarrow$ 

$E_6 \leftrightarrow$ 

$E_7 \leftrightarrow$ 

$E_8 \leftrightarrow$ 

Κεφάλαιο 5

Ομογενείς Χώροι

5.1 Δράσεις ομάδων Lie και ομογενείς χώροι

Ορισμός 5.1.1. *Μια δράση μιας ομάδας Lie σε μια πολλαπλότητα M είναι μια απεικόνιση $a : G \times M \to M$ τέτοια ώστε να ισχύει:*
$a(g_1 g_2, p) = a(g_1, a(g_2, p))$ και $a(e, p) = p$ για $g_1, g_2 \in G, p \in M$.

Πολλές φορές συμβολίζουμε την δράση $a(g, p)$ με gp. Η πρώτη ιδιότητα μεταφράζεται ως $(g_1 g_2)p = g_1(g_2 p)$. Αν η απεικόνιση a είναι λεία η δράση ονομάζεται **λεία**. Σε αυτή την περίπτωση για $g \in G$ η απεικόνιση $a_g : M \to M$ με $a_g(p) = gp$ είναι αμφιδιαφόριση με αντίστροφη την $a_{g^{-1}}$.
Το σύνολο $G_p = \{g \in G : gp = p\}$ ονομάζεται **ομάδα** ισοτροπίας του $p \in M$, ενώ το σύνολο $Gp = \{gp : g \in G\}$ ονομάζεται **τροχιά** του p.

Ένα παράδειγμα δράσης, είναι η δράση της ομάδας $Gl_n\mathbb{C}$ στον $\mathbb{C}^n$.
Θεωρούμε $a : Gl_n\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$. Είναι εύκολο να δούμε ότι η a πληρεί τις ιδιότητες του παραπάνω ορισμού.

Θα δούμε πότε δύο διαφορετικές δράσεις θεωρούνται ισοδύναμες:

Ορισμός 5.1.2. *Εστω M, N πολλαπλότητες στις οποίες δρα μια ομάδα Lie G. Οι δύο δράσεις ονομάζονται ισοδύναμες αν υπάρχει ισοαναλλοίωτος ισομορφισμός των δύο δράσεων, δηλαδή ένας λείος ισομορφισμός $F : M \to N$ τέτοιος ώστε $F(gp) = gF(p)$ για κάθε $g \in G, p \in M$.*

Ορισμός 5.1.3. *Μια δράση ονομάζεται ελεύθερη αν η ισότητα $gp = p$ συνεπάγεται ότι $g = e$ για οποιοδήποτε $p \in M$. Ισοδύναμα $G_p = \{e\}$.*

Μια δράση ονομάζεται μεταβατική αν για οποιαδήποτε $p, q \in M$ υπάρχει $g \in G$ τέτοιο ώστε $gp = q$.
Μια δράση ονομάζεται κανονική αν η απεικόνιση $A : G \times M \to M \times M$ με $A(g, p) = (gp, p)$ είναι κανονική, δηλαδή για κάθε συμπαγές υποσύνολο K του $M \times M$, το $A^{-1}(K)$ είναι συμπαγές.

Ερχόμαστε στον ορισμό του ομογενούς χώρου

Ορισμός 5.1.4. *Ένας ομογενής χώρος είναι μια πολλαπλότητα M στην οποία δρα με λείο και μεταβατικό τρόπο μια ομάδα Lie G.*

Ουσιαστικά ένας ομογενής χώρος είναι μια πολλαπλότητα που έχει κοινή γεωμετρική συμπεριφορά σε κάθε σημείο της (καλύτερα, σε κάθε περιοχή της). Η γεωμετρία του χώρου καθορίζεται από την δράση της ομάδας Lie σε αυτόν και η μεταβατικότητα της δράσης εξασφαλίζει την κοινή γεωμετρική συμπεριφορά. Παρακάτω θα μελετήσουμε έναν πιο συγκεκριμένο χαρακτηρισμό των ομογενών χώρων.

Αν στην πολλαπλότητα M ορίσουμε μια σχέση ισοδυναμίας $\equiv$ με $p_1 \equiv p_2$ αν και μόνο αν $p_2 \in Gp_1$, δηλαδή ταυτίσουμε τα στοιχεία που ανήκουν στην ίδια τροχιά έχουμε το σύνολο πηλίκο M/G. Σημειώνουμε ότι στην περίπτωση που η δράση είναι μεταβατική υπάρχει μόνο μια τροχιά. Άρα για $p \in M$ έχουμε τον ισομορφισμό $G/G_p \cong Gp$.
Υπο κάποιες προϋποθέσεις το σύνολο πηλίκο μπορεί να αποκτήσει δομή λείας πολλαπλότητας. Ισχύει το εξής:

Θεώρημα 5.1.1. *(Πολλαπλότητας πηλίκο) Έστω μια λεία, ελεύθερη και κανονική δράση μιας ομάδας Lie σε μια πολλαπλότητα M. Τότε το σύνολο πηλίκο των τροχιών M/G επιδέχεται μοναδική λεία δομή διάστασης $\dim(M) - \dim(G)$ τέτοια ώστε η προβολή $\pi : M \to M/G$ να είναι υπεμβάπτιση, δηλαδή να είναι λεία απεικόνιση και το διαφορικό $d\pi_p : T_pM \to T_{\pi(p)}(M/G)$ σε κάθε $p \in M$ να είναι επί.*

Θα χρησιμοποιήσουμε τα εξής λήμματα:

Λήμμα 5.1.1. *Η λεία δράση μιας ομάδας Lie σε μια πολλαπλότητα M είναι κανονική αν και μόνο αν για κάθε συμπαγές σύνολο $S \subset M$, το σύνολο $G_S = \{g \in G : gS \cap S \neq \emptyset\}$ είναι συμπαγές.*

Απόδειξη. Έστω ότι η $A : G \times M \to M \times M$ με $A(g, p) = (gp, p)$ είναι κανονική. Τότε αν S είναι ένα συμπαγές υποσύνολο της M ισχύει:

$G_S = \{g \in G : gS \cap S \neq \emptyset\} = \{g \in G : \exists p \in S, gp \in S\}$

$= \{g \in G : \exists p \in S, A(g,p) \in S \times S\} = \pi(A^{-1}(S \times S))$

όπου $\pi : G \times M \to M$ είναι η κανονική προβολή.
Άρα το G_S είναι συμπαγές.
Αντίστροφα, έστω ότι το G_S είναι συμπαγές για κάθε συμπαγές $S \subset M$. Θεωρούμε το συμπαγές $K \subset M \times M$. Τότε το $S = \pi_1(K) \cup \pi_2(K) \subset M$ είναι συμπαγές, όπου $\pi_i : M \times M \to M$ είναι η προβολή της i συνιστώσας.

Τότε $A^{-1}(K) = A^{-1}(S \times S) \subset \{(g,p) : gp \in S, p \in S\} \subset G_S \times S$.

Όμως το $A^{-1}(K)$ είναι κλειστό άρα είναι κλειστό υποσύνολο του συμπαγούς $G_S \times S$, οπότε είναι συμπαγές. □

Λήμμα 5.1.2. *Κάθε κανονική απεικόνιση A είναι κλειστή δηλαδή αν K είναι κλειστό υποσύνολο του $G \times M$, το $A(K)$ είναι κλειστό υποσύνολο του $M \times M$.*

Απόδειξη. Έστω K κλειστό υποσύνολο του $G \times M$ και $(s_n) = (A(k_n)), k_i \in K$, μια συγκλίνουσα στο s ακολουθία του $A(K)$. Θα αποδείξουμε ότι $s \in A(K)$.
Το σύνολο $S = \{s_1, ..., s_n, ...\}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $A(K)$. Αυτό συμβαίνει διότι για οποιαδήποτε ανοικτή γειτονιά U του s όλοι οι όροι της (s_n) εκτός πεπερασμένων βρίσκονται στο U. Επειδή κάθε ανοικτό κάλυμμα του S είναι και ανοικτό κάλυμμα του $S \cup \{s\}$ επιλέγουμε U μια ανοικτή γειτονιά του s από το κάλυμμα. Το U θα περιέχει άπειρους όρους της (s_n). Τους υπόλοιπους πεπερασμένους όρους τους καλύπτουμε με πεπερασμένα το πλήθος υποσύνολα του καλύμματος. Άρα το S έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα, άρα είναι συμπαγές. Οπότε το $A^{-1}(S)$ είναι συμπαγές διότι η A είναι κανονική απεικόνιση.
Συνεπώς, η ακολουθία (k_n) είναι ακολουθία συμπαγούς συνόλου άρα έχει υπακολουθία (k_l) συγκλίνουσα στο k. Επειδή το K είναι κλειστό έχουμε $k \in K$. Επειδή η απεικόνιση A είναι λεία, άρα και συνεχής, η υπακολουθία $(s_l) = (A(k_l))$ της (s_n) συγκλίνει στο $A(k)$. Λόγω μοναδικότητας του ορίου έχουμε
$s = \lim s_n = \lim s_l = A(k) \in A(K)$. Άρα $s \in A(K)$, οπότε το $A(K)$ είναι κλειστό. □

Λήμμα 5.1.3. *Έστω $F : M \to N$ κανονική, 1-1 και σταθερής τάξης λεία απεικόνιση μεταξύ των πολλαπλοτήτων M, N. Τότε η F είναι εμφύτευση.*

Απόδειξη. Επειδή η F είναι λεία , 1-1 και σταθερής τάξης , αρκεί να αποδείξουμε ότι το $F(M)$ διατηρεί την τοπολογία του N, δηλαδή η F είναι ομοιομορφισμός επί του $F(M)$.

Η F είναι συνεχής ως λεία απεικόνιση. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η F^{-1} : $F(M) \to M$ είναι συνεχής. Όμως η F είναι κλειστή, άρα αν K είναι κλειστό στην M το $F(K) = (F^{-1})^{-1}(K)$ είναι κλειστό στο $F(M)$ άρα η F^{-1} είναι συνεχής. Οπότε η F είναι ομοιομορφισμός επί του $F(M)$ συνεπώς έχουμε το ζητούμενο. □

Λήμμα 5.1.4. *Έστω $F : M \to N$ λεία απεικόνιση μεταξύ των πολλαπλοτήτων M, N με F ισοαναλλοίωτη ως προς μια λεία μεταβατική δράση μιας ομάδας Lie G στην M και ως προς οποιαδήποτε λεία δράση της G στην N. Τότε η F έχει σταθερή τάξη.*

Απόδειξη. Θεωρούμε a, b τις δράσεις της G στην M, N αντίστοιχα και για $g \in G$ τις απεικονίσεις $a_g : M \to M$ με $a_g(p) = a(g,p)$ και $b_g : N \to N$ με $b_g(q) = b(g,q)$.
Τώρα, για $p \in M$ θεωρούμε $q \in M$ με $a_g(q) = p$ (Ένα τέτοιο q υπάρχει λόγω μεταβατικότητας της δράσης). Έχουμε:
$(dF)_p \circ (da_g)_q : T_qM \to T_pM \to T_{F(p)}N$ και

$$(db_g)_{F(q)} \circ (dF)_q : T_qM \to T_{F(q)}N \to T_{b(g,F(q))}N = T_{F(a(g,q))}N = T_{F(p)}N$$

με $(dF)_p \circ (da_g)_q = (db_g)_{F(q)} \circ (dF)_q$.

Επιπλέον , οι απεικονίσεις a_g, b_g είναι αμφιδιαφορίσεις, άρα οι απεικονίσεις

$$(da_g)_q : T_qM \to T_pM \text{ και } (db_g)_{F(q)} : T_{F(q)}N \to T_{F(p)}N$$

είναι ισομορφισμοί διανυσματικών χώρων. Άρα βλέπουμε ότι η τάξη του dF_p είναι σταθερή για κάθε $p \in M$. □

Ερχόμαστε στην απόδειξη του βασικού θεωρήματος:

Απόδειξη. (του θεωρήματος πολλαπλότητας πηλίκο):

Αρχικά υποθέτουμε ότι το πηλίκο M/G έχει λεία δομή τέτοια ώστε η προβολή $\pi : M \to M/G$ να είναι υπεμβάπτιση (δηλαδή λεία με διαφορικό επί). Αποδεικνύουμε ότι η λεία δομή είναι μοναδική, ή ισοδύναμα ότι η ταυτοτική απεικόνιση $\mathrm{Id} : (M/G)_1 \to (M/G)_2$ μεταξύ των δύο διαφορικών δομών είναι αμφιδιαφόριση. Αυτό όμως συμβαίνει διότι $\mathrm{Id} \circ \pi = \pi$ άρα η Id είναι λεία, όμοια και η αντίστροφή της $\mathrm{Id} : (M/G)_2 \to (M/G)_1$. Άρα μια τέτοια λεία δομή αν υπάρχει είναι μοναδική.

Προτού ορίσουμε τη λεία δομή του M θα αποδείξουμε ότι είναι Hausdorff και 2ος αριθμήσιμος εξετάζοντας την τοπολογία της M/G. Θεωρούμε την τοπολογία πηλίκο στην M/G (δηλαδή ένα σύνολο U είναι ανοικτό στην M/G αν και μόνο αν το $\pi^{-1}(U)$ είναι ανοικτό στην M).
Έστω $a : G \times M \to M$ η δράση της G στην M και $A : G \times M \to M \times M$ η κανονική απεικόνιση με $A(g,p) = (gp,p)$. Τότε για οποιοδήποτε ανοικτό $U \subset M$, έχουμε

$\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{g \in G} a_g(U) = \bigcup_{g \in G} gU$ από τον ορισμό της προβολής και του πηλίκου M/G.
Επειδή η a_g είναι αμφιδιαφόριση, το $\pi^{-1}(\pi(U))$ είναι ανοικτό στην M, οπότε το $\pi(U)$ είναι ανοικτό στο M/G από τον ορισμό της τοπολογίας.
Συμπεραίνουμε ότι για κάθε U ανοικτό στην M το $\pi(U)$ είναι ανοικτό στο M/G. Άρα η π είναι ανοικτή απεικόνιση.
Άρα αν $\{U_i\}$ είναι μια αριθμήσιμη βάση για την τοπολογία της M, τότε $\{\pi(U_i)\}$ είναι μια αριθμήσιμη βάση για την τοπολογία του M/G. Οπότε το M/G είναι 2ος αριθμήσιμος χώρος.

Για να αποδείξουμε ότι είναι Hausdorff θα χρησιμοποιήσουμε την κανονική απεικόνιση A.
Θεωρούμε το σύνολο $Orb \subset M \times M$ με

$$Orb = A(G \times M) = \{(gp,p) \in M \times M : g \in G, p \in M\}.$$

Είναι προφανές ότι $(p,q) \in Orb$ αν και μόνο αν τα p,q ανήκουν στην ίδια τροχιά. Το Orb είναι κλειστό σύνολο ώς κλειστή εικόνα κανονικής απεικόνισης (2ο λήμμα).
Άρα αν $\pi(p), \pi(q) \in M/G$ με $\pi(p) \neq \pi(q)$, τότε τα p,q ανήκουν σε διαφορετικές τροχιές ή ισοδύναμα $(p,q) \notin Orb$.
Επειδή ο χώρος $M \times M$ είναι Hausdorff, υπάρχει ανοικτή περιοχή $U \times V$ του (p,q) στην $M \times M$ με $U \times V \cap Orb = \emptyset$.
Άρα $\pi(U) \cap \pi(V) = \emptyset$, άρα ο M/G είναι Hausdorff.

Επιπλέον, θα αποδείξουμε ότι κάθε τροχιά είναι εμφυτευμένη υποπολλαπλότητα της M αμφιδιαφορική με την G.
Έστω $p \in M$. Θεωρούμε την απεικόνιση $a^p : G \to M$ με $a^p(g) = a(g,p) = gp$. Το σύνολο $a^p(G)$ είναι η τροχιά του p και θα αποδείξουμε ότι η a^p είναι η ζη-

τούμενη εμφύτευση.
Αρχικά η a^p είναι $1-1$, διότι αν $a^p(g_1) = a^p(g_2)$ τότε $g_1 p = g_2 p$, δηλαδή $g_2^{-1} g_1 p = p$, κι επειδή η δράση είναι ελεύθερη έχουμε $g_2^{-1} g_1 = e$, δηλαδή $g_1 = g_2$.
Θα αποδείξουμε ότι το διαφορικό $(da^p)_g : T_g G \to T_{gp} M$ έχει σταθερή τάξη για κάθε $g \in G$.
Προς αυτή την κατεύθυνση θεωρούμε τη φυσική δράση μ της G στον εαυτό της ($\mu(g_1, g_2) = g_1 g_2$). Τότε

$a^p(g_1 g_2) = (g_1 g_2)p = g_1(g_2 p) = g_1 a^p(g_2)$, δηλαδή η απεικόνιση a^p είναι ισοαναλλοίωτη ως προς τις δράσεις μ, a. Επειδή η δράση της G στον εαυτό της είναι μεταβατική σύμφωνα με το 4ο λήμμα, το da^p έχει σταθερή τάξη.

Τέλος η απεικόνιση a^p είναι κανονική. Αυτό συμβαίνει διότι αν $S \subset M$ συμπαγές (άρα κλειστό και φραγμένο στο M), τότε το $(a^p)^{-1}(S)$ είναι κλειστό στην G (λόγω διαφορισιμότητας), και επιπλέον

$(a^p)^{-1}(S) \subset G_S = \{g \in G : gS \cap S \neq \emptyset\}$

το οποίο είναι συμπαγές. Άρα το $(a^p)^{-1}(S)$ είναι συμπαγές.
Σύμφωνα με το 3ο λήμμα, η a^p είναι εμφύτευση, οπότε κάθε τροχιά είναι εμφυτευμένη πολλαπλότητα στην M.

Τώρα, χρησιμοποιώντας τα παραπάνω θα αποδείξουμε ότι για κάθε $p \in M$ υπάρχει τοπικός χάρτης

(U, ϕ) με $\phi = (x_1, ..., x_k, y_1, ..., y_k), (k + l = \dim M, k = \dim G)$

τέτοιος ώστε για κάθε τροχιά Gq να ισχύει:

$Gq \cap U = \emptyset$ ή $\phi(Gq \cap U) = (x_1, ..., x_k, c_1, ..., c_l)$ με c_i σταθερά.
Έστω $p \in M$. Η τροχιά Gp είναι υποπολλαπλότητα της M διάστασης $k = \dim G$, άρα υπάρχει χάρτης

(V, ψ) , $\psi = (x_1, ..., x_k, y_1, ..., y_l)$ με $\psi(p) = (0, ..., 0)$ και $\psi(Gp \cap V) = (x_1, ..., x_k, 0, ..., 0)$.

Έστω τώρα N η υποπολλαπλότητα του V διάστασης l που χαρακτηρίζεται από την εξίσωση

$\psi(N) = (0, ..., 0, y_1, ..., y_l)$.

Είναι

$$T_pM = T_p(Gp) \oplus T_pN \tag{5.1}$$

με $T_p(Gp) = span \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i}|_p \right\}_{1 \leq i \leq k}$ και

$T_p(N) = span \left\{ \frac{\partial}{\partial y_j}|_p \right\}_{1 \leq j \leq l}$.

Έστω $b : G \times N \to M$ με $b = a|_{G \times N}$ δηλαδή ο περιορισμός της δράσης a στο $G \times N$. Θα αποδείξουμε ότι η b είναι τοπική αμφιδιαφόριση. Αρκεί να το αποδείξουμε για το $(e, p) \in G \times N$.

Έστω η εμφύτευση $i_p : G \to G \times N$ με $i_p(g) = (g, p)$.

Τότε για την εμφύτευση $a^p : G \to M$ έχουμε $a^p = b \circ i_p$. Επιπλέον ισχύουν:

$(da^p)_e(T_eG) = T_p(Gp)$ και $(di_p)_e(T_eG) \supseteq T_{(e,p)}(G \times N)$

καθώς τα αντίστοιχα διαφορικά είναι επί. Οπότε

$$(db)_{(e,p)}(T_{(e,p)}(G \times N)) \supseteq T_p(Gp) \tag{5.2}$$

Όμοια θεωρούμε την εμφύτευση $j_e : N \to G \times N$ με $j_e(q) = (e, q)$.

Τότε για την εμφύτευση $i : N \to M$, $i(q) = q$, ισχύει $i = b \circ j_e$.

Επιπλέον $(di)_p(T_pN) = T_pN$ και $(dj_e)_p(T_eG) \supseteq T_{(e,p)}(G \times N)$.

Άρα

$$(db)_{(e,p)}(T_{(e,p)}(G \times N)) \supseteq T_pN \tag{5.3}$$

Από τις σχέσεις $(5.1), (5.2), (5.3)$ συμπεραίνουμε ότι
$(db)_{(e,p)}(T_{(e,p)}(G \times N)) \supseteq T_pM$

δηλαδή $(db)_{(e,p)}(T_{(e,p)}(G \times N)) = T_pM$.

Επιπλέον δεδομένου ότι η απεικόνιση $db_{(e,p)}$ είναι γραμμική, είναι ισομορφισμός διανυσματικών χώρων. Εφαρμόζοντας το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης έχουμε ότι η b είναι τοπική αμφιδιαφόριση στο (e,p), δηλαδή υπάρχουν U_e, U_p, W_p ανοικτές περιοχές του e στην G, του p στην N και του p στην M αντίστοιχα με $b : U_e \times U_p \to W_e$ να είναι αμφιδιαφόριση.
Χωρίς βλάβη της γενικότητας τα U_e, U_p μπορούν να επιλεχθούν αρκετά μικρά ώστε να είναι αμφιδιαφορικά με ανοικτές μοναδιαίες σφαίρες στον $\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^l$ αντίστοιχα.

Τώρα θα αποδείξουμε ότι το U_p μπορεί να επιλεχθεί αρκετά μικρό ώστε κάθε τροχιά qG να τέμνει το U_p σε ένα το πολύ σημείο.
Έστω ότι αυτό δε συμβαίνει.
Θεωρούμε $\{U_p^i\}$ αριθμήσιμη βάση του U_p. Λόγω υπόθεσης, για κάθε i υπάρχουν $p_i, q_i \in U_p^i$ με τα p_i, q_i να ανήκουν στην ίδια τροχιά, δηλαδή υπάρχει $g_i \in G$ με $g_ip_i = q_i$.

Τότε $A(g_i, p_i) = (g_ip_i, p_i) = (q_i, p_i) \in U_p \times U_p \subset \bar{U_p} \times \bar{U_p}$.

Επειδή το $\bar{U_p} \times \bar{U_p}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $M \times M$ η ακολουθία $\{(g_i, p_i)\} = A^{-1}((q_i, p_i))$ είναι υποσύνολο κάποιου συμπαγούς συνόλου K του $G \times M$.
Άρα υπάρχει υπακολουθία $\{(g_n, p_n)\}$ συγκλίνουσα στο K με$g_n \to g \in G$ και λόγω του ότι $p_i, q_i \in U_p^i$ έχουμε ότι $p_i, q_i \to p$ από τον ορισμό των U_p^i.
Οπότε $gp = \lim(g_np_n) = \lim(q_n) = p$. Άρα $g = e$ και για αρκετά μεγάλα i έχουμε $g_i \in U_e$.
Αυτό όμως είναι άτοπο καθώς θα είχαμε $a(g_i, p_i) = q_i = a(e, q_i)$ δηλαδή $b(g_i, p_i) = b(e, q_i)$ ενώ η b είναι τοπική αμφιδιαφόριση.
Άρα $g_i = e$ και $p_i = q_i$.

Τώρα θεωρούμε $f_1 : S^k \to U_e$, $f_2 : S^l \to U_p$ τις αμφιδιαφορίσεις των U_e, U_p με τις ανοικτές σφαίρες S^k, S^l των $\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^l$ αντίστοιχα.
Έστω $f : S^k \times S^l \to W_p$ με $f(x,y) = a(f_1(x), f_2(y))$.
Τότε ισχύει $f = b \circ (f_1 \times f_2)$ άρα είναι αμφιδιαφόριση. Συνεπώς, η f^{-1} αποτελεί χάρτη της M στο W_p.

Θα αποδείξουμε ότι είναι ο ζητούμενος χάρτης, δηλαδή ισχύει
$f^{-1}(Gp \cap W_p) = (x_1, ..., x_k, c_1, ..., c_l)$ με c_i σταθερά.

Αρχικά, για οποιοδήποτε διάνυσμα της μορφής
$(x_1, ..., x_k, c_1, ..., c_l) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$ ισχύει:

$$f(x_1, ..., x_k, c_1, ..., c_l) = a(U_e \times \{p_0\}) \subset a(G \times \{p_0\}) = Gp_0 \ , \ p_0 \in U_p.$$

Άρα κάθε διάνυσμα της μορφής $(x_1, ..., x_k, c_1, ..., c_l)$ αντιστοιχεί σε μία μόνο τροχιά.
Όμως είδαμε ότι κάθε τροχιά τέμνει το U_p το πολύ σε ένα σημείο, άρα
$f^{-1}(U_p \cap Gp_0) = f^{-1}(U_p \times \{p_0\}) = (x_1, ..., x_k, c_1, ..., c_k)$

Συνεπώς, η απεικόνιση $f^{-1} : W_p \to \mathbb{R}^{k+l}$ είναι ο ζητούμενος τοπικός χάρτης στο $p \in M$.

Τώρα, θα ορίσουμε λεία δομή στο M/G.
Για $q = \pi(p) = Gp \in M/G$ θεωρούμε χάρτη (U, ϕ) όπως παραπάνω.
Το $V = \pi(U)$ είναι ανοικτό στο M/G.
Έστω $\acute{U} \subset U$ με $\phi|_{\acute{U}} = (0, ..., 0, y_1, ..., y_l)$.
Από τον ορισμό του ϕ έχουμε ότι η $\pi : \acute{U} \to \pi(U)$ είναι 1-1 και επί:
Πράγματι, αν
$k_1 = (\phi^{-1}(0, ..., 0, c_1, ..., c_l), k_2 = (\phi^{-1}(0, ..., 0, d_1, ..., d_l)$ και $\pi(k_1) = \pi(k_2)$
τότε τα k_1, k_2 ανήκουν στην ίδια τροχιά, άρα από τον ορισμό της ϕ είναι $c_i = d_i$ για κάθε i, οπότε $k_1 = k_2$.
Το επί είναι προφανές.
Άρα η $\pi|_{\acute{U}}$ είναι ομοιομορφισμός.

Θεωρούμε τότε την απεικόνιση $\bar{\phi} : \pi(U) \to \mathbb{R}^k$ με $\bar{\phi}(x, y) = y$.
Από τα παραπάνω, η $\bar{\phi}$ καλώς ορισμένη και επιπλέον
$\bar{\phi} = \pi_2 \circ \phi \circ \pi^{-1}|_{\acute{U}}$ όπου
$\pi_2 : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^l$ είναι η αντίστοιχη προβολή.
Οπότε $(\bar{\phi}, \pi(U))$ είναι ο ζητούμενος χάρτης. Θα αποδείξουμε τη λεία συμβατότητα των χαρτών:

Έστω $(V_1, \bar{\phi_1}), (V_2, \bar{\phi_2})$ χάρτες του pG στο M/G και $(U_1, \phi), (U_2, \phi)$ οι αντίστοιχοι χάρτες στην M, με $V_i = \pi(U_i)$.

Έστω $\phi_1 = (x_1^1, ..., x_k^1, y_1^1, ..., y_k^1), \phi_2 = (x_1^2, ..., x_k^2, y_1^2, ..., y_k^2)$

Αν $\pi(U_1) \cap \pi(U_2) \neq \emptyset$ με $q \in \pi(U_1) \cap \pi(U_2)$ τότε , όπως προηγουμένως υπάρχουν

$\acute{U_1} \subset U_1, \acute{U_2} \subset U_2$ με

$\phi_i(\acute{U_i}) = (0, ..., 0, y_1^i, ..., y_l^i)$ και $\acute{U_1} \cap \acute{U_2} \neq \emptyset$ διότι

$y_j^1(q) = y_j^2(q) = c_j$ για κάθε $j = 1, ..., l$. Άρα $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$.

Επομένως για την απεικόνιση $\bar{\phi_1}^{-1} \circ \bar{\phi_2} : \pi(U_1) \cap \pi(U_2) \to \mathbb{R}^l$ έχουμε:

$\bar{\phi_1}^{-1} \circ \bar{\phi_2} = \pi|_{\acute{U_1} \cap \acute{U_2}} \circ \phi_1^{-1} \circ \pi_2^{-1} \circ \pi_2 \circ \phi_2 \circ \pi^{-1}|_{\acute{U_1} \cap \acute{U_2}}$

$= \pi|_{\acute{U_1} \cap \acute{U_2}} \circ (\phi_1^{-1} \circ \phi_2) \circ \pi^{-1}|_{\acute{U_1} \cap \acute{U_2}}$ που είναι λεία.

Τέλος η $\pi = \bar{\phi} \circ \pi_2 \circ \phi$ είναι υπεμβάπτιση καθώς η π_2 με $\pi_2(x, y) = y$ είναι υπεμβάπτιση και οι $\bar{\phi}, \phi$ είναι ομοιομορφισμοί. $\square$

Έστω τώρα G ομάδα Lie και K μια κλειστή υποομάδα της (άρα και υποομάδα Lie αυτής). Θα μελετήσουμε τη φυσική δράση a της K στην G με $a : K \times G \to G, a(k, g) = kg$
Αρχικά, η δράση είναι λεία, κάτι που είναι προφανές από το λείο γινόμενο των ομάδων Lie.
Επιπλέον είναι ελεύθερη διότι αν $kg = g$, προφανώς $k = e$.
Τέλος θα αποδείξουμε ότι είναι κανονική:
Έστω $A : K \times G \to G \times G$ με $A(k, g) = (kg, g)$. Έστω τώρα S συμπαγές υποσύνολο του $G \times G$. Θα αποδείξουμε ότι κάθε ακολουθία στο $A^{-1}(S)$ έχει συγκλίνουσα στο $A^{-1}(S)$ υπακολουθία οπότε είναι συμπαγές.
Έστω (k_n, g_n) ακολουθία στο $A^{-1}(S)$. Τότε η $A(k_n, g_n) = (k_n g_n, g_n)$ είναι ακολουθία στο S. Άρα έχει συγκλίνουσα υπακολουθία $(k_i g_i, g_i)$. Άρα οι ακολουθίες $k_i g_i$ και g_i συγκλίνουν. Λόγω διαφορισιμότητας της δεξιάς μεταφοράς έχουμε ότι η ακολουθία $k_i = k_i g_i g_i^{-1}$ συγκλίνει κι επειδή η K είναι κλειστή το όριο ανήκει στην K. Άρα η ακολουθία (k_i, g_i) συγκλίνει στο $K \times G$. Οπότε η (k_n, g_n) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

Επομένως η δράση της K στη G πληρεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος, συνεπώς το σύνολο G/K αποκτά δομή λείας πολλαπλότητας.

Ας δούμε τώρα την περίπτωση που η δράση της G στην M είναι μεταβατική. Θα κατασκευάσουμε μια νέα δράση της G στο σύνολο $G/G_p, p \in M$, το οποίο θα αποδειχθεί λεία πολλαπλότητα. Προς αυτή την κατεύθυνση αρκεί να αποδείξουμε ότι η ομάδα ισοτροπίας G_p είναι κλειστή υποομάδα της G.
Έστω $a : G \times M \to M$ η λεία μεταβατική δράση της G στην M. Έστω επιπλέον μια ακολουθία g_n στην G_p συγκλίνουσα στο g. Θα αποδείξουμε ότι $g \in G_p$ ή $gp = p$.
Η ακολουθία (g_n, p) στο $G \times M$ συγκλίνει στο (g, p). Λόγω διαφορισιμότητας της a η ακολουθία $a(g_n, p) = g_n p = p$ συγκλίνει στο $a(g, p) = gp$. Όμως η $a(g_n, p) = p$ είναι σταθερή και συγκλίνει στο p. Λόγω μοναδικότητας του ορίου έχουμε $gp = p$ άρα $g \in G_p$.
Οπότε το σύνολο G/G_p είναι λεία πολλαπλότητα και θεωρούμε τη δράση
$G \times G/G_p \to G/G_p$ με $g_1(g_2G_p) = (g_1g_2)G_p$. Η δράση αυτή είναι λεία και μεταβατική.
Η μεταβατικότητα προκύπτει άμεσα. Για τη διαφορισιμότητα χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε τις λείες προβολές ως εξής:
Αν θεωρήσουμε $\phi : G \times G/G_p \to G/G_p$ τη δράση της G στην G/G_p και
$\mu : G \times G \to G$ τη φυσική λεία μεταβατική δράση της G στον εαυτό της, $\pi : G \to G/G_p$ τη λεία προβολή και την λεία απεικόνιση
$id \times \pi : G \times G \to G \times G/G_p$ έχουμε ότι $\pi \circ \mu = \phi \circ (id \times \pi)$ απ όπου προκύπτει η διαφορισιμότητα της ϕ.
Άρα το G/G_p αποτελεί ομογενή χώρο.

Είμαστε πλέον έτοιμοι να δώσουμε πιο συγκεκριμένη μορφή σε έναν ομογενή χώρο.

Θεώρημα 5.1.2. *Έστω M ομογενής χώρος υπό τη λεία μεταβατική δράση μιας ομάδας Lie G. Τότε η απεικόνιση $F : G/G_p \to M$ με $F(gG_p) = gp$ είναι ένας ισοαναλλοίωτος ισομορφισμός μεταξύ των δράσεων $G \times G/G_p \to G/G_p$ και $G \times M \to M$.*

Ουσιαστικά το παραπάνω θεώρημα ταυτίζει τους χώρους G/G_p και M ως ομογενείς χώρους.

Απόδειξη. Αρχικά η F είναι καλώς ορισμένη διότι αν $g_1G_p = g_2G_p$ τότε $g_1g_2^{-1} = k \in G_p$, οπότε $F(g_2G_p) = F(g_1k^{-1}G_p) = F(g_1G_p)$
Είναι ισοαναλλοίωτη καθώς

$$F(g_1(g_2G_p)) = F((g_1g_2)G_p) = (g_1g_2)p = g_1(g_2p) = g_1F(g_2G_p).$$

Επιπλέον είναι $1-1$, επί:
Αν $F(g_1G_p) = F(g_2G_p)$ είναι $g_1p = g_2p$ συνεπώς $g_1g_2^{-1} \in G_p$ οπότε $g_1G_p = g_2G_p$. Επίσης για $q \in M$ υπάρχει $g \in G$ με $gp = q$ λόγω μεταβατικότητας. Άρα $F(gG_p) = gp = q$.
Τέλος η F είναι λεία καθώς η $F \circ \pi$ ισούται με τη λεία δράση της G στην M ($\pi : G \to G/G_p$ είναι η λεία προβολή). $\square$

Οπότε μπορούμε να δώσουμε τον εξής ισοδύναμο ορισμό για έναν ομογενή χώρο:

Ορισμός 5.1.5. *Ένας ομογενής χώρος είναι μια λεία πολλαπλότητα της μορφής G/K όπου G είναι μια ομάδα Lie και K είναι μια κλειστή υποομάδα της.*

Θα δώσουμε ένα παράδειγμα ομογενούς χώρου με τον παραπάνω χαρακτηρισμό:

Παράδειγμα 5.1.1. *Θεωρούμε τη λεία πολλαπλότητα S^{n-1} (μοναδιαία σφαίρα στον $\mathbb{R}^n$), και τη δράση της ομάδας Lie $O(n)$ με $O(n) \times S^{n-1} \to S^{n-1}$ να δίνεται ως $(A, v) \to Av \in S^{n-1}$ δηλαδή ως το γινόμενο του πίνακα $A \in O(n)$ με το μοναδιαίο διάνυσμα $v \in S^{n-1}$. Το διάνυσμα Av ανήκει στην σφαίρα διότι οι πίνακες της ορθογώνιας ομάδας διατηρούν τα μήκη των διανυσμάτων. Η δράση είναι λεία και επιπλέον είναι μεταβατική. Αυτό συμβαίνει διότι για οποιοδήποτε $v \in S^{n-1}$ μπορούμε να επιλέξουμε πίνακα $A \in O(n)$ με $Ae_1 = v$ με $e_1 = (1, 0, ..., 0)$. Το πρώτο διάνυσμα στήλη του A θα είναι το v ενώ τα υπόλοιπα μπορούν να επιλεγούν με ορθοκανονικοποίηση Gram-Schmidt ώστε να κατασκευαστεί μια ορθοκανονική βάση, άρα ένας ορθογώνιος πίνακας. Οπότε για $v, w \in S^{n-1}$ και $A, B \in O(n)$ οι αντίστοιχοι πίνακες, έχουμε $BA^{-1}v = Be_1 = w$. Οπότε η δράση είναι μεταβατική.*
Τώρα αρκεί να υπολογίσουμε την ομάδα ισοτροπίας οποιουδήποτε στοιχείου της S^{n-1}. Έστω $p = e_1$. Αναζητούμε το συνολο των ορθογωνίων πινάκων A για τους οποίους ισχύει $Ae_1 = e_1$. Αν $A = (a_{ij})$ τότε θα πρέπει $a_{11} = 1$, $a_{i1} = 0$ για $i \neq 1$ και επειδή $\sum_j a_{1j}^2 = 0$ θα πρέπει $a_{1j} = 0$ για $j \neq 1$.
Καταλήγουμε σε ένα πίνακα της μορφής $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$

Ο B είναι ένας $n-1 \times n-1$ πίνακας και δεδομένου ότι $AA^T = I$ έχουμε ότι $BB^T = I$. Άρα $B \in O(n-1)$. Δεδομένου ότι το σύνολο των πινάκων A της παραπάνω μορφής ταυτίζεται με το σύνολο των πινάκων B (προφανώς και με λείο τρόπο), έχουμε ότι η ομάδα ισοτροπίας του e_1 είναι η $O(n-1)$.
Άρα καταλήγουμε ότι $S^{n-1} \cong O(n)/O(n-1)$.

Ας δούμε τώρα τη σχέση που έχει ο εφαπτόμενος χώρος $T_o(G/K)$ στο σημείο $o = eK$ ενός ομογενούς χώρου, με τις άλγεβρες $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}$ των G, K αντίστοιχα: Για την προβολή $\pi : G \to G/K$ έχουμε ότι η απεικόνιση $d\pi_e : \mathfrak{g} \to T_0(G/K)$ είναι επί. Επιπλέον για $X \in \mathfrak{g}$ έχουμε

$$d\pi_e(X) = \tfrac{d}{dt}\big|_0(\pi(\exp(tX))) = \tfrac{d}{dt}\big|_0(\exp(tX)K)\,.$$

Οπότε $d\pi_e(X) = 0$ αν και μόνο αν $\exp(tX) \in K$ ή ισοδύναμα $X \in \mathfrak{k}$. Επομένως $\ker(d\pi_e) = \mathfrak{k}$ και ο ισομορφισμός

$\mathfrak{g}/\ker(d\pi_e) \cong Im(d\pi_e)$ σημαίνει ότι $\mathfrak{g}/\mathfrak{k} \cong T_0(G/K)$.
Καταλήγουμε λοιπόν στο γεγονός ότι $T_0(G/K) \cong \mathfrak{g}/\mathfrak{k}$

Έστω τώρα $X \in \mathfrak{g}$ και θεωρούμε το λείο διανυσματικό πεδίο X^* στην G/K με $X^*_{gK} = \frac{d}{dt}|_0 \exp(tX)gK$. Ισχύει το εξής:

Πρόταση 5.1.1. $[X^*, Y^*] = -[X, Y]^*$

Απόδειξη. Έστω $X \in \mathfrak{g}$ και X^l το αντίστοιχο αριστερά αναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο με
$X^l_g = (dL_g)_e(X) = \frac{d}{dt}|_0 g\exp(tX)$ και X^r το δεξιά αναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο με $X^r_g = (dR_g)_e(X) = \frac{d}{dt}|_0 \exp(tX)g$

Για την απεικόνιση $: G \to G$ με $(g) = g^{-1}$ έχουμε το εξής:

$$d(inv)_{g^{-1}}(X^l_{g^{-1}}) = d(inv)_{g^{-1}}(\tfrac{d}{dt}|_0 g^{-1}exp(tX))$$

$$= \tfrac{d}{dt}|_0 inv(g^{-1}\exp(tX)) = \tfrac{d}{dt}|_0 \exp(-tX)g = (dR_g)_e(-X) = -X^r_g.$$

Τώρα, αν $a : G \times M \to M$ είναι η δράση της G στην M, θεωρούμε την απεικόνιση $a_p : G \to M$, $p \in M$ με $a_p(g) = a(g, p) = gp$ που είναι όπως έχουμε δει αμφιδιαφόριση. Έχουμε:

$$X^*_{gp} = \tfrac{d}{dt}|_0 \exp(tX)gp = \tfrac{d}{dt}|_0 a_p(\exp(tX)g) = (da_p)_g(\tfrac{d}{dt}|_0 \exp(tX)g)$$

$$= (da_p)_g(X^r_g) = (da_p)_g(-d(inv_{g^{-1}}(X^l_{g^{-1}})) = -(da_p)_g(d(inv))_{g^{-1}}(X^l_{g^{-1}})$$

$$= -(da_p)_g(dinv)_{g^{-1}}(dL_{g^{-1}})_e(X) = -d\phi(X),\ \text{όπου}\ -\phi = a_p \circ inv \circ L_g.$$

Από την Πρόταση **3.2.1**, τα πεδία X^l, X^* είναι $(-\phi)$-συσχετισμένα, οπότε :

$$[X,Y]^*_{gp} = -d\phi([X,Y]) = -[d\phi(X), d\phi(Y)] = -[-X^*_{gp}, -Y^*_{gp}] = -[X^*, Y^*]_{gp}.$$
□

5.2 Αναγωγικοί ομογενείς χώροι και G-αναλλοίωτες μετρικές

Ορισμός 5.2.1. *Ένας ομογενής χώρος G/K ονομάζεται αναγωγικός αν υπάρχει $\mathfrak{m}$ υπόχωρος του $\mathfrak{g}$ τέτοιος ώστε $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$, όπου $\mathfrak{k}$ είναι η άλγεβρα Lie της ομάδας K, και επιπλέον να ισχύει $\mathrm{Ad}(k)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$ για κάθε $k \in K$.*

Ένα παράδειγμα τέτοιου χώρου είναι ένας ομογενής χώρος G/K με G συμπαγή (πχ. οι πολλαπλότητες σημαιών που θα δούμε αργότερα). Αν θεωρήσουμε την αναπαράσταση $\mathrm{Ad} : K \to Aut(\mathfrak{g})$, ο χώρος $Aut(\mathfrak{k})$ είναι αναλλοίωτος υπόχωρος του $Aut(\mathfrak{g})$ ως προς την αναπαράσταση (για $X \in \mathfrak{k}$ ισχύει $\mathrm{Ad}(k)X = (dc_k)_e X \in \mathfrak{k}$), και λόγω συμπάγειας της G υπάρχει $\mathrm{Ad}(k)$-αναλλοίωτο εσωτερικό γινόμενο στην $\mathfrak{g}$. Ο $\mathfrak{m}$ προκύπτει ως $\mathfrak{m} = \mathfrak{k}^{\perp}$, δηλαδή ο ορθογώνιος υπόχωρος του $\mathfrak{k}$.

Θα δώσουμε την έννοια της ισοτροπικής αναπαράστασης ενός ομογενούς χώρου:
Έστω $\tau_h : G/K \to G/K$ η αμφιδιαφόριση με $\tau_h(gK) = hgK$.

Θεωρούμε την αναπαράσταση $\mathrm{Ad}^{G/K} : K \to Gl(T_0(G/K))$ με

$\mathrm{Ad}^{G/K}(k)(X) = (d\tau_k)_0(X)$ για $X \in (T_0(G/K)$.

Ισχύει το εξής:

Θεώρημα 5.2.1. *Έστω G/K αναγωγικός ομογενής χώρος. Ισχύει $\mathrm{Ad}|_K = \mathrm{Ad}^K \oplus \mathrm{Ad}^{G/K}$ όπου $\mathrm{Ad}|_K$ είναι η συζυγής αναπαράσταση της G περιορισμένη στην K, $\mathrm{Ad}^K : K \to Aut(\mathfrak{k})$ είναι η συζυγής αναπαράσταση της ομάδας K και $\mathrm{Ad}^{G/K} : K \to Gl(T_0(G/K))$ είναι η ισοτροπική αναπαράσταση του G/K.*

Απόδειξη. Πρέπει να αποδείξουμε ότι για κάθε $k \in K, X \in \mathfrak{k}, Y \in \mathfrak{m}$ ισχύει $\mathrm{Ad}(k)(X+Y) = \mathrm{Ad}^K(k)X + \mathrm{Ad}^{G/K}(k)(Y)$.

Επειδή $\mathrm{Ad}(k)(X+Y) = (dc_k)_e(X+Y) = (dc_k)_e(X) + (dc_k)_e(Y) = \mathrm{Ad}(k)(X) + \mathrm{Ad}(k)(Y)$, αρκεί να αποδείξουμε την ισότητα ξεχωριστά για X, Y.
Αρχικά αν $X \in \mathfrak{k}$ είναι προφανές ότι $\mathrm{Ad}(k)(X) = (dc_k)_0(X) \in \mathfrak{k}$. Άρα $\mathrm{Ad}\,|_K(X) = \mathrm{Ad}^K(X)$.
Τώρα θα αποδείξουμε ότι $\mathrm{Ad}(k)(Y) = \mathrm{Ad}^{G/K}(k)(Y)$ για κάθε $Y \in \mathfrak{m}$.
Από τον ορισμό ενός αναγωγικού ομογενούς χώρου έχουμε ότι $\mathrm{Ad}(k)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$.
Άρα $\mathrm{Ad}(k)(Y) \in \mathfrak{m}$.
Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι οι αναπαραστάσεις Ad του $\mathfrak{m}$) και $\mathrm{Ad}^{G/K}$ του $T_0(G/K)$) είναι ισοδύναμες. Εφαρμόζοντας τον ορισμό των ισοδύναμων αναπαραστάσεων θεωρούμε την απεικόνιση

$$d\pi_e|_{\mathfrak{m}} : \mathfrak{m} \to T_0(G/K)$$

η οποία αποτελεί και γραμμικό ισομορφισμό αυτών και αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$d\pi_e|_{\mathfrak{m}}(\mathrm{Ad}(k)Y) = \mathrm{Ad}^{G/K}(d\pi_e|_{\mathfrak{m}}(Y)) = (d\tau_k)_0(d\pi_e|_{\mathfrak{m}}(Y))$$

Είναι $d\pi_e|_{\mathfrak{m}}(\mathrm{Ad}(k)Y) = \frac{d}{dt}|_0(\exp(t\,\mathrm{Ad}(k)Y)K) = \frac{d}{dt}|_0(\exp(\mathrm{Ad}(k)(tY))K)$

$= \frac{d}{dt}|_0((k\exp(tY)k^{-1})K) = \frac{d}{dt}|_0((k\exp(tY)K) = \frac{d}{dt}|_0(\tau_k(\exp(tY)K)) =$

$(d\tau_k)_0(\frac{d}{dt}|_0(\exp(tY)K)) = (d\tau_k)_0(d\pi_e|_{\mathfrak{m}}(Y))$.

Άρα προκύπτει το ζητούμενο. □

Ένα φυσικό ερώτημα που μπορεί να τεθεί για έναν ομογενή χώρο είναι ο εφοδιασμός του με μια μετρική που θα διατηρεί τα γεωμετρικά μεγέθη σε κάθε σημείο του. Σε κάθε ομάδα Lie G που αποτελεί ομογενή χώρο με τη λεία και μεταβατική δράση της G στον εαυτό της, μπορούμε να ορίσουμε μετρικές ώστε τα γεωμετρικά μεγέθη σε κάθε περιοχή της G να μένουν αναλλοίωτα κατά την αριστερή μεταφορά. Δηλαδή η αριστερή μεταφορά να είναι ισομετρία. Τέτοιες μετρικές στην G ονομάζονται αριστερά αναλλοίωτες. Είναι φυσικό να μπορούμε να ορίσουμε και σε έναν ομογενή χώρο μια μετρική για την οποία η λεία μεταφορά θα είναι ισομετρία.

Ορισμός 5.2.2. *Έστω $M = G/K$ ομογενής χώρος και η αμφιδιαφόριση $\tau_g : M \to M$ με $\tau_g(hK) = (gh)K$ για $g \in G$. Μια μετρική $\langle , \rangle$ στην M ονομάζεται G-αναλλοίωτη αν για κάθε $g \in G$ η τ_g είναι ισομετρία, δηλαδή*

$\langle d\tau_g(X), d\tau_g(Y)\rangle = \langle X, Y\rangle$ *για κάθε* $X, Y \in T_0M$ *και* $g \in G$.

Κάθε μετρική ορίζει και ένα εσωτερικό γινόμενο στον $\mathfrak{m} = T_0M$. Ας δούμε τις ιδιότητες που έχει ένα τέτοιο γινόμενο.

Πρόταση 5.2.1. *Υπάρχει μια 1-1 αντιστοιχία μεταξύ:*
1.G-αναλλοίωτων μετρικών στην G/K.
2.$\mathrm{Ad}^{G/K}$-αναλλοίωτων εσωτερικών γινομένων στον $\mathfrak{m}$.

Απόδειξη. Αν $\langle,\rangle$ είναι μια G-αναλλοίωτη μετρική στην M, ορίζει εσωτερικό γινόμενο στον $\mathfrak{m}$ όπως και σε κάθε T_pM.
Επιπλέον για $X, Y \in \mathfrak{m}$ και $k \in K$ έχουμε

$\langle \mathrm{Ad}^{(G/K)}(k)X, \mathrm{Ad}^{(G/K)}(k)Y\rangle = \langle (d\tau_k)_0(X), (d\tau_k)_0(Y)\rangle = 0$ από τον ορισμό της μετρικής.

Αν τώρα $\langle,\rangle$ είναι ένα εσωτερικό γινόμενο στον $\mathfrak{m}$ το επεκτείνουμε στον $T_{hK}M$ ως :

$$\langle X, Y\rangle_{hK} = \langle d\tau_{h^{-1}}(X), d\tau_{h^{-1}}(Y)\rangle_0.$$

Ο ορισμός είναι καλός καθώς αν $h_1K = h_2K$ έχουμε $h_1^{-1}h_2 = k \in K$, οπότε $\tau_k = \tau_{h_1^{-1}} \circ a_{h_2}$ και

$$\langle X, Y\rangle_{h_2K} = \langle d\tau_{h_2^{-1}}(X), d\tau_{h_2^{-1}}(Y)\rangle_0 = \langle d\tau_k \circ d\tau_{h_1^{-1}}(X), d\tau_k \circ d\tau_{h_1^{-1}}(Y)\rangle_0$$

$$= \langle d\tau_{h_1^{-1}}(X), d\tau_{h_1^{-1}}(Y)\rangle_0 = \langle X, Y\rangle_{h_1K}.$$ □

5.3 Πολλαπλότητες σημαιών

Έστω G συμπαγής, ημιαπλή ομάδα Lie με άλγεβρα $\mathfrak{g}$. Θεωρούμε την λεία συζυγή αναπαράσταση $\mathrm{Ad} : G \to Aut(\mathfrak{g})$. Όπως και κάθε αναπαράσταση, η συζυγής αναπαράσταση ορίζει μια λεία δράση $\mathrm{Ad} : G \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ με $\mathrm{Ad}(g, X) = \mathrm{Ad}(g)X$.
Έστω $X_0 \in \mathfrak{g}$. Η τροχιά του $X \in \mathfrak{g}$ είναι το σύνολο $\mathrm{Ad}(G)X_0 = \{\mathrm{Ad}(g)X_0 : g \in G\}$, ενώ η ομάδα ισοτροπίας είναι η
$K = G_{X0} = \{g \in G : \mathrm{Ad}(g)X_0 = X_0\}$, και $\mathrm{Ad}(G)X_0 \cong G/G_{X0}$.

Επειδή η $\mathfrak{g}$ είναι ημιαπλή, η μορφή Killing είναι αρνητικά ορισμένη και ισχύει η διάσπαση $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$ όπου $\mathfrak{k}$ είναι η άλγεβρα Lie της K και $\mathfrak{m} = \mathfrak{k}^T$ δηλαδή ο

ορθογώνιος στο $\mathfrak{k}$ ως προς τη μορφή Killing υπόχωρος της $\mathfrak{g}$.
Δηλαδή ο ομογενής χώρος G/K είναι αναγωγικός και έχουμε την ταύτιση $\mathfrak{m} = T_0(G/K) = T_0(G/G_{X0})$.
Για $Y \in \mathfrak{g}$ ορίζουμε το πεδίο Y^* με τιμή στο σημείο $p = \mathrm{Ad}(g)X_0$ $Y_p^* = Y_{\mathrm{Ad}(g)X_0}^* = \frac{d}{dt}|_0 \mathrm{Ad}(\exp(tY)p$

Επομένως $Y_{\mathrm{Ad}(g)X_0}^* = \frac{d}{dt}|_0 \mathrm{Ad}(\exp(tY))(\mathrm{Ad}(g)X_0) = (d\,\mathrm{Ad}(Y))_e(\mathrm{Ad}(g)X_0)$

$= \mathrm{ad}(Y)\,\mathrm{Ad}(g)X_0 = [Y, \mathrm{Ad}(g)X_0]$.

Πρόταση 5.3.1. *Ισχύει* $\mathfrak{k} = \{Y \in \mathfrak{g} : [Y, X_0] = 0\} = \ker \mathrm{ad}(X_0)$.

Απόδειξη. Είναι $\mathfrak{k} = \{Y \in \mathfrak{g} : \exp(tY) \in K\}$
Αν $\exp(tY) \in K$ τότε $\mathrm{Ad}(\exp(tY))X = X$ άρα $\frac{d}{dt}|_0 \mathrm{Ad}(\exp(tY))X = 0$
δηλαδή $[Y, X] = 0$.
Οπότε $\mathfrak{k} \subset \ker \mathrm{ad}(X)$.

Τώρα, αν $Y \in \ker \mathrm{ad}(X)$ ισχύει $Y_X^* \frac{d}{dt}|_0 \mathrm{Ad}(\exp(tY))X = 0$ δηλαδή

$\mathrm{Ad}(\exp(tY))X = c \in \mathfrak{g}$ σε μια περιοχή του 0.

Δεδομένου όμως ότι η $\mathrm{Ad}(\exp(tY))X_0$ είναι μέγιστη ολοκληρωτική καμπύλη που διέρχεται από το X_0 έχουμε ότι

$c = X_0$, οπότε $\mathrm{Ad}(\exp(tY)X_0 = X_0$ δηλαδή $\exp(tY) \in K$, συνεπώς $Y \in \mathfrak{k}$.

Συνεπώς έχουμε την ταύτιση $\mathfrak{k} = \ker \mathrm{ad}(X_0)$. □

Τώρα επειδή $X_0 \in \ker \mathrm{ad}(X_0) = \mathfrak{k}$ το σύνολο $T_{X0} = \overline{\{\exp(tX_0) : t \in \mathbb{R}\}}$ περιέχεται στην K.
Επιπλέον είναι συμπαγής ως κλειστό υποσύνολο της συμπαγούς ομάδας G, συνεκτική και αβελιανή υποομάδα της K. Άρα είναι ένας δακτύλιος στην K.

Γενικά, αν H είναι μια υποομάδα μιας ομάδας G, η ομάδα
$C(H) = \{g \in G : ghg^{-1} = h, \forall h \in H\}$ ονομάζεται **κεντροποιούσα** ομάδα της H. Θα αποδείξουμε ότι η ομάδα ισοτροπίας K είναι κεντροποιούσα ομάδα του δακτυλίου T_{X0}:

Είναι $C(T_{X0}) = \{g \in G : g\exp(tX_0)g^{-1} = \exp(tX_0), \forall t \in \mathbb{R}\}$

με $g\exp(tX_0)g^{-1} = c_g(\exp(tX_0)) = \exp(t\,\mathrm{Ad}(g)X_0)$.

Άρα $C(T_{X0}) = \{g \in G : \exp(t\,\mathrm{Ad}(g)X_0) = \exp(tX_0), \forall t \in \mathbb{R}\}$

κι επειδή η exp είναι τοπική αμφιδιαφόριση έχουμε για $|t| \to 0$ ότι $\mathrm{Ad}(g)X_0 = X_0$ ή ισοδύναμα $g \in G_{X0} = K$.

Σημειώνουμε ότι αν ο δακτύλιος είναι μέγιστος , η ομάδα $C(T_{X0})$ συμπίπτει με τον T_{X0}.
Ερχόμαστε στον εξής ορισμό:

Ορισμός 5.3.1. *Έστω G συμπαγής, ημιαπλή ομάδα Lie. Μια γενικευμένη πολλαπλότητα σημαιών είναι η συζυγής τροχιά $\mathrm{Ad}(G)X_0$ ενός στοιχείου $X \in \mathfrak{g}$ ή ισοδύναμα ένας ομογενής χώρος G/K όπου K είναι η κεντρικοποιούσα ομάδα ενός δακτυλίου στην K. Αν ο δακτύλιος είναι μέγιστος, η G/K ονομάζεται πλήρης πολλαπλότητα σημαιών.*

Θα δώσουμε ένα παράδειγμα πλήρους και ένα παράδειγμα γενικευμένης πολλαπλότητας σημαιών.

Παράδειγμα 5.3.1. *Θεωρούμε τη συμπαγή, ημιαπλή ομάδα $U(n)$, την αντίστοιχη άλγεβρα*
$\mathfrak{u}(\mathfrak{n}) = \left\{X \in Gl_n\mathbb{C} : \bar{X}^T = -X\right\}$ *και τη συζυγή δράση της $U(n)$ στη $\mathfrak{u}(\mathfrak{n})$.*
Γενικά, για τις ομάδες πινάκων η συζυγής δράση έχει την μορφή:

$\mathrm{Ad}(g)X = (dc_g)_e(X) = \frac{d}{dt}|_0 c_g(\exp(tX))$

$= \frac{d}{dt}|_0 g\exp(tX)g^{-1} = gXg^{-1}$.

Έστω $X \in \mathfrak{u}(\mathfrak{n})$ με $X = \{ia_1, ..., ia_n\}$ όπου

$a_i \neq a_j$ για $i \neq j$,$a_i \in \mathbb{R}$. Η ομάδα ισοτροπίας του X είναι το σύνολο

$K = \{g \in G : gXg^{-1} = X\}$ δηλαδή είναι ο μέγιστος δακτύλιος

$K = U(1) \times \cdots \times U(1)$.

Άρα η $U(n)/U(1)\times\cdots\times U(1)$ *είναι μια πλήρης πολλαπλότητα σημαιών.* *Για να δούμε τη μορφή των τροχιών θεωρούμε τη δράση της* $U(n)$ *στο σύνολο* $\mathbb{F}_n\mathbb{C}=\{V_1\subset\cdots\subset V_n\}$ *με* V_i *υπόχωρο του* $\mathbb{C}^n$ *τέτοιο ώστε* $\dim V_i=i, V_n=\mathbb{C}^n$. *Το σύνολο* $\mathbb{F}_n\mathbb{C}$ *ονομάζεται σύνολο σημαιών του* $\mathbb{C}^n$. *Η δράση έχει την εξής μορφή:*

Για $g\in U(n)$ *και* $f\in\mathbb{F}_n\mathbb{C}, f=(V_1,\cdots,V_n)$ *θεωρούμε* $gf=(gV_1,\cdots,gV_n)$. *Η δράση είναι καλώς ορισμένη καθώς ισχύει* $\dim(gV_i)=i$. *Επιπλέον είναι λεία και ελεύθερη.*
Αυτό συμβαίνει διότι για κάθε $g\in U(n)$, $v\in V_i$ *ισχύει* $|gv|=|v|$.
Οπότε αν $gV_i=V_i$, *για κάθε* i *και* $V_i=span\{v_1,...,v_i\}$, *τότε* $gv_i=v_i$, *για κάθε* i *οπότε* $g=I$.
Τέλος , θα αποδείξουμε ότι είναι μεταβατική.

Θεωρούμε το $f_0=(\{e_1\}\subset...\subset\{e_1,...,e_n\})$

και $f=(\{v_1\}\subset...\subset\{v_1,...,v_n\})$ *με*

$\{v_i\}$ *να είναι ορθοκανονική βάση ως προς το εσωτερικό γινόμενο* $\langle u,v\rangle=\sum u_i\bar{v}_i$.
Επειδή υπάρχει $g\in U(n)$ *που μεταφέρει την ορθοκανονική βάση* $\{e_i\}$ *στην* $\{v_i\}$ *έχουμε ότι* $gf_0=f$. *Άρα η δράση είναι μεταβατική.*
Επιπλέον, η ομάδα ισοτροπίας του f_0 *είναι το σύνολο* $K=U(1)\times...\times U(1)$.
Οπότε έχουμε $\mathbb{F}_n\mathbb{C}=U(n)/U(1)\times\cdots\times U(1)$.

Το παραπάνω παράδειγμα γενικεύεται ως εξής:

Παράδειγμα 5.3.2. *Για ακέραιους* $n_1,..,n_s$ *με* $n_1+\cdots+n_s=n$, *θεωρούμε το σύνολο*

$$\mathbb{F}_{n_1,...,n_s}\mathbb{C}=\left\{V_{n_1}\subset V_{n_1+n_2}\subset\cdots\subset V_{n_1+...+n_{s-1}}\subset V_n=\mathbb{C}^n\right\}$$

και τη δράση της $U(n)$ *στο* $\mathbb{F}_{n_1,...,n_s}\mathbb{C}$ *όπως πριν.*
Η δράση είναι λεία, ελεύθερη και μεταβατική όπως στο προηγούμενο παράδειγμα. Θεωρούμε το στοιχείο

$$f_0=(\{e_1,...,e_{n_1}\}\subset\{e_1,...,e_{n_1+n_2}\}\subset...\subset\{e_1,...,e_n\}).$$

Η ομάδα ισοτροπίας του f_0 *είναι το σύνολο* $U(n_1)\times\cdots\times U(n_s)$.

Άρα έχουμε $F_{n_1,...,n_s}\mathbb{C} = U(n)/U(n_1) \times \cdots \times U(n_s)$.

Τώρα, ας θεωρήσουμε το σύνολο $T = \{a_1 Id_{n_1}, ..., a_s Id_{n_s}\}$,

όπου Id_{n_i} *είναι ο ταυτοτικός πίνακας διάστασης* $n_i \times n_i$ *και* a_i *είναι φανταστικοί αριθμοί. Το* T *είναι δακτύλιος της* $U(n)$ *και επιπλέον* $C(T) = U(n_1) \times \cdots \times U(n_s)$.

Συνεπώς, το $F_{n_1,...,n_s}\mathbb{C} = U(n)/U(n_1) \times \cdots \times U(n_s)$ *είναι πολλαπλότητα σημαιών.*

Όμοια μπορούμε να θεωρήσουμε τη δράση της $SU(n)$ *στο* $F_{n_1,...,n_s}\mathbb{C}$. *Σε αυτή την περίπτωση έχουμε*

$F_{n_1,...,n_s}\mathbb{C} = SU(n)/S(U(n_1) \times \cdots \times U(n_s))$, *όπου*

$S(U(n_1) \times \cdots \times U(n_s)) = \{A = (A_1, ..., A_s) : A_i \in U(n_i), \det A = 1\}$.

Θα δούμε τώρα πώς περιγράφονται οι πολλαπλότητες σημαιών με την θεωρία των ριζών.

Έστω $M = G/K$ πολλαπλότητα σημαιών με $K = C(T)$ όπου T είναι δακτύλιος της K.
Αν $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, \mathfrak{h}$ είναι οι άλγεβρες Lie των G, K, T αντίστοιχα, και
$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{k}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ οι αντίστοιχες μιγαδοποιοιήσεις, τότε η $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ είναι υποάλγεβρα Cartan της $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$, άρα και της $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$.

Οπότε αν R είναι ένα σύστημα ριζών της $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ έχουμε

$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{h}^{\mathbb{C}} \oplus \sum_{a \in R} \mathfrak{g}^a$ με

$\mathfrak{g}^a \left\{X \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} : [H, X] = a(H)X, \forall H \in \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}\right\}$.

Επιπλέον, επειδή η $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ είναι υποάλγεβρα Cartan της $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ και οι χώροι $\mathfrak{g}^a$ είναι μονοδιάστατοι, υπάρχει υποσύνολο R_K του R με

$\mathfrak{k}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{h}^{\mathbb{C}} \oplus \sum_{a \in R_K} \mathfrak{g}^a$.

Επιπλέον, αν θεωρήσουμε $R_M = R/R_K$ και δεδομένης της διάσπασης

$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{k}^{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$ έχουμε

$\mathfrak{m}^{\mathbb{C}} = \sum_{a \in R_M} \mathfrak{g}^a$.

Το σύνολο R_M ονομάζεται σύνολο **συμπληρωματικών ριζών**.

Τώρα αν $\Pi = \{a_1, ..., a_l\}$ $(l = \dim \mathfrak{h}^{\mathbb{C}})$, το σύνολο των απλών ριζών έχουμε $\langle \Pi \rangle = R$.
Έστω $\Pi_K \subset \Pi$ το σύνολο των απλών ριζών της $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$. Τότε $\langle \Pi_K \rangle = R_K$.
Έστω τώρα $\Pi_M = \Pi/\Pi_K$. Επειδή το σύνολο $\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$ δεν είναι απαραίτητα υποάλγεβρα της $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, δεν ισχύει $\langle \Pi_M \rangle = R_M$, δηλαδή οι ρίζες του R_M δεν εκφράζονται ως γραμμικός συνδυασμός των ριζών του Π_M. Γι αυτό θα εισάγουμε το σύστημα των $\mathfrak{t}-$ ριζών:

Θεωρούμε $\mathfrak{t}$ το κέντρο της άλγεβρας $\mathfrak{k}$, δηλαδή
$\mathfrak{t} = \{Y \in \mathfrak{k} : [Y, Z] = 0, \forall Z \in \mathfrak{k}\}$.

Τώρα, κάθε $Z \in \mathfrak{t}$ έχει τη μορφή
$Z = \sum_{a \in R_k^+} Z^a$ με $Z^a \in \mathfrak{g}^a$, δηλαδή τέτοιο ώστε $[Z^a, H] = a(H)Z^a, \forall H \in \mathfrak{h}$.

Επιπλέον έχουμε $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{h} = \mathfrak{h}^{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{g}$ από τον ορισμό του $\mathfrak{h}$.

Άρα η συνθήκη $[Y, Z] = 0$, για κάθε $Z \in \mathfrak{k}$ ισοδυναμεί με

$\sum_{a \in R_K^+} [Y, Z^a] = \sum_{a \in R_K^+} a(Y) Z^a = 0$, για κάθε $Y \in \mathfrak{h}$ ή

$a(Y) = 0$, για κάθε $a \in R_K^+$.

Οπότε $\mathfrak{t} = \left\{Y \in \mathfrak{h} : a(Y) = 0, \forall a \in R_K^+\right\} = \{Y \in \mathfrak{h} : a(Y) = 0, \forall a \in R_K\}$

Θεωρούμε τώρα τη γραμμική απεικόνιση των δυικών χώρων $k : \mathfrak{h}^* \to \mathfrak{t}^*$ με $k(a) = a|_t$. Ισχύει $k(a) = 0$ για $a \in R_K$.

Το σύνολο $R_{\mathfrak{t}} = k(R_M)$ ονομάζεται σύνολο των **$\mathfrak{t}-$ριζών**.

Ορισμός 5.3.2. *Μια $\mathfrak{t}$-ρίζα ονομάζεται απλή αν δε μπορεί να γραφεί ως ά-*

θροισμα θετικών $\mathfrak{t}$*-ριζών.*

Το σύνολο $\Pi_{\mathfrak{t}}$ των απλών $\mathfrak{t}$-ριζών αποτελεί μια βάση των $\mathfrak{t}$-ριζών με την έννοια ότι κάθε $\mathfrak{t}$-ρίζα γράφεται μοναδικά ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του $\Pi_{\mathfrak{t}}$. Σημειώνουμε ότι ο περιορισμός της μορφής Killing στο $\mathfrak{t}$ είναι αρνητικά ορισμένος άρα έχουμε τον ισομορφισμό $\mathfrak{t} \cong \mathfrak{t}^*$.
Παρακάτω θα δούμε τη μορφή των απλών $\mathfrak{t}$-ριζών:

Πρόταση 5.3.2. *Το σύνολο* $k(\Pi_M) = \{\bar{a_i} = a_i|_{\mathfrak{t}} : a_i \in \Pi_M\}$ *είναι μια βάση του* $\mathfrak{t}^*$.

Απόδειξη. Έστω $\Pi_M = \{a_1, ..., a_s\}$ και $k(\Pi_M) = \{\bar{a_1}, ..., \bar{a_s}\}$.
Θα αποδείξουμε ότι το $k(\Pi_M)$ αποτελείται από $s = \dim \mathfrak{t}$ γραμμικά ανεξάρτητες απλές $\mathfrak{t}-$ρίζες.

Αρχικά έχουμε $\bar{a_i} \neq \bar{a_j}$ για $i \neq j$. Σε αντίθετη περίπτωση θα είχαμε $a_i|_{\mathfrak{t}} = a_j|_{\mathfrak{t}}$ δηλαδή $(a_i - a_j)|_{\mathfrak{t}} = 0$ ή ισοδύναμα $a_i - a_j \in R_K$ που είναι άτοπο καθώς $a_i, a_j \in \Pi_M$.
Έστω τώρα $c_1, ..., c_s \in \mathbb{R}$ με $c_1 a_1 + \cdots + c_s a_s = 0$.
Τότε θα είναι $k(c_1 a_1 + \cdots + c_s a_s) = 0$ ή $c_1 a_1 + \cdots + c_s a_s \in R_K$ που είναι άτοπο για $c_i \neq 0$.
Συνεπώς $c_i = 0$, για κάθε i άρα το σύνολο $k(\Pi_M)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.
Τέλος, κάθε $\bar{a_i}$ είναι απλή $\mathfrak{t}-$ρίζα. Σε αντίθετη περίπτωση θα είχαμε
$\bar{a_i} = a + b$ με $a, b \in R_{\mathfrak{t}}$.
Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $a = \bar{a_j}$.
Τότε θα είναι
$\bar{a_i} - \bar{a_j} = b$ ή $k(a_i - a_j) = b$ το οποίο είναι άτοπο καθώς $a_i - a_j \notin R$. □

Τώρα, για $\mathfrak{m} = T_o(G/K)$ έχουμε $\mathfrak{m} = \sum_{a \in R_M} \mathfrak{g}^a$.
Ας θεωρήσουμε την ισοτροπική αναπαράσταση της K, $\mathrm{Ad}^{G/K} : K \to End(\mathfrak{m}^{\mathbb{C}})$ με
$\mathrm{Ad}^{G/K}(k)X = (d\tau_k)_0(X)$ όπου $\tau_k : G/K \to G/K, \tau_k(g) = kg$.

Η $\mathrm{Ad}^{G/K}$ ως αναπαράσταση συμπαγούς ομάδας Lie είναι πλήρως αναγώγιμη (Η K είναι συμπαγής ως κλειστό υποσύνολο της συμπαγούς ομάδας G).
Άρα ο $\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$ αναλύεται ως ευθύ άθροισμα $\mathrm{Ad}^{G/K}$ αναλλοίωτων υποχώρων $\mathfrak{m}_i$.
Από την άλλη μεριά, αν λάβουμε υπ όψη μας τις $\mathfrak{t}-$ρίζες, στην έκφραση
$\mathfrak{m}^{\mathbb{C}} = \sum_{a \in R_M} \mathfrak{g}^a$

κάποιες ρίζες έχουν κοινές τιμές στο $\mathfrak{t}$. Για κάθε $\xi \in R_{\mathfrak{t}}$ θεωρούμε τον υπόχωρο $\mathfrak{m}_\xi$ του $\mathfrak{m}$ με

$\mathfrak{m}_\xi = \sum_{a:k(a)=\xi} \mathfrak{g}^a$. Αποκτούμε έτσι την έκφραση

$\mathfrak{m}^{\mathbb{C}} = \sum_{\xi \in R_{\mathfrak{t}}} \mathfrak{m}_\xi$.

Μια σημαντική ιδιότητα των $\mathfrak{t}-$ ριζών είναι ότι οι χώροι $\mathfrak{m}_\xi$ ταυτίζονται με τους $\mathrm{Ad}^{G/K}$-αναλλοίωτους μη αναγώγιμους υπόχωρους. Δηλαδή υπάρχει μια 1-1 αντιστοιχία μεταξύ $\mathfrak{t}-$ριζών και μη αναγώγιμων $\mathrm{Ad}^{G/K}$ αναλλοίωτων υποχώρων του $\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$.

Πρόταση 5.3.3. *Κάθε υπόχωρος* $\mathfrak{m}_\xi = \sum_{a:k(a)=\xi} \mathfrak{g}^a$ *είναι* $\mathrm{Ad}^{G/K}$*-αναλλοίωτος.*

Απόδειξη. Όπως είδαμε, η ισοτροπική αναπαράσταση της K είναι ισοδύναμη με τη συζυγή αναπαράσταση της K, Ad^K. Η K ως κεντρικοποιούσα ενός δακτυλίου είναι συνεκτική υποομάδα της G. Άρα, η συνθήκη $\mathrm{Ad}(K)\mathfrak{m}_\xi \subset \mathfrak{m}_\xi$ ισοδυναμεί με τη συνθήκη $[\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{m}_\xi] \subset \mathfrak{m}_\xi$.
Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι $[\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{m}_\xi] \subset \mathfrak{m}_\xi$.

Επειδή $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{h}^{\mathbb{C}} \oplus \sum_{a \in R_K} \mathfrak{g}^a$ και $\mathfrak{m}_\xi = \sum_{b \in R_M : k(b)=\xi} \mathfrak{g}^b$, έχουμε

$[\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{m}_\xi] = \sum [\mathfrak{g}^a, \mathfrak{g}^b]$.

Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι για $a \in R_K, b \in R_M$ με $k(b) = \xi$, αν $a + b \in R$ τότε θα ισχύει $k(a+b) = \xi$.
Όμως, επειδή $a \in R_K$ έχουμε $k(a) = 0$, οπότε
$k(a+b) = k(a) + k(b) = k(b) = \xi$, άρα έχουμε το ζητούμενο. □

Αποδεικνύεται επιπλέον ότι οι χώροι $\mathfrak{m}_\xi$ είναι μη αναγώγιμοι.

Τέλος, κάθε πολλαπλότητα σημαιών $M = G/K$ καθορίζεται μοναδικά από ένα βαμμένο διάγραμμα Dynkin ως εξής:
Έστω D είναι το διάγραμμα Dynkin της $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ που αποτελείται από τις απλές ρίζες της $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$.
Αν στο D βάψουμε τις απλές ρίζες που αντιστοιχούν στο Π_M, οι λευκές κορυφές που απομένουν αντιστοιχούν στο ημιαπλό μέρος της $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$.
Αντίστροφα, αν από κάποιο διάγραμμα Dynkin μιας ημιαπλής άλγεβρας Lie βάψουμε έναν αριθμό κορυφών, το διάγραμμα πο προκύπτει αντιστοιχεί σε μοναδικό ως προς ισομορφισμό διάγραμμα μιας πολλαπλότητας σημαιών.

Παραδείγματα εφαρμογής t-ριζών και βαμμένων διαγραμμάτων θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο.

Κεφάλαιο 6

Ομογενείς γεωδαισιακές καμπύλες και Ισογεωδαισιακές σε πολλαπλότητες σημαιών

6.1 Ομογενείς γεωδαισιακές

Ορισμός 6.1.1. *Έστω $M = G/K$ ομογενής χώρος. Μια γεωδαισιακή καμπύλη $\gamma : \mathbb{R} \to M$ ονομάζεται ομογενής αν $\gamma(t) = \exp(tX)(p)$, $p \in G/K$, $X \in \mathfrak{g}$, $X \neq 0$.*

Δηλαδή ομογενής ονομάζεται η γεωδαισιακή καμπύλη που αποτελεί τροχιά μιας μονοπαραμετρικής υποομάδας της G (Επιπλέον είδαμε ότι οι ροές σε μια ομάδα Lie είναι ολικές άρα $t \in \mathbb{R}$). Επιπλέον, χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $p = 0$.

Εαν $\gamma(t) = \exp(tX)$ είναι μια ομογενής γεωδαισιακή, το αντίστοιχο διάνυσμα X ονομάζεται γεωδαισιακό διάνυσμα και λόγω της μοναδικότητας των ροών υπάρχει αντιστοιχία των ομογενών γεωδαισιακών και των αντίστοιχων διανυσμάτων.

Ισχύει το εξής:

Θεώρημα 6.1.1. *Ένα μη μηδενικό διάνυσμα $X \in \mathfrak{g}$ είναι γεωδαισιακό αν και μόνο αν $\langle X_m, [X,Y]_m \rangle = 0$ για κάθε $U \in \mathfrak{g}$, όπου X_m είναι η συνιστώσα του διανύσματος X στον $\mathfrak{m} = T_0(G/K)$ και $\langle , \rangle$ είναι το εσωτερικό γινόμενο στο $\mathfrak{m}$ που προκύπτει από την ταύτιση του με τον T_0M.*

Απόδειξη. Έστω $X, Y \in \mathfrak{g}$ και X^*, Y^* τα αντίστοιχα διανυσματικά πεδία στην

M με

$X_p^* = \frac{d}{dt}|_{t=0}(\exp(tX)(p)$, $p \in M$ και αντίστοιχα το Y.
Θεωρώντας g την μετρική στην M και ∇ την αντίστοιχη συνοχή ισχύουν οι εξής σχέσεις:

$$2g(\nabla_{X^*}X^*, Y^*) = 2X^*g(X^*, Y^*) - Y^*g(X^*, X^*) + 2g([Y^*, X^*], X^*) \quad (6.1)$$

$$\mathrm{Ad}(\exp(tX))Y = Y + t[X, Y] + O(t^2) \quad (6.2)$$

$$a\exp(tX)a^{-1} = \exp(t\,\mathrm{Ad}(a)X) \quad (6.3)$$

Η ισότητα (6.1) ισχύει άμεσα από τον τύπο της συνοχής Levi Civita (τύπος (2.3))

Η ισότητα (6.2) ισχύει διότι $\mathrm{Ad}(\exp(tX)) = \exp(d\,\mathrm{Ad}_e(tX)) = \exp(t\,\mathrm{ad}\,X)$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n\,\mathrm{ad}\,X^n}{n!}$ διότι $\mathrm{ad}\,X \in End(\mathfrak{g})$

άρα $\exp(t\,\mathrm{ad}\,X) \in Aut(\mathfrak{g})$ οπότε χρησιμοποιώντας την εκθετική απεικόνιση πινάκων έχουμε
$\mathrm{Ad}(\exp(tX)Y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n\,\mathrm{ad}\,X^n}{n!}Y = Y + t\,\mathrm{ad}\,X(Y) + O(t^2)$

$= Y + t[X, Y] + O(t^2)$, που αποδεικνύει την ισότητα (6.2).

Για την ισότητα (6.3) θεωρούμε τον αυτομορφισμό $c_a : G \to G$ με $c_a(g) = aga^{-1}$.
Χρησιμοποιώντας το θεώρημα **3.5.1** έχουμε ότι
$a\exp(tX)a^{-1} = \exp(d(c_a)_e(tX)) = \exp(t\,\mathrm{Ad}_a\,X)$, όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από τον ορισμό της συζυγούς αναπαράστασης.

Περνάμε στην απόδειξη του κυρίως θεωρήματος.
Έστω $a_t = \exp(tX)b_s = \exp(sY)$. Για $p \in M$ έχουμε:

$Y_{a_t(p)} = \frac{d}{ds}\left|_0 (b_s a_t(p)) = (da_t)\frac{d}{ds}\right|_0 (a_t^{-1} b_s a_t(p))$

Αυτό ισχύει γιατί αν θεωρήσουμε την καμπύλη $c(s) = a_t^{-1} b_s a_t(p)$ στην M είναι

$c(0) = p, c\acute{(0)} = \frac{d}{ds}\left|_0 (a_t^{-1} b_s a_t(p))\right.$ και για τη συνάρτηση $a_t : M \to M$ έχουμε

$(da_t)_p(\frac{d}{ds}\left|_0 (a_t^{-1} b_s a_t(p))) = (da_t)_p(c\acute{(0)}) = \frac{d}{ds}\right|_0 (a_t a_t^{-1} b_s a_t(p)) = \frac{d}{ds}\left|_0 (b_s a_t(p))\right.$.

Άρα $Y_{a_t(p)} = (da_t)\frac{d}{ds}\left|_0 (a_t^{-1} b_s a_t(p)) = (da_t)\frac{d}{ds}\right|_0 \exp(s\,\mathrm{Ad}(a_t^{-1})Y)(p) =$

$(da_t)(\mathrm{Ad}(a_t^{-1})Y)^*_p = (da_t)(\mathrm{Ad}(\exp(-tX))Y)^*_p = (da_t)(Y - t[X,Y] + O(t^2))^*_p$

Όμοια έχουμε $X^*_{b_s(p)} = (db_s)(X - s[Y,X] + O(S^2))^*_p$

Επιπλέον,ισχύει $X^*_{a_t(p)} = \frac{d}{dt}\left|_0 (a_t(a_t(p))) = (da_t)(\frac{d}{dt}\right|_0 a_t(p)) = (da_t)X^*_p$

και όμοια $Y^*_{b_s(p)} = (db_s)Y^*_p$

Οπότε $X^*_p g(X^*, Y^*) = \frac{d}{dt}\left|_0 g(X^*, Y^*)_{a_t(p)} = \frac{d}{dt}\right|_0 g(X^*_{a_t(p)}, Y^*_{a_t(p)})$

$= \frac{d}{dt}\left|_0 g((da_t)X^*_p, (da_t)(Y - t[X,Y] + O(t^2))^*_p)\right.$ (η g είναι Gαναλλοιωτη)

$= \frac{d}{dt}\left|_0 g(X^*_p, Y^*_p - t[X,Y]^*_p + O(t^2))\right.$

$= \frac{d}{dt}\left|_0 g(X^*_p, Y^*_p + t[X^*,Y^*]^*_p + O(t^2)) = g(X^*, [X^*,Y^*])(p)\right.$.

Επιπλέον

$Y^* g(X^*, X^*) = \frac{d}{ds}\left|_0 g(X^*_p + s[Y^*,X^*]_p + O(s^2), X^*_p + s[Y^*,X^*]_p + O(s^2))\right.$

$= 2g(X^*, [Y^*,X^*])(p)$

Άρα από τη σχέση (6.1) έχουμε

$$g(\nabla_{X^*}X^*, Y^*) = g(X^*, [X^*,Y^*]) = -g(X^*, [X,Y]^*) \tag{6.4}$$

Έστω τώρα ότι το X είναι γεωδαισιακό διάνυσμα. Τότε η $\gamma(t) = \exp(tX)(p)$ είναι γεωδαισιακή οπότε

$\nabla_{\gamma(t)}\acute{\gamma}(t) = \nabla_{X^*}X^* = 0$ άρα $g(X_p^*, [X,Y]_p^*) = 0$

Για την προβολή $\pi : G \to M$ είναι $d\pi(X) = X_p^*$ οπότε $d\pi(X_{\mathfrak{m}}) = X_p^*$ άρα

$\langle X_{\mathfrak{m}}, [X,Y]_{\mathfrak{m}} \rangle = 0$

Αντίστροφα, αν ισχύει η παραπάνω συνθήκη έχουμε

$g(X^*, [X,Y]^*)(\exp(tX))(p) = g((da_t)X_p^*, (da_t)[X,Y]_p^*)$

$= g(X_p^*, [X,Y]_p^*) = 0$

Άρα το X είναι γεωδαισιακό διάνυσμα. □

Με τα επόμενα θεωρήματα εξασφαλίζουμε την ύπαρξη ομογενών γεωδαισιακών σε ομογενείς πολλαπλότητες Riemann.

Θεώρημα 6.1.2. *Έστω $(M = G/K, g)$ ομογενής χώρος. Τότε, είτε η M δέχεται μια ομογενή γεωδαισιακή για κάθε $p \in M$, είτε η G είναι ημιαπλή.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η G δεν είναι ημιαπλή.
Θεωρούμε την ακολουθία $\mathfrak{g}^0 \supset \mathfrak{g}^1 \supset \cdots \supset \mathfrak{g}^k \supset \cdots$

με $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}$ και $\mathfrak{g}^n = [\mathfrak{g}^{n-1}, \mathfrak{g}^{n-1}]$. Έχουμε δύο περιπτώσεις:

1)Υπάρχει k με $d\pi_e(\mathfrak{g}^k) = T_0M$ και $d\pi_e(\mathfrak{g}^{k+1}) \subset T_0M$ όπου $\pi : G \to G/K$ είναι η κανονική προβολή. Η άλγεβρα $\mathfrak{g}^k$ αντιστοιχεί σε μια συνεκτική υποομάδα G^k της G και η δράση της G^k στην M παραμένει μεταβατική. Άρα μπορούμε να θεωρήσουμε $M = G^k/K^k$ με $K^k = K \cap G^k$ και χωρίς βλάβη της γενικότητας $k = 0$ και $\mathfrak{g}^k = \mathfrak{g}$. Οπότε $d\pi_e([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) \subset \mathfrak{m}$. Άρα στη διάσπαση $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{g}$, έχουμε $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]_{\mathfrak{m}} \subset \mathfrak{m}$.
Τώρα, έστω W το ορθογώνιο συμπλήρωμα του $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]_{\mathfrak{m}}$ ως προς το εσωτερικό γινόμενο $\langle , \rangle$ στο $\mathfrak{m}$. Αν $X \in W$ είναι $\langle X, [X,Y]_{\mathfrak{m}} \rangle = 0$, για κάθε $Y \in \mathfrak{g}$. Οπότε το X είναι γεωδαισιακό διάνυσμα. Άρα υπάρχει τουλάχιστον μια ομογενής γεωδαισιακή στο 0.

2)Στην αντίθετη περίπτωση έχουμε $d\pi_e(\mathfrak{g}^k) = 0$ για κάθε k. Έστω l ο πρώτος δείκτης για τον οποίο $\mathfrak{g}^l = \mathfrak{g}^{l+1}$. Τότε η $\mathfrak{g}^l$ είναι ημιαπλή και το θεώρημα αποδείχτηκε. □

Τώρα θα εξετάσουμε την ύπαρξη ομογενών γεωδαισιακών στην περίπτωση που $\mathfrak{g}$ είναι ημιαπλή.
Σε αυτή την περίπτωση η μορφή Killing B στην $\mathfrak{g}$ είναι μη ιδιάζουσα και ο περιορισμός της στον $\mathfrak{m}$ είναι μη ιδιάζων και επιπλέον ο $\mathfrak{m}$ είναι $\mathrm{Ad}(K)$-αναλλοίωτος. Τώρα, το εσωτερικό γινόμενο $\langle , \rangle$ στον $\mathfrak{m}$ που επάγεται από μια G-αναλλοίωτη μετρική της M δίνεται ως πολλαπλάσιο της μορφής B οπότε υπάρχει τελεστής $\Lambda : \mathfrak{m} \to \mathfrak{m}$ με $\langle \Lambda X, Y \rangle = B(X,Y), X, Y \in \mathfrak{m}$. Τότε ως προς μια ορθοκανονική βάση (ως προς το $\langle , \rangle$), ο πίνακας του Λ αντιστοιχεί στον πίνακα του B και είναι συμμετρικός. Οπότε, όλες οι ιδιοτιμές του Λ είναι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί συνεπώς υπάρχει ορθοκανονική βάση $\{v_1, ..., v_m\}$ του $\mathfrak{m}$ από ιδιοδιανύσματα και έστω λ_i οι αντίστοιχες ιδιοτιμές. Έχουμε το εξής αποτέλεσμα:

Θεώρημα 6.1.3. *Μια ομογενής πολλαπλότητα με G-αναλλοίωτη μετρική, $(M = G/K, g)$ διάστασης m και G ημιαπλή δέχεται m το πλήθος ορθογώνιες μεταξύ τους ομογενείς γεωδαισιακές γ σε κάθε $p \in M$.*

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε ότι κάθε ιδιοδιάνυσμα v_i του Λ είναι γεωδαισιακό διάνυσμα. Για $Y \in \mathfrak{g}$ είναι :
$\langle v_i, [v_i, Y]_{\mathfrak{m}} \rangle = \frac{1}{\lambda_i} \langle \Lambda v_i, [v_i, Y]_{\mathfrak{m}} \rangle = \frac{1}{\lambda_i} B(v_i, [v_i, Y]_{\mathfrak{m}}) = \frac{1}{\lambda_i} B(v_i, [v_i, Y])$

$$= -\frac{1}{\lambda_i} B([v_i, v_i], Y) = 0$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει από την αντισυμμετρικότητα του γινομένου Lie ως προς τη μορφή B ενώ η προτελευταία ισχύει ως εξής:
Έχουμε ότι το σύνολο $\{v_1, ..., v_m\}$ είναι ορθοκανονική βάση του $\mathfrak{m}$ και έστω $\{w_1, ..., w_l\}$ η συμπληρωματική της βάση. Είναι

$$[v_i, Y] = [v_i, Y]_{\mathfrak{m}} + [v_i, Y]_{\mathfrak{k}} = \sum B(v_i, [v_i, Y]) v_i + \sum B([v_i, Y], w_j) w_j.$$

Όμως ο δεύτερος όρος ισούται με $\sum(-B(Y, [v_i, w_j]) w_j) = 0$.

Άρα $[v_i, Y]_{\mathfrak{m}} = \sum B(v_i, [v_i, Y]) v_i$ οπότε

$$B(v_i, [v_i, Y]_{\mathfrak{m}}) = B(v_i, [v_i, Y]) B(v_i, v_i) = B(v_i, [v_i, Y]).$$ □

Ορισμός 6.1.2. *Έστω $M = G/K$ ομογενής χώρος. Μια καμπύλη $\gamma(t) = \exp(tX)(p)$, $p \in M$, $X \in \mathfrak{g}$ στην M ονομάζεται ισογεωδαισιακή αν είναι γεωδαισιακή ως προς οποιαδήποτε G-αναλλοίωτη μετρική στην M. Το αντίστοιχο διάνυσμα X ονομάζεται ισογεωδαισιακό διάνυσμα.*

Παρακάτω θα εξετάσουμε την ύπαρξη τέτοιων διανυσμάτων σε ορισμένες κλάσεις πολλαπλοτήτων σημαιών.

6.2 Ισογεωδαισιακές καμπύλες σε πολλαπλότητες σημαιών τύπου A_l

Αρχίζουμε το κεφάλαιο με μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι ένα διάνυσμα ισογεωδαισιακό σε μια πολλαπλότητα σημαιών. Υπενθυμίζουμε ότι μια πολλαπλότητα σημαιών έχει τη μορφή $\mathbb{F} = G/K$ όπου G συμπαγής και ημιαπλή ομάδα Lie. Η K ως κλειστή υποομάδα της θα είναι επίσης συμπαγής. Έχουμε τη διάσπαση $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$ με $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}$ να είναι οι άλγεβρες Lie των G, K αντίστοιχα και $\mathfrak{m} = T_0(G/K)$. Επιπλέον οι $\mathfrak{k}$ και $\mathfrak{m}$ είναι ορθογώνιοι μεταξύ τους ως προς τη μορφή Killing B υπόχωροι της $\mathfrak{g}$, άρα κάθε G-αναλλοίωτη μετρική $g = \langle , \rangle$ της $\mathbb{F}$ στο $\mathfrak{m}$ εκφράζεται ως πολλαπλάσιο της B. Επομένως όπως είδαμε και σε προηγούμενο κεφάλαιο υπάρχει συμμετρικός τελεστής $\Lambda : \mathfrak{m} \to \mathfrak{m}$ τέτοιος ώστε $g(X, Y) = B(\Lambda X, Y)$ για $X, Y \in \mathfrak{m}$. Με αυτό τον τρόπο κάθε G-αναλλοίωτη μετρική αντιστοιχεί μοναδικά σε έναν τέτοιο τελεστή Λ.

Θεώρημα 6.2.1. *Το $X \in \mathfrak{m}$ είναι ισογεωδαισιακό αν και μόνο αν $[X, \Lambda X]_{\mathfrak{m}} = 0$ για κάθε G-αναλλοίωτο συμμετρικό τελεστή Λ.*

Απόδειξη. Είδαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο ότι το $X \in \mathfrak{g}$ είναι γεωδαισιακό αν και μόνο αν $g[X, [X, Y]_{\mathfrak{m}}] = 0$ για κάθε $Y \in \mathfrak{g}$.
Τώρα έστω $Y \in \mathfrak{g}$. Για $X \in \mathfrak{m}$ είναι:

$$g(X, [X, Y]_{\mathfrak{m}}) = B(\Lambda X, [X, Y]_{\mathfrak{m}}) = B(\Lambda X, [X, Y]) = -B([X, \Lambda X], Y)$$

$$= -B([X, \Lambda X]_{\mathfrak{m}}, Y)$$

όπου η δεύτερη ισότητα προκύπτει από την ορθογωνιότητα των $\mathfrak{k}, \mathfrak{m}$ όπως και στο προηγούμενο κεφάλαιο, ενώ η τρίτη ισότητα από την αντισυμμετρικότητα του $\mathrm{ad}(X)$.

Άρα το X είναι ισογεωδαισιακό αν και μόνο αν για κάθε Λ ισχύει
$[X, \Lambda X]_{\mathfrak{m}} = 0$. □

Μια πολλαπλότητα σημαιών τύπου A_l είναι μια πολλαπλότητα σημαιών της μορφής
$\mathbb{F}(n_1, ..., n_s) = SU(n)/S(U(n_1) \times \cdots \times U(n_s))$ με $n_1 + \cdots + n_s = n$
Θεωρούμε $\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$ τη μιγαδοποίηση του $\mathfrak{m}$. Επεκτείνουμε την μετρική Λ και την ισοτροπική αναπαράσταση της $\mathfrak{m}$ στον $\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$. Επειδή η K είναι συμπαγής, η ισοτροπική αναπαράστασή της στους χώρους $\mathfrak{m}, \mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$ είναι πλήρως αναγώγιμη. Αν θεωρήσουμε ${\mathfrak{m}_{\mathfrak{ij}}}^{\mathbb{C}}$ τους αναλλοίωτους ως προς την ισοτροπική αναπαράσταση υπόχωρους του $\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$ έχουμε $\Lambda|_{{\mathfrak{m}_{\mathfrak{ij}}}^{\mathbb{C}}} = \lambda_{ij}\,\mathrm{Id}$.
Τώρα, το $X \in \mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$ αντιστοιχεί σε έναν πίνακα A. Οι συνιστώσες του X στα ${\mathfrak{m}_{\mathfrak{ij}}}^{\mathbb{C}}$ αντιστοιχούν όπως θα δούμε σε μπλοκ a_{ij} και a_{ji} του A διάστασης $n_i \times n_j$. Ισχύει το εξής:

Θεώρημα 6.2.2. *Το X είναι ισογεωδαισιακό αν και μόνο αν για κάθε i, j, k διαφορετικά μεταξύ τους ισχύει $a_{ij}a_{jm} = 0$.*

Θα δούμε την απόδειξη του θεωρήματος μέσω ενός παραδείγματος, συγκεκριμένα της $\mathbb{F} = SU(9)/S(U(2) \times U(3) \times U(4))$. Η απόδειξη στην γενική περίπτωση ακολουθεί ακριβώς την ίδια λογική και τα ίδια συμπεράσματα, χρησιμοποιώντας όμως γενικό συμβολισμό.

Έχουμε $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(9) = \left\{X \in M_9\mathbb{C} : X^T = -\bar{X}^*, \operatorname{Tr} X = 0\right\}$ και

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{s}(\mathfrak{u}(2) \times \mathfrak{u}(3) \times \mathfrak{u}(4))$$

$$= \{(X, Y, Z) \in \mathfrak{u}(2) \times \mathfrak{u}(3) \times \mathfrak{u}(4) : \operatorname{Tr}(X) + \operatorname{Tr}(Y) + \operatorname{Tr}(Z) = 0\}$$

Αν $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}} = (h_1, ..., h_n)$ είναι μια υποάλγεβρα Cartan της $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ τότε η $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ είναι υποάλγεβρα Cartan της $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ και προκύπτουν οι εξής ριζικές διασπάσεις:

$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{h}^{\mathbb{C}} \oplus \sum_{a \in R} \mathfrak{g}^{\mathfrak{a}}$ και $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{h}^{\mathbb{C}} \oplus \sum_{a \in R_K} \mathfrak{g}^{\mathfrak{a}}$ συνεπώς

$$\mathfrak{m}^{\mathbb{C}} = \sum_{a \in R_M} \mathfrak{g}^{\mathfrak{a}}$$

όπου R είναι το σύστημα ριζών της $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, R_K το σύστημα ριζών της $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ και $R_M = R/R_K$ οι συμπληρωματικές ρίζες.
έχουμε αντίστοιχα:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{a \in R^+} \mathfrak{g}^{\mathfrak{a}}$$

$\mathfrak{k} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{a \in R_K^+} \mathfrak{g}^a$ και

$\mathfrak{m} = \oplus \sum_{a \in R_M^+} \mathfrak{g}^a$

όπου R^+, R_K^+, R_M^+ είναι οι αντίστοιχες θετικές ρίζες των R, R_K, R_M και $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}^{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{g}$.

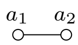
Τώρα, το σύστημα ριζών της $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{su}(9)^{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}_9\mathbb{C}$ είναι το σύνολο

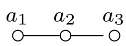
$R = \{e^i - e^j : 1 \leq i \neq j \leq 9\}$. Το σύνολο των απλών ριζών είναι το

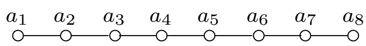
$\Pi = \{e^i - e^{i+1} : 1 \leq i \leq 8\}$

Θα προσδιορίσουμε τα $\Pi_K = \Pi \cap R_K$ και $\Pi_M = \Pi \cap R_M$ μέσω του βαμμένου διαγράμματος Dynkin της A_8 που αντιστοιχεί στην άλγεβρα $\mathfrak{sl}_9\mathbb{C}$ (Γενικότερα η άλγεβρα A_l αντιστοιχεί στην $\mathfrak{sl}_{l+1}\mathbb{C}$ όπου l είναι η τάξη της άλγεβρας ή ισοδύναμα ο αριθμός των απλών ριζών της). Με αυτό τον τρόπο έχουμε τα διαγράμματα:

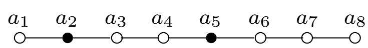
$A_1 \equiv \mathfrak{sl}_2\mathbb{C} \rightarrow$ 

$A_2 \equiv \mathfrak{sl}_3\mathbb{C} \rightarrow$ 

$A_3 \equiv \mathfrak{sl}_4\mathbb{C} \rightarrow$ 

$A_8 \equiv \mathfrak{sl}_9\mathbb{C} \rightarrow$ 

όπου $a_i = e^i - e^{i+1}$ οι απλές ρίζες.
Σύμφωνα με τα παραπάνω η $\mathbb{F}$ προκύπτει βάφοντας το διάγραμμα της A_8 ως εξής:



Οπότε έχουμε

$\Pi_K = \{e^1 - e^2, e^3 - e^4, e^4 - e^5, e^6 - e^7, e^7 - e^8, e^8 - e^9\}$ και

$\Pi_M = \{e^2 - e^3, e^5 - e^6\}$

Τώρα θα προσδιορίσουμε τους αναλλοίωτους υπόχωρους με τη βοήθεια των $\mathfrak{t}-$ριζών.
Θυμίζουμε ότι αν θεωρήσουμε

$$\mathfrak{t} = Z(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}) \cap \mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{h} : a(X) = 0, \forall a \in R_K\} = \{X \in \mathfrak{h} : a(X) = 0, \forall a \in \Pi_K\}$$

και την απεικόνιση μεταξύ δυϊκών χώρων

$k : h^* \to \mathfrak{t}^*$ με $k(a) = a|_{\mathfrak{t}}$

το σύνολο των $\mathfrak{t}-$ριζών δίνεται ως $R_T = k(R_M)$, $(K(R_K) = 0)$.

Τότε καθε αναλλοίωτος υπόχωρος $\mathfrak{m}_\xi$ δίνεται ως $\mathfrak{m}_\xi = \sum_{k(a)=\xi} \mathfrak{g}^a$ και στην περίπτωσή μας

$\mathfrak{m}_{ij} = \sum_{k(a)=e^i-e^j} \mathfrak{g}^{e^i-e^j}$.

Συγκεκριμένα:

Έστω $X = (h_1, ..., h_9) \in \mathfrak{h}$.

Προσδιορίζουμε το σύνολο $\mathfrak{t} = \{X \in \mathfrak{h} : a(X) = 0, \forall a \in \Pi_K\}$.

Είναι $(e^1 - e^2)X = 0$ ή $h_1 = h_2$.

$(e^3 - e^4)X = (e^4 - e^5)X = 0$ ή $h_3 = h_4 = h_5$

$(e^6 - e^7)X = (e^7 - e^8)X = (e^8 - e^9)X = 0$ ή $h_6 = h_7 = h_8 = h_9$

Άρα $\mathfrak{t} = (h_1 I_1, h_2 I_2, h_3 I_3)$

Υπολογίζουμε το $R_T^+ = k(R_M^+)$.

Είναι

- $k(a_2)X = k(e^2 - e^3)X = (h_1 - h_2)$

$= (e^1 - e^3)X = (e^1 - e^4)X = (e^1 - e^5)X$

$= (e^2 - e^3)X = (e^2 - e^4)X = (e^2 - e^5)X$

• $k(a_5)X = k(e^5 - e^6)X = h_2 - h_3$

$= (e^3 - e^6)X = (e^3 - e^7)X = (e^3 - e^8)X = (e^3 - e^9)X$

$= (e^4 - e^6)X = (e^4 - e^7)X = (e^4 - e^8)X = (e^4 - e^9)X$

$= (e^5 - e^6)X = (e^5 - e^7)X = (e^5 - e^8)X = (e^5 - e^9)X$

• $k(a_2 + a_5)X = k(a_2)X + k(a_5)X = k(e^2 - e^3)X + k(e^5 - e^6)X$

$= h_1 - h_2 + h_2 - h_3 = h_1 - h_3$

$= (e^1 - e^6)X = (e^1 - e^7)X = (e^1 - e^8)X = (e^1 - e^9)X$

$= (e^2 - e^6)X = (e^2 - e^7)X = (e^2 - e^8)X = (e^2 - e^9)X$

Συμπεραίνουμε ότι $R_T^+ = \{\bar{a_2}, \bar{a_5}, \bar{a_2} + \bar{a_5}\}$

Οπότε αν θέσουμε $e^{ij} = e^i - e^j$ έχουμε

$\mathfrak{m}_{12} = \sum_{k(e^{ij})=e^{12}} \mathfrak{g}^{ij} = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{5} \mathfrak{g}^{ij}$ με $\dim_{\mathbb{R}}(\mathfrak{m}_{12}) = 2 \times 2 \times 3 = 12$

$\mathfrak{m}_{23} = \sum_{k(e^{ij})=e^{23}} \mathfrak{g}^{ij} = \sum_{i=3}^{5} \sum_{j=6}^{9} \mathfrak{g}^{ij}$ με $\dim_{\mathbb{R}}(\mathfrak{m}_{23}) = 2 \times 3 \times 4 = 24$

$\mathfrak{m}_{13} = \sum_{k(e^{ij})=e^{13}} \mathfrak{g}^{ij} = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=6}^{9} \mathfrak{g}^{ij}$ με $\dim_{\mathbb{R}}(\mathfrak{m}_{13}) = 2 \times 2 \times 4 = 16$

Γενικότερα για $F(n_1, ..., n_s) = SU(n)/S(U(n_1) \times ... \times U(n_s))$ έχουμε $\mathfrak{t} = \{h_1 I_{n_1}, ..., h_s I_{n_s}\}$. Το πλήθος των αναλλοίωτων υποχώρων $\mathfrak{m}_{ij}$ είναι

$(s-1) + (s-2) + ... + 2 = \frac{1}{2}s(s-1)$ ενώ ισχύει

$\dim_{\mathbb{R}}(\mathfrak{m}_{ij}) = 2n_i \times n_j$ και $dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{m}_{ij}) = n_i \times n_j$.
Τώρα θα δούμε πώς παρίστανται οι αναλλοίωτοι υπόχωροι στον πίνακα του

$X \in \mathfrak{g}$.
Ο πίνακας του X είναι ένας 9×9 αντισυμμετρικός μιγαδικός πίνακας. Αντιστοιχούμε στα $(2\times2),(3\times3),(4\times4)$ διαγώνια μπλοκ τις αντίστοιχες συνιστώσες του X στις άλγεβρες $\mathfrak{u}(2),\mathfrak{u}(3),\mathfrak{u}(4)$ και ο συμβολισμός $S(U(2)\times U(3)\times U(4))$ συνίσταται στο ότι $\mathrm{Tr}(X)=0$.
Γενικότερα, σε κάθε $(i,j)-$ θέση του πίνακα αντιστοιχεί η συνιστώσα του X στον μονοδιάστατο ριζικό υπόχωρο $\mathfrak{g}^{ij}$. Αυτό συμβαίνει ως εξής:

Είναι $X=\sum_{ij}x_{ij}E_{ij}$, $x_{ij}\in\mathbb{C}$

όπου E_{ij} ο πίνακας με μονάδα στη θέση (i,j) και 0 αλλού. Τώρα για $H=(h_1,..,h_n)$ έχουμε

$$[H,E_{ij}]=HE_{ij}-E_{ij}H=h_iE_{ij}-h_jE_{ij}=(h_i-h_j)E_{ij}$$

$$=(e^i-e^j)(H)E_{ij}=e^{ij}(H)E_{ij}$$

Άρα κάθε (i,j) συνιστώσα του X αντιστοιχεί στον χώρο $\mathfrak{g}^{ij}$.

Αν για $i\leq j$ θεωρήσουμε $\mathfrak{m}_{ij}^{\mathbb{C}}=\mathfrak{m}_{ij}\oplus\mathfrak{m}_{ji}$ έχουμε την εξής μορφή για τον πίνακα του $Q\in\mathfrak{g}$:

$$\begin{pmatrix} (\mathfrak{u}(2))_{2\times2} & (\mathfrak{m}_{12})_{2\times3} & (\mathfrak{m}_{13})_{2\times4)} \\ (\mathfrak{m}_{21})_{3\times2} & (\mathfrak{u}(3))_{3\times3} & (\mathfrak{m}_{23})_{3\times4)} \\ (\mathfrak{m}_{31})_{4\times2} & (\mathfrak{m}_{32})_{4\times3} & (\mathfrak{u}(4))_{4\times4)} \end{pmatrix}_{9\times9}$$

$$\text{ή} \begin{pmatrix} \mathfrak{u}(2) & \mathfrak{m}_{12} & \mathfrak{m}_{13} \\ \mathfrak{m}_{21} & \mathfrak{u}(3) & \mathfrak{m}_{23} \\ \mathfrak{m}_{31} & \mathfrak{m}_{32} & \mathfrak{u}(4) \end{pmatrix}_{9\times9}$$

Επιπλέον επειδή ο πίνακας είναι αντισυμμετρικός,
για $x_{ij}\in\mathfrak{m}_{ij}$ το $-\bar{x_{ij}}\in\mathfrak{m}_{ji}$
Έστω A_{ij} ο πίνακας του $X\in\mathfrak{m}_{ij}$ (ο A_{ij} αντιστοιχεί σε μοναδικό μπλοκ a_{ij} διάστασης $n_i\times n_j$).

Έχουμε το εξής:

Πρόταση 6.2.1. *Έστω i, j, k διαφορετικά μεταξύ τους και $X \in \mathfrak{m}_{ij}, Y \in \mathfrak{m}_{jk}$. Τότε $[X, Y] \in \mathfrak{m}_{ik}$ και αν A, B, C οι αντίστοιχοι πίνακες των $X, Y, [X, Y]$ που αντιστοιχούν σε μπλοκ a, b, c, τότε $C = AB$ ή αντίστοιχα $c = ab$.*

Απόδειξη. :
Έστω ότι το X αντιστοιχεί σε μπλοκ a_{ij} του A και το U αντιστοιχεί σε μπλοκ b_{lk} του B. Τότε $[X, Y] \in [\mathfrak{g}^{ij}, \mathfrak{g}^{lk}]$ οπότε οι συνιστώσες του $[X, Y]$ που είναι διάφορες του μηδενός είναι αυτές ακριβώς για τις οποίες
$(e^i - e^j) + (e^l - e^k) \in R$ ή ισοδύναμα $j = l$ οπότε και $(e^i - e^j) + (e^l - e^k) = e^i - e^k$. Άρα το $[X, Y] \in \mathfrak{m}_{ik}$ και ο αντίστοιχος πίνακας αντιπροσωπεύεται από μπλοκ $c_{ik} = a_{ij} b_{lk}$. □

Ερχόμαστε τώρα στο κεντρικό αποτέλεσμα:

Θεώρημα 6.2.3. *Έστω $X \in \mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$ με $X = \sum_{ij} A_{ij}$ όπου κάθε A_{ij} αντιστοιχεί σε μπλοκ a_{ij} διάστασης $n_i \times n_j$. Τότε το X είναι ισογεωδαισιακό αν και μόνο αν $a_{ij} a_{jl} = 0$ για κάθε $1 \leq i \neq j \neq k \leq s$.*

Απόδειξη. Έχουμε ότι το X είναι ισογεωδαισιακό αν και μόνο αν $[X, \Lambda X]_{\mathfrak{m}} = 0$ για κάθε G-αναλλοίωτη μετρική Λ. Επιπλέον ισχύει $\Lambda|_{\mathfrak{m}_{ij}} = \lambda_{ij} \,\mathrm{Id}$. Άρα η συνθήκη

$[X, \Lambda X]_{\mathfrak{m}} = 0$ ισοδυναμεί με $[\sum_{ij} A_{ij}, \sum_{kl} \lambda_{kl} A_{kl}]_{\mathfrak{m}} = 0$

που ισοδυναμεί με

$$\sum_{ij} \sum_{kl} \lambda_{kl} [A_{ij}, A_{kl}]_{\mathfrak{m}} = 0 \tag{6.5}$$

Τώρα κάθε πίνακας A_{ij} αντιστοιχεί σε μπλοκ a_{ij} και σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση $[A_{ij}, A_{kl}] \in \mathfrak{m}$ αν και μόνο αν $j = k$ και $i \neq l$ (επιπλέον αν $i = l$ το γινόμενο θα ανήκει στην κύρια διαγώνιο άρα όχι στον $\mathfrak{m}$).

Οπότε η συνθήκη (6.5) ισοδυναμεί με $\sum_{ij} \sum_{jl} [A_{ij}, A_{jl}] = 0$

που ισοδυναμεί με $\sum \lambda_{il} a_{ij} a_{jl} = 0$ ή $a_{ij} a_{jl} = 0$ για κάθε $1 \leq i \neq j \neq l \leq s$ καθώς τα παραπάνω ισχύουν για οποιαδήποτε μετρική Λ.

Σημειώνουμε ότι στον συμβολισμό a_{ij} δεν απαιτούμε $i < j$ οπότε λαμβάνουμε υπ όψη και τα αντίστοιχα αντιερμιτιανά μπλοκ $a_{ji} = -\bar{a_{ij}}$. $\square$

6.3 Ισογεωδαισιακά διανύσματα σε πολλαπλότητες σημαιών με δύο ισοτροπικούς προσθετέους

Σε αυτό το κεφάλαιο θα χαρακτηρίσουμε τα ισογεωδαισιακά διανύσματα σε πολλαλότητες σημαιών F για τις οποίες το $\mathfrak{m} = T_0F$ αναλύεται σε ευθύ άθροισμα δύο προσθετέων ως προς την ισοτροπική αναπαράσταση, δηλαδή έχουμε $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2$. Όπως θα δούμε παρακάτω αυτού του είδους οι πολλαπλότητες αποκτούνται αν στο διάγραμμα Dynkin μιας ημιαπλής άλγεβρας Lie βάψουμε μια απλή ρίζα ύψους 2.

Δίνουμε τις εξής κατηγορίες σε ένα ισογεωδαισιακών διανυσμάτων $X \in \mathfrak{m}$:

1)Το X ονομάζεται δομικό αν η ισοδύναμη συνθήκη $[X, \Lambda X]_{\mathfrak{m}} = 0$ ισχύει ταυτοτικά (Η έννοια 'δομικό' προέρχεται από το γεγονός ότι σε κάποιες πολλαπλότητες υπάρχουν υπόχωροι του $\mathfrak{m}$, κάθε διάνυσμα των οποίων ικανοποιεί ταυτοτικά την παραπάνω συνθήκη).

2)Το X ονομάζεται αλγεβρικό αν η συνθήκη $[X, \Lambda X]_{\mathfrak{m}} = 0$ ανάγεται στην επίλυση ενός αλγεβρικού συστήματος.

Όπως θα δούμε παρακάτω σε κάποιες πολλαπλότητες όλα τα ισογεωδαισιακά διανύσματα είναι δομικά και επιπρόσθετα, ανήκουν είτε στον $\mathfrak{m}_1$ είτε στον $\mathfrak{m}_2$. Αυτού του είδους τα ισογεωδαισιακά διανύσματα τα ονομάζουμε τετριμμένα.

Ισχύει το εξής αποτέλεσμα που χαρακτηρίζει τις πολλαπλότητες σημαιών με δύο ισοτροπικούς προσθετέους:

Θεώρημα 6.3.1. *Μια γενικευμένη πολλαπλότητα σημαιών G/K έχει δύο ισοτροπικούς προσθετέους αν και μόνο αν $\Pi_M = \{a_{i_0}\}$ όπου a_{i_0} είναι μια απλή ρίζα ύψους 2.*

Απόδειξη. Αρχικά αν $\Pi_M = \{a_{i_0}\}$ όπου a_{i_0} είναι μια απλή ρίζα ύψους 2 τότε σύμφωνα με τη θεωρία των $\mathfrak{t}$-ριζών έχουμε $k(a_{i_0}) = a_{i_0}|_{\mathfrak{t}} = \xi$ και $k(2a_{i_0}) = k(a_{i_0}) + k(a_{i_0}) = 2\xi$. Οπότε $R_T^+ = \{\xi, 2\xi\}$ συνεπώς έχουμε την ανάλυση του $\mathfrak{m}$ σε δύο ισοτροπικούς προσθετέους.

Αν τώρα $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2$, τότε οι θετικές $\mathfrak{t}$-ρίζες έχουν τη μορφή $R_T^+ = \{\xi, \psi\}$. Έστω $\xi = a_{i_0}|_{\mathfrak{t}}$ όπου a_i είναι μια απλή ρίζα και έστω h_{i_0} το ύψος

της a_{i_0}.
Αν $\{\xi\}$ είναι μια βάση του R_T^+ τότε $k(a_{i_0}) + k(a_{i_0}) = 2\xi \in R_T^+$ άρα $\psi = 2\xi$ και με την ίδια λογική το ύψος της a_{i_0} δεν ξεπερνά το 2 (αλλιώς $k(na_{i_0}) \in R_T^+$ για $n > 2$), άρα είναι ακριβώς ίσο με 2.
Αντίστοιχη είναι η περίπτωση που η βάση είναι το $\{\psi\}$.
Αν τώρα η βάση του R_T^+ συμπίπτει με το R_T^+ θα πρέπει $\psi = 2\xi$. Σε αντίθετη περίπτωση ισχύει $\psi = a_j$ και θα έπρεπε $k(a_{i_0}) + k(a_j) \in R_T^+$ που είναι άτοπο. Προκύπτει λοιπόν ότι σε κάθε περίπτωση έχουμε $R_T^+ = \{\xi, 2\xi\}$. $\square$

Οπότε έχουμε τη γραφή $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2$ όπου

$\mathfrak{m}_1 = \sum_{a\in R_M} \mathfrak{g}^a$ και στη γραφή $a = \sum_{i=1}^{l} c_i a_i$ (a_i είναι οι απλές ρίζες) ισχύει $|c_{i_0}| = 1$.

Όμοια $\mathfrak{m}_2 = \sum_{b\in R_M} \mathfrak{g}^b$ με $b = \sum_{i=1}^{l} c_i a_i$ και $|c_{i_0}| = 2$.

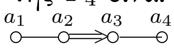
Είναι προφανές ότι όλες οι ρίζες a, b εκφράζονται ως άθροισμα απλών ριζών που περιέχει την a_{i_0} διότι σε αντίθετη περίπτωση θα αποτελούσαν ρίζες του R_K, καθώς $\Pi_M = \{a_{i_0}\}$.

Οπότε οι πολλαπλότητες σημαιών με δύο ισοτροπικούς προσθετέους παράγονται από τα διαγράμματα Dynkin εαν βάψουμε μια απλή ρίζα ύψους 2 και είναι οι εξής:
$SO(2l+1)/U(p) \times SO(2(l-p)+1)$
$Sp(l)/U(p) \times Sp(l-p)$
$SO(2l)/U(p) \times SO(2(l-p)$
$E_6/SU(5) \times SU(2) \times U(1)$
$E_6/SU(6) \times U(1)$
$E_7/SO(10) \times SU(2) \times U(1)$
$E_7/SO(12) \times U(1)$
$E_7/SU(7) \times U(1)$
$E_8/E_7 \times U(1)$
$E_8/SO(14) \times U(1)$
$F_4/SO(7) \times U(1)$
$F_4/Sp(3) \times U(1)$
$G_2/U(2)$

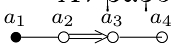
Παράδειγμα:Θεωρούμε την ημιαπλή άλγεβρα Lie F_4. Οι ρίζες της F_4 είναι οι εξής:

$R = \left\{\pm e_1, \pm e_2, \pm e_3, \pm e_4, \pm e_i, \pm e_j, \frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4)\right\}$, όπου $\{e^1, e^2, e^3, e^4\}$ είναι η κανονική βάση του $\mathbb{R}^4$.
Το σύνολο των απλών ριζών είναι
$\Pi = \left\{a_1 = e_2 - e_3, a_2 = e_3 - e_4, a_3 = e_4, a_4 = \frac{1}{2}e_1 - e_2 - e_3 - e_4\right\}$ ενώ η μέγιστη ρίζα είναι
$\mu = 2a_1 + 3a_2 + 4a_3 + 2a_4 = e_1 + e_2$

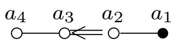
Βλέπουμε ότι οι απλές ρίζες ύψους 2 είναι οι a_1, a_4. Το διάγραμμα Dynkin της F_4 είναι



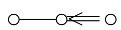
Αν βάψουμε την απλή ρίζα a_1 προκύπτει το διάγραμμα



που είναι ισόμορφο με το διάγραμμα

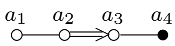


όπου το ημιαπλό μέρος

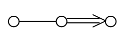


αντιστοιχεί στην άλγεβρα C_3 δηλαδή στην $\mathfrak{sp}_3\mathbb{C}$.
Αποκτούμε έτσι την πολλαπλότητα $F_4/Sp(3) \times U(1)$.

Αν τώρα βάψουμε την απλή ρίζα a_4 προκύπτει το διάγραμμα



όπου το ημιαπλό μέρος



αντιστοιχεί στην άλγεβρα B_3 δηλαδή στην $\mathfrak{so}(7)$. Αποκτούμε έτσι την πολλαπλότητα $F_4/SO(7) \times U(1)$.

Πρόταση 6.3.1. *Ισχύει* $[\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2] \subset \mathfrak{m}_1$.

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας την παραπάνω γραφή των $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2$ αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιεσδήποτε ρίζες a, b που αντιστοιχούν στα $\mathfrak{g}^a, \mathfrak{g}^b$ ισχύει $a + b \notin R$ ή $a + b = \sum_i c_i a_i$ με $|c_{i0}| = 1$.

Προφανώς αν a, b είναι θετικές ή αρνητικές ρίζες ισχύει $a + b \notin R$ καθώς στη γραφή $a+b = \sum_i c_i a_i$ θα είχαμε $|c_{i0}| = 3$, που είναι άτοπο λόγω ύψους της a_{i0}. Τώρα, αν οι a, b είναι ετερόσημες ρίζες τότε προφανώς αν $a + b \in R$ θα ισχύει $a + b = \sum_i c_i a_i$ με $|c_{i0}| = 1$. Άρα ο $\mathfrak{g}^{a+b}$ είναι ριζικός υπόχωρος του $\mathfrak{m}_1$. $\square$

Για κάποια από τα παρακάτω θεωρήματα που θα δούμε είναι χρήσιμο να θεωρήσουμε μια βάση Weyl στους χώρους $\mathfrak{u}^a = \mathfrak{g}^a \oplus i\mathfrak{g}^{-a}$ με $a \in R^+$ ως εξής:

Θεωρούμε τα διανύσματα $X_a \in \mathfrak{g}^a$ με $[X_a, X_{-a}] = H_a \in \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ όπου H_a τέτοιο ώστε $B(H, H_a) = a(H)$ για κάθε $H \in \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ και $[X_a, X_b] = m_{a,b} X_{a+b}$. Για τα $m_{a,b}$ ισχύουν :

$m_{a,b} \in \mathbb{R}$, $m_{-a,-b} = -m_{a,b}$ και $m_{a,b} = 0$ αν και μόνο αν $a + b \notin R$. Συμπεραίνουμε επιπλέον ότι $m_{a,-b} = -m_{-a,b}$ και $m_{a,b} = m_{b,a}$.

Τώρα θεωρούμε τα διανύσματα $A_a = X_a - X_{-a}$ και $S_a = i(X_a + X_{-a})$ τα οποία αποτελούν πραγματική βάση του $\mathfrak{u}^a = \mathfrak{g}^a \oplus i\mathfrak{g}^{-a}$. Επιπλέον, Θεωρούμε τα εξής υποσύνολα του R_M^+:
$R^+(a_{i0}, 1) = \left\{a \in R_M^+ : a = \sum c_i a_i, c_{i0} = 1\right\}$ και

$R^+(a_{i0}, 2) = \left\{a \in R_M^+ : a = \sum c_i a_i, c_{i0} = 2\right\}$. Τότε έχουμε ότι

$\mathfrak{m}_1 = \sum_{a \in R^+(a_{i0},1)} (\mathbb{R}A_a \oplus \mathbb{R}S_a)$ και

$\mathfrak{m}_2 = \sum_{a \in R^+(a_{i0},2)} (\mathbb{R}A_a \oplus \mathbb{R}S_a)$. Ισχύουν οι εξής σχέσεις:

1.$A_{-a} = -A_a$
2.$S_{-a} = S_a$
3.$[A_a, A_b] = m_{a,b} A_{a+b} + m_{-a,b} A_{a-b}$
4.$[S_a, S_b] = -m_{a,b} A_{a+b} - m_{a,-b} A_{a-b}$
5.$[A_a, S_b] = m_{a,b} S_{a+b} + m_{a,-b} S_{a-b}$

Οι δύο πρώτες σχέσεις είναι προφανείς ενώ οι υπόλοιπες αποδεικνύονται άμεσα. Θα αποδείξουμε για παράδειγμα την τρίτη:
Είναι $[A_a, A_b] = [X_a + X_{-a}, X_b + X_{-b}]$

$= [X_a, X_b] + [X_a, X_{-b}] + [X_{-a}, X_b] + [X_{-a}, X_{-b}]$

$= m_{a,b} X_{a+b} + m_{a,-b} X_{a-b} + m_{-a,b} X_{-(a-b)} + m_{-a,-b} X_{-(a+b)}$

$$= m_{a,b}(X_{a+b} + X_{-(a+b)}) + m_{-a,b}(X_{a-b} + X_{-(a-b)}) = m_{a,b}A_{a+b} + M_{-a,b}A_{a-b}$$

Ας περάσουμε τώρα σε κάποιες γενικές προτάσεις για τα ισογεωδαισιακά διανύσματα:
Αρχικά, αν $X \in \mathfrak{m}_i$, $(i = 1, 2)$, τότε $[X, \Lambda X]_{\mathfrak{m}} = [X, \lambda_i X]_{\mathfrak{m}} = \lambda_i [X, X]_{\mathfrak{m}} = 0$ καθώς ισχύει $\Lambda|_{\mathfrak{m}_i} = \lambda_i \,\mathrm{Id}$.
Οπότε κάθε διάνυσμα που ανήκει σε έναν από τους δύο ισοτροπικούς υπόχωρους του $\mathfrak{m}$ είναι δομικό ισογεωδαισιακό διάνυσμα το οποίο ονομάζουμε **τετριμμένο**.

Ισχύει και η εξής συνθήκη:

Πρόταση 6.3.2. *Το $X \in \mathfrak{m}$ με $X = X_{\mathfrak{m}_1} + X_{\mathfrak{m}_2}$ είναι ισογεωδαισιακό αν και μόνο αν $[X_{\mathfrak{m}_1}, X_{\mathfrak{m}_2}] = 0$.*

Απόδειξη. Είναι $[X, \Lambda X]_{\mathfrak{m}} = [X_{\mathfrak{m}_1} + X_{\mathfrak{m}_2}, \Lambda(X_{\mathfrak{m}_1} + X_{\mathfrak{m}_2})]_{\mathfrak{m}}$

$$= \lambda_1[X_{\mathfrak{m}_1}, X_{\mathfrak{m}_1}]_{\mathfrak{m}} + \lambda_2[X_{\mathfrak{m}_1}, X_{\mathfrak{m}_2}]_{\mathfrak{m}} - \lambda_1[X_{\mathfrak{m}_1}, X_{\mathfrak{m}_2}]_{\mathfrak{m}} + \lambda_2[X_{\mathfrak{m}_2}, X_{\mathfrak{m}_2}]_{\mathfrak{m}}$$

$$= (\lambda_2 - \lambda_1)[X_{\mathfrak{m}_1}, X_{\mathfrak{m}_2}]_{\mathfrak{m}} = (\lambda_2 - \lambda_1)[X_{\mathfrak{m}_1}, X_{\mathfrak{m}_2}]$$

διότι όπως είδαμε ισχύει $[\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2] \subset \mathfrak{m}_1 \subset \mathfrak{m}$.

Άρα η συνθήκη $[X, \Lambda X]_{\mathfrak{m}} = 0$ για κάθε μετρική Λ ισοδυναμεί με

$[X_{\mathfrak{m}_1}, X_{\mathfrak{m}_2}] = 0.$ □

Πρόταση 6.3.3. *Έστω μια πολλαπλότητα σημαιών με δύο ισοτροπικούς προσθετέους $\mathfrak{m}_1 = \sum_{i=1}^{k} \mathfrak{u}^{a_i}$ και $\mathfrak{m}_2 = \sum_{j=1}^{l} \mathfrak{u}^{b_j}$ με $\mathfrak{u}^a = \mathfrak{g}^a \oplus i\mathfrak{g}^{-a}$. Έστω τώρα μια επιλογή $\{a_{i_1}, ..., a_{i_s}\}$ και $\{b_{j_1}, ..., b_{j_t}\}$ των a_i, b_j αντίστοιχα για την οποία $a_{i_k} \pm b_{j_l} \notin R$, για κάθε $1 \le k \le s$ και $1 \le l \le t$. Τότε αν $X \in \mathfrak{u}^{a_{i_1}} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{u}^{a_{i_s}} \oplus \mathfrak{u}^{b_{j_1}} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{u}^{b_{j_t}}$ τότε το X είναι δομικό ισογεωδαισιακό διάνυσμα.*

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι απλή και στηρίζεται στην προγούμενη πρόταση:
Αν $X \in \mathfrak{u}^{a_{i_1}} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{u}^{a_{i_s}} \oplus \mathfrak{u}^{b_{j_1}} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{u}^{b_{j_t}}$ τότε

$X = r_1 X_{a_{i_1}} + ... + r_s X_{a_{i_s}} + w_1 X_{b_{j_1}} + ... + w_t X_{b_{j_t}}$ όπου

$r_1X_{a_{i_1}} + ... + r_sX_{a_{i_s}} = X_{\mathfrak{m}_1}$ και $w_1X_{b_{j_1}} + ... + w_tX_{b_{j_t}} = X_{\mathfrak{m}_2}$

Άρα $[X_{\mathfrak{m}_1}, X_{\mathfrak{m}_2}] = \sum r_k w_l [X_{a_{i_k}}, X_{b_{w_l}}] = 0$ σύμφωνα με την υπόθεση της πρότασης. Οπότε σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση το X είναι ισογεωδαισιακό διάνυσμα και μάλιστα δομικό καθως το παραπάνω γινόμενο μηδενίζεται ταυτοτικά. □

Παράδειγμα 6.3.1. *Στην πολλαπλότητα $F_4/SO(7) \times U(1)$ έχουμε $\Pi_M = \{a_4$. Αν θεωρήσουμε $a = a_4$ και $b = 2a_1 + 3a_2 + 4a_3 + 2a_4 \in R_M$, λόγω προηγούμενων συλλογισμών έχουμε $\mathfrak{u}^a \subset \mathfrak{m}_1$ και $\mathfrak{u}^b \subset \mathfrak{m}_2$ και επιπλέον $a + b, a - b \notin R$. Άρα κάθε $X \in \mathfrak{u}^a \oplus \mathfrak{u}^b$ είναι δομικό ισογεωδαισιακό διάνυσμα.*

Μια κλάση πολλαπλοτήτων σημαιών με δύο ισοτροπικούς προσθετέους είναι αυτή για την οποία ισχύει $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2$ όπου $\mathfrak{m}_2 = \mathfrak{u}^\mu$ με μ την υψηλότερη ρίζα. Οι πολλαπλότητες σημαιών με αυτή την ιδιότητα είναι οι :

$E_6/SU(6) \times U(1)$
$E_7/SO(12) \times U(1)$
$E_8/E_7 \times U(1)$
$F_4/Sp(3) \times U(1)$
$G_2/U(2)$
$Sp(l)/U(1) \times Sp(l-1)$
$SO(2l+1)/U(l-p) \times SO(2p+1)$ $l = p+2$
$SO(2l)/U(l-p) \times SO(2p)$, $l = p+2$

Ισχύει το εξής:

Πρόταση 6.3.4. *Οι παραπάνω πολλαπλότητες σημαιών επιδέχονται μόνο τετριμμένα ισογεωδαισιακά διανύσματα. Δηλαδή το $X \in \mathfrak{m}$ είναι ισογεωδαισιακό αν και μόνο αν $X \in \mathfrak{m}_1$ ή $X \in \mathfrak{m}_2$.*

Απόδειξη. Με την υπόθεση της πρότασης υπάρχουν $a_1, ..., a_k \in R_M^+$ με $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{u}^{a_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{u}^{a_k}$ και $\mathfrak{m}_2 = \mathfrak{u}^\mu$.

Οπότε για $X \in \mathfrak{m}$ είναι $X = X_{\mathfrak{m}_1} + X_{\mathfrak{m}_2}$ με $X_{\mathfrak{m}_1} = \sum_{i=1}^k X_{a_i}$ και $X_{\mathfrak{m}_2} = X_\mu$.

Χρησιμοποιώντας τη βάση Weyl των $\mathfrak{u}^a$ έχουμε ότι για κάθε i

$X_{a_i} = k_iA_{a_i} + l_iS_{a_i}$ και $X_\mu = kA_\mu + lS_\mu$ με $k_i, l_i, k, l \in \mathbb{R}$.

Η συνθήκη $[X_{\mathfrak{m}_1}, X_{\mathfrak{m}_2}] = 0$ ισοδυναμεί με :

$$\sum_{i=1}^{k}[X_{a_i}, X_\mu] = 0 \tag{6.6}$$

Τώρα, για οποιοδήποτε $i = 1, ..., k$ ισχύει $[X_{a_i}, X_\mu]$

$= [k_i A_{a_i} + l_i S_{a_i}, kA_\mu + lS_\mu]$

$$= k_i k[A_{a_i}, A_\mu] + k_i l[A_{a_i}, S_\mu] - l_i k[A_\mu, S_{a_i}] + l_i l[S_{a_i}, S_\mu] \tag{6.7}$$

Για τα παραπάνω γινόμενα χρησιμοποιούμε τις σχέσεις 1),...5) συνυπολογίζοντας το γεγονός ότι κάθε $m_{\mu,a_i} = 0$. Αυτό συμβαίνει διότι $a_i \in R_M^+$ και μ είναι η υψηλότερη ρίζα συνεπώς $a_i + \mu \notin R$. Οπότε η σχέση (6.7) ισούται με:

$(k_i k m_{-a_i,\mu})A_{a_i-\mu} + (k_i l m_{a_i,-\mu})S_{a_i-\mu} + (-l_i k m_{\mu,-a_i})S_{\mu-a_i} + (-l_i l m_{ai}, \mu)A_{a_i-\mu}$

$$= m_{a_i,\mu}(k_i k + l_i l)A_{a_i-\mu} + m_{a_i,-\mu}(k_i l - l_i k)S_{a_i-\mu} \tag{6.8}$$

Αν τώρα για κάθε a_i ισχύει $\mu - a_i \in R$ (συγκεκριμένα R_M^+) και δεδομένου ότι οι υπόχωροι $\mathfrak{u}^{\mu-a_i}, \mathfrak{u}^{\mu-a_j}$ είναι διαφορετικοί μεταξύ τους (διότι $a_i \neq a_j$), η συνθήκη (6.6), λόγω του ευθέως αθροίσματος ανάγεται στην επίλυση k το πλήθος συστημάτων της μορφής (6.8) δηλαδή :

$m_{a_i,\mu}(k_i k + l_i l)A_{a_i-\mu} + m_{a_i,-\mu}(k_i l - l_i k)S_{a_i-\mu} = 0$ ή

$(k_i k + l_i l) = 0$
$(k_i l - l_i k) = 0$

Το παραπάνω σύστημα έχει μόνο τη λύση $(k, l) = (0, 0)$ για $k_i, l_i \neq 0$.
Άρα θα ισχύει $(k, l) = (0, 0)$ δηλαδή $X \in \mathfrak{m}_1$ ή $(k_i, l_i) = (0, 0)$ για κάθε i

δηλαδή $X \in \mathfrak{m}_2$.

Το μόνο που απομένει να αποδείξουμε είναι ότι στις παραπάνω πολλαπλότητες ισχύει $\mu - a_i \in R_M^+$, για κάθε i. Αυτό όμως μπορούμε να το επαληθεύσουμε για κάθε μια από τις παραπάνω πολλαπλότητες ξεχωριστά. $\square$

Βιβλιογραφία

[1] D.V. Alekseevsky: *Flag Manifolds*, 11. Yugoslav Geometrical Seminar,Divcibare 1996,3-35.

[2] D.V. Alekseevsky and A. Arvanitoyeorgos: *Riemannian Flag Manifolds with Homogeneous Geodesics*, Transactions of the American Mathematical Society ὅλυμε 359, Νυμβερ 8, Αυγυστ 2007

[3] A. Arvanitoyeorgos: *New invariant Einstein metrics on generalised Flag Manifolds*, Transactions of the American Mathematical Society Volume 337, Number 2, June 1993

[4] A. Arvanitoyeorgos: *An Introduction to Lie Groups and the Geometry of Homogeneous Spaces*, American Mathematical Society, Student Mathematical Library Volume 22,2003

[5] A. Arvanitoyeorgos I.Chrysikos: *Invariant Einstein Metrics on Generalised Flag Manifolds with two isotropy summands*, Annals of Global Analysis and Geometry Vol.37, 2010

[6] T.Brocker and T.Tom Dieck: *Representations of Compact Lie Groups*, Springer-Verlag,New York 1885

[7] C. Chevalley: *Theory of Lie Groups I*, Princeton University Press 1946

[8] M. P. Do Carmo: *Riemannian Geometry*, Birkhauser,Boston 1992

[9] S.Helgason: *Differential Geometry,Lie Groups and Symmetric Spaces*, Academic Press, New York ,1978

[10] A. Kirillov Jr.: *Introduction to Lie Groups and Lie Algebras*, Department of Mathematics, SUNY at Stony Brook, Stony Brook

[11] O.Kowalski-L.Vanhecke: *Riemannian Manifolds with Homogeneous Geodesics*, Bull. Un. Mat. Ital. 5 (1991), 189 246

[12] O.Kowalski-J.Szenthe: *On the Existence of Homogeneous Geodesics in Homogeneous Riemannian Manifolds*, Geometriae Dedicata 81: 209 214, 2000

[13] J. M.Lee: *Introduction to Smooth Manifolds*, University of Washington Department of Mathematics

[14] N.Cohen-L.Grama-Caio J.C.Negreiros: *Equigeodesics on Flag Manifolds*, Houston Journal of Mathematics Vol.37 No 1, 2011

[15] L.Grama-Caio J.C.Negreiros: *Equigeodesics on generalised Flag Manifolds with two isotropy summands*, Results.Math 2011 Springer Basel AG

[16] M. R. Sepanski: *Compact Lie Groups*, 2007 Springer

[17] I. Κ.Χρυσικός: *Ομογενείς Μετρικές Einstein σε Γενικευμένες Πολλαπλοτητες Σημαιών, Διδακτορική Διατριβή, Πανεπιστήμιο Πατρών 2010*

[18] I. Κ.Χρυσικός: Η Γεωμετρία των Ομογενών Χώρων και Πολλαπλότητες Σημαιών, Μεταπτυχιακή Εργασία, Πανεπιστήμιο Πατρών 2007