ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ

"ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΥΓΧΡΟΝΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ"

Τα πρώτα αποτελέσματα επί των υπερβατικών αριθμών

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Παναγιώτα Παπανικολοπούλου

Επιβλέπων: Παύλος Λεντούδης

Επίκουρος Καθηγητής Πανεπιστημίου Πατρών

Πάτρα, Ιούνιος 2013

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ

"ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΥΓΧΡΟΝΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ"

Τα πρώτα αποτελέσματα επί των υπερβατικών αριθμών

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Παναγιώτα Παπανικολοπούλου

Επιβλέπων: Παύλος Λεντούδης

Επίκουρος Καθηγητής Πανεπιστημίου Πατρών

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 27η Ιουνίου 2013

……………………....	……………………........	....
Παύλος Λεντούδης	Βασίλειος Παπαγεωργίου	Παύλος Τζερμιάς
Επίκουρος Καθηγητής	Καθηγητής	Καθηγητής
Πανεπιστημίου Πατρών	Πανεπιστημίου Πατρών	Πανεπιστημίου Πατρών

Πάτρα, Ιούνιος 2013

…………………………………………..
Παναγιώτα Παπανικολοπούλου
Πτυχιούχος Μαθηματικός Πανεπιστημίου Πατρών

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους όσους με βοήθησαν για την περάτωση της διπλωματικής εργασίας, αλλά και γενικότερα για την ολοκλήρωση των μεταπτυχιακών σπουδών μου. Αρχικά, ευχαριστώ τον καθηγητή μου κ. Λεντούδη Παύλο, επίκουρο καθηγητή του Πανεπιστημίου Πατρών, για την ευκαιρία που μου έδωσε να ασχοληθώ με ένα τόσο ενδιαφέρον θέμα, για την επίβλεψη της διπλωματικής εργασίας, για τη συνεργασία που είχαμε, τις εύστοχες και σημαντικές συμβουλές του στην πορεία της εργασίας και την εμπιστοσύνη που μου έδειξε. Εκφράζω τις ευχαριστίες μου στον κ. Παπαγεωργίου Βασίλειο καθηγητή του Πανεπιστημίου Πατρών, και στον κ. Τζερμιά Παύλο, καθηγητή του Πανεπιστημίου Πατρών, για την τιμή που μου έκαναν να συμμετέχουν στην τριμελή εξεταστική επιτροπή της εργασίας. Θα ήθελα να αναφερθώ και στους συμφοιτητές μου για τη συνεργασία μας σε όλη τη διάρκεια των σπουδών μας για τη βοήθεια και αλληλοϋποστήριξη. Τέλος, ευχαριστώ την οικογένειά μου για την αφανή, αλλά πάντα χρήσιμη και σημαντική συμβολή τους.

Πάτρα, Ιούνιος 2013

Παναγιώτα Παπανικολοπούλου

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στην εργασία αυτή θα ασχοληθούμε με τους υπερβατικούς αριθμούς και τα πρώτα αποτελέσματα επ’ αυτών .

Αρχικά θα ασχοληθούμε με την απόδειξη της ύπαρξης τέτοιων αριθμών που έγινε από τον Liouville προσεγγίζοντας αλγεβρικούς αριθμούς με την βοήθεια ρητών αριθμών.

Ο Euler το 1737 με τη χρήση συνεχών κλασμάτων απέδειξε ότι ο e είναι άρρητος και το 1761 ο Lambert αποδεικνύει ότι οι e^r , $0 \neq r \in \mathbb{Q}$ είναι άρρητοι. Ο Joseph Fourier το 1815 χρησιμοποιεί το ανάπτυγμα Taylor του e^z και αποδεικνύει με άλλο τρόπο ότι ο e είναι άρρητος. Τη μέθοδο του Fourier χρησιμοποιεί ο Liouville για να δείξει ότι ο e^2 είναι άρρητος όπως επίσης και το ότι δεν είναι ρίζα δευτεροβάθμιου πολυωνύμου με ρητούς συντελεστές.

Τη μέθοδο Fourier γενικεύει ο Hermite το 1873 για να καταλήξει στην υπερβατικότητα του e. Η μέθοδος Hermite κατάλληλα τροποποιημένη θα επιτρέψει στο Lindemann το 1882 να αποδείξει ότι ο π είναι υπερβατικός.

Θα παρουσιάσουμε τις αποδείξεις των θεωρημάτων Hermite και Lindemann στη συντομευμένη μορφή που πήραν από τους Hurwitz και Niven αντίστοιχα.

1. ΑΛΓΕΒΡΙΚΟΙ –ΥΠΕΡΒΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

1.1. Ορισμός. Έστω $\xi \in \mathbb{C}$. Ο αριθμός ξ ονομάζεται αλγεβρικός αν είναι ρίζα πολυωνύμου $f \neq 0$ με ρητούς συντελεστές.

Ένας μιγαδικός αριθμός που δεν είναι αλγεβρικός ονομάζεται υπερβατικός.

1.2. Αν $\xi \in \mathbb{C}$ είναι αλγεβρικός, το σύνολο των πολυωνύμων, με ρητούς συντελεστές των οποίων το ξ είναι ρίζα, αποτελεί ένα ιδεώδες I του κύριου δακτυλίου των πολυωνύμων Q[x]. Το ιδεώδες I γεννιέται από κάθε πολυώνυμο $f \neq 0$ ελάχιστου δυνατού βαθμού που περιέχει. Το πολυώνυμο f είναι ανάγωγο επί του $\mathbb{Q}$ και έχει όλες τις ρίζες τις απλές εντός του $\mathbb{C}$. O βαθμός του πολυωνύμου f ονομάζεται βαθμός ξ επί του $\mathbb{Q}$. Οι ρίζες της f ονομάζονται συζυγείς του ξ .

2. ΤΑΞΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗΣ – ΘΕΩΡΗΜΑ LIOUVILLE [4]

2.1.Ορισμός. Ο αριθμός $\xi \in \mathbb{R}$ δέχεται ρητή προσέγγιση τάξεως n (προσέγγιση δια ρητών), αν υπάρχει σταθερά $c = c(\xi) > 0$ τέτοια ώστε η ανισότητα

$$\left|\xi - \frac{h}{k}\right| < \frac{c}{k^n} \qquad (\mathbf{1})$$

να δέχεται άπειρες ρητές λύσεις $\frac{h}{k}$, με $k > 0$ και $\mu.\kappa.\delta(h,k) = 1$.

Η $(\mathbf{1})$ ονομάζεται **ανισότητα Liouville** τάξεως n.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

2.1.1. Αν ο ξ δέχεται προσέγγιση τάξεως n δέχεται και προσεγγίσεις τάξεως $m < n$.

2.1.2. Κάθε ρητός δέχεται ρητές προσεγγίσεις τάξεως 1 αλλά όχι μεγαλύτερης τάξης .

Απόδειξη

Έστω $\frac{\alpha}{b} \in \mathbb{Q}$ με $\mu.\kappa.\delta(\alpha, b) = 1$ και $b \geq 1$.

Η διοφαντική εξίσωση $\alpha x - by = 1$ δέχεται απειρία λύσεων x, y με $x > 0$

ώστε

$$\frac{\alpha x - by}{bx} = \frac{1}{bx}.$$

Άρα

$$\left|\frac{\alpha}{b} - \frac{y}{x}\right| = \frac{1}{bx}$$

οπότε

$$\left|\frac{\alpha}{b} - \frac{y}{x}\right| < \frac{2}{x}$$

Επομένως ο ρητός $\frac{\alpha}{b}$ δέχεται ρητές προσεγγίσεις τάξεως 1.

Επιπλέον για κάθε ρητό $\frac{y}{x} \neq \frac{\alpha}{b}$ με $x, b \geq 1$ έχουμε

$$\left|\frac{\alpha}{b} - \frac{y}{x}\right| = \left|\frac{\alpha x - by}{bx}\right| = \frac{|\alpha x - by|}{bx} \geq \frac{1}{bx}$$

Αν ο $\frac{\alpha}{b}$ δεχόταν ρητή προσέγγιση τάξεως 2 θα υπήρχε σταθερά c τέτοια ώστε $\frac{1}{bx} < \frac{c}{x^2}$, για μια απειρία ακέραιων x,

που είναι άτοπο.

2.1.3. ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Ο αριθμός $\xi = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \cdots + \frac{1}{10^{2^m}} + \cdots$ είναι άρρητος.

Απόδειξη:

Θέτουμε

$$r_m = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \cdots + \frac{1}{10^{2^m}} = \frac{t}{10^{2^m}}$$

Η διαφορά

$$|\xi - r_m| = \frac{1}{10^{2^{m+1}}} + \frac{1}{10^{2^{m+2}}} + \cdots =$$

$$= \frac{1}{10^{2^{m+1}}} \cdot \xi < \frac{1}{10^{2^{m+1}}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{10^{2^{m+1}}} \cdot \frac{10}{9} <$$

$$< \frac{1}{10^{2^{m+1}}} \cdot 2 = 2\left(\frac{1}{10^{2^m}}\right)^2 = 2\left(10^{-2^m}\right)^2$$

Άρα δέχεται προσέγγιση τάξεως 2, άρα δεν είναι ρητός.

2.1.4. Μέσω της θεωρίας των συνεχών κλασμάτων μπορούμε να δείξουμε ότι κάθε άρρητος δέχεται ρητή προσέγγιση τάξεως 2.

Αν είναι άρρητος τετραγωνικός (δηλαδή ρίζα ανάγωγου πολυωνύμου βαθμού 2) τότε δέχεται προσέγγιση τάξεως μεγαλύτερης του 2.

2.1.5. Γενίκευση αυτών των αποτελεσμάτων είναι το κάτωθι θεώρημα Liouville, μέσω του οποίου ο Liouville κατορθώνει το 1843 να αποδείξει την ύπαρξη υπερβατικών αριθμών

2.1.6. Η αρχική απόδειξη του Liouville στηρίζεται στην θεωρία των συνεχών κλασμάτων του Euler. Η απόδειξη που δίδεται παρακάτω χρησιμοποιεί το θεώρημα μέσης τιμής, που είναι αυτό που συναντάμε στην βιβλιογραφία.

2.2. Θεώρημα Liouville. Ένας πραγματικός αλγεβρικός αριθμός βαθμού n δεν δέχεται ρητές προσεγγίσεις τάξεως μεγαλύτερης του βαθμού του.

Απόδειξη

Έστω $\xi \in \mathbb{R}$ ένας αλγεβρικός αριθμός βαθμού n. Θα δείξουμε ότι δεν ικανοποιεί την ανισότητα Liouville τάξεως $n+1$.

Έστω $f(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$, με $\alpha_i \in \mathbb{Z}$,

$i = 1,2, \dots, m$, ένα ανάγωγο πολυώνυμο του $\mathbb{Q}$ που δέχεται σαν ρίζα το ξ.

Αν $n = 1$ τότε $\xi \in \mathbb{Q}$, είναι η περίπτωση που καλύφθηκε στο (2.1.2).

Έστω $n \geq 2$. Τότε $\xi \notin \mathbb{Q}$ όπως επίσης και όλες οι ρίζες της f δεν ανήκουν στο $\mathbb{Q}$

Ισχύει

$$f'(x) = n\alpha_n x^{n-1} + (n-1)\alpha_{n-1}x^{n-2} + \cdots + \alpha_2 x + \alpha_1$$

και για κάθε t τέτοιο ώστε $\xi - 1 < t < \xi + 1$ έχουμε

$$|f'(t)| = |n\alpha_n t^{n-1} + (n-1)\alpha_{n-1}t^{n-2} + \cdots + \alpha_2 t + \alpha_1| \leq$$

$$\leq |n\alpha_n t^{n-1}| + |(n-1)\alpha_{n-1}t^{n-2}| + \cdots + |\alpha_2 t| + |\alpha_1|$$

$$< n|\alpha_n|(|\xi| + 1)^{n-1} + (n-1)|\alpha_{n-1}|(|\xi| + 1)^{n-2} + \cdots + |\alpha_1| = A$$

Έστω $\frac{h}{k}$ μια ρητή προσέγγιση του ξ, με $h, k \in \mathbb{Z}, k > 0$.

Τότε $f\left(\frac{h}{k}\right) \neq 0$, αν υποθέσουμε ότι $\xi - 1 < \frac{h}{k} < \xi + 1$ έχουμε

$$\left|f\left(\frac{h}{k}\right)\right| = \frac{|\alpha_n h^n + \alpha_{n-1}h^{n-1}k + \cdots + \alpha_0 k^n|}{k^n} = \frac{T}{k^n} \geq \frac{1}{k^n}$$

Η τελευταία ανισότητα είναι συνέπεια του ότι ο αριθμητής T είναι ακέραιος και μάλιστα $T \geq 1$ δεδομένου ότι $f\left(\frac{h}{k}\right) \neq 0$.

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ το οποίο εξασφαλίζει την ύπαρξη ενός p:

$$\xi - 1 < \frac{h}{k} < p < \xi < \xi + 1$$

τέτοιο ώστε

$$f\left(\frac{h}{k}\right) = f\left(\frac{h}{k}\right) - f(\xi) = \left(\frac{h}{k} - \xi\right) f'(p)$$

επομένως

$$\left|\frac{h}{k}-\xi\right| = \frac{f\left(\frac{h}{k}\right)}{f'(p)} > \frac{1}{Ak^n}$$

δεν υπάρχει όμως σταθερά c τέτοια ώστε

$$\frac{1}{Ak^n} < \frac{c}{k^{n+1}} \qquad (\mathbf{2})$$

για μια απειρία θετικών k. Διότι η (2) δίδει $k^{n+1} < cAk^n$ δηλαδή $0 < k < cA$.

Άρα ο ξ δε δέχεται προσέγγιση δια ρητών αριθμών τάξεως μεγαλύτερης του βαθμού του n, και ολοκληρώνεται η απόδειξη του Θεωρήματος Liouville.

2.3. Ορισμός. Ο αριθμός $\xi \in \mathbb{R}$ θα ονομάζεται **αριθμός Liouville** αν για κάθε θετικό ακέραιο m υπάρχει ρητός $\frac{h_m}{k_m}$, με $k_m > 1$

τέτοιος ώστε

$$\left|\xi - \frac{h_m}{k_m}\right| < (k_m)^{-m}\ .$$

2.4. Πρόταση Liouville. Κάθε αριθμός Liouville είναι υπερβατικός.

Απόδειξη

Έστω ξ ένας αριθμός Liouville. Για κάθε $m \geq n+1$ έχουμε

$$\left|\xi - \frac{h_m}{k_m}\right| < (k_m)^{-m} \leq {k_m}^{-n-1}.$$

Άρα ο ξ δέχεται ρητές προσεγγίσεις τάξεως $n+1$ και επομένως σύμφωνα με το (2.2) είναι υπερβατικός.

2.5. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Με την βοήθεια του (2.2) αποδεικνύεται ότι ο αριθμός

$$\xi = \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}} = \frac{1}{10^{1!}} + \frac{1}{10^{2!}} + \cdots + \frac{1}{10^{n!}} + \cdots$$

είναι υπερβατικός.

Απόδειξη

Έστω N ένας τυχαίος φυσικός αριθμός. Για $n > N$ συμβολίζουμε με ξ_n το άθροισμα των n πρώτων όρων της σειράς.

Δηλαδή

$$\xi_n = \frac{1}{10^{1!}} + \frac{1}{10^{2!}} + \cdots + \frac{1}{10^{n!}} = \frac{p}{10^{n!}} = \frac{p}{q}$$

όπου $q = 10^{n!}$

και $p = 10^{(n-1)!} + 10^{(n-2)!} + \cdots + 10^{(n-k)!} + \cdots + 10^{[n-(n-1)]!} + 1$

Επίσης

$$0 < \xi - \frac{p}{q} = \xi - \xi_n = 10^{-(n+1)!} + 10^{-(n+2)!} + \cdots < 2 \cdot 10^{-(n+1)!} < 2q^{-N}$$

Από το προηγούμενο θεώρημα έχουμε ότι το ξ δεν είναι αλγεβρικός αριθμός βαθμού μικρότερου του N και επειδή το N είναι τυχαίο ισχύει ότι ο ξ είναι υπερβατικός.

3. ΜΕΘΟΔΟΣ HERMITE

Το επόμενο μεγάλο αποτέλεσμα στη θεωρία των υπερβατικών αριθμών είναι το θεώρημα Hermite (1875) στο οποίο αποδεικνύει ότι ο αριθμός

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

είναι υπερβατικός .

Οι υπερβατικοί αριθμοί είναι άρρητοι αριθμοί για αυτό δεν εκπλήσσει το γεγονός ότι η μελέτη άρρητων και υπερβατικών είναι συνδεδεμένη. Οι πρώτες προσπάθειες μελέτης αυτών έγιναν με την χρησιμοποίηση των συνεχών κλασμάτων που επινόησε ο Euler. Ο ίδιος ο Euler το 1737 αποδεικνύει ότι ο e είναι άρρητος. Δια της χρήσης των συνεχών κλασμάτων ο Lambert το 1761 αποδεικνύει ότι οι αριθμοί e^r, με $0 \neq r \in \mathbb{Q}$, είναι άρρητοι.

Μια άλλη φύσεως μέθοδος μελέτης των άρρητων – υπερβατικών αριθμών, την οποία θα περιγράψουμε λίγο στην συνέχεια, εμφανίστηκε το 1815 στο μάθημα του J.Fourier στην École Polytechnique.

Δια της μεθόδου αυτής ο Fourier προσεγγίζει το e με παραστάσεις πολυωνυμικού χαρακτήρα κόβοντας τη σειρά του e σε κάποιο επίπεδο N και κάνοντας συλλογισμούς φραγής επί του υπολοίπου.

3.1. Πρόταση J.Fourier (1815). Ο αριθμός e είναι άρρητος [8].

Απόδειξη

Κόβοντας τη σειρά που παριστάνει το e στο $N -$ οστό όρο και πολλαπλασιάζοντας επί N! λαμβάνουμε τη σχέση

$$\mathrm{N}!\,\mathrm{e}-\sum_{n=0}^{N}\frac{N!}{n!}=\sum_{k\geq 1}\frac{N!}{(N+k)!} \qquad (\mathbf{1})$$

Το δεξί μέλος της (1) σαν άθροισμα θετικών όρων είναι θετικό, το φράσουμε και λαμβάνουμε το όριο του για $\mathrm{N} \to \infty$.

Για $k \geq 1$ έχουμε

$$\frac{(N+k)!}{N!\,k!}=\frac{(N+1)!\,(N+2)\cdots(N+k)}{N!\,k!}=\frac{(N+1)\cdot(N+2)\cdots(N+k)}{1\cdot 2\cdots k}\geq N+1$$

Άρα

$$\frac{N!}{(N+k)!}\leq\frac{1}{(N+1)\cdot k!}$$

Επομένως,

$$\sum_{k\geq 1}\frac{N!}{(N+k)!}\leq\frac{1}{N+1}\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k!}=\frac{e-1}{N+1}\to 0$$

Στο αριστερό μέλος της $(\mathbf{1})$ η ποσότητα

$$\sum_{n=0}^{N}\frac{N!}{n!}$$

είναι ακέραιος. Επομένως ο αριθμός $N!\,e$ δεν μπορεί να είναι ακέραιος για κάθε $N \geq 1$, κατά συνέπεια ο αριθμός e είναι άρρητος.

3.2. Η μέθοδος αυτή του Fourier κατάλληλα προσαρμοσμένη επέτρεψε στον Liouville (1840) να αποδείξει ότι το e, όπως και ο e^2, δεν είναι τετραγωνικός δηλαδή δεν είναι ρίζα δευτεροβάθμιου πολυωνύμου με ρητούς συντελεστές. Τα όρια της μεθόδου είναι περιορισμένα, για παράδειγμα δεν έγινε δυνατόν να εφαρμοσθεί για τον αριθμό e^3.

Το επόμενο ουσιαστικό όσο και θεαματικό βήμα στη θεωρία υπερβατικότητας έγινε το 1873 από τον Hermite δια της επινοήσεως μιας διαφορετικής και καινοτόμου μεθόδου. Η νέα αυτή μέθοδος του επέτρεψε να δώσει μια νέα απόδειξη του αποτελέσματος Lambert που προαναφέραμε και στη συνέχεια να φθάσει στην υπερβατικότητα του e.

3.3. Ο Hermite επιτυγχάνει μια ευρεία γενίκευση της μεθόδου Fourier (3.1) προσεγγίζοντας (με την πιο κάτω έννοια) την εκθετική συνάρτηση e^z δια του ρητού κλάσματος $\frac{A(z)}{B(z)}$**:**

Υπολογίζει πολυώνυμα $A(x)$ και $B(x)$ με ακέραιους συντελεστές, ελεγχόμενου βαθμού, τέτοια ώστε τα αναπτύγματα Taylor στο μηδέν των συναρτήσεων e^z και $\frac{A(z)}{B(z)}$ να έχουν τους ίδιους πρώτους όρους.

3.3.1. Η ύπαρξη τέτοιων πολυωνύμων εξασφαλίζεται εύκολα μέσω της γραμμικής άλγεβρας (Siegel 1949). Ο Hermite δίδει συγκεκριμένους τύπους (παράρτημα 1) πολυωνύμων βαθμ$A \leq n_0$ και βαθμ$B \leq n_1$ με $B(0) \neq 0$ τέτοιων ώστε οι $n_0 + n_1 + 1$ πρώτοι όροι του αναπτύγματος Taylor στο μηδέν των e^z και $\frac{A(z)}{B(z)}$ να ταυτίζονται, ελέγχοντας αριθμητικά τους συντελεστές όπως και το υπόλοιπο

$$R(z) = B(z)e^z - A(z)$$

κατά απόλυτη τιμή.

Δια της προσέγγισης αυτής και ανάλογων συλλογισμών με αυτούς της (3.1) αποδεικνύεται ότι ο e^r $(0 \neq r \in \mathbb{Q})$ όπως και ο π είναι άρρητοι.

3.4. Στη συνέχεια ο Hermite επιχειρεί να δείξει την υπερβατικότητα του e, δηλαδή να δείξει ότι ο e δεν είναι ρίζα πολυωνύμου με ρητούς συντελεστές ή με άλλα λόγια για κάθε $m \geq 1$ οι αριθμοί $e, e^2, e^3, \dots, e^m$ είναι γραμμικά ανεξάρτητοι επί του $\mathbb{Q}$. Χρειάζεται ταυτόχρονες προσεγγίσεις (παράρτημα 2) των εκθετικών συναρτήσεων $e^{\mu z}$ δια ρητών κλασμάτων $\frac{\Phi_\mu(z)}{\Phi(z)}$, $1 \leq \mu \leq m$ με κοινό παρονομαστή, του προηγούμενου τύπου (3.3).

Εκμεταλλεύεται τις αριθμητικές σχέσεις που προκύπτουν θέτοντας σε αυτές την τιμή $z = 1$, για να εφαρμόσει στη συνέχεια ένα σχετικά απλό κριτήριο γραμμικής ανεξαρτησίας που θα τον οδηγήσει σε μια ορίζουσα Δ και πρέπει να δείξει ότι $\Delta \neq 0$. Στόχο που δεν καταφέρνει αλλά παρακάμπτει [7, p7].

Η απόδειξη ότι $\Delta \neq 0$, που αναφέρει ο Waldschmidt στις παραδόσεις του, αποδίδεται στο μεταγενέστερο μαθηματικό Kurt Malher [8, p50].

3.5. ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

α) Οι προσεγγίσεις $\frac{\Phi_\mu(z)}{\Phi(z)}$ των συναρτήσεων $e^{\mu z}$ είναι το πρώτο παράδειγμα προσεγγίσεων Pade 2ου τύπου.

β) Δέκα χρόνια μετά την απόδειξη Hermite, ο Lindemann τροποποιώντας τη μέθοδο αποδεικνύει ότι ο αριθμός $\pi = 3{,}14 \dots$ είναι υπερβατικός (αποτέλεσμα που συνδέεται άμεσα με το ιστορικό πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου).

Ακολούθως, σημαντικοί μαθηματικοί (όπως οι Hilbert, Hurwitz, Gordan, Niven κ.α) δίδουν απλουστευμένες – συντομότερες αποδείξεις του θεωρήματος Hermite όπως και του Lindemann, όμως η εις βάθος κατανόηση του θέματος απαιτεί τη μελέτη του κειμένου του Hermite [7, p9].

γ) Επόμενοι σταθμοί κατά τη διάρκεια του 20^{ου} αιώνα στη θεωρία των υπερβατικών αριθμών αποτέλεσαν εργασίες του Siegel (1929), των Gelfond και Schneider (1934-35), του Malher και πολλών άλλων. Έτσι εμπλουτίστηκαν οι μέθοδοι, τα εργαλεία όπως και οι εφαρμογές της υπερβατικής θεωρίας αριθμών σε άλλους κλάδους.

Για τη μέθοδο Hermite ο Γάλλος μαθηματικός Michel Walschmidt γράφει [7] :

“ Μπορούμε, κατά κάποιο τρόπο, να θεωρήσουμε ότι όλες οι μέθοδοι της υπερβατικής θεωρίας που αναπτύχθηκαν μετά τον Hermite έχουν τις ρίζες τους στην θεμελιώδη εργασία του 1873, οι κύριες ιδέες βρίσκονται εκεί. Τα εργαλεία που διαμορφώθηκαν στη συνέχεια σχετίζονται με διάφορους κλάδους των μαθηματικών, όμως η βασική στρατηγική είναι αυτή που έχει προτείνει ο Hermite ”.

Ο μαθηματικός Paul Painlevé θα γράψει για τη μέθοδο του Hermite:

“Η μέθοδός του θα θαυμάζεται όσο θα υπάρχουν άνθρωποι ικανοί να κατανοούν την έννοια του αριθμού”.

δ) Στη συνέχεια ακλουθώντας τους Hurwitz-Hilbert και Niven θα εκθέσουμε τις συντομευμένες αποδείξεις της υπερβατικότητας του e και π.

4. Θεώρημα Hermite (1873). Ο αριθμός e είναι υπερβατικός

Απόδειξη

Παρουσιάζουμε την απόδειξη του Hurwitz (1893) [6, 7].

Έστω ένα πολυώνυμο $f \in \mathbb{C}[x]$ με $\beta\alpha\theta\mu f \leq N$.

Θέτουμε

$$F = f + f' + f'' + \cdots + f^{(N)} \qquad (1)$$

Για τη σχέση (1) ισχύουν τα εξής :

I. $\beta\alpha\theta\mu F = \beta\alpha\theta\mu f$

II. $F - F' = f$

III. $\left(e^{-z}F(z)\right)' = (e^{-z})'\left(F(z)\right) + e^{-z}F'(z) = e^{-z}F(z) + e^{-z}F'(z) =$

$$= -e^{-z}\left(F(z) - F'(z)\right) = -e^{-z}f$$

IV. Ολοκληρώνοντας την προηγούμενη σχέση έχουμε

$$\int_0^z e^{-t} f(t)dt = [e^{-t}F(t)]_z^0 = e^0F(0) - e^{-z}f = F(0) - e^{-z}F(z)$$

Η σχέση

$$\int_0^z e^{-t} f(t)dt = F(0) - e^{-z}F(z) \qquad (2)$$

αποτελεί μια από τις μορφές της **ταυτότητας Hermite.**

V. Πολλαπλασιάζουμε την (2) επί e^z

$$e^zF(0) - F(z) = e^z \int_0^z e^{-t} f(t)dt \qquad (3)$$

VI. Θέτουμε στη σχέση (3) το πολυώνυμο

$$f(t) = \frac{1}{(p-1)!} t^{p-1}(t-1)^p \cdots (t-m)^p$$

όπου p και m θετικοί ακέραιοι.

Αντικαθιστώντας στη σχέση που θα λάβουμε για $z = j \in \mathbb{Z}$, θα δούμε ότι το πηλίκο $\frac{F(j)}{F(0)}$ είναι μια καλή ρητή προσέγγιση (με την έννοια του Hermite (3.3)) των αριθμών e^j.

ΣΧΟΛΙΟ: Το πολυώνυμο f εισήχθη από τον Hurwitz. Για τις ανάγκες κάποιων συλλογισμών διαιρετότητας (modp) που εισήγαγε ο Hilbert, ο αριθμός p θα επιλεγεί αρκετά μεγάλος πρώτος.

VII. α) $\beta\alpha\theta\mu f = mp + (p-1) = N$.

β) Το πολυώνυμο f δέχεται τους ακεραίους $1,2,\ldots,m$ σαν ρίζες πολλαπλότητας p και τον ακέραιο 0 σαν ρίζα πολλαπλότητας $p-1$.

VIII. Μελέτη των τιμών των παραγώγων του f στα σημεία $j = 0,1,\ldots,m$

Έχουμε :

α) $f^{(n)}(j) = 0$ για $j = 1,2,\ldots,m$ και $n = 0,1,2,\ldots,p-2,p-1$

β) $f^{(n)}(0) = 0$ για $n = 0,1,2,\ldots,p-2$

γ) $f^{(p-1)}(t) = \frac{(p-1)(p-2)\ldots(p-(p-1))}{(p-1)!}(t-1)^p \cdots (t-m)^p + tq(t)$

δ) $f^{(p-1)}(0) = (-1)^p(m!)^p \in \mathbb{Z}$

ε) Αν $g(t) \in \mathbb{Z}[t]$ και $0 \leq \kappa \in \mathbb{Z}$ τότε $\frac{1}{\kappa!}g^{(\kappa)}(t) \in \mathbb{Z}[t]$

όπως επίσης και $\frac{1}{\kappa!}g^{(n)}(t) \in \mathbb{Z}[t]$ για κάθε $n \geq \kappa$.

στ) Θέτουμε $g(t) = (p-1)!\,f(t) = t^{p-1}(t-1)^p \cdots (t-m)^p \in \mathbb{Z}[x]$

άρα για $\kappa = p-1$ έχουμε

$$f^{(p-1)}(t) = \frac{g^{(p-1)}(t)}{(p-1)!} \in \mathbb{Z}[x]$$

ζ) Επομένως $f^{(n)}(j) \in \mathbb{Z}$ για κάθε $n \geq 0$ και $j = 0,1,2,\dots,m$

IX. Άρα για τη συγκεκριμένη επιλογή του πολυωνύμου f οι αριθμοί $F(j)$ που εμφανίζονται στην ταυτότητα του Hermite (2), για $j = 0,1,2,\dots,p-1$, είναι ακέραιοι.

X. Φραγή του υπολοίπου:

$$e^j F(0) - F(j) = e^j \int_0^j e^{-t} f(t)\,dt$$

για j ακέραιο εντός του διαστήματος $1 \leq j \leq m$

α) Έχουμε :

$$\sup_{0 \leq t \leq m} |f(t)| < \frac{m^N}{(p-1)!}$$

Πράγματι ,

$0 \leq t \leq m \Longrightarrow -j < t-j \leq m-j \Longrightarrow 0 \leq |t-j| \leq m-j \leq m.$

β) Η σχέση $\int e^{-t}dt = -\int d(e^{-t})$ δίδει

$$0 < \int_0^j e^{-t}dt = -[e^{-t}]_0^j = e^0 - e^{-j} = 1 - e^{-j} < 1$$

Επομένως,

$$\left|\int_o^j e^{-t} f(t)dt\right| \leq \int_0^j |e^{-t} f(t)|\, dt = \int_0^j e^{-t}|f(t)|dt \leq \int_0^j e^{-t} \sup_{0\leq t\leq m} |f(t)| =$$

$$= \int_0^j e^{-t} \frac{m^N}{(p-1)!} dt = \frac{m^N}{(p-1)!} \int_0^j e^{-t} dt < \frac{m^N}{(p-1)!} \cdot 1 = \frac{m^N}{(p-1)!}$$

Συνεπώς,

$$\left|\int_o^j e^{-t} f(t)dt\right| < \frac{m^N}{(p-1)!}$$

XI. α) Έστω $C = c_0 + c_1 e + \cdots + c_m e^m$ με $c_i \in \mathbb{Q}$ και $c_0 \neq 0$.

Για να αποδείξουμε το θεώρημα Hermite πρέπει να δείξουμε ότι $C \neq 0$.

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι c_i είναι ακέραιοι. Έχουμε λοιπόν τη σχέση :

$$C \cdot F(0) = (c_0 + c_1 e + \cdots + c_m e^m\ ) \cdot F(0) =$$

$$= c_0 \cdot F(0) + c_1 eF(0) + c_2 e^2 F(0) \ldots + c_m e^m F(0) =$$

και δια αντικαταστάσεως από την ταυτότητα Hermite (3) λαμβάνουμε

$$C \cdot F(0) = c_0 \cdot F(0) + c_1 F(1) + c_2 F(2) \ldots + c_m F(m) +$$

$$+ \sum_{j=0}^{m} c_j e^j \int_o^j e^{-t} f(t)dt \qquad (\mathbf{4})$$

β) Η αριθμητική μελέτη του πρώτου μέλους όπως και η φραγή του δεύτερου μέλους της (4) θα μας οδηγήσει στο αποτέλεσμα.

$$\left|\sum_{j=0}^{m} c_j e^j \int_o^j e^{-t} f(t)dt\right| \leq \sum_{j=0}^{m} \left|c_j e^j\right| \left|\int_o^j e^{-t} f(t)dt\right| <$$

$$< \sum_{j=0}^{m} \left|c_j\right| e^m \frac{m^N}{(p-1)!} \xrightarrow[p\to\infty]{} 0$$

Πράγματι,

Για $m, c_0, c_1, \dots, c_m$ σταθερά , το κλάσμα

$$\frac{m^{mp+p-1}}{(p-1)!} \xrightarrow[p\to\infty]{} 0$$

γ) Άρα για p αρκετά μεγάλο

$$|c_0 \cdot F(0) + c_1F(1) + c_2F(2) \dots + c_mF(m) - C \cdot F(0)| < 1 \qquad (\mathbf{5})$$

δ) Δεδομένου ότι τα c_i, όπως και τα $F(j)$ στη σχέση (4), είναι ακέραιος, για να δείξουμε ότι $C \neq 0$ αρκεί να δείξουμε ότι

$$c_0 \cdot F(0) + c_1F(1) + c_2F(2) \dots + c_mF(m) \neq 0 \qquad (\mathbf{6})$$

Έστω p πρώτος αρκετά μεγάλος και $1 \leq j \leq m$ έχουμε

$$F(j) = f^{(p)}(j) + f^{(p+1)}(j) + \cdots + f^{(N)}(j) \in \mathbb{Z} \qquad (\mathbf{7})$$

και

$$F(0) = f^{(p-1)}(0) + f^{(p)}(0) + \cdots + f^{(N)}(0) \in \mathbb{Z} \qquad (\mathbf{8})$$

Στις σχέσεις (7) και (8), όλοι οι προσθετέοι της μορφής $f^{(\kappa)}(j)$, για $1 \leq j \leq m$ και $\kappa \geq p$, είναι πολλαπλάσια του p. Αντιθέτως, και για p αρκετά μεγάλο

$$f^{(p-1)}(0) \equiv (-1)^p (m!)^p \not\equiv 0 \ (\mathrm{mod} p)$$

Επομένως το $F(0)$ όπως και το πρώτο μέλος της (6), είναι ακέραιος $\not\equiv 0 \ (\mathrm{mod} p)$, άρα $\neq 0$ πράγμα που αποδεικνύει την αλήθεια της σχέσης (5).

5. Θεώρημα Lindemann (1882). Ο αριθμός π είναι υπερβατικός.

Είναι δυνατόν, κατ' αναλογία προς την απόδειξη Hurwitz, να παρουσιασθεί και συντομευμένη η απόδειξη του θεωρήματος Lindemann (Niven 1939) [5, 6].

Η μέθοδος απόδειξης συνίσταται στην επιλογή κατάλληλου πολυωνύμου f που θα τεθεί στην ταυτότητα του Hermite

$$e^{\alpha} F(0) - F(\alpha) = e^{\alpha} \int_0^1 \alpha \, e^{-\alpha x} f(\alpha x) dx$$

για να γίνει στη συνέχεια ένας αριθμητικός συλλογισμός στο πρώτο μέλος και φραγή του δεύτερου. Χρειάζεται μια κατάλληλη προετοιμασία, την οποία και παρουσιάζουμε.

5.1 ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

Τα πολυώνυμα που εμφανίζονται είναι με ρητούς ή με ακέραιους συντελεστές.

Ένα πολυώνυμο $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ των μεταβλητών $x_1, x_2, \dots, x_m$ ονομάζεται συμμετρικό αν παραμένει αναλλοίωτο δια μεταθέσεως των μεταβλητών του. Δηλαδή αν για κάθε μετάθεση σ των δεικτών $\{1, \dots, m\}$ έχουμε :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m) = f\big(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(m)}\big)$$

5.1.1. ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

Στοιχειώδη συμμετρικά πολυώνυμα m μεταβλητών $x_1, x_2, \dots, x_m$ είναι τα αθροίσματα e_κ όλων των γινομένων κ εξ αυτών της μορφής :

$$e_\kappa = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_m \le m} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_\kappa} \qquad (1 \le \kappa \le m)$$

Θέτουμε $e_0 = 1$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$e_{1=}x_1 + x_2 + \cdots + x_m$

$e_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_1x_m + x_2x_3 + \cdots + x_{m-1}x_m$

$\vdots$

$e_m = x_1x_2 \cdots x_m$

5.1.2. ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΩΝ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

Το θεμελιώδες θεώρημα των συμμετρικών πολυωνύμων που εκφωνούμε χωρίς απόδειξη είναι το κάτωθι:

Θεώρημα. Για κάθε συμμετρικό πολυώνυμο $g(x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{Q}[x_1, x_2, \dots, x_m]$ m μεταβλητών $x_1, x_2, \dots, x_m$ υπάρχει πολυώνυμο $h(x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{Q}[x_1, x_2, \dots, x_m]$, ίδιου ή μικρότερου βαθμού, (όχι κατ' ανάγκη συμμετρικό) τέτοιο ώστε :

$$g(x_1, x_2, \dots, x_m) = h(e_1, e_2, \dots, e_m)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$$x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) =$$

$$= e_1{}^2 - 2e_2$$

5.1.3. Έστω $e_0, e_1, \dots e_m$ τα στοιχειώδη πολυώνυμα ως προς $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$. Ισχύουν οι σχέσεις :

α) $(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \dots (1 + \alpha_m) = e_0 + e_1 + \cdots + e_m$

β) $(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_m) = x^m - e_1 x^{m-1} + \cdots + (-1)^m e_m$

Απόδειξη

Η (α) είναι προφανής.

Η (β) προκύπτει από την (α) αντικαθιστώντας το α_κ με $-\frac{\alpha_\kappa}{x}$ διότι έχουμε

$$e_\kappa\left(-\frac{\alpha_1}{x}, -\frac{\alpha_2}{x}, \dots, -\frac{\alpha_m}{x}\right) = (-1)^\kappa \cdot x^{-\kappa} \cdot e_\kappa(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$$

5.1.4. Έστω $f \in \mathbb{Q}[x]$ βαθμού m, θεωρούμε $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ τις ρίζες του f εντός του $\mathbb{C}$ (γραμμένες με την πολλαπλότητας τους) και $c \in \mathbb{Q}[x]$ συμμετρικό πολυώνυμο m μεταβλητών. Τότε $c(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{Q}$.

Απόδειξη

Πράγματι, λόγω της (5.1.2) το $c(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ είναι πολυώνυμο με ρητούς συντελεστές των στοιχειωδών συμμετρικών πολυωνύμων των $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, στα οποία η (5.1.3) είναι κατά προσέγγιση προσήμου, οι συντελεστές του f και επομένως ανήκουν στο $\mathbb{Q}$.

5.2. Υποθέτουμε στη συνέχεια ότι ο αριθμός π είναι αλγεβρικός. Σκοπός μας στο τέλος είναι να καταλήξουμε σε άτοπο και να έχουμε παρουσιάσει την απόδειξη του θεωρήματος Lindemann.

5.2.1. Το iπ σαν γινόμενο δυο αλγεβρικών αριθμών θα είναι επίσης αλγεβρικός επί του $\mathbb{Q}$. Έστω m ο βαθμός του iπ επί του $\mathbb{Q}$, δηλαδή ο βαθμός του ανάγωγου πολυωνύμου με συντελεστές ρητούς, του οποίου είναι ρίζα. Το πολυώνυμο αυτό (σαν ανάγωγο επί του $\mathbb{Q}$) έχει όλες τις ρίζες του απλές, τις ονομάζουμε και συζυγή του iπ και τις συμβολίζουμε

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$$

Ένα εκ των α_κ είναι και το iπ που ως γνωστόν ικανοποιεί τη σχέση Euler:

$$e^{i\pi} = -1$$

Επομένως, τα συζυγή του iπ ικανοποιούν τη σχέση:

$$(e^{\alpha_1} + 1)(e^{\alpha_2} + 1) \cdots (e^{\alpha_m} + 1) = 0 \qquad (1)$$

5.2.2. Για $S \subseteq \{1,2,\dots,m\}$ θέτουμε

$$\beta_S = \sum_{t \in S} \alpha_t$$

Στο ανάπτυγμα του αριστερού μέλους της (1) καθώς το S διατρέχει το σύνολο των υποσυνόλων του $\{1,2,\dots,m\}$ εμφανίζονται 2^m όροι της μορφής e^{β_S}, όσα είναι και τα υποσύνολα του $\{1,2,\dots,m\}$. Για $S = \emptyset$ αντιστοιχεί ο όρος $1 \times 1 \times 1 \times \dots . \times 1$ και έχουμε $\beta_\emptyset = 0$ και άλλοι όροι όμως β_S μπορεί να ισούνται με μηδέν.

Θεωρούμε το πολυώνυμο g , βαθμού 2^m

$$g(z) = \prod_{S \subseteq \{1,2,\dots,m\}} (z - \beta_S)$$

Οι συντελεστές του g είναι στοιχειώδη συμμετρικά πολυώνυμα των αθροισμάτων β_S , επομένως γράφονται σαν πολυώνυμα των α_κ.

Δια μεταθέσεων των α_κ, η έκφραση

$$(e^{\alpha_1} + 1)(e^{\alpha_2} + 1) \cdots (e^{\alpha_m} + 1)$$

παραμένει αναλλοίωτη, άρα οι ρίζες β_S του πολυωνύμου g (για $S \subseteq \{1,2,\dots,m\}$) παραμένουν ίδιες. Επομένως το πολυώνυμο g παραμένει αναλλοίωτο, δια μεταθέσεως των α_κ, κατά συνέπεια οι συντελεστές του είναι συμμετρικά πολυώνυμα των $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$.

Επειδή τα $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ είναι τα συζυγή του $e^{i\pi}$ επί του $\mathbb{Q}$, δηλαδή το σύνολο των ριζών ενός πολυωνύμου με ρητούς συντελεστές, σύμφωνα με το (5.1.4) οι συντελεστές του g ανήκουν στο $\mathbb{Q}$.

Έστω s η πολλαπλότητα της ρίζας μηδέν του πολυωνύμου g. Βγάζοντας κοινό παράγοντα το z^s, όπως και τον κοινό παρονομαστή των συντελεστών του g λαμβάνουμε το πολυώνυμο

$$h(z) = h_t z^t + h_{t-1} z^{t-1} + \cdots + h_1 z + h_0$$

με **1)** $\mathbf{t = 2^m - s}$

2) $\mathbf{h_i} \in \mathbb{Z}$

3) $\mathbf{h_t, h_0 \neq 0}$

Θεωρούμε τις διάφορες του μηδενός τιμές των $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ (με ενδεχόμενες επαναλήψεις) που είναι ακριβώς οι ρίζες του πολυωνύμου h. Αναπτύσσοντας το αριστερό μέλος της (1) λαμβάνουμε τη σχέση :

$$e^{\beta_1} + e^{\beta_2} + \cdots + e^{\beta_t} + s = 0 \qquad (2)$$

Η σχέση (2) είναι εκείνη που στη συνέχεια θα μας οδηγήσει σε άτοπο.

Πολλαπλασιάζοντας με κατάλληλη σταθερά $c \in \mathbb{Z}$ οι αριθμοί $c\beta_1, c\beta_2, \dots, c\beta_t$ γίνονται ρίζες ενός πολυωνύμου $\Lambda(x) \in \mathbb{Z}[x]$ με μεγιστοβάθμιο συντελεστή 1. Το πολυώνυμο αυτό δεν είναι άλλο από το

$$\Lambda(x) = (x - c\beta_1)(x - c\beta_2) \cdots (x - c\beta_t)$$

Προφανώς και το πολυώνυμο $\Lambda(cx) \in \mathbb{Z}[x]$ έχει μεγιστοβάθμιο συντελεστή c^t.

5.2.3. ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ ΤΗΣ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ

Μετά την προετοιμασία αυτή, που μας έδωσε η σχέση (2), είναι δυνατή η εφαρμογή ανάλογης μεθόδου με αυτή που αναπτύξαμε κατά την απόδειξη της υπερβατικότητας του e.

Συγκεκριμένα, κατάλληλη επιλογή πολυωνύμου f, που εισάγεται πιο κάτω με τη σχέση (6), βαθμού κ και εισαγωγής του στην ταυτότητα Hermite:

$$\int_0^1 \alpha e^{-\alpha x} f(\alpha x)dx = -e^{-\alpha x}F(\alpha x)]_0^1 = -e^{-\alpha}F(\alpha) + F(0) \qquad (3)$$

όπου το

$$F(t) = f(t) + f'(t) + f''(t) + \cdots + f^{(\kappa)}(t)\ , \qquad \kappa \in \mathbb{C}$$

θα επιτρέψει να καταλήξουμε σε άτοπο (άτοπο της υπόθεσης αλγεβρικότητας του π) . Θα εφαρμόσουμε ένα επιχείρημα διαιρετότητας modp (για p πρώτο αρκετά μεγάλο) και μια φραγή. Η αναλογία με την περίπτωση της απόδειξης της υπερβατικότητας του e ενισχύει και τη σημασία της μεθόδου Hermite.

5.2.4. Η σχέση (3) δια πολλαπλασιασμού με e^{α} δίδει την ισοδύναμη σχέση:

$$e^{\alpha}F(0) = F(\alpha) + e^{\alpha}\int_0^1 \alpha e^{-\alpha x} f(\alpha x)dx \qquad (4)$$

Πολλαπλασιάζοντας τη (2) επί $F(0)$ έχουμε:

$$s\,F(0) + \sum_{r=1}^{t} e^{\beta_r}F(0) = 0$$

που λόγω της (4) γίνεται :

$$sF(0)+\sum_{r=1}^{t}\left[F(\beta_r)+e^{\beta_r}\int_0^1 \beta_r e^{-\beta_r x} f(\beta_r x)dx\right]=0$$

και τελικά

$$sF(0)+\sum_{r=1}^{t}F(\beta_r)\ =-\sum_{r=1}^{t}\beta_r e^{\beta_r}\int_0^1 e^{-\beta_r x} f(\beta_r x)dx \qquad (5)$$

Έστω p ακέραιος πρώτος, θεωρούμε το πολυώνυμο

$$f(x)=\frac{(cx)^{p-1}}{(p-1)!}\prod_{r=1}^{p}(cx-c\beta_r)^p=\frac{(cx)^{p-1}}{(p-1)!}\Lambda(cx)^p \qquad (6)$$

βαθμού $pt+p-1$.

Στο πρώτο μέλος της (5) εμφανίζονται οι τιμές των διαδοχικών παραγώγων $f^{(\mu)}$ του πολυωνύμου f στα σημεία 0 και β_r $(1\le r\le t)$.

5.2.5. Μελέτη των τιμών των παραγώγων του f στα σημεία 0 και β_r

Θα δείξουμε ότι η τιμή του πρώτου μέλους της (5) είναι ακέραιος ισοδύναμος (modp) με τον ακέραιο όρο

$$f^{(p-1)}(0)=c^{p-1}\prod_{r=1}^{t}(-c\beta_r)^p$$

Επιλέγοντας τον p πρώτο κατάλληλα μεγάλο ο όρος αυτός άρα και το πρώτο μέλος της (5) γίνονται $\not\equiv 0$ modp,επομένως $\neq 0$

1. Η τιμή της παραγώγου $f^{(\mu)}(x)$ στο μηδέν για $\mu<p-1$ και στα β_r $(1\le r\le t)$ για $\mu<r$ ισούται με μηδέν διότι όλοι οι όροι του $f^{(\mu)}(x)$ έχουν σαν παράγοντα το x όπως και το $cx-c\beta_r$.

2. Για $\mu \geq p$ το $f^{(\mu)}(x)$ έχει ακέραιους συντελεστές πολλαπλάσια του p.

Πράγματι, στις διαδοχικές παραγωγίσεις του $f(x)$, ο μόνος όρος που όταν τον παραγωγίσουμε δεν δίδει συντελεστή p είναι ο $(cx)^{p-1}$ που θα έχει εξαφανισθεί για $\mu \geq p$. Επίσης για $\mu \geq p$ θα έχει απαληφθεί και ο παρανομαστής $(p-1)!$ από όλους τους προσθετέους των παραγωγίσεων .

3. Σαν συνέπεια του 2 έχουμε ότι ο σταθερός συντελεστής $f^{(\mu)}(0)$ για $\mu \geq p$ είναι ακέραιος $\equiv 0 \pmod{p}$ επομένως και το άθροισμα τους $F(0)$ είναι $\equiv 0 \pmod{p}$.

4. Το $f^{(\mu)}(x)$ είναι πολυώνυμο ως προς cx. Το άθροισμα

$$\sum_{r=1}^{t} f^{(\mu)}(\beta_r) \quad , \qquad \text{για } \mu \text{ σταθερό} \geq p$$

είναι συμμετρική πολυωνυμική έκφραση των $c\beta_r$, επομένως είναι πολυώνυμο των στοιχειωδών συμμετρικών παραστάσεων των $c\beta_r \quad (1 \leq r \leq t)$. Οι στοιχειώδες αυτές συμμετρικές παραστάσεις είναι οι συντελεστές του πολυωνύμου $\Lambda(cx) \in \mathbb{Z}[x]$ εκ της κατασκευής του, άρα είναι ακέραιοι και λόγω του σημείου 2 διαιρούνται από το p.

5. Επομένως το πρώτο μέλος της (5) είναι ισοδυνάμως modulo p με τον ακέραιο

$$f^{(p-1)}(0) = c^{p-1} \prod_{r=1}^{t} (-c\beta_r)^p$$

πολλαπλασιασμένο επί s.

Όταν λοιπόν ο p επιλεγεί μεγαλύτερος των s , c και των γινομένων $c\beta_r$ το πρώτο μέλος της (5) γίνεται $\not\equiv 0(\mathrm{mod}\,p)$ και κατά συνέπεια $\neq 0$.

5.2.6. Φραγή του 2ου μέλους της (5)

1. Έστω

$$H = \max\{|\beta_j| \ , \text{για } j = 1,2,\dots,t\}$$

και

$$M = \max\{|f(x)| \, , \text{για } |x| < H\}$$

Η ανισότητα $|\beta_j| \leq H$ συνεπάγεται $e^{|\beta_j|} < e^H$ οπότε για $x \in [0,1]$ έχουμε

$$\left|e^{-\beta_j x}\right| \leq e^H$$

2. Για $|x| < H$ έχουμε :

$$|cx - c\beta_j| = |c||x - \beta_j| \leq |c|(|x| + |\beta_j|) <$$

$$< |c|(|H| + |H|) = 2|c||H|$$

και

$$|f(x)| \leq M < \frac{(|c|H)^{p-1}}{(p-1)!} \cdot (2|c|H)^{pt}$$

3. Το δεύτερο μέλος της (5) φράσσεται διαδοχικά

$$\left|\sum_{r=1}^{t} \beta_r e^{\beta_r} \int_0^1 e^{-\beta_r x} f(\beta_r x) dx\right| \leq \sum_{r=1}^{t} |\beta_r| \left|e^{\beta_r}\right| \int_0^1 \left|e^{-\beta_r x}\right| |f(\beta_r x)| \, dx \leq$$

$$\leq \sum_{r=1}^{t} He^{H} \int_{0}^{1} e^{H} M dx = t \cdot He^{H} \cdot e^{H} M = t \cdot H \cdot e^{2H} M \leq$$

$$\leq t \cdot H \cdot e^{2H} \frac{(|c|H)^{p-1}}{(p-1)!} \cdot (2|c|H)^{pt} \leq c_1 \frac{{c_2}^{p}}{(p-1)!}$$

για $c_{1,} c_2$ σταθερές.

4. Για p αρκετά μεγάλο το δεύτερο μέλος της (5) γίνεται μικρότερο του 1 .

5.2.7. Τα δυο προηγούμενα εδάφια μας οδηγούν σε άτοπο διότι ο ακέραιος της σχέσης (5) υποχρεούται να είναι $\neq 0$ και κατ'απόλυτη τιμή μικρότερο του 1. Έτσι ολοκληρώθηκε η απόδειξη του θεωρήματος Lindemann.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 1 [7]

Αν n_0 και n_1 είναι θετικοί ακέραιοι, η ύπαρξη δυο πολυωνύμων Α και Β, με $\beta\alpha\theta\mu A \leq n_0$ και $\beta\alpha\theta\mu B \leq n_1$,$B(0) \neq 0$ και τέτοιων ώστε οι $n_0 + n_1 + 1$ πρώτοι όροι του αναπτύγματος Taylor στο μηδέν των e^z και $\frac{A(z)}{B(z)}$ να είναι ίδιοι, εξασφαλίζεται από τη γραμμική άλγεβρα.

Ο Hermite υπολόγισε τύπους τέτοιων πολυωνύμων και εφάρμοσε επ' αυτών συλλογιστική ανάλογη με αυτή που εκθέσαμε στην απόδειξη του θεωρήματος του.

Θέτουμε $N = n_0 + n_1$, ο παρανομαστής Β μπορεί να πάρει τη μορφή

$$B(z) = \sum_{l=0}^{n_1} (-1)^l \binom{n_0 + l}{l} \frac{n_1!}{(n_1 - l)!} z^{n_1 - l} =$$

$$= (-1)^{n_1} \frac{n_1!}{n_0!} \sum_{h=0}^{n_1} (-1)^h \frac{(N-h)!\,N}{(n_1 - h)!\,h!} z^h = \sum_{k=n_0}^{N} z^{N-k} D^k f(0)$$

όπου $f(t) = \frac{1}{n_0!} t^{n_0} (t-1)^{n_1}$

Το υπόλοιπο $R(z) = B(z)e^z - A(z)$ δίδεται από

$$R(z) = \sum_{k \geq N+1} \frac{(k - n_0 - 1)!}{(k - N - 1)!\,k!} z^k = z^{N+1} e^z \int_0^1 e^{-tz} f(t) dt$$

Το πολυώνυμο Α λαμβάνεται από το Β και τη σχέση

$A(-z)e^z - B(-z) = -e^z R(-z)$ και ισούται με

$$A(z) = (-1)^{n_1} \sum_{h=0}^{n_0} \frac{(N-h)!\,N}{(n_0 - h)!\,h!} z^h$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 2 [7]

Η ταυτόχρονη προσέγγιση των συναρτήσεων $\mathrm{e}, \mathrm{e}^{2\mathrm{z}}, \mathrm{e}^{3\mathrm{z}}, \dots, \mathrm{e}^{\mathrm{mz}}$ δια ρητών κλασμάτων

$$\frac{\Phi_1(z)}{\Phi(z)}, \frac{\Phi_2(z)}{\Phi(z)}, \dots \frac{\Phi_m(z)}{\Phi(z)}$$

με κοινό παρανομαστή κατασκευάζεται από τον Hermite ως εξής:

Έστω θετικοί ακέραιοι $n_0, n_1, \dots, n_m$. Εισάγει το πολυώνυμο

$$f(t) = \frac{1}{n_0!} t^{n_0}(t-1)^{n_1} \dots (t-m)^{n_m}$$

βαθμού $N = n_0 + n_1 + \cdots + n_m$.

Τότε το πολυώνυμο

$$\Phi(z) = \sum_{k=n_0}^{N} z^{N-k} D^k f(0)$$

έχει βαθμό $N - n_0$ και για $1 \leq j \leq m$ το πολυώνυμο

$$\Phi(z) = \sum_{k=n_j}^{N} z^{N-k} D^k f(j)$$

έχει βαθμό $N - n_j$, ενώ το υπόλοιπο

$$R_j(z) = \Phi(z)e^z - \Phi_j(z) \qquad 1 \leq j \leq m$$

δίδεται από

$$R_j(z) = z^{N+1} e^{jz} \int_0^j e^{-tz} f(t) dt$$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Hermite Ch (1873): Sur la function exponentielle. C.R. Acad. Sci., Paris, Ser A77, 18-24, 74-79, 226-233 και 285-293

2. Hurwitz (1893): Beweis der Transcendeng der Zahl e. Math Ann 43,220-221

3. Lindemann F. (1882) Uber die Zahl π. Math Ann 20, 213-225

4. Niven I: Irrational numbers. The Math. Assoc. of America 1956

5. Niven I : The Transcendence of π. Amer. Math Monthly, 46 (1939) 469-471

6. Valiron G Théorie des functions. Masson, 1942

7. Waldschmidt M: La méthode de Charles Hermite : www.math.jussieu.fr/~miw/texts.html

8. Waldschmidt M Introduction to Diophantine methods, irrationality and transcendence: www.math.jussieuv.fr/~miw/texts.html