Χριστινα Γ. Ραφτοπουλου

ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΤΩΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΣΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΗΣ ΔΙΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗΣ ΕΚΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ, ΥΠΟ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟ

Μεταπτυχιακη Διατριβη

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
Διατμηματικο Προγραμμα Μεταπτυχιακων Σπουδων
«Μαθηματικα των Υπολογιστων και των Αποφασεων»
ΠΑΤΡΑ, ΙΟΥΛΙΟΣ 2013

ΕΙΣΗΓΗΤΗΣ

Κωνσταντινος Πετροπουλος

Επικουρος Καθηγητης

Τμημα Μαθηματικων

Πανεπιστημιου Πατρων

ΕΠΙΤΡΟΠΗ

Σταυρος Κουρουκλης

Καθηγητης

Τμημα Μαθηματικων

Πανεπιστημιου Πατρων

Φιλιππος Αλεβιζος

Αναπληρωτης Καθηγητης

Τμημα Μαθηματικων

Πανεπιστημιου Πατρων

Στους γονείς μου, Γιώργο και Μαρία

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Η παρούσα μεταπτυχιακή διατριβή εντάσσεται ερευνητικά στην περιοχή της Στατιστικής Θεωρίας Αποφάσεων και ειδικότερα στην (σημειακή) εκτίμηση των παραμέτρων κλίμακας σ και θέσης μ στο μοντέλο της διπαραμετρικής εκθετικής κατανομής, όταν η παράμετρος θέσης μ φράσσεται απο μια γνωστή σταθερά ($\mu \leq c$).

Η εκθετική κατανομή χρησιμοποιείται ευρέως σε βιομηχανικές και βιοϊάτρικές εφαρμογές στις οποίες είναι ενδιαφέρον να εκτιμηθεί η παράμετρος θέσης μ. Στην βιομηχανία η παράμετρος μ μπορεί να εκφράζει το χρονικό διάστημα της εγγύησης του παραχθέντος προϊόντος ενώ στην βιοϊατρική και πιο συγκεκριμένα στην επιδημιολογία, την λανθάνουσα περίοδο κάποιας ασθένειας, δηλαδή τον χρόνο που παρήλθε μεταξύ της πρώτης επαφής με τον παράγοντα και την εμφάνιση συμπτωμάτων. Επιπλέον η εκθετική κατανομή αποτελεί το απλούστερο και ποιο ευρέως αξιόπιστο μοντελό που λαμβάνει χώρα σε πειράματα που αφορούν στη μέση διάρκεια ζωής.

Έστω ότι η παράμετρος σ εκφράζει την μέση διάρκεια ζωής και επιπλέον υποθέτουμε ότι η πιθανότητα αποτυχίας την χρονική στιγμή έναρξης του πειράματος είναι μηδέν. Τότε η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την εκθετική κατανομή $\mathcal{E}(0, \sigma)$.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{x}{\sigma}}, \ x \geq 0, \ \sigma > 0$$

Έστω τώρα ότι η πιθανότητα αποτυχίας, έως ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα μ, είναι μηδέν. Στην συνέχεια, ο χρόνος αποτυχίας ακολουθεί την διπαραμετρική εκθετική κατανομή $\mathcal{E}(\mu, \sigma)$,

$$f(x) = \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)}{\sigma}},\ x \geq \mu,\ \sigma > 0,$$

όπου μ, σ είναι οι παράμετροι θέσης και κλίμακας αντίστοιχα.

Αντικείμενο της μεταπτυχιακής διατριβής είναι η μελέτη του προβλήματος εκτίμησης των παραμέτρων του μοντέλου της διπαραμετρικής εκθετικής κατανομής όταν η παράμετρος θέσης φράσσεται από πάνω. Διαφορετικές μέθοδοι εκτίμησης παρατίθενται και εφαρμόζονται στο πρόβλημα των δύο δειγμάτων. Στο Κεφάλαιο 1, περιέχονται κάποιοι ορισμοί και παρουσιάζονται, για λόγους πληρότητας, ορισμένα σχετικά αποτελέσματα.

Στο Κεφάλαιο 2, παρατίθεται το μοντέλο της διπαραμετρικής εκθετικής κατανομής, παρουσιάζονται οι Α.Ο.Ε.Δ και Ε.Μ.Π. των παραμέτρων μ και σ. Στην συνέχεια παραθέτουμε τους βέλτιστους αναλλοίωτους εκτιμητές (Best Affine Equivariant) των μ και σ, αρχικά ως προς το Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα (ΜΤΣ) και στη συνέχεια ως προς την ασύμμετρη συνάρτηση ζημίας Linex.

Στο Κεφάλαιο 3, παρουσιάζουμε εκτιμητές των μ και σ, ως προς το Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα (ΜΤΣ), όταν η παράμετρος θέσης μ φράσσεται απο μια γνωστή σταθερα ($\mu \leq c$) και σύγκρινουμε τους εκτιμητές αυτούς με τους βέλτιστους αναλλοίωτους εκτιμητές (Best Affine Equivariant) στην περίπτωση που δεν υπάρχει περιορισμός. Στην συνέχεια συγκρίνουμε τους εκτιμητές αυτούς σε σχέση με το κριτήριο Pitman και καταλήγουμε σε ενδιαφέρουσες παρατηρήσεις. Ακολουθεί εφαρμογή της θεωρίας που αναπτύχθηκε για δύο ανεξάρτητα δείγματα απο εκθετική κατανομή.

Τέλος, στο Κεφάλαιο 4, αρχικά παρουσιάζουμε εκτιμητές των μ και σ, ως προς την συνάρτηση ζημίας Linex, όταν $\mu \leq c$ και σύγκρινουμε τους εκτιμητές αυτούς με τους βέλτιστους αναλλοίωτους εκτιμητές (Best Affine Equivariant) στην περίπτωση που δεν υπάρχει περιορισμός. Η θεωρία που αναπτύχθηκε εφαρμόζεται σε δύο ανεξάρτητα δείγματα προερχόμενα απο εκθετική κατανομή.

Χ. Ραφτοπούλου, Πάτρα 2013.

Κεφάλαιο 1

Βασικοί Ορισμοί και Θεωρήματα

Σε αυτό το κεφάλαιο θα αναφερθούμε σε ορισμένους βασικούς ορισμούς και Θεωρήματα της Μαθηματικής Στατιστικής χωρίς τις αποδείξεις τους, οι οποίες εμπεριέχονται σε βιβλία Μαθηματικής Στατιστικής.

1.1 Εισαγωγή-Αμερόληπτοι Εκτιμητές

Έστω τυχαίο δείγμα $\underset{\sim}{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ που αποτελείται από ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές $X_i \ \ , i = 1, 2, ..., n$, με από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x}; \theta)$ που εξαρτάται από μια άγνωστη αριθμητική παράμετρο ϑ ,η οποία ανήκει σε κάποιο σύνολο Θ. Τότε το ϑ λέγεται άγνωστη παράμετρος και το Θ καλείται παραμετρικός χώρος. Δύο από τα πιο συχνά εμφανιζόμενα είδη παραμέτρων είναι η παράμετρος θέσης (location parameter) και κλίμακος (scale parameter) . Σκοπός μας είναι να εκτιμήσουμε μια συνάρτηση του ϑ ,έστω $g(\bullet) : \Theta \to \Re^k$,με $k \geq 1$ η οποία ονομάζεται παραμετρική συνάρτηση. Ο προσδιορισμός των παραμέτρων μας παρέχει πλήρη γνώση για τον τύπο της συνάρτησης για αυτό και αποτελεί έναν από τους βασικούς στόχους μας κατά την εκτέλεση μιας στατιστικής μελέτης.

Ορισμός 1.1.1. *Μια συνάρτηση του δείγματος με πραγματικές τιμές ή με τιμές που δεν περιέχουν την άγνωστη παράμετρο θ καλείται στατιστική συνάρτηση.*

Ορισμός 1.1.2. *Μια στατιστική συνάρτηση* $\delta(\underset{\sim}{X})$ *που χρησιμοποιείται για την εκτίμηση της τιμής της άγνωστης παραμέτρου* θ *ή γενικότερα για την εκτίμηση της παραμετρικής συνάρτησης* $g(\theta)$ *,όπου* $g(\bullet) : \Theta \to \Re^k$ *,με* $k \geq 1$ *αναφέρεται σαν εκτιμητής του* θ.

Ορισμός 1.1.3. *Αν η τυχαία μεταβλητή* X *είναι απολύτως συνεχής και έχει πυκνότητα πιθανότητας της μορφής* $,f(x-\mu)$ *,τότε η παράμετρος* μ *καλείται παράμετρος θέσης. Η τιμή της καθορίζει την μετατόπιση της κατανομής.*

Ορισμός 1.1.4. *Αν η τυχαία μεταβλητή* X *είναι απολύτως συνεχής και έχει πυκνότητα πιθανότητας της μορφής,* $\frac{1}{\sigma}f\left(\frac{x}{\sigma}\right)$ *με* $\sigma > 0$, *τότε η παράμετρος* σ *καλείται παράμετρος κλίμακος. Η τιμή της καθορίζει την* ≪*κλίμακα* ≫ *της κατανομής δηλαδή την εξάπλωση των ουρών της κατανομής .*

Ορισμός 1.1.5. *Ο εκτιμητής* $T(\underset{\sim}{X})$ *ονομάζεται αμερόληπτος εκτιμητής της παραμετρικής συνάρτησης* $g(\theta)$ *αν και μόνο αν ,*

$$E_\Theta(T(\underset{\sim}{X})) = g(\theta)\,,\ \forall\ \theta \in \Theta.$$

Ένα απο τα ποιο συνηθισμενα κριτήρια επιλογής εκτιμητών που λαμβάνεται είναι το Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα.

Ορισμός 1.1.6. *Το Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα (ΜΤΣ) του εκτιμητή* $T(\underset{\sim}{X})$ *ορίζεται από την ακόλουθη σχέση ,*

$$MT\Sigma(T,\theta) = E_\Theta(T(\underset{\sim}{X}) - g(\theta))^2$$

Πρόταση 1.1.1. *Για το Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα του εκτιμητή* $T(\underset{\sim}{X})$ *ισχύει η ακόλουθη σχέση,*

$$MT\Sigma(T,\theta) = Var(T(\underset{\sim}{X})) + (E_\Theta(T(\underset{\sim}{X})) - g(\theta))^2$$

όπου $E_\Theta(T(\underset{\sim}{X})) - g(\theta)$ *καλείται μεροληψία (bias) του εκτιμητή* $T(\underset{\sim}{X})$.

Παρατήρηση 1.1.1. *Αν* $T(\underset{\sim}{X})$ *είναι αμερόληπτος εκτιμητής της παραμετρικής συνάρτησης* $g(\theta)$, *δηλαδή* $bias(T(\underset{\sim}{X})) = 0$ *τότε θα ισχύει ,*

$$MT\Sigma\,(T,\theta) = Var(T(\underset{\sim}{X}))$$

Ορισμός 1.1.7. *Ο εκτιμητής T_1 ονομάζεται καλύτερος από τον T_2 (ως προς το Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα) για την εκτίμηση της $g(\theta)$ όταν θα ισχύει η σχέση,*

$$MT\Sigma\left(T_1,\theta\right)\leq MT\Sigma\left(T_2,\theta\right),\forall\theta\in\Theta$$

και επιπλέον,

$$MT\Sigma\left(T_1,\theta_0\right)<MT\Sigma\left(T_2,\theta_0\right),\ \text{για κάποιο}\ \theta_0\in\Theta.$$

Παρατήρηση 1.1.2. *Αν ο εκτιμητής T_1 είναι καλύτερος από τον εκτιμητή T_2 (ως προς το Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα) για την $g(\theta)$, τότε ο εκτιμητής T_2 λέγεται μη αποδεκτός για την εκτίμηση της παραμετρικής συνάρτησης $g(\theta)$.*

Ορισμός 1.1.8. *Ο εκτιμητής $T(\underset{\sim}{X})$ ονομάζεται βέλτιστος εκτιμητής της $g(\theta)$ ως προς το Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα αν είναι καλύτερος σε σύγκριση με οποιονδήποτε άλλον εκτιμητή της παραμετρικής συνάρτησης $g(\theta)$.*

Πρόταση 1.1.2. *Έστω $X_1,X_2,...,X_n$ τυχαίο δείγμα από μια κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_1\left(x;\theta\right)$ με $\theta\in\Theta$ και $g\left(\theta\right)=\mu$,η μέση τιμή της κατανομής, τότε ο δειγματικός μέσος $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ αποτελεί αμερόληπτο εκτιμητή της μέσης τιμής μ.*

Πρόταση 1.1.3. *Έστω $X_1,X_2,...,X_n$ τυχαίο δείγμα από μια κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_1\left(x;\theta\right)$ με $\theta\in\Theta$ και $g\left(\theta\right)=\sigma^2$,η διασπορά της κατανομής τότε η δειγματική διασπορά $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$ αποτελεί αμερόληπτο εκτιμητή της διασποράς σ^2.*

1.2 Συνάρτηση Ζημίας (Loss Function)- Συνάρτηση Κινδύνου (Risk Function)

Γενικά η εκτίμηση της παραμετρικής συνάρτησης $g\left(\theta\right)$ απο μια τιμή d μετριέται από την συνάρτηση ζημίας (Loss Function) $L\left(d,\theta\right)$ για την οποία ισχύουν,

$$L\left(d,\theta\right)\geq 0,\quad \text{για όλα τα}\quad \theta\ ,d$$

και

$$L\left[g\left(\theta\right),\theta\right]=0,\ \text{για όλα τα } \theta$$

έτσι ώστε η ζημιά να είναι μηδέν, όταν η παράμετρος εκτιμάται απο τη σωστή τιμή.

Ορισμός 1.2.1. *Η ακρίβεια ή η μη ακρίβεια ενός εκτιμητή δ, μετριέται απο την συνάρτηση κινδύνου (Risk Function) που ορίζεται ως*

$$R\left(\delta,\theta\right)=E_{\theta}\{L\left[\delta(X),\theta\right]\}$$

Το Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα είναι μια συνάρτηση κινδύνου. Συνεπώς μπορούμε να επαναδιατυπώσουμε τους παραπάνω ορισμούς, αντικαθιστώντας το Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα με οποιαδήποτε συνάρτηση κινδύνου (Rick Function) $R\left(\delta,\theta\right)$.

Παρατήρηση 1.2.1. *Υπάρχουν διάφορες συναρτήσεις ζημίας (Loss Function), οι οποίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν ανάλογα με το περιεχόμενο κάθε προβλήματος. Ορισμένες απο αυτές είναι οι παρακάτω:*

• *Τετραγωνική συνάρτηση ζημίας (squared error loss)*
$L\left(d,\theta\right)=\left(d-\theta\right)^{2}$

• *Συνάρτηση ζημίας απολύτου σφάλματος (Absolute error loss)*
$L\left(d,\theta\right)=|d-\theta|$

• *Συνάρτηση ζημίας Linex (LINear EXponential)*
$L\left(d,\theta\right)=b(e^{\alpha(d-\theta)}-\alpha(d-\theta)-1)$ *όπου* $\alpha\neq 0,\ b>0$ *σταθερές.*

1.3 Ασύμμετρη συνάρτηση ζημίας Linex

Σε ορισμένα προβλήματα εκτιμητικής η χρήση συμμετρικής συνάρτησης ζημίας μπορεί να είναι ακατάλληλη. Υπερεκτίμηση της παραμέτρου μπορεί να οδηγήσει σε περισσότερο ή λιγότερο σοβαρές συνέπειες απο την υποεκτίμηση ή το αντίστροφο. Ο Varian (1975) εισήγαγε μια πολύ χρήσιμη ασύμμετρη συνάρτηση ζημίας, την Linex (LINear EXponential). Πρόκειται για μια κυρτή συνάρτηση η οποία αυξάνεται περίπου εκθετικά απο την μία πλευρά του μηδέν και περίπου γραμμικά απο την άλλη. Έστω

$\Delta = d - \theta$ είναι το σφάλμα εκτίμησης, όπου d ο εκτιμητής του θ. Τότε η συνάρτηση ζημίας Linex ορίζεται ως εξής:

$$L(\Delta) = b(e^{\alpha\Delta} - \alpha\Delta - 1)$$

όπου $\alpha \neq 0,\ b > 0$

Η παράμετρος α είναι αυτή που καθορίζει το σχήμα της συνάρτησης.

Για α=1 η συνάρτηση είναι αρκετά ασύμμετρη με την υπερεκτίμηση να είναι πιο δαπανηρή απο την υποεκτίμηση. Από την άλλη για α=-1 η συνάρτηση παραμένει έντονα ασύμμετρη με την διαφοροποίηση ότι η υποεκτίμηση είναι πιο δαπανηρή απο την υπερεκτίμηση. Όταν $\alpha < 0$ και $\Delta < 0$ η συνάρτηση, αυξάνεται σχεδόν εκθετικά ενώ αν $\Delta > 0$ αυξάνεται σχεδόν γραμμικά. Στην περίπτωση που $|\alpha|$ λαμβάνει πολύ μικρές τιμές η συνάρτηση ζημίας είναι σχεδόν συμμετρική και δεν διαφέρει πολύ απο την τετραγωνική συνάρτηση ζημίας. Ωστόσο όταν η παράμετρος $|\alpha|$ λαμβάνει αξιόλογες τιμές η βέλτιστη σημειακή εκτίμηση θα διαφέρει αρκετά από την εκτίμηση που θα λάβουμε αν χρησιμοποιήσουμε ως συνάρτησης ζημίας το τετραγωνικό σφάλμα.

1.4 ΑΟΕΔ Εκτιμητές

Εξαιτίας της δυσκολίας προσδιορισμού του βέλτιστου εκτιμητή στην κλάση όλων των εκτιμητών, περιοριζόμαστε αρχικά, σε αυτή των αμερόληπτων εκτιμητών.

Ορισμός 1.4.1. *Η στατιστική συνάρτηση $T(\underset{\sim}{X})$ θα καλείται Αμερόληπτος Εκτιμητής Ελάχιστης Διασποράς (ΑΟΕΔ) για την $g(\theta)$ εάν ,*

Α. $T(\underset{\sim}{X})$ είναι αμερόληπτος ,δηλαδή $E_\Theta T(\underset{\sim}{X}) = g(\theta), \forall\theta \in \Theta$

Β. $Var_\Theta T(\underset{\sim}{X}) \leq Var_\Theta(T_1), \forall\theta \in \Theta$ και κάθε άλλο αμερόληπτο εκτιμητή του $g\,(\theta)$

Από τον παραπάνω ορισμό ,γίνεται αντιληπτό ότι ο προσδιορισμός ΑΟΕΔ εκτιμητών έγκειται στο να ελαττώσουμε όσον το δυνατόν τη διασπορά μίας στατιστικής συνάρτησης σε σχέση με την προς εκτίμηση ποσότητα, δηλαδή είναι επιθυμητό να βρούμε ένα κάτω φράγμα για τη διασπορά των αμερόληπτων εκτιμητών αυτής της ποσότητας. Αυτό το κάτω φράγμα μας προσφέρει το Θεώρημα Cramer-Rao το οποίο ισχύει όταν επαληθεύονται οι παρακάτω συνθήκες,

I1. Ο παραμετρικός χώρος Θ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\Re$

I2. Το συνόλο $S = \{\underset{\sim}{x}; f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x};\vartheta) > 0$ δεν εξαρτάται από το ϑ .

I3. $\int_{\Re^n} \frac{\partial}{\partial\vartheta} f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x};\theta)d\underset{\sim}{x} = \frac{\partial}{\partial\vartheta}\int_{\Re^n} f(\underset{\sim}{x};\theta)d\underset{\sim}{x}$

I4. $\int_{\Re^n} T(\underset{\sim}{x})\frac{\partial}{\partial\vartheta} f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x};\theta)d\underset{\sim}{x} = \frac{\partial}{\partial\vartheta}\int_{\Re^n} T(\underset{\sim}{x})f(\underset{\sim}{x};\theta)d\underset{\sim}{x}, \quad \forall\theta\in\Theta, T(\underset{\sim}{x})$

I5. Αν $I(\theta) = E_\theta(\frac{\partial}{\partial\theta} ln f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x};\theta))^2$ τότε $0 < I(\theta) < \infty, \forall\theta\in\Theta$

Η ποσότητα $I(\theta)$ονομάζεται αριθμός ή μέτρο πληροφορίας Fisher.

Θεώρημα 1.4.1. *(Θεώρημα Cramer-Rao) Έστω ένα δείγμα $X_1, X_2, ..., X_n$ με από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x};\theta)$ για κάθε $\theta\in\Theta$.Εάν $T(\underset{\sim}{X})$ στατιστική συνάρτηση με $E_\theta(T(\underset{\sim}{X})) = g(\theta)$ και ισχύουν οι παραπάνω συνθήκες $I1 - I5$ τότε η διασπορά του εκτιμητή θα παρουσιάζει το ακόλουθο κάτω φράγμα,*

$$Var(T(\underset{\sim}{X})) \geq \frac{(g'(\theta))^2}{I(\theta)}, \quad \forall\theta\in\Theta.$$

Το κάτω φράγμα για την διασπορά των αμερόληπτων εκτιμητών του $g(\theta)$ ονομάζεται Cramer-Rao Κάτω Φράγμα (C.R.-Κ.Φ.), ενώ για τον υπολογισμό του αριθμού πληροφορίας Fisher χρησιμοποιούμε συνήθως κάποιες βοηθητικές ιδιότητες,

Α. $I(\theta) = -E_\theta(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} ln f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x};\theta))$.

Β. Αν το δείγμα $X_1, X_2, \ldots, X_n$ αποτελείται από n ανεξάρτητες και τυχαίες μεταβλητές όπου η κάθε μία από τις X_i ακολουθεί μια κατανομή με πυκνότητα πιθανότητας $f_{X_i}(x_i;\theta)$ με $i = 1, 2, ..., n$ τότε

$$I(\theta) = \sum_{i=1}^{n} I_i(\theta)$$

όπου $I_i(\theta) = E_\theta\left(\frac{\partial}{\partial\theta} ln f_{X_i}(x_i;\theta)\right)^2$

Γ. Αν το δείγμα $X_1, X_2, ..., X_n$ είναι τυχαίο και με $I_I(\theta)$ συμβολίσω τον αριθμό πληροφορίας του Fisher για κάθε μια από αυτές τότε ,

$$I(\theta) = n \cdot I_I(\theta)$$

Η δυσκολία του Θεωρήματος Cramer-Rao έγκειται στην επαλήθευση των συνθηκών I1-I5, η οποία άρεται όταν η οικογένεια του τυχαίου διανύσματος $\underset{\sim}{X}$, ανήκει στην **Μονοπαραμετρική Εκθετική Οικογένεια Κατανομών (ΜΕΟΚ)**.

Ορισμός 1.4.2. *Η οικογένεια κατανομών* $\{f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x};\theta), \theta \in \Theta\}$ *ανήκει στη* **Μονοπαραμετρική Εκθετική Οικογένεια Κατανομών (ΜΕΟΚ)** *αν:*

1. Το σύνολο $S = \{x; f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x};\theta) > 0\}$ *δεν εξαρτάται απο το* Θ.

2.$f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x};\theta) = e^{A(\theta)+B(\underset{\sim}{x})+c(\theta)D(\underset{\sim}{x})} \quad \forall \underset{\sim}{x} \in \ S, \quad \forall\theta \in \Theta$

Θεώρημα 1.4.2. *Αν το δείγμα* $\underset{\sim}{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)$ *έχει κατανομή με πυκνότητα πιθανότητας* $f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x};\theta)$ *η οποία ανήκει στην ΜΕΟΚ και η* $c(\theta)$ *(που εμφανίζεται στον τύπο της* $f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x};\theta)$*) έχει συνεχή και μη μηδενική παράγωγο* $\forall\theta \in \Theta$*, τότε οι συνθήκες (I2), (I3) και (I4) του Θεωρήματος Cramer-Rao ισχύουν και η (I4) ισχύει για κάθε στατιστική συνάρτηση* $T = T(\underset{\sim}{X})$.

Η παρακάτω πρόταση δίνει ένα τρόπο εύρεσης του ΑΟΕΔ εκτιμητή, για μια παραμετρική συνάρτηση $g(\theta)$ και γραμμικούς συνδιασμούς αυτής.

Πρόταση 1.4.1. *Αν το δείγμα* $\underset{\sim}{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)$ *έχει κατανομή με πυκνότητα πιθανότητας* $f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x}\ \theta)$ *η οποία ανήκει στην ΜΕΟΚ* ($f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x};\theta) = e^{A(\theta)+B(\underset{\sim}{x})+c(\theta)D(\underset{\sim}{x})}$) *και ισχύουν:*

α) Το σύνολο Θ *είναι ανοιχτό υποσύνολο του* $\Re$

β) Το $c(\theta)$ *έχει συνεχή και μη μηδενική παράγωγο* $\forall\theta \in \Theta$

γ) $0 < I(\theta) < \infty$

Τότε:

1. Η στατιστική συνάρτηση $D(\underset{\sim}{X})$ *είναι ΑΟΕΔ εκτιμητής της* $g(\theta) = E_\theta(D(\underset{\sim}{X}))$

2. Η στατιστική συνάρτηση $c_1 D(\underset{\sim}{X}) + c_2$, με c_1, c_2 σταθερές και $c_1 \neq 0$ είναι Α-ΟΕΔ εκτιμητής της $c_1 g(\theta) + c_2$

Ισχύει επίσης η παρακάτω πρόταση:

Πρόταση 1.4.2. *Έστω ότι ισχύουν οι συνθήκες (Ι1), (Ι2), (Ι3) και (Ι5) του Θεωρήματος Cramer-Rao και η (Ι4) ισχύει για κάποια στατιστική συνάρτηση $T(\underset{\sim}{X})$, αμερόληπτο εκτιμητή του $g(\theta)$. Έστω ακόμα, η $g(\theta)$ να μην είναι σταθερά (σαν συνάρτηση του θ) και η $T(\underset{\sim}{X})$ επιτυγχάνει το C-R.- Κ.Φ., δηλαδή*

$$Var_\theta(T(\underset{\sim}{X})) = \frac{(g'(\theta))^2}{I(\theta)}, \quad \forall \theta \in \Theta$$

τότε, $f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x}; \theta) = e^{A(\theta) + B(\underset{\sim}{x}) + c(\theta) T(\underset{\sim}{x})}$ $\forall \underset{\sim}{x} \in S$, $\forall \theta \in \Theta$, δηλαδή η κατανομή του δείγματος $\underset{\sim}{X}$ ανήκει στην ΜΕΟΚ.

Παρατήρηση 1.4.1. *Οι Προτάσεις 1.4.1 και 1.4.2. συνεπάγονται το γεγονός ότι η εύρεση του εκτιμητή για κάποια παραμετρική συνάρτηση $g(\theta)$ είναι δυνατή με τη χρήση του Θεωρήματος Cramer-Rao αν και μόνο αν η κατανομή του δείγματος $\underset{\sim}{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)$ ανήκει στη ΜΕΟΚ και η $g(\theta)$ έχει μια συγκεκριμένη μορφή $g(\theta) = E_\theta(D(\underset{\sim}{X}))$ ή κάποιος γραμμικός μετασχηματισμός της $E_\theta(D(\underset{\sim}{X}))$*

Απο την παραπάνω παρατήρηση γίνεται αντιληπτό ότι η μέθοδος εύρεσης ΑΟΕΔ εκτιμητή με την χρήση του Θεωρήματος Cramer-Rao μας περιορίζει τόσο ως προς την οικογένεια του δείγματος, όσο και ως προς την μορφή των παραμετρικών συναρτήσεων για τις οποίες βρίσκουμε ΑΟΕΔ εκτιμητές, συνεπώς απαιτείται μια μέθοδος διαφορετική απο την προηγούμενη η οποία να μην παρουσιάζει τέτοιου είδους προβλήματα. Αρχικά εισάγουμε τις έννοιες της επάρκειας και της πληρότητας προς αυτή την κατεύθυνση.

1.5 Επάρκεια

Ορισμός 1.5.1. *Έστω το δείγμα* $\underset{\sim}{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)$ *έχει κατανομή με πυκνότητα πιθανότητας* $f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x};\theta)$, $\theta \in \Theta$, *τότε η στατιστική συνάρτηση* $T = T(\underset{\sim}{X})$ *θα καλείται* **επαρκής** *αν η δεσμευμένη κατανομή του* $\underset{\sim}{X}$ *δοθέντος ότι* $T = t$ *δεν εξαρτάται απο το* ϑ, *για κάθε δυνατή τιμή* t *του* T *για την οποία μπορεί να οριστεί η δεσμευμένη κατανομή.*

Ενας τρόπος εύρεσης μιας επαρκούς στατιστικής συνάρτησης, εκτός του ορισμού, δίνεται από την παρακάτω πρόταση , η οποία αναφέρεται και ως παραγοντικό κριτήριο των **Neyman-Fisher** .

Θεώρημα 1.5.1. *(Παραγοντικό Κριτήριο* **Neyman-Fisher***). Η στατιστική συνάρτηση* $T = T(\underset{\sim}{X})$ *είναι επαρκής αν και μόνο αν*

$$f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x};\theta) = q(T(\underset{\sim}{X});\theta)h(\underset{\sim}{x}) \quad \forall \underset{\sim}{x} \quad \text{και} \quad \theta \in \Theta$$

όπου q *και* h *είναι συναρτήσεις.*

Παρατήρηση 1.5.1. *Ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες για τις επαρκείς στατιστικές συναρτήσεις:*

1) Το δείγμα $\underset{\sim}{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)$ *είναι τετριμμένα επαρκής στατιστική συνάρτηση.*

2) Η στατιστική συνάρτηση $T(\underset{\sim}{X}) = (X_{(1)}, X_{(2)}, ..., X_{(n)})$, *είναι επαρκής, όπου* $X_{(i)}, i = 1, 2, ..., n$ *είναι οι διατεταγμένες παρατηρήσεις.*

3) Έστω $T_1 = T_1(\underset{\sim}{X})$ *έιναι επαρκής στατιστική συνάρτηση και* $T_2 = K(T_1(\underset{\sim}{X}))$, *όπου* $K(.)$ *είναι* $1-1$ *συνάρτηση, τότε η* $T_2(\underset{\sim}{X})$ *έιναι επαρκής.*

Συνήθως όταν μιλάμε για επαρκή στατιστική συνάρτηση αναφερόμαστε στην ελάχιστη επαρκή.

Ορισμός 1.5.2. Ελάχιστη επαρκής στατιστική συνάρτηση *είναι μια επαρκής στατιστική συνάρτηση, η οποία προέρχεται απο την μεγαλύτερη δυνατή ' σύμπτηξη' (δηλαδή έχει την μικρότερη δυνατή διάσταση).*

Παρατήρηση 1.5.2. *Σχεδόν πάντα, η διάσταση της παραμετρικής συνάρτησης* $g(\theta)$ *συμπίπτει με την διάσταση της ελάχιστης επαρκούς στατιστικής συνάρτησης.*

Θεώρημα 1.5.2. (Rao-Blackwell) *Έστω* $T = T(\underset{\sim}{X})$ *μια επαρκής στατιστική συνάρτηση και* $S = S(\underset{\sim}{X})$ *είναι εκτιμητής της παραμετρικής συνάρτησης* $g(\theta)$. *Θέτουμε* $S^* = E_\theta(S|T)$. *Τότε*

1) Η S^* *είναι στατιστική συνάρτηση.*

2) $E_\theta(S^*) = E_\theta(S), \quad \forall \theta \in \Theta$, *έτσι αν* S *είναι αμερόληπτος εκτιμητής για την* $g(\theta)$, *τότε* S^* *είναι αμερόληπτος εκτιμητής για την* $g(\theta)$

3) $Var_\theta(S^*) \leq Var_\theta(S), \quad \forall \theta \in \Theta$ *και ισχύει αυστηρή ανισότητα, εκτός αν* S *είναι συνάρτηση της στατιστικής συνάρτησης* T, *οπότε* $S^* = S$

4) $MT\Sigma(S^*, \theta) \leq MT\Sigma(S, \theta), \quad \forall \theta \in \Theta$ *και ισχύει αυστηρή ανισότητα, εκτός αν* S *είναι συνάρτηση της στατιστικής συνάρτησης* T, *οπότε* $S^* = S$

Επομένως, αν S είναι ένας εκτιμητής της $g(\theta)$ ο οποίος δεν είναι συνάρτηση της επαρκούς στατιστικής συνάρτησης T, τότε ο S είναι μη αποδεκτός και βελτιώνεται από τον $S^* = E_\theta(S|T)$ που ονομάζεται βελτίωση του S κατα **Rao-Blackwell** ή **Rao-Blackwell** βελτίωση του S.

Παρατήρηση 1.5.3. *Έστω* T_1, T_2 *είναι επαρκείς στατιστικές συναρτήσεις και* S *είναι αμερόληπτος εκτιμητής της* $g(\theta)$. *Τότε* $S_1^* = E_\theta(S|T_1)$ *είναι η Rao-Blackwell βελτίωση του* S *μέσω της* T_1 *και* $S_2^* = E_\theta(S|T_2)$ *είναι η Rao-Blackwell βελτίωση του* S *μέσω της* T_2. *Όμως μέσω του Θεωρήματος 1.5.2. δεν μπορούμε να συγκρίνουμε αυτές τις δύο βελτιώσεις. Η έννοια της πληρότητας θα βοηθήσει σε αυτή την σύγκριση.*

1.6 Πληρότητα

Ορισμός 1.6.1. *Η στατιστική συνάρτηση $T = T(\underset{\sim}{X})$ θα καλείται πλήρης αν για κάθε $\theta \in \Theta$ ισχύει η ακόλουθη σχέση ,*

$$E_\theta\left(\phi(T)\right) = 0 \Rightarrow \phi(t) = 0$$

για κάθε δυνατή τιμή t της T, δηλαδή $\phi(T) = 0$.

Θεώρημα 1.6.1. (Lehmann-Scheffe) *Έστω $T = T(\underset{\sim}{X})$ είναι επαρκής και πλήρης στατιστική συνάρτηση και S είναι ένας αμερόληπτος εκτιμητής του $g(\theta)$. Τότε $S^* = E_\theta(S|T)$ είναι μοναδικός ΑΟΕΔ εκτιμητής της $g(\theta)$.*

Άρα με την βοήθεια του Θεωρήματος $Lehmann-Scheffe$ μπορούμε να βρούμε ΑΟΕΔ εκτιμητή με την χρήση επαρκούς και πλήρους στατιστικής συνάρτησης, και μάλιστα αν υπάρχει αυτός ο ΑΟΕΔ εκτιμητής, είναι μοναδικός.

Πόρισμα 1.6.1. (Lehmann-Scheffe) *Έστω $T = T(\underset{\sim}{X})$ είναι επαρκής και πλήρης στατιστική συνάρτηση και S είναι ένας αμερόληπτος εκτιμητής της $g(\theta)$, ο οποίος είναι συνάρτηση της επαρκούς και πλήρους T. Τότε S είναι ο μοναδικός ΑΟΕΔ εκτιμητής της $g(\theta)$.*

Όπως καταλαβαίνουμε, σε αυτή την μεθοδολογία είναι σημαντική η εύρεση μιας επαρκούς και πλήρους στατιστικής συνάρτησης και μέσω του ορισμού δεν είναι πάντα εύκολο, αλλά αν η κατανομή του δείγματος $\underset{\sim}{X}$ ανήκει στην **Πολυπαραμετρική Εκθετική Οικογένεια Κατανομών (ΠΕΟΚ)** τα πράγματα απλοποιούνται.

Ορισμός 1.6.2. *Η οικογένεια κατανομών $\{f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x};\theta), \theta \in \Theta\}$ ανήκει στη* **Πολυπαραμετρική Εκθετική Οικογένεια Κατανομών (ΠΕΟΚ)** *διάστασης k αν:*
1. Το σύνολο $S = \{x; f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x};\theta) > 0\}$ δεν εξαρτάται απο το θ.

2. $f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x};\theta) = e^{A(\theta)+B(\underset{\sim}{x})+\sum_{j=1}^{k} c_j D_j(\underset{\sim}{x})}$ $\forall \underset{\sim}{x} \in S, \ \ \forall \theta \in \Theta$.

Παρατήρηση 1.6.1. *Η ΠΕΟΚ διάστασης 1 συμπίπτει με την ΜΕΟΚ.*

Πρόταση 1.6.1. *Έστω ότι το δείγμα* $\underset{\sim}{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)$ *έχει κατανομή η οποία ανήκει στην ΠΕΟΚ διάστασης* k*, τότε ισχύουν τα εξής:*
1. Η στατιστική συνάρτηση $T(\underset{\sim}{X}) = (D_1(\underset{\sim}{X}), D_2(\underset{\sim}{X}), ..., D_k(\underset{\sim}{X}))$ *είναι επαρκής.*

2. Αν το πεδίο τιμών του διανύσματος $(c_1(\theta), c_2(\theta), ..., c_k(\theta))$ *περιέχει ανοιχτό υποσύνολο του* $\Re^k$*, τότε* $T(\underset{\sim}{X})$ *είναι πλήρης.*

Το παρακάτω θεώρημα, γνωστό και ως Θεώρημα Basu, πιστοποιεί και άλλη μια χρήση της επάρκειας και της πληρότητας, αυτής της απόδειξης ανεξαρτησίας μεταξύ στατιστικών συναρτήσεων (δηλαδή τυχαίων μεταβλητών).

Θεώρημα 1.6.2. (Basu) *Έστω* $T(\underset{\sim}{X})$ *επαρκής και πλήρης στατιστική συνάρτηση και* $S(\underset{\sim}{X})$ *είναι μια άλλη στατιστική συνάρτηση, η κατανομή της οποίας δεν εξαρτάται απο την άγνωστη παράμετρο* θ*, τότε οι στατιστικές συναρτήσεις* $T(\underset{\sim}{X})$ *και* $S(\underset{\sim}{X})$ *είναι ανεξάρτητες.*

1.7 Συνέπεια

Ορισμός 1.7.1. *Έστω* $T_n = T(X_1, X_2, ..., X_n)$*,* $n = 1, 2, ...$ *ένας εκτιμητής της παραμετρικής συνάρτησης* $g(\theta)$*. Τότε ο εκτιμητής* T_n *ονομάζεται συνεπής αν:*

$$\lim_{n\to\infty} P(|T_n - g(\theta)| > \varepsilon) = 0, \quad \forall\varepsilon > 0.$$

Η παρακάτω πρόταση δίνει ικανές συνθήκες έτσι ώστε ένας εκτιμητής για την $g(\theta)$ να είναι συνεπής.

Πρόταση 1.7.1. *Έστω ότι ο εκτιμητής* T_n *ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:*
1. $Var_\theta T_n \to 0, n \to \infty$

2. $b(T_n, \theta) = E_\theta T_n - g(\theta) \to 0, n \to \infty$

Τότε ο T_n *είναι συνεπής εκτιμητής της παραμετρικής συνάρτησης* $g(\theta)$*.*

1.8 Εκτίμηση με την μέθοδο Μέγιστης Πιθανοφάνειας

Ορισμός 1.8.1. *Θεωρούμε το δείγμα* $\underset{\sim}{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)$ *με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας* $f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x};\theta)$ *τότε η συνάρτηση πιθανοφάνειας (ή απλά πιθανοφάνεια) του* θ *ορίζεται από τη σχέση ,*

$$L(\theta) = L(\theta|\underset{\sim}{x}) = f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x};\theta)$$

Ορισμός 1.8.2. *Ο εκτιμητής* $\widehat{\theta} = \widehat{\theta}(\underset{\sim}{x})$ *που ικανοποιεί τη σχέση ,*

$$L(\widehat{\theta}) = sup_{\theta\in\Theta}L(\theta)$$

ονομάζεται Εκτιμητής Μεγίστης Πιθανοφάνειας (Ε.Μ.Π.) του θ *.*

Παρατήρηση 1.8.1. *Από τον παραπάνω ορισμό φαίνεται ότι ο ΕΜΠ του* θ *είναι εκείνη η τιμή του* θ *η οποία μεγιστοποιεί τη συνάρτηση πιθανοφάνειας .Επειδή η συνάρτηση* lnx *είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση του* x *,η τιμή του* θ *που μεγιστοποιεί την* $L(\theta)$ *είναι η ίδια με αυτήν που μεγιστοποιεί την* $lnL(\theta)$*. Συνήθως ακολουθούμε αυτήν την διαδικασία όταν το μέγιστο μπορεί να βρεθεί με παραγώγιση.*

Παρατήρηση 1.8.2. *1. Η μέθοδος Μέγιστης Πιθανοφάνειας ισχύει και για το διάνυσμα* $\underset{\sim}{\theta} = (\theta_1, \theta_2, ..., \theta_k)$
2. Είναι δυνατόν ο εκτιμητής $\widehat{\theta}$ *να μην μπορεί να βρεθεί σε αναλυτική μορφή, τότε η τιμή του* θ *για την οποία επιτυγχάνεται η μεγιστοποίηση της* $L(\theta)$ *βρίσκεται με μεθόδους αριθμητικής ανάλυσης.*
3. Ορισμένες φορές υπάρχουν ≪παθολογικές καταστάσεις≫ με την έννοια ότι είτε δεν υπάρχει τιμή του θ *η οποία να μεγιστοποιεί τη συνάρτηση πιθανοφάνειας, είτε υπάρχουν περισσότερα μέγιστα για την* $L(\theta)$ *και συνεπώς περισσότεροι του ενός Ε.Μ.Π.*

Παρατήρηση 1.8.3. *Σε αυτό το σημείο θα αναφέρουμε ορισμένες ιδιότητες των Ε.Μ.Π.*
1. Απο τον ορισμό 1.7.2. προκύπτει ότι ο Ε.Μ.Π. (αν υπάρχει) παίρνει τιμές μέσα στον παραμετρικό χώρο Θ*.*

2. Αν ο Ε.Μ.Π. του θ *είναι μοναδικός, τότε είναι συνάρτηση της επαρκούς στατιστικής συνάρτησης.*

3. Αν $\widehat{\theta} = \widehat{\theta}(\underset{\sim}{X})$ *είναι Ε.Μ.Π. του* ϑ, *τότε ο Ε.Μ.Π. της παραμετρικής συνάρτησης* $g(\theta)$ *είναι ο* $g(\widehat{\theta})$

4. Οι Ε.Μ.Π. είναι (υπό ορισμένες συνθήκες) συνεπείς εκτιμητές .

Παρατήρηση 1.8.4. *Οι Ε.Μ.Π. έχουν (υπο ορισμένες συνθήκες) κάποιες ασυμπτωτικές ιδιότητες. Αν* $X_1, X_2, ...X_n$ *ένα τυχαίο δείγμα απο κατανομή με πυκνότητα πιθανότητας* $f_1(x;\theta)$ *και συμβολίζουμε με* $\widehat{\theta}$ *τον Ε.Μ.Π. του* θ, *τότε*

1. Η κατανομή του $\widehat{\theta}$ *είναι κατά προσέγγιση* $(n \to \infty)$ *κανονική κατανομή, δηλαδή*

$$\widehat{\theta} \sim N\left(\theta, \frac{1}{I(\theta)}\right)$$

όπου $I(\theta)$ *ο αριθμός πληροφορίας του Fisher.*

2. Ο $\widehat{\theta}$ *είναι ασυμπτωτικά αποτελεσματικός εκτιμητής, αν κάποιος άλλος εκτιμητής του* θ, *έστω* s_n, *έχει κατά προσέγγιση κανονική κατανομή* $N(\theta^2, \sigma^2(\theta))$, *τότε* $\sigma^2_\theta(\theta) \geq \dfrac{1}{I(\theta)}$.

Οι παραπάνω ιδιότητες των Ε.Μ.Π. συνεπάγονται ότι $\widehat{\theta}$ είναι ασυμπτωτικά ΑΟΕΔ για το θ, δηλαδή αν υπάρχουν ΑΟΕΔ και Ε.Μ.Π. για κάποια $g(\theta)$, τότε αυτοί δεν διαφέρουν ασυμπτωτικά.

1.9 Εκτιμητές Bayes

Η εκτίμηση κατά Bayes γίνεται από μια διαφορετική σκοπιά σε σχέση με το τι έχουμε αντιμετωπίσει μέχρι τώρα, που αντιλαμβανόμασταν το θ απλά σαν ένα πραγματικό αριθμό χωρίς καμία ιδιότητα. Αν π.χ. θεωρήσουμε μια βιομηχανία η οποία παράγει ηλεκτρικούς λαμπτήρες, τότε ο χρόνος αυτών των λαμπτήρων ακολουθεί εκθετική κατανομή με άγνωστη παράμετρο θ που εκφράζει τον μέσο χρόνο ζωής των λαμπτήρων. Επομένως, δεν πρέπει να αναμένουμε μεγάλες τιμές για το θ αλλά ούτε και μικρές. Δηλαδή σε σχέση με το πρόβλημα και την εμπειρία που διαθέτουμε πρέπει να δώσου-

με διαφορετική βαρύτητα στις διάφορες τιμές του θ για να εκμεταλλευτούμε αυτή την εμπειρία ώστε να δώσουμε καλύτερη εκτίμηση για το θ.
Οπότε θεωρούμε το θ σαν μια τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα πιθανότητας $\pi(\theta), \theta \in \Theta$ και τις εξής ιδιότητες

$$(i)\pi(\theta) \geq 0, \forall\theta \in \Theta \text{ και } (ii) \int_{\Theta} \pi(\theta) d\theta = 1 \text{ ή } (\sum_{\theta} \pi(\theta) = 1).$$

Η συνάρτηση $\pi(\theta)$ ονομάζεται **εκ των προτέρων κατανομή** του θ και εκφράζει είτε την προσωπική μας αντίληψη για την πιθανή τιμή του θ είτε συνοψίζει κάποιες εκ των προτέρων (δηλαδή πριν την συλλογή των δεδομένων) πληροφορίες για το θ.
Θεωρούμε μια **συνάρτηση ζημίας** $L(t, \theta)$ και προσπαθούμε να ελαχιστοποιήσουμε την **συνάρτηση κινδύνου** $R(T, \theta) = E_{\theta}(L(T(\underset{\sim}{X}), \theta))$. Επειδή έχουμε θεωρήσει ότι το θ είναι μια τυχαία μεταβλητή, προφανώς, η συνάρτηση κινδύνου είναι και αυτή μια τυχαία μεταβλητή, επομένως είναι λογικό σε αυτή την περίπτωση, να προσπαθούμε να ελαχιστοποιήσουμε την μέση τιμή της, δηλαδή την συνάρτηση

$$BR(T) = E(R(T, \theta)) = \int_{\Theta} R(T, \theta) \pi(\theta) d\theta$$

η οποία ονομάζεται κίνδυνος Bayes του εκτιμητή T. Συνεπώς, βέλτιστος εκτιμητής είναι αυτός που ελαχιστοποιεί τον κίνδυνο Bayes, οπότε καταλήγουμε στον εξής ορισμό για τον εκτιμητή Bayes.

Ορισμός 1.9.1. *Ο εκτιμητής $T^* = T^*(\underset{\sim}{x})$ ονομάζεται εκτιμητής Bayes του $g(\theta)$, ως προς την συνάρτηση ζημίας $L(t, \theta)$ και την εκ των προτέρων κατανομη $\pi(\theta)$, αν*

$$\int_{\Theta} R(T^*, \theta) \pi(\theta) d\theta \leq \int_{\Theta} R(T, \theta) \pi(\theta) d\theta$$

για κάθε εκτιμητή $T = T(\underset{\sim}{X})$.

Συνήθως, για να υπολογίσουμε αυτό τον εκτιμητή Bayes πρέπει να βρούμε πρώτα την **εκ των υστέρων κατανομή** του θ

$$\pi(\theta|\underset{\sim}{x}) = \frac{f(\underset{\sim}{x};\theta)\pi(\theta)}{f(\underset{\sim}{x})}$$

όπου $f(\underset{\sim}{x}) = \int_\Theta f(\underset{\sim}{x};\theta)\pi(\theta)d\theta$. Η εκ των υστέρων κατανομή συνοψίζει την πληροφορία για το θ μετά την συλλογή των δεδομένων και έχει τις ιδιότητες της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας.

Παρατήρηση 1.9.1. *Είναι σημαντικό να τονίσουμε σε αυτό το σημείο ότι δεν μας ενδιαφέρει ιδιαίτερα η ακριβής συνάρτηση $\pi(\theta|\underset{\sim}{x})$, αλλά η μορφή της εκ των υστέρων κατανομής, για την οποία διαπιστώνουμε, συνήθως, ότι ακολουθεί κάποια απο τις γνωστές κατανομές.*

Στο επόμενο θεώρημα δίνεται ένας διαφορετικός τρόπος υπολογισμού του εκτιμητή Bayes .

Θεώρημα 1.9.1. *Για $\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{x}$ ο εκτιμητής Bayes $T^* = T^*(\underset{\sim}{X})$ της παραμετρικής συνάρτησης $g(\theta)$ ως προς την συνάρτηση ζημίας $L(t,\theta)$ και την εκ των προτέρων κατανομή $\pi(\theta)$ έχει τιμή $T^*(\underset{\sim}{x}) = t^*$, όπου t^* είναι η τιμή του t που ελαχιστοποιεί την συνάρτηση*

$$h^*(t) = \int_\Theta L(t,\theta)\pi(\theta|\underset{\sim}{x})d\theta.$$

Αν επιπλέον, η συνάρτηση ζημίας είναι το τετραγωνικό σφάλμα, δηλαδή $L(t,\theta) = (t - g(\theta))^2$ τότε η εύρεση του εκτιμητή Bayes, γίνεται πιο απλά όπως φαίνεται στο παρακάτω Θεώρημα.

Θεώρημα 1.9.2. *Έστω ότι η συνάρτηση ζημίας για την εκτίμηση του $g(\theta)$ είναι το τετραγωνικό σφάλμα $L(t,\theta) = (t - g(\theta))^2$. Τότε για $\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{x}$ ο εκτιμητής Bayes $T^* = T^*(\underset{\sim}{X})$ της παραμετρικής συνάρτησης $g(\theta)$ έχει τιμή $T^*(\underset{\sim}{x}) = E_\theta(g(Y))$, όπου Υ είναι μια τυχαία μεταβλητή με κατανομή την εκ των υστέρων $\pi(\theta|\underset{\sim}{x})$.*

Ορισμός 1.9.2. *Έστω ένα τυχαίο δείγμα $X_1, X_2, ..., X_n \sim N(\theta, \sigma^2)$ με $\Theta = (-\infty, +\infty)$. Αν $\pi(\theta) = c$ (δηλαδή δίνω ίση πιθανότητα για όλες τις τιμές του θ να συμβούν), τότε*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \pi(\theta)d\theta = \int_{-\infty}^{+\infty} cd\theta = +\infty$$

Η $\pi(\theta)$ ονομάζεται improper prior και έχει τις ακόλουθες ιδιότητες

$$(i)\pi(\theta) \geq 0, \forall\theta \in \Theta \text{ και } (ii) \int_{\Theta} \pi(\theta)d\theta = +\infty \text{ ή } (\sum_{\theta} \pi(\theta) = +\infty)$$

Οι εκτιμητές Bayes που βασίζονται στις improper priors (ή non-informative priors) ονομάζονται **γενικευμένοι εκτιμητές Bayes**.

1.10 Θεώρημα Μετασχηματισμού

Θεώρημα 1.10.1. *Έστω X μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πιθανότητας $f_X(x)$. Θέτουμε $S = \{x : f_X(x) > 0\}$.*
Υποθέτουμε ότι:
(i) $y = h(x)$ είναι ένας αμφιμονοσήμαντος (ένα προς ένα) μετασχηματισμός (μετρήσιμη συνάρτηση) που απεικονίζει το σύνολο S σε ένα σύνολο T των y.
(ii) Η αντίστροφη συνάρτηση $x = h^{-1}(y)$ είναι παραγωγίσιμη και η παράγωγος της συνεχής και μη μηδενική για κάθε $y \in T$.
Τότε η τυχαία μεταβλητή $Y = h(X)$ είναι συνεχής με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[h^{-1}(y)] \left| \frac{dh^{-1}(y)}{dy} \right| & , y \in T \\ 0 & , \text{αλλού} \end{cases}$$

όπου $|.|$ σημαίνει την απόλυτη τιμή της συνάρτησης.

1.11 Αναλλοίωτο Πρόβλημα Εκτίμησης

Θεωρούμε μια τυχαία μεταβλητή X η οποία παίρνει τιμές σε ένα δειγματικό χώρο $\mathcal{X}$, σύμφωνα με μια πυκνότητα πιθανότητας απο την οικογένεια κατανομών

$$\mathcal{P} = \{\mathcal{P}_\theta, \in \Theta\} \tag{1.1}$$

Ορίζουμε σαν $\mathcal{E}$ μια κλάση '1-1' μετασχηματισμών $g : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$.

Ορισμός 1.11.1. *(i) Έστω $g : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ είναι '1-1' μετασχηματισμός. Αν επίσης για κάθε $\theta \in \Theta$, η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής $X^{'} = g(X)$ είναι μέλος της κλάσης $\mathcal{P}$, έστω $\mathcal{P}_{\theta'}$, όπου $\theta^{'} \in \Theta$, τότε η οικογένεια κατανομών της σχέσης (1.1) ονομάζεται αναλλοίωτη ως προς τον μετασχηματισμο g.*
(ii) Αν η (i) ισχύει για κάθε μέλος της κλάσης των μετασχηματισμών $\mathcal{E}$, τότε η οικογένεια κατανομών $\mathcal{P}$ είναι αναλλοίωτη ως προς την $\mathcal{E}$.

Παρατήρηση 1.11.1. *Μια κλάση μετασχηματισμών, η οποία αφήνει μια οικογένεια κατανομών αναλλοίωτη μπορεί πάντα να θεωρηθεί ότι είναι μια ομάδα $G = G(\mathcal{E})$ η οποία γεννιέται απο την κλάση $\mathcal{E}$.*

Έστω $\{g(x), g \in G\}$ είναι μια ομάδα μετασχηματισμών του δειγματικού χώρου, η οποία αφήνει την οικογένεια κατανομών αναλλλοίωτη. Αν η τ.μ. $g(X)$ έχει κατανομή $P_{\theta'}$, τότε $\theta^{'} = \bar{g}(\theta)$ είναι μια συνάρτηση $\bar{g} : \Theta \to \Theta$ και ο μετασχηματισμός $\bar{g}(\theta)$ είναι '1-1', δεδομένου ότι οι κατανομές P_θ , $\theta \in \Theta$ είναι διαφορετικές. Επιπλέον οι μετασχηματισμοί $\bar{g}$ δημιουργούν μια ομάδα μετασχηματισμών, η οποία θα αναφέρεται ως $\bar{G}$. Απο τον ορισμό της $\bar{g}(\theta)$, έπεται ότι:

$$P_\theta(g(X) \in A) = P_{\bar{g}(\theta)}(g(X) \in A) \tag{1.2}$$

Θεωρούμε το γενικό πρόβλημα εκτίμησης μιας παραμετρικής συνάρτησης $\tau(\theta)$ στην οικογένεια κατανομών (1.1), η οποία θεωρείται αναλλοίωτη ως προς τους μετασχηματισμούς

$$X^{'} = g(X), \quad \theta^{'} = \bar{g}(\theta), \quad g \in G$$

Μια επιπλέον συνθήκη που απαιτείται είναι ότι για κάθε $\bar{g}$, η $\tau(\bar{g}(\theta))$ εξαρτάται απο το Θ, μόνο μέσω της $\tau(\theta)$, δηλαδή ισχύει ότι

$$\tau(\theta_1) = \tau(\theta_2) \Rightarrow \tau(\bar{g}(\theta_1)) = \tau(\bar{g}(\theta_2)). \tag{1.3}$$

Η κοινή τιμή του $\tau(\bar{g}(\theta))$, για όλα τα θ για τα οποία η $\tau(.)$ παίρνει την ίδια τιμή θα ορίζεται απο την σχέση

$$\tilde{g}(\tau(\theta)) = \tau(\bar{g}(\theta)). \tag{1.4}$$

Αν $\mathcal{H}$ είναι το σύνολο των τιμών της $\tau(\theta)$, $\theta \in \Theta$, οι μετασχηματισμοί $g : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ δημιουργούν μια ομάδα μετασχηματισμών $\tilde{G}$. Η εκτιμώμενη τιμή d της $\tau(\theta)$, όταν εκφραστεί στις καινούργιες συντεταγμένες γίνεται

$$d^{'} = \tilde{g}(d). \tag{1.5}$$

Αφού τα προβλήματα εκτίμησης είτε της $\tau(\theta)$ σε σχέση με την τριάδα (X, θ, d) είτε της $\tau(\theta')$ σε σχέση με την τριάδα $(X^{'}, \theta', d')$ αναπαριστά την ίδια φυσική κατάσταση εκφρασμένη σε καινούργιο σύστημα συντεταγμένων, η συνάρτηση ζημίας θα πρέπει να ικανοποιεί την σχέση

$$L(d^{'}, \theta^{'}) = L(d, \theta).$$

Ορισμός 1.11.2. *Αν η οικογένεια κατανομών* (1.1) *είναι αναλλοίωτη ως προς την* g, *η συνάρτηση ζημίας* $L(.,.)$ *ικανοποιεί την σχέση*

$$L(\tilde{g}(d), \bar{g}(\theta)) = L(d, \theta) \tag{1.6}$$

και η $\tau(\theta)$ *ικανοποιεί την σχέση* (1.3), *τότε το πρόβλημα εκτίμησης της* $\tau(\theta)$ *με συνάρτηση ζημίας* $L(.,.)$ *είναι αναλλοίωτο ως προς την* g.

Ορισμός 1.11.3. *Σε ένα αναλλοίωτο πρόβλημα εκτίμησης ένας εκτιμητής* $\delta(X)$ *ονομάζεται αναλλοίωτος (equivariant) αν*

$$\delta(g(X)) = \tilde{g}(\delta(X)), \forall g \in G$$

1.12 Εκτιμητές Pitman

Ορισμός 1.12.1. (*Pitman* (1937)) *Έστω τυχαίο δείγμα* $\underset{\sim}{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)$, *με πυκνότητα πιθανότητας* $f(x_1 - \theta, x_2 - \theta, ..., x_n - \theta)$, *όπου* θ *είναι η πρός εκτίμηση παράμετρος, και συνάρτηση ζημίας* $L(|\alpha - \theta|)$. *Το πρόβλημα εκτίμησης της παραμέτρου* θ *είναι αναλλοίωτο με τις παρακάτω ομάδες μετασχηχατισμών,*

$G = \{g_c : g_c(x) = (x_1 + c, ..., x_n + c),\ c \in \Re^1\}$

$\bar{G} = \{g_c : g_c(\theta) = \theta + c,\ c \in \Re^1\}$

$\tilde{G} = \{g_c : g_c(\alpha) = \alpha + c,\ c \in \Re^1\}$

Ο καλύτερος αναλλοίωτος εκτιμητής $\delta(\underset{\sim}{x})$, *είναι αυτός που ελαχιστοποιεί την ποσότητα,*

$$\frac{\int_{-\infty}^{\infty} L(\delta(\underset{\sim}{x}) - \theta) f(x_1 - \theta, ..., x_n - \theta) d\theta}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1 - \theta, ..., x_n - \theta) d\theta}$$

και ονομάζεται εκτιμητής Pitman.

1.13 Κριτήριο Pitman

Έστω T_1 και T_2 δύο εκτιμητές της παραμέτρου α. Ο Pitman (1937) πρότεινε το ακόλουθο μέτρο αναφορικά με την εκτίμηση του α απο τους T_1, και T_2.

Ο εκτιμητής T_1 είναι πιο κοντά στην παράμετρο α απο τον εκτιμητή T_2 αν,

$$P(|T_1 - \alpha| < |T_2 - \alpha|) > \frac{1}{2}$$

όπου η εγγύτητα κατά Pitman (Pitman Nearness, PN) του T_1 σε σχέση με το T_2 ορίζεται ως

$$PN(T_1, T_2) = P(|T_1 - \alpha| < |T_2 - \alpha|).$$

Για τους εκτιμητές οι οποίοι έχουν θετική πιθανότητα να είναι ίσοι, ο παραπάνω ορισμός τροποποιείται (Nayak(1990)) ως εξής,
Ο εκτιμητής T_1 είναι πιο κοντά στην παράμετρο α απο τον εκτιμητή T_2 αν,

$$P(|T_1 - \alpha| < |T_2 - \alpha|) > \frac{1}{2} P(T_1 \neq T_2)$$

Οπότε καταλήγουμε στον παρακάτω ορισμό της τροποποιημένης εγγύτητας κατά Pitman (modified Pitman Nearness (MPN)).

Ορισμός 1.13.1. *(Nayak (1990)) Ορίζουμε την τροποποιημένη εγγύτητα Pitman (MPN) του εκτιμητή T_1 σε σχέση με τον εκτιμητή T_2 ως εξής,*

$$\begin{aligned} MPN(T_1, T_2) &= P(|T_1 - \alpha| < |T_2 - \alpha| \,|\, T_1 \neq T_2) \\ &= \frac{P(|T_1 - \alpha| < |T_2 - \alpha|)}{P(T_1 \neq T_2)} \end{aligned}$$

όπου $P(T_1 = T_2) < 1$.

Στην περίπτωση που $P(T_1 = T_2) = 0$ τότε $MPN(T_1, T_2) = PN(T_1, T_2)$.

Κεφάλαιο 2

Εκτίμηση των παραμέτρων της διπαραμετρικής εκθετικής κατανομής

2.1 Διπαραμετρική εκθετική κατανομή

Ορισμός 2.1.1. *Η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την διπαραμετρική εκθετική κατανομή με παραμέτρους $\mu \in \Re$ και $\sigma > 0$, εαν η πυκνότητα της είναι,*

$$f(x;\mu,\sigma) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma}\, e^{\frac{-(x-\mu)}{\sigma}} & ,\ \text{αν}\ \ x \geq \mu \\ 0 & ,\ \text{αν}\ \ x < \mu \end{cases}$$

Η συνάρτηση κατανομής της δίνεται απο τον τύπο,

$$F(x;\mu,\sigma) = \begin{cases} 1 - e^{\frac{-(x-\mu)}{\sigma}} & ,\ \text{αν}\ \ x \geq \mu \\ 0 & ,\ \text{αν}\ \ x < \mu \end{cases}$$

Συμβολικά γράφουμε $X \sim \mathcal{E}(\mu,\sigma)$.

Παρατήρηση 2.1.1. *Με την μορφή δείκτριας συνάρτησης η πυκνότητα πιθανότητας και η συνάρτηση κατανομής παίρνουν την μορφή,*

$$f(x;\mu,\sigma)=\frac{1}{\sigma}\,e^{\frac{-(x-\mu)}{\sigma}}I_{[\mu,\infty)}(x),\qquad F(x;\mu,\sigma)=(1-e^{\frac{-(x-\mu)}{\sigma}})I_{[\mu,\infty)}(x).$$

Παρατήρηση 2.1.2. *Όταν* $X\sim\mathcal{E}(\mu,\sigma)\Rightarrow X-\mu\sim\mathcal{E}(\sigma)$.

2.2 Εύρεση Α.Ο.Ε.Δ. και Ε.Μ.Π. για το μ και το σ

Στην ενότητα αυτή αποσκοπούμε στην εύρεση Α.Ο.Ε.Δ. εκτιμητών και Ε.Μ.Π. για τις παραμέτρους $\mu\in\Re$ και $\sigma>0$ της διπαραμετρικής εκθετικής κατανομής $\mathcal{E}(\mu,\sigma)$ όταν μ,σ είναι άγνωστα.

Θεωρούμε ένα τυχαίο δείγμα $X_1,X_2,...,X_n$ απο την κατανομή $\mathcal{E}(\mu,\sigma)$, θέτουμε

$$X=X_{(1)}=min\{X_1,X_2,...,X_n\}$$

και

$$S=\sum_{i=1}^{n}(X_i-X_{(1)}).$$

Πρόταση 2.2.1. *Η τυχαία μεταβλητή* $X_{(1)}=min\{X_1,X_2,...,X_n\}$ *ακολουθεί την διπαραμετρική εκθετική κατανομή* $\mathcal{E}(\mu,\frac{\sigma}{n})$, *δηλαδή* $X_{(1)}\sim\mathcal{E}(\mu,\frac{\sigma}{n})$.

Απόδειξη

Θα βρούμε την κατανομή της τ.μ. $X_{(1)}$ κάνοντας χρήση της συνάρτησης κατανομής. Έστω $F_{X_{(1)}}$ η συνάρτηση κατανομής της τ.μ. $X_{(1)}$, τότε

$$F_{X_{(1)}}(t)=P_{\mu,\sigma}[X_{(1)}\le t]=1-P_{\mu,\sigma}[X_{(1)}>t]$$

Επειδή η $X_{(1)}$ είναι η μικρότερη παρατήρηση απο τις X_i η παραπάνω γίνεται,

$$F_{X_{(1)}}(t)=1-P_{\mu,\sigma}[X_1,X_2,...X_n>t]$$

Επειδή $X_1,X_2,...,X_n$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες (τυχαίο δείγμα), έχουμε,

$$\begin{aligned}
F_{X_{(1)}}(t) &= 1 - [P_{\mu,\sigma}(X_1 > t)]^n \\
&= 1 - [1 - P_{\mu,\sigma}(X_1 \leq t)]^n \\
&= 1 - [1 - F_{X_{(1)}}(t)]^n \\
&= 1 - [1 - 1 + e^{-\frac{t-\mu}{\sigma}}]^n \\
&= 1 - e^{-\frac{t-\mu}{\frac{\sigma}{n}}}
\end{aligned}$$

Συνεπώς η τ.μ. $X_{(1)}$ ακολουθεί την διπαραμετρική εκθετική κατανομή $\mathcal{E}(\mu, \dfrac{\sigma}{n})$. □

Πρόταση 2.2.2. *Οι στατιστικές συναρτήσεις S και X είναι ανεξάρτητες μεταξυ τους.*

Απόδειξη

Για να αποδείξουμε την ανεξαρτησία των S και X θεωρούμε προς στιγμή ότι $\mu = \mu_0$ γνωστό και σ άγνωστο. Υπό αυτές τις συνθήκες είναι εύκολο να δειχθεί ότι η στατιστική συνάρτηση $X = X_{(1)}$ είναι επαρκής και πλήρης.

Παρατηρούμε ότι αν θέσουμε $Z_i = X_i - X_{(1)}$, η κατανομή των τ.μ. $X_i = Z_i + X_{(1)}$ δεν εξαρτάται απο το μ, οπότε και η κατανομή του τυχαίου διανύσματος $(X_1, X_2, ..., X_n)$ δεν εξαρτάται απο το μ $\forall$ $i = 1, 2, ..., n$. Οπότε από το θεώρημα Basu έχουμε ότι οι $X_{(1)}$ και $(X_1 - X_{(1)}, X_2 - X_{(1)}, ..., X_n - X_{(1)})$ είναι ανεξάρτητες, επομένως ισχύει ότι οι S και X είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. □

Πρόταση 2.2.3. *Η τυχαία μεταβλητή,*

$$S = \sum_{i=1}^{n}(X_i - X_{(1)})$$

ακολουθεί την κατανομή Gamma$(n-1, \sigma)$, δηλαδή $S \sim$ Gamma$(n-1, \sigma)$.

Απόδειξη

Για να βρούμε την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής S θα κάνουμε χρήση των ροπογεννητριών συναρτήσεων. Ισχύει ότι,

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu) = \sum_{i=1}^{n}(X_i - X_{(1)}) + n(X_{(1)} - \mu) \tag{2.1}$$

Όμως, $X_i \sim \mathcal{E}(\mu, \sigma) \Rightarrow X_i - \mu \sim \mathcal{E}(\sigma) \Rightarrow \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu) \sim G(n, \sigma)$.

Επιπλέον, $X_{(1)} \sim \mathcal{E}(\mu, \dfrac{\sigma}{n}) \Rightarrow X_{(1)} - \mu \sim \mathcal{E}(\dfrac{\sigma}{n}) \Rightarrow n(X_{(1)} - \mu) \sim \mathcal{E}(\sigma)$.

Ακόμα έχουμε δείξει ότι οι στατιστικές συναρτήσεις S και $X_{(1)}$ είναι ανεξάρτητες.Οπότε και οι στατιστικές συναρτήσεις S και $n(X_{(1)} - \mu)$ είναι ανεξάρτητες.

Αν θεωρήσουμε ότι $S_1 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)$ και $S_2 = n(X_{(1)} - \mu)$ τότε οι ροπογεννήτριες είναι αντίστοιχα $m_{s_1}(t) = \dfrac{1}{(1-t\sigma)^n}$ και $m_{s_2}(t) = \dfrac{1}{(1-t\sigma)}$,$t < \dfrac{1}{\sigma}$, οπότε εκμεταλλευόμενοι την ανεξαρτησία των S και S_2 προκύπτει ότι $m_{s_1}(t) = m_s(t)m_{s_2}(t) \Leftrightarrow \quad m_s(t) = \frac{m_{s_1}(t)}{m_{s_2}(t)} \quad \Leftrightarrow \quad m_s(t) = \dfrac{1}{(1-t\sigma)^{n-1}}$, με $t < \dfrac{1}{\sigma}$, δηλαδή $S \sim G((n-1), \sigma)$. $\square$

Πρόταση 2.2.4. *Η στατιστική συνάρτηση* $T(\underset{\sim}{X}) = (S, X_{(1)})$ *είναι επαρκής.*

Απόδειξη

Για να είναι η στατιστική συνάρτηση $T(\underset{\sim}{X})$ επαρκής αρκεί να ισχύει το κριτήριο των Neymann-Fisher, όμως

$f(\underset{\sim}{x}; \mu, \sigma) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \mu, \sigma) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{x_i - \mu}{\sigma}} I_{[\mu, +\infty)}(x_i) = \frac{1}{\sigma^n} e^{-\frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)} \prod_{i=1}^{n} I_{[\mu,+\infty)}(x_i)$

Επειδή

$$I_{[\mu,+\infty)}(x_i) = \begin{cases} 1 & , \text{αν} \;\; x_i \geq \mu \\ 0 & , \text{αν} \;\; x_i < \mu \end{cases} \Rightarrow \prod_{i=1}^{n} I_{[\mu,+\infty)}(x_i) = \begin{cases} 1 & , \text{αν} \;\; x_i \geq \mu \\ 0 & , \text{αν} \;\; x_i < \mu \end{cases}$$

ή διαφορετικά,

$$\prod_{i=1}^{n} I_{[\mu,+\infty)} = \begin{cases} 1 & , \text{αν} \;\; x_{(1)} \geq \mu \\ 0 & , \text{αν} \;\; x_{(1)} < \mu \end{cases} = I_{[\mu,+\infty)}(x_{(1)}) \tag{2.2}$$

τελικά έχουμε,

$$f(\underset{\sim}{x}; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma^n} e^{-\frac{1}{\sigma}(\sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu)} I_{[\mu,\infty)}(x_{(1)})$$

Για $h(\underset{\sim}{x}) = 1$ και $q(T(\underset{\sim}{X}); \mu, \sigma) = f(\underset{\sim}{x}; \mu, \sigma)$ προκύπτει ότι η στατιστική συνάρτηση

$$(\sum_{i=1}^{n} X_i, X_{(1)})$$

είναι επαρκής.

Όμως,

$$T(\underset{\sim}{X}) = (S, X_{(1)}) = (\sum_{i=1}^{n}(X_i - X_{(1)}), X_{(1)})$$

είναι '1-1' απεικόνιση της στατιστικής συνάρτησης

$$(\sum_{i=1}^{n} X_i, X_{(1)})$$

που είναι επαρκής οπότε και $T(\underset{\sim}{X})$ είναι επαρκής. $\square$

Πρόταση 2.2.5. *Η στατιστική συνάρτηση* $T(\underset{\sim}{X}) = (S, X_{(1)})$ *είναι πλήρης.*

Απόδειξη

Για να είναι η στατιστική συνάρτηση $(S, X_{(1)})$ πλήρης πρέπει εξ' ορισμού να ισχύει ότι $E_\theta(\phi(S, X_{(1)})) = 0 \;\; \forall \theta = (\mu, \sigma) \in \Theta \Rightarrow \phi(s,x) = 0 \;\; \forall (s,x) \in \Re_+ \times \Re$. Γνωρίζουμε ότι $S \sim \text{Gamma}(n-1, \sigma)$ και $X_{(1)} \sim \mathcal{E}(\mu, \frac{\sigma}{n})$ και λόγω της ανεξαρτησίας προκύπτει ότι, $f_{S,X_{(1)}}(s,x) = \dfrac{1}{\Gamma(n-1)\sigma^{n-1}} s^{n-2} e^{-\frac{s}{\sigma}} \dfrac{n}{\sigma} e^{-n(\frac{x-\mu}{\sigma})} = \dfrac{n e^{\frac{n\mu}{\sigma}}}{\Gamma(n-1)\sigma^n} s^{n-2} e^{-\frac{s}{\sigma}} e^{-\frac{nx}{\sigma}}$, με $\sigma > 0$ και $x \geq \mu$.

Οπότε,

$$\forall \theta \in \Re \times \Re_+, E_\theta \phi(S, X) = 0 \Rightarrow \frac{n e^{\frac{n\mu}{\sigma}}}{\Gamma(n-1)\sigma^n} \int_\mu^\infty \int_0^\infty s^{n-2} e^{-\frac{s}{\sigma}} \phi(s,x) ds e^{-\frac{nx}{\sigma}} dx = 0$$

Θέτοντας $\displaystyle\int_0^\infty s^{n-2} e^{-\frac{S}{\sigma}} \phi(s,x) ds = h(x)$ έχουμε,

$$0 = \frac{\partial}{\partial \mu} E_\theta \phi(S, X_{(1)}) = -e^{-\frac{n\mu}{\sigma}} h(\mu) \Leftrightarrow h(\mu) = 0, \quad \mu \in \Re$$

Δηλαδή, $\displaystyle\int_0^\infty s^{n-2} e^{-\frac{s}{\sigma}} \phi(s,\mu) ds = 0, \quad \forall \; s > 0, \;\; x \in \Re.$

Η παραπάνω σχέση απαιτεί να ισούται με το μηδέν ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $\phi(s,\mu)s^{n-2}$, άρα $\phi(s,x) = 0, > 0$, δηλαδή η $T(\underset{\sim}{X})$ είναι πλήρης. $\square$

2.2.1 Ε.Μ.Π. για την παράμετρο θέσης μ και την παράμετρο κλίμακας σ

Πρόταση 2.2.6. *Οι Ε.Μ.Π. του* μ *και του* σ *είναι οι στατιστικές συναρτήσεις* $\hat{\mu} = X_{(1)}$ *και* $\hat{\sigma} = \dfrac{1}{n} S$ *αντίστοιχα.*

Απόδειξη

Για τον υπολογισμό του Ε.Μ.Π. του $\theta = (\mu, \sigma)$,βρίσκουμε αρχικά τον Ε.Μ.Π. για το σ με σταθερό μ, δηλαδή

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} logf(\underset{\sim}{x}; \mu, \sigma) = 0 \Leftrightarrow -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu) = 0$$

Ενώ,

$$\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} logf(\underset{\sim}{x}; \mu, \sigma) = -\frac{n}{\sigma^2} - \frac{2}{\sigma^3} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu) < 0$$

Άρα η τιμή του σ, που μεγιστοποιεί την $L(\mu, \sigma)$ είναι,

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)$$

Θεωρούμε ως συνάρτηση πιθανοφάνειας την

$$L(\hat{\sigma}, \mu) = L(\mu) = \frac{1}{\hat{\sigma}^n} e^{-\frac{1}{\hat{\sigma}} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)} = \frac{1}{\hat{\sigma}^n} e^{-\frac{1}{\hat{\sigma}} \sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{n\mu}{\hat{\sigma}}}, \quad x_{(1)} \geq \mu$$

Επειδή η $L(\mu)$ είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς το μ, μεγιστοποιείται για την μεγαλύτερη τιμή του μ, δηλαδή την $x_{(1)}$. Οπότε $\hat{\mu} = X_{(1)}$ είναι ο Ε.Μ.Π. για το μ, άρα και ο $\hat{\sigma} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - X_{(1)}) = \frac{1}{n} S$ είναι ο Ε.Μ.Π. για το σ. □

2.2.2 Α.Ο.Ε.Δ για την παράμετρο θέσης μ και την παράμετρο κλίμακας σ

Πρόταση 2.2.7. *Οι Α.Ο.Ε.Δ εκτιμητές των μ και σ είναι οι στατιστικές συναρτήσεις $\tilde{\mu} = \frac{nX_{(1)} - \bar{X}}{n-1}$ και $\tilde{\sigma} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - X_{(1)})$ αντίστοιχα.*

Απόδειξη

Γνωρίζουμε ότι η στατιστική συνάρτηση $T(\underset{\sim}{X}) = (\sum_{i=1}^{n} (X_i - X_{(1)}), X_{(1)})$ είναι επαρκής και πλήρης. Οπότε, σύμφωνα με το πόρισμα των Lehmann-Scheffe, αρκεί να βρούμε

αμερόληπτους εκτιμητές για τα μ και σ, οι οποίοι να είναι συνάρτηση της επαρκούς και πλήρους στατιστικής συνάρτησης $T = T(\underset{\sim}{X})$.
Έπειδή $S \sim G(n-1,\sigma)$,

$$E(\frac{S}{n-1}) = \sigma$$

$$X_{(1)} \sim \mathcal{E}(\mu, \frac{\sigma}{n}) \Rightarrow E(X_{(1)}) = \mu + \frac{\sigma}{n} = \mu + \frac{1}{n}E(\frac{1}{n-1}S) \Rightarrow E(X_{(1)} - \frac{1}{n(n-1)}S) = \mu$$

Επιπλέον,

$$E\left(X_{(1)} - \frac{1}{n(n-1)}S\right) = E\left(\frac{n(n-1)X_{(1)} - \sum_{i=1}^{n} X_i + nX_{(1)}}{n(n-1)}\right) = E\left(\frac{nX_{(1)} - \bar{X}}{n-1}\right).$$

Άρα οι Α.Ο.Ε.Δ εκτιμητές του μ και του σ είναι οι στατιστικές συναρτήσεις $\tilde{\mu} = \frac{nX_{(1)} - \bar{X}}{n-1}$ και $\tilde{\sigma} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_{(i)} - X_{(1)})$ αντίστοιχα. $\square$

2.3 Βέλτιστος αναλλοίωτος εκτιμητής (Best Affine Equivariant) της παραμέτρου θέσης μ και κλίμακας σ ως προς το Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα (ΜΤΣ)

Έστω τυχαίο δείγμα $X_1, X_2, ..., X_n$ μεγέθους n από την κατανομή $\mathcal{E}(\mu,\sigma)$.

Πρόταση 2.3.1. *Οι βέλτιστοι αναλλοίωτοι εκτιμητές (Best Affine Equivariant) των μ και σ, αντίστοιχα, ως προς το Μεσο Τετραγωνικό Σφάλμα είναι,*

$$\delta_1^{(1)} = X_{(1)} - \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - X_{(1)})$$

$$\delta_2^{(1)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - X_{(1)})$$

Απόδειξη

Ζητάμε τον βέλτιστο γραμμικό αναλλοίωτο εκτιμητή για την παράμετρο θέσης μ, δη-

λαδή τον βέλτιστο εκτιμητή στην κλάση $C_1 = \{\delta_c/\delta_c = X_{(1)} - cS\}$, ο οποίος ελαχιστοποιεί το Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα. Έχουμε,
ΜΤΣ$(\delta_c;\mu) = E(\delta_c - \mu)^2 = E(X_{(1)} - cS - \mu)^2 = Var(X_{(1)} - cS - \mu) + (E(X_{(1)} - cS - \mu))^2 = Var(X_{(1)}) + c^2Var(S) + (\frac{\sigma}{n} + \mu - c(n-1)\sigma - \mu)^2 = \frac{\sigma^2}{n^2} + c^2(n-1)\sigma^2 + \frac{\sigma^2}{n^2} - 2\frac{\sigma^2}{n}c(n-1) + c^2(n-1)^2\sigma^2 = \phi(c)$.
Ελαχιστοποιούμε το Μ.Τ.Σ., ως προς c,
$\phi'(c) = 0 \Rightarrow 2c(n-1)\sigma^2 + \frac{2\sigma^2}{n}(n-1) + 2c(n-1)^2\sigma^2 = 0 \Rightarrow 2(n-1)\sigma^2(c - \frac{1}{n} + c(n-1)) = 0 \Rightarrow c - \frac{1}{n} + c(n-1) = 0 \Rightarrow cn = \frac{1}{n} \Rightarrow c = \frac{1}{n^2}$
Συνεπώς, ο βέλτιστος γραμμικός αναλλοίωτος εκτιμήτης για την παράμετρο θέσης μ, ο οποίος ελαχιστοποιεί το Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα είναι,

$$\delta_1^{(1)} = X_{(1)} - \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - X_{(1)})$$

Στην συνέχεια θα υπολογίσουμε τον βέλτιστο γραμμικό αναλλοίωτο εκτιμητή για την παράμετρο κλίμακας σ, δηλαδή τον βέλτιστο εκτιμητή στην κλάση $C = \{\delta_c/\delta_c = cS\}$ ο οποίος ελαχιστοποιεί το Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα. Έχουμε,
ΜΤΣ$(\delta_c;\sigma) = E(\delta_c - \sigma)^2 = E(cS - \sigma)^2 = Var(cS - \sigma) + (E(cS - \sigma))^2 = c^2Var(S) + (c(n-1)\sigma - \sigma)^2 = c^2(n-1)\sigma^2 + \sigma^2(c^2(n-1)^2 - 2c(n-1) + 1) = c^2(n-1)\sigma^2 + \sigma^2c^2(n-1)^2 - 2c\sigma^2(n-1) + \sigma^2 = \phi(c)$.
Επιθυμούμε να ελαχιστοποιείται το Μ.Τ.Σ., οπότε,
$\phi'(c) = 0 \Rightarrow 2c(n-1)\sigma^2 + 2c\sigma^2(n-1)^2 - 2\sigma^2(n-1) = 0 \Rightarrow 2\sigma^2(n-1)(c + c(n-1) - 1) = 0 \Rightarrow c + c(n-1) - 1 = 0 \Rightarrow cn - 1 = 0 \Rightarrow c = \frac{1}{n}$
Συνεπώς, ο βέλτιστος γραμμικός αναλλοίωτος εκτιμήτης για την παράμετρο κλίμακας σ, ο οποίος ελαχιστοποιεί το Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα είναι,

$$\delta_2^{(1)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - X_{(1)}) \qquad \square$$

Πρόταση 2.3.2. *Ο βέλτιστος αναλλοίωτος εκτιμητής του μ, στην κλάση $C = \{\delta_c/\delta_c = X_{(1)} + c\}$ ως προς το Μεσο Τετραγωνικό Σφάλμα, όταν η παράμετρος κλίμακας σ είναι γνωστή, είναι,*

$$\delta_1^{'(1)} = X_{(1)} - \frac{\sigma}{n}$$

Απόδειξη

Ζητάμε τον βέλτιστο γραμμικό αναλλοίωτο εκτιμητή για την παράμετρο θέσης μ, όταν η παράμετρος κλίμακας σ είναι γνωστή, δηλαδή τον βέλτιστο εκτιμητή στην κλάση $C_1 = \{\delta_c/\delta_c = X_{(1)} + c\}$, ο οποίος ελαχιστοποιεί το Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα. Έχουμε,

$\text{ΜΤΣ}(\delta_c;\mu) = E(\delta_c-\mu)^2 = E(X_{(1)}+c-\mu)^2 = Var(X_{(1)}+c-\mu)+(E(X_{(1)}+c-\mu))^2 = Var(X_{(1)}) + (\frac{\sigma}{n} + \mu + c - \mu)^2 = 2\frac{\sigma^2}{n^2} + 2c\frac{\sigma}{n} + c^2 = \phi(c)$.

Επιθυμούμε να ελαχιστοποιείται το Μ.Τ.Σ., οπότε,

$\phi^{'}(c) = 0 \Rightarrow \frac{\sigma}{n} + c = 0 \Rightarrow c = -\frac{\sigma}{n}$.

Άρα ο βέλτιστος αναλλοίωτος εκτιμητής του μ, στην κλάση $C = \{\delta_c/\delta_c = X_{(1)} + c\}$ ως προς το Μεσο Τετραγωνικό Σφάλμα, όταν η παράμετρος κλίμακας σ είναι γνωστή είναι, $\delta_1^{'(1)} = X_{(1)} - \frac{\sigma}{n}$. □

2.4 Βέλτιστος αναλλοίωτος εκτιμητής της παραμέτρου θέσης μ και κλίμακας σ ως προς την συνάρτηση ζημίας Linex

Έστω τυχαίο δείγμα $X_1, X_2, ..., X_n$ μεγέθους n απο την κατανομή $\mathcal{E}(\mu,\sigma)$. Θα εκτιμήσουμε, αρχικά, την παράμετρο θέσης μ όταν η παράμετρος κλίμακας σ είναι γνωστή.

Ορισμός 2.4.1. *Η ασύμμετρη συνάρτηση ζημίας, γνωστή ως συνάρτηση ζημίας Linex, δίνεται,*

$$L(\Delta) = b(e^{\alpha\Delta} - \alpha\Delta - 1), \textit{όπου} \;\; \alpha \neq 0, \quad \textit{και} \quad b > 0.$$

Συνήθως, χωρίς έλλειψη της γενικότητας θεωρούμε $b = 1$.

Πρόταση 2.4.1. (*Parsian. et. al.* (1993)) *Ο βέλτιστος αναλλοίωτος εκτιμητής του μ, δηλαδή ο εκτιμητής Pitman,* (*Sen and Saleh*(1990)) *, στην κλάση $C = \{\delta_c/\delta_c = X_{(1)} + c\}$ ως προς την συνάρτηση ζημίας Linex, όταν η παράμετρος κλίμακας σ είναι* *γνωστή, με* $\Delta = \delta_c - \mu$ *και* $\underset{\sim}{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)$ *είναι,*

$$\delta_1(\underset{\sim}{X}) = X_{(1)} - \frac{1}{\alpha} ln(\frac{n}{n - \alpha\sigma})$$

όπου $\alpha < \frac{n}{\sigma}$, *με συνάρτηση κινδύνου,*

$$R(\mu, \delta_1) = ln(\frac{n}{n - \alpha\sigma}) - \frac{\alpha\sigma}{n}$$

Απόδειξη

Ζητάμε τον βέλτιστο εκτιμητή στην κλάση των εκτιμητών $C = \{\delta_c / \delta_c = X_{(1)} + c\}$.
Θεωρούμε $b = 1$, οπότε η συνάρτηση ζημίας $Linex$ είναι $L(\Delta) = e^{\alpha\Delta} - \alpha\Delta - 1$.
Για $\Delta = \delta_c - \mu = X_{(1)} + c - \mu$, έχουμε
$R(\mu, \delta_c) = E(e^{\alpha(X_{(1)}+c-\mu)} - \alpha(X_{(1)} + c - \mu) - 1) = E(e^{\alpha(X_{(1)}-\mu+c)}) - \alpha E(X_{(1)} - \mu + c) - 1 = e^{\alpha c} E(e^{\alpha(X_{(1)}-\mu)}) - \alpha\frac{\sigma}{n} - \alpha c - 1$
Έχουμε, $X_{(1)} \sim \mathcal{E}(\mu, \frac{\sigma}{n}) \Rightarrow X_{(1)} - \mu \sim \mathcal{E}(\frac{\sigma}{n}) \equiv G(1, \frac{\sigma}{n})$.
Γνωρίζουμε ότι αν $Y \sim G(\alpha, \beta)$ τότε $m_Y(t) = E(e^{tY}) = \frac{1}{(1 - \beta t)^\alpha}, \quad t < \frac{1}{\beta}$
Οπότε, $E(e^{\alpha(X_{(1)}-\mu)}) = \frac{1}{1 - \frac{\sigma}{n}\alpha}, \quad \alpha < \frac{n}{\sigma}$. Συνεπώς, $R(\mu, \delta_c) = \frac{1}{1 - \frac{\sigma}{n}\alpha} e^{\alpha c} - \alpha\frac{\sigma}{n} - \alpha c - 1 = \phi(c)$.
Ελαχιστοποιούμε την συνάρτηση κινδύνου ως προς c, $\phi'(c) = 0$.Έχουμε, $\frac{1}{1 - \frac{\sigma}{n}\alpha} \alpha e^{\alpha c} - \alpha = 0 \Rightarrow \frac{1}{(1 - \frac{\sigma\alpha}{n})} e^{\alpha c} = 1 \Rightarrow e^{\alpha c} = 1 - \frac{\sigma\alpha}{n} \Rightarrow \alpha c = ln(\frac{n - \sigma\alpha}{n}) \Rightarrow c = \frac{1}{\alpha} ln(\frac{n - \sigma\alpha}{n})$.
Οπότε, $\delta_1(\underset{\sim}{X}) = X_{(1)} - \frac{1}{\alpha} ln(\frac{n}{n - \alpha\sigma})$.
Για τον υπολογισμό της συνάρτησης κινδύνου του εκτιμητή μ_1, προκύπτει

$R(\delta_1, \mu) = E(e^{\alpha(\delta_1-\mu)} - \alpha(\delta_1 - \mu) - 1) = E(e^{\alpha(\delta_1-\mu)}) - \alpha E(\delta_1 - \mu) - 1 =$

$E(e^{\alpha(X_{(1)} - \frac{1}{\alpha} ln(\frac{n}{n-\alpha\sigma}) - \mu)}) - \alpha E(X_{(1)} - \frac{1}{\alpha} ln(\frac{n}{n - \alpha\sigma}) - \mu) - 1 = e^{ln(\frac{n}{n-\alpha\sigma})^{-1}} E(e^{\alpha(X_{(1)}-\mu)})$

$-\alpha E(X_{(1)} - \frac{1}{\alpha} ln(\frac{n}{n - \alpha\sigma}) - \mu) - 1 = (\frac{n - \alpha\sigma}{n}) E(e^{\alpha(X_{(1)}-\mu)}) - \alpha E(X_{(1)} - \frac{1}{\alpha} ln(\frac{n}{n - \alpha\sigma})$

$-\mu) - 1 = (\frac{n - \alpha\sigma}{n})(\frac{1}{1 - \frac{\sigma\alpha}{n}}) - \alpha\mu - \frac{\alpha\sigma}{n} + ln(\frac{n}{n - \alpha\sigma}) + \alpha\mu - 1 = ln(\frac{n}{n - \alpha\sigma}) - \frac{\alpha\sigma}{n}$.

□

Έστω τώρα ότι οι παράμετροι θέσης μ και κλίμακας σ είναι άγνωστες. Θα εκτιμήσουμε εκ' νέου τις παραμέτρους αυτές ως προς την συνάρτηση ζημίας Linex.
Γνωρίζουμε ότι $X_{(1)} \sim \mathcal{E}(\mu, \frac{\sigma}{n}) \Rightarrow X_{(1)} - \mu \sim \mathcal{E}(\frac{\sigma}{n}) \Rightarrow \frac{n(X_{(1)} - \mu)}{\sigma} \sim \mathcal{E}(1) \equiv G(1,1)$. Επιπλέον $S \sim G(n-1, \sigma) \Rightarrow 2\frac{S}{\sigma} \sim G(n-1, 2) \equiv \chi^2_{(2n-2)}$.

Πρόταση 2.4.2. (*Parsian. et. al.* (1993)) *Ο βέλτιστος αναλλοίωτος εκτιμητής του μ στην κλάση $C^* = \{\delta_c / \delta_c = X_{(1)} + cS\}$ ως προς την συνάρτηση ζημίας Linex, όταν η παράμετρος σ είναι άγνωστη, με $\Delta = \frac{\delta_c - \mu}{\sigma}$ και $\underset{\sim}{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)$ είναι,*

$$\delta_2(\underset{\sim}{X}) = X_{(1)} - \frac{1}{\alpha}[(\frac{n}{n-\alpha})^{\frac{1}{n}} - 1]\sum_{i=1}^{n}(X_i - X_{(1)})$$

όπου $n > \alpha$, με συνάρτηση κινδύνου

$$R_\sigma(\mu, \delta_2) = n(\frac{n}{n-\alpha})^{\frac{1}{n}} - \frac{\alpha}{n} - n$$

Απόδειξη

Ζητάμε τον βέλτιστο εκτιμητή στην κλάση των εκτιμητών $C^* = \{\delta_c / \delta_c = X_{(1)} + cS\}$.
Για $\Delta = \frac{\delta_c - \mu}{\sigma} = \frac{X_{(1)} + cS - \mu}{\sigma}$ έχουμε,
$R(\mu, \delta_c) = E(e^{\alpha \frac{X_{(1)} + cS - \mu}{\sigma}} - \alpha(\frac{X_{(1)} + cS - \mu}{\sigma}) - 1) =$
$E(e^{\frac{\alpha}{\sigma}(X_{(1)} - \mu)})E(e^{\alpha c \frac{S}{\sigma}}) - \frac{\alpha}{\sigma}E(X_{(1)} - \mu) - \alpha c E(\frac{S}{\sigma}) - 1)$.
Γνωρίζουμε ότι, $X_{(1)} - \mu \sim G(1, \frac{\sigma}{n})$, οπότε $E(e^{\frac{\alpha}{\sigma}(X_{(1)} - \mu)}) = \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{\sigma}}, \quad \alpha < n$.
Επιπλέον, $2\frac{S}{\sigma} \sim G(n-1, 2)$, οπότε $E(e^{\alpha c \frac{S}{\sigma}}) = E(e^{\frac{\alpha c}{2}\frac{2S}{\sigma}}) = \frac{1}{(1 - \alpha c)^{n-1}}$
Επίσης $\frac{\alpha}{\sigma}E(X_{(1)} - \mu) = \frac{\alpha}{n}$, και $\alpha c E(\frac{S}{\sigma}) = \alpha c(n-1)$.
Οπότε, $R(\mu, \delta_c) = (\frac{1}{1 - \frac{\alpha}{n}})(\frac{1}{(1 - \alpha c)^{n-1}}) - \frac{\alpha}{n} - \alpha c(n-1) - 1 = \phi(c)$
Επιθυμούμε να ελαχιστοποιήσουμε τη συνάρτηση κινδύνου, οπότε $\phi'(c) = 0$. Έχουμε,
$\phi'(c) = -\frac{\alpha(1-n)}{n-\alpha}n(1-\alpha c)^{-n} + \alpha(n-1) = 0 \Rightarrow (1-\alpha c)^{-n} = \frac{n-\alpha}{n} \Rightarrow (1-\alpha c)^n = \frac{n}{n-\alpha} \Rightarrow 1 - \alpha c = (\frac{n}{n-\alpha})^{\frac{1}{n}} \Rightarrow -\alpha c = (\frac{n}{n-\alpha})^{\frac{1}{n}} - 1 \Rightarrow c = -\frac{1}{\alpha}((\frac{n}{n-\alpha})^{\frac{1}{n}} - 1)$
Συνεπώς ο καλύτερος αναλλοίωτος εκτιμητής στην κλάση C^* είναι ο,

$\delta_2(\underset{\sim}{X}) = X_{(1)} - \frac{1}{\alpha}[(\frac{n}{n-\alpha})^{\frac{1}{n}} - 1]\sum_{i=1}^{n}(X_i - X_{(1)})$

Για τον βέλτιστο αναλλοίωτο εκτιμητή δ_2 θα υπολογίσουμε τη συνάρτηση κινδύνου.

$R(\mu, \delta_2) = E(e^{\frac{\alpha}{\sigma}(\delta_2-\mu)}) - \frac{\alpha}{\sigma}E(\delta_2 - \mu) - 1$

Γνωρίζουμε ότι $\frac{n}{\sigma}(X_{(1)} - \mu) \sim G(1, 1)$.

Έχουμε,

$E(e^{\frac{\alpha}{\sigma}(\delta_2-\mu)}) = E(e^{\frac{\alpha}{\sigma}(X_{(1)}-\frac{1}{\alpha}[(\frac{n}{n-\alpha})^{\frac{1}{n}}-1]S-\mu)}) = E(e^{\frac{\alpha n}{n\sigma}(X_{(1)}-\mu)})E(e^{-\frac{1}{2}[(\frac{n}{n-\alpha})^{\frac{1}{n}}-1]\frac{2S}{\sigma}}) = \frac{1}{1-\frac{\alpha}{n}}E(e^{\frac{1}{2}[1-(\frac{n}{n-\alpha})^{\frac{1}{n}}]\frac{2S}{\sigma}}) = \frac{n}{n-\alpha}\frac{1}{((\frac{n}{n-\alpha})^{\frac{1}{n}})^{n-1}} = (\frac{n}{n-\alpha})^{\frac{1}{n}}$.

Επίσης,

$\frac{\alpha}{\sigma}E(\delta_2 - \mu) = \frac{\alpha}{\sigma}E(X_{(1)} - \mu - \frac{1}{\alpha}[(\frac{n}{n-\alpha})^{\frac{1}{n}} - 1]S) = E(\frac{\alpha}{\sigma}(X_{(1)} - \mu)) - \frac{1}{2}((\frac{n}{n-\alpha})^{\frac{1}{n}} - 1)E(\frac{2S}{\sigma}) = \frac{\alpha}{n} - ((\frac{n}{n-\alpha})^{\frac{1}{n}} - 1)(n-1) = \frac{\alpha}{n} - n(\frac{n}{n-\alpha})^{\frac{1}{n}} + n + (\frac{n}{n-\alpha})^{\frac{1}{n}} - 1.$

Τελικά $R(\mu, \delta_2) = n(\frac{n}{n-\alpha})^{\frac{1}{n}} - \frac{\alpha}{n} - n.$ □

Πρόταση 2.4.3. (*Parsian and Farsipour* (1993)) *Ο βέλτιστος αναλλοίωτος εκτιμητής του σ στην κλάση $C^{**} = \{\delta_c/\delta_c = cS\}$ ως προς την συνάρτηση ζημίας Linex, όταν η παράμετρος θέσης μ είναι άγνωστη, με $\Delta = \frac{\delta_c}{\sigma} - 1$ και $\underset{\sim}{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)$ είναι,*

$$\delta_3(\underset{\sim}{X}) = \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\frac{\alpha}{n}})\sum_{i=1}^{n}(X_i - X_{(1)})$$

με συνάρτηση κινδύνου,

$$R(\sigma, \delta_3) = ne^{-\frac{\alpha}{n}} - n + \alpha$$

Απόδειξη

Ζητάμε τον βέλτιστο εκτιμητή στην κλάση των εκτιμητών $C^{**} = \{\delta_c/\delta_c = cS\}$.

Για $\Delta = \frac{\delta_c}{\sigma} - 1 = \frac{cS}{\sigma} - 1$ έχουμε,

$R(\sigma, \delta_c) = E(e^{\alpha(\frac{cS}{\sigma}-1)} - \alpha(\frac{cS}{\sigma} - 1) - 1) = e^{-\alpha}E(e^{\frac{\alpha cS}{\sigma}}) - \alpha E(\frac{cS}{\sigma}) + \alpha - 1 = e^{-\alpha}E(e^{\frac{\alpha c}{2}\frac{2S}{\sigma}}) - \frac{\alpha c}{2}E(\frac{2S}{\sigma}) + \alpha - 1 = \frac{e^{-\alpha}}{(1-\alpha c)^{n-1}} - \alpha c(n-1) + \alpha - 1 = \phi(c).$

Ελαχιστοποιούμε τη συνάρτηση κινδύνου, ως προς c, $\phi'(c) = 0$. Έχουμε $\phi'(c) = 0 \Rightarrow -\alpha e^{-\alpha}(1-\alpha c)^{-n}(1-n) - \alpha n + \alpha = 0 \Rightarrow e^{-\alpha}(1-\alpha c)^{-n} = 1 \Rightarrow (1-\alpha c)^{-n} = \frac{1}{e^{-\alpha}} \Rightarrow$

$1-\alpha c = e^{-\frac{\alpha}{n}} \Rightarrow \alpha c = 1 - e^{-\frac{\alpha}{n}} \Rightarrow c = \frac{1}{\alpha}(1-e^{-\frac{\alpha}{n}}).$

Άρα, $\delta_3 = \frac{1}{\alpha}(1-e^{-\frac{\alpha}{n}})\sum_{i=1}^{n}(X_i - X_{(1)})$

Για τον βέλτιστο αναλλοίωτο εκτιμητή δ_3 θα υπολογίσουμε τη συνάρτηση κινδύνου του.

$R(\sigma,\delta_3) = E(e^{\alpha(\frac{\delta_3}{\sigma}-1)} - \alpha(\frac{\delta_3}{\sigma}-1)-1) = E(e^{\alpha(\frac{1}{\alpha\sigma}(1-e^{-\frac{\alpha}{n}})S-1)}) - \alpha E(\frac{1}{\alpha\sigma}(1-e^{-\frac{\alpha}{n}})S - 1) - 1) = E(e^{((\frac{1-e^{-\frac{\alpha}{n}}}{\sigma})S-\alpha)}) - E(\frac{1}{\sigma}(1-e^{-\frac{\alpha}{n}})S) + \alpha - 1$

Έχουμε,

$E(e^{((\frac{1-e^{-\frac{\alpha}{n}}}{\sigma})S-\alpha)}) = E(e^{\frac{(1-e^{-\frac{\alpha}{n}})2S}{2\sigma}})e^{-\alpha} = e^{-\frac{\alpha}{n}},$

$E(\frac{(1-e^{-\frac{\alpha}{n}})2S}{2\sigma}) = (1-e^{-\frac{\alpha}{n}})(n-1)$

Οπότε, $R(\sigma,\delta_3) = e^{-\frac{\alpha}{n}} - (1-e^{-\frac{\alpha}{n}})(n-1) + \alpha - 1 = e^{-\frac{\alpha}{n}} - n + ne^{-\frac{\alpha}{n}} + 1 - e^{-\frac{\alpha}{n}} + \alpha - 1 = ne^{-\frac{\alpha}{n}} - n + \alpha.$ $\square$

Κεφάλαιο 3

Εκτίμηση των παραμέτρων, όταν ο παραμετρικός χώρος είναι περιορισμένος και κριτήριο είναι το Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα (ΜΤΣ)

3.1 Εκτίμηση των παραμέτρων μ και σ, υπό τον περιορισμό $\mu \leq c$, ως προς το Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα (ΜΤΣ)

Έστω $X_1, X_2, ..., X_n$ τυχαίο δείγμα μεγέθους n απο τη διπαραμετρική εκθετική κατανομή $\mathcal{E}(\mu, \sigma)$ $\mu \in \Re$, $\sigma > 0$ με πυκνότητα πιθανότητας,

$$f(x; \mu, \sigma) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma}\, e^{\frac{-(x-\mu)}{\sigma}} & , \text{ αν } \ x \geq \mu \\ 0 & , \text{ αν } \ x < \mu \end{cases}$$

Σε αυτή την ενότητα πρόκειται να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους θέσης μ και κλίμακας

σ ως προς το Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα (ΜΤΣ) υπό τον περιορισμο $\mu \leq c$, όπου c είναι μια γνωστή σταθερά. Τα αποτελέσματα αυτής της ενότητας βρίσκονται στην εργασία των Singh.et.al. (1993). Αρχικά θα εκτιμήσουμε την παράμετρο θέσης μ.

3.1.1 Εκτίμηση της παραμέτρου θέσης μ, υπό τον περιορισμό $\mu \leq c$, ως προς το Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα (ΜΤΣ)

Από την Πρόταση 2.3.1. γνωρίζουμε ότι στην περίπτωση που δεν υπάρχει περιορισμός, ο βέλτιστος γραμμικός αναλλοίωτος εκτιμητής (Best Affine Equivariant) του μ είναι,

$$\delta_1^{(1)} = X_{(1)} - \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - X_{(1)}).$$

Θα προσπαθήσουμε να βελτιώσουμε τον εκτιμητή $\delta_1^{(1)}$ στην περίπτωση όπου $\mu \leq c$. Οι Singh.et.al. (1993) θεώρησαν τον παρακάτω εκτιμητή για την παράμετρο θέσης μ,

$$\delta_1^{(2)} = \begin{cases} \delta_1^{(1)} & , \text{ αν } \; X_{(1)} \leq c \\ c - \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i - c) & , \text{ αν } \; X_{(1)} > c \end{cases} \tag{3.1}$$

Οι στατιστικές συναρτήσεις $X_{(1)}$ και S είναι ανεξάρτητες (βλ. Πρόταση 2.2.2). Επιπλέον $Y|X_{(1)} > c \sim G(1,1)$ όπου $Y = \frac{n}{\sigma}(X_{(1)} - c)$.(βλ. Πρόταση 5.1.1.).

Πρόταση 3.1.1. *Ο βέλτιστος αναλλοίωτος εκτιμητής του* μ , $\delta_1^{(1)} = X_{(1)} - \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - X_{(1)})$, *είναι μη αποδεκτός, όταν* $\mu \leq c$, *ως προς το Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα και βελτιώνεται απο τον εκτιμητή* $\delta_1^{(2)}$, *ο οποίος δίνεται στη Σχέση (3.1).*

Απόδειξη

Θα συγκρίνουμε τους εκτιμητές $\delta_1^{(1)}$ και $\delta_1^{(2)}$ ως προς το Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα (ΜΤΣ). Έχουμε,

$$\text{ΜΤΣ}(\delta_1^{(1)}) - \text{ΜΤΣ}(\delta_1^{(2)}) = E(\delta_1^{(1)} - \mu)^2 - E(\delta_1^{(2)} - \mu)^2 =$$

$$E\left[(\delta_1^{(1)} - \delta_1^{(2)})(\delta_1^{(1)} + \delta_1^{(2)} - 2\mu)I_{X_{(1)}>c}\right] =$$

$$E[((X_{(1)}-\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-X_{(1)})-c+\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-c))(X_{(1)}-\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-X_{(1)})+$$
$$c-\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-c)-2\mu))I_{X_{(1)}>c}]=$$
$$E\left[\left(X_{(1)}-c+\frac{1}{n}(X_{(1)}-c)\right)\left(X_{(1)}+c-\frac{1}{n^2}S-\frac{1}{n^2}S-\frac{1}{n}(X_{(1)}-c)-2\mu\right)I_{X_{(1)}>c}\right]=$$
$$E\left[\left(\frac{n+1}{n}(X_{(1)}-c)\right)\left(\frac{n-1}{n}(X_{(1)}-c)-\frac{2}{n^2}S+2c-2\mu\right)I_{X_{(1)}>c}\right]=$$
$$\frac{n+1}{n}E\left[\left(X_{(1)}-c\right)\left(\frac{n-1}{n}(X_{(1)}-c)-\frac{2S}{n^2}+2c-2\mu\right)I_{X_{(1)}>c}\right].$$

Δεδομένου ότι, οι στατιστικές συναρτήσεις $X_{(1)}$ και S είναι ανεξάρτητες και

$$\frac{n}{\sigma}(X_{(1)}-c)|X_{(1)}>c\sim G(1,1)$$

προκύπτει ότι,

$$\text{ΜΤΣ}(\delta_1^{(1)})-\text{ΜΤΣ}(\delta_1^{(2)})=$$
$$\frac{(n+1)(n-1)}{n^2}E\left((X_{(1)}-c)^2I_{X_{(1)}>c}\right)-2\frac{n+1}{n}E\left((X_{(1)}-c)\frac{S}{n^2}I_{X_{(1)}>c}\right)+(2c-2\mu)\cdot$$
$$\frac{n+1}{n}E\left((X_{(1)}-c)I_{X_{(1)}>c}\right)=$$
$$\frac{(n+1)(n-1)}{n^2}E\left((X_{(1)}-c)^2\frac{n^2}{\sigma^2}I_{X_{(1)}>c}\right)\frac{\sigma^2}{n^2}-2\frac{n+1}{n}E\left((X_{(1)}-c)I_{X_{(1)}>c}\right)E\left(\frac{S}{n^2}\right)$$
$$+(2c-2\mu)\frac{n+1}{n}E\left((X_{(1)}-c)I_{X_{(1)}>c}\right)=$$
$$\frac{(n+1)(n-1)}{n^2}\left[\frac{\sigma^2}{n^2}Var\left((X_{(1)}-c)\frac{n}{\sigma}I_{X_{(1)}>c}\right)+\frac{\sigma^2}{n^2}\left(E\left((X_{(1)}-c)\frac{n}{\sigma}I_{X_{(1)}>c}\right)\right)^2\right]$$
$$-2\frac{n+1}{n}E\left(\frac{S}{n^2}\right)E\left((X_{(1)}-c)I_{X_{(1)}>c}\right)+\frac{\sigma}{n}(2c-2\mu)\frac{n+1}{n}=$$
$$\frac{2(n+1)(n-1)}{n^2}\frac{\sigma^2}{n^2}-\frac{2(n+1)}{n}\frac{\sigma^2}{n^3}(n-1)+\frac{\sigma}{n}2(c-\mu)\frac{n+1}{n}=2\frac{n+1}{n^2}\sigma(c-\mu).$$

Συνεπώς, $\text{ΜΤΣ}(\delta_1^{(1)})-\text{ΜΤΣ}(\delta_1^{(2)})\geq 0$. Άρα ο εκτιμητής $\delta_1^{(2)}$, όταν $\mu<c$, είναι καλύτερος, από τον $\delta_1^{(1)}$ για την εκτίμηση του μ. $\square$

3.1.2 Εκτίμηση της παραμέτρου κλίμακας σ, υπό τον περιορισμό$\mu \leq c$, ως προς το Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα (ΜΤΣ)

Από την Πρόταση 2.3.1. γνωρίζουμε ότι στην περίπτωση που δεν υπάρχουν περιορισμοί, ο βέλτιστος γραμμικός αναλλοίωτος εκτιμητής (Best Affine Equivariant) του σ είναι,

$$\delta_2^{(1)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - X_{(1)}) \tag{3.2}$$

Επιπλέον ο εκτιμητής $\delta_2^{(1)}$ είναι ο Εκτιμητής Μέγιστης Πιθανοφάνειας (ΕΜΠ) της παραμέτρου κλίμακας σ. Θα προσπαθήσουμε να βελτιώσουμε τον εκτιμητή $\delta_2^{(1)}$, στην περίπτωση όπου $\mu \leq c$.

Πρόταση 3.1.2. *Ο βέλτιστος αναλλοίωτος εκτιμητής του σ , $\delta_2^{(1)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - X_{(1)})$, είναι ισοδύναμος, όταν $\mu \leq c$, ως προς το Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα με τον εκτιμητή,*

$$\delta_2^{(2)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - min(X_{(1)}, c))$$

Απόδειξη

Έχουμε,

$\text{ΜΤΣ}(\delta_2^{(1)}) - \text{ΜΤΣ}(\delta_2^{(2)}) =$

$$E(\delta_2^{(1)} - \sigma)^2 - E(\delta_2^{(2)} - \sigma)^2 =$$

$$E\left[\left((\frac{S}{n} - \sigma)^2 - (\frac{S}{n} + (X_{(1)} - c) - \sigma)^2\right) I_{X_{(1)}>c}\right] =$$

$$E\left[\left(\frac{S^2}{n^2} - \frac{2S\sigma}{n} + \sigma^2 - \frac{S^2}{n^2} - \frac{2S}{n}(X_{(1)} - c) - (X_{(1)} - c)^2 + 2\sigma\frac{S}{n} + 2\sigma(X_{(1)} - c) - \sigma^2\right) I_{X_{(1)}>c}\right] =$$

$$E\left[\left(X_{(1)} - c\right)\left(-2\frac{S}{n} - (X_{(1)} - c) + 2\sigma\right) I_{X_{(1)}>c}\right] =$$

$$-E\left[\left(X_{(1)} - c\right)\left(2\frac{S}{n} + (X_{(1)} - c) - 2\sigma\right) I_{X_{(1)}>c}\right] =$$

$$-E\left[\left((X_{(1)}-c)^2+2\frac{S}{n}(X_{(1)}-c)-2\sigma(X_{(1)}-c)\right)I_{X_{(1)}>c}\right]=$$

$$-2\frac{\sigma^2}{n^2}-2\frac{(n-1)\sigma}{n}\frac{\sigma}{n}+2\sigma\frac{\sigma}{n}=-2\frac{n\sigma^2}{n^2}+\frac{2\sigma^2}{n}=0.$$

Οπότε, $\text{ΜΤΣ}(\delta_2^{(1)})=\text{ΜΤΣ}(\delta_2^{(2)})$.

Συνεπώς οι εκτιμητές $\delta_2^{(1)}$ και $\delta_2^{(2)}$ είναι ισοδύναμοι. $\square$

Παρατήρηση 3.1.1. *Όπως αποδείχθηκε στην Πρόταση 2.2.6., ο $\delta_2^{(1)}$ είναι ο Ε.Μ.Π. του σ, στην περίπτωση που δεν υπάρχει περιορισμός. Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι ο $\delta_2^{(2)}$ είναι ο Ε.Μ.Π. του σ, στην περίπτωση όπου, $\mu \le c$.*

Επομένως, ο Ε.Μ.Π. του σ στην περίπτωση που δεν έχουμε περιορισμό είναι ισοδύναμος με τον Ε.Μ.Π. του σ, όταν ο περιορισμός υπάρχει. Επειδή η συνάρτηση ζημίας είναι κυρτή, θεωρούμε τον εκτιμητή,

$$\delta_2^{(3)}=\frac{\delta_2^{(1)}+\delta_2^{(2)}}{2}=\begin{cases}\dfrac{S}{n} & ,\ \text{αν}\ \ X_{(1)}\le c\\ \dfrac{S}{n}+\dfrac{(X_{(1)}-c)}{2} & ,\ \text{αν}\ \ X_{(1)}>c\end{cases} \tag{3.3}$$

Πρόταση 3.1.3. *Ο βέλτιστος αναλλοίωτος εκτιμητής του σ , $\delta_2^{(1)}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-X_{(1)})$, είναι μη αποδεκτός, όταν $\mu\le c$, ως προς το Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα και βελτιώνεται απο τον εκτιμητή $\delta_2^{(3)}$, ο οποίος δίνεται στη Σχέση (3.3).*

Απόδειξη

Έχουμε,

$\text{ΜΤΣ}(\delta_2^{(1)})-\text{ΜΤΣ}(\delta_2^{(3)})=$

$$E(\delta_2^{(1)}-\sigma)^2-E(\delta_2^{(3)}-\sigma)^2=$$

$$E\left(\left(\frac{S}{n}-\sigma\right)^2-\left((\frac{S}{n}+\frac{(X_{(1)}-c)}{2}-\sigma)I_{X_{(1)}>c}\right)^2\right)=$$

$$-E\left[\left(\frac{(X_{(1)}-c)}{2}\right)\left(2\frac{S}{n}+\frac{(X_{(1)}-c)}{2}+2\sigma\right)I_{X_{(1)}>c}\right]=$$

$$E\left[\left(-\frac{S}{n}(X_{(1)}-c)-\frac{(X_{(1)}-c)^2}{4}+\sigma(X_{(1)}-c)\right)I_{X_{(1)}>c}\right].$$

Δεδομένου ότι, οι στατιστικές συναρτήσεις $X_{(1)}$ και S είναι ανεξάρτητες και

$\frac{n}{\sigma}(X_{(1)}-c)|X_{(1)}>c\sim G(1,1)$ (βλ. Πρόταση 5.1.1.) προκύπτει ότι,

$\text{ΜΤΣ}(\delta_2^{(1)})-\text{ΜΤΣ}(\delta_2^{(3)})=$

$-E(\frac{S}{n})E[(X_{(1)}-c)I_{X_{(1)}>c}]-\frac{1}{4}E[(X_{(1)}-c)^2I_{X_{(1)}>c}]+E[\sigma(X_{(1)}-c)I_{X_{(1)}>c}]=$

$-\frac{1}{n}\frac{\sigma}{n}(n-1)\sigma-2\frac{\sigma^2}{4n^2}+\frac{\sigma^2}{n}=-\frac{(n-1)}{n^2}\sigma^2-\frac{\sigma^2}{2n^2}+\frac{\sigma^2}{n}=\frac{-2n\sigma^2+2\sigma^2-\sigma^2+2n\sigma^2}{2n^2}\Leftrightarrow$

$$\text{ΜΤΣ}(\delta_2^{(1)})-\text{ΜΤΣ}(\delta_2^{(3)})=\frac{\sigma^2}{2n^2}>0 \tag{3.4}$$

Επομένως, ο εκτιμητής $\delta_2^{(1)}$ είναι μη αποδεκτός με κριτήριο το ΜΤΣ. Επιπλέον, επειδή $\text{ΜΤΣ}(\delta_2^{(1)})=\frac{\sigma^2}{n}$, προκύπτει από τη Σχέση (3.4), ότι $\text{ΜΤΣ}(\delta_2^{(3)})=\frac{2n-1}{2n^2}\sigma^2$. □

Επίσης, οι Singh.et.al. (1993) πρότειναν έναν ακόμη εκτιμητή,

$$\delta_2^{(4)}=\begin{cases}\frac{S}{n} & ,\text{ αν }\ X_{(1)}\le c\\ \frac{S}{n+1}+n\frac{(X_{(1)}-c)}{n+1} & ,\text{ αν }\ X_{(1)}>c\end{cases} \tag{3.5}$$

Θεώρημα 3.1.1. *Οι εκτιμητές της παραμέτρου κλίμακας σ (Best Affine Equivariant) $\delta_2^{(1)}$ που δίνεται στη Σχέση (3.2) και $\delta_2^{(3)}$ της Σχέσης (3.3), είναι μη αποδεκτοί ως προς το Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα όταν $\mu\le c$ και βελτιώνονται απο τον εκτιμητή $\delta_2^{(4)}$, ο οποίος δίνεται στη Σχέση (3.5).*

Απόδειξη

Συγκρίνουμε αρχικά τους εκτιμητές $\delta_2^{(1)}$ και $\delta_2^{(4)}$ ως προς το Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα (ΜΤΣ). Επομένως,

$\text{ΜΤΣ}(\delta_2^{(1)})-\text{ΜΤΣ}(\delta_2^{(4)})=$

$E(\delta_2^{(1)}-\sigma)^2-E(\delta_2^{(4)}-\sigma)^2=$

$E[(\delta_2^{(1)}-\delta_2^{(4)})(\delta_2^{(1)}+\delta_2^{(4)}-2\sigma)]=$

$$E\left[\left(\frac{S}{n}-\frac{S}{n+1}-\frac{n(X_{(1)}-c)}{n+1}\right)\left(\frac{S}{n}+\frac{S}{n+1}+\frac{n(X_{(1)}-c)}{n+1}-2\sigma\right)I_{X_{(1)}>c}\right]=$$

$$E\left[\left(\frac{S}{n(n+1)}-\frac{n}{n+1}(X_{(1)}-c)\right)\left(\frac{2n+1}{n(n+1)}S+\frac{n}{n+1}(X_{(1)}-c)-2\sigma\right)I_{X_{(1)}>c}\right]=$$

$$E\left[\left(\frac{S^2(2n+1)\sigma^2}{n^2(n+1)^2\sigma^2}\right)I_{X_{(1)}>c}\right]+E\left[\left(\frac{\sigma^2}{(n+1)^2n}\frac{S}{\sigma}\frac{n}{\sigma}(X_{(1)}-c)\right)I_{X_{(1)}>c}\right]-$$

$$\frac{2\sigma^2}{n(n+1)}E\left[\left(\frac{S}{\sigma}\right)I_{X_{(1)}>c}\right]-E\left[\left(\frac{(2n+1)\sigma^2}{(n+1)^2n}\frac{S}{\sigma}\frac{n(X_{(1)}-c)}{\sigma}\right)I_{X_{(1)}>c}\right]-$$

$$\frac{n^2\sigma^2}{(n+1)^2n^2}E\left[\left(\frac{(X_{(1)}-c)^2n^2}{\sigma^2}\right)I_{X_{(1)}>c}\right]+E\left[\left(\frac{2n\sigma^2}{(n+1)n}\frac{(X_{(1)}-c)}{\sigma}n\right)I_{X_{(1)}>c}\right]=$$

$$\frac{(2n+1)\sigma^2}{n^2(n+1)^2}(n-1+(n-1)^2)+\frac{\sigma^2}{(n+1)^2n}(n-1)-2\frac{\sigma^2(n-1)}{n(n+1)}-\frac{(2n+1)}{(n+1)^2}\frac{\sigma^2}{n}(n-1)-2\frac{\sigma^2}{(n+1)^2}+2\frac{\sigma^2}{n+1}=$$

$$\frac{2\sigma^2}{n(n+1)}-\frac{\sigma^2}{(n+1)^2n}-\frac{\sigma^2}{(n+1)^2}+\frac{\sigma^2(2n+1)}{n^2(n+1)^2}(n^2-n)-\frac{(2n+1)\sigma^2}{(2n+1)^2}+\frac{(2n+1)\sigma^2}{(n+1)^2n}=$$

$$\frac{2\sigma^2(n+1)n}{n^2(n+1)^2}+\frac{2\sigma^2n}{n^2(n+1)^2}+\frac{(2n\sigma^2+\sigma^2)(n^2-n)}{n^2(n+1)^2}-\frac{(2n+1)2n^2\sigma^2}{n^2(n+1)^2}+\frac{(2n+1)\sigma^2n}{n^2(n+1)^2}=$$

$$\frac{\sigma^2n^2+\sigma^2n}{n^2(n+1)^2}=\frac{n\sigma^2+\sigma^2}{n(n+1)^2}\Leftrightarrow$$

$$\mathrm{MT\Sigma}(\delta_2^{(1)})-\mathrm{MT\Sigma}(\delta_2^{(4)})=\frac{\sigma^2}{n(n+1)}>0 \tag{3.6}$$

Άρα, όταν $\mu\leq c$, ο εκτιμητής $\delta_2^{(1)}$, ως προς το Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα είναι μη αποδεκτός και βελτιώνεται απο τον εκτιμητή $\delta_2^{(4)}$.

Θα συγκρίνουμε τώρα τους εκτιμητές $\delta_2^{(3)}$ και $\delta_2^{(4)}$ ως προς το Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα (ΜΤΣ). Από την απόδειξη της Πρότασης (3.1.3.) γνωρίζουμε ότι, $\mathrm{MT\Sigma}(\delta_2^{(1)})-\mathrm{MT\Sigma}(\delta_2^{(3)})=\frac{\sigma^2}{2n^2}$ και από τη Σχέση (3.6), προκύπτει ότι, $\mathrm{MT\Sigma}(\delta_2^{(3)})-\mathrm{MT\Sigma}(\delta_2^{(4)})=\frac{\sigma^2}{n(n+1)}-\frac{\sigma^2}{2n^2}=\frac{2n\sigma^2-\sigma^2(n+1)}{2n^2(n+1)}=\frac{n\sigma^2-\sigma^2}{2n^2(n+1)}=\frac{\sigma^2(n-1)}{2n^2(n+1)}>0.$

Συνεπώς, όταν $\mu\leq c$, ο εκτιμητής $\delta_2^{(3)}$ ως προς το Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα είναι μη αποδεκτός αφού βελτιώνεται απο τον εκτιμητή $\delta_2^{(4)}$. □

3.2 Σύγκριση των εκτιμητών με το κριτήριο του Pitman

Στην ενότητα αυτή θα συγκρίνουμε τους εκτιμητές των παραμέτρων θέσης και κλίμακας που προτάθηκαν στην προηγούμενη ενότητα χρησιμοποιώντας το κριτήριο του Pitman. Αρχικά θα συγκρίνουμε τους εκτιμητές της παραμέτρου θέσης μ, $\delta_1^{(1)}$ και $\delta_1^{(2)}$.

Θεώρημα 3.2.1. *Οι εκτιμητές της παραμέτρου θέσης μ, $\delta_1^{(2)}$ που δίνεται στη Σχέση (3.1) και $\delta_1^{(1)}$ που δίνεται στην Πρόταση 2.3.1. δεν μπορούν να συγκριθούν χρησιμοποιώντας το κριτήριο του Pitman.*

Απόδειξη

Έχουμε,

$MPN(\delta_1^{(2)},\delta_1^{(1)}) = P(|\delta_1^{(2)} - \mu| < |\delta_1^{(1)} - \mu||\delta_1^{(2)} \neq \delta_1^{(1)}) =$

$P(|c - \frac{S}{n^2} - \frac{1}{n}(X_{(1)} - c) - \mu| < |X_{(1)} - \frac{S}{n^2} - \mu||X_{(1)} > c) =$

$P((c - \frac{S}{n^2} - \frac{1}{n}(X_{(1)} - c) - \mu - X_{(1)} + \frac{S}{n^2} + \mu)(c - \frac{S}{n^2} - \frac{1}{n}(X_{(1)} - c) - \mu + X_{(1)} - \frac{S}{n^2} - \mu)$
$< 0|X_{(1)} > c) =$

$P(-\frac{n+1}{n}(X_{(1)} - c)(\frac{n-1}{n}(X_{(1)} - c) - \frac{2S}{n^2} + 2(c - \mu)) < 0|X_{(1)} > c) =$

$P(\frac{n-1}{n}\frac{n^2}{\sigma}(X_{(1)} - c) - \frac{2S}{n^2}\frac{n^2}{\sigma} + \frac{n^2}{\sigma}2(c - \mu) > 0|X_{(1)} > c) =$

$P((n-1)n\frac{(X_{(1)} - c)}{\sigma} - 2\frac{S}{\sigma} + w > 0|X_{(1)} > c) = P((n-1)T - 2Z + w > 0|X_{(1)} >$
$c) = h(w),$

όπου $T = n\frac{(X_{(1)} - c)}{\sigma}$, $Z = \frac{S}{\sigma}$ και $w = 2n^2\frac{(c-\mu)}{\sigma} \geq 0$.

Τότε,

$h(w) = P(T - \frac{1}{n-1}(2Z - w) > 0|X_{(1)} > c) =$

$P(\{Z < \frac{w}{2}\}$ ή $\{Z > \frac{w}{2}\}$ και $T > \frac{1}{n-1}(2Z - w)|X_{(1)} > c) =$

$P(Z < \frac{w}{2}|X_{(1)} > c) + P(Z > \frac{w}{2}$ και $T > \frac{1}{n-1}(2Z - w)|X_{(1)} > c).$

Όμως, $Z|X_{(1)} > c \sim G(n-1, 1)$, $\quad f_Z(z) = \frac{1}{(n-2)!}z^{n-2}e^{-z}$ οπότε,

$P(Z < \frac{w}{2}|X_{(1)} > c) = \int_0^{\frac{w}{2}} \frac{1}{(n-2)!} z^{n-2} e^{-z} dz.$

Επιπλέον, $T = n\frac{(X_{(1)} - c)}{\sigma}|X_{(1)} > c \sim G(1,1), \quad f_T(t) = e^{-t}$, οπότε,

$P(Z > \frac{w}{2} \text{ και } T > \frac{1}{n-1}(2Z-w)|X_{(1)} > c) = \int_{\frac{w}{2}}^{\infty} \int_{\frac{1}{n-1}(2z-w)}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} z^{n-2} e^{-z} e^{-t} dt dz$

$= \int_{\frac{w}{2}}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} z^{n-2} e^{-z} [-e^{-t}]_{t=\frac{1}{n-1}(2z-w)}^{\infty} dz = \frac{1}{(n-2)!} \int_{\frac{w}{2}}^{\infty} z^{n-2} e^{-z} e^{-\frac{1}{n-1}(2z-w)} dz.$

Τελικά $h(w) = \int_0^{\frac{w}{2}} \frac{1}{(n-2)!} z^{n-2} e^{-z} dz + \frac{1}{(n-2)!} \int_{\frac{w}{2}}^{\infty} z^{n-2} e^{-z} e^{-\frac{1}{n-1}(2z-w)} dz.$

Παρατηρούμε ότι, $\lim_{w\to\infty} h(w) = \int_0^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} z^{n-2} e^{-z} dz = 1.$

Επιπλέον, $\lim_{w\to 0} h(w) = \frac{1}{(n-2)!} \int_0^{\infty} z^{n-2} e^{-z} e^{-\frac{n+1}{n-1}z} dz = (\frac{n-1}{n+1})^{n-1} = \alpha_n$, με α_n να είναι φθίνουσα συνάρτηση, συνεπώς $\alpha_n \leq \alpha_2 = \frac{1}{3}$. Άρα η $h(w) = MPN(\delta_1^{(2)}, \delta_1^{(1)})$ παίρνει τιμές μεταξύ του α_n ($\leq \frac{1}{3}$) και του 1. Συνεπώς οι εκτιμητές της παραμέτρου θέσης μ, $\delta_1^{(2)}$ και $\delta_1^{(1)}$ δεν μπορούν να συγκριθούν ως πρός το κριτήριο του $Pitman(MPN)$. □

Θεώρημα 3.2.2. *Για το πρόβλημα εκτίμησης της παραμέτρου κλίμακας σ, ισχύει,*
(i) $MPN(\delta_2^{(2)}, \delta_2^{(1)}) > \frac{1}{2}$.
(ii) $MPN(\delta_2^{(2)}, \delta_2^{(3)}) > \frac{1}{2}$.
(iii) $MPN(\delta_2^{(2)}, \delta_2^{(4)}) > \frac{1}{2}$.

Απόδειξη

Από την Πρόταση 5.1.5. γνωρίζουμε ότι $G_n = \frac{n}{\sigma}(X_{(1)} - c) + \frac{S}{\sigma}|X_{(1)} > c \sim G(n,1)$. Επομένως,

(i) $MPN(\delta_2^{(2)}, \delta_2^{(1)}) =$

$P(|\delta_2^{(2)} - \sigma| < |\delta_1^{(2)} - \sigma||\delta_2^{(2)} \neq \delta_1^{(2)}) =$

$P(|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - min(X_{(1)}, c)) - \sigma| < |\frac{S}{n} - \sigma| \mid X_{(1)} > c) =$

$$P(|(\frac{S}{n} + (X_{(1)} - c) - \sigma| < |\frac{S}{n} - \sigma| \mid X_{(1)} > c) =$$

$$P((X_{(1)} - c)(\frac{2S}{n} + (X_{(1)} - c) - 2\sigma) < 0 \mid X_{(1)} > c) =$$

$$P(\frac{2S}{n} + (X_{(1)} - c) - 2\sigma < 0 \mid X_{(1)} > c) =$$

$$P(\frac{2S}{n}\frac{n}{\sigma} + (X_{(1)} - c)\frac{n}{\sigma} - 2\sigma\frac{n}{\sigma} < 0 \mid X_{(1)} > c) =$$

$$P(\frac{2S}{\sigma} + (X_{(1)} - c)\frac{n}{\sigma} < 2n \mid X_{(1)} > c) \geq$$

$$P(\frac{S}{\sigma} + \frac{n}{\sigma}(X_{(1)} - c) < n \mid X_{(1)} > c) = P(G_n < n),\ G_n \sim Gamma(n,1).$$

Όμως, από την Πρόταση 5.1.2.,

$$P(G_n < n) = \sum_{k=n}^{\infty} e^{-n}\frac{n^k}{k!} > \frac{1}{2}, \text{ λόγω της Πρότασης 5.1.4.}$$

(ii) $MPN(\delta_2^{(2)}, \delta_2^{(3)}) =$

$$P(|(\frac{S}{n} + (X_{(1)} - c) - \sigma| < |\frac{S}{n} + \frac{1}{2}(X_{(1)} - c) - \sigma| \mid X_{(1)} > c) =$$

$$P(\frac{1}{2}(X_{(1)} - c)(\frac{2S}{n} + \frac{3}{2}(X_{(1)} - c) - 2\sigma) < 0|X_{(1)} > c) =$$

$$P(\frac{2S}{n}\frac{n}{\sigma} + \frac{3}{2}\frac{n}{\sigma}(X_{(1)} - c) < \frac{2\sigma n}{\sigma}|X_{(1)} > c) \geq$$

$$P(\frac{S}{\sigma} + \frac{n}{\sigma}(X_{(1)} - c) < n|X_{(1)} > c) = P(G_n < n),\ G_n \sim Gamma(n,1).$$

Όμως, από την Πρόταση 5.1.2.,

$$P(G_n < n) = \sum_{k=n}^{\infty} e^{-n}\frac{n^k}{k!} > \frac{1}{2}, \text{ λόγω της Πρότασης 5.1.4.}$$

(iii) $MPN(\delta_2^{(2)}, \delta_2^{(4)}) =$

$$P(|\frac{S}{n} + (X_{(1)} - c) - \sigma| < |\frac{S}{n+1} + \frac{n(X_{(1)} - c)}{n+1} - \sigma| \mid X_{(1)} > c) =$$

$$P[(\frac{S}{n} + \frac{S}{n+1} + (X_{(1)} - c)(1 + \frac{n}{n+1}) - 2\sigma)(\frac{S}{n} - \frac{S}{n+1} + (1 - \frac{n}{n+1})(X_{(1)} - c)) < 0|X_{(1)} > c] =$$

$$P[(\frac{2Sn + S}{n(n+1)} + (X_{(1)} - c)(\frac{2n+1}{n+1}) - 2\sigma)(S + \frac{1}{n+1}(X_{(1)} - c)) < 0|X_{(1)} > c] =$$

$$P(\frac{2n+1}{n(n+1)}S + (X_{(1)} - c)(\frac{2n+1}{n+1}) - 2\sigma < 0|X_{(1)} > c) =$$

$$P(\frac{2n+1}{n(n+1)}\frac{n(n+1)}{(2n+1)\sigma}S + (X_{(1)} - c)\frac{n}{\sigma} - \frac{2n(n+1)}{2n+1} < 0|X_{(1)} > c) =$$

$$P(\frac{S}{\sigma} - (X_{(1)} - c)\frac{n}{\sigma} < \frac{2n(n+1)}{2n+1}|X_{(1)} > c) = P(G_n < \frac{2n(n+1)}{2n+1}),\ G_n \sim Gamma(n,1).$$

Όμως, από την Πρόταση 5.1.2.,

$$P(G_n < \frac{2n(n+1)}{2n+1}) \geq P(G_n < n) > \frac{1}{2}, \text{ λόγω της Πρότασης 5.1.4.} \qquad \square$$

Παρατήρηση 3.2.1. *Αξίζει να σημειωθεί ότι αν και οι εκτιμητές $\delta_2^{(3)}$ και $\delta_2^{(4)}$ έχουν καλύτερες επιδόσεις απο τον εκτιμητή $\delta_2^{(2)}$ ως προς το κριτήριο του Μέσου Τετραγωνικού Σφάλματος, σε σχέση με το κριτήριο Pitman (MPN) ο εκτιμητής $\delta_2^{(2)}$ υπερέχει. Επιπλεον ο $\delta_2^{(2)}$ εκτιμά καλύτερα την παράμετρο θέσης σ απο τον $\delta_2^{(1)}$ σε σχέση με το κριτήριο Pitman (MPN) ενώ ως προς το κριτήριο του Μέσου Τετραγωνικού Σφάλματος οι δύο εκτιμητές είναι ισοδύναμοι.*

3.3 Εφαρμογή στο πρόβλημα των δύο δειγμάτων

Έστω $X_1, X_2, ..., X_n$ τυχαίο δείγμα απο τη διπαραμετρική εκθετική κατανομή $X \sim \mathcal{E}(\mu_1, \sigma_1)$, με πυκνότητα πιθανότητας,

$$f_1(x) = \frac{1}{\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)}{\sigma_1}},\ x \geq \mu_1,\ \sigma_1 > 0$$

και $X_{(1)} = min(X_1, ..., X_n)$.

Έστω επίσης $Y_1, Y_2, ..., Y_m$ τυχαίο δείγμα απο τη διπαραμετρική εκθετική κατανομή $Y \sim \mathcal{E}(\mu_2, \sigma_2)$, με πυκνότητα πιθανότητας,

$$g_1(y) = \frac{1}{\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)}{\sigma_2}},\ y \geq \mu_2,\ \sigma_2 > 0$$

και $Y_{(1)} = min(Y_1, ..., Y_m)$.

Μας ενδιαφέρει η εκτίμηση των παραμέτρων μ_1 και σ_1 όταν γνωρίζουμε ότι ισχύει ο περιορισμός $\mu_1 \leq \mu_2$. Στην περίπτωση που δεν υπάρχει περιορισμός, οι βέλτιστοι αναλλοίωτοι εκτιμητές (Best Affine Equivariant) ως προς το Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα, των μ_1, σ_1 είναι $\delta_{*1}^{(1)} = X_{(1)} - \frac{S}{n^2}$ και $\delta_{*2}^{(1)} = \frac{S}{n}$ αντίστοιχα (βλ. Πρόταση 2.3.1.).
Θα προσπαθήσουμε να βελτιώσουμε την παραπάνω εκτίμηση στην περίπτωση όπου $\mu_1 \leq \mu_2$. Οι Singh.et.al. (1993) πρότειναν τον παρακάτω εκτιμητή για την παράμετρο θέσης μ_1.

$$\delta_{*1}^{(2)} = \begin{cases} \delta_{*1}^{(1)} & , \text{αν} \;\; X_{(1)} \leq Y_{(1)} \\ Y_{(1)} - \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - Y_{(1)}) & , \text{αν} \;\; X_{(1)} > Y_{(1)} \end{cases} \tag{3.7}$$

Θεώρημα 3.3.1. *Ο εκτιμητής της παραμέτρου θέσης μ_1 (Best Affine Equivariant) , $\delta_{*1}^{(1)} = X_{(1)} - \frac{S}{n^2}$, είναι μη αποδεκτός ως προς το Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα όταν $\mu_1 \leq \mu_2$, και βελτιώνεται απο τον $\delta_{*1}^{(2)}$ που δίνεται στη Σχέση (3.7).*

Απόδειξη

Θα συγκρίνουμε τους εκτιμητές $\delta_{*1}^{(1)}$ και $\delta_{*1}^{(2)}$ ως προς το Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα (ΜΤΣ). Έχουμε,

$$\text{ΜΤΣ}(\delta_{*1}^{(1)}) - \text{ΜΤΣ}(\delta_{*1}^{(2)}) = E(\delta_{*1}^{(1)} - \mu_1)^2 - E(\delta_{*1}^{(2)} - \mu_1)^2 =$$

$$E(X_{(1)} - \frac{S}{n^2} - \mu_1)^2 - E[(Y_{(1)} - \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - Y_{(1)}) - \mu_1)I_{X_{(1)}>Y_{(1)}}]^2 =$$

$$E[((X_{(1)} - \frac{S}{n^2} - \mu_1)^2 - (Y_{(1)} - \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - Y_{(1)}) - \mu_1)^2)I_{X_{(1)}>Y_{(1)}}] =$$

$$E[(X_{(1)} + Y_{(1)} + \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - Y_{(1)}) - \frac{S}{n^2})(X_{(1)} - Y_{(1)} - \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - Y_{(1)}) - 2\mu_1^2$$
$$- \frac{S}{n^2})I_{X_{(1)}>Y_{(1)}}] =$$

$$E[E[(X_{(1)} + c + \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - c) - \frac{S}{n^2})(X_{(1)} - c - \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - c) - 2\mu_1^2 - \frac{S}{n^2})I_{X_{(1)}>c}$$
$$|Y_{(1)} = c]] =$$

$$\frac{n+1}{n}E[E[(X_{(1)}-c)(\frac{n-1}{n}(X_{(1)}-c)-\frac{2S}{n^2}+2c-2\mu_1)I_{X_{(1)}>c}|Y_{(1)}=c]]=$$

$$\frac{n+1}{n}E[E(\frac{n-1}{n}\frac{2\sigma_1^2}{n^2}-2\frac{n-1}{n}\frac{\sigma_1^2}{n^2}+2(c-\mu_1)(X_{(1)}-c)I_{X_{(1)}>c}|Y_{(1)}=c]]=$$

$$2\frac{n+1}{n}\frac{\sigma_1}{n}E[E(c-\mu_1)|Y_{(1)}=c]]=2\sigma_1\frac{n+1}{n^2}E(Y_{(1)}-\mu_1).$$

Επειδή, η τ.μ. $Y_{(1)}>\mu_2$ και ισχύει ο περιορισμός $\mu_2\geq\mu_1$, έπεται ότι $E(Y_{(1)}-\mu_1)>0$, επομένως ΜΤΣ$(\delta_{*1}^{(1)})-$ΜΤΣ$(\delta_{*1}^{(2)})\geq 0$. Συνεπώς ο εκτιμητής $\delta_{*1}^{(2)}$ είναι καλύτερος απο τον $\delta_{*1}^{(1)}$ όταν $\mu_1\leq\mu_2$. □

Θα εκτιμήσουμε τώρα την παράμετρο κλίμακας σ_1. Γνωρίζουμε από την Πρόταση 2.3.1., ότι στην περίπτωση που δεν υπάρχει περιορισμός, ο βέλτιστος αναλλοίωτος εκτιμητής (Best Affine Equivariant) του σ_1 είναι,

$$\delta_{*2}^{(1)}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-X_{(1)}).$$

Επιπλέον ο εκτιμητής $\delta_{*2}^{(1)}$ είναι ο Εκτιμητής Μέγιστης Πιθανοφάνειας (ΕΜΠ) της παραμέτρου κλίμακας σ_1 (βλ. Πρόταση 2.2.6.). Θα προσπαθήσουμε να βελτιώσουμε την εκτίμηση αυτή στην περίπτωση που $\mu_1\leq\mu_2$. Έστω ο εκτιμητής του σ_1, όταν $\mu_1\leq\mu_2$, $\delta_{*2}^{(2)}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-min(X_{(1)},Y_{(1)}))$.

Θεώρημα 3.3.2. *Για το πρόβλημα εκτίμησης της παραμέτρου θέσης σ_1, υπό τον περιορισμό $\mu_1\leq\mu_2$, ισχύουν τα εξής,*

$$(i)\quad MT\Sigma(\delta_{*2}^{(2)})=MT\Sigma(\delta_{*2}^{(1)})=\frac{\sigma_1^2}{n^2}$$

$$(ii)\quad MT\Sigma(\delta_{*2}^{(1)})=MT\Sigma(\delta_{*2}^{(3)})+\frac{\sigma_1^2}{2n^2}$$

$$\text{όπου}\quad \delta_{*2}^{(3)}=\begin{cases}\dfrac{S}{n} & ,\ \text{αν}\ \ X_{(1)}\leq Y_{(1)}\\ \dfrac{S}{n}+\dfrac{(X_{(1)}-Y_{(1)})}{2} & ,\ \text{αν}\ \ X_{(1)}>Y_{(1)}\end{cases}$$

$$(iii)\quad MT\Sigma(\delta_{*2}^{(3)}) = MT\Sigma(\delta_{*2}^{(4)}) + \frac{n-1}{2n^2(n+1)}\sigma_1^2$$

$$\acute{o}\pi o\upsilon\ \ \delta_{*2}^{(4)} = \begin{cases} \dfrac{S}{n} & ,\ \alpha\nu\ \ X_{(1)} \leq Y_{(1)} \\ \dfrac{S}{n+1} + n\dfrac{(X_{(1)} - Y_{(1)})}{n+1} & ,\ \alpha\nu\ \ X_{(1)} > Y_{(1)} \end{cases}$$

Απόδειξη

(i) $\mathrm{MT\Sigma}(\delta_{*2}^{(1)}) - \mathrm{MT\Sigma}(\delta_{*2}^{(2)}) =$

$E(\delta_{*2}^{(1)} - \sigma_1)^2 - E(\delta_{*2}^{(2)} - \sigma_1)^2 =$

$E[(\delta_{*2}^{(1)} - \delta_{*2}^{(2)})(\delta_{*2}^{(1)} + \delta_{*2}^{(2)} - 2\sigma_1)] =$

$E[(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - X_{(1)}) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - Y_{(1)}))(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - Y_{(1)}) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - X_{(1)}) - 2\sigma_1)I_{X_{(1)}>Y_{(1)}}] =$

$-E[(X_{(1)} - Y_{(1)})(\frac{2}{n}S + (X_{(1)} - Y_{(1)}) - 2\sigma_1)I_{X_{(1)}>Y_{(1)}}] =$

$-E[E[(X_{(1)} - c)(\frac{2}{n}S + (X_{(1)} - c) - 2\sigma_1)I_{X_{(1)}>c}|Y_{(1)} = c]] =$

$-E[E[((X_{(1)} - c)\frac{2}{n}S + (X_{(1)} - c)^2 - 2\sigma_1(X_{(1)} - c))I_{X_{(1)}>c}|Y_{(1)} = c]] =$

$-E[((X_{(1)} - c)\frac{2}{n}S + (X_{(1)} - c)^2 - 2\sigma_1(X_{(1)} - c))I_{X_{(1)}>c}] =$

$-\frac{\sigma_1}{n}\frac{2}{n}\sigma_1(n-1) - 2\frac{\sigma_1^2}{n^2} + 2\frac{\sigma_1^2}{n} = 0.$

Δηλαδή οι εκτιμητές $\delta_{*2}^{(1)}$ και $\delta_{*2}^{(2)}$ είναι ισοδύναμοι ως προς το Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα.

$\mathrm{MT\Sigma}(\delta_{*2}^{(2)}) = \mathrm{MT\Sigma}(\delta_{*2}^{(1)}) = E(\delta_{*2}^{(1)} - \sigma_1)^2 = E(\frac{S}{n} - \sigma_1)^2 = E(\frac{S^2}{n^2} - \frac{2}{n}S\sigma_1 + \sigma_1^2) =$

$\frac{1}{n^2}E(S^2) - \frac{2}{n}\sigma_1 E(S) + \sigma_1^2 = \frac{1}{n^2}(Var(S) + E(S)^2) - \frac{2}{n}\sigma_1(n-1)\sigma_1 + \sigma_1^2 =$

$\frac{1}{n^2}((n-1)\sigma_1^2 + (n-1)^2\sigma_1^2) - \frac{2}{n}\sigma_1(n-1)\sigma_1 + \sigma_1^2 = \frac{(n-1)\sigma_1^2}{n} - \frac{2(n-1)\sigma_1^2}{n} + \sigma_1^2 =$

$-\frac{(n-1)\sigma_1^2}{n}+\sigma_1^2=\frac{\sigma_1^2}{n}$.

(ii) $\mathrm{MT\Sigma}(\delta_{*2}^{(1)})-\mathrm{MT\Sigma}(\delta_{*2}^{(3)})=$

$E(\delta_{*2}^{(1)}-\sigma_1)^2-E(\delta_{*2}^{(3)}-\sigma_1)^2=$

$E[(\delta_{*2}^{(1)}-\delta_{*2}^{(3)})(\delta_{*2}^{(1)}+\delta_{*2}^{(3)}-2\sigma_1)]=$

$E[-(\frac{X_{(1)}-Y_{(1)}}{2})(2\frac{S}{n}+\frac{X_{(1)}-Y_{(1)}}{2}-2\sigma_1)I_{X_{(1)}>Y_{(1)}}]=$

$E[E[-(\frac{X_{(1)}-c}{2})(2\frac{S}{n}+\frac{X_{(1)}-c}{2}-2\sigma_1)I_{X_{(1)}>c}|Y_{(1)}=c]]=$

$E[-(\frac{X_{(1)}-c}{2})(2\frac{S}{n}+\frac{X_{(1)}-c}{2}-2\sigma_1)I_{X_{(1)}>c}]=$

$-\frac{\sigma_1^2(n-1)}{n^2}-\frac{2\sigma_1^2}{4n^2}+\frac{2\sigma_1}{2}\frac{\sigma_1}{n}=$

$-\frac{\sigma_1^2(n-1)}{n^2}-\frac{1}{2}\frac{\sigma_1^2}{n^2}+\frac{\sigma_1^2}{n^2}=$

$-\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_1^2}{n^2}-\frac{1}{2}\frac{\sigma_1^2}{n^2}+\frac{\sigma_1^2}{n}=\frac{\sigma_1^2}{2n^2}>0.$

Συνεπώς, $\mathrm{MT\Sigma}(\delta_{*2}^{(1)})=\mathrm{MT\Sigma}(\delta_{*2}^{(3)})+\frac{\sigma_1^2}{2n^2}$.

(iii) $\mathrm{MT\Sigma}(\delta_{*2}^{(3)})-\mathrm{MT\Sigma}(\delta_{*2}^{(4)})=$

$E(\delta_{*2}^{(3)}-\sigma_1)^2-E(\delta_{*2}^{(4)}-\sigma_1)^2=$

$E[(\delta_{*2}^{(3)}-\delta_{*2}^{(4)})(\delta_{*2}^{(3)}+\delta_{*2}^{(4)}-2\sigma_1)]=$

$E[(S\frac{1}{n}+\frac{1}{2}(X_{(1)}-Y_{(1)})-S\frac{1}{n+1}-(X_{(1)}-Y_{(1)})\frac{n}{n+1})(S\frac{1}{n}+(X_{(1)}-Y_{(1)})\frac{1}{2}+S\frac{1}{n+1}+$
$(X_{(1)}-Y_{(1)})\frac{n}{n+1}-2\sigma_1)I_{X_{(1)}>Y_{(1)}}]=$

$E[(S\frac{1}{n(n+1)}+(X_{(1)}-Y_{(1)})\frac{1-n}{2(n+1)})(S\frac{2n+1}{n(n+1)}+(X_{(1)}-Y_{(1)})\frac{(3n+1)}{2(n+1)}-2\sigma_1)I_{X_{(1)}>Y_{(1)}}]=$

$E[E[(S\frac{1}{n(n+1)}+(X_{(1)}-c)\frac{1-n}{2(n+1)})(S\frac{2n+1}{n(n+1)}+(X_{(1)}-c)\frac{3n+1}{2(n+1)}-2\sigma_1)I_{X_{(1)}>c}$

$|Y_{(1)}=c]]=$

$E[(S\frac{1}{n(n+1)}+(X_{(1)}-c)\frac{1-n}{2(n+1)})(S\frac{2n+1}{n(n+1)}+(X_{(1)}-c)\frac{3n+1}{2(n+1)}-2\sigma_1)I_{X_{(1)}>c}]=$

$$E[(S^2\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}+S(X_{(1)}-c)\frac{3n+1}{2n(n+1)^2}-2\sigma_1 S\frac{1}{n(n+1)}+S(X_{(1)}-c)\frac{(1-n)}{2n(n+1)^2}\cdot$$

$$(2n+1)+(X_{(1)}-c)^2\frac{(3n+1)(1-n)}{4(n+1)^2}-2\sigma_1(X_{(1)}-c)\frac{1-n}{2(n+1)})I_{X_{(1)}>c}]=$$

$$E[(S^2\frac{2n+1}{n^2}(n+1)^2+S(X_{(1)}-c)\frac{3n+1+(1-n)(2n+1)}{2n(n+1)^2}-2\sigma_1 S\frac{1}{n(n+1)}+(X_{(1)}-$$
$$c)^2\frac{(3n+1)(1-n)}{4(n+1)^2}-2\sigma_1(X_{(1)}-c)\frac{1-n}{2(n+1)})I_{X_{(1)}>c}]=$$

$$\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}((n-1)^2\sigma_1^2+(n-1)\sigma_1^2)+E[S(X_{(1)}-c)(\frac{2n-n^2+1}{n(n+1)^2})I_{X_{(1)}>c}]-\frac{2\sigma_1^2(n-1)}{n(n+1)}$$
$$+\frac{\sigma_1^2(3n+1)(1-n)}{2n^2(n+1)^2}-\frac{\sigma_1^2(1-n)}{n(n+1)}=$$

$$\frac{\sigma_1^2(2n+1)(n-1)}{n(n+1)^2}+\frac{\sigma_1^2(n-1)}{n}\frac{2n-n^2+1}{n(n+1)^2}-\frac{2\sigma_1^2(n-1)}{n(n+1)}+\frac{\sigma_1^2(3n+1)(1-n)}{2n^2(n+1)^2}-\frac{\sigma_1^2(1-n)}{n(n+1)}=$$

$$\frac{2\sigma_1^2n(2n+1)(n-1)}{2n^2(n+1)^2}+\frac{4\sigma_1^2n(n-1)-2\sigma_1^2(n-1)^2(n+1)}{2n^2(n+1)^2}-\frac{4\sigma_1^2n(n^2-1)}{2n^2(n+1)^2}+\frac{\sigma_1^2(3n+1)}{2n^2(n+1)^2}$$
$$\cdot(1-n)-\frac{2\sigma_1^2n(1-n)(n+1)}{2n^2(n+1)^2}=$$

$$\frac{4\sigma_1^2n^3-2\sigma_1^2m^2-2\sigma_1^2n}{2n^2(n+1)^2}+\frac{4\sigma_1^2n^2-4\sigma_1^2n-2\sigma_1^2n^3+2\sigma_1^2n+2\sigma_1^2-2\sigma_1^2}{2n^2(n+1)^2}-\frac{4\sigma_1^2n^3-4\sigma_1^2n}{2n^2(n+1)^2}$$
$$+\frac{2\sigma_1^2n-3\sigma_1^2n^2+\sigma_1^2}{2n^2(n+1)^2}-\frac{-2\sigma_1^2n^3+\sigma_1^2n}{2n^2(n+1)^2}=\frac{\sigma_1^2n^2-\sigma_1^2}{2n^2(n+1)^2}=\frac{\sigma_1^2(n-1)}{2n^2(n+1)}>0. \qquad \square$$

Παρατήρηση 3.3.1. *Οι βέλτιστοι αναλλοίωτοι εκτιμητές της παραμέτρου κλίμακας* σ, $\delta_{*2}^{(1)}$ *και* $\delta_{*2}^{(3)}$, *ως προς το Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα, όταν* $\mu_1 \leq \mu_2$ *είναι μη αποδεκτοί. Η εκτίμηση βελτιώνεται απο τον* $\delta_{*2}^{(4)}$.

3.4 Σύγκριση των εκτιμητών στα δύο δειγμάτα με το κριτήριο του Pitman

Θα συγκρίνουμε τώρα τους εκτιμητές της προηγούμενης ενότητας ως πρός το κριτήριο του Pitman (MPN). Αρχικά συγκρίνουμε τους εκτιμητές $\delta_{*1}^{(1)}$ και $\delta_{*1}^{(2)}$ του μ_1, όταν $\mu_1 \leq \mu_2$.

Πρόταση 3.4.1. *Οι εκτιμητές* $\delta_{*1}^{(1)}$ *και* $\delta_{*1}^{(2)}$ *δεν μπορούν να συγκριθούν ως πρός το* *κριτήριο του Pitman* (MPN).

Απόδειξη
$MPN(\delta_{*1}^{(2)},\delta_{*1}^{(1)}) =$
$P(|\delta_{*1}^{(2)}-\mu_1|<|\delta_{*1}^{(1)}-\mu_1||\delta_{*1}^{(2)}\neq\delta_{*1}^{(1)}) =$
$P(|X_{(1)}-\dfrac{S}{n^2}-\dfrac{1}{n}(X_{(1)}-Y_{(1)})-\mu_1|<|X_{(1)}-\dfrac{S}{n^2}-\mu_1||X_{(1)}>Y_{(1)})$.
Επειδή η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του $Y_{(1)}$, είναι,

$$g_1(y)=\frac{m}{\sigma_2}e^{-\frac{m(y-\mu_2)}{\sigma_2}},\ y\geq\mu_2,\ \sigma_2>0,$$

έχουμε,
$MPN(\delta_{*1}^{(2)},\delta_{*1}^{(1)}) =$
$\displaystyle\int_{c\geq\mu_2\geq\mu_1}P(|X_{(1)}-\frac{S}{n^2}-\frac{1}{n}(X_{(1)}-c)-\mu_1|<|X_{(1)}-\frac{S}{n^2}-\mu_1||X_{(1)}>c)\frac{m}{\sigma_2}e^{-\frac{(c-\mu_2)}{\sigma_2}}dc\Leftrightarrow$

$$MPN(\delta_{*1}^{(2)},\delta_{*1}^{(1)})=\int_{c\geq\mu_2\geq\mu_1}MPN(\delta_1^{(2)},\delta_1^{(1)})\frac{m}{\sigma_2}e^{-\frac{(c-\mu_2)}{\sigma_2}}dc. \tag{3.8}$$

Από την Ενότητα 3.2. γνωρίζουμε ότι, $\alpha_n\leq MPN(\delta_1^{(2)},\delta_1^{(1)})\leq 1$, όπου $\alpha_n\leq\dfrac{1}{3}$, επομένως λόγω της Σχέσης (3.8) ισχύει ότι, $\alpha_n\leq MPN(\delta_{*1}^{(2)},\delta_{*1}^{(1)})\leq 1$, δηλαδή οι εκτιμητές δεν συγκρίνονται με το κριτήριο του Pitman. □

Θεώρημα 3.4.1. *Για το πρόβλημα εκτίμησης της παραμέτρου κλίμακας* σ_1, *όταν* $\mu_1\leq\mu_2$ *ισχύουν τα εξής,*
(i) $MPN(\delta_{*2}^{(2)},\delta_{*2}^{(1)})>\dfrac{1}{2}$.
(ii) $MPN(\delta_{*2}^{(2)},\delta_{*2}^{(3)})>\dfrac{1}{2}$.
(iii) $MPN(\delta_{*2}^{(2)},\delta_{*2}^{(4)})>\dfrac{1}{2}$.

Απόδειξη

Σημειώνουμε, ότι για την απόδειξη του Θεωρήματος 3.4.1. χρησιμοποιούμε τους υπολογισμούς που γίνονται για την απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.2.
(i) $MPN(\delta_{*2}^{(2)},\delta_{*2}^{(1)}) =$

$P(|\delta_{*2}^{(2)}-\sigma_1|<|\delta_{*2}^{(1)}-\sigma_1||\delta_{*2}^{(2)}\neq\delta_{*2}^{(1)}) =$

$P(|\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i-min(X_{(1)},Y_{(1)}))-\sigma_1|<|\dfrac{S}{n}-\sigma_1|\ |\ X_{(1)}>Y_{(1)}) =$

$P(|(\frac{S}{n}+(X_{(1)}-Y_{(1)})-\sigma_1|<|\frac{S}{n}-\sigma_1|\mid X_{(1)}>Y_{(1)})=$

$P((X_{(1)}-Y_{(1)})(2\frac{S}{n}+(X_{(1)}-Y_{(1)})-2\sigma_1<0)\mid X_{(1)}>Y_{(1)})=$

$P(2\frac{S}{n}+(X_{(1)}-Y_{(1)})-2\sigma_1<0\mid X_{(1)}>Y_{(1)})=$

$P(2\frac{S}{n}\frac{n}{\sigma_1}+(X_{(1)}-Y_{(1)})\frac{n}{\sigma_1}-2\sigma_1\frac{n}{\sigma_1}<0\mid X_{(1)}>Y_{(1)})=$

$P(2\frac{S}{\sigma_1}+(X_{(1)}-Y_{(1)})\frac{n}{\sigma_1}<2n\mid X_{(1)}>Y_{(1)})\geq$

$P(\frac{S}{\sigma_1}+\frac{n}{\sigma_1}(X_{(1)}-Y_{(1)})<n\mid X_{(1)}>Y_{(1)}).$

Επειδή, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του $Y_{(1)}$ είναι,

$$g_1(y)=\frac{m}{\sigma_2}e^{-\frac{m(y-\mu_2)}{\sigma_2}},\ y\geq\mu_2,\ \sigma_2>0,$$

έχουμε,

$MPN(\delta_{*2}^{(2)},\delta_{*2}^{(1)})=$

$\int_{c\geq\mu_2\geq\mu_1}P(\frac{S}{\sigma_1}+\frac{n}{\sigma_1}(X_{(1)}-c)<n|X_{(1)}>c)\frac{m}{\sigma_2}e^{-\frac{m}{\sigma_2}(c-\mu_2)}dc=$

$\int_{c\geq\mu_2\geq\mu_1}P(G_n<n)\frac{m}{\sigma_2}e^{-\frac{m}{\sigma_2}(c-\mu_2)}dc=$

$\int_{c\geq\mu_2\geq\mu_1}\sum_{k=n}^{\infty}e^{-n}\frac{n^k}{k!}\frac{m}{\sigma_2}e^{-\frac{m}{\sigma_2}(c-\mu_2)}dc=$

$\sum_{k=n}^{\infty}e^{-n}\frac{n^k}{k!}\int_{c\geq\mu_2\geq\mu_1}\frac{m}{\sigma_2}e^{-\frac{m}{\sigma_2}(c-\mu_2)}dc=$

$\sum_{k=n}^{\infty}e^{-n}\frac{n^k}{k!}>\frac{1}{2}$, λόγω της Πρότασης 5.1.4.

(ii) $MPN(\delta_{*2}^{(2)},\delta_{*2}^{(3)})=$

$P(|(\frac{S}{n}+(X_{(1)}-Y_{(1)})-\sigma_1|<|\frac{S}{n}+\frac{1}{2}(X_{(1)}-Y_{(1)})-\sigma_1|\mid X_{(1)}>Y_{(1)})=$

$P(\frac{1}{2}(X_{(1)}-Y_{(1)})(\frac{2S}{n}+\frac{3}{2}(X_{(1)}-Y_{(1)})-2\sigma_1)<0|X_{(1)}>Y_{(1)})=$

$P(\frac{2S}{n}\frac{n}{\sigma_1} + \frac{3}{2}\frac{n}{\sigma_1}(X_{(1)} - Y_{(1)}) < \frac{2\sigma_1 n}{\sigma_1}|X_{(1)} > Y_{(1)}) \geq$

$P(\frac{S}{\sigma_1} + \frac{n}{\sigma_1}(X_{(1)} - Y_{(1)}) < n|X_{(1)} > Y_{(1)}) =$

$\int_{c \geq \mu_2 \geq \mu_1} P(\frac{S}{\sigma_1} + \frac{n}{\sigma_1}(X_{(1)} - c)n|X_{(1)} > c)\frac{m}{\sigma_2}e^{-\frac{m}{\sigma_2}(c-\mu_2)}dc =$

$\int_{c \geq \mu_2 \geq \mu_1} P(G_n < n)\frac{m}{\sigma_2}e^{-\frac{m}{\sigma_2}(c-\mu_2)}dc =$

$\int_{c \geq \mu_2 \geq \mu_1} \sum_{k=n}^{\infty} e^{-n}\frac{n^k}{k!}\frac{m}{\sigma_2}e^{-\frac{m}{\sigma_2}(c-\mu_2)}dc =$

$\sum_{k=n}^{\infty} e^{-n}\frac{n^k}{k!}\int_{c \geq \mu_2 \geq \mu_1} \frac{m}{\sigma_2}e^{-\frac{m}{\sigma_2}(c-\mu_2)}dc =$

$\sum_{k=n}^{\infty} e^{-n}\frac{n^k}{k!} > \frac{1}{2}$, λόγω της Πρότασης 5.1.4.

$(iii)\ MPN(\delta_{*2}^{(2)}, \delta_{*2}^{(4)}) =$

$P(|\frac{S}{n} + (X_{(1)} - Y_{(1)}) - \sigma_1| < |\frac{S}{n+1} + \frac{n(X_{(1)} - Y_{(1)})}{n+1}|\ |\ X_{(1)} > Y_{(1)}) =$

$P[(\frac{S}{n} + (X_{(1)} - Y_{(1)})(1 + \frac{n}{n+1}) - 2\sigma_1)(\frac{S}{n} - \frac{S}{n+1} + (1 - \frac{n}{n+1})(X_{(1)} - Y_{(1)})) <$
$0|X_{(1)} > Y_{(1)}] =$

$P[(\frac{2Sn + S}{n(n+1)} + (X_{(1)} - Y_{(1)})(\frac{2n+1}{n+1}) - 2\sigma_1)(S + \frac{1}{n+1}(X_{(1)} - Y_{(1)})) < 0|X_{(1)} > Y_{(1)}] =$

$P(\frac{2n+1}{n(n+1)}S + (X_{(1)} - Y_{(1)})(\frac{2n+1}{n+1}) - 2\sigma_1 < 0|X_{(1)} > Y_{(1)}) =$

$P(\frac{2n+1}{n(n+1)}\frac{n(n+1)}{(2n+1)\sigma_1}S + (X_{(1)} - Y_{(1)})\frac{n}{\sigma_1} - \frac{2n(n+1)}{2n+1} < 0|X_{(1)} > Y_{(1)}) =$

$P(\frac{S}{\sigma_1} - (X_{(1)} - Y_{(1)})\frac{n}{\sigma_1} < \frac{2n(n+1)}{2n+1}|X_{(1)} > Y_{(1)}) =$

$\int_{c \geq \mu_2 \geq \mu_1} P(\frac{S}{\sigma_1} + \frac{n}{\sigma_1}(X_{(1)} - c)2n\frac{(n+1)}{2n+1}|X_{(1)} > c)\frac{m}{\sigma_2}e^{-\frac{m}{\sigma_2}(c-\mu_2)}dc =$

$\int_{c \geq \mu_2 \geq \mu_1} P(G_n < 2n\frac{(n+1)}{2n+1})\frac{m}{\sigma_2}e^{-\frac{m}{\sigma_2}(c-\mu_2)}dc \geq$

$$\int_{c\geq\mu_2\geq\mu_1} P(G_n < n)\frac{m}{\sigma_2}e^{-\frac{m}{\sigma_2}(c-\mu_2)}dc =$$

$$\int_{c\geq\mu_2\geq\mu_1} \sum_{k=n}^{\infty} e^{-n}\frac{n^k}{k!}\frac{m}{\sigma_2}e^{-\frac{m}{\sigma_2}(c-\mu_2)}dc =$$

$$\sum_{k=n}^{\infty} e^{-n}\frac{n^k}{k!}\int_{c\geq\mu_2\geq\mu_1} \frac{m}{\sigma_2}e^{-\frac{m}{\sigma_2}(c-\mu_2)}dc =$$

$$\sum_{k=n}^{\infty} e^{-n}\frac{n^k}{k!} > \frac{1}{2}, \text{ λόγω της Πρότασης 5.1.4.} \qquad \square$$

Παρατήρηση 3.4.1. *Αν και οι εκτιμητές* $\delta_{*2}^{(3)}$ *και* $\delta_{*2}^{(4)}$ *έχουν καλύτερες επιδόσεις απο τον εκτιμητή* $\delta_{*2}^{(2)}$ *ως προς το κριτήριο του Μέσου Τετραγωνικού Σφάλματος, σε σχέση με το κριτήριο Pitman* (MPN), *ο εκτιμητής* $\delta_{*2}^{(2)}$ *υπερέχει. Επιπλέον ο* $\delta_{*2}^{(2)}$ *εκτιμά καλύτερα την παράμετρο θέσης* σ_1 *απο τον* $\delta_{*2}^{(1)}$ *σε σχέση με το κριτήριο Pitman* (MPN) *ενώ ως προς το κριτήριο του Μέσου Τετραγωνικού Σφάλματος οι δύο εκτιμητές είναι ισοδύναμοι.*

Κεφάλαιο 4

Εκτίμηση των παραμέτρων, όταν ο παραμετρικός χώρος είναι περιορισμένος και συνάρτηση ζημίας είναι η **Linex**

4.1 Εκτίμηση των παραμέτρων μ και σ, υπό τον περιορισμό $\mu \leq c$, ως προς την συνάρτηση ζημίας Linex

Έστω $X_1, X_2, ..., X_n$ τυχαίο δείγμα μεγέθους n απο τη διπαραμετρική εκθετική κατανομή $\mathcal{E}(\mu, \sigma)$, $\mu \in \Re$, $\sigma > 0$ με πυκνότητα πιθανότητας,

$$f(x;\mu,\sigma) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma}\, e^{\frac{-(x-\mu)}{\sigma}} & , \text{ αν } \ x \geq \mu \\ 0 & , \text{ αν } \ x < \mu \end{cases}$$

Σε αυτή την ενότητα πρόκειται να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους θέσης μ και κλίμακας σ ως προς την συνάρτηση ζημίας Linex υπό τον περιορισμο $\mu \leq c$, όπου c μια γνωστή σταθερά. Τα αποτελέσματα αυτής της ενότητας βρίσκονται στην εργασία των Parsian and Farsipour (1997). Αρχικά θα εκτιμήσουμε την παράμετρο θέσης μ.

4.1.1 Εκτίμηση της παραμέτρου θέσης μ, υπό τον περιορισμό $\mu \leq c$, ως προς την συνάρτηση ζημίας Linex

Από την Πρόταση 2.4.1. είναι γνωστό ότι, ο βέλτιστος αναλλοίωτος εκτιμητής του μ, δηλαδή ο εκτιμητής Pitman, (*Sen and Saleh*(1990)), στην κλάση $C = \{\delta_c/\delta_c = X_{(1)} + c\}$ ως προς την συνάρτηση ζημίας *Linex*, όταν η παράμετρος κλίμακας σ είναι γνωστή, είναι, $\delta_1(\underset{\sim}{X}) = X_{(1)} - \frac{1}{\alpha} ln(\frac{n}{n-\alpha\sigma})$ όπου $\alpha < \frac{n}{\sigma}$. Η συνάρτηση κινδύνου υπολογίζεται ως, $R(\mu, \delta_1) = ln(\frac{n}{n-\alpha\sigma}) - \frac{\alpha\sigma}{n}$.

Θα εκτιμήσουμε το μ στην περίπτωση όπου $\mu \leq c$, c είναι μια γνωστή σταθερά.

Πρόταση 4.1.1. (*Zellner* (1986)) *Ο τροποποιημένος εκτιμητής Pitman του μ ως προς την συνάρτηση ζημίας Linex, δηλαδή ο γενικευμένος εκτιμητής Bayes του μ είναι,*

$$\delta_1^*(\underset{\sim}{X}) = -\frac{1}{\alpha} ln \left(\frac{\int_{-\infty}^{min(c, X_{(1)})} e^{-\alpha\mu} \sigma^{-n} e^{-\frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)} d\mu}{\int_{-\infty}^{min(c, X_{(1)})} \sigma^{-n} e^{-\frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)} d\mu} \right)$$

$$= min(c, X_{(1)}) - \frac{1}{\alpha} ln(\frac{n}{n-\alpha\sigma}) \tag{4.1}$$

όπου $\alpha < \frac{n}{\sigma}$, με συνάρτηση κινδύνου,

$$R(\mu, \delta_1^*) = \frac{\alpha\sigma}{n} e^{-\frac{n}{\sigma}(c-\mu)} (1 - e^{\alpha(c-\mu)}) - \frac{\alpha\sigma}{n} + ln(\frac{n}{n-\alpha\sigma})$$

Απόδειξη

Όπως αναφέρθηκε στο Θεώρημα 1.9.1. ο εκτιμητής Bayes, είναι η τιμή εκείνη που ελαχιστοποιεί την, $h(t) = \int_\Theta L(t, \theta) \pi(\theta|\underset{\sim}{x}) d\theta$ ως πρός t. Για $\theta = \mu$, η εκ των υστέρων κατανομή είναι, $\pi(\mu|\underset{\sim}{x}) = \frac{f(\underset{\sim}{x}; \mu)\pi(\mu)}{f(\underset{\sim}{x})}$, όπου $f(\underset{\sim}{x}) = \int f(\underset{\sim}{x}, \mu)\pi(\mu) dx$ και εκ των προτέρων κατανομή $\pi(\mu) = 1$, $\mu \leq c$ και $\int_{-\infty}^{c} \pi(\mu) = \infty$.

Επιπλέον $X_{(1)} \sim \mathcal{E}(\mu, \frac{\sigma}{n})$, $X_{(1)} \geq \mu$ και $c \geq \mu$. Οπότε $\mu \leq min\{c, x_{(1)}\}$. Έχουμε,

$$h(t) = \int_\Theta (e^{\alpha(t-\theta)} - \alpha(t-\theta) - 1) \pi(\mu|\underset{\sim}{x}) d\mu$$

$$h^{'}(t) = 0 \;\Leftrightarrow\; \int_{-\infty}^{min\{c,x_{(1)}\}} (\alpha e^{\alpha(t-\mu)} - \alpha)\pi(\mu|\underset{\sim}{x})d\mu = 0$$

$$\Leftrightarrow\; e^{\alpha t}\int_{-\infty}^{min\{c,x_{(1)}\}} e^{-\alpha\mu}\pi(\mu|\underset{\sim}{x})d\mu - \int_{-\infty}^{min\{c,x_{(1)}\}} \pi(\mu|\underset{\sim}{x})d\mu = 0$$

$$\Leftrightarrow\; e^{\alpha t} = \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{min\{c,x_{(1)}\}} \pi(\mu|\underset{\sim}{x})d\mu}{\displaystyle\int_{-\infty}^{min\{c,x_{(1)}\}} e^{-\alpha\mu}\pi(\mu|\underset{\sim}{x})d\mu} \;\Leftrightarrow\; t = \frac{1}{\alpha}ln\left(\frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{min\{c,x_{(1)}\}} \pi(\mu|\underset{\sim}{x})d\mu}{\displaystyle\int_{-\infty}^{min\{c,x_{(1)}\}} e^{-\alpha\mu}\pi(\mu|\underset{\sim}{x})d\mu}\right)$$

Θα υπολογίσουμε αρχικά την εκ των υστέρων κατανομή.

$$\pi(\mu|\underset{\sim}{x}) = \frac{f(\underset{\sim}{x};\mu)\pi(\mu)}{f(\underset{\sim}{x})}$$

$$= \frac{\dfrac{1}{\sigma^n}e^{-\frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)}}{\displaystyle\int_{-\infty}^{min\{c,x_{(1)}\}} \sigma^{-n}e^{-\frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)}d\mu}$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)}}{e^{-\frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}X_i}\displaystyle\int_{-\infty}^{min\{c,x_{(1)}\}} e^{\frac{n\mu}{\sigma}}d\mu}$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)}}{e^{-\frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}X_i}\dfrac{\sigma}{n}e^{\frac{n}{\sigma}min\{c,x_{(1)}\}}}$$

Οπότε,

$$t = \frac{1}{\alpha}ln\left(\frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{min\{c,x_{(1)}\}} e^{-\frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)}d\mu}{\displaystyle\int_{-\infty}^{min\{c,x_{(1)}\}} e^{-\alpha\mu}e^{-\frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)}d\mu}\right) =$$

$$\frac{1}{\alpha}ln\left(\int_{-\infty}^{min\{c,x_{(1)}\}} e^{-\frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)}\right) - \frac{1}{\alpha}ln\left(\int_{-\infty}^{min\{c,x_{(1)}\}} e^{-\alpha\mu}e^{-\frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)}\right) =$$

$$\frac{1}{\alpha}ln\left(e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{\sigma}}\int_{-\infty}^{min\{c,x_{(1)}\}} e^{\frac{n\mu}{\sigma}}\right) - \frac{1}{\alpha}ln\left(e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{\sigma}}\int_{-\infty}^{min\{c,x_{(1)}\}} e^{\mu(\frac{n}{\sigma}-\alpha)}\right) =$$

$$\frac{1}{\alpha}ln\left(e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{\sigma}}\frac{\sigma}{n}e^{\frac{n}{\sigma}min\{c,x_{(1)}\}}\right) - \frac{1}{\alpha}ln\left(e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{\sigma}}\frac{e^{min\{c,x_{(1)}\}(\frac{n}{\sigma}-\alpha)}}{\frac{n}{\sigma}-\alpha}\right) =$$

$$\frac{1}{\alpha}ln(\frac{\sigma}{n})+\frac{n}{\sigma\alpha}min\{c,x_{(1)}\}-\frac{1}{\alpha}min\{c,x_{(1)}\}(\frac{n}{\sigma}-\alpha)+\frac{1}{\alpha}ln(\frac{n}{\sigma}-\alpha)=$$
$$\frac{1}{\alpha}ln(\frac{\sigma}{n}(\frac{n}{\sigma}-\alpha))+min\{c,x_{(1)}\}=\frac{1}{\alpha}ln(1-\frac{\sigma\alpha}{n})+min\{c,x_{(1)}\}=$$
$$\frac{1}{\alpha}ln(\frac{n-\sigma\alpha}{n})+min\{c,x_{(1)}\}=min\{c,x_{(1)}\}-\frac{1}{\alpha}ln(\frac{n}{n-\alpha\sigma}).$$

Ο υπολογισμός της συνάρτησης κινδύνου γίνεται, χρησιμοποιώντας την Πρόταση 5.1.6., οπότε,

$$R(\mu,\delta_1^*)=E(L(\delta_1^*,\mu))=$$
$$E(e^{\alpha(\delta_1^*-\mu)}-\alpha(\delta_1^*-\mu)-1)=$$
$$E(e^{\alpha(\delta_1^*-\mu)})-\alpha E(\delta_1^*-\mu)-1=$$
$$E(e^{\alpha[min(c,X_{(1)})-\frac{1}{\alpha}ln(\frac{n}{n-\alpha\sigma})-\mu]})-\alpha E(min(c,X_{(1)})-\frac{1}{\alpha}ln(\frac{n}{n-\alpha\sigma})-\mu)-1=$$
$$E(e^{\alpha min(c,X_{(1)})-ln(\frac{n}{n-\alpha\sigma})-\alpha\mu})-\frac{\alpha\sigma}{n}(1-e^{-\frac{n}{\sigma}(c-\mu)})+ln(\frac{n}{n-\alpha\sigma})-1=$$
$$e^{-ln(\frac{n}{n-\alpha\sigma})}e^{-\alpha\mu}\frac{e^{\alpha\mu}}{n-\alpha\sigma}(n-\alpha\sigma e^{-(\frac{n}{\sigma}-\alpha)(c-\mu)})-\frac{\alpha\sigma}{n}(1-e^{-\frac{n}{\sigma}(c-\mu)})+ln(\frac{n}{n-\alpha\sigma})-1=$$
$$\frac{1}{n}(n-\alpha\sigma e^{-(\frac{n}{\sigma}-\alpha)(c-\mu)})-\frac{\alpha\sigma}{n}(1-e^{-\frac{n}{\sigma}(c-\mu)})+ln(\frac{n}{n-\alpha\sigma})-1=$$
$$1-\frac{\alpha\sigma}{n}e^{-\frac{n}{\sigma}(c-\mu)+\alpha(c-\mu)}-\frac{\alpha\sigma}{n}(1-e^{-\frac{n}{\sigma}(c-\mu)})+ln(\frac{n}{n-\alpha\sigma})-1=$$
$$1-\frac{\alpha\sigma}{n}e^{-\frac{n}{\sigma}(c-\mu)+\alpha(c-\mu)}-\frac{\alpha\sigma}{n}+\frac{\alpha\sigma}{n}e^{-\frac{n}{\sigma}(c-\mu)}+ln(\frac{n}{n-\alpha\sigma})-1=$$
$$\frac{\alpha\sigma}{n}e^{-\frac{n}{\sigma}(c-\mu)}(1-e^{\alpha(c-\mu)})-\frac{\alpha\sigma}{n}+ln(\frac{n}{n-\alpha\sigma}).\qquad\square$$

Θεώρημα 4.1.1. *Ο βέλτιστος αναλλοίωτος εκτιμητής του* μ*, δηλαδή ο εκτιμητής Pitman (Sen and Saleh(1990)),* $\delta_1(\underset{\sim}{X})=X_{(1)}-\frac{1}{\alpha}ln(\frac{n}{n-\alpha\sigma})$*, όταν* $\mu\leq c$ *και το* σ *είναι γνωστό, είναι μη αποδεκτός ως προς την συνάρτηση ζημίας Linex και βελτιώνεται απο τον εκτιμητή* $\delta_1^*(\underset{\sim}{X})$ *ο οποίος δίνεται στη Σχέση (4.1) όταν* $\alpha\leq\frac{n}{\sigma}$*.*

Απόδειξη

Από την Πρόταση 2.4.1 γνωρίζουμε ότι, $R(\mu,\delta_1)=ln(\frac{n}{n-\alpha\sigma})-\frac{\alpha\sigma}{n}$, ενώ από την Πρόταση 4.1.1. έχουμε, $R(\mu,\delta_1^*)=\frac{\alpha\sigma}{n}e^{-\frac{n}{\sigma}(c-\mu)}(1-e^{\alpha(c-\mu)})-\frac{\alpha\sigma}{n}+ln(\frac{n}{n-\alpha\sigma})$. Επομένως,

$$R(\mu,\delta_1)-R(\mu,\delta_1^*)=$$

$$ln(\frac{n}{n-\alpha\sigma})-\frac{\alpha\sigma}{n}-\frac{\alpha\sigma}{n}e^{-\frac{n}{\sigma}(c-\mu)}(1-e^{\alpha(c-\mu)})+\frac{\alpha\sigma}{n}-ln(\frac{n}{n-\alpha\sigma})$$
$$=\frac{\alpha\sigma}{n}e^{-\frac{n}{\sigma}(c-\mu)}(e^{\alpha(c-\mu)}-1)>0.$$

Συνεπώς ο εκτιμητής δ_1, όταν $\mu\leq c$ είναι μη αποδεκτός ως προς την συνάρτηση ζημίας Linex και βελτιώνεται απο τον εκτιμητή δ_1^*. □

Τα παραπάνω αφορούν την εκτίμηση της παραμέτρου μ όταν η παράμετρος σ είναι γνωστή. Στην περίπτωση που σ είναι άγνωστη παράμετρος γνωρίζουμε ότι, ο βέλτιστος αναλλοίωτος εκτιμητής του μ στην κλάση $C^*=\{\delta_c/\delta_c=X_{(1)}+cS\}$ ως προς την συνάρτηση ζημίας $Linex$, είναι, ο $\delta_2(\underset{\sim}{X})=X_{(1)}-\frac{1}{\alpha}[(\frac{n}{n-\alpha})^{\frac{1}{n}}-1]\sum_{i=1}^{n}(X_i-X_{(1)})$ όπου $n>\alpha$, με συνάρτηση κινδύνου $R_\sigma(\mu,\delta_2)=n(\frac{n}{n-\alpha})^{\frac{1}{n}}-\frac{\alpha}{n}-n$ όπως αποδείχθηκε στην Πρόταση 2.4.2.

Θα προσπαθήσουμε να βελτιώσουμε την εκτίμηση αυτή στην περίπτωση όπου $\mu\leq c$. Οι Parsian and Farsipour (1997) θεώρησαν τον εκτιμητή

$$\delta_2^*(\underset{\sim}{X})=\begin{cases}\delta_2(\underset{\sim}{X}) & ,\text{ αν } X_{(1)}\leq c\\ c-\frac{1}{\alpha}[(\frac{n}{n-\alpha})^{\frac{1}{n}}-1]\sum_{i=1}^{n}(X_i-c) & ,\text{ αν } X_{(1)}>c\end{cases}$$

$$=min(c,X_{(1)})-\frac{1}{\alpha}[(\frac{n}{n-\alpha})^{\frac{1}{n}}-1]\sum_{i=1}^{n}(X_i-min(c,X_{(1)}))\quad(4.2)$$

Θεώρημα 4.1.2. *Ο βέλτιστος αναλλοίωτος εκτιμητής του μ, $\delta_2(\underset{\sim}{X})$, ως προς την συνάρτηση ζημίας Linex, όταν $\mu\leq c$ και η παράμετρος σ είναι άγνωστη, είναι μη αποδεκτός και βελτιώνεται απο τον εκτιμητή $\delta_2^*(\underset{\sim}{X})$, οποίος δίνεται στη Σχέση (4.2), όταν $\alpha<n$.*

Απόδειξη

Θα υπολογίσουμε αρχικά την συνάρτηση κινδύνου του εκτιμητή $\delta_2^*(\underset{\sim}{X})$. Έχουμε,

$$R(\mu,\delta_2^*)=E(L(\mu,\delta_2^*))=$$

$$E(e^{\alpha(\frac{\delta_2^*-\mu}{\sigma})}-\alpha(\frac{\delta_2^*-\mu}{\sigma})-1)=$$

$E(e^{\alpha(\frac{\delta_2^*-\mu}{\sigma})}) - \alpha E(\frac{\delta_2^*-\mu}{\sigma}) - 1.$

Θέτουμε $\kappa_n = \frac{1}{\alpha}[(\frac{n}{n-\alpha})^{\frac{1}{n}} - 1]$. Επιπλέον $\frac{S}{\sigma} \sim G(n-1,1)$ (βλ. Πρόταση 2.2.3.) και $\sum_{i=1}^{n}(X_i - c) = \sum_{i=1}^{n}(X_i - c + X_{(1)} - X_{(1)}) = S + n(X_{(1)} - c)$. Επομένως,

$$
\begin{aligned}
&E(e^{\alpha(\frac{\delta_2^*-\mu}{\sigma})}) = \\
&E(e^{\alpha(\frac{X_{(1)}-\kappa_n S-\mu}{\sigma})} I_{X_{(1)}\leq c}) + E(e^{\alpha(\frac{c-\kappa_n(S+n(X_{(1)}-c))-\mu}{\sigma})} I_{X_{(1)}>c}) = \\
&e^{-\frac{\alpha\mu}{\sigma}} E(e^{-\alpha\kappa_n\frac{S}{\sigma}}) E(e^{\frac{\alpha x}{\sigma}} I_{X_{(1)}\leq c}) + e^{\alpha\frac{c-\mu}{\sigma}} E(e^{\frac{-\kappa_n\alpha S-\kappa_n\alpha n(X_{(1)}-c)}{\sigma}} I_{X_{(1)}>c}) = \\
&e^{-\frac{\alpha\mu}{\sigma}} \frac{1}{(1+\kappa_n\alpha)^{n-1}} \int_{\mu}^{c} e^{\frac{\alpha}{\sigma}x} \frac{n}{\sigma} e^{-\frac{n}{\sigma}(x-\mu)} dx + e^{\alpha\frac{c-\mu}{\sigma}} E(e^{-\kappa_n\alpha\frac{S}{\sigma}}) E(e^{-\kappa_n\alpha\frac{n(X_{(1)}-c)}{\sigma}} I_{X_{(1)}>c}) = \\
&e^{-\frac{\alpha\mu}{\sigma}} \frac{1}{(1+\kappa_n\alpha)^{n-1}} e^{\frac{n\mu}{\sigma}} \frac{n}{\sigma} \int_{\mu}^{c} e^{\alpha\frac{x}{\sigma}} e^{-\frac{n}{\sigma}x} dx + e^{\alpha\frac{c-\mu}{\sigma}} \frac{1}{(1-\kappa_n\alpha)^{n-1}} e^{\kappa_n\alpha n\frac{c}{\sigma}} E(e^{-\kappa_n\alpha n\frac{x}{\sigma}} I_{X_{(1)}>c}) = \\
&e^{-\frac{\alpha\mu}{\sigma}} \frac{1}{(1+\kappa_n\alpha)^{n-1}} e^{\frac{n\mu}{\sigma}} \frac{n}{\sigma} [(\frac{\sigma}{\alpha-n}) e^{x\frac{\alpha-n}{\sigma}}]_{\mu}^{c} + \\
&e^{\alpha\frac{c-\mu}{\sigma}} (\frac{n-\alpha}{n})^{\frac{n-1}{n}} e^{\frac{nc}{\sigma}[(\frac{n}{n-\alpha})^{\frac{1}{n}}-1]} \int_{c}^{\infty} e^{-\kappa_n\alpha\frac{n}{\sigma}x} \frac{n}{\sigma} e^{-\frac{n}{\sigma}(x-\mu)} dx = \\
&e^{\frac{\mu}{\sigma}(n-\alpha)} \frac{n}{\sigma} (\frac{n-\alpha}{n})^{\frac{n-1}{n}} (\frac{\sigma}{\alpha-n}) [e^{c\frac{\alpha-n}{\sigma}} - e^{\mu\frac{\alpha-n}{\sigma}}] + \\
&e^{\alpha\frac{c-\mu}{\sigma}} (\frac{n-\alpha}{n})^{\frac{n-1}{n}} e^{\frac{nc}{\sigma}[(\frac{n}{n-\alpha})^{\frac{1}{n}}-1]} \frac{n}{\sigma} e^{\mu\frac{n}{\sigma}} \int_{c}^{\infty} e^{-\frac{\kappa_n\alpha n+n}{\sigma}} dx = \\
&-e^{\frac{\mu}{\sigma}(n-\alpha)} (\frac{n-\alpha}{n})^{-\frac{1}{n}} [e^{-(n-\alpha)\frac{c}{\sigma}} - e^{-(n-\alpha)\frac{\mu}{\sigma}}] + e^{\alpha\frac{c-\mu}{\sigma}} (\frac{n-\alpha}{n})^{\frac{n-1}{n}} e^{\frac{nc}{\sigma}[(\frac{n}{n-\alpha})^{\frac{1}{n}}-1]} \frac{n}{\sigma} e^{\mu\frac{n}{\sigma}}. \\
&[(-\frac{\sigma}{n(\kappa_n\alpha+1)}) e^{-\frac{n}{\sigma}(\kappa_n\alpha+1)x}]_{c}^{\infty} = \\
&(\frac{n}{n-\alpha})^{\frac{1}{n}} (1 - e^{(\frac{n-\alpha}{\sigma})(\mu-c)}) + \frac{n-\alpha}{n} (\frac{n-\alpha}{n})^{-\frac{1}{n}} e^{\alpha\frac{c-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{nc}{\sigma}} e^{\frac{n\mu}{\sigma}} (\frac{n-\alpha}{n})^{\frac{1}{n}} = \\
&(\frac{n-\alpha}{n})^{-\frac{1}{n}} (1 - e^{(\frac{n-\alpha}{\sigma})(\mu-c)}) + \frac{n-\alpha}{n} e^{\frac{\alpha}{\sigma}(c-\mu)} e^{\frac{n}{\sigma}(\mu-c)} = \\
&(\frac{n-\alpha}{n})^{-\frac{1}{n}} (1 - e^{(\frac{n-\alpha}{\sigma})(\mu-c)}) + \frac{n+\alpha}{n} e^{(\frac{n-\alpha}{\sigma})(\mu-c)} = \\
&(\frac{n-\alpha}{n})^{-\frac{1}{n}} - (\frac{n-\alpha}{n})^{-\frac{1}{n}} e^{(\frac{n-\alpha}{\sigma})(\mu-c)} + \frac{n-\alpha}{n} e^{\frac{n-\alpha}{\sigma}(\mu-c)}.
\end{aligned}
$$

$\alpha E(\frac{\delta_2^* - \mu}{\sigma}) =$

$\frac{\alpha}{\sigma}E((X_{(1)} - \kappa_n S - \mu)I_{X_{(1)} \le c}) + \frac{\alpha}{\sigma}E(c - \kappa_n(S + n(X_{(1)} - c) - \mu)I_{X_{(1)} > c}) =$

$\frac{\alpha}{\sigma}E(X_{(1)}I_{X_{(1)} \le c}) - \kappa_n \alpha E(\frac{S}{\sigma})P(X_{(1)} \le c) - \frac{\mu\alpha}{\sigma}P(X_{(1)} \le c) + \frac{\alpha}{\sigma}(c-\mu)e^{-\frac{n}{\sigma}(c-\mu)} -$
$\kappa_n\alpha(n-1)e^{-\frac{n}{\sigma}(c-\mu)} - \kappa_n\alpha\int_c^\infty \frac{n}{\sigma}(x-c)\frac{n}{\sigma}e^{-\frac{n}{\sigma}(x-\mu)}dx =$

$\frac{\alpha}{\sigma}\int_\mu^c x\frac{n}{\sigma}e^{-\frac{n}{\sigma}(x-\mu)}dx - \kappa_n\alpha(n-1)(1-e^{-\frac{n}{\sigma}(c-\mu)}) - \frac{\mu\alpha}{\sigma}(1-e^{-\frac{n}{\sigma}(c-\mu)}) + \frac{\alpha c}{\sigma}e^{-\frac{n}{\sigma}(c-\mu)}$
$-\frac{\mu\alpha}{\sigma}e^{-\frac{n}{\sigma}(c-\mu)} - \kappa_n\alpha(n-1)e^{-\frac{n}{\sigma}(c-\mu)} - \kappa_n\alpha\frac{n^2}{\sigma^2}\int_c^\infty (x-c)e^{-\frac{n}{\sigma}x}e^{\frac{n}{\sigma}\mu}dx =$

$\frac{n\alpha}{\sigma^2}e^{\frac{n\mu}{\sigma}}\int_\mu^c xe^{-\frac{n}{\sigma}x}dx - \kappa_n\alpha(n-1)(1-e^{-\frac{n}{\sigma}(c-\mu)}) - \frac{\mu\alpha}{\sigma}(1-e^{-\frac{n}{\sigma}(c-\mu)}) + \frac{\alpha c}{\sigma}e^{-\frac{n}{\sigma}(c-\mu)}$
$-\frac{\mu\alpha}{\sigma}e^{-\frac{n}{\sigma}(c-\mu)} - \kappa_n\alpha(n-1)e^{-\frac{n}{\sigma}(c-\mu)} - \kappa_n\alpha\frac{n^2}{\sigma^2}\int_c^\infty (x-c)e^{-\frac{n}{\sigma}x}e^{\frac{n}{\sigma}\mu}dx =$

$\frac{n\alpha}{\sigma^2}e^{\frac{n\mu}{\sigma}}\int_\mu^c x(-\frac{\sigma}{n}e^{-\frac{n}{\sigma}x})'dx - \kappa_n\alpha(n-1)(1-e^{-\frac{n}{\sigma}(c-\mu)}) - \frac{\mu\alpha}{\sigma}(1-e^{-\frac{n}{\sigma}(c-\mu)}) +$
$\frac{\alpha c}{\sigma}e^{-\frac{n}{\sigma}(c-\mu)} - \frac{\mu\alpha}{\sigma}e^{-\frac{n}{\sigma}(c-\mu)} - \kappa_n\alpha(n-1)e^{-\frac{n}{\sigma}(c-\mu)} - \kappa_n\alpha\frac{n^2}{\sigma^2}\int_c^\infty (x-c)e^{-\frac{n}{\sigma}x}e^{\frac{n}{\sigma}\mu}dx =$

$\frac{n\alpha}{\sigma^2}e^{\frac{n\mu}{\sigma}}[[-x\frac{\sigma}{n}e^{-\frac{n}{\sigma}x}]_\mu^c + \frac{\sigma}{n}\int_\mu^c e^{-\frac{n}{\sigma}x}dx] - \kappa_n\alpha(n-1)(1-e^{-\frac{n}{\sigma}(c-\mu)}) - \frac{\mu\alpha}{\sigma}(1-e^{-\frac{n}{\sigma}(c-\mu)}) +$
$\frac{\alpha c}{\sigma}e^{-\frac{n}{\sigma}(c-\mu)} - \frac{\mu\alpha}{\sigma}e^{-\frac{n}{\sigma}(c-\mu)} - \kappa_n\alpha(n-1)e^{-\frac{n}{\sigma}(c-\mu)} - \kappa_n\alpha\frac{n^2}{\sigma^2}\int_c^\infty (x-c)e^{-\frac{n}{\sigma}x}e^{\frac{n}{\sigma}\mu}dx =$

$\frac{\alpha}{\sigma}e^{\frac{n}{\sigma}\mu}[-ce^{-\frac{n}{\sigma}c} + \mu e^{-\frac{n}{\sigma}\mu} + (-\frac{\sigma}{n}e^{-\frac{n}{\sigma}x})_\mu^c] - \kappa_n\alpha(n-1)(1-e^{-\frac{n}{\sigma}(c-\mu)}) - \frac{\mu\alpha}{\sigma}(1-e^{-\frac{n}{\sigma}(c-\mu)})$
$+\frac{\alpha c}{\sigma}e^{-\frac{n}{\sigma}(c-\mu)} - \frac{\mu\alpha}{\sigma}e^{-\frac{n}{\sigma}(c-\mu)} - \kappa_n\alpha(n-1)e^{-\frac{n}{\sigma}(c-\mu)} - \kappa_n\alpha\frac{n^2}{\sigma^2}\int_c^\infty (x-c)e^{-\frac{n}{\sigma}x}e^{\frac{n}{\sigma}\mu}dx =$

$\frac{\alpha}{\sigma}e^{\frac{n}{\sigma}\mu}[-ce^{-\frac{n}{\sigma}c} + \mu e^{-\frac{n}{\sigma}\mu} - \frac{\sigma}{n}e^{-\frac{n}{\sigma}c} + \frac{\sigma}{n}e^{-\frac{n}{\sigma}\mu}] - \kappa_n\alpha(n-1)(1-e^{-\frac{n}{\sigma}(c-\mu)}) - \frac{\mu\alpha}{\sigma}(1-e^{-\frac{n}{\sigma}(c-\mu)})$
$+\frac{\alpha c}{\sigma}e^{-\frac{n}{\sigma}(c-\mu)} - \frac{\mu\alpha}{\sigma}e^{-\frac{n}{\sigma}(c-\mu)} - \kappa_n\alpha(n-1)e^{-\frac{n}{\sigma}(c-\mu)} - \kappa_n\alpha\frac{n^2}{\sigma^2}\int_c^\infty (x-c)e^{-\frac{n}{\sigma}x}e^{\frac{n}{\sigma}\mu}dx =$

$-\frac{\alpha c}{\sigma}e^{\frac{n}{\sigma}(\mu-c)} - \frac{\alpha}{n}e^{\frac{n}{\sigma}(\mu-c)} + \frac{\alpha}{n} - \kappa_n\alpha(n-1)(1-e^{\frac{n}{\sigma}(\mu-c)}) + \frac{\mu\alpha}{\sigma}e^{-\frac{n}{\sigma}(\mu-c)} + \frac{\alpha c}{\sigma}e^{-\frac{n}{\sigma}(c-\mu)}$
$-\frac{\mu\alpha}{\sigma}e^{-\frac{n}{\sigma}(c-\mu)} - \kappa_n\alpha(n-1)e^{-\frac{n}{\sigma}(c-\mu)} - \kappa_n\alpha\frac{n^2}{\sigma^2}\int_c^\infty (x-c)e^{-\frac{n}{\sigma}x}e^{\frac{n}{\sigma}\mu}dx =$

$-\frac{\alpha}{n}e^{\frac{n}{\sigma}(\mu-c)} + \frac{\alpha}{n} - \kappa_n\alpha(n-1) - \kappa_n\alpha\frac{n^2}{\sigma^2}\int_c^\infty (x-c)e^{-\frac{n}{\sigma}x}e^{\frac{n}{\sigma}\mu}dx =$

$$-\frac{\alpha}{n}e^{\frac{n}{\sigma}(\mu-c)}+\frac{\alpha}{n}-\kappa_n\alpha(n-1)-\kappa_n\alpha\frac{n^2}{\sigma^2}e^{\frac{n}{\sigma}\mu}\int_c^\infty xe^{-\frac{n}{\sigma}x}dx+\kappa_n\alpha\frac{n^2}{\sigma^2}e^{\frac{n}{\sigma}\mu}c\int_c^\infty e^{-\frac{n}{\sigma}x}dx=$$

$$-\frac{\alpha}{n}e^{\frac{n}{\sigma}(\mu-c)}+\frac{\alpha}{n}-\kappa_n\alpha(n-1)-\kappa_n\alpha\frac{n^2}{\sigma^2}e^{\frac{n}{\sigma}\mu}\int_c^\infty x(-\frac{\sigma}{n}e^{-\frac{n}{\sigma}x})'dx+\kappa_n\alpha\frac{n^2}{\sigma^2}e^{\frac{n}{\sigma}\mu}c(-\frac{\sigma}{n}e^{-\frac{n}{\sigma}x})_c^\infty=$$

$$-\frac{\alpha}{n}e^{\frac{n}{\sigma}(\mu-c)}+\frac{\alpha}{n}-\kappa_n\alpha(n-1)-\kappa_n\alpha\frac{n^2}{\sigma^2}e^{\frac{n}{\sigma}\mu}[(-x\frac{\sigma}{n}e^{-\frac{n}{\sigma}x})_c^\infty+\int_c^\infty\frac{\sigma}{n}e^{-\frac{n}{\sigma}x}dx]+\kappa_n\alpha\frac{nc}{\sigma}e^{\frac{n}{\sigma}(\mu-c)}=$$

$$-\frac{\alpha}{n}e^{\frac{n}{\sigma}(\mu-c)}+\frac{\alpha}{n}-\kappa_n\alpha(n-1)-\kappa_n\alpha\frac{n^2}{\sigma^2}e^{\frac{n}{\sigma}\mu}[\frac{c\sigma}{n}e+\frac{\sigma}{n}(-\frac{\sigma}{n}e^{-\frac{n}{\sigma}x})_c^\infty]+\kappa_n\alpha\frac{cn}{\sigma}e^{\frac{n}{\sigma}(\mu-c)}=$$

$$-\frac{\alpha}{n}e^{\frac{n}{\sigma}(\mu-c)}+\frac{\alpha}{n}-\kappa_n\alpha(n-1)-\kappa_n\alpha e^{\frac{n}{\sigma}(\mu-c)}-\frac{\alpha}{n}e^{\frac{n}{\sigma}(\mu-c)}+\frac{\alpha}{n}-((\frac{n}{n-\alpha})^{\frac{1}{n}}-1)(n-1)$$
$$-((\frac{n}{n-\alpha})^{\frac{1}{n}}-1)e^{\frac{n}{\sigma}(\mu-c)}=$$

$$-\frac{\alpha}{n}e^{\frac{n}{\sigma}(\mu-c)}+\frac{\alpha}{n}-n(\frac{n}{n-\alpha})^{\frac{1}{n}}+n+(\frac{n}{n-\alpha})^{\frac{1}{n}}-1-(\frac{n}{n-\alpha})^{\frac{1}{n}}e^{\frac{n}{\sigma}(\mu-c)}+e^{\frac{n}{\sigma}(\mu-c)}.$$

Τελικά,

$$R(\mu,\delta_2^*)=$$

$$(\frac{n-\alpha}{n})^{-\frac{1}{n}}-(\frac{n-\alpha}{n})^{-\frac{1}{n}}e^{(\frac{n-\alpha}{\sigma})(\mu-c)}+\frac{n-\alpha}{n}e^{\frac{n-\alpha}{\sigma}(\mu-c)}+\frac{\alpha}{n}e^{\frac{n}{\sigma}(\mu-c)}-\frac{\alpha}{n}+n(\frac{n}{n-\alpha})^{\frac{1}{n}}$$
$$-n-(\frac{n}{n-\alpha})^{\frac{1}{n}}+1+(\frac{n}{n-\alpha})^{\frac{1}{n}}e^{\frac{n}{\sigma}(\mu-c)}-e^{\frac{n}{\sigma}(\mu-c)}-1=$$

$$-\frac{\alpha}{n}+n(\frac{n}{n-\alpha})^{\frac{1}{n}}-n+(\frac{n}{n-\alpha})^{\frac{1}{n}}e^{\frac{n}{\sigma}(\mu-c)}-\frac{n-\alpha}{n}e^{\frac{n}{\sigma}(\mu-c)}-e^{-\frac{n-\alpha}{\sigma}(c-\mu)}(\frac{n}{n-\alpha})^{\frac{1}{n}}$$
$$+\frac{n-\alpha}{n}e^{-\frac{n-\alpha}{\sigma}(c-\mu)}=$$

$$[(\frac{n}{n-\alpha})^{\frac{1}{n}}-\frac{n-\alpha}{n}]e^{-\frac{n}{\sigma}(c-\mu)}(1-e^{\frac{\alpha}{\sigma}(c-\mu)})+n(\frac{n}{n-\alpha})^{\frac{1}{n}}-\frac{\alpha}{n}-n.$$

Οπότε,

$$R(\mu,\delta_2)-R(\mu,\delta_2^*)=[(\frac{n}{n-\alpha})^{\frac{1}{n}}-\frac{n-\alpha}{n}]e^{-\frac{n}{\sigma}(c-\mu)}(e^{\frac{\alpha}{\sigma}(c-\mu)}-1)\geq 0,\ \text{όταν}\ \alpha\leq n.$$

Συνεπώς ο εκτιμητής $\delta_2(\underset{\sim}{X})$, όταν $\mu\leq c$, είναι μη αποδεκτος ως προς την μέση συνάρτηση ζημίας Linex και βελτιώνεται απο τον εκτιμητή δ_2^*. □

4.1.2 Εκτίμηση της παραμέτρου θέσης σ, υπό τον περιορισμό$\mu \leq c$, ως προς την συνάρτηση ζημίας Linex

Από την Πρόταση 2.4.3. γνωρίζουμε ότι, ο βέλτιστος αναλλοίωτος εκτιμητής του σ στην κλάση $C^{**} = \{\delta_c/\delta_c = cS\}$ ως προς την συνάρτηση ζημίας $Linex$, όταν η παράμετρος θέσης μ είναι άγνωστη, είναι, $\delta_3(\underset{\sim}{X}) = \dfrac{1}{\alpha}(1 - e^{-\frac{\alpha}{n}})\sum_{i=1}^{n}(X_i - X_{(1)})$ και η συνάρτηση κινδύνου, $R(\sigma, \delta_3) = ne^{-\frac{\alpha}{n}} - n + \alpha$.

Θα προσπαθήσουμε να βελτιώσουμε την εκτίμηση αυτή στην περίπτωση όπου $\mu \leq c$.

Οι Parsian and Farsipour (1997) θεώρησαν τον εκτιμητή,

$$\delta_3^*(\underset{\sim}{X}) = \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\frac{\alpha}{n}})\sum_{i=1}^{n}(X_i - min(c, X_{(1)})) \tag{4.3}$$

Πρόταση 4.1.2. *Ο βέλτιστος αναλλοίωτος εκτιμητής του σ,*

$$\delta_3(\underset{\sim}{X}) = \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\frac{\alpha}{n}})\sum_{i=1}^{n}(X_i - X_{(1)}),$$

είναι ισοδύναμος ώς προς την μέση συνάρτηση ζημίας Linex με τον εκτιμητή, $\delta_3^*(\underset{\sim}{X})$, ο οποίος δίνεται από την Σχέση (4.3), όταν $\mu \leq c$, με c γνωστή σταθερά με συνάρτηση κινδύνου,

$$R(\sigma, \delta_3^*) = ne^{-\frac{\alpha}{n}} - n + \alpha.$$

Απόδειξη

Θέτουμε $\kappa = \dfrac{1}{\alpha}(1 - e^{-\frac{\alpha}{n}})$. Ισχύει ότι, $\dfrac{n}{\sigma}(X_{(1)} - \mu)|X_{(1)} > c \sim G(1,1)$ και $\dfrac{2S}{\sigma} \sim G(n-1, 2)$, επομένως,

$R(\sigma, \delta_3) - R(\sigma, \delta_3^*) =$

$E[(e^{\frac{\kappa\alpha}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}(X_i - X_{(1)}) - \alpha} - e^{\frac{\kappa\alpha}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}(X_i - c) - \alpha} + \dfrac{n\kappa\alpha}{\sigma}(X_{(1)} - c))I_{X_{(1)}>c}] =$

$e^{-\alpha}E(e^{\frac{\kappa\alpha}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}(X_i - X_{(1)})}I_{X_{(1)}>c}) - e^{-\alpha}E(e^{\frac{\kappa\alpha}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}(X_i - c)}I_{X_{(1)}>c}) + E(\frac{n\kappa\alpha}{\sigma}(X_{(1)} - c)I_{X_{(1)}>c}) =$

$e^{-\alpha}E(e^{\frac{\kappa\alpha}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}(X_i - X_{(1)})})P(X_{(1)} > c) - e^{-\alpha}E(e^{\frac{\kappa\alpha}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}(X_i - c + X_{(1)} - X_{(1)})}I_{X_{(1)}>c}) +$

$E(\frac{n\kappa\alpha}{\sigma}(X_{(1)} - c - \mu + \mu)I_{X_{(1)}>c})$.

Όμως,

$$e^{-\alpha}E(e^{\frac{\kappa\alpha}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}(X_i - X_{(1)})})P(X_{(1)} > c) = e^{-\alpha}E(e^{\frac{\kappa\alpha}{\sigma}S})P(X_{(1)} > c) =$$

$$e^{-\alpha}\frac{1}{(1-\sigma\frac{\kappa\alpha}{\sigma})^{n-1}}\int_c^{\infty}\frac{n}{\sigma}e^{-\frac{n}{\sigma}(x-\mu)}dx = e^{-\alpha}(1-\kappa\alpha)^{-(n-1)}[-e^{-\frac{n}{\sigma}(x-\mu)}]_{x=c}^{\infty} =$$

$$e^{-\alpha}(1-\kappa\alpha)^{-(n-1)}e^{-\frac{n}{\sigma}(c-\mu)}. \tag{4.4}$$

Επίσης,

$$e^{-\alpha}E(e^{\frac{\kappa\alpha}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}(X_i - c + X_{(1)} - X_{(1)})}I_{X_{(1)}>c}) =$$

$$e^{-\alpha}E(e^{\frac{\kappa\alpha}{\sigma}S})E(e^{\frac{n\kappa\alpha}{\sigma}(X_{(1)}-c)}I_{X_{(1)}>c}) =$$

$$e^{-\alpha}(1-\kappa\alpha)^{-(n-1)}\int_c^{\infty}e^{\frac{n\kappa\alpha}{\sigma}(x-c)}\frac{n}{\sigma}e^{-\frac{n}{\sigma}(x-\mu)}dx =$$

$$e^{-\alpha}(1-\kappa\alpha)^{-(n-1)}\frac{n}{\sigma}\int_c^{\infty}e^{(\frac{n\kappa\alpha}{\sigma}-\frac{n}{\sigma})x-\frac{n\kappa\alpha}{\sigma}c+\frac{n\mu}{\sigma}}dx =$$

$$e^{-\alpha}(1-\kappa\alpha)^{-(n-1)}\frac{n}{\sigma}e^{-\frac{n\kappa\alpha}{\sigma}c+\frac{n\mu}{\sigma}}\left[\frac{1}{\frac{n\kappa\alpha}{\sigma}-\frac{n}{\sigma}}e^{(\frac{n\kappa\alpha}{\sigma}-\frac{n}{\sigma})x}\right]_{x=c}^{\infty} =$$

$$e^{-\alpha}(1-\kappa\alpha)^{-(n-1)}\frac{n}{\sigma}e^{-\frac{n\kappa\alpha}{\sigma}c+\frac{n\mu}{\sigma}}\frac{(-1)}{(\kappa\alpha-1)}e^{\frac{n\kappa\alpha}{\sigma}c-\frac{nc}{\sigma}} =$$

$$e^{-\alpha}(1-\kappa\alpha)^{-(n-1)}(1-\alpha\kappa)^{-1}e^{\frac{n}{\sigma}(\mu-c)}. \tag{4.5}$$

Ακόμα,

$$E(\frac{n\kappa\alpha}{\sigma}(X_{(1)} - c - \mu + \mu)I_{X_{(1)}>c}) =$$

$$\frac{n\kappa\alpha}{\sigma}(\mu - c)P(X_{(1)} > c) + \frac{n\kappa\alpha}{\sigma}E\left[(X_{(1)} - \mu)I_{X_{(1)}>c}\right] =$$

$$\frac{n\kappa\alpha}{\sigma}(\mu - c)e^{-\frac{n}{\sigma}(c-\mu)} + \frac{n\kappa\alpha}{\sigma}\int_c^{\infty}(x-\mu)\frac{n}{\sigma}e^{-\frac{n}{\sigma}(x-\mu)}dx =$$

$$\frac{n\kappa\alpha}{\sigma}(\mu - c)e^{-\frac{n}{\sigma}(c-\mu)} + \frac{n\kappa\alpha}{\sigma}\left[\left(-xe^{-\frac{n}{\sigma}(x-\mu)}\right)_c^{\infty} + \int_c^{\infty}e^{-\frac{n}{\sigma}(x-\mu)}dx + \mu\left(e^{-\frac{n}{\sigma}(x-\mu)}\right)_c^{\infty}\right] =$$

$$\frac{n\kappa\alpha}{\sigma}(\mu - c)e^{-\frac{n}{\sigma}(c-\mu)} + \frac{n\kappa\alpha}{\sigma}\left[ce^{-\frac{n}{\sigma}(c-\mu)} - \frac{\sigma}{n}(e^{-\frac{n}{\sigma}(x-\mu)})_c^{\infty} - ^{-\frac{n}{\sigma}(c-\mu)}\right] =$$

$$\frac{n\kappa\alpha}{\sigma}(\mu - c)e^{-\frac{n}{\sigma}(c-\mu)} + \frac{n\kappa\alpha}{\sigma}(c - \mu + \frac{\sigma}{n})e^{-\frac{n}{\sigma}(c-\mu)}. \tag{4.6}$$

Από τις σχέσεις (4.4), (4.5) και (4.6) προκύπτει,

$R(\sigma,\delta_3)-R(\sigma,\delta_3^*)=$

$e^{-\alpha}(1-\kappa\alpha)^{-(n-1)}e^{-\frac{n}{\sigma}(c-\mu)}-e^{-\alpha}(1-\kappa\alpha)^{-(n-1)}(1-\alpha\kappa)^{-1}e^{\frac{n}{\sigma}(\mu-c)}+\dfrac{n\kappa\alpha}{\sigma}(\mu-c)\cdot$

$e^{-\frac{n}{\sigma}(c-\mu)}+\dfrac{n\kappa\alpha}{\sigma}(c-\mu+\dfrac{\sigma}{n})e^{-\frac{n}{\sigma}(c-\mu)}=$

$e^{-\alpha}(1-\kappa\alpha)^{-(n-1)}e^{-\frac{n}{\sigma}(c-\mu)}\left[1-\dfrac{1}{1-\kappa\alpha}\right]+\dfrac{n\kappa\alpha}{\sigma}\dfrac{\sigma}{n}e^{-\frac{n}{\sigma}(c-\mu)}=$

$e^{-\alpha}(1-\kappa\alpha)^{-(n-1)}-\dfrac{-\kappa\alpha}{1-\kappa\alpha}e^{-\frac{n}{\sigma}(c-\mu)}+\dfrac{n\kappa\alpha}{\sigma}e^{-\frac{n}{\sigma}(c-\mu)}=$

$\alpha\kappa e^{-\frac{n}{\sigma}(c-\mu)}\left[1-\dfrac{e^{-\alpha}}{(1-\alpha\kappa)^n}\right].$

Επειδή,

$\kappa=\dfrac{1}{\alpha}(1-e^{-\frac{\alpha}{n}})\Leftrightarrow\alpha\kappa=1-e^{-\frac{\alpha}{n}}\Leftrightarrow 1-\alpha\kappa=e^{-\frac{\alpha}{n}}\Leftrightarrow(1-\alpha\kappa)^n=e^{-\alpha}\Leftrightarrow$
$\dfrac{e^{-\alpha}}{(1-\alpha\kappa)^n}=1.$

Συνεπώς,

$R(\sigma,\delta_3)-R(\sigma,\delta_3^*)=\alpha\kappa e^{-\frac{n}{\sigma}(c-\mu)}\left[1-\dfrac{e^{-\alpha}}{(1-\alpha\kappa)^n}\right]=0\ \Leftrightarrow\ R(\sigma,\delta_3)=R(\sigma,\delta_3^*).$

Άρα ο εκτιμητής δ_3 είναι ισοδύναμος με τον εκτιμητή δ_3^* ως προς την μέση συνάρτηση ζημίας Linex. □

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι ο β.α.ε. του σ, δ_3, είναι ισοδύναμος με τον β.α.ε. του σ, δ_3^*, όταν ισχύει ο περιορισμός $\mu\leq c$, αφού η συνάρτηση ζημίας είναι αυστηρά κυρτή, οι Parsian and Farsipour (1997), πρότειναν τον εκτιμητή,

$$\delta_4(\underset{\sim}{X})=\frac{\delta_3(\underset{\sim}{X})+\delta_3^*(\underset{\sim}{X})}{2}$$

ή διαφορετικά

$$\delta_4(\underset{\sim}{X})=\begin{cases}\kappa S & ,\ \text{αν}\ \ X_{(1)}\leq c\\ \kappa S+\dfrac{n\kappa}{2}(X_{(1)}-c) & ,\ \text{αν}\ \ X_{(1)}>c\end{cases}\tag{4.7}$$

όπου $\kappa = \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\frac{\alpha}{n}})$.

Πρόταση 4.1.3. *Ο εκτιμητής του σ,* $\delta_3^*(\underset{\sim}{X}) = \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\frac{\alpha}{n}})\sum_{i=1}^{n}(X_i - min(c, X_{(1)}))$, *είναι μη αποδεκτός ως προς την μέση συνάρτηση ζημίας Linex, όταν* $\mu \leq c$, *και βελτιώνεται απο τον εκτιμητή* $\delta_4(\underset{\sim}{X})$ *ο οποίος δίνεται στη Σχέση (4.7) με συνάρτηση κινδύνου,*

$$R(\sigma, \delta_4) = e^{-\frac{n}{\sigma}(\mu - c)}\frac{(1 - e^{-\frac{\alpha}{n}})(3 + e^{-\frac{\alpha}{n}})}{2(1 + e^{-\frac{\alpha}{n}})} + ne^{-\frac{\alpha}{n}} - n + \alpha.$$

Απόδειξη

Γνωρίζουμε ότι, $S \sim Gamma(n-1, \sigma)$ και $\frac{n}{\sigma}(X_{(1)} - c)|X_{(1)} > c \sim Gamma(1, 1)$ (βλ, Πρόταση 5.1.1.). Επομένως,

$$R(\sigma, \delta_3^*) - R(\sigma, \delta_4) =$$

$$E(e^{\alpha(\frac{\delta_3^*}{\sigma} - 1)} - \alpha(\frac{\delta_3^*}{\sigma} - 1) - 1) - E(e^{\alpha(\frac{\delta_4}{\sigma} - 1)} - \alpha(\frac{\delta_4}{\sigma} - 1) - 1) =$$

$$E(e^{\frac{\alpha}{\sigma}\kappa S + \frac{\alpha}{\sigma}\kappa n(X_{(1)} - c) - \alpha}I_{X_{(1)} > c}) - E((\frac{\alpha}{\sigma}\kappa S + \frac{\alpha}{\sigma}\kappa n(X_{(1)} - c) - \alpha)I_{X_{(1)} > c}) -$$

$$E(e^{\frac{\alpha}{\sigma}\kappa S + \frac{\alpha}{\sigma}\frac{n\kappa}{2}(X_{(1)} - c) - \alpha}I_{X_{(1)} > c}) + E((\frac{\alpha}{\sigma}\kappa S + \frac{\alpha}{\sigma}\frac{n\kappa}{2}(X_{(1)} - c) - \alpha)I_{X_{(1)} > c}) =$$

$$e^{-\alpha}E(e^{\frac{\alpha}{\sigma}\kappa S})E(e^{\frac{\alpha}{\sigma}\kappa n(X_{(1)} - c)}I_{X_{(1)} > c}) - e^{-\alpha}E(e^{\frac{\alpha}{\sigma}\kappa S})E(e^{\frac{\alpha}{\sigma}\frac{\kappa n}{2}(X_{(1)} - c)}I_{X_{(1)} > c}) -$$

$$E(\frac{\alpha}{\sigma}\frac{n\kappa}{2}(X_{(1)} - c)I_{X_{(1)} > c}) =$$

$$e^{-\alpha}\frac{1}{(1 - \kappa\alpha)^{n-1}}\int_c^\infty e^{\frac{n\kappa\alpha}{\sigma}(x - c)}\frac{n}{\sigma}e^{\frac{n}{\sigma}(x - \mu)}dx - e^{\alpha}\frac{1}{(1 - \kappa\alpha)^{n-1}}\int_c^\infty e^{\frac{n\kappa\alpha}{2\sigma}(x - c)}\frac{n}{\sigma}e^{\frac{n}{\sigma}(x - \mu)}dx$$

$$-\frac{n\kappa\alpha}{2\sigma}\int_c^\infty x\frac{n}{\sigma}e^{-\frac{n}{\sigma}(x - \mu)}dx - \frac{n\kappa\alpha}{2\sigma}ce^{-\frac{n}{\sigma}(c - \mu)} =$$

$$e^{-\alpha}\frac{1}{(1 - \kappa\alpha)^{n-1}}\frac{n}{\sigma}\int_c^\infty e^{(\frac{n\kappa\alpha}{\sigma} - \frac{n}{\sigma})x - \frac{n\kappa\alpha}{\sigma}c + \frac{n\mu}{\sigma}}dx - e^{-\frac{\alpha}{n}}\frac{n}{\sigma}e^{-\frac{n\kappa\alpha}{2\sigma}c + \frac{n}{\sigma}\mu}\int_c^\infty e^{(\frac{n\kappa\alpha}{2\sigma} - \frac{n}{\sigma})x}dx -$$

$$\frac{n\kappa\alpha}{2\sigma}\left[-xe^{-\frac{n}{\sigma}(x - \mu)}\right]_{x=c}^\infty - \frac{n\kappa\alpha}{2\sigma}\int_c^\infty e^{-\frac{n}{\sigma}(x - \mu)} - \frac{n\kappa\alpha}{2\sigma}ce^{-\frac{n}{\sigma}(c - \mu)} =$$

$$e^{-\alpha}\frac{1}{(1 - \kappa\alpha)^{n-1}}\frac{n}{\sigma}e^{-\frac{n\kappa\alpha}{\sigma}c + \frac{n}{\sigma}\mu}\left[\frac{1}{\frac{n\kappa\alpha}{\sigma} - \frac{n}{\sigma}}e^{(\frac{n\kappa\alpha}{\sigma} - \frac{n}{\sigma})x}\right]_{x=c}^\infty -$$

$$e^{-\frac{\alpha}{n}}\frac{n}{\sigma}e^{-\frac{n\kappa\alpha}{2\sigma}}\frac{1}{\frac{n\kappa\alpha}{2\sigma}-\frac{n}{\sigma}}\left[e^{(\frac{n\kappa\alpha}{2\sigma}-\frac{n}{\sigma})x}\right]_{x=c}^{\infty}+\frac{\alpha\kappa}{2}e^{-\frac{n}{\sigma}(c-\mu)}=$$

$$e^{-\alpha}\frac{1}{(1-\kappa\alpha)^{n-1}}\frac{n}{\sigma}e^{-\frac{n\kappa\alpha}{\sigma}c+\frac{n}{\sigma}\mu}\frac{(-1)}{\frac{n}{\sigma}(\kappa\alpha-1)}e^{\frac{n\kappa\alpha}{\sigma}c-\frac{n}{\sigma}c}-\frac{2}{2-\kappa\alpha}e^{-\frac{\alpha}{n}}e^{-\frac{n}{\sigma}(c-\mu)}+$$

$$\frac{1-e^{-\frac{\alpha}{n}}}{2}e^{-\frac{n}{\sigma}(c-\mu)}=$$

$$e^{-\alpha}\frac{1}{(1-\kappa\alpha)^{n}}e^{\frac{n}{\sigma}(\mu-c)}-\frac{2}{1+e^{-\frac{\alpha}{n}}}e^{-\frac{\alpha}{n}}e^{-\frac{n}{\sigma}(c-\mu)}+\frac{1-e^{-\frac{n}{\sigma}}(c-\mu)}{2}=$$

$$e^{-\frac{n}{\sigma}(\mu-c)}\left(1-\frac{2}{1+e^{-\frac{\alpha}{n}}}e^{-\frac{\alpha}{n}}+\frac{1-e^{-\frac{\alpha}{n}}}{2}\right)=$$

$$e^{-\frac{n}{\sigma}(\mu-c)}\left(\frac{2+2e^{-\frac{\alpha}{n}}-4e^{-\frac{\alpha}{n}}+1-e^{-2\frac{\alpha}{n}}}{2(1+e^{-\frac{\alpha}{n}})}\right)=$$

$$e^{-\frac{n}{\sigma}(\mu-c)}\left(\frac{2(1-e^{-\frac{\alpha}{n}})+(1-e^{-\frac{\alpha}{n}})(1+e^{-\frac{\alpha}{n}})}{2(1+e^{-\frac{\alpha}{n}})}\right)=$$

$$e^{-\frac{n}{\sigma}(\mu-c)}\frac{(1-e^{-\frac{\alpha}{n}})(3+e^{-\frac{\alpha}{n}})}{2(1+e^{-\frac{\alpha}{n}})}>0$$

Συνεπώς ο εκτιμητής του σ, $\delta_3^*(\underset{\sim}{X})$ όταν $\mu \leq c$ είναι μη αποδεκτός ως προς την συνάρτηση ζημίας Linex και βελτιώνεται απο τον εκτιμητή, $\delta_4(\underset{\sim}{X})$ με συνάρτηση κινδύνου,

$$R(\sigma,\delta_4)=e^{-\frac{n}{\sigma}(\mu-c)}\frac{(1-e^{-\frac{\alpha}{n}})(3+e^{-\frac{\alpha}{n}})}{2(1+e^{-\frac{\alpha}{n}})}+ne^{-\frac{\alpha}{n}}-n+\alpha. \qquad \square$$

4.2 Εφαρμογή στο πρόβλημα των δύο δείγματων

Έστω $X_1, X_2, ..., X_n$ τυχαίο δείγμα απο τη διπαραμετρική εκθετική κατανομή $\mathcal{E}(\mu_1, \sigma_1)$, και $Y_1, Y_2, ..., Y_m$ επίσης τυχαίο δείγμα απο τη διπαραμετρική εκθετική κατανομή $\mathcal{E}(\mu_2, \sigma_2)$. Μας ενδιαφέρει η εκτίμηση των παραμέτρων μ_1 και σ_1 στην περίπτωση όπου $\mu_1 \leq \mu_2$ ως προς την συνάρτηση ζημίας Linex.

Θα εκτιμήσουμε αρχικά την παράμετρο μ_1 όταν οι σ_1 και σ_2 είναι γνωστές παράμετροι και $\mu_1 \leq \mu_2$.

Από την Πρόταση 2.4.1. γνωρίζουμε ότι, ο βέλτιστος αναλλοίωτος εκτιμητής του μ_1, δηλαδή ο εκτιμητής Pitman, (*Sen and Saleh* (1990)), στην κλάση $C = \{\delta_c/\delta_c = X_{(1)} + c\}$ ως προς την συνάρτηση ζημίας *Linex* , όταν η παράμετρος κλίμακας σ_1 είναι γνωστή, με $\Delta = \delta_c - \mu_1$ και $\underset{\sim}{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)$ είναι, $\delta_1^{'}(\underset{\sim}{X}) = X_{(1)} - \frac{1}{\alpha} ln(\frac{n}{n-\alpha\sigma_1})$ όταν $\alpha < \frac{n}{\sigma_1}$.

Για την εκτίμηση της παραμέτρου μ_1, όταν σ_1 και σ_2 είναι γνωστά και $\mu_1 \leq \mu_2$, οι Parsian and Farsipour (1997) πρότειναν τον εκτιμητή,

$$\delta_1^{*'}(\underset{\sim}{X}) = min(X_{(1)}, Y_{(1)}) - \frac{1}{\alpha} ln(\frac{n}{n-\alpha\sigma_1}), \text{ όπου } \alpha < \frac{n}{\sigma_1} \tag{4.8}$$

Θεώρημα 4.2.1. *Ο βέλτιστος αναλλοίωτος εκτιμητής της παραμέτρου* μ_1, $\delta_1^{'}(\underset{\sim}{X}) = X_{(1)} - \frac{1}{\alpha} ln(\frac{n}{n-\alpha\sigma_1})$, *όταν* $\mu_1 \leq \mu_2$ *και οι παράμετροι* σ_1 *και* σ_2 *γνωστές, είναι μη αποδεκτός ως προς την μέση συνάρτηση ζημίας Linex και βελτιώνεται απο τον εκτιμητή,* $\delta_1^{*'}(\underset{\sim}{X})$ *της Σχέσης (4.8).*

Απόδειξη

$R(\mu_1, \delta_1^{'}) - R(\mu_1, \delta_1^{*'}) =$

$E\left[(e^{\alpha(X_{(1)} - \frac{1}{\alpha} ln(\frac{n}{n-\alpha\sigma_1})) - \mu_1)} - e^{\alpha(Y_{(1)} - \frac{1}{\alpha} ln(\frac{n}{n-\alpha\sigma_1})) - \mu_1)} - \alpha(X_{(1)} - Y_{(1)}))I_{X_{(1)} > Y_{(1)}}\right] =$

$E\left[E[(e^{\alpha(X_{(1)} - \frac{1}{\alpha} ln(\frac{n}{n-\alpha\sigma_1})) - \mu_1)} - e^{\alpha(c - \frac{1}{\alpha} ln(\frac{n}{n-\alpha\sigma_1})) - \mu_1)} - \alpha(X_{(1)} - c))I_{X_{(1)} > c}|Y_{(1)} = c]\right] =$

$\int_{\mu_2}^{\infty} E[(e^{\alpha(X_{(1)} - \frac{1}{\alpha} ln(\frac{n}{n-\alpha\sigma_1})) - \mu_1)} - e^{\alpha(c - \frac{1}{\alpha} ln(\frac{n}{n-\alpha\sigma_1})) - \mu_1)} - \alpha(X_{(1)} - c))I_{X_{(1)} > c}] f_{Y_{(1)}}(c) dc.$

Όμως, από την απόδειξη του Θεωρήματος 4.1.1.,προκύπτει ότι,

$R(\mu, \delta_1) - R(\mu, \delta_1^*) =$

$E[(e^{\alpha(X_{(1)} - \frac{1}{\alpha} ln(\frac{n}{n-\alpha\sigma})) - \mu)} - e^{\alpha(c - \frac{1}{\alpha} ln(\frac{n}{n-\alpha\sigma})) - \mu)} - \alpha(X_{(1)} - c))I_{X_{(1)} > c}] =$

$\frac{\alpha\sigma}{n} e^{-\frac{n}{\sigma}(c-\mu)}(e^{\alpha(c-\mu)} - 1) \geq 0.$

Συνεπώς,

$R(\mu_1, \delta_1^{'}) - R(\mu_1, \delta_1^{*'}) =$

$E\left[\frac{\alpha\sigma_1}{n} e^{-\frac{n}{\sigma_1}(c-\mu_1)}(e^{\alpha(c-\mu_1)} - 1)|Y_{(1)} = c\right] = \frac{\alpha\sigma_1}{n} E\left[e^{-\frac{n}{\sigma_1}(Y_{(1)}-\mu_1)}(e^{\alpha(Y_{(1)}-\mu_1)} - 1)\right].$

Αν $\alpha > 0$ η τ. μ. $e^{\alpha(Y_{(1)} - \mu_1 + \mu_2 - \mu_2)} - 1 > 0$, επομένως

$$\frac{\alpha\sigma_1}{n} E\left[e^{-\frac{n}{\sigma_1}(Y_{(1)}-\mu_1)}(e^{\alpha(Y_{(1)}-\mu_1)} - 1)\right] > 0 \tag{4.9}$$

Αντίστοιχα, η (4.9) ισχύει για $\alpha < 0$.

Άρα ο εκτιμητής $\delta_1^{'}(\underset{\sim}{X})$ είναι μη αποδεκτός ως προς την μέση συνάρτηση ζημίας Linex και βελτιώνεται απο τον εκτιμητή, $\delta_1^{*'}(\underset{\sim}{X})$. □

Στη συνέχεια παραθέτουμε τρόπους εκτίμησης της παράμετρου μ_1 στην περίπτωση όπου σ_1, σ_2 είναι άγνωστα και $\mu_1 \leq \mu_2$.

Από την Πρόταση 2.4.2. γνωρίζουμε ότι, ο βέλτιστος αναλλοίωτος εκτιμητής του μ_1 στην κλάση $C^* = \{\delta_c/\delta_c = X_{(1)} + cS\}$ ως προς την συνάρτηση ζημίας $Linex$, όταν οι παράμετροι σ_1 και σ_2 είναι άγνωστες, με $\Delta = \dfrac{\delta_c - \mu_1}{\sigma_1}$ είναι,

$$\delta_2^{'}(\underset{\sim}{X}) = X_{(1)} - \frac{1}{\alpha}[(\frac{n}{n-\alpha})^{\frac{1}{n}} - 1]\sum_{i=1}^{n}(X_i - X_{(1)}),\ \text{όπου}\ m > \alpha.$$

Για την εκτίμηση της παραμέτρου μ_1, όταν σ_1, σ_2 άγνωστα και $\mu_1 \leq \mu_2$, οι Parsian and Farsipour (1997) θεώρησαν τον εκτιμητή,

$$\delta_2^{*'}(\underset{\sim}{X}) = min(X_{(1)}, Y_{(1)}) - \frac{1}{\alpha}[(\frac{n}{n-\alpha})^{\frac{1}{n}} - 1]\sum_{i=1}^{n}(X_i - min(X_{(1)}, Y_{(1)})) \quad (4.10)$$

Θεώρημα 4.2.2. *Ο βέλτιστος αναλλοίωτος εκτιμητής του μ_1, $\delta_2^{'}(\underset{\sim}{X})$ ως προς την μέση συνάρτηση ζημίας Linex, όταν $\mu_1 \leq \mu_2$ και οι παράμετροι σ_1 και σ_2 είναι άγνωστες, με $\Delta = \dfrac{\delta_c - \mu_1}{\sigma_1}$ είναι μη αποδεκτός και βελτιώνεται απο τον εκτιμητή $\delta_2^{*'}(\underset{\sim}{X})$, της Σχέσης (4.10), όταν $\alpha < n$.*

Απόδειξη

Έστω $S = \sum_{i=1}^{n}(X_i - X_{(1)})$ και $\kappa_n = \dfrac{1}{\alpha}[(\dfrac{n}{n-\alpha})^{\frac{1}{n}} - 1]$. Έχουμε,

$R(\mu_1, \delta_2^{'}) - R(\mu_1, \delta_2^{*'}) =$

$E[(e^{\alpha(\frac{X_{(1)} - \kappa_n S - \mu_1}{\sigma_1})} - e^{\alpha(\frac{Y_{(1)} - \kappa_n S - \kappa_n n(X_{(1)} - Y_{(1)}) - \mu_1}{\sigma_1})} - \dfrac{\alpha}{\sigma_1}(1 + \kappa_n n)(X_{(1)} - Y_{(1)}))$

$I_{X_{(1)} > Y_{(1)}}] =$

$E[E[(e^{\alpha(\frac{X_{(1)} - \kappa_n S - \mu_1}{\sigma_1})} - e^{\alpha(\frac{c - \kappa_n S - \kappa_n n(X_{(1)} - c) - \mu_1}{\sigma_1})} - \dfrac{\alpha}{\sigma_1}(1 + \kappa_n n)(X_{(1)} - c))I_{X_{(1)} > c}$

$|Y_{(1)} = c]] =$

$$\int_{\mu_2}^{\infty} E[(e^{\alpha(\frac{X_{(1)}-\kappa_n S-\mu_1}{\sigma_1})} - e^{\alpha(\frac{c-\kappa_n S-\kappa_n n(X_{(1)}-c)-\mu_1}{\sigma_1})} - \frac{\alpha}{\sigma_1}(1+\kappa_n n)(X_{(1)}-c))I_{X_{(1)}>c}]$$

$f_{Y_{(1)}}(c)dc.$

Όμως, από την απόδειξη του Θεωρήματος 4.1.2., προκύπτει ότι,

$R(\mu_1, \delta_2) - R(\mu_1, \delta_2^*) =$

$E[(e^{\alpha(\frac{X_{(1)}-\kappa_n-\mu}{\sigma})} - e^{\alpha(\frac{c-\kappa_n S-\kappa n(X_{(1)}-c)-\mu}{\sigma})} - \frac{\alpha}{\sigma}(1+\kappa_n n)(X_{(1)}-c))I_{X_{(1)}>c}] =$

$[(\frac{n}{n-\alpha})^{\frac{1}{n}} - \frac{n-\alpha}{n}]e^{-\frac{n}{\sigma}(c-\mu)}(e^{\frac{\alpha}{\sigma}(c-\mu)} - 1)$

Συνεπώς,

$R(\mu_1, \delta_2^{'}) - R(\mu_1, \delta_2^{*'}) =$

$[(\frac{n}{n-\alpha})^{\frac{1}{n}} - \frac{n-\alpha}{n}]E[e^{-\frac{n}{\sigma_1}(Y_{(1)}-\mu_1)}(e^{\frac{\alpha}{\sigma_1}(Y_{(1)}-\mu_1)} - 1)].$

Αν $0 < \alpha < n$, τότε η τ.μ. $e^{\frac{\alpha}{\sigma_1}(Y_{(1)}-\mu_1+\mu_2-\mu_2)} > 0$ και $(\frac{n}{n-\alpha})^{\frac{1}{n}} - \frac{n-\alpha}{n} > 0$

$\Leftrightarrow 1 > (\frac{n}{n-\alpha})^{\frac{1}{n})n+1}$, ισχύει για $0 < \alpha < n$. Οπότε,

$$[(\frac{n}{n-\alpha})^{\frac{1}{n}} - \frac{n-\alpha}{n}]E[e^{-\frac{n}{\sigma_1}(Y_{(1)}-\mu_1)}(e^{\frac{\alpha}{\sigma_1}(Y_{(1)}-\mu_1)} - 1)] > 0 \tag{4.11}$$

Αντίστοιχα, η (4.11) ισχύει για $\alpha < 0$.

Άρα ο εκτιμητής $\delta_2^{'}(\underset{\sim}{X})$ είναι μη αποδεκτός ως προς την μέση συνάρτηση ζημίας Linex και βελτιώνεται απο τον εκτιμητή, $\delta_2^{*'}(\underset{\sim}{X})$. □

Στη συνέχεια ασχολούμαστε με την εκτίμηση της παράμετρου σ_1 στην περίπτωση όπου $\mu_1 \leq \mu_2$. Από την Πρόταση 2.4.3 γνωρίζουμε ότι, ο βέλτιστος αναλλοίωτος εκτιμητής του σ_1 στην κλάση $C^{**} = \{\delta_c/\delta_c = cS_1\}$ ως προς την μέση συνάρτηση ζημίας *Linex* με $\Delta = \frac{\delta_c}{\sigma_1} - 1$ και $\underset{\sim}{X} = (X_1, X_2, ..., X_m)$ είναι, $\delta_3^{'}(\underset{\sim}{X}) = \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\frac{\alpha}{n}})\sum_{i=1}^{n}(X_i - X_{(1)})$.

Θα προσπαθήσουμε να βελτιώσουμε την εκτίμηση αυτή στην περίπτωση που $\mu_1 \leq \mu_2$.

Θεωρούμε τον εκτιμητή,

$$\delta_3^{*'}(\underset{\sim}{X}) = \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\frac{\alpha}{n}})\sum_{i=1}^{n}(X_i - min(X_{(1)}, Y_{(1)})) \tag{4.12}$$

Πρόταση 4.2.1. *Ο βέλτιστος αναλλοίωτος εκτιμητής του σ_1,*

$$\delta_3^{'}(\underset{\sim}{X}) = \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\frac{\alpha}{n}})\sum_{i=1}^{n}(X_i - X_{(1)}),$$

όταν $\mu_1 \leq \mu_2$ είναι ισοδύναμος ως προς την μέση συνάρτηση ζημίας Linex με τον εκτιμητή, $\delta_3^{*'}(\underset{\sim}{X})$ της Σχέσης (4.12)

Απόδειξη

Θέτουμε $\kappa = \dfrac{1}{\alpha}(1 - e^{-\frac{\alpha}{n}})$ και $S = \sum_{i=1}^{n}(X_i - X_{(1)})$ Έχουμε,

$R(\sigma_1, \delta_3^{'}) - R(\sigma_1, \delta_3^{*'}) =$

$$E\left[(e^{\frac{\kappa\alpha}{\sigma_1}S-\alpha} - e^{\frac{\kappa\alpha}{\sigma_1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - Y_{(1)})-\alpha} + \frac{n\kappa\alpha}{\sigma_1}(X_{(1)} - Y_{(1)}))I_{X_{(1)}>Y_{(1)}}\right] =$$

$$E\left[E[(e^{\frac{\kappa\alpha}{\sigma_1}S-\alpha} - e^{\frac{\kappa\alpha}{\sigma_1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - c)-\alpha} + \frac{n\kappa\alpha}{\sigma_1}(X_{(1)} - c))I_{X_{(1)}>c}|Y_{(1)} = c]\right] =$$

$$E\left[(e^{\frac{\kappa\alpha}{\sigma_1}S-\alpha} - e^{\frac{\kappa\alpha}{\sigma_1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - c)-\alpha} + \frac{n\kappa\alpha}{\sigma_1}(X_{(1)} - c))I_{X_{(1)}>c}\right].$$

Όμως, από την απόδειξη της Πρότασης 4.1.2. προκύπτει ότι,

$$E\left[(e^{\frac{\kappa\alpha}{\sigma}S-\alpha} - e^{\frac{\kappa\alpha}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}(X_i - c)-\alpha} + \frac{n\kappa\alpha}{\sigma}(X_{(1)} - c))I_{X_{(1)}>c}\right] =$$

$R(\sigma_1, \delta_3) - R(\sigma_1, \delta_3^{*}) = 0.$

Συνεπώς, $R(\sigma_1, \delta_3^{'}) - R(\sigma_1, \delta_3^{*'}) = 0.$

Οπότε ο βέλτιστος αναλλοίωτος εκτιμητής του σ_1, $\delta_3^{'}(\underset{\sim}{X})$, όταν $\mu_1 \leq \mu_2$ είναι ισοδύναμος ως προς την μέση συνάρτηση ζημίας Linex με τον εκτιμητή $\delta_3^{*'}(\underset{\sim}{X})$. □

Χρησιμοποιώντας το γεγονός, ότι η συνάρτηση ζημίας είναι αυστηρώς κυρτή, οι Parsian and Farsipour (1997) θεώρησαν τον εκτιμητή,

$$\delta_4^{'}(\underset{\sim}{X}) = \frac{\delta_3^{'}(\underset{\sim}{X}) + \delta_3^{*'}(\underset{\sim}{X})}{2}$$

για την εκτίμηση του σ_1, όταν $\mu_1 \leq \mu_2$, ή διαφορετικά

$$\delta_4^{'}(\underset{\sim}{X}) = \begin{cases} \kappa S & , \text{ αν } X_{(1)} \leq Y_{(1)} \\ \kappa S + \dfrac{n\kappa}{2}(X_{(1)} - Y_{(1)}) & , \text{ αν } X_{(1)} > Y_{(1)} \end{cases} \tag{4.13}$$

όπου $\kappa = \dfrac{1}{\alpha}(1 - e^{-\frac{\alpha}{n}})$ και $S = \sum_{i=1}^{n}(X_i - X_{(1)})$.

Πρόταση 4.2.2. *Οι εκτιμητές του σ, $\delta_3^{*'}(\underset{\sim}{X})$ και $\delta_3^{'}(\underset{\sim}{X})$, όταν $\mu_1 \leq \mu_2$ είναι μη αποδεκτοί ως προς την μέση συνάρτηση ζημίας Linex και βελτιώνονται απο τον εκτιμητή $\delta_4^{'}(\underset{\sim}{X})$, που δίνεται στη Σχέση (4.13.).*

Απόδειξη

Έχουμε,

$R(\sigma, \delta_3^{*'}) - R(\sigma, \delta_4^{'}) =$

$E(e^{\frac{\alpha}{\sigma_1}\kappa S + \frac{\alpha}{\sigma_1}\kappa n(X_{(1)} - Y_{(1)}) - \alpha} I_{X_{(1)} > Y_{(1)}}) - E((\frac{\alpha}{\sigma_1}\kappa S + \frac{\alpha}{\sigma_1}\kappa n(X_{(1)} - Y_{(1)}) - \alpha) I_{X_{(1)} > Y_{(1)}}) -$

$E(e^{\frac{\alpha}{\sigma_1}\kappa S + \frac{\alpha}{\sigma_1}\frac{n\kappa}{2}(X_{(1)} - Y_{(1)}) - \alpha} I_{X_{(1)} > Y_{(1)}}) + E((\frac{\alpha}{\sigma_1}\kappa S + \frac{\alpha}{\sigma_1}\frac{n\kappa}{2}(X_{(1)} - Y_{(1)}) - \alpha) I_{X_{(1)} > Y_{(1)}}) =$

$E[E[e^{\frac{\alpha}{\sigma_1}\kappa S + \frac{\alpha}{\sigma_1}\kappa n(X_{(1)} - c) - \alpha} I_{X_{(1)} > c} | Y_{(1)} = c]] -$

$E[E[(\frac{\alpha}{\sigma_1}\kappa S + \frac{\alpha}{\sigma_1}\kappa n(X_{(1)} - c) - \alpha) I_{X_{(1)} > c} | Y_{(1)} = c]] -$

$E[E[e^{\frac{\alpha}{\sigma_1}\kappa S + \frac{\alpha}{\sigma_1}\frac{n\kappa}{2}(X_{(1)} - c) - \alpha} I_{X_{(1)} > c} | Y_{(1)} = c]] +$

$E[E[(\frac{\alpha}{\sigma_1}\kappa S + \frac{\alpha}{\sigma_1}\frac{n\kappa}{2}(X_{(1)} - c) - \alpha) I_{X_{(1)} > c} | Y_{(1)} = c]] =$

$E(e^{\frac{\alpha}{\sigma_1}\kappa S + \frac{\alpha}{\sigma_1}\kappa n(X_{(1)} - c) - \alpha} I_{X_{(1)} > c}) - E((\frac{\alpha}{\sigma_1}\kappa S + \frac{\alpha}{\sigma_1}\kappa n(X_{(1)} - c) - \alpha) I_{X_{(1)} > c}) -$

$E(e^{\frac{\alpha}{\sigma_1}\kappa S + \frac{\alpha}{\sigma_1}\frac{n\kappa}{2}(X_{(1)} - c) - \alpha} I_{X_{(1)} > c}) + E((\frac{\alpha}{\sigma_1}\kappa S + \frac{\alpha}{\sigma_1}\frac{n\kappa}{2}(X_{(1)} - c) - \alpha) I_{X_{(1)} > c})$.

Όμως, από την απόδειξη της Πρότασης 4.1.3., προκύπτει ότι,

$R(\sigma, \delta_3^{*}) - R(\sigma, \delta_4) =$

$E(e^{\frac{\alpha}{\sigma}\kappa S + \frac{\alpha}{\sigma}\kappa n(X_{(1)} - c) - \alpha} I_{X_{(1)} > c}) - E((\frac{\alpha}{\sigma}\kappa S + \frac{\alpha}{\sigma}\kappa n(X_{(1)} - c) - \alpha) I_{X_{(1)} > c}) -$

$E(e^{\frac{\alpha}{\sigma}\kappa S + \frac{\alpha}{\sigma}\frac{n\kappa}{2}(X_{(1)} - c) - \alpha} I_{X_{(1)} > c}) + E((\frac{\alpha}{\sigma}\kappa S + \frac{\alpha}{\sigma}\frac{n\kappa}{2}(X_{(1)} - c) - \alpha) I_{X_{(1)} > c}) =$

$$e^{-\frac{n}{\sigma}(\mu-c)}\frac{(1-e^{-\frac{\alpha}{n}})(3+e^{-\frac{\alpha}{n}})}{2(1+e^{-\frac{\alpha}{n}})}.$$

Συνεπώς,

$$R(\sigma,\delta_3^{*'})-R(\sigma,\delta_4^{'})=\frac{(1-e^{-\frac{\alpha}{n}})(3+e^{-\frac{\alpha}{n}})}{2(1+e^{-\frac{\alpha}{n}})}E(e^{-\frac{n}{\sigma}(\mu_1-Y_{(1)})})>0.$$

Άρα οι εκτιμητές του σ, $\delta_3^{*'}(\underset{\sim}{X})$ και $\delta_3^{'}(\underset{\sim}{X})$, όταν $\mu_1\leq\mu_2$ είναι μη αποδεκτοί ως προς την συνάρτηση ζημίας Linex και βελτιώνονται απο τον εκτιμητή, $\delta_4^{'}(\underset{\sim}{X})$. $\square$

Κεφάλαιο 5

Παράρτημα

5.1 Αποδείξεις χρήσιμων προτάσεων

Πρόταση 5.1.1. *Έστω* $Y = \dfrac{n}{\sigma}(X_{(1)} - c)$*.Τότε* $Y|X_{(1)} > c \sim Gamma(1,1)$.

Απόδειξη

Έχουμε,

$F_Y(y|X_{(1)} > c) = P(Y \leq y|X_{(1)} > c) = \dfrac{P(Y \leq y, X_{(1)} > c)}{P(X_{(1)} > c)} =$

$\dfrac{P(n\frac{X_{(1)}-c}{\sigma} \leq y, X_{(1)} > c)}{P(X_{(1)} > c)} = \dfrac{P(c < X_{(1)} \leq c + \frac{\sigma}{n}y)}{P(X_{(1)} > c)} =$

$\dfrac{P(X_{(1)} \leq c + \frac{\sigma}{n}y)}{P(X_{(1)} > c)} - \dfrac{P(X_{(1)} \leq c)}{P(X_{(1)} > c)}.$

Οπότε, $f_Y(y|X_{(1)} > c) = \dfrac{d}{dy}F_Y(y|X_{(1)} > c) = \dfrac{f_{X_{(1)}}(c + \frac{\sigma}{n}y)\frac{\sigma}{n}}{P(X_{(1)} > c)} = \dfrac{\frac{n}{\sigma}e^{-\frac{n}{\sigma}(c+\frac{\sigma}{n}y-\mu)}\frac{\sigma}{n}}{e^{-\frac{n}{\sigma}(c-\mu)}} =$
e^{-y}.

Συνεπώς, $Y|X_{(1)} > c \sim Gamma(1,1) \equiv \mathcal{E}(1)$ □

Πρόταση 5.1.2. *Αν* $G_n \sim Gamma(n,1)$*, τότε* $P(G_n < n) = \sum_{k=n}^{\infty} e^{-n}\dfrac{n^k}{k!}$.

Απόδειξη

$f_T(t) = \dfrac{1}{\Gamma(n)}t^{n-1}e^{-t} = \dfrac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-t}.$

$$P(G_n < n) = \int_0^n \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-t} dt = \int_0^n \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} d[-e^{-t}] =$$

$$-\frac{1}{(n-1)!}\left[t^{n-1}e^{-t}\right]_{t=0}^{n} + \int_0^n \frac{1}{(n-1)!}(n-1)t^{n-2}e^{-t}dt =$$

$$-\frac{1}{(n-1)!}n^{n-1}e^{-n} - \frac{1}{(n-2)!}n^{n-2}e^{-n} - \frac{1}{(n-3)!}n^{n-3}e^{-n} + ... + 1 - \frac{1}{(n-n)!}n^{n-n}e^{-n} =$$

$$1 - \sum_{k=0}^{n-1} n^k \frac{1}{k!} e^{-n} = \sum_{k=n}^{\infty} n^k \frac{1}{k!} e^{-n}. \qquad \square$$

Πρόταση 5.1.3. *Έστω Y,μια τυχαία μεταβλητή απο την κατανομή Poisson με μέσο v ένα θετικό ακέραιο. Τότε $P(Y = i) < P(Y = 2v - (i + 1))$, όπου $i = 0, 1, ..., v - 3, v - 2$.*

Απόδειξη

Για $i = v - 2$ έχουμε,

$P(Y = v - 2) < P(Y = v + 1) \Leftrightarrow e^{-v}\frac{v^{v-2}}{(v-2)!} < e^{-v}\frac{v^{v+1}}{(v+1)!} \Leftrightarrow$

$(v + 1)v(v - 1) < v^3 \Leftrightarrow (v^2 - 1)v < v^3 \Leftrightarrow v^2 - 1 < v^2$, ισχύει.

Για $i = v - 3$ έχουμε,

$P(Y = v - 3) < P(Y = v + 2) \Leftrightarrow e^{-v}\frac{v^{v-3}}{(v-3)!} < e^{-v}\frac{v^{v+2}}{(v+2)!} \Leftrightarrow$

$(v + 2)(v + 1)v(v - 1)(v - 2) < v^5 \Leftrightarrow (v^2 - 1)(v^2 - 4) < v^4 \Leftrightarrow$

$v^2 - 1 < v^2$ και $v^2 - 4 < v^2$, ισχύει.

Για $i = 0$ έχουμε,

$P(Y = 0) < P(Y = 2v - 1) \Leftrightarrow e^{-v}\frac{v^0}{0!} < e^{-v}\frac{v^{2v-1}}{(2v-1)!} \Leftrightarrow$

$(2v - 1)(2v - 2)...(v + 1)v(v - 1)...1 < v^{2v-1} \Leftrightarrow$

$(v + v - 1)(v + v - 2)...(v + 1)v(v - 1)...(v - (v - 2))(v - (v - 1)) < v^{2v-1} \Leftrightarrow$

$[v^2 - (v - 1)^2][v^2 - (v - 2)^2]...(v^2 - 1)v < v^{2v-1} \Leftrightarrow$

$[v^2 - (v - 1)^2][v^2 - (v - 2)^2]...(v^2 - 1) < v^{2(v-1)}$ ισχύει.

Οπότε, $\forall\, i = 0, 1, ..., v-2,\ P(Y = i) < P(Y = 2v-(i+1))$. $\square$

Πρόταση 5.1.4. *Έστω Y,μια τυχαία μεταβλητή απο την κατανομή Poisson με μέσο v ένα θετικό ακέραιο. Τότε $\sum_{k=v}^{\infty} P(Y = k) > \frac{1}{2}$.*

Απόδειξη

Έχουμε, $P(Y=v)=e^{-v}\dfrac{v^v}{v!}=e^{-v}\dfrac{v^{v-1}}{(v-1)!}=P(Y=v-1)$ (5.1)

Επιπλέον ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις,

$P(Y=0)<P(Y=2v-1), P(Y=1)<P(Y=2v-2), ..., P(Y=v-3)<P(Y=v+2), P(Y=v-2)<P(Y=v+1)$ (βλ. Πρόταση 5.1.3).

Προσθέτουμε τις παραπάνω ανισότητες καθώς και την σχέση (5.1) κατά μελη και προκύπτει,

$$\sum_{k=0}^{v-1}P(Y=k)<\sum_{k=v}^{2v-1}P(Y=k)<\sum_{k=v}^{\infty}P(Y=k).$$

Οπότε, $P(Y=0)+...+P(Y=v-1)+P(Y=v)+...=1 \Leftrightarrow$

$$\sum_{k=0}^{v-1}P(Y=k)+\sum_{k=v}^{\infty}P(Y=k)=1 \tag{5.2}$$

Όμως,

$$\sum_{k=0}^{v-1}P(Y=k)+\sum_{k=v}^{\infty}P(Y=k)<\sum_{k=v}^{\infty}P(Y=k)+\sum_{k=v}^{\infty}P(Y=k) \tag{5.3}$$

Από τις Σχέσεις (5.2) και (5.3) προκύπτει ότι,

$$2\sum_{k=v}^{\infty}P(Y=k)>1 \Rightarrow \sum_{k=v}^{\infty}P(Y=k)>\frac{1}{2}.$$ □

Πρόταση 5.1.5. *Η τυχαία μεταβλητή* $G_n=\dfrac{S}{\sigma}+\dfrac{n}{\sigma}(X_{(1)}-c)|X_{(1)}>c$ *ακολουθεί την κατανομή* $Gamma(n,1)$, *δηλαδή* $G_n \sim Gamma(n,1)$.

Απόδειξη

Γνωρίζουμε ότι οι στατιστικές συναρτήσεις S και $X_{(1)}$ είναι ανεξάρτητες και $S \sim Gamma(n-1,\sigma)$. Οπότε $\dfrac{S}{\sigma} \sim Gamma(n-1,1)$. Λόγω της ανεξαρτησίας $\dfrac{S}{\sigma}|X_{(1)}>c \sim Gamma(n-1,1)$. Επιπλέον $\dfrac{n}{\sigma}(X_{(1)}-c)|X_{(1)}>c \sim Gamma(1,1)$ (Πρόταση 5.1.1).Συνεπώς $G_n=\dfrac{S}{\sigma}+\dfrac{n}{\sigma}(X_{(1)}-c)|X_{(1)}>c \sim Gamma(n,1)$. □

Πρόταση 5.1.6. *Έστω* $X_{(1)} \sim \mathcal{E}(\mu,\dfrac{\sigma}{n})$.*Τότε,*

$$E[min(c,X_{(1)})]=\mu+\frac{\sigma}{n}(1-e^{-\frac{n}{\sigma}(c-\mu)})$$
$$E(e^{\alpha min(c,X_{(1)})})=\frac{e^{\alpha\mu}}{n-\alpha\sigma}(n-\alpha\sigma e^{-(\frac{n}{\sigma}-\alpha)(c-\mu)})$$

Απόδειξη

$$E[min(c, X_{(1)})] = \int_{\mu}^{\infty} min(c, X_{(1)}) \frac{n}{\sigma} e^{-\frac{n}{\sigma}(x-\mu)} dx =$$

όμως $min(c, X_{(1)}) \geq \mu$

$$\int_{c}^{\infty} c\frac{n}{\sigma} e^{-\frac{n}{\sigma}(x-\mu)} dx + \int_{\mu}^{c} x\frac{n}{\sigma} e^{-\frac{n}{\sigma}(x-\mu)} dx =$$

$$c\frac{n}{\sigma}\int_{c}^{\infty} e^{-\frac{n}{\sigma}x} e^{\frac{n}{\sigma}\mu} dx + \frac{n}{\sigma} e^{\frac{n}{\sigma}\mu}\int_{\mu}^{c} x e^{-\frac{n}{\sigma}x} dx =$$

$$c\tfrac{n}{\sigma} e^{\frac{n}{\sigma}\mu}\int_{c}^{\infty} e^{-\frac{n}{\sigma}x} dx + \frac{n}{\sigma} e^{\frac{n}{\sigma}\mu}\int_{\mu}^{c} x(-\frac{\sigma}{n} e^{-\frac{n}{\sigma}x})' dx =$$

$$c\frac{n}{\sigma} e^{\frac{n}{\sigma}\mu}[-\frac{\sigma}{n} e^{-\frac{n}{\sigma}x}]_{c}^{\infty} + \frac{n}{\sigma} e^{\frac{n}{\sigma}\mu}[(-\frac{\sigma}{n} x e^{-\frac{n}{\sigma}x})_{\mu}^{c} - \int_{\mu}^{c} -\frac{\sigma}{n} e^{-\frac{n}{\sigma}x} dx] =$$

$$c e^{\frac{n}{\sigma}(\mu-c)} + \frac{n}{\sigma} e^{\frac{n}{\sigma}\mu}[-c\frac{\sigma}{n} e^{-\frac{n}{\sigma}c} + \mu\frac{\sigma}{n} e^{-\frac{n}{\sigma}\mu} - \frac{\sigma^2}{n^2} e^{-\frac{n}{\sigma}c} + \frac{\sigma^2}{n^2} e^{-\frac{n}{\sigma}\mu}] =$$

$$c e^{\frac{n}{\sigma}(\mu-c)} - c e^{\frac{n}{\sigma}(\mu-c)} + \mu - \frac{\sigma}{n} e^{-\frac{n}{\sigma}(c-\mu)} + \frac{\sigma}{n} =$$

$$\mu + \frac{\sigma}{n}(1 - e^{-\frac{n}{\sigma}(c-\mu)}).$$

Ενώ,

$$E(e^{\alpha min(c, X_{(1)})}) = \int_{\mu}^{\infty} e^{\alpha min(c, X_{(1)})} \frac{n}{\sigma} e^{-\frac{n}{\sigma}(x-\mu)} dx =$$

$$\int_{c}^{\infty} e^{\alpha c}\frac{n}{\sigma} e^{-\frac{n}{\sigma}(x-\mu)} dx + \int_{\mu}^{c} e^{\alpha x}\frac{n}{\sigma} e^{-\frac{n}{\sigma}(x-\mu)} dx =$$

$$e^{\alpha c}\tfrac{n}{\sigma} e^{\frac{n}{\sigma}\mu}\int_{c}^{\infty} e^{-\frac{n}{\sigma}x} dx + \frac{n}{\sigma} e^{\frac{n}{\sigma}\mu}\int_{\mu}^{c} e^{x(\frac{\alpha\sigma-n}{\sigma})} dx =$$

$$e^{\alpha c}\frac{n}{\sigma} e^{\frac{n}{\sigma}\mu}[-\frac{\sigma}{n} e^{-\frac{n}{\sigma}x}]_{c}^{\infty} + \frac{n}{\sigma} e^{\frac{n}{\sigma}\mu}\frac{\sigma}{\alpha\sigma - n}[e^{x(\frac{\alpha\sigma-n}{\sigma})}]_{\mu}^{c} =$$

$$e^{\alpha c} e^{\frac{n}{\sigma}(\mu-c)} + \frac{n e^{\frac{n}{\sigma}\mu}}{\alpha\sigma - n}[e^{c(\frac{\alpha\sigma-n}{\sigma})} - e^{\mu(\frac{\alpha\sigma-n}{\sigma})}] =$$

$$e^{\alpha c} e^{\frac{n}{\sigma}(\mu-c)} + \frac{n e^{\frac{n}{\sigma}\mu} e^{-\frac{n}{\sigma}c} e^{c\alpha} - n e^{\alpha\mu}}{\alpha\sigma - n} =$$

$$\frac{(n-\alpha\sigma) e^{\alpha c} e^{\frac{n}{\sigma}(\mu-c)} - n e^{\frac{n}{\sigma}\mu} e^{-\frac{n}{\sigma}c} e^{c\alpha} + n e^{\alpha\mu}}{n - \alpha\sigma} =$$

$$\frac{-\alpha\sigma e^{\alpha c} e^{\frac{n}{\sigma}(\mu-c)} + n e^{\alpha\mu}}{n - \alpha\sigma} =$$

$$\frac{e^{\alpha\mu}}{n-\alpha\sigma}\left(n-\alpha\sigma e^{-(\frac{n}{\sigma}-\alpha)(c-\mu)}\right). \qquad \square$$

Βιβλιογραφία

[1] Nayak, T.K. (1990). Estimation of location and scale parameters using generalized Pitman Nearness criterion, *Jour. of Statist. Plan. and Inf.*, **24**, 259-268.

[2] Parsian, A. and Farsipour, N. S. (1993). On the Admissibility and Inadmissibility of Estimators of Scale Parameters Using an Asymmetric Loss Function, *Commun. Statist.-Theory Meth.*, **22**, 2877-2901.

[3] Parsian, A., Farsipour, N. S. and Nematollahi, N. (1993). On the Minimaxity of the Pitman Type Estimator Under a LINEX Loss Function, *Commun. Statist.-Theory Meth.*, **22**, 97-113.

[4] Parsian, A. and Farsipour, N. S. (1997). Estimation of parameters of exponential distribution in the truncated space using asymmetric loss function, *Statistical Papers*, **38**, 423-443.

[5] Pitman, E. J. G. (1937). The closest estimates of statistical parameters, *Proceedings of the Cambridge Philosphical Society*, **33**, 212-222.

[6] Sen, P. K. and Saleh, A. K. M. E. (1990). On Pitman closeness of Pitman estimators, *Institute of Mimeo Series*, **1881**, 1-17.

[7] Singh, H. Gupta, R. D. and Misra, N. (1993). Estimation of parameters of an exponential distribution when the parameter space is restricted with an application to tho-sample problem, *Commun. Statist. - Theory Meth.*, **22(2)**, 461-477.

[8] Varian, H.R. (1975). A Bayesian Approach to Real Estate Assessment, In: Studies in Bayesian Econometric and Statistics in Honor of Leonard J. Savage, eds. S. E. Fienberg and A. Zellner. North Holland, Amsterdam, 195-208.

[9] Zellner, A. (1986). Bayesian Estimation and Prediction Asymmetric Using Asymmetric Loss Functions, *JASA,* **81** 446-451.