ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
“ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΥΓΧΡΟΝΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ”

k-Γάμμα και k-Βήτα συναρτήσεις

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Σούρλα Δ. Βασιλική

Επιβλέπουσα : Κοκολογιαννάκη Γ. Χρυσή
Αν. Καθηγήτρια Πανεπιστημίου Πατρών

Πάτρα , Ιούνιος 2013

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΥΓΧΡΟΝΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ"

k-Γάμμα και k-Βήτα συναρτήσεις

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Σούρλα Δ. Βασιλική

Επιβλέπουσα : Χρυσή Κοκολογιαννάκη
Αν. Καθηγήτρια Πανεπιστημίου Πατρών

Εγκρίθηκε από την τριμελή επιτροπή την 12η Ιουνίου 2013 .

……………………….	…...……………………	.......……………………
Χρ. Κοκολογιαννάκη	Β. Παπαγεωργίου	Ευγ. Πετροπούλου
Αν. Καθηγήτρια	Καθηγητής	Επίκουρος Καθηγήτρια
Πανεπιστημίου Πατρών	Πανεπιστημίου Πατρών	Πανεπιστημίου Πατρών

Πάτρα , Ιούνιος 2013

……………………………………

Σούρλα Δ. Βασιλική

Πτυχιούχος Μαθηματικός Πανεπιστημίου Πατρών

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η γνωστή συνάρτηση Euler : $\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$, $\operatorname{Re}z>0$ είναι μια από τις σπουδαιότερες ειδικές συναρτήσεις στην Ανάλυση (και όχι μόνο) και συνδέεται με το $n!$ και το σύμβολο Pochhammer $(z)_n$:

$$(z)_n = z(z+1)(z+2)\cdots(z+(n-1)),\ (z)_0=1\ ,\ z\in C\ ,\ n\in\aleph$$

Άμεσα συνδεδεμένη με τη Γάμμα συνάρτηση είναι η συνάρτηση Βήτα :

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt\ ,\ \operatorname{Re}x>0\ ,\ \operatorname{Re}y>0\ .$$

Το 2008 οι Rafael Diaz και Eddy Pariguan εισήγαγαν το k-Pochhammer σύμβολο:

$$(x)_{n,k} = x(x+k)(x+2k)\cdots(x+(n-1)k)\ \text{ για } x\in C\ ,\ k\in\Re \text{ και } n\in\aleph^+$$

και με τη βοήθεια αυτού , όρισαν την k-Γάμμα συνάρτηση :

$$\Gamma_k(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!k^n(nk)^{\frac{x}{k}-1}}{(x)_{n,k}}\ ,\ k>0\ ,\ x\in C\setminus kZ^-$$

και την k-Βήτα συνάρτηση :

$$B_k(x,y)=\frac{1}{k}\int_0^1 t^{\frac{x}{k}-1}(1-t)^{\frac{y}{k}-1}dt\ ,\ \operatorname{Re}x>0\ ,\ \operatorname{Re}y>0$$

Οι συναρτήσεις αυτές είναι k-γενικεύσεις των $\Gamma(x)$ και $B(x,y)$ συναρτήσεων , με την έννοια ότι $\Gamma_k(x)\to\Gamma(x)$ για $k\to1$ και $B_k(x,y)\to B(x,y)$ για $k\to1$. Έκτοτε , αρκετοί έχουν ασχοληθεί με τις ιδιότητες αυτών καθώς και με την εύρεση φραγμάτων, ανισοτήτων και ασυμπτωτικών σχέσεων των $\Gamma_k(x)$ και $B_k(x,y)$ καθώς και συναρτήσεων που τις περιέχουν .

Στην παρούσα διπλωματική εργασία γίνεται μία (όσο το δυνατόν καλύτερη) καταγραφή των γνωστών αποτελεσμάτων , καθώς επίσης και αποτελεσμάτων που αφορούν τις k-ζήτα συναρτήσεις και k-υπεργεωμετρικές . Επιπλέον δίνουμε και νέες ανισότητες για τις $\Gamma_k(x)$ και $B_k(x,y)$ συναρτήσεις .

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ

k-Γάμμα , k-Βήτα συναρτήσεις , k-Pochhammer σύμβολο

ABSTRACT

The well-known Euler's function : $\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$, $\operatorname{Re} z>0$ is one of the most useful functions in Analysis and is connected with $n!$ and Pochhammer symbol $(z)_n$:

$$(z)_n = z(z+1)(z+2)\cdots(z+(n-1)),\ (z)_0=1\ ,\ z\in C\ ,\ n\in\aleph$$

Directly connected with the Gamma function is the Beta function :

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt\ ,\ \operatorname{Re} x>0\ ,\ \operatorname{Re} y>0\ .$$

In 2008 , Rafael Diaz and Eddy Pariguan introduced the k-Pochhammer symbol :

$$(x)_{n,k}=x(x+k)(x+2k)\cdots(x+(n-1)k)\ \ ,\ x\in C\ ,\ k\in\Re\ ,\ n\in\aleph^+$$

and they defined the k-Gamma function :

$$\Gamma_k(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!k^n(nk)^{\frac{x}{k}-1}}{(x)_{n,k}}\ \ ,\ k>0\ ,\ x\in C\setminus kZ^-$$

and the k-Beta function :

$$B_k(x,y)=\frac{1}{k}\int_0^1 t^{\frac{x}{k}-1}(1-t)^{\frac{y}{k}-1}dt\ ,\ \operatorname{Re} x>0\ ,\ \operatorname{Re} y>0$$

We mention that the functions $\Gamma_k(x)$ and $B_k(x,y)$ are k-generalizations of $\Gamma(x)$ and $B(x,y)$ functions , so as $k\to1$, $\Gamma_k(x)\to\Gamma(x)$ and $B_k(x,y)\to B(x,y)$. There are many papers concerning properties of the above functions , inequalities and asymptotic relations between $\Gamma_k(x)$, $B_k(x,y)$ and functions involving them .

Here , we present known results on k-Gamma , k-Beta , k-Zeta and k-Hypergeometric functions . In addition we give some more inequalities for $\Gamma_k(x)$ and $B_k(x,y)$ functions .

KEY WORDS

k-Gamma functions , k-Beta functions , k-Pochhammer symbol .

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

Περίληψη……………………………………………………………………………5

Abstract…………………………………………………………………………..7

Περιεχόμενα………………………………….……………………………………9

Εισαγωγή…………………………………………………………………………..11

Κεφάλαιο **Σελίδα**

Ι. Βασικές συναρτήσεις ……………………………………………………...13

1.1. Γάμμα Συνάρτηση……………………………………………………...13

1.2. Βήτα συνάρτηση..…………………………………………………...15

1.3. Ζήτα συνάρτηση……………………………………………………..15

1.4. Υπεργεωμετρικές συναρτήσεις…………………………………..…16

1.5. Mittag-Leffler συναρτήσεις…………………………………………18

ΙΙ. k -Συναρτήσεις………………………………………………………....19

2.1 k -Pochhammer σύμβολο……………………………………………...19

2.2 k -Γάμμα συνάρτηση……………………………………………...20

2.3 k -δίγαμμα συνάρτηση……………………………………………24

2.4 k – Βήτα συνάρτηση…………………………………………………26

2.5 k – Ζήτα συνάρτηση…………………………………………………29

2.6 k – Υπεργεωμετρική συνάρτηση…………………………………….31

2.7 k – Mittag-Leffler συναρτήσεις……………………………………...36

ΙΙΙ. Προτάσεις και θεωρήματα για τις k -Συναρτήσεις………………………40

Γραφήματα………………………………………………………………...60

Βιβλιογραφία……………………………………………………………………62

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι συναρτήσεις k-Γάμμα $\Gamma_k(x)$, $k > 0$, είναι k-γενίκευση των γνωστών συναρτήσεων Γάμμα $\Gamma(x)$ και όταν το k τείνει στη μονάδα τότε οι συναρτήσεις $\Gamma_k(x)$ τείνουν στις $\Gamma(x)$ συναρτήσεις .

Οι συναρτήσεις $\Gamma_k(x)$ προέκυψαν από τη σύνδεση της συνδυαστικής και της θεωρίας μέτρου , όπως αναφέρεται στην εργασία [3] και στη βιβλιογραφία της .

Πράγματι έστω $d\mu$ ένα μέτρο σ' ένα διάστημα $I \subseteq [0,\infty) \subseteq \Re$. Το μέτρο $d\mu$ λέγεται συνδυαστικό μέτρο αν $\forall n \in \aleph$, η $n-$οστή ροπή του $d\mu$ είναι μη αρνητικός ακέραιος . Δηλαδή αν $M_{d\mu}(x) = \int_I t^{x-1} d\mu$, που είναι ο μετασχηματισμός Mellin του $d\mu$, τότε το $d\mu$ είναι συνδυαστικό μέτρο αν και μόνο αν $M_{d\mu}(n) \in \aleph$, $n \in \aleph^+$.

Το πιο γνωστό παράδειγμα σχέσης συνδυαστικής και θεωρίας μέτρου είναι το $n!$, που μετρά το σύνολο των μεταθέσεων ενός συνόλου με n στοιχεία . Ο μετασχηματισμός Mellin του μέτρου $e^{-t}dt$ είναι η κλασική Γάμμα συνάρτηση για $\operatorname{Re} x > 0$:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \qquad , \quad \operatorname{Re} x > 0$$

Οι ροπές του μέτρου $e^{-t}dt$ είναι το $n!$. Πράγματι :

$$\int_0^\infty e^{-t} t^n dt = \Gamma(n+1) = n!$$

Χρησιμοποιώντας το σύμβολο Pochhammer :

$$(t)_n = t(t+1)(t+2)\cdots(t+(n-1)), \ (t)_0 = 1 \ , \ t \in C \ , \ n \in \aleph$$

το $n!$ γράφεται : $n! = (1)_n$.

Οι $k-$αυξανόμενοι παραγοντικοί αριθμοί :

$$(1)_{n,k} = (1+k)(1+2k)\cdots(1+(n-1)k) \ \text{ για } \ k \in \Re \ \text{ και } \ n \in \aleph^+$$

που προκύπτουν από τη γενική μορφή του $k-$Pochhammer συμβόλου :

$$(t)_{n,k} = t(t+k)(t+2k)\cdots(t+(n-1)k) \ \text{ για } \ t \in C \ , \ k \in \Re \ \text{ και } \ n \in \aleph^+$$

έχουν σχέση με το σύνολο των μεταθέσεων $T^t{}_{n,k}$ των ισομορφισμών κλάσεων-επίπεδων δένδρων με ρίζα (planar rooted trees) , με συγκεκριμένες ιδιότητες . Αποδεικνύεται [3] και βιβλιογραφία της ότι $(t)_{n,k} = \left|T^t{}_{n,k}\right|$.

Ο μετασχηματισμός Mellin του μέτρου $e^{-\frac{t^k}{k}}dt$ είναι η k-Γάμμα συνάρτηση , $\Gamma_k(x)$, $k>0$, για $\operatorname{Re}x>0$, δηλαδή :

$$\Gamma_k(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-\frac{t^k}{k}}dt \quad , \text{ για } \operatorname{Re}(x)>0 \quad , \quad x\in C \quad ,$$

η οποία συνδέεται με την $\Gamma(x)$ μέσω της ισότητας :

$$\Gamma_k(x)=k^{\frac{x}{k}-1}\Gamma\left(\frac{x}{k}\right) \quad , \quad k>0 \quad , \quad x\in C\setminus kZ^-$$

Οι $k-$αυξανόμενοι παραγοντικοί αριθμοί εμφανίζονται ως οι ροπές της συνάρτησης $e^{-\frac{t^k}{k}}dt$:

$$(1)_{n,k}=\frac{\Gamma_k(1+nk)}{\Gamma_k(1)}=\frac{1}{\Gamma_k(1)}\int_0^\infty t^{nk-1}e^{-\frac{t^k}{k}}dt$$

Γενικότερα ισχύει η ισότητα :

$$\left|T^t{}_{n,k}\right|=(t)_{n,k}=\frac{\Gamma_k(t+nk)}{\Gamma_k(t)}=\frac{1}{\Gamma_k(t)}\int_0^\infty t^{t+nk-1}e^{-\frac{t^k}{k}}dt \ .$$

Λόγω της σχέσης των συναρτήσεων $\Gamma_k(x)$ και $\Gamma(x)$ είναι λογικό , να αποδειχθούν για την $\Gamma_k(x)$ ιδιότητες και σχέσεις , οι οποίες είναι αντίστοιχες των ιδιοτήτων και σχέσεων που αφορούν στη συνάρτηση $\Gamma(x)$ και λέγονται $k-$γενικεύσεις αυτών . Αυτές τις ιδιότητες και σχέσεις καταγράψαμε και αποδείξαμε αναλυτικά , καθώς επίσης και τις αντίστοιχες για τις συναρτήσεις $B_k(x,y)$, $k-$Mittag-Leffler , $k-$υπεργεωμετρικές και $k-$ζήτα συναρτήσεις οι οποίες συνδέονται με τις $k-$Γάμμα συναρτήσεις .

Στο $1^{\text{ο}}$ κεφάλαιο αναφέρουμε ορισμούς και σημαντικές ιδιότητες (χωρίς αποδείξεις) των γνωστών μας συναρτήσεων Γάμμα , Βήτα , υπεργεωμετρικών ${}_2F_1(a,b;c;x)$ και των Mittag-Leffler συναρτήσεων . Στο $2^{\text{ο}}$ κεφάλαιο γράφονται οι ορισμοί για τις $k-$γενικεύσεις των ανωτέρω συναρτήσεων και αποδεικνύονται αναλυτικά οι αντίστοιχες ιδιότητες που ικανοποιούν . Στο $3^{\text{ο}}$ κεφάλαιο αποδεικνύονται προτάσεις και θεωρήματα για τις ανωτέρω $k-$συναρτήσεις .

I . Βασικές συναρτήσεις

1.1 Γάμμα Συνάρτηση

Ορισμός 1.1.1 [1, 12, 14] **:** Η συνάρτηση Γάμμα $\Gamma(z)$ ορίζεται (ισοδυνάμως) με τους κάτωθι τρόπους :

- μέσω του ολοκληρώματος :

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \quad , \quad \operatorname{Re} z > 0 \quad , \tag{1.1}$$

που δόθηκε από τον Euler και

- μέσω του άπειρου ορίου :

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)} n^z \;,\; z \neq 0,-1,-2,-3,... \;,\; n \in \aleph \;, \tag{1.2}$$

που δόθηκε από τους Euler-Gauss .

Χρησιμοποιώντας το σύμβολο του Pochhammer $(z)_n$, που ορίζεται ως :

$$(z)_n = z(z+1)(z+2)\cdots(z+(n-1)),\ (z)_0 = 1 \;,\; z \in C \;,\; n \in \aleph \;, \tag{1.3}$$

ο ορισμός (1.2) μπορεί να πάρει τη μορφή :

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^{z-1}}{(z)_n} \;,\; z \in C \setminus kZ^- \;,\; n \in \aleph \;, \tag{1.4}$$

- μέσω του απειρογινομένου :

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^\infty \left(1+\frac{z}{n}\right) e^{-z/n} \quad , \quad |z| < \infty \tag{1.5}$$

που δόθηκε από τους Weierstrass ,

όπου $\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+....+\frac{1}{n}-\ln n\right) \approx 0.5772157$ η σταθερά Euler-Masceroni .

Ιδιότητες της Γάμμα συνάρτησης [1, 12, 14] **:**

(1) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

(2) $\Gamma(1) = 1$

(3) $\Gamma(n+1) = n! \quad , \quad n \in Z_+ \cup \{0\}$

(4) $\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\dfrac{\pi}{\sin(\pi x)}$, $x\neq 0,\pm 1,\pm 2,...$

(5) $\Gamma(x)=a^x\int\limits_0^\infty t^{x-1}e^{-at}dt$

(6) $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$

(7) $\int\limits_0^\infty e^{-t^2}dt=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}=\dfrac{1}{2}\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)$, $\left(erfx=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty e^{-t^2}dt\right)$

(8) $\Gamma(2x)=\dfrac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(x)\Gamma\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$, Legendre Duplication Formula (τύπος διπλασιασμού του Legendre)

(9) $\Gamma(nx)=(2\pi)^{\frac{1}{2}(1-n)}n^{nx-\frac{1}{2}}\prod\limits_{k=0}^{n-1}\Gamma\left(x+\dfrac{k}{n}\right)$, $\operatorname{Re}x>0$, (τύπος του Gauss)

(10) $\Gamma\left(n+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{(2n)!\sqrt{\pi}}{2^{2n}n!}$

(11) $(x)_n=\dfrac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)}$, $\operatorname{Re}x>0$

Ορισμός 1.1.2 [1, 12] **:** Η λογαριθμική παράγωγος της Γάμμα συνάρτησης λέγεται “δίγαμμα συνάρτηση” ή διαφορετικά $\psi(x)$ και ορίζεται ως εξής :

$$\psi(x)=\frac{d}{dx}\ln\Gamma(x)=\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}=-\gamma+\int\limits_0^\infty\frac{e^{-t}-e^{-xt}}{1-e^{-t}}dt=-\gamma-\frac{1}{x}+\sum_{n\geq 1}\frac{x}{n(n+x)}\ ,$$

$$x\neq 0,-1,-2,... \tag{1.6}$$

Ιδιότητες της δίγαμμα συνάρτησης [1, 12] **:**

(1) $\psi(x+m)=\psi(x)+\sum\limits_{k=0}^{m-1}\dfrac{1}{x+k}$, $x\in C$, $m\in\aleph$

Για $m=1$: $\psi(x+1)=\psi(x)+\dfrac{1}{x}$

(2) Η $p-$τάξης παράγωγος της $\psi(x)$ δίνεται :

$$\psi^{(p)}(x)=(-1)^{p-1}p!\sum_{n=0}^\infty\frac{1}{(x+n)^{p+1}}\ ,\ x\in C\ ,\ p\in\aleph$$

1.2 Βήτα συνάρτηση

Ορισμός 1.2.1 [1, 12, 14] **:** Η συνάρτηση Βήτα $B(x,y)$ ορίζεται για $\operatorname{Re} x > 0$, $\operatorname{Re} y > 0$ (ισοδυνάμως) από τα ολοκληρώματα :

- $$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt \qquad (1.7)$$
- $$B(x,y) = \int_0^\infty t^{x-1}(1+t)^{-x-y}\,dt \qquad (1.8)$$
- $$B(x,y) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2y-1}(\cos t)^{2x-1}\,dt \qquad (1.9)$$

Ιδιότητες της Βήτα συνάρτησης [1, 12, 14] **:**

(1) $B(x,y) = \dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$

(2) $B(x,y) = B(y,x)$

(3) $B(x+1,y) = \dfrac{x}{x+y}B(x,y)$

(4) $B(x,y+1) = \dfrac{y}{x+y}B(x,y)$

1.3 Ζήτα συνάρτηση

Ορισμός 1.3.1 [1] **:** Ορίζουμε ως ζήτα συνάρτηση $\zeta(x,s)$ την έκφραση :

$$\zeta(x,s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^s} \quad , \quad \operatorname{Re} x > 0 \;,\; \operatorname{Re} s > 1 \qquad (1.10)$$

Παρατήρηση : Για $x=1$ η (1.10) μας δίνει τη συνάρτηση :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \qquad (1.11)$$

γνωστή ως συνάρτηση του Riemann .

Ιδιότητες της Ζήτα συνάρτησης [9] **:**

(1) $\zeta(x,s) = 2(2\pi)^{x-1}\sin\left(2n\pi s + \frac{\pi}{2}x\right)\Gamma(1-x)$, $0 < s \le 1$, $\operatorname{Re} x < 0$

(2) $\frac{\partial}{\partial x}\zeta(x,s) = x\zeta(x+1,s)$

(3) $\zeta(x,s) = \frac{1}{\Gamma(x)}\int_0^\infty (1-e^t)^{-1}t^{x-1}e^{-st}dt$, $\operatorname{Re} x > 1$, $\operatorname{Re} s > 0$

Ιδιότητες της συνάρτησης Riemann [9] **:**

(1) $\zeta(x) = 2(2\pi)^{x-1}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\Gamma(1-x)\zeta(1-x)$

(2) $\zeta(1-x) = 2(2\pi)^{-x}\Gamma(x)\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\zeta(x)$

(3) $\zeta(x) = \frac{1}{\Gamma(x)}\int_0^\infty (e^t-1)^{-1}t^{x-1}dt$, $\operatorname{Re} x > 1$

1.4 Υπεργεωμετρικές συναρτήσεις

Ορισμός 1.4.1 [1, 5] **:** Η υπεργεωμετρική συνάρτηση Gauss ${}_2F_1(a,b;c;x)$ δίνεται υπό μορφήν σειράς :

$${}_2F_1(a,b;c;x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}\frac{x^n}{n!} \ , \ |x|<1 \ , \ a,b \in C \ , \ c \in C \setminus Z_0^- \qquad (1.12)$$

και είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης :

$$x(1-x)y''(x) + [c-(a+b+1)x]y'(x) - aby(x) = 0$$

Ορισμός 1.4.2 [1, 5] **:** Η υπεργεωμετρική συνάρτηση ${}_2F_1(a,b;c;x)$ δίνεται υπό μορφήν ολοκληρώματος :

$$ {}_2F_1(a,b;c;x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-xt)^{-a}\,dt \quad , \quad \mathrm{Re}\,b>0, \mathrm{Re}\,c>0 \ , $$

$$ |\arg(1-x)| < \pi \tag{1.13} $$

Ιδιότητες υπεργεωμετρικής συνάρτησης [1] **:**

(1) ${}_2F_1(b,a;c;x) = {}_2F_1(a,b;c;x)$

(2) ${}_2F_1(1,b;b;x) = \dfrac{1}{1-x}$

(3) ${}_2F_1(a,1;1;x) = (1-x)^{-a}$

(4) ${}_2F_1(b,a;c;1) = \dfrac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}$, $\mathrm{Re}(c-a-b) > 0$

(5) ${}_2F_1(b,a;c;x) = (1-x)^{c-a-b}\ {}_2F_1(c-a,c-b;c;x)$

(6) $\left(\dfrac{d}{dx}\right)^n {}_2F_1(a,b;c;x) = \dfrac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}\,{}_2F_1(a+n,b+n;c+n;x)$, $n \in \aleph$

(7) $\left(\dfrac{d}{dx}\right)^n [x^{a+n-1}\,{}_2F_1(a,b;c;x)] = (a)_n\,x^{a-1}\,{}_2F_1(a+n,b;c;x)$, $n \in \aleph$

Ορισμός 1.4.3 [1,5] **:** Η γενικευμένη υπεργεωμετρική συνάρτηση ${}_pF_q(a_1,...a_p;b_1,...b_q;x)$ δίνεται υπό μορφήν σειράς :

$$ {}_pF_q(a_1,...a_p;b_1,...b_q;x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_n\cdots(a_p)_n}{(b_1)_n\cdots(b_q)_n}\frac{x^n}{n!} \ , \ a,b \in C \tag{1.14} $$

είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης :

$$ [\theta\prod_{j=1}^{q}(\theta+b_j-1) - x\prod_{i=1}^{p}(\theta+a_i)]w = 0 \ , \text{όπου } \theta = x\frac{d}{dx} \text{ και } w={}_pF_q $$

και συγκλίνει για πεπερασμένα x αν $p \le q$, συγκλίνει για $|x|<1$ αν $p = q+1$ και αποκλίνει για όλα τα $x \neq 0$ αν $p > q+1$.

1.5 Mittag-Leffler συναρτήσεις

Ορισμός 1.5.1 [5] **:** Η Mittag-Leffler συνάρτηση με μια παράμετρο ορίζεται ως εξής :

$$E_a(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(an+1)}\ ,\quad \operatorname{Re}a>0 \tag{1.15}$$

Ορισμός 1.5.2 [5] **:** Η Mittag-Leffler συνάρτηση δυο παραμέτρων ορίζεται ως εξής :

$$E_{a,\beta}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(an+\beta)}\ ,\quad \operatorname{Re}a,\operatorname{Re}\beta>0 \tag{1.16}$$

Ορισμός 1.5.3 [5] **:** Η γενικευμένη Mittag-Leffler συνάρτηση ορίζεται ως εξής :

$$E^{\gamma}_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\gamma)_n}{\Gamma(an+\beta)}\frac{z^n}{n!}\ ,\quad a,\beta,\gamma\in C,\ \operatorname{Re}a,\operatorname{Re}\beta>0 \tag{1.17}$$

Παρατήρηση : Η συνάρτηση (1.17) για $\gamma=1$ δίνει την (1.16) και η (1.16) για $\beta=1$ δίνει την (1.15) .

II . k -Συναρτήσεις

2.1 k -Pochhammer σύμβολο

Η έκφραση :

$$x(x+k)(x+2k)\cdots(x+(n-1)k) \tag{2.1}$$

παρουσιάζεται σε πολλά προβλήματα της Συνδυαστικής Ανάλυσης [3] . Σημειώνουμε ότι για $k=1$ προκύπτει το γνωστό Pochhammer σύμβολο $(x)_n$. Η επαναλαμβανόμενη εμφάνιση της έκφρασης (2.1) οδήγησε στην εισαγωγή της k-Γάμμα συνάρτησης $\Gamma_k(x)$.

Ορισμός 2.1.1 [2] **:** Η έκφραση :

$$(x)_{n,k} = x(x+k)(x+2k)\cdots(x+(n-1)k) \ \text{ για } x\in C \ , \ k\in\Re \text{ και } n\in\aleph^{+} \tag{2.2}$$

ονομάζεται k -Pochhammer σύμβολο .

Ιδιότητες για το k -Pochhammer σύμβολο [2] **:**

(1) $(x)_{n,k} = k^n\left(\frac{x}{k}\right)_n$, $x\in C\setminus kZ^{-}$, $k>0$, $n\in\aleph^{+}$ (2.3)

(2) $(x)_{n,s} = \left(\frac{s}{k}\right)^n\left(\frac{kx}{s}\right)_{n,k}$, $x\in C\setminus kZ^{-}$, $k,s>0$, $n\in\aleph^{+}$ (2.4)

Απόδειξη :

(1) $$\left(\frac{x}{k}\right)_n = \frac{x}{k}\left(\frac{x}{k}+1\right)\left(\frac{x}{k}+2\right)\cdots\left(\frac{x}{k}+(n-1)\right) =$$

$$= \frac{x}{k}\left(\frac{x+k}{k}\right)\left(\frac{x+2k}{k}\right)\cdots\left(\frac{x+(n-1k)}{k}\right) =$$

$$= \frac{1}{k^n}x(x+k)(x+2k)\cdots(x+(n-1)k) = \frac{1}{k^n}(x)_{n,k}$$

Συνεπώς προκύπτει $(x)_{n,k} = k^n \left(\frac{x}{k}\right)_n$

(2) Όπως είναι γνωστό $(x)_{n,k} = x(x+k)(x+2k)\cdots(x+(n-1)k)$, ακόμα

$$\left(\frac{kx}{s}\right)_{n,k} = \frac{kx}{s}\left(\frac{kx}{s}+k\right)\left(\frac{kx}{s}+2k\right)\cdots\left(\frac{kx}{s}+(n-1)k\right) =$$

$$= \frac{kx}{s}\left(\frac{kx+sk}{s}\right)\left(\frac{kx+2ks}{s}\right)\cdots\left(\frac{kx+(n-1)ks}{s}\right) =$$

$$= \frac{k^n}{s^n} x(x+s)(x+2s)\cdots(x+(n-1)s) = \left(\frac{k}{s}\right)^n (x)_{n,s}$$

Άρα $(x)_{n,s} = \left(\frac{s}{k}\right)^n \left(\frac{kx}{s}\right)_{n,k}$.

2.2 k-Γάμμα συνάρτηση

Ορισμός 2.2.1 [2] **:** Η k-Γάμμα συνάρτηση $\Gamma_k(x)$ ορίζεται από την ισότητα :

$$\Gamma_k(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!k^n (nk)^{\frac{x}{k}-1}}{(x)_{n,k}} \quad , \quad k>0 \quad , \quad x \in C \setminus kZ^- \qquad (2.5)$$

Σημείωση : Παρατηρούμε ότι όταν $k \to 1$ τότε $\Gamma_k(x) \to \Gamma(x)$.

Θεώρημα 2.2.2 [2] **:** Η k-Γάμμα συνάρτηση $\Gamma_k(x)$ γράφεται ως εξής :

$$\Gamma_k(x) = k^{\frac{x}{k}-1}\Gamma\left(\frac{x}{k}\right) \quad , \quad k>0 \quad , \quad x \in C \setminus kZ^- \quad , \quad \operatorname{Re} x > 0 \qquad (2.6)$$

<u>Απόδειξη</u> :

Στον ορισμό (1.4) της Γάμμα συνάρτησης $\Gamma(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!n^{x-1}}{(x)_n}$ αντικαθιστούμε το x με $\dfrac{x}{k}$, οπότε :

$$\Gamma\left(\frac{x}{k}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!n^{\frac{x}{k}-1}}{\left(\frac{x}{k}\right)_n}\overset{(2.3)}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{n!n^{\frac{x}{k}-1}}{\frac{1}{k^n}(x)_{n,k}}=\lim_{n\to\infty}\frac{k^n n!n^{\frac{x}{k}-1}}{(x)_{n,k}}$$

Πολλαπλασιάζουμε και τα δυο μέλη της τελευταίας ισότητας με $k^{\frac{x}{k}-1}$, οπότε προκύπτει :

$$k^{\frac{x}{k}-1}\Gamma\left(\frac{x}{k}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{k^n n!n^{\frac{x}{k}-1}}{(x)_{n,k}}k^{\frac{x}{k}-1}\Rightarrow k^{\frac{x}{k}-1}\Gamma\left(\frac{x}{k}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{k^n n!(nk)^{\frac{x}{k}-1}}{(x)_{n,k}}\overset{(2.5)}{\Rightarrow}k^{\frac{x}{k}-1}\Gamma\left(\frac{x}{k}\right)=\Gamma_k(x)$$

Πρόταση 3.1.2 [2] **:** Η k-Γάμμα συνάρτηση $\Gamma_k(x)$ ικανοποιεί τη σχέση :

$$\Gamma_k(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-\frac{t^k}{k}}dt \quad , \text{ για } \operatorname{Re}(x)>0 \quad , \quad x\in C \qquad (2.7)$$

<u>Απόδειξη</u> :

Θεωρούμε το ολοκλήρωμα $\int_0^\infty t^{x-1}e^{-\frac{t^k}{k}}dt$, και θέτουμε $\dfrac{t^k}{k}=r\Rightarrow t^k=kr\Rightarrow t=(kr)^{\frac{1}{k}}$,

$$dt=\frac{1}{k}k(kr)^{\frac{1}{k}-1}dr\ ,$$

συνεπώς ,

$$\int_0^\infty t^{x-1}e^{-\frac{t^k}{k}}dt=\int_0^\infty (kr)^{\frac{x}{k}-1}e^{-r}(kr)^{\frac{1}{k}-1}dr=k^{\frac{x-k}{k}+\frac{1}{k}-1}\int_0^\infty r^{\frac{x}{k}-\frac{1}{k}+\frac{1}{k}-1}e^{-r}dr=k^{\frac{x}{k}-1}\int_0^\infty r^{\frac{x}{k}-1}e^{-r}dr\overset{(1.1)}{=}$$

$$=k^{\frac{x}{k}-1}\Gamma\left(\frac{x}{k}\right)\overset{(2.6)}{=}\Gamma_k(x)\ .$$

Σημείωση : Για $k=2$ προκύπτει το γνωστό ολοκλήρωμα Gauss $\Gamma_2(x)=\int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-\frac{t^2}{2}}dt = 2^{\frac{x}{2}-1}\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)$.

Ιδιότητες της k -Γάμμα συνάρτησης $\Gamma_k(x)$ **, (** $k>0$ **)** [2, 6] **:**

(1) $\Gamma_k(x+k) = x\Gamma_k(x)$

(2) $(x)_{n,k} = \dfrac{\Gamma_k(x+nk)}{\Gamma_k(x)}$

(3) $\Gamma_k(ak) = k^{a-1}\Gamma(a) \qquad , \quad a\in\Re$

(4) $\Gamma_k(nk) = k^{n-1}(n-1)! \qquad , \quad n\in\aleph$

(5) $\Gamma_k(k)=1$

(6) $\Gamma_s(x) = \left(\dfrac{s}{k}\right)^{\frac{x}{s}-1}\Gamma_k\left(\dfrac{kx}{s}\right) \quad , \quad x\in C\setminus kZ^- \quad , \quad s>0 \quad , \quad n\in\aleph^+$

(7) $\Gamma_k\left((2n+1)\dfrac{k}{2}\right) = k^{\frac{2n-1}{2}}\dfrac{(2n)!\sqrt{\pi}}{2^{2n}n!} \quad , \quad n\in\aleph$

(8) $\Gamma_k(x) = a^{\frac{x}{k}}\int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-\frac{t^k}{k}a}dt \quad , \quad a\in\Re$

(9) $\dfrac{1}{\Gamma_k(x)} = xk^{-\frac{x}{k}}e^{\frac{x}{k}\gamma}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{x}{nk}\right)e^{-\frac{x}{nk}} \quad ,$ όπου $\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+....+\dfrac{1}{n}-\ln n\right)$

(10) $\Gamma_k(x)\Gamma_k(k-x) = \dfrac{\pi}{k\sin\left(\dfrac{\pi x}{k}\right)}$

<u>Απόδειξη</u> :

(1) $$\Gamma_k(x+k) = k^{\frac{x+k}{k}-1}\Gamma\left(\frac{x+k}{k}\right) = k^{\frac{x+k}{k}-1}\Gamma\left(\frac{x}{k}+1\right) = k^{\frac{x+k}{k}-1}\frac{x}{k}\Gamma\left(\frac{x}{k}\right) = k^{\frac{x+k}{k}-1-1}x\Gamma\left(\frac{x}{k}\right) =$$

$$= k^{\frac{x}{k}+1-1-1}x\Gamma\left(\frac{x}{k}\right) = k^{\frac{x}{k}-1}x\Gamma\left(\frac{x}{k}\right) = xk^{\frac{x}{k}-1}\Gamma\left(\frac{x}{k}\right) = x\Gamma_k(x)$$

$$(2)\,\Gamma_k(x+nk)=k^{\frac{x+nk}{k}-1}\Gamma\left(\frac{x+nk}{k}\right)=k^{\frac{x+nk}{k}-1}\Gamma\left(\frac{x}{k}+n\right)\overset{\substack{\text{ιδιότητα (11)}\\ \text{της Γαμμα}\\ \text{συνάρτησης}}}{=}k^{\frac{x+nk}{k}-1}\left(\frac{x}{k}\right)_n\Gamma\left(\frac{x}{k}\right)=$$

$$=k^{\frac{x}{k}-1}\Gamma\left(\frac{x}{k}\right)\left(\frac{x}{k}\right)_n k^n \underset{(2.6)}{\overset{(2.3)}{=}} \Gamma_k(x)(x)_{n,k}$$

(3) Αντικαθιστούμε στην (2.6) όπου x το ak , $a\in\Re$ οπότε :

$$\Gamma_k(ak)=k^{\frac{ak}{k}-1}\Gamma\left(\frac{ak}{k}\right)=k^{a-1}\Gamma(a)$$

(4) Η ιδιότητα (3) για $a=n\in\aleph$ δίνει :

$$\Gamma_k(nk)=k^{n-1}\Gamma(n)=k^{n-1}(n-1)!$$

(5) Προκύπτει από την ιδιότητα (4) για $n=1$.

(6) Από την σχέση (2.5) έχουμε :

$$\Gamma_k\left(\frac{kx}{s}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!k^n(nk)^{\frac{kx}{sk}-1}}{\left(\frac{kx}{s}\right)_{n,k}}\underset{\substack{\text{ιδιότητα (2)}\\ \text{Pochhammer}\\ \text{συμβολου}}}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{n!k^n(nk)^{\frac{x}{s}-1}s^n}{(x)_{n,s}k^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!(nk)^{\frac{x}{s}-1}s^n}{(x)_{n,s}}=$$

$$=k^{\frac{x}{s}-1}\lim_{n\to\infty}\frac{n!n^{\frac{x}{s}-1}s^n}{(x)_{n,s}}=\left(\frac{k}{s}\right)^{\frac{x}{s}-1}\lim_{n\to\infty}\frac{n!(ns)^{\frac{x}{s}-1}s^n}{(x)_{n,s}}\overset{(2.5)}{=}\left(\frac{k}{s}\right)^{\frac{x}{s}-1}\Gamma_s(x)$$

(7) Αντικαθιστούμε στην (2.6) όπου x το $(2n+1)\frac{k}{2}$ οπότε :

$$\Gamma_k\left((2n+1)\frac{k}{2}\right)=k^{\frac{(2n+1)k}{2k}-1}\Gamma\left(\frac{(2n+1)k}{2k}\right)=k^{n-\frac{1}{2}}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\overset{\substack{\text{ιδιότητα (10)}\\ \text{της Γαμμα}\\ \text{συναρτησης}}}{=}k^{\frac{2n-1}{2}}\frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{2^{2n}n!}$$

(8) Στην ιδιότητα (5) της Γάμμα συνάρτησης αντικαθιστούμε όπου x το $\frac{x}{k}$ και βρίσκουμε :

$$\Gamma\left(\frac{x}{k}\right)=a^{\frac{x}{k}}\int_0^\infty t^{\frac{x}{k}-1}e^{-at}dt$$

Θέτουμε όπου $\frac{r^k}{k}$ με t και $dt=r^{k-1}dr$, οπότε :

$$\Gamma\left(\frac{x}{k}\right)=\frac{a^{\frac{x}{k}}}{k^{\frac{x}{k}-1}}\int_0^\infty r^{x-k+k-1}e^{-a\frac{r^k}{k}}dr=\frac{a^{\frac{x}{k}}}{k^{\frac{x}{k}-1}}\int_0^\infty r^{x-1}e^{-a\frac{r^k}{k}}dr$$

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της ανωτέρω σχέσης με $k^{\frac{x}{k}-1}$, οπότε προκύπτει :

$$\Rightarrow k^{\frac{x}{k}-1}\Gamma\left(\frac{x}{k}\right)=a^{\frac{x}{k}}\int_0^\infty t^{x-1}e^{-a\frac{t^k}{k}}dt \overset{(2.6)}{\Rightarrow} \Gamma_k(x)=a^{\frac{x}{k}}\int_0^\infty t^{x-1}e^{-a\frac{t^k}{k}}dt$$

(9) Από την σχέση (2.6) , παίρνουμε :

$$\frac{1}{\Gamma_k(x)}=\frac{1}{k^{\frac{x}{k}-1}\Gamma\left(\frac{x}{k}\right)}=k^{-\frac{x}{k}+1}\frac{1}{\Gamma\left(\frac{x}{k}\right)}\overset{(1.5)}{=}k^{-\frac{x}{k}+1}\frac{x}{k}e^{\gamma\frac{x}{k}}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{nk}\right)e^{-x/nk}=$$

$$=k^{-\frac{x}{k}}xe^{\gamma\frac{x}{k}}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{nk}\right)e^{-x/nk}$$, όπου γ η σταθερά Euler-Mascheroni

(10) $$\Gamma_k(x)\Gamma_k(k-x)\overset{(2.6)}{=}k^{\frac{x}{k}-1}\Gamma\left(\frac{x}{k}\right)k^{\frac{k-x}{k}-1}\Gamma\left(\frac{k-x}{x}\right)=k^{-1}\Gamma\left(\frac{x}{k}\right)\Gamma\left(1-\frac{x}{k}\right)=$$

$$\overset{\substack{\text{ιδιότητα (4)}\\ \text{της Γάμμα}\\ \text{συνάρτησης}}}{=}k^{-1}\frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi x}{k}\right)}=\frac{\pi}{k\sin\left(\frac{\pi x}{k}\right)}$$

2.3 k-δίγαμμα συνάρτηση

Ορισμός 2.3.1 [2] **:** Η λογαριθμική παράγωγος της k-Γάμμα συνάρτησης $\Gamma_k(x)$, ονομάζεται k-δίγαμμα συνάρτηση $\psi_k(x)$ και ορίζεται ως εξής :

$$\psi_k(x)=\frac{d}{dx}\ln\Gamma_k(x)=\frac{\Gamma_k'(x)}{\Gamma_k(x)} \quad , \quad k>0 \tag{2.8}$$

Ιδιότητες της k-δίγαμμα συνάρτησης $\psi_k(x)$, ($k>0$) [2, 6] **:**

(1) $$\psi_k(x)=\frac{\ln k-\gamma}{k}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{nk(x+nk)}-\frac{1}{x} \quad , \quad n\in\aleph \tag{2.9}$$

(2) $$\psi_k(k)=\frac{\ln k-\gamma}{k} \tag{2.10}$$

(3) Η $n-$οστή παράγωγος της $\psi_k(x)$ δίνεται :

$$\psi_k^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} n! \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(x+pk)^{n+1}} \qquad , \ n \in \aleph \qquad (2.11)$$

<u>**Απόδειξη**</u> **:**

(1) Παίρνουμε τον λογάριθμο και στα δύο μέλη της σχέσης (2.6) , οπότε έχουμε :

$$\ln[\Gamma_k(x)] = \left(\frac{x}{k} - 1\right)\ln k + \ln\Gamma\left(\frac{x}{k}\right)$$

Παραγωγίζουμε ως προς x , οπότε :

$$\frac{d}{dx}\left[\ln[\Gamma_k(x)]\right] = \frac{1}{k}\left[\ln k + \frac{\Gamma'\left(\frac{x}{k}\right)}{\Gamma\left(\frac{x}{k}\right)}\right] \overset{(2.8)}{\Rightarrow} \psi_k(x) = \frac{1}{k}\ln k + \frac{1}{k}\psi\left(\frac{x}{k}\right) \overset{(1.6)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \psi_k(x) = \frac{\ln k}{k} + \frac{1}{k}\left[-\gamma - \frac{k}{x} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{x}{k}}{n\left(n+\frac{x}{k}\right)}\right] \Rightarrow \psi_k(x) = \frac{\ln k - \gamma}{k} - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{nk(x+nk)}$$

(2) Επειδή $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{nk(x+nk)} = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{nk} - \frac{1}{x+nk}\right]$ η ισότητα (2.9) για $x = k$ γίνεται :

$$\psi_k(k) = \frac{\ln k - \gamma}{k} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{nk} - \frac{1}{k(n+1)}\right] - \frac{1}{k} = \frac{\ln k - \gamma}{k} - \frac{1}{k} + \frac{1}{k}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)}\right] =$$

$$= \frac{\ln k - \gamma}{k} - \frac{1}{k} + \frac{1}{k} = \frac{\ln k - \gamma}{k}$$

(3) Η σχέση αυτή θα δειχθεί με τη μέθοδο της επαγωγής . Παραγωγίζοντας την (2.9) ως προς x :

$$\psi_k^{'}(x) = \frac{1}{x^2} + \sum_{p=1}^{\infty}\left[\frac{1}{pk(x+pk)} - \frac{x}{pk(x+pk)^2}\right] \Rightarrow \psi_k^{'}(x) = \frac{1}{x^2} + \sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{(x+pk)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \psi_k^{'}(x) = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(x+pk)^2}$$, η οποία είναι η (2.11) για $n = 1$.

Έστω ότι ισχύει για n , δηλαδή : $\psi_k^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} n! \sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(x+pk)^{n+1}}$

Θα δείξουμε ότι ισχύει για $n+1$, δηλαδή : $\psi_k^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+2}(n+1)! \sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(x+pk)^{n+2}}$

Πράγματι :

$$\psi_k^{(n+1)}(x) = [\psi_k^{(n)}(x)]' = (-1)^{n+1} n! \sum_{p=0}^{\infty} \frac{-(n+1)}{(x+pk)^{n+2}} = (-1)^{n+2}(n+1)! \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(x+pk)^{n+2}}$$

που είναι η προς απόδειξη σχέση .

2.4 $k-$Βήτα συνάρτηση

Ορισμός 2.4.1 [2] **:** Ορίζουμε ως $k-$Βήτα συνάρτηση $B_k(x,y)$ την έκφραση :

$$B_k(x,y) = \frac{\Gamma_k(x)\Gamma_k(y)}{\Gamma_k(x+y)} \quad , \quad k>0 \quad , \quad \operatorname{Re} x > 0 \quad , \quad \operatorname{Re} y > 0 \qquad (2.12)$$

Ιδιότητες της k**-Βήτα συνάρτησης** $B_k(x,y)$ **,** $(x,y,k>0)$ [2, 6] **:**

(1) $B_k(x,y) = \dfrac{1}{k} B\left(\dfrac{x}{k}, \dfrac{y}{k}\right)$

(2) $B_k(x,y) = \dfrac{1}{k} \displaystyle\int_0^1 t^{\frac{x}{k}-1} (1-t)^{\frac{y}{k}-1} dt$

(3) $B_k(x,y) = \displaystyle\int_0^{\infty} t^{x-1} (1+t^k)^{\frac{-x-y}{k}} dt$

(4) $B_k(x,y) = \dfrac{(x+y)}{xy} \displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} \frac{nk(nk+x+y)}{(nk+x)(nk+y)}$

(5) $B_k(x+k,y) = \dfrac{x}{x+y} B_k(x,y)$

(6) $B_k(x,y+k) = \dfrac{y}{x+y} B_k(x,y)$

(7) $B_k(x,k) = \dfrac{1}{x}$

(8) $B_k(k,y) = \dfrac{1}{y}$

(9) $B_k(ak,bk)=\dfrac{1}{k}B(a,b)$, $a,b>0$

(10) $B_k(nk,ny)=\dfrac{[(n-1)!]^2}{k(2n-1)!}$, $n\in\aleph$

<u>Απόδειξη</u> :

(1) Χρησιμοποιώντας τις παρακάτω σχέσεις:

$$\Gamma_k(x)=k^{\frac{x}{k}-1}\Gamma\left(\frac{x}{k}\right)\ ,\ \Gamma_k(y)=k^{\frac{x}{k}-1}\Gamma\left(\frac{y}{k}\right)\ ,\ \Gamma_k(x+y)=k^{\frac{x+y}{k}-1}\Gamma\left(\frac{x+y}{k}\right)$$

η σχέση (2.12) μετασχηματίζεται :

$$B_k(x,y)=\frac{\Gamma_k(x)\Gamma_k(y)}{\Gamma_k(x+y)}=\frac{k^{\frac{x}{k}-1}\Gamma\left(\frac{x}{k}\right)k^{\frac{y}{k}-1}\Gamma\left(\frac{y}{k}\right)}{k^{\frac{x+y}{k}-1}\Gamma\left(\frac{x+y}{k}\right)}=\frac{1}{k}\frac{\Gamma\left(\frac{x}{k}\right)\Gamma\left(\frac{y}{k}\right)}{\Gamma\left(\frac{x+y}{k}\right)}\underset{\substack{\text{ιδιότητα (1)}\\ \text{της Βητα}\\ \text{συνάρτησης}}}{=}\frac{1}{k}B\left(\frac{x}{k},\frac{y}{k}\right)$$

(2) Στον ορισμό της Βήτα συνάρτησης αντικαθιστούμε το x με $\dfrac{x}{k}$ και το y με $\dfrac{y}{k}$,

$$B\left(\frac{x}{k},\frac{y}{k}\right)=\int_0^1 t^{\frac{x}{k}-1}(1-t)^{\frac{y}{k}-1}dt\underset{\substack{\text{ιδιότητα (1)}\\ \text{της k-Βήτα}\\ \text{συναρτησης}}}{\Rightarrow} kB_k(x,y)=\int_0^1 t^{\frac{x}{k}-1}(1-t)^{\frac{y}{k}-1}dt\Rightarrow$$

$$\Rightarrow B_k(x,y)=\frac{1}{k}\int_0^1 t^{\frac{x}{k}-1}(1-t)^{\frac{y}{k}-1}dt$$

(3) Θεωρούμε το ολοκλήρωμα : $\displaystyle\int_0^\infty t^{x-1}(1+t^k)^{\frac{-x-y}{k}}dt$ και θέτουμε $t^k=r$ άρα

$dt=\dfrac{dr}{kr^{\frac{k-1}{k}}}$, οπότε :

$$\int_0^\infty t^{x-1}(1+t^k)^{\frac{-x-y}{k}}dt=\int_0^\infty r^{\frac{x-1}{k}}(1+r)^{\frac{-x-y}{k}}\frac{dr}{kr^{\frac{k-1}{k}}}=\frac{1}{k}\int_0^\infty r^{\frac{x-1}{k}}(1+r)^{\frac{-x-y}{k}}r^{\frac{1-k}{k}}dr=$$

$$=\frac{1}{k}\int_0^\infty r^{\frac{x}{k}-1}(1+r)^{\frac{-x-y}{k}}dr\overset{(1.8)}{=}\frac{1}{k}B\left(\frac{x}{k},\frac{y}{k}\right)\underset{}{\overset{\substack{\text{ιδιότητα (1)}\\ \text{της Βήτα}\\ \text{συνάρτησης}}}{=}}B_k(x,y)$$

(4) Εφαρμόζοντας την ιδιότητα (9) της $k-$Γάμμα συνάρτησης στον ορισμό της $k-$Βήτα συνάρτησης , προκύπτει το εξής :

$$B_k(x,y)=\frac{\Gamma_k(x)\Gamma_k(y)}{\Gamma_k(x+y)}=\frac{\dfrac{1}{xk^{\frac{-x}{k}}e^{\gamma\frac{x}{k}}}\cdot\dfrac{1}{\prod_{n=1}^{\infty}\left((1+\frac{x}{nk})e^{\frac{-x}{nk}}\right)}\cdot\dfrac{1}{yk^{\frac{-y}{k}}e^{\gamma\frac{y}{k}}}\cdot\dfrac{1}{\prod_{n=1}^{\infty}\left((1+\frac{y}{nk})e^{\frac{-y}{nk}}\right)}}{\dfrac{1}{(x+y)k^{\frac{-(x+y)}{k}}e^{\gamma\frac{(x+y)}{k}}}\cdot\dfrac{1}{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x+y}{nk}\right)e^{\frac{-(x+y)}{nk}}}}=$$

$$=\left(\frac{x+y}{xy}\right)\frac{\dfrac{1}{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{nk}\right)}\cdot\dfrac{1}{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{y}{nk}\right)}}{\dfrac{1}{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x+y}{nk}\right)}}=\left(\frac{x+y}{xy}\right)\frac{\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{nk+x+y}{nk}\right)}{\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{nk+x}{nk}\right)\left(\frac{nk+y}{nk}\right)}=$$

$$=\left(\frac{x+y}{xy}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\frac{nk(nk+x+y)}{(nk+x)(nk+y)}$$

(5) Αντικαθιστούμε στον ορισμό της $k-$Βήτα συνάρτησης το x με $x+k$:

$$B_k(x+k,y)=\frac{\Gamma_k(x+k)\Gamma_k(y)}{\Gamma_k(x+k+y)}=\frac{x\Gamma_k(x)\Gamma_k(y)}{(x+y)\Gamma_k(x+y)}=\frac{x}{(x+y)}B_k(x,y)$$

(6) Αντικαθιστούμε στον ορισμό της $k-$Βήτα συνάρτησης το y με $y+k$:

$$B_k(x,y+k)=\frac{\Gamma_k(x)\Gamma_k(y+k)}{\Gamma_k(x+y+k)}=\frac{y\Gamma_k(x)\Gamma_k(y)}{(x+y)\Gamma_k(x+y)}=\frac{y}{(x+y)}B_k(x,y)$$

(7) Αντικαθιστούμε στον ορισμό της $k-$Βήτα συνάρτησης το y με k:

$$B_k(x,k)=\frac{\Gamma_k(x)\Gamma_k(k)}{\Gamma_k(x+k)}=\frac{\Gamma_k(x)\Gamma_k(k)}{x\Gamma_k(x)}=\frac{1}{x}\cdot 1=\frac{1}{x}$$

(8) Αντικαθιστούμε στον ορισμό της $k-$Βήτα συνάρτησης το x με k:

$$B_k(k,y)=\frac{\Gamma_k(k)\Gamma_k(y)}{\Gamma_k(k+y)}=\frac{\Gamma_k(k)\Gamma_k(y)}{y\Gamma_k(y)}=\frac{1}{y}\cdot 1=\frac{1}{y}$$

(9) Εφαρμόζοντας την ιδιότητα (1) στον ορισμό της $k-$Βήτα συνάρτησης και θέτοντας όπου x το ak και όπου y το bk προκύπτει :

$$B_k(ak,bk)=\frac{1}{k}B\left(\frac{ak}{k},\frac{bk}{k}\right)=\frac{1}{k}B(a,b)$$

(10) Αντικαθιστούμε στον ορισμό της $k-$Βήτα συνάρτησης το x με nk και το y με nk :

$$B_k(nk,nk)=\frac{\Gamma_k(nk)\Gamma_k(nk)}{\Gamma_k(2nk)}\underset{\substack{\text{ιδιότητα (4)}\\ \text{της } k-\text{Γαμμα}\\ \text{συναρτησης}}}{=}\frac{k^{n-1}(n-1)!k^{n-1}(n-1)!}{k^{2n-1}(2n-1)!}=\frac{1}{k}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n-1)!}$$

2.5 $k-$Ζήτα συνάρτηση

Ορισμός 2.5.1 [2] **:** Ορίζουμε ως $k-$ζήτα συνάρτηση $\zeta_k(x,s)$ με μορφή σειράς :

$$\zeta_k(x,s)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(x+nk)^s}\ ,\ \ k>0\ ,\ \operatorname{Re}x>0\ ,\ \operatorname{Re}s>1 \qquad (2.13)$$

Ορισμός 2.5.2 [6] **:** Ορίζουμε ως $k-$Riemann ζήτα συνάρτηση $\zeta_k(s)$ με μορφή ολοκληρώματος :

$$\zeta_k(s)=\frac{1}{\Gamma_k(s)}\int_0^{\infty}\frac{t^{s-k}}{e^t-1}dt\ \ ,\ \ s>k \qquad (2.14)$$

Ιδιότητες της $k-$ζήτα συνάρτησης $\zeta_k(x,s)$, ($k,x>0$ και $s>1$) [2, 6] **:**

(1) $\partial_k^m\zeta_k(x,s)=(-1)^m(s)_m\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^m}{(x+nk)^{m+s}}\ \ ,\ \ m\geq 0$

(2) $\zeta_k(x,2)=\partial_x^2(\ln\Gamma_k(x))$

(3) $\partial_x^2(\partial_s\zeta_k)_{s=0}=\partial_x^2(\ln\Gamma_k(x))$

(4) $\partial_x^m\zeta_k(x,s)=(-1)^m\ (s)_m\zeta_k(x,s+m)\ ,\ m\geq 0$

(5) $\zeta_k(x,s+1)=\frac{(-1)^{s+1}}{s!}\psi_k^{(s)}(x)$

(6) $\zeta_k(x+k,s)=\zeta_k(x,s)-\frac{1}{x^s}$

Απόδειξη :

Για όλες τις αποδείξεις των ανωτέρω ιδιοτήτων θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό (2.13) .

(1) Η σχέση αυτή θα δειχθεί με τη μέθοδο της επαγωγής .

$$\partial_k\zeta_k(x,s)=-s\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{(x+nk)^{s+1}}\ ,$$

η οποία είναι η προς απόδειξη σχέση για $m=1$.

Έστω ότι ισχύει για m , δηλαδή :

$$\partial_k^m \zeta_k(x,s) = (-1)^m (s)_m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^m}{(x+nk)^{m+s}} \quad .$$

Θα δείξουμε ότι ισχύει για $m+1$, δηλαδή :

$$\partial_k^{(m+1)} \zeta_k(x,s) = (-1)^{m+1} (s)_{m+1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{m+1}}{(x+nk)^{s+m+1}}$$

Πράγματι : $\partial_k^{(m+1)} \zeta_k(x,s) = \dfrac{\partial}{\partial m}(\partial_k^m \zeta_k(x,s)) = (-1)^m (s)_m \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(m+s)n^m n}{(x+nk)^{s+m+1}}$

$$= (-1)^{m+1} (s)_{m+1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{m+1}}{(x+nk)^{s+m+1}}$$

(2) Από τον ορισμό έχουμε : $\zeta_k(x,s) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(x+nk)^s}$

Εφαρμόζουμε για $s=2$: $\zeta_k(x,2) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(x+nk)^2}$

Όμως ξέρουμε από τη σχέση (2.11) για $n=1$: $\psi_k^{'}(x) = \displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(x+pk)^2} = \partial_x^2(\ln\Gamma_k(x))$

Άρα $\zeta_k(x,2) = \partial_x^2(\ln\Gamma_k(x))$.

(3) Ξαναγράφουμε το $(x+nk)^s$ ως $e^{s\ln(x+nk)}$, οπότε από την σχέση (2.13) προκύπτει :

$\partial_s \zeta_k(x,s) = \dfrac{\partial}{\partial s} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{-s\ln(x+nk)} = -\sum_{n=0}^{\infty} \ln(x+nk) e^{-s\ln(x+nk)} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln(x+nk)}{(x+nk)^s}$, οπότε για

$\partial_s \zeta_k(x,s)_{s=0} = -\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \ln(x+nk)$, επιπλέον έχουμε , $\partial_x(\partial_s \zeta_k(x,s))_{s=0} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(x+nk)}$

Συνεπώς , $\partial_x^2(\partial_s \zeta_k(x,s))_{s=0} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(x+nk)^2} = \psi_k^{(2)}(x) = \partial_x^2(\ln\Gamma_k(x))$

(4) Η σχέση αυτή θα δειχθεί με τη μέθοδο της επαγωγής .

Για $m=1$ ισχύει διότι :

$$\partial_x \zeta_k(x,s) = \partial_x \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(x+nk)^s} \right) = -s \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(x+nk)^{s+1}} = -s\zeta_k(x,s+1)$$

Έστω ότι ισχύει για m , δηλαδή :

$$\partial_x^m \zeta_k(x,s) = (-1)^m (s)_m \zeta_k(x,s+m)$$

Θα δείξουμε ότι ισχύει για $m+1$, δηλαδή :

$$\partial_x^{m+1} \zeta_k(x,s) = (-1)^{m+1} (s)_{m+1} \zeta_k(x,s+m+1)$$

Πράγματι ,

$$\partial_x^{m+1}\zeta_k(x,s) = \frac{\partial}{\partial x}\left[(-1)^m (s)_m \zeta_k(x,s+m)\right] = (-1)^m (s)_m \frac{\partial}{\partial x}\zeta_k(x,s+m) =$$

$$= (-1)^m (s)_m \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{(x+nk)^{s+m}} = (-1)^m (s)_m \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left[-(s+m)\right]}{(x+nk)^{s+m+1}} =$$

$$= (-1)^{m+1}(s)_{m+1}\zeta_k(x,s+m+1)$$

(5) Προκύπτει άμεσα από τις σχέσεις (2.13) και (2.11) .

(6) Από τον ορισμό 2.5.1 έχουμε ότι :

$$\zeta_k(x,s) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(x+nk)^s} = \frac{1}{x^s} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(x+nk)^s} = \frac{1}{x^s} + \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{(x+(\nu+1)k)^s} =$$

$$= \frac{1}{x^s} + \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{(x+\nu k+k)^s} = \frac{1}{x^s} + \zeta_k(x+k,s)$$

2.6 $k-$Υπεργεωμετρική συνάρτηση

Ορισμός 2.6.1 : Η $k-$υπεργεωμετρική συνάρτηση Gauss ${}_2F_{1,k}(a,\beta;\gamma;x)$ δίνεται υπό μορφήν σειράς :

$${}_2F_{1,k}(a;\beta;\gamma;x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_{n,k}(\beta)_{n,k}}{(\gamma)_{n,k}}\frac{x^n}{n!} \ , \ |x|<1 \ , \ a,\beta \in C \ , \ \gamma \in C\setminus Z_0^- \ , \ k>0$$

(2.15)

Ορισμός 2.6.2 : Η $k-$υπεργεωμετρική συνάρτηση ${}_1F_{1,k}(a,\beta;\gamma;x)$ δίνεται υπό μορφήν σειράς :

$${}_1F_{1,k}(a;\gamma;x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_{n,k}}{(\gamma)_{n,k}}\frac{x^n}{n!} \ , \ |x|<1 \ , \ a \in C \ , \ \gamma \in C\setminus Z_0^- \ , \ k>0$$

(2.16)

Ορισμός 2.6.3 : Η υπεργεωμετρική συνάρτηση ${}_pF_{q,k}(a,b;c;x)$ δίνεται υπό μορφήν σειράς :

$$ {}_pF_{q,k}(a_1...a_p;\beta_1...\beta_p;x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_{n,k}....(a_p)_{n,k}}{(\beta_1)_{n,k}....(\beta_q)_{n,k}}\frac{x^n}{n!}\ ,\ |x|<1\ ,\ a,\beta\in C\ ,\ k>0 $$

(2.17)

Σημείωση : Οι ορισμοί 2.6.1 και 2.6.2 προκύπτουν από την εργασία [11] για κατάλληλες τιμές των παραμέτρων .

Ιδιότητες της $k-$ **υπεργεωμετρικής συνάρτησης** ${}_2F_{1,k}(a,\beta;\gamma;x)$, **(** $k>0$ **) :**

1) ${}_2F_{1,k}(\beta,a;\gamma;x)={}_2F_{1,k}(a,\beta;\gamma;x)$

2) $\left(\frac{d}{dx}\right)^p {}_2F_{1,k}(a,\beta;\gamma;x)=\frac{(a)_{p,k}(\beta)_{p,k}}{(\gamma)_{p,k}}{}_2F_1(a+kp,\beta+kp;\gamma+kp;x)\ ,\ \ p\in\aleph$

3) ${}_2F_{1,k}(a,\beta;\beta;kx)=(1-kx)^{-\frac{a}{k}}$

<u>**Απόδειξη**</u> **:**

1) Προκύπτει άμεσα από τον ορισμό .

2) Η σχέση αυτή θα δειχθεί με τη μέθοδο της επαγωγής .

Για $p=1$ η προς απόδειξη σχέση γίνεται :

$$ \left(\frac{d}{dx}\right){}_2F_{1,k}(a,\beta;\gamma;x)=\frac{(a)_{1,k}(\beta)_{1,k}}{(\gamma)_{1,k}}{}_2F_1(a+k,\beta+k;\gamma+k;x)\ , $$

η οποία ισχύει διότι :

$$ \begin{aligned} \left(\frac{d}{dx}\right){}_2F_{1,k}(a,\beta;\gamma;x)&=\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_{n,k}(\beta)_{n,k}}{(\gamma)_{n,k}}\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(a)_{n,k}(\beta)_{n,k}}{(\gamma)_{n,k}}\frac{x^{n-1}}{n!}\\ &=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a)_{n,k}(\beta)_{n,k}}{(\gamma)_{n,k}}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_{n+1,k}(\beta)_{n+1,k}}{(\gamma)_{n+1,k}}\frac{x^n}{n!}\\ &=\frac{(a)_{1,k}(\beta)_{1,k}}{(\gamma)_{1,k}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a+k)_{n,k}(\beta+k)_{n,k}}{(\gamma+k)_{n,k}}\frac{x^n}{n!}\\ &=\frac{(a)_{1,k}(\beta)_{1,k}}{(\gamma)_{1,k}}{}_2F_1(a+k,\beta+k;\gamma+k;x) \end{aligned} $$

Έστω ότι ισχύει για p , δηλαδή :

$$ \left(\frac{d}{dx}\right)^p{}_2F_{1,k}(a,\beta;\gamma;x)=\frac{(a)_{p,k}(\beta)_{p,k}}{(\gamma)_{p,k}}{}_2F_1(a+kp,\beta+kp;\gamma+kp;x) $$

Θα δείξουμε ότι ισχύει για $p+1$, δηλαδή :

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{p+1} {}_2F_{1,k}(a,\beta;\gamma;x) = \frac{(a)_{p+1,k}(\beta)_{p+1,k}}{(\gamma)_{p+1,k}} {}_2F_1(a+k(p+1),\beta+k(p+1);\gamma+k(p+1);x)$$

Πράγματι :

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{p+1} {}_2F_{1,k}(a,\beta;\gamma;x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{(a)_{p,k}(\beta)_{p,k}}{(\gamma)_{p,k}} {}_2F_1(a+kp,\beta+kp;\gamma+kp;x)\right)$$

$$= \frac{(a)_{p,k}(\beta)_{p,k}}{(\gamma)_{p,k}} \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+kp)_{n,k}(\beta+kp)_{n,k}}{(\gamma+kp)_{n,k}} \frac{x^n}{n!}\right)$$

$$= \frac{(a)_{p,k}(\beta)_{p,k}}{(\gamma)_{p,k}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(a+kp)_{n,k}(\beta+kp)_{n,k}}{(\gamma+kp)_{n,k}} \frac{x^{n-1}}{n!}$$

$$= \frac{(a)_{p,k}(\beta)_{p,k}}{(\gamma)_{p,k}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(a+kp)_{n,k}(\beta+kp)_{n,k}}{(\gamma+kp)_{n,k}} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$= \frac{(a)_{p,k}(\beta)_{p,k}}{(\gamma)_{p,k}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+kp)_{n+1,k}(\beta+kp)_{n+1,k}}{(\gamma+kp)_{n+1,k}} \frac{x^n}{n!}$$

$$= \frac{(a)_{p+1,k}(\beta)_{p+1,k}}{(\gamma)_{p+1,k}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+kp+k)_{n,k}(\beta+kp+k)_{n,k}}{(\gamma+kp+k)_{n,k}} \frac{x^n}{n!}$$

$$= \frac{(a)_{p+1,k}(\beta)_{p+1,k}}{(\gamma)_{p+1,k}} {}_2F_1(a+k(p+1),\beta+k(p+1);\gamma+k(p+1);x)$$

3) Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1}{(1-kx)^{\frac{a}{k}}}$ και υπολογίζουμε τις παραγώγους της:

$$f'(x) = \frac{k\frac{a}{k}}{(1-kx)^{\frac{a}{k}+1}} = \frac{a}{(1-kx)^{\frac{a}{k}+1}} \quad ,$$

$$f''(x) = \frac{k^2\frac{a}{k}\left(\frac{a}{k}+1\right)}{(1-kx)^{\frac{a}{k}+2}} = \frac{a(a+k)}{(1-kx)^{\frac{a}{k}+2}}$$

$$f'''(x) = \frac{k^3\frac{a}{k}\left(\frac{a}{k}+1\right)\left(\frac{a}{k}+2\right)}{(1-kx)^{\frac{a}{k}+3}} = \frac{a(a+k)(a+2k)}{(1-kx)^{\frac{a}{k}+3}}$$

Επαγωγικά προκύπτει :

$$f^{(n)}(x)=\frac{k^n\,\dfrac{a}{k}\left(\dfrac{a}{k}+1\right)\left(\dfrac{a}{k}+2\right)\cdots\left(\dfrac{a}{k}+n-1\right)}{(1-kx)^{\frac{a}{k}+n}}=\frac{a(a+k)(a+2k)\cdots(a+(n-1)k)}{(1-kx)^{\frac{a}{k}+n}}=\frac{(a)_{n,k}}{(1-kx)^{\frac{a}{k}+n}}$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τις αντίστοιχες τιμές για $x=0$:

$f(0)=1$

$f'(0)=a$

$f''(0)=a(a+k)(a+2k)$

$f'''(0)=a(a+k)(a+2k)(a+3k)$

$\cdots$

$f^{(n)}(0)=(a)_{n,k}$

Αναπτύσσουμε την $f(x)$ γύρω από το $x=0$:

$$f(x)=(1-kx)^{-\frac{a}{k}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_{n,k}}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_{n,k}(\beta)_{n,k}}{(\beta)_{n,k}\,n!}x^n={}_2F_{1,k}(a;\beta;\beta;x)\,.$$

Θεώρημα 2.6.1 : Αν $\operatorname{Re}\beta>0, \operatorname{Re}(\beta-\gamma)>0$, $k>0$, $m\geq 1$, $m\in Z^+$, τότε για όλα τα πεπερασμένα x ισχύει :

$$ {}_1F_{1,k}\left(\beta;\gamma;x\right)=\frac{\Gamma_k(\gamma)}{k\Gamma_k(\beta)\Gamma_k(\gamma-\beta)}\int_0^1 t^{\frac{\beta}{k}-1}(1-t)^{\frac{\gamma-\beta}{k}-1}e^{xt}dt \qquad (2.18)$$

<u>**Απόδειξη**</u> **:**

Έχουμε $\dfrac{(\beta)_{j,k}}{(\gamma)_{j,k}}\overset{\substack{\text{ιδιοτητα (2)}\\ \text{της } k-\Gamma\text{αμμα}\\ \text{συναρτησης}}}{=}\dfrac{\dfrac{\Gamma_k(\beta+jk)}{\Gamma_k(\beta)}}{\dfrac{\Gamma_k(\gamma+jk)}{\Gamma_k(\gamma)}}=\dfrac{\Gamma_k(\gamma)\Gamma_k(\beta+jk)}{\Gamma_k(\beta)\Gamma_k(\gamma+jk)}$ και

$$B_k(x,y)=\frac{\Gamma_k(x)\Gamma_k(y)}{\Gamma_k(x+y)}\Rightarrow B_k(\beta+jk,\gamma-\beta)=\frac{\Gamma_k(\beta+jk)\Gamma_k(\gamma-\beta)}{\Gamma_k(\gamma+jk)}$$

Από τις ανωτέρω σχέσεις προκύπτει :

$$\frac{(\beta)_{j,k}}{(\gamma)_{j,k}}=\frac{\Gamma_k(\gamma)}{\Gamma_k(\beta)}\frac{B_k(\beta+jk,\gamma-\beta)}{\Gamma_k(\gamma-\beta)}\overset{\substack{\text{ιδιοτητα (2)}\\ \text{της } k-\text{B}\eta\tau\alpha\\ \text{συναρτησης}}}{=}\frac{\Gamma_k(\gamma)}{\Gamma_k(\beta)\Gamma_k(\gamma-\beta)}\frac{1}{k}\int_0^1 t^{\frac{\beta}{k}+j-1}(1-t)^{\frac{\gamma-\beta}{k}-1}dt$$

Από την ανωτέρω σχέση και τον ορισμό (2.16) έχουμε :

$$
{}_1F_{1,k}(\beta;\gamma;x)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\beta)_{j,k}}{(\gamma)_{j,k}}\frac{x^j}{j!}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{x^j}{j!}\frac{\Gamma_k(\gamma)}{\Gamma_k(\beta)\Gamma_k(\gamma-\beta)}\frac{1}{k}\int_0^1 t^{\frac{\beta}{k}+j-1}(1-t)^{\frac{\gamma-\beta}{k}-1}dt
$$

$$
=\frac{\Gamma_k(\gamma)}{\Gamma_k(\beta)\Gamma_k(\gamma-\beta)}\frac{1}{k}\int_0^1 t^{\frac{\beta}{k}-1}(1-t)^{\frac{\gamma-\beta}{k}-1}\sum_{j=0}^{\infty}t^j\frac{x^j}{j!}dt
$$

$$
=\frac{\Gamma_k(\gamma)}{\Gamma_k(\beta)\Gamma_k(\gamma-\beta)}\frac{1}{k}\int_0^1 t^{\frac{\beta}{k}-1}(1-t)^{\frac{\gamma-\beta}{k}-1}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(xt)^j}{j!}dt
$$

Επειδή $\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(xt)^j}{j!}=e^{xt}$ από την τελευταία ισότητα προκύπτει η προς απόδειξη σχέση :

$$
{}_1F_{1,k}(\beta;\gamma;x)=\frac{\Gamma_k(\gamma)}{k\Gamma_k(\beta)\Gamma_k(\gamma-\beta)}\int_0^1 t^{\frac{\beta}{k}-1}(1-t)^{\frac{\gamma-\beta}{k}-1}e^{xt}dt
$$

Σημείωση : Στην εργασία [11] έχει δειχθεί η πιο γενική σχέση :

$$
{}_mF_{m,k}\left(\begin{matrix}\left(\frac{\beta}{m},k\right),\left(\frac{\beta+k}{m},k\right),\ldots,\left(\frac{\gamma+(m-1)k}{m},k\right); \\ \left(\frac{\gamma}{m},k\right),\left(\frac{\gamma+k}{m},k\right),\ldots,\left(\frac{\gamma+(m-1)k}{m},k\right);x\end{matrix}\right)=\frac{\Gamma_k(\gamma)}{k\Gamma_k(\beta)\Gamma_k(\gamma-\beta)}\int_0^1 t^{\frac{\beta}{k}-1}(1-t)^{\frac{\gamma-\beta}{k}-1}e^{xt^m}dt
$$

Θεώρημα 2.6.2 : Αν $\operatorname{Re}\beta>0,\operatorname{Re}(\beta-\gamma)>0$, $|x|<1$, τότε για όλα τα πεπερασμένα x ισχύει :

$$
{}_2F_{1,k}(a;\beta;\gamma;x)=\frac{\Gamma_k(\gamma)}{k\Gamma_k(\beta)\Gamma_k(\gamma-\beta)}\int_0^1 t^{\frac{\beta}{k}-1}(1-t)^{\frac{\gamma-\beta}{k}-1}(1-kxt)^{\frac{-a}{k}}dt \tag{2.19}
$$

<u>**Απόδειξη**</u> **:**

Στην απόδειξη του θεωρήματος 2.6.1 δείξαμε ότι ισχύει :

$$
\frac{(\beta)_{j,k}}{(\gamma)_{j,k}}=\frac{\Gamma_k(\gamma)}{\Gamma_k(\beta)\Gamma_k(\gamma-\beta)}\frac{1}{k}\int_0^1 t^{\frac{\beta}{k}+j-1}(1-t)^{\frac{\gamma-\beta}{k}-1}dt
$$

Από τον ορισμό (2.15) και χρησιμοποιώντας την ανωτέρω σχέση έχουμε :

$$
\begin{aligned}
{}_2F_{1,k}(\alpha;\beta;\gamma;x) &= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(a)_{j,k}(\beta)_{j,k}}{(\gamma)_{j,k}}\frac{x^j}{j!} = \\
&= \frac{\Gamma_k(\gamma)}{k\Gamma_k(\beta)\Gamma_k(\gamma-\beta)}\int_0^1 t^{\frac{\beta}{k}-1}(1-t)^{\frac{\gamma-\beta}{k}-1}\sum_{j=0}^{\infty}(a)_{j,k}t^j\frac{x^j}{j!}dt \\
&= \frac{\Gamma_k(\gamma)}{k\Gamma_k(\beta)\Gamma_k(\gamma-\beta)}\int_0^1 t^{\frac{\beta}{k}-1}(1-t)^{\frac{\gamma-\beta}{k}-1}\sum_{j=0}^{\infty}(a)_{j,k}\frac{(xt)^j}{j!}dt \\
&\underset{\substack{\text{ιδιότητα (4)}\\ \text{της υπεργεωμετρικης}\\ \text{συναρτησης}}}{=} \frac{\Gamma_k(\gamma)}{k\Gamma_k(\beta)\Gamma_k(\gamma-\beta)}\int_0^1 t^{\frac{\beta}{k}-1}(1-t)^{\frac{\gamma-\beta}{k}-1}(1-kxt)^{\frac{-a}{k}}dt
\end{aligned}
$$

Σημείωση : Στην εργασία [11] έχει δειχθεί η πιο γενική σχέση :

$$
{}_{m+1}F_{m,k}\left(\begin{array}{l}(a,k),\left(\frac{\beta}{m},k\right),\left(\frac{\beta+k}{m},k\right),\ldots,\left(\frac{\gamma+(m-1)k}{m},k\right); \\ \\ \left(\frac{\gamma}{m},k\right),\left(\frac{\gamma+k}{m}\right),\ldots,\left(\frac{\gamma+(m-1)k}{m},k\right);x\end{array}\right) =
$$

$$
= \frac{\Gamma_k(\gamma)}{k\Gamma_k(\beta)\Gamma_k(\gamma-\beta)}\int_0^1 t^{\frac{\beta}{k}-1}(1-t)^{\frac{\gamma-\beta}{k}-1}(1-kxt^m)^{\frac{-a}{k}}dt
$$

2.7 $k-$Mittag-Leffler συναρτήσεις

Ορισμός 2.7.1 [4] **:** Έστω $k\in\Re$, $a,\beta,\gamma\in C$, $\mathrm{Re}\,a,\mathrm{Re}\,\beta,\mathrm{Re}\,\gamma>0$, η $k-$Mittag-Leffler συνάρτηση ορίζεται από την ακόλουθη σειρά :

$$
E_{k,a,\beta}^{\gamma}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\gamma)_{n,k}}{\Gamma_k(an+\beta)}\frac{z^n}{n!} \qquad (2.20)
$$

Ιδιότητες της συνάρτησης $k-$Mittag-Leffler [4] **:**

1) $E_{k,a,\beta}^{\gamma}(z)=k^{1-\frac{\beta}{k}}E_{\frac{a}{k},\frac{\beta}{k}}^{\gamma/k}\left(k^{1-\frac{a}{k}}z\right)\Leftrightarrow k^{\frac{\beta}{k}-1}E_{k,a,\beta}^{\gamma}\left(k^{\frac{a}{k}-1}az\right)=E_{\frac{a}{k},\frac{\beta}{k}}^{\gamma/k}(az)$, $a\in\Re$ (2.21)

<u>Απόδειξη</u> :

Από τον ορισμό (2.20) προκύπτει :

$$E_{k,a,\beta}^{\gamma}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\gamma)_{n,k}}{\Gamma_k(an+\beta)}\frac{z^n}{n!}\overset{(2.3)}{=}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{k^n\left(\frac{\gamma}{k}\right)_n}{\Gamma_k(an+\beta)}\frac{z^n}{n!}\overset{(2.6)}{=}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{\gamma}{k}\right)_n}{k^{\frac{an+\beta}{k}-1}\Gamma\left(\frac{an+\beta}{k}\right)}\frac{(kz)^n}{n!}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{k^{-\frac{\beta}{k}+1}k^{\frac{-an}{k}}\left(\frac{\gamma}{k}\right)_n}{\Gamma\left(\frac{an+\beta}{k}\right)}\frac{(kz)^n}{n!}=k^{-\frac{\beta}{k}+1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{k^{-\frac{an}{k}}\left(\frac{\gamma}{k}\right)_n}{\Gamma\left(\frac{an+\beta}{k}\right)}\frac{(kz)^n}{n!}$$

$$=k^{-\frac{\beta}{k}+1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{\gamma}{k}\right)_n}{\Gamma\left(\frac{an+\beta}{k}\right)}\frac{\left(k^{1-\frac{a}{k}}z\right)^n}{n!}\overset{(1.17)}{=}k^{1-\frac{\beta}{k}}E_{\frac{a}{k},\frac{\beta}{k}}^{\frac{\gamma}{k}}\left(k^{1-\frac{a}{k}}z\right)$$

Η ισοδυναμία προκύπτει αν θέσουμε στην αποδειχθείσα σχέση όπου z το $k^{1-\frac{a}{k}}z$.

2) $E_{k,a,\beta}^{\gamma}(z)=\beta E_{k,a,\beta+k}^{\gamma}(z)+az\frac{d}{dz}E_{k,a,\beta+k}^{\gamma}(z)$ (2.22)

<u>Απόδειξη</u> :

Ξεκινώντας από το δεύτερο μέλος :

$$\beta E_{k,a,\beta+k}^{\gamma}(z)+az\frac{d}{dz}E_{k,a,\beta+k}^{\gamma}(z)\overset{(2.20)}{=}\sum_{n\geq 0}\frac{\beta(\gamma)_{n,k}}{\Gamma_k(an+\beta+k)}\frac{z^n}{n!}+\sum_{n\geq 0}\frac{azn(\gamma)_{n,k}}{\Gamma_k(an+\beta+k)}\frac{z^{n-1}}{n!}=$$

$$=\sum_{n\geq 0}\frac{\beta(\gamma)_{n,k}}{\Gamma_k(an+\beta+k)}\frac{z^n}{n!}+\sum_{n\geq 0}\frac{an(\gamma)_{n,k}}{\Gamma_k(an+\beta+k)}\frac{z^n}{n!}=\sum_{n\geq 0}\frac{(an+\beta)(\gamma)_{n,k}}{\Gamma_k(an+\beta+k)}\frac{z^n}{n!}\underset{\substack{\iota\delta\iota\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ (1)\\ \tau\eta\varsigma\ k-\Gamma\alpha\mu\mu\alpha\\ \sigma\upsilon\nu\alpha\rho\tau\eta\sigma\eta\varsigma}}{=}$$

$$=\sum_{n\geq 0}\frac{(an+\beta)(\gamma)_{n,k}}{(an+\beta)\Gamma_k(an+\beta)}\frac{z^n}{n!}=\sum_{n\geq 0}\frac{(\gamma)_{n,k}}{\Gamma_k(an+\beta)}\frac{z^n}{n!}\overset{(2.20)}{=}E_{k,a,\beta}^{\gamma}(z)$$

3) Έστω $a,\beta,\gamma\in C$, $\operatorname{Re}a,\operatorname{Re}\beta>0$, τότε :

$$E_{k,a,\beta}^{\gamma}(z)-E_{k,a,\beta}^{\gamma-k}(z)=zk^{1-\frac{\beta}{k}}E_{k,a,a+\beta}^{\gamma}(z) \qquad (2.23)$$

<u>Απόδειξη</u> :

Ξεκινώντας από το πρώτο μέλος και χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.21) , έχουμε :

$$E^{\gamma}_{k,a,\beta}(z) - E^{\gamma-k}_{k,a,\beta}(z) = k^{1-\frac{\beta}{k}}\left[E^{\gamma/k}_{\frac{a}{k},\frac{\beta}{k}}\left(k^{1-\frac{a}{k}}z\right) - E^{\gamma-k/k}_{\frac{a}{k},\frac{\beta}{k}}\left(k^{1-\frac{a}{k}}z\right)\right]$$

$$\overset{(1.17)}{=} k^{1-\frac{\beta}{k}}\left[\sum_{n\geq 0}\frac{\left(k^{1-\frac{a}{k}}z\right)^n\left(\frac{\gamma}{k}\right)_n}{\Gamma\left(\frac{a}{k}n+\frac{\beta}{k}\right)n!} - \sum_{n\geq 0}\frac{\left(k^{1-\frac{a}{k}}z\right)^n\left(\frac{\gamma-k}{k}\right)_n}{\Gamma\left(\frac{a}{k}n+\frac{\beta}{k}\right)n!}\right]$$

$$= k^{1-\frac{\beta}{k}}\sum_{n\geq 0}\frac{\left(k^{1-\frac{a}{k}}z\right)^n\left[\left(\frac{\gamma}{k}\right)_n - \left(\frac{\gamma-k}{k}\right)_n\right]}{\Gamma\left(\frac{a}{k}n+\frac{\beta}{k}\right)n!} = k^{1-\frac{\beta}{k}}\sum_{n\geq 1}\frac{\left(k^{1-\frac{a}{k}}z\right)^n\left(\frac{\gamma}{k}\right)_{n-1}}{\Gamma\left(\frac{a}{k}n+\frac{\beta}{k}\right)(n-1)!} =$$

$$= k^{1-\frac{\beta}{k}}\sum_{n\geq 0}\frac{\left(k^{1-\frac{a}{k}}z\right)^{n+1}\left(\frac{\gamma}{k}\right)_n}{\Gamma\left(\frac{a}{k}n+\frac{a}{k}+\frac{\beta}{k}\right)n!} = k^{2-\frac{a+\beta}{k}}z\sum_{n\geq 0}\frac{\left(k^{1-\frac{\beta}{k}}z\right)^n\left(\frac{\gamma}{k}\right)_n}{\Gamma\left(\frac{a}{k}n+\frac{a+\beta}{k}\right)n!} \overset{(1.17)}{=}$$

$$= zk^{1-\frac{a}{k}}k^{1-\frac{\beta}{k}}E^{\gamma/k}_{\frac{a}{k},\frac{a+\beta}{k}}\left(k^{1-\frac{\beta}{k}}z\right) \overset{(2.21)}{=} zk^{1-\frac{\beta}{k}}E^{\gamma}_{k,a,a+\beta}(z)$$

4) Αν $a,\beta,\gamma \in C$, $\operatorname{Re}a, \operatorname{Re}\beta > 0$ και $j \in \aleph$, τότε :

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^j E^{\gamma}_{k,a,\beta}(z) = (\gamma)_{j,k}E^{\gamma+jk}_{k,a,aj+\beta}(z) \qquad (2.24)$$

__Απόδειξη__ :

Η σχέση αυτή θα δειχθεί με τη μέθοδο της επαγωγής .

$$\left(\frac{d}{dz}\right)E^{\gamma}_{k,a,\beta}(z) = \left(\frac{d}{dz}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\gamma)_{n,k}}{\Gamma_k(an+\beta)}\frac{z^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(\gamma)_{n,k}}{\Gamma_k(an+\beta)}\frac{z^{n-1}}{n!}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\gamma)_{n,k}}{\Gamma_k(an+\beta)}\frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\gamma)_{n+1,k}}{\Gamma_k(an+a+\beta)}\frac{z^n}{n!}$$

$$= (\gamma)_{1,k}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\gamma+k)_{n,k}}{\Gamma_k(an+a+\beta)}\frac{z^n}{n!}$$

η οποία είναι η προς απόδειξη σχέση για $j = 1$.

Έστω ότι ισχύει για j , δηλαδή :

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^j E^{\gamma}_{k,a,\beta}(z) = (\gamma)_{j,k}E^{\gamma+jk}_{k,a,aj+\beta}(z)$$

.

Θα δείξουμε ότι ισχύει για $j+1$, δηλαδή :

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^{j+1} E^{\gamma}_{k,a,\beta}(z) = (\gamma)_{j+1,k}\, E^{\gamma+(j+1)k}_{k,a,aj+a+\beta}(z)$$

Πράγματι , $\left(\frac{d}{dz}\left(\frac{d}{dz}\right)^{j} E^{\gamma}_{k,a,\beta}(z)\right) = \left(\frac{d}{dz}(\gamma)_{j,k}\, E^{\gamma+jk}_{k,a,aj+\beta}(z)\right)$

$$= (\gamma)_{j,k} \sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{n(\gamma+jk)_{n,k}}{\Gamma_k(an+aj+\beta)} \frac{z^{n-1}}{n!} = (\gamma)_{j,k} \sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{(\gamma+jk)_{n,k}}{\Gamma_k(an+aj+\beta)} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$= (\gamma)_{j,k} \sum_{n\geq 0}^{\infty} \frac{(\gamma+jk)_{n+1,k}}{\Gamma_k(an+aj+a+\beta)} \frac{z^{n}}{n!} = (\gamma)_{j+1,k} \sum_{n\geq 0}^{\infty} \frac{(\gamma+jk+k)_{n,k}}{\Gamma_k(an+aj+a+\beta)} \frac{z^{n}}{n!}$$

$$= (\gamma)_{j+1,k} \sum_{n\geq 0}^{\infty} \frac{(\gamma+jk+k)_{n,k}}{\Gamma_k(an+aj+a+\beta)} \frac{z^{n}}{n!} = (\gamma)_{j+1,k}\, E^{\gamma+(j+1)k}_{k,a,aj+a+\beta}(z)$$

5) Έστω $a,\beta,\gamma \in C$, $\operatorname{Re}a, \operatorname{Re}\beta > 0$ και $k \in \Re$ τότε :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x+y)^n E^{nk+k}_{k,2a,an+\beta}(-xy) = \sum_{r=0}^{\infty} (-xyk)^r E^{rk+k}_{k,a,2ar+\beta}\left(\frac{x+y}{k}\right) \qquad (2.25)$$

<u>**Απόδειξη**</u> **:**

Κατ' αρχήν ισχύει : $\dfrac{(nk+k)_{r,k}}{r!} = \dfrac{k^r\left(\frac{nk+k}{k}\right)_r}{r!} = \dfrac{k^r(n+1)_r}{r!} = \dfrac{k^{r-n}k^n(n+1)_r}{r!} =$

$$= \frac{k^{r-n}k^n\Gamma(n+r+1)}{\Gamma(n+1)r!} \overset{\substack{\text{ιδιοτητα (11)} \\ \text{της Γαμμα} \\ \text{συναρτησης}}}{=} \frac{k^{r-n}k^n(r+1)_n}{n!} = \frac{k^{r-n}k^n\left(\frac{rk+k}{k}\right)_n}{n!} \overset{(2.3)}{=} \frac{k^{r-n}(rk+k)_{n,k}}{n!}$$

Ξεκινώντας από το πρώτο μέλος της σχέσης (2.25) και λαμβάνοντας υπόψιν την προηγούμενη σχέση :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n(-xy)^r(nk+k)_{r,k}}{\Gamma_k(2ar+an+\beta)r!} = \sum_{r=0}^{\infty}(-xyk)^r \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x+y}{k}\right)^n (rk+k)_{n,k}}{\Gamma_k(2ar+an+\beta)n!} =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty}(-xyk)^r\, E^{rk+k}_{k,a,2ar+\beta}\left(\frac{x+y}{k}\right)$$

που είναι το ζητούμενο αποτέλεσμα .

III. Προτάσεις και θεωρήματα για τις k -Συναρτήσεις

Θεώρημα 3.1.1 [6] **:** Έστω $x, y > k > 0$ και $x + y \neq k$. Τότε η συνάρτηση $B_k(x, y)$ ικανοποιεί την παρακάτω ανίσωση :

$$\frac{2^{2-\frac{x+y}{k}}}{x+y-k} < B_k(x,y) < \frac{2-2^{2-\frac{x+y}{k}}}{x+y-k} \tag{3.1}$$

Για $0 < x, y < k$ και $x + y \neq k$

$$\frac{2-2^{2-\frac{x+y}{k}}}{x+y-k} < B_k(x,y) < \frac{2^{2-\frac{x+y}{k}}}{x+y-k} \qquad (3.1)'$$

__Απόδειξη__ **:**

Για την απόδειξη των ανισοτήτων (3.1) θα χρειαστούμε το κάτωθι λήμμα :

Λήμμα 3.1.1 : Έστω $x, y > 1$ και $x + y \neq 1$. Τότε η συνάρτηση $B(x, y)$ ικανοποιεί την παρακάτω ανίσωση :

$$\frac{2^{2-(x+y)}}{x+y-1} < B(x,y) < \frac{2-2^{2-(x+y)}}{x+y-1} \tag{3.2}$$

Για $0 < x, y < 1$ και $x + y \neq 1$

$$\frac{2-2^{2-(x+y)}}{x+y-1} < B(x,y) < \frac{2^{2-(x+y)}}{x+y-1} \qquad (3.2)'$$

__Απόδειξη__ **:**

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt = \int_0^{1/2} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt + \int_{1/2}^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$$

- Για $0 < t < 1/2$, τότε $t < 1 - t$:

$$\int_0^{1/2} t^{x+y-2}\,dt < \int_0^{1/2} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt < \int_0^{1/2} (1-t)^{x+y-2}\,dt$$

$$\int_0^{1/2} t^{x+y-2}\,dt = \left[\frac{t^{x+y-1}}{x+y-1}\right]_0^{1/2} = \frac{2^{1-(x+y)}}{x+y-1}$$

$$\int_0^{1/2}(1-t)^{x+y-2}\,dt = \left[-\frac{(1-t)^{x+y-1}}{x+y-1}\right]_0^{1/2} = \frac{1-2^{1-(x+y)}}{x+y-1}$$

Άρα η ανίσωση γίνεται :

$$\frac{2^{1-(x+y)}}{x+y-1} < \int_0^{1/2} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt < \frac{1-2^{1-(x+y)}}{x+y-1}$$

- Για $1/2 < t < 1$, τότε $1-t < t$:

$$\int_{1/2}^{1}(1-t)^{x+y-2}\,dt < \int_{1/2}^{1} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt < \int_{1/2}^{1} t^{x+y-2}\,dt$$

$$\int_{1/2}^{1}(1-t)^{x+y-2}\,dt = \left[-\frac{(1-t)^{x+y-1}}{x+y-1}\right]_{1/2}^{1} = \frac{2^{1-(x+y)}}{x+y-1}$$

$$\int_{1/2}^{1} t^{x+y-2}\,dt = \left[\frac{t^{x+y-1}}{x+y-1}\right]_{1/2}^{1} = \frac{1-2^{1-(x+y)}}{x+y-1}$$

Άρα η ανίσωση γίνεται :

$$\frac{2^{1-(x+y)}}{x+y-1} < \int_{1/2}^{1} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt < \frac{1-2^{1-(x+y)}}{x+y-1}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των παραπάνω σχέσεων :

$$\frac{2^{1-(x+y)}}{x+y-1} < \int_0^{1/2} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt < \frac{1-2^{1-(x+y)}}{x+y-1}$$

$$\frac{2^{1-(x+y)}}{x+y-1} < \int_{1/2}^{1} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt < \frac{1-2^{1-(x+y)}}{x+y-1}$$

Συνεπώς ,

$$\frac{2^{1-(x+y)}}{x+y-1} + \frac{2^{1-(x+y)}}{x+y-1} < \int_0^{1/2} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt + \int_{1/2}^{1} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt < \frac{1-2^{1-(x+y)}}{x+y-1} + \frac{1-2^{1-(x+y)}}{x+y-1}$$

Τελικά , $$\frac{2^{2-(x+y)}}{x+y-1} < B(x,y) < \frac{2-2^{2-(x+y)}}{x+y-1}$$

Ομοίως προκύπτει η αντίστροφη ανισότητα για $0 < x, y < 1$.

<u>Απόδειξη Θεωρήματος 3.1.1</u> :

Αντικαθιστούμε όπου x το $\frac{x}{k}$ και όπου y το $\frac{y}{k}$ στη σχέση (3.2) :

$$\frac{2^{2-\frac{(x+y)}{k}}}{\frac{x+y}{k}-1} < B\left(\frac{x}{k},\frac{y}{k}\right) < \frac{2-2^{2-\frac{(x+y)}{k}}}{\frac{x+y}{k}-1} \Rightarrow \frac{2^{2-\frac{(x+y)}{k}}k}{x+y-k} < kB_k(x,y) < \frac{\left(2-2^{2-\frac{(x+y)}{k}}\right)k}{x+y-k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2^{2-\frac{(x+y)}{k}}}{x+y-k} < B_k(x,y) < \frac{2-2^{2-\frac{(x+y)}{k}}}{x+y-k}$$

Ομοίως προκύπτει η αντίστροφη ανισότητα για $0 < x, y < k$.

Πόρισμα 3.1.1 [6] **:** Έστω $k > 0$. Τότε η συνάρτηση $B_k(x,y)$ ικανοποιεί την παρακάτω ανίσωση :

$$\frac{2^{1-\frac{x+y}{k}}}{x} < B_k(x,y) < \frac{2-2^{1-\frac{x+y}{k}}}{x} \qquad (3.3)$$

ή

$$\frac{2^{1-\frac{x+y}{k}}}{y} < B_k(x,y) < \frac{2-2^{1-\frac{x+y}{k}}}{y} \qquad (3.4)$$

<u>Απόδειξη</u> :

Αντικαθιστούμε όπου x το $x+k$ στη σχέση (3.1)΄ :

$$\frac{2^{2-\frac{x+k+y}{k}}}{x+k+y-k} < B_k(x+k,y) < \frac{2-2^{2-\frac{x+k+y}{k}}}{x+k+y-k} \Rightarrow$$

Από την ιδιότητα (5) της k -Βήτα συνάρτησης :

$$\Rightarrow \frac{2^{1-\frac{x+y}{k}}}{x+y} < \frac{x}{x+y}B_k(x,y) < \frac{2-2^{1-\frac{x+y}{k}}}{x+y} \Rightarrow \frac{2^{1-\frac{x+y}{k}}}{x} < B_k(x,y) < \frac{2-2^{1-\frac{x+y}{k}}}{x}$$

Αν θέσουμε όπου y το $y+k$ στη σχέση (3.1) :

$$\frac{2^{2-\frac{x+k+y}{k}}}{x+k+y-k} < B_k(x,y+k) < \frac{2-2^{2-\frac{x+k+y}{k}}}{x+k+y-k}$$

Από την ιδιότητα (6) της k -Βήτα συνάρτησης :

$$\Rightarrow \frac{2^{1-\frac{x+y}{k}}}{x+y} < \frac{y}{x+y}B_k(x,y) < \frac{2-2^{2-\frac{x+y}{k}}}{x+y} \Rightarrow \frac{2^{1-\frac{x+y}{k}}}{y} < B_k(x,y) < \frac{2-2^{1-\frac{x+y}{k}}}{y}$$

Θεώρημα 3.1.2 [6] **:** Για το γινόμενο των συναρτήσεων $\Gamma_k(x)\Gamma_k(1-x)$ με $k<x<1$ και $0<k<1$ ισχύουν οι παρακάτω ανισώσεις :

$$\frac{\left(\frac{2}{k}\right)^{1-\frac{1}{k}}\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)}{1-x}<\Gamma_k(x)\Gamma_k(1-x)<\frac{\left(\frac{2}{k}\right)^{1-\frac{1}{k}}\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)\left(2^{\frac{1}{k}-1}-1\right)}{1-x} \qquad (3.5)$$

<u>**Απόδειξη**</u> **:**

Θέτουμε όπου y το $k+1-x$ στις ανισότητες (3.1) οπότε προκύπτει :

$$\frac{2^{2-\frac{x+k+1-x}{k}}}{x+k+1-x-k}<B_k(x,k+1-x)<\frac{2-2^{2-\frac{x+k+1-x}{k}}}{x+k+1-x-k}\Rightarrow$$

$$2^{2-\frac{k+1}{k}}<B_k(x,k+1-x)<2-2^{2-\frac{k+1}{k}}\Rightarrow 2^{1-\frac{1}{k}}<B_k(x,k+1-x)<2-2^{1-\frac{1}{k}}\Rightarrow$$

$$2^{1-\frac{1}{k}}<\frac{\Gamma_k(x)\Gamma_k(k+1-x)}{\Gamma_k(k+1)}<2-2^{1-\frac{1}{k}}\Rightarrow 2^{1-\frac{1}{k}}<\frac{\Gamma_k(x)(1-x)\Gamma_k(1-x)}{\Gamma_k(1)}<2-2^{1-\frac{1}{k}}\Rightarrow$$

$$2^{1-\frac{1}{k}}<\frac{\Gamma_k(x)(1-x)\Gamma_k(1-x)}{k^{\frac{1}{k}-1}\Gamma_k\left(\frac{1}{k}\right)}<2-2^{1-\frac{1}{k}}\Rightarrow$$

$$\frac{2^{1-\frac{1}{k}}k^{\frac{1}{k}-1}\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)}{1-x}<\Gamma_k(x)\Gamma_k(1-x)<\frac{\left(2-2^{1-\frac{1}{k}}\right)k^{\frac{1}{k}-1}\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)}{1-x}$$

Δηλαδή ,
$$\frac{\left(\frac{2}{k}\right)^{1-\frac{1}{k}}\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)}{1-x}<\Gamma_k(x)\Gamma_k(1-x)<\frac{\left(\frac{2}{k}\right)^{1-\frac{1}{k}}\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)\left(2^{\frac{1}{k}-1}-1\right)}{1-x}$$

Πρόταση 3.1.3 [2] **:** Η παράγωγος ως προς k της συνάρτησης $\Gamma_k(x)$ δίνεται από την ισότητα :

$$\partial_k\Gamma_k(x+1)=\frac{1}{k^2}\Gamma_k(x+k+1)-\frac{1}{k}\int_0^\infty t^{x+k}\log(t)e^{-\frac{t^k}{k}}dt\,,\qquad \operatorname{Re}x>0 \qquad (3.6)$$

<u>**Απόδειξη**</u> **:**

Παραγωγίζοντας την έκφραση $\Gamma_k(x+1)=\int_0^\infty t^x e^{-\frac{t^k}{k}}dt$, προκύπτει :

$$\partial_k \Gamma_k(x+1) = -\int_0^\infty t^x e^{-\frac{t^k}{k}} \left(\frac{t^k \log(t)k - t^k}{k^2} \right) dt = -\frac{1}{k}\int_0^\infty t^{x+k} e^{-\frac{t^k}{k}} \log(t) + \frac{1}{k^2}\int_0^\infty t^{x+k} e^{-\frac{t^k}{k}} dt =$$

$$= \frac{1}{k^2}\Gamma_k(x+k+1) - \frac{1}{k}\int_0^\infty t^{x+k} \log(t) e^{-\frac{t^k}{k}} dt$$, που είναι το ζητούμενο .

Θεώρημα 3.1.4 [2] **:** Έστω $f(x)$ θετικά ορισμένη συνάρτηση στο $(0,\infty)$. Θεωρούμε ότι $f(k)=1$, $k>0$, $f(x+k)=xf(x)$ και $f(x)$ λογαριθμικά κυρτή , τότε $f(x)=\Gamma_k(x)$, $\forall x \in (0,\infty)$.

<u>**Απόδειξη**</u> **:**

Για να δείξουμε ότι $f(x)=\Gamma_k(x)$ αρκεί να δείξουμε , χρησιμοποιώντας την (2.5) :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(x)_{n,k} f(x)}{n! k^n (nk)^{\frac{x}{k}-1}} = 1 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \log\left(\frac{(x)_{n,k}}{n! k^n (nk)^{\frac{x}{k}-1}} \right) + \log(f(x)) = 0$$

Εφόσον όμως $f(x)$ είναι λογαριθμικά κυρτή ισχύει :

$$\frac{1}{k}\log\left(\frac{f(nk+k)}{f(nk)}\right) \le \frac{1}{x}\log\left(\frac{f(nk+k+x)}{f(nk+k)}\right) \le \frac{1}{k}\log\left(\frac{f(nk+2k)}{f(nk+k)}\right)$$

Εφόσον επιπλέον ισχύει η σχέση : $f(x+k)=xf(x)$, έχουμε :

$$\frac{1}{k}\log\left(\frac{nkf(nk)}{f(nk)}\right) \le \frac{1}{x}\log\left(\frac{f(nk+k+x)}{f(nk+k)}\right) \le \frac{1}{k}\log\left(\frac{f(nk+2k)}{f(nk+k)}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{k}\log\left(\frac{nkf(nk)}{f(nk)}\right) \le \frac{1}{x}\log\left(\frac{f(nk+k+x)}{f(nk+k)}\right) \le \frac{1}{k}\log\left(\frac{(nk+k)f(nk+k)}{f(nk+k)}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{x}{k}\log(nk) \le \log\left(\frac{f(nk+k+x)}{f(nk+k)}\right) \le \frac{x}{k}\log((n+1)k) \Rightarrow$$

$$\log(nk)^{\frac{x}{k}} \le \log\left(\frac{f(nk+k+x)}{f(nk+k)}\right) \le \log\left((n+1)k\right)^{\frac{x}{k}} \Rightarrow$$

$$\log(nk)^{\frac{x}{k}} \le \log\left(\frac{(x+nk)(x+(n-1)k)\cdots xf(x)}{n!k^n}\right) \le \log\left((n+1)k\right)^{\frac{x}{k}} \Rightarrow$$

$$\log\left(\frac{nk}{nk}\right)^{\frac{x}{k}} \le \log\left(\frac{(x+nk)(x+(n-1)k)\cdots xf(x)}{(nk)^{\frac{x}{k}} n!k^n}\right) \le \log\left(\frac{(n+1)k}{nk}\right)^{\frac{x}{k}} \Rightarrow$$

$$0 \le \log\left(\frac{(x+nk)(x+(n-1)k)\cdots xf(x)}{(nk)^{\frac{x}{k}} n! k^n}\right) \le \log\left(\frac{(n+1)k}{nk}\right)^{\frac{x}{k}} \Rightarrow$$

$$0 \le \lim_{n\to\infty}\log\left(\frac{(x+nk)(x+(n-1)k)\cdots xf(x)}{(nk)^{\frac{x}{k}} n! k^n}\right) \le \lim_{n\to\infty}\log\left(\frac{(n+1)k}{nk}\right)^{\frac{x}{k}} \Rightarrow$$

$$0 \le \lim_{n\to\infty}\log\left(\frac{(x+nk)(x+(n-1)k)\cdots xf(x)}{(nk)^{\frac{x}{k}} n! k^n}\right) \le \frac{x}{k}\log 1 \Rightarrow$$

$$0 \le \lim_{n\to\infty}\log\left(\frac{(x+nk)(x+(n-1)k)\cdots xf(x)}{(nk)^{\frac{x}{k}} n! k^n}\right) \le 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty}\log\left(\frac{(x+nk)(x+(n-1)k)\cdots x}{(nk)^{\frac{x}{k}} n! k^n}\right) + \log(f(x)) = 0$$

Επομένως , $f(x) = \Gamma_k(x)$.

Θεώρημα 3.1.5 [2, 6] **:** Η συνάρτηση $\psi(k,x) = \ln\Gamma_k(x)$, για $x > 0$ είναι λύση της γραμμικής μερικής διαφορικής εξίσωσης :

$$-kx^2\partial_x^2\psi + k^3\partial_k^2\psi + 2k^2\partial_k\psi = -x - k \qquad (3.7)$$

<u>Απόδειξη</u> :

Λογαριθμίζουμε τη σχέση (2.6) οπότε :

$$\Gamma_k(x) = k^{\frac{x}{k}-1}\Gamma\left(\frac{x}{k}\right)$$

$$\ln\Gamma_k(x) = \ln\left[k^{\frac{x}{k}-1}\Gamma\left(\frac{x}{k}\right)\right] \Rightarrow \ln\Gamma_k(x) = \left(\frac{x}{k}-1\right)\ln k + \ln\Gamma\left(\frac{x}{k}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \psi(k,x) = \ln k^{\frac{x}{k}-1} + \ln\Gamma\left(\frac{x}{k}\right)$$

$$\partial_x^2\psi(k,x) = \frac{1}{k}\psi'\left(\frac{x}{k}\right) \Rightarrow -kx^2\partial_x^2\psi(k,x) = -x^2\psi'\left(\frac{x}{k}\right)$$

$$\partial_k \psi(k,x) = -\frac{x}{k^2}\ln k + \frac{x}{k^2} - \frac{1}{k} + \frac{\partial}{\partial k}\ln\Gamma\left(\frac{x}{k}\right) = -\frac{x}{k^2}\ln k + \frac{x}{k^2} - \frac{1}{k} - \frac{x}{k^2}\psi\left(\frac{x}{k}\right)$$

$$\Rightarrow 2k^2\partial_k \psi(k,x) = -2x\ln k + 2x - 2k - 2x\psi\left(\frac{x}{k}\right)$$

$$\partial_k^2 \psi(k,x) = \frac{2x}{k^3}\ln k - \frac{3x}{k^3} + \frac{1}{k^2} - \frac{2x}{k^3}\psi\left(\frac{x}{k}\right) + \frac{x^2}{k^3}\psi'\left(\frac{x}{k}\right)$$

$$\Rightarrow k^3\partial_k^2 \psi(k,x) = 2x\ln k - 3x + k - 2k\psi\left(\frac{x}{k}\right) + x^2\psi'\left(\frac{x}{k}\right)$$

Με αντικατάσταση των ανωτέρω σχέσεων στην δοθείσα σχέση παίρνουμε το ζητούμενο.

Θεώρημα 3.1.6 [6] **:** Έστω η συνάρτηση $\psi(k,x) = \ln\Gamma_k(x)$, για $x,k > 0$. Τότε η συνάρτηση $\partial_x \psi(x)$ είναι πλήρως μονότονη .

<u>Απόδειξη</u> :

Λογαριθμίζουμε τη σχέση (2.6) οπότε :

$$\Gamma_k(x) = k^{\frac{x}{k}-1}\Gamma\left(\frac{x}{k}\right)$$

$$\ln\Gamma_k(x) = \ln\left[k^{\frac{x}{k}-1}\Gamma\left(\frac{x}{k}\right)\right] \Rightarrow \psi(k,x) = \ln k^{\frac{x}{k}-1} + \ln\Gamma\left(\frac{x}{k}\right) \Rightarrow$$

$$\psi(k,x) = \left(\frac{x}{k}-1\right)\ln k + \ln\Gamma\left(\frac{x}{k}\right) \Rightarrow \partial_x \psi(k,x) = \frac{1}{k}\ln k + \frac{1}{k}\psi\left(\frac{x}{k}\right)$$

$$\partial_x^2 \psi(k,x) = \frac{1}{k}\psi'\left(\frac{x}{k}\right) \qquad (3.8)$$

$$\partial_x^3 \psi(k,x) = \frac{1}{k^2}\psi''\left(\frac{x}{k}\right)$$

Επαγωγικά βρίσκουμε : $\partial_x^{(n+1)} \psi(k,x) = \dfrac{1}{k^n}\psi^{(n)}\left(\dfrac{x}{k}\right)$

Αφού $\psi_k(x) = \partial_x \psi(k,x)$, τότε $\psi_k^{(n)}(x) = \dfrac{1}{k^n}\psi^{(n)}\left(\dfrac{x}{k}\right)$, η οποία είναι πλήρως μονότονη για $x > 0$ αφού $\partial_x \psi(x)$ είναι πλήρως μονότονη για $x > 0$.

Θεώρημα 3.1.7 [2, 6]**:** Η k-Γάμμα συνάρτηση $\Gamma_k(x)$ είναι λογαριθμικά κυρτή στο $(0,\infty)$.

<u>**Απόδειξη**</u> **:**

Από τη σχέση (3.8) συμπεραίνουμε άμεσα ότι η k-Γάμμα συνάρτηση $\Gamma_k(x)$ είναι λογαριθμικά κυρτή στο $(0,\infty)$.

Θεώρημα 3.1.8 (γενίκευση του τύπου διπλασιασμού Legendre για την $\Gamma(x)$ **)** [6] **:**

Η k-Γάμμα συνάρτηση $\Gamma_k(x)$ ικανοποιεί την παρακάτω ισότητα :

$$\Gamma_k(2x) = \sqrt{\frac{k}{\pi}}\,2^{2\frac{x}{k}-1}\Gamma_k(x)\Gamma_k\left(x+\frac{k}{2}\right) \quad , \quad \text{για} \quad \operatorname{Re} x > 0 \quad , \quad x \in C \qquad (3.9)$$

<u>**Απόδειξη**</u> **:**

Αν στη σχέση $B_k(x,x) = \frac{1}{k}\int_0^1 t^{\frac{x}{k}-1}(1-t)^{\frac{x}{k}-1}dt$ θέσουμε $t = \frac{1+r}{2}$ προκύπτει :

$$B_k(x,x) = \frac{1}{k}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+r}{2}\right)^{\frac{x}{k}-1}\left(1-\frac{1+r}{2}\right)^{\frac{x}{k}-1}dr \Rightarrow B_k(x,x) = \frac{2}{2^{2\frac{x}{k}-1}k}\int_0^1 (1-r^2)^{\frac{x}{k}-1}dr$$

Αν τώρα θέσουμε $r^2 = u$ προκύπτει :

$$\Rightarrow B_k(x,x) = \frac{1}{2^{2\frac{x}{k}-1}k}\int_0^1 u^{\frac{-1}{2}}(1-u)^{\frac{x}{k}-1}du = \frac{1}{2^{2\frac{x}{k}-1}k}\int_0^1 u^{\frac{1}{2}-1}(1-u)^{\frac{x}{k}-1}du = \frac{1}{2^{2\frac{x}{k}-1}k}B\left(\frac{x}{k},\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2^{2\frac{x}{k}-1}}B_k\left(x,\frac{k}{2}\right) \Rightarrow B_k(x,x) = \frac{1}{2^{2\frac{x}{k}-1}}\,\frac{\Gamma_k(x)\Gamma_k\left(\frac{k}{2}\right)}{\Gamma_k\left(x+\frac{k}{2}\right)}$$

Από την ιδιότητα (3) της k-Γάμμα συνάρτησης $\Gamma_k(x)$ για $a = \frac{1}{2}$ ξέρουμε $\Gamma_k\left(\frac{k}{2}\right) = k^{\frac{-1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{k}}\sqrt{\pi}$ και επειδή επίσης $B_k(x,x) = \frac{\Gamma_k(x)\Gamma_k(x)}{\Gamma_k(2x)}$, η ανωτέρω σχέση γίνεται :

$$\frac{\Gamma_k(x)\Gamma_k(x)}{\Gamma_k(2x)}=\frac{1}{2^{2\frac{x}{k}-2}}\frac{\Gamma_k(x)\sqrt{\frac{\pi}{k}}}{\Gamma_k\left(x+\frac{k}{2}\right)}\Rightarrow\frac{\Gamma_k(x)}{\Gamma_k(2x)}=\frac{1}{2^{2\frac{x}{k}-2}}\frac{\sqrt{\frac{\pi}{k}}}{\Gamma_k\left(x+\frac{k}{2}\right)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\Gamma_k(2x)=\sqrt{\frac{k}{\pi}}2^{2\frac{x}{k}-2}\Gamma_k(x)\Gamma_k\left(x+\frac{k}{2}\right)$$

Θεώρημα 3.1.11 [8] **:** Ισχύει η παρακάτω ισότητα :

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{\frac{k}{2\pi}}B_k(ax+c,bx+d)\right]^{\frac{1}{x}}=\left[\frac{a^a\cdot b^b}{(a+b)^{a+b}}\right]^{\frac{1}{k}},\ a,b>0,\ c,d\geq 0 \tag{3.10}$$

__**Απόδειξη**__ **:**

Λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση : $\Gamma(ax+b)=\sqrt{2\pi}e^{-ax}(ax)^{ax+b-\frac{1}{2}}$ [1] και τη (2.6)

η k -Βήτα συνάρτηση παίρνει την παρακάτω μορφή :

$$B_k(ax+c,bx+d)=\frac{\Gamma_k(ax+c)\Gamma_k(bx+d)}{\Gamma_k\left[(a+b)x+c+d\right]}=\frac{k^{\frac{ax+c}{k}-1}\cdot k^{\frac{bx+d}{k}-1}\Gamma\left(\frac{ax+c}{k}\right)\Gamma\left(\frac{bx+d}{k}\right)}{k^{\frac{(a+b)x+c+d}{k}-1}\Gamma\left(\frac{(a+b)x+c+d}{k}\right)}=$$

$$=\frac{1}{k}\frac{\Gamma\left(\frac{ax}{k}+\frac{c}{k}\right)\Gamma\left(\frac{bx}{k}+\frac{d}{k}\right)}{\Gamma\left(\frac{(a+b)x}{k}+\frac{c+d}{k}\right)}=\frac{1}{k}\left[\frac{\sqrt{2\pi}e^{-\frac{a}{k}x}\left(\frac{ax}{k}\right)^{\frac{ax+c}{k}-\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}e^{-\frac{b}{k}x}\left(\frac{bx}{k}\right)^{\frac{bx+d}{k}-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}e^{-\frac{(a+b)}{k}x}\left(\left(\frac{a+b}{k}\right)x\right)^{\frac{ax+b}{k}+\frac{c+d}{k}-\frac{1}{2}}}\right]=$$

$$=\frac{1}{k}\left[\frac{\sqrt{2\pi}\left(\frac{ax}{k}\right)^{\frac{ax+c}{k}-\frac{1}{2}}\left(\frac{bx}{k}\right)^{\frac{bx+d}{k}-\frac{1}{2}}}{\left(\left(\frac{a+b}{k}\right)x\right)^{\frac{ax+b}{k}+\frac{c+d}{k}-\frac{1}{2}}}\right]=\sqrt{\frac{2\pi}{k}}\frac{(ax)^{\frac{ax+c}{k}-\frac{1}{2}}(bx)^{\frac{bx+d}{k}-\frac{1}{2}}}{((a+b)x)^{\frac{ax+b}{k}+\frac{c+d}{k}-\frac{1}{2}}}$$

Άρα $\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{\frac{k}{2\pi}}B_k(ax+c,bx+d)\right]^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{(ax)^{\frac{a}{k}+\left(\frac{c}{k}-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x}}(bx)^{\frac{b}{k}+\left(\frac{d}{k}-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x}}}{((a+b)x)^{\frac{a+b}{k}+\left(\frac{c+d}{k}-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x}}}$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{a^{\frac{a}{k}+\left(\frac{c}{k}-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x}} b^{\frac{b}{k}+\left(\frac{d}{k}-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x}}}{(a+b)^{\frac{a+b}{k}+\left(\frac{c+d}{k}-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x}}} x^{\frac{a}{k}+\left(\frac{c}{k}-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x}+\frac{b}{k}+\left(\frac{d}{k}-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x}-\left(\frac{a+b}{k}\right)-\left(\frac{c+d}{k}-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{a^{\frac{a}{k}+\left(\frac{c}{k}-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x}} b^{\frac{b}{k}+\left(\frac{d}{k}-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x}}}{(a+b)^{\frac{a+b}{k}+\left(\frac{c+d}{k}-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x}}} x^{\frac{-1}{2x}}$$

Επειδή $\lim_{x\to\infty}(ax+b)^{\frac{1}{x}} = 1$, $a>0$, $b \geq 0$ και $\lim_{x\to\infty} x^{\frac{-1}{2x}} = \lim_{x\to\infty} e^{-\frac{1}{2x}\ln x} = 1$

θα ισχύει : $\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{\frac{k}{2\pi}} B_k(ax+c, bx+d)\right]^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{a^{\frac{a}{k}} b^{\frac{b}{k}}}{(a+b)^{\frac{a+b}{k}}}$

Θεώρημα 3.1.12 [8] : Ισχύει η παρακάτω ισότητα :

$$\lim_{x\to\infty}\left\{ x^{\frac{a-b}{k}} \left[\frac{\Gamma_k(bx+k)}{\Gamma_k(ax+k)}\right]^{\frac{1}{x}} \right\} = \left[\frac{b^b}{a^a} e^{a-b}\right]^{\frac{1}{k}} \quad , \; x, k, \; a, b > 0 \qquad (3.11)$$

<u>**Απόδειξη**</u> :

Λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση : $\Gamma(ax+b) = \sqrt{2\pi} e^{-ax} (ax)^{ax+b-\frac{1}{2}}$ [1] και τη (2.6) προκύπτει :

$$[\Gamma_k(ax+k)]^{\frac{1}{x}} = \left[k^{\frac{ax+k}{k}-1} \Gamma\left(\frac{ax}{k}+1\right)\right]^{\frac{1}{x}} = k^{\frac{a}{k}} \left[\Gamma\left(\frac{ax}{k}+1\right)\right]^{\frac{1}{x}} =$$

$$= k^{\frac{a}{k}} \left[\sqrt{2\pi} e^{-\frac{ax}{k}} \left(\frac{ax}{k}\right)^{\frac{ax}{k}+\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{x}} = k^{\frac{a}{k}} (2\pi)^{\frac{1}{2x}} e^{-\frac{a}{k}} \left(\frac{ax}{k}\right)^{\frac{a}{k}+\frac{1}{2x}}$$

Ομοίως $[\Gamma_k(bx+k)]^{\frac{1}{x}} = k^{\frac{b}{k}} (2\pi)^{\frac{1}{2x}} e^{-\frac{b}{k}} \left(\frac{bx}{k}\right)^{\frac{b}{k}+\frac{1}{2x}}$

Με διαίρεση κατά μέλη των δυο παραπάνω σχέσεων προκύπτει :

$$\frac{[\Gamma_k(bx+k)]^{\frac{1}{x}}}{[\Gamma_k(ax+k)]^{\frac{1}{x}}} = \frac{k^{\frac{b}{k}} (2\pi)^{\frac{1}{2x}} e^{-\frac{b}{k}} \left(\frac{bx}{k}\right)^{\frac{b}{k}+\frac{1}{2x}}}{k^{\frac{a}{k}} (2\pi)^{\frac{1}{2x}} e^{-\frac{a}{k}} \left(\frac{ax}{k}\right)^{\frac{a}{k}+\frac{1}{2x}}} = \frac{k^{\frac{b}{k}} e^{-\frac{b}{k}} k^{\frac{-b}{k}-\frac{1}{2x}} (bx)^{\frac{b}{k}+\frac{1}{2x}}}{k^{\frac{a}{k}} e^{-\frac{a}{k}} k^{\frac{-a}{k}-\frac{1}{2x}} (ax)^{\frac{a}{k}+\frac{1}{2x}}} = \frac{e^{-\frac{b}{k}} b^{\frac{b}{k}+\frac{1}{2x}} x^{\frac{b}{k}}}{e^{-\frac{a}{k}} a^{\frac{a}{k}+\frac{1}{2x}} x^{\frac{a}{k}}} =$$

$$= \frac{e^{-\frac{b}{k}} b^{\frac{b}{k}} b^{\frac{1}{2x}} x^{\frac{b}{k}}}{e^{-\frac{a}{k}} a^{\frac{a}{k}} a^{\frac{1}{2x}} x^{\frac{a}{k}}} = \frac{b^{\frac{1}{2x}} \left(\frac{bx}{e} \right)^{\frac{b}{k}}}{a^{\frac{1}{2x}} \left(\frac{ax}{e} \right)^{\frac{a}{k}}}$$

Άρα $\lim_{x\to\infty} x^{\frac{a-b}{k}} \left[\frac{\Gamma_k(bx+k)}{\Gamma_k(ax+k)} \right]^{\frac{1}{x}} = \frac{b^{\frac{b}{k}} e^{\frac{a}{k}}}{a^{\frac{a}{k}} e^{\frac{b}{k}}}$, αφού $\lim_{x\to\infty} \left[\frac{b}{a} \right]^{\frac{1}{2x}} = 1$

Θεώρημα 3.1.13 : Η συνάρτηση $\Gamma_k(x)$, $x \geq k$, $k > 0$ και $n \in \aleph^+$ ικανοποιεί τις παρακάτω ανισότητες :

$$\left(\frac{x+kn}{k+kn} \right)^{\frac{x}{k}+n} \frac{k^n n!}{(x)_{n,k}} e^{\frac{1}{k}(x-k)[H(n)-1+\ln k-\gamma]} \leq \Gamma_k(x) \leq \left(\frac{x+kn}{k+kn} \right)^{\frac{x}{k}+n} \frac{k^{n+1}(n+1)!}{(x)_{n+1,k}} e^{\frac{1}{k}(x-k)[H(n+1)-1+\ln k-\gamma]} \tag{3.12}$$

όπου $H(n) = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$ και $\gamma = 0.57721...$ η σταθερά του Euler .

Η ισότητα ισχύει για $x = k$.

<u>**Απόδειξη**</u> **:**

Από τη σχέση (2.11) για $n = 1$ έχουμε : $\psi_k'(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(x+ik)^2}$, $x > 0$

$$\Rightarrow \psi_k'(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{(x+ik)^2} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(x+kn+ki)^2}$$

Για δεδομένη αυστηρώς φθίνουσα , θετική συνάρτηση με $\lim_{t\to\infty} g(t) = 0$ ισχύει η σχέση:

$$\int_0^{\infty} g(t)dt < \sum_{i=0}^{\infty} g(i) < g(0) + \int_0^{\infty} g(t)dt$$

Συνεπώς , αν θεωρήσουμε ότι $g(t) = \frac{1}{(x+kn+kt)^2}$ και $\int_0^{\infty} g(t)dt = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{x+kn} \right)$ τότε για την $\psi_k'(x)$ ισχύει :

$$\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{(x+ik)^2}+\frac{1}{k}\left(\frac{1}{x+kn}\right)<\psi_k^{'}(x)<\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{(x+ki)^2}+\frac{1}{k}\left(\frac{1}{x+kn}\right)$$

Ολοκληρώνοντας την ανωτέρω σχέση από k έως x δεδομένου ότι η σειρά συγκλίνει προκύπτει :

$$\int_k^x\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{(t+ik)^2}dt+\frac{1}{k}\int_k^x\frac{1}{t+kn}dt<\int_k^x\psi_k^{'}(t)dt<\int_k^x\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{(t+ki)^2}dt+\frac{1}{k}\int_k^x\frac{1}{t+kn}dt\Rightarrow$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}\int_k^x\frac{1}{(t+ik)^2}dt+\frac{1}{k}\ln[t+nk]_k^x<\psi_k(x)-\psi_k(k)<\sum_{i=0}^{n}\int_k^x\frac{1}{(t+ki)^2}dt+\frac{1}{k}\ln[t+nk]_x^k\Rightarrow$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}\left[-\frac{1}{t+ik}\right]_k^x+\frac{1}{k}\ln[t+nk]_k^x<\psi_k(x)-\psi_k(k)<\sum_{i=0}^{n}\left[-\frac{1}{t+ki}\right]_k^x+\frac{1}{k}\ln[t+nk]_x^k\Rightarrow$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}\left[-\frac{1}{x+ik}+\frac{1}{k+ki}\right]+\frac{1}{k}\big[\ln[x+nk]-\ln[k+kn]\big]<\psi_k(x)-\psi_k(k)<$$

$$<\sum_{i=0}^{n}\left[-\frac{1}{x+ki}+\frac{1}{k+ki}\right]+\frac{1}{k}\big[\ln[x+kn]-\ln[k+kn]\big]\Rightarrow$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}\left[-\frac{1}{x+ki}\right]+\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{i+1}+\frac{1}{k}\ln\left[\frac{x+nk}{k+kn}\right]<\psi_k(x)-\psi_k(k)<$$

$$<\sum_{i=0}^{n}\left[-\frac{1}{x+ki}\right]+\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{k}\left[\frac{1}{i+1}\right]+\frac{1}{k}\ln\left[\frac{x+kn}{k+kn}\right]\Rightarrow$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}\left[-\frac{1}{x+ki}\right]+\frac{1}{k}H(n)+\frac{1}{k}\ln\left[\frac{x+nk}{k+kn}\right]<\psi_k(x)-\psi_k(k)<$$

$$<\sum_{i=0}^{n}\left[-\frac{1}{x+ki}\right]+\frac{1}{k}H(n+1)+\frac{1}{k}\ln\left[\frac{x+kn}{k+kn}\right]$$

Ολοκληρώνοντας ξανά την παραπάνω ανίσωση από k έως x δεδομένου του ότι η σειρά συγκλίνει προκύπτει :

$$\sum_{i=0}^{n-1}\int_k^x\left[-\frac{1}{t+ki}\right]dt+\frac{1}{k}\int_k^x H(n)dt+\frac{1}{k}\int_k^x\ln\left[\frac{t+nk}{k+kn}\right]dt<\int_k^x\big[\psi_k(t)-\psi_k(k)\big]dt<$$

$$<\sum_{i=0}^{n}\int_k^x\left[-\frac{1}{t+ki}\right]dt+\frac{1}{k}\int_k^x H(n+1)dt+\frac{1}{k}\int_k^x\ln\left[\frac{t+kn}{k+kn}\right]dt$$

Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα $\frac{1}{k}\int_k^x\ln\left[\frac{t+nk}{k+kn}\right]dt$ θέτοντας $\frac{t+kn}{k+kn}=e^w$ και

$\frac{dt}{k+kn}=e^w dw\Rightarrow dt=(k+kn)e^w dw$, οπότε :

$$\frac{1}{k}\int_k^x \ln\left[\frac{t+nk}{k+kn}\right]dt=\frac{1}{k}(k+kn)\int_0^{\ln\left[\frac{x+kn}{k+kn}\right]} we^w dw=\frac{1}{k}(k+kn)\left[e^w w-e^w\right]_0^{\ln\left[\frac{x+kn}{k+kn}\right]}$$

$$=\frac{1}{k}(k+kn)\left[e^w[w-1]\right]_0^{\ln\left[\frac{x+kn}{k+kn}\right]}=\frac{1}{k}(k+kn)\left\{\left[\frac{x+kn}{k+kn}\right]\left[\ln\frac{x+kn}{k+kn}-1\right]+1\right\}=$$

$$\frac{1}{k}\left[(x+kn)\ln\left[\frac{x+kn}{k+kn}\right]-(x+kn)+(k+kn)\right]=\frac{1}{k}\left[(x+kn)\ln\left[\frac{x+kn}{k+kn}\right]-(x-k)\right]$$

Τελικά η παραπάνω ανίσωση γίνεται :

$$-\sum_{i=0}^{n-1}\ln\left[\frac{x+ki}{k+ki}\right]+\frac{1}{k}H(n)(x-k)+\frac{1}{k}(x+kn)\ln\left[\frac{x+nk}{k+kn}\right]-\frac{1}{k}(x-k)<\ln\Gamma_k(x)-\psi_k(k)(x-k)$$
$$<-\sum_{i=0}^{n}\ln\left[\frac{x+ki}{k+ki}\right]+\frac{1}{k}H(n+1)(x-k)+\frac{1}{k}(x+kn)\ln\left[\frac{x+kn}{k+kn}\right]-\frac{1}{k}(x-k)\Rightarrow$$

$$-\sum_{i=0}^{n-1}\ln\left[\frac{x+ki}{k+ki}\right]+\frac{1}{k}H(n)(x-k)+\frac{1}{k}(x+kn)\ln\left[\frac{x+nk}{k+kn}\right]-\frac{1}{k}(x-k)+\psi_k(k)(x-k)<\ln\Gamma_k(x)$$
$$<-\sum_{i=0}^{n}\ln\left[\frac{x+ki}{k+ki}\right]+\frac{1}{k}H(n+1)(x-k)+\frac{1}{k}(x+kn)\ln\left[\frac{x+kn}{k+kn}\right]-\frac{1}{k}(x-k)+\psi_k(k)(x-k)\Rightarrow$$

$$\frac{1}{k}(x-k)\left[H(n)-1+k\psi_k(k)\right]-\sum_{i=0}^{n-1}\ln\left[\frac{x+ki}{k+ki}\right]+\frac{1}{k}(x+kn)\ln\left[\frac{x+nk}{k+kn}\right]<\ln\Gamma_k(x)<$$
$$<\frac{1}{k}(x-k)\left[H(n+1)-1+k\psi_k(k)\right]-\sum_{i=0}^{n}\ln\left[\frac{x+ki}{k+ki}\right]+\frac{1}{k}(x+kn)\ln\left[\frac{x+kn}{k+kn}\right]$$

Από τη σχέση (2.10) προκύπτει :

$$e^{\frac{1}{k}(x-k)\left[H(n)-1+\ln k-\gamma\right]}e^{-\sum_{i=0}^{n-1}\ln\left[\frac{x+ki}{k+ki}\right]}e^{\frac{1}{k}(x+kn)\ln\left[\frac{x+nk}{k+kn}\right]}<\Gamma_k(x)<$$
$$<e^{\frac{1}{k}(x-k)\left[H(n+1)-1+\ln k-\gamma\right]}e^{-\sum_{i=0}^{n}\ln\left[\frac{x+ki}{k+ki}\right]}e^{\frac{1}{k}(x+kn)\ln\left[\frac{x+nk}{k+kn}\right]}$$

επιπλέον λόγω του ότι :

$$e^{-\left\{\ln\left(\frac{x}{k}\right)+\ln\left(\frac{x+k}{k+k}\right)+\ln\left(\frac{x+2k}{k+2k}\right)+\ldots+\ln\left(\frac{x+k(n-1)}{k+(n-1)k}\right)\right\}}=\frac{k\cdot 2k\cdot 3k\cdots kn}{x(x+k)(x+2k)\cdots(x+k(n-1))}=\frac{k^n n!}{(x)_{n,k}}\quad ,$$

τελικά έχουμε :

$$\left(\frac{x+kn}{k+kn}\right)^{\frac{x}{k}+n}e^{\frac{1}{k}(x-k)\left[H(n)-1+\ln k-\gamma\right]}\frac{k^n n!}{(x)_{n,k}}\le\Gamma_k(x)\le$$
$$\le\left(\frac{x+kn}{k+kn}\right)^{\frac{x}{k}+n}e^{\frac{1}{k}(x-k)\left[H(n+1)-1+\ln k-\gamma\right]}\frac{k^{n+1}(n+1)!}{(x)_{n+1,k}}\quad ,$$

η οποία είναι η (3.12) .

Τέλος για $x = k$ παίρνουμε :

$$\left(\frac{k+kn}{k+kn}\right)^{\frac{k}{k}+n} e^{\frac{1}{k}(k-k)[H(n)-1+\ln k-\gamma]} \frac{k^n n!}{(k)_{n,k}} \le \Gamma_k(k) \le$$

$$\le \left(\frac{k+kn}{k+kn}\right)^{\frac{k}{k}+n} e^{\frac{1}{k}(k-k)[H(n+1)-1+\ln k-\gamma]} \frac{k^{n+1}(n+1)!}{(k)_{n+1,k}}$$

$$\Rightarrow \frac{k^n n!}{(k)_{n,k}} \le \Gamma_k(k) \le \frac{k^{n+1}(n+1)!}{(k)_{n+1,k}}$$

$\Rightarrow 1 \le \Gamma_k(k) \le 1$ η οποία ισχύει , διότι $\Gamma_k(k) = 1$.

Πόρισμα 3.1.15 : Η συνάρτηση $\Gamma_k(x)$, $x \ge k$, $k > 0$ ικανοποιεί τις παρακάτω ανισότητες :

$$\left(\frac{x+k}{2k}\right)^{\frac{x}{k}+1} \frac{k}{x} e^{\frac{(x-k)}{k}[\ln k-\gamma]} \le \Gamma_k(x) \le \left(\frac{x+k}{2k}\right)^{\frac{x}{k}} \frac{k}{x} e^{\frac{(x-k)}{k}\left[\frac{1}{2}+\ln k-\gamma\right]} \qquad (3.13)$$

όπου $\gamma = 0.57721...$ η σταθερά του Euler .

__Απόδειξη__ :

Οι ανισότητες προκύπτουν από την (3.12) για $n = 1$.

$$\left(\frac{x+k}{k+k}\right)^{\frac{x}{k}+1} \frac{k}{x} e^{\frac{1}{k}(x-k)[H(1)-1+\ln k-\gamma]} \le \Gamma_k(x) \le \left(\frac{x+k}{k+k}\right)^{\frac{x}{k}+1} \frac{2k^2}{(x)_{2,k}} e^{\frac{1}{k}(x-k)[H(2)-1+\ln k-\gamma]} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{x+k}{2k}\right)^{\frac{x}{k}+1} \frac{k}{x} e^{\frac{1}{k}(x-k)[\ln k-\gamma]} \le \Gamma_k(x) \le \left(\frac{x+k}{2k}\right)^{\frac{x}{k}} \frac{k}{x} e^{\frac{1}{k}(x-k)\left[\frac{1}{2}+\ln k-\gamma\right]}$$

Πόρισμα 3.1.16 : Ισχύουν οι παρακάτω ανισότητες για το $\sqrt{\pi}$:

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{5}{2}} \frac{4}{3} e^{\frac{-\gamma}{2}} \le \sqrt{\pi} \le \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{4}{3} e^{\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\gamma\right]} \qquad (3.14)$$

όπου $\gamma = 0.57721...$ η σταθερά του Euler .

__Απόδειξη__ :

Αν στην (3.13) αντικαταστήσουμε όπου x το $\frac{3k}{2}$ και δεδομένου του ότι $\Gamma_k\left(\frac{3k}{2}\right)=k^{\frac{1}{2}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ προκύπτει :

$$\left(\frac{\frac{3k}{2}+k}{2k}\right)^{\frac{3}{2}+1}\frac{2}{3}e^{\frac{(\frac{3k}{2}-k)}{k}[\ln k-\gamma]}\le\Gamma_k\left(\frac{3k}{2}\right)\le\left(\frac{\frac{3k}{2}+k}{2k}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{2}{3}e^{\frac{(\frac{3k}{2}-k)}{k}\left[\frac{1}{2}+\ln k-\gamma\right]}\Rightarrow$$

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{5}{2}}\frac{2}{3}e^{\frac{1}{2}[\ln k-\gamma]}\le\Gamma_k\left(\frac{3k}{2}\right)\le\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{2}{3}e^{\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}+\ln k-\gamma\right]}\Rightarrow$$

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{5}{2}}\frac{2}{3}e^{\frac{-\gamma}{2}}\sqrt{k}\le k^{\frac{1}{2}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\le\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{2}{3}e^{\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\gamma\right]}\sqrt{k}\Rightarrow\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{5}{2}}\frac{4}{3}e^{\frac{-\gamma}{2}}\le\sqrt{\pi}\le\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{4}{3}e^{\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\gamma\right]}$$

Πόρισμα 3.1.17 : Η συνάρτηση $\Gamma_k(x)$, $x\ge(n+1)k$, $k>0$ και $n\in\aleph^+$ ικανοποιεί τις παρακάτω ανισότητες :

$$\left(\frac{x}{k}\right)^{\frac{x}{k}}(n+1)^{-\frac{x}{k}}e^{\frac{1}{k}(x-(n+1)k)[H(n)-1+\ln k-\gamma]}k^n n!\le\Gamma_k(x)\le$$

$$\le\left(\frac{x}{k}\right)^{\frac{x}{k}}\frac{(n+1)^{-\frac{x}{k}}}{x}e^{\frac{1}{k}(x-(n+1)k)[H(n+1)-1+\ln k-\gamma]}k^{n+1}(n+1)! \tag{3.15}$$

όπου $H(n)=1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}$ και $\gamma=0.57721...$ η σταθερά του Euler .

Η ισότητα ισχύει για $x=(n+1)k$, $n\ge1$.

<u>**Απόδειξη**</u> **:**

Αν στη σχέση (3.12) αντικαταστήσουμε το $(x)_{n,k}$ από την ιδιότητα (2) της $\Gamma_k(x)$ προκύπτει :

$$\left(\frac{x+kn}{k+kn}\right)^{\frac{x}{k}+n} e^{\frac{1}{k}(x-k)[H(n)-1+\ln k-\gamma]} \frac{k^n n!\Gamma_k(x)}{\Gamma_k(x+kn)} \le \Gamma_k(x) \le$$

$$\le \left(\frac{x+kn}{k+kn}\right)^{\frac{x}{k}+n} e^{\frac{1}{k}(x-k)[H(n+1)-1+\ln k-\gamma]} \frac{k^{n+1}(n+1)!\Gamma_k(x)}{\Gamma_k(x+(n+1)k)}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x+kn}{k+kn}\right)^{\frac{x}{k}+n} e^{\frac{1}{k}(x-k)[H(n)-1+\ln k-\gamma]} \frac{k^n n!\Gamma_k(x)}{\Gamma_k(x+kn)} \le \Gamma_k(x) \le$$

$$\le \left(\frac{x+kn}{k+kn}\right)^{\frac{x}{k}+n} e^{\frac{1}{k}(x-k)[H(n+1)-1+\ln k-\gamma]} \frac{k^{n+1}(n+1)!\Gamma_k(x)}{(x+kn)\Gamma_k(x+nk)}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x+kn}{k+kn}\right)^{\frac{x}{k}+n} e^{\frac{1}{k}(x-k)[H(n)-1+\ln k-\gamma]} k^n n! \le \Gamma_k(x+kn) \le$$

$$\le \left(\frac{x+kn}{k+kn}\right)^{\frac{x}{k}+n} e^{\frac{1}{k}(x-k)[H(n+1)-1+\ln k-\gamma]} \frac{k^{n+1}(n+1)!}{(x+kn)}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x+kn}{k+kn}\right)^{\frac{x}{k}+n} e^{\frac{1}{k}(x-k)[H(n)-1+\ln k-\gamma]} k^n n! \le \Gamma_k(x+kn) \le$$

$$\le \left(\frac{x+kn}{k+kn}\right)^{\frac{x}{k}+n} (x+nk)^{-1} e^{\frac{1}{k}(x-k)[H(n+1)-1+\ln k-\gamma]} k^{n+1}(n+1)!$$

Θέτοντας το $x+kn=y$ προκύπτει :

$$\left(\frac{y}{k+kn}\right)^{\frac{y-kn}{k}+n} e^{\frac{1}{k}(y-nk-k)[H(n)-1+\ln k-\gamma]} k^n n! \le \Gamma_k(y) \le$$

$$\le \left(\frac{y}{k+kn}\right)^{\frac{y-nk}{k}+n} (y)^{-1} e^{\frac{1}{k}(y-nk-k)[H(n+1)-1+\ln k-\gamma]} k^{n+1}(n+1)!$$

$$\Rightarrow \left(\frac{y}{k+kn}\right)^{\frac{y}{k}} e^{\frac{1}{k}(y-(n+1)k)[H(n)-1+\ln k-\gamma]} k^n n! \le \Gamma_k(y) \le$$

$$\le \left(\frac{y}{k+kn}\right)^{\frac{y}{k}} (y)^{-1} e^{\frac{1}{k}(y-(n+1)k)[H(n+1)-1+\ln k-\gamma]} k^{n+1}(n+1)!$$

$$\Rightarrow \left(\frac{y}{k}\right)^{\frac{y}{k}} (n+1)^{-\frac{y}{k}} e^{\frac{1}{k}(y-(n+1)k)[H(n)-1+\ln k-\gamma]} k^n n! \le \Gamma_k(y) \le$$

$$\le \left(\frac{y}{k}\right)^{\frac{y}{k}} \frac{(n+1)^{-\frac{y}{k}}}{y} e^{\frac{1}{k}(y-(n+1)k)[H(n+1)-1+\ln k-\gamma]} k^{n+1}(n+1)!$$

ο.ε.δ.

Σημείωση : Το θεώρημα 3.1.13 και τα πορίσματα 3.1.15 και 3.1.16 αποτελούν k-γενίκευση του θεωρήματος και πορίσματος της εργασίας [13] . Ανάλογο θεώρημα με το θεώρημα 3.1.13 έχει δειχθεί με την ίδια μέθοδο και στην εργασία [10] , όπου σημειώνονται λάθη και δεν αποτελεί k-γενίκευση του θεωρήματος της εργασίας [13] όπως θα έπρεπε .

Πόρισμα 3.1.18 : Η συνάρτηση $B_k(x,y)$, $x,y \geq (n+1)k$, $k>0$ ικανοποιεί τις παρακάτω ανισότητες :

$$\frac{x^{\frac{x}{k}} y^{\frac{y}{k}}}{(x+y)^{\frac{x+y}{k}}}(x+y)\frac{k^{n-1}n!}{(n+1)}e^{-\frac{x+y}{k(n+1)}-(n+1)\left[H(n)-1+\ln k-\gamma-\frac{1}{n+1}\right]} \leq B_k(x,y) \leq$$

$$\leq \frac{x^{\frac{x}{k}} y^{\frac{y}{k}}}{(x+y)^{\frac{x+y}{k}}}\frac{1}{xy}k^{n+2}(n+1)(n+1)!e^{\frac{x+y}{k(n+1)}-(n+1)\left[H(n+1)-1+\ln k-\gamma+\frac{1}{n+1}\right]}$$

(3.16)

όπου $H(n)=1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}$ και $\gamma = 0.57721...$ η σταθερά του Euler .

<u>Απόδειξη</u> :

Από την (3.15) έχουμε :

$$\left(\frac{x}{k}\right)^{\frac{x}{k}}(n+1)^{-\frac{x}{k}}e^{\frac{1}{k}(x-(n+1)k)[H(n)-1+\ln k-\gamma]}k^n n! \leq \Gamma_k(x) \leq$$

$$\leq \left(\frac{x}{k}\right)^{\frac{x}{k}}\frac{(n+1)^{-\frac{x}{k}}}{x}e^{\frac{1}{k}(x-(n+1)k)[H(n+1)-1+\ln k-\gamma]}k^{n+1}(n+1)!$$

$$\left(\frac{y}{k}\right)^{\frac{y}{k}}(n+1)^{-\frac{y}{k}}e^{\frac{1}{k}(y-(n+1)k)[H(n)-1+\ln k-\gamma]}k^n n! < \Gamma_k(y) \leq$$

$$\leq \left(\frac{y}{k}\right)^{\frac{y}{k}}\frac{(n+1)^{-\frac{y}{k}}}{y}e^{\frac{1}{k}(y-(n+1)k)[H(n+1)-1+\ln k-\gamma]}k^{n+1}(n+1)!$$

Πολλαπλασιάζοντας τις ανωτέρω σχέσεις κατά μέλη προκύπτει :

$$\left(\frac{x}{k}\right)^{\frac{x}{k}}\left(\frac{y}{k}\right)^{\frac{y}{k}}(n+1)^{-\frac{x+y}{k}}e^{\frac{1}{k}[H(n)-1+\ln k-\gamma](x+y-2(n+1)k)}k^{2n}n!n!\leq\Gamma_k(x)\Gamma_k(y)\leq$$

$$\leq\left(\frac{x}{k}\right)^{\frac{x}{k}}\left(\frac{y}{k}\right)^{\frac{y}{k}}\frac{(n+1)^{-\frac{x+y}{k}}}{xy}e^{\frac{1}{k}(x+y-2(n+1)k)[H(n+1)-1+\ln k-\gamma]}k^{2n+2}(n+1)!(n+1)!$$

Πολλαπλασιάζοντας την ανωτέρω σχέση κατά μέλη με την παρακάτω :

$$\frac{1}{\left(\frac{x+y}{k}\right)^{\frac{x+y}{k}}\frac{(n+1)^{-\frac{x+y}{k}}}{x+y}e^{\frac{1}{k}(x+y-(n+1)k)[H(n+1)-1+\ln k-\gamma]}k^{n+1}(n+1)!}\leq\frac{1}{\Gamma_k(x+y)}\leq$$

$$\leq\frac{1}{\left(\frac{x+y}{k}\right)^{\frac{x+y}{k}}(n+1)^{-\frac{x+y}{k}}e^{\frac{1}{k}(x+y-(n+1)k)[H(n)-1+\ln k-\gamma]}k^{n}n!}$$

προκύπτει τελικά :

$$\frac{\left(\frac{x}{k}\right)^{\frac{x}{k}}\left(\frac{y}{k}\right)^{\frac{y}{k}}}{\left(\frac{x+y}{k}\right)^{\frac{x+y}{k}}}\frac{(n+1)^{-\frac{x+y}{k}}}{\frac{(n+1)^{-\frac{x+y}{k}}}{x+y}}\frac{k^{2n}n!n!}{k^{n+1}(n+1)!}\frac{e^{\frac{1}{k}(x-(n+1)k)[H(n)-1+\ln k-\gamma]+\frac{1}{k}(y-(n+1)k)[H(n)-1+\ln k-\gamma]}}{e^{\frac{1}{k}(x+y-(n+1)k)[H(n+1)-1+\ln k-\gamma]}}\leq\frac{\Gamma_k(x)\Gamma_k(y)}{\Gamma_k(x+y)}\leq$$

$$\leq\frac{\left(\frac{x}{k}\right)^{\frac{x}{k}}\left(\frac{y}{k}\right)^{\frac{y}{k}}}{\left(\frac{x+y}{k}\right)^{\frac{x+y}{k}}}\frac{\frac{(n+1)^{-\frac{x+y}{k}}}{xy}}{(n+1)^{-\frac{x+y}{k}}}\frac{k^{2n+2}(n+1)!(n+1)!}{k^{n}n!}\frac{e^{\frac{1}{k}(x-(n+1)k)[H(n+1)-1+\ln k-\gamma]+\frac{1}{k}(y-(n+1)k)[H(n+1)-1+\ln k-\gamma]}}{e^{\frac{1}{k}(x+y-(n+1)k)[H(n)-1+\ln k-\gamma]}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{x^{\frac{x}{k}}y^{\frac{y}{k}}}{(x+y)^{\frac{x+y}{k}}}(x+y)\frac{k^{n-1}n!}{(n+1)}e^{\frac{1}{k}(x-(n+1)k)[H(n)-1+\ln k-\gamma]+\frac{1}{k}(y-(n+1)k)[H(n)-1+\ln k-\gamma]-\frac{1}{k}(x+y-(n+1)k)[H(n+1)-1+\ln k-\gamma]}\leq$$

$$\leq\frac{\Gamma_k(x)\Gamma_k(y)}{\Gamma_k(x+y)}\leq\frac{x^{\frac{x}{k}}y^{\frac{y}{k}}}{(x+y)^{\frac{x+y}{k}}}\frac{1}{xy}k^{n+2}(n+1)(n+1)!$$

$$e^{\frac{1}{k}(x-(n+1)k)[H(n+1)-1+\ln k-\gamma]+\frac{1}{k}(y-(n+1)k)[H(n+1)-1+\ln k-\gamma]-\frac{1}{k}(x+y-(n+1)k)[H(n)-1+\ln k-\gamma]}$$

Υπολογίζουμε τα εκθετικά :

$$e^{\frac{1}{k}(x+y-(n+1)k)\left[H(n)-1+\ln k-\gamma\right]-\frac{1}{k}(n+1)k\left[H(n)-1+\ln k-\gamma\right]-\frac{1}{k}(x+y-(n+1)k)\frac{1}{n+1}-\frac{1}{k}(x+y-(n+1)k)\left[H(n)-1+\ln k-\gamma\right]}$$

$$=e^{-\frac{1}{k}(n+1)k\left[H(n)-1+\ln k-\gamma\right]-\frac{1}{k}\left[x+y-(n+1)k\right]\frac{1}{n+1}}=e^{-(n+1)\left[H(n)-1+\ln k-\gamma\right]-\frac{x+y}{k(n+1)}+1}=e^{-\frac{x+y}{k(n+1)}-(n+1)\left[H(n)-1+\ln k-\gamma-\frac{1}{n+1}\right]}$$

$$e^{\frac{1}{k}(x-(n+1)k)\left[H(n+1)-1+\ln k-\gamma\right]+\frac{1}{k}(y-(n+1)k)\left[H(n+1)-1+\ln k-\gamma\right]-\frac{1}{k}(x+y-(n+1)k)\left[H(n)-1+\ln k-\gamma\right]}=$$

$$=e^{\frac{1}{k}(x+y-(n+1)k)\left[H(n+1)-1+\ln k-\gamma\right]-\frac{1}{k}(n+1)k\left[H(n+1)-1+\ln k-\gamma\right]-\frac{1}{k}(x+y-(n+1)k)\left[H(n+1)-1+\ln k-\gamma\right]+\frac{1}{k}(x+y-(n+1)k)\frac{1}{n+1}}=$$

$$=e^{-(n+1)\left[H(n+1)-1+\ln k-\gamma\right]+\frac{x+y}{k(n+1)}-1}=e^{\frac{x+y}{k(n+1)}-(n+1)\left[H(n+1)-1+\ln k-\gamma+\frac{1}{n+1}\right]}$$

Τελικά προκύπτει :

$$\frac{x^{\frac{x}{k}}y^{\frac{y}{k}}}{(x+y)^{\frac{x+y}{k}}}(x+y)\frac{k^{n-1}n!}{(n+1)}e^{-\frac{x+y}{k(n+1)}-(n+1)\left[H(n)-1+\ln k-\gamma-\frac{1}{n+1}\right]}\leq\frac{\Gamma_k(x)\Gamma_k(y)}{\Gamma_k(x+y)}\leq$$

$$\leq\frac{x^{\frac{x}{k}}y^{\frac{y}{k}}}{(x+y)^{\frac{x+y}{k}}}\frac{1}{xy}k^{n+2}(n+1)(n+1)!e^{\frac{x+y}{k(n+1)}-(n+1)\left[H(n+1)-1+\ln k-\gamma+\frac{1}{n+1}\right]}\Rightarrow$$

$$\overset{(2.12)}{\Rightarrow}\frac{x^{\frac{x}{k}}y^{\frac{y}{k}}}{(x+y)^{\frac{x+y}{k}}}(x+y)\frac{k^{n-1}n!}{(n+1)}e^{-\frac{x+y}{k(n+1)}-(n+1)\left[H(n)-1+\ln k-\gamma-\frac{1}{n+1}\right]}\leq B_k(x,y)\leq$$

$$\leq\frac{x^{\frac{x}{k}}y^{\frac{y}{k}}}{(x+y)^{\frac{x+y}{k}}}\frac{1}{xy}k^{n+2}(n+1)(n+1)!e^{\frac{x+y}{k(n+1)}-(n+1)\left[H(n+1)-1+\ln k-\gamma+\frac{1}{n+1}\right]}$$

Θεώρημα 3.1.19 [7] **:**

(i) Έστω $k,x>0$ και $s>1$. Τότε η θετική συνάρτηση $\zeta_k(x,s)$ φθίνει ως προς x και ως προς k .

(ii) Έστω $x>0$ και $s>1$. Τότε η θετική συνάρτηση $\zeta_k(x,s)$ φθίνει ως προς s για $x>1$ και $k>0,\nu\geq 0$ και αυξάνεται ως προς s για $\nu>0$, $0<k<\frac{1}{\nu}$, $0<x<1-\nu k$.

<u>Απόδειξη</u> :

(i) Όπως είδαμε και παραπάνω για $k, x > 0$ και $s > 1$:

$$\partial_x \zeta_k(x,s) = -\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{s}{(x+\nu k)^{s+1}}$$

Επίσης για $k, x > 0$ και $s > 1$:

$$\partial_k(\zeta_k(x,s)) = -\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{s\nu}{(x+\nu k)^{s+1}} = -\, s\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\nu}{(x+\nu k)^{s+1}}$$

Από τις δυο τελευταίες σχέσεις καταλήγουμε στο ζητούμενο .

(ii) Παραγωγίζοντας την σχέση (2.12) ως προς s :

$$\partial_s \zeta_k(x,s) = -\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\log(x+\nu k)}{(x+\nu k)^s} \qquad (3.17)$$

Αν $x > 1$ τότε για $\nu, k > 0$, $x > 1 - \nu k \Rightarrow x + \nu k > 1 \Rightarrow \log(x+\nu k) > 0$. Έτσι από την σχέση (3.17) συμπεραίνουμε ότι η $\zeta_k(x,s)$ φθίνει με $s > 1$.

Αν $0 < k < \frac{1}{\nu}$ και $0 < x < 1 - \nu k \Rightarrow \log(x+\nu k) < 0$. Έτσι η $\zeta_k(x,s)$ αυξάνει με $s > 1$.

Θεώρημα 3.1.20 [7] **:** Έστω $\zeta_k(s)$ η $k-$Riemann ζήτα συνάρτηση . Τότε ισχύει η ανίσωση :

$$(s+k)\frac{\zeta_k(s)}{\zeta_k(s+k)} \geq s\frac{\zeta_k(s+k)}{\zeta_k(2s+k)} \quad , \quad s > k \qquad (3.18)$$

<u>Απόδειξη</u> :

Έστω f, g δυο μη αρνητικές συναρτήσεις με m, n πραγματικούς αριθμούς , τέτοιους ώστε να ισχύει η ανισότητα Schwarz :

$$\int_a^b g(t)(f(t))^m dt \int_a^b g(t)(f(t))^n dt \geq \left(\int_a^b g(t)(f(t))^{\frac{m+n}{2}} dt \right)^2$$

Έτσι , εφαρμόζοντας στην ανίσωση αυτή : $f(t) = t$, $g(t) = \frac{1}{e^t - 1}$,

$m = s-k, n = s-k, a = 0, b = +\infty$ καταλήγουμε :

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{e^t-1} t^{s-k} dt \int_0^{\infty} \frac{1}{e^t-1} t^{s+k} dt \geq \left(\int_a^b \frac{t^s}{e^t-1} dt \right)^2$$

και μέσω του ορισμού 2.5.2 έχουμε :

$$\zeta_k(s)\Gamma_k(s)\zeta_k(s+2k)\Gamma_k(s+2k) \geq \left(\zeta_k(s+k)\right)^2\left(\Gamma_k(s+k)\right)^2$$

Όμως από την ιδιότητα (1) της Γ_k συνάρτησης προκύπτει τελικά :

$$\zeta_k(s)\Gamma_k(s)\zeta_k(s+2k)\Gamma_k(s+k+k) \geq \left(\zeta_k(s+k)\right)^2\left(\Gamma_k(s+k)\right)^2 \Rightarrow$$

$$s(s+k)\zeta_k(s)\Gamma_k(s)\zeta_k(s+2k)\Gamma_k(s) \geq \left(\zeta_k(s+k)\right)^2 s^2\left(\Gamma_k(s)\right)^2 \Rightarrow$$

$(s+k)\dfrac{\zeta_k(s)}{\zeta_k(s+k)} \geq s\dfrac{\zeta_k(s+k)}{\zeta_k(s+2k)}$ που είναι το ζητούμενο .

Θεώρημα 3.1.21 [7] **:** Έστω $\zeta_k(u)$ η $k-$Riemann ζήτα συνάρτηση . Τότε ισχύει η ανίσωση :

$$\frac{\Gamma_k\left(\frac{u}{p}+\frac{v}{q}\right)}{\Gamma_k^{1/p}(u)\Gamma_k^{1/q}(v)} \leq \frac{\zeta_k^{1/p}(u)\zeta_k^{1/q}(v)}{\zeta_k\left(\frac{u}{p}+\frac{v}{q}\right)} \quad , \qquad (3.19)$$

όπου $u>k, v>k, \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ και $\dfrac{u}{p}+\dfrac{v}{q}>k$.

<u>Απόδειξη</u> :

Θεωρούμε την ανισότητα Holder για $p>1$:

$$\left|\int_0^\infty f(t)g(t)dt\right| \leq \left(\int_0^\infty |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^\infty |g(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

Εφαρμόζοντας την ανίσωση αυτή για : $f(t)=\dfrac{t^{\frac{u-k}{p}}}{(e^t-1)^{\frac{1}{p}}}$ και $g(t)=\dfrac{t^{\frac{v-k}{q}}}{(e^t-1)^{\frac{1}{q}}}$

καταλήγουμε :

$$\left|\int_0^\infty \frac{t^{\frac{u-k}{p}}}{(e^t-1)^{\frac{1}{p}}}\cdot\frac{t^{\frac{v-k}{q}}}{(e^t-1)^{\frac{1}{q}}}dt\right| \leq \left(\int_0^\infty\left|\frac{t^{\frac{u-k}{p}}}{(e^t-1)^{\frac{1}{p}}}\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^\infty\left|\frac{t^{\frac{v-k}{q}}}{(e^t-1)^{\frac{1}{q}}}\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \Rightarrow$$

$$\left|\int_0^\infty\left(\frac{t^{u-k}}{e^t-1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{t^{v-k}}{e^t-1}\right)^{\frac{1}{q}}dt\right| \leq \left(\int_0^\infty\left|\frac{t^{\frac{u-k}{p}}}{(e^t-1)^{\frac{1}{p}}}\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^\infty\left|\frac{t^{\frac{v-k}{q}}}{(e^t-1)^{\frac{1}{q}}}\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \Rightarrow$$

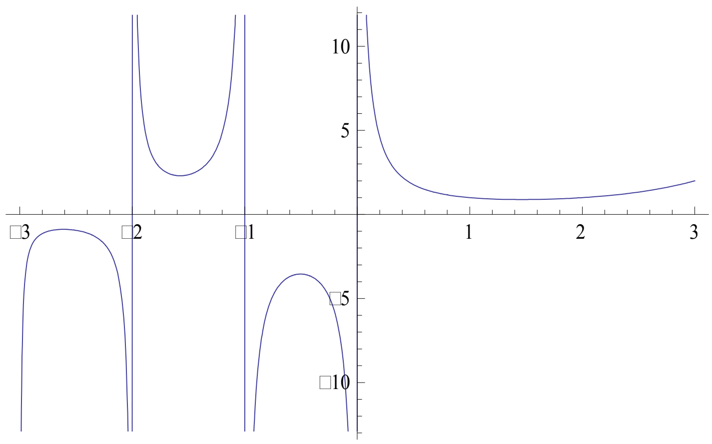
$$\left|\int_0^\infty \left(\frac{t^{u-k}}{e^t-1}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{t^{v-k}}{e^t-1}\right)^{\frac{1}{q}} dt\right| \le \left(\int_0^\infty \left|\frac{t^{u-k}}{e^t-1}\right| dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^\infty \left|\frac{t^{v-k}}{e^t-1}\right| dt\right)^{\frac{1}{q}} \Rightarrow$$

$$\left|\int_0^\infty \left(\frac{t^{\frac{u-k}{p}+\frac{v-k}{q}}}{\left(e^t-1\right)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}}\right) dt\right| \le \left(\int_0^\infty \left|\frac{t^{u-k}}{e^t-1}\right| dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^\infty \left|\frac{t^{v-k}}{e^t-1}\right| dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

Όμως , από τον ορισμό 2.5.2 έχουμε :

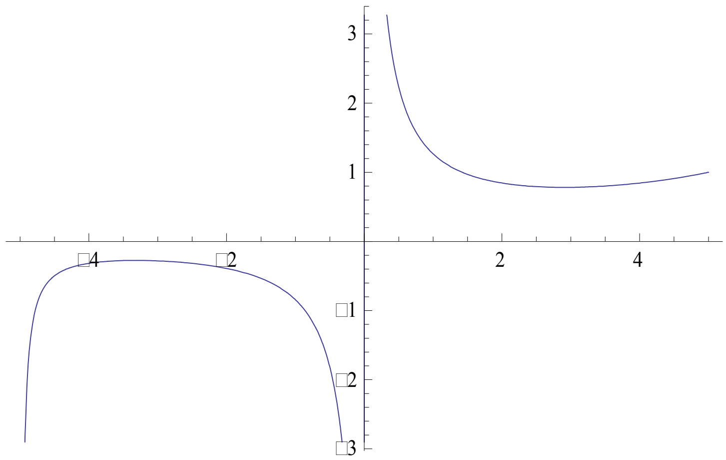
$\Gamma_k\left(\frac{u}{p}+\frac{v}{q}\right)\zeta_k\left(\frac{u}{p}+\frac{v}{q}\right) \le \Gamma_k^{1/p}(u)\Gamma_k^{1/q}(v)\zeta_k^{1/p}(u)\zeta_k^{1/q}(v)$ που είναι η (3.19) .

ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ



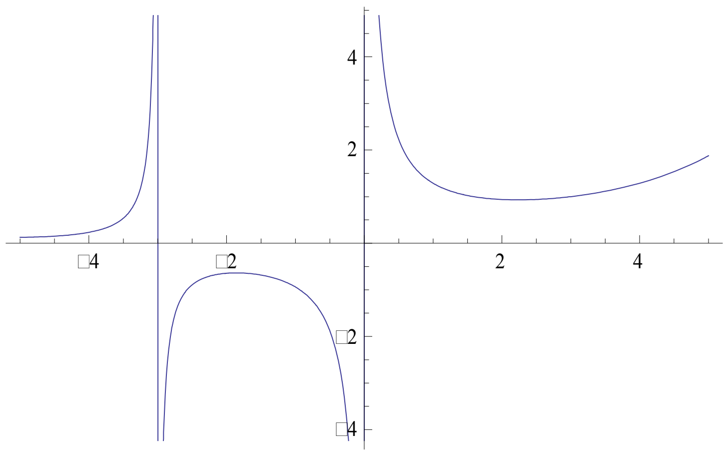
Γράφημα της Γάμμα συνάρτησης Γ(x) .

Σχήμα 1



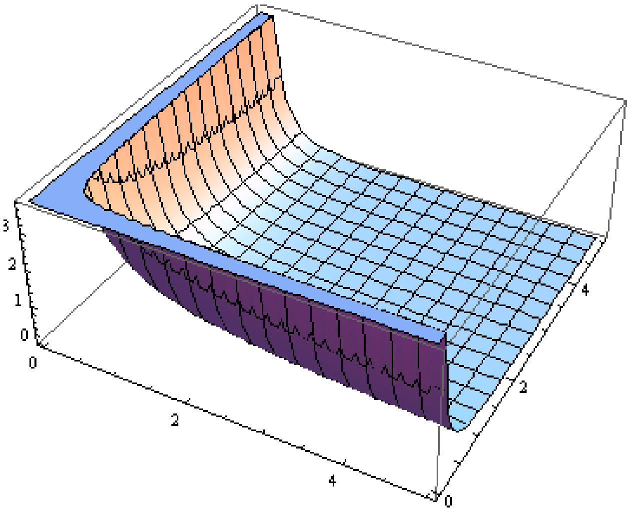
Γράφημα της $k-$Γάμμα συνάρτησης $\Gamma_k(x)$ για $k=5$.

Σχήμα 2



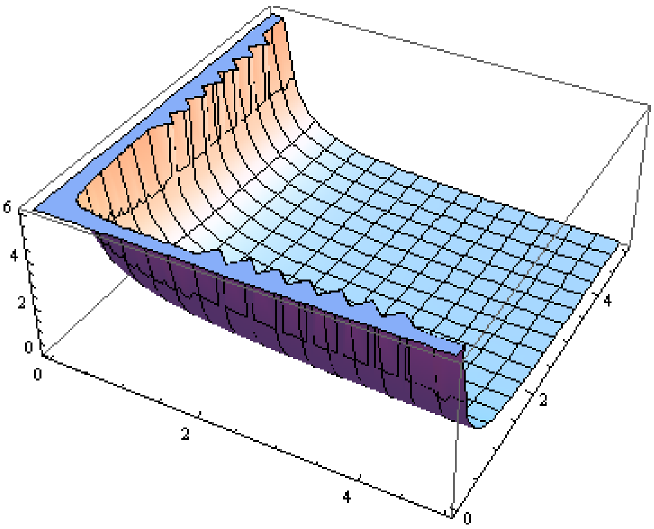
Γράφημα της $k-$Γάμμα συνάρτησης $\Gamma_k(x)$ για $k=3$.

Σχήμα 3



Γράφημα της Βήτα συνάρτησης $B(x,y)$.

Σχήμα 4



Γράφημα της $k-$Βήτα συνάρτησης $B_k(x,y)$ για $k=5$.

Σχήμα 5

Σημείωση : Παρατηρούμε ότι τα σχήματα 2 και 3 είναι ανάλογα με το σχήμα 1 καθώς και το σχήμα 5 με το σχήμα 4 .

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] M. Abramowitz , I. A. Stegun (1970) . *Handbook of mathematical Functions with Formulas and Mathematical Tables* , Dover , New York .

[2] R. Diaz , E. Pariguan (2007) . *On hypergeometric functions and k-Pochhammer symbol ,* Divulgaciones Matematicas , 15 (2) , pp.127-134 .

[3] R. Diaz , C. Ortiz , E. Pariguan (2010) . *On the k-gamma q-distribution ,* Central European Journal of Mathematics , 8 (3) , pp.448-458 .

[4] G. A. Dorrego , R. A. Cerutti (2012) . *The k-Mittag-Lefler Function ,* Int. J. Contemp. Math. Sciences , 7 (15) , pp.705-716 .

[5] A. Kilbas , H. Srivastava and J. Trujillo (2006) . *Theory and Applications of Fractional Differential Equations* , Elsevier .

[6] C.G. Kokologiannaki (2010) . *Properties and Inequalities of Generalized k-Gamma , Beta and Zeta Functions ,* Int. J. Contemp. Math. Sciences , 5 (14) , pp.653-660 .

[7] C.G. Kokologiannaki- V. Krasniqi (2013) . *Some properties of the k-Gamma function ,* Le Mathematiche , LXVIII (I) , pp.13-22, doi: 10.4418/2013.68.1.2

[8] V. Krasniqi (2010) . *A limit for the k-Gamma and k-Beta Function ,* Int. Math. Forum , 5 (33) , pp.1613-1617 .

[9] W. Magnus, F. Oberhettinger , R. P. Soni (1966) . *Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics ,* Springer-Verlag , New York Inc.

[10] SF. Merovci (2010) . *Power product Inequalities for the* $\Gamma_k(x)$ *function* , Inter. Journal of Math. Analysis , 4 (21) , pp.1007-1012 .

[11] S. Mubeen, G. M. Habibullah (2012) . *An Integral Representation of Some k-Hypergeometric Functions ,*Int. Math. Forum , 7 (4) , pp.203-207 .

[12] E. D. Rainville (1960) . *Special Functions ,* Chelsea Publishing Company , New York .

[13] Z. Starc (2002) . *Power product inequalities for the Γ function* , Kragujevac J. Math. 24 , pp.81-84 .

[14] Παναγιώτης Σιαφαρίκας (2007) . *Ειδικές Συναρτήσεις* , Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών .