ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΘΕΩΡΙΑ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΕ ΚΑΘΟΛΙΚΕΣ ΣΕΙΡΕΣ TAYLOR

ΧΑΤΖΗΓΙΑΝΝΑΚΙΔΟΥ ΝΙΚΟΛΙΤΣΑ

ΕΠΙΒΛΕΠΟΥΣΑ: ΒΑΓΙΑ ΒΛΑΧΟΥ, ΕΠΙΚΟΥΡΗ ΚΑΘΗΓΗΤΡΙΑ

ΠΑΤΡΑ, ΙΟΥΝΙΟΣ 2014

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω την επιβλέπουσα καθηγήτρια κ. Β.Βλάχου για την καθοδήγηση και την πολύτιμη βοήθεια της κατά την διάρκεια της εκπόνησης αυτής της διπλωματικής εργασίας, καθώς επίσης και για την εξαιρετική συνεργασία που είχαμε.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω και τα άλλα δύο μέλη της Τριμελούς Επιτροπής, τον Καθηγητή κ. Ν.Σάμαρη και τον Λέκτορα κ. Γ.Ελευθεράκη.

Πρόλογος

Η παρούσα διπλωματική εργασία αποτελείται από δύο μέρη. Στο πρώτο μέρος θα μελετήσουμε βασικές έννοιες και θεωρήματα από την θεωρία δυναμικού. Η θεωρία δυναμικού έχει τη φυσική της προέλευση στους νόμους των $Newton$ και $Coulomb$ για τη βαρυτική και την ηλεκτροστατική έλξη. Κατά τη διάρκεια του $20^{ου}$ αιώνα αναπτύχθηκε ιδιαίτερα και αποτελεί μία ολοκληρωμένη μαθηματική θεωρία με πολλές εφαρμογές. Η γενική θεωρία δυναμικού αναπτύσσεται στον ευκλείδιο χώρο $\mathbb{R}^n$. Εμείς θα μελετήσουμε την ειδική περίπτωση όπου $n = 2$, δηλαδή το μιγαδικό επίπεδο, διότι εκεί η θεωρία αυτή δίνει ενδιαφέροντα αποτελέσματα για τη μελέτη μιγαδικών συναρτήσεων.

Πιο συγκεκριμένα, ο στόχος μας στο πρώτο μέρος της παρούσας εργασίας είναι να δώσουμε όλη την απαιτούμενη θεωρία, ώστε να αποδείξουμε το περίφημο θεώρημα $Bernstein - Walsh$. Αρχικά, αναφέρουμε ιδιότητες των αρμονικών και υπαρμονικών συναρτήσεων, ορίζουμε το δυναμικό σαν μια ειδική περίπτωση υπαρμονικής συνάρτησης και τα $polar$ σύνολα, τα οποία παίζουν το ρόλο των αμελητέων συνόλων στη θεωρία δυναμικού. Στη συνέχεια, θα ασχοληθούμε με το πρόβλημα του $Dirichlet$, το οποίο αναφέρεται στην εύρεση αρμονικής συνάρτησης, σε δεδομένο χωρίο, η οποία θα έχει προκαθορισμένες συνοριακές τιμές. Μια ειδική περίπτωση αυτού του προβλήματος είναι η εύρεση συνάρτησης που μηδενίζεται στις συνοριακές της τιμές. Μια τέτοια συνάρτηση ονομάζεται συνάρτηση $Green$, του χωρίου και θα αποδειχθεί βασικό εργαλείο στη μελέτη μας. Τα παραπάνω μας οδηγούν στον ορισμό της χωρητικότητας ενός συνόλου και σε αποτελέσματα που αφορούν αυτή. Τελικά, είμαστε σε θέση να δώσουμε την εκφώνηση και την απόδειξη του θεωρήματος $Bernstein - Walsh$, το οποίο δίνει την ταχύτητα της πολυωνυμικής προσέγγισης αναλυτικών συναρτήσεων σε συμπαγή με συνεκτικό συμπλήρωμα, με παραμέτρους τόσο την χωρητικότητα του συμπαγούς όσο και την συνάρτηση $Green$ του συνόλου.

Στο δεύτερο μέρος, μελετάμε ένα αποτέλεσμα των Γ. Κωστάκη και Ν. Τσιρίβα, (βλ. [3]) για μία έννοια σχετική με τις καθολικές σειρές $Taylor$. Μία συνάρτηση f ολόμορφη στον ανοιχτό μοναδιαίο δίσκο $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, λέμε ότι έχει καθολική σειρά $Taylor$ στο σημείο $0 \in D$, αν για κάθε συμπαγές σύνολο K, ξένο με το D, με $\mathbb{C} \setminus K$ συνεκτικό σύνολο και για κάθε συνάρτηση g

συνεχή στο K και ολόμορφη στο εσωτερικό του K, υπάρχει υπακολουθία των μερικών αθροισμάτων του αναπτύγματος $Taylor$ της συνάρτησης f με κέντρο το σημείο 0, η οποία προσεγγίζει ομοιόμορφα την g. Στις αρχές του '70, οι Luh (βλ. [4]) και $Chui$ και $Parnes$ (βλ. [2]) δίνοντας έναν παρόμοιο ορισμό, εφοδιασμένο με τη συνθήκη $K \cap \overline{D} = \emptyset$, απέδειξαν την ύπαρξη συναρτήσεων με καθολικές σειρές $Taylor$. Ο Νεστορίδης επεκτείνοντας το παραπάνω αποτέλεσμα, απέδειξε (1996) (βλ. [6]) ότι στην περίπτωση του ανοιχτού μοναδιαίου δίσκου, υπάρχουν συναρτήσεις με καθολικές σειρές $Taylor$ και μάλιστα η οικογένεια αυτών των συναρτήσεων είναι ένα πυκνό, G_δ υποσύνολο του συνόλου των ολόμορφων συναρτήσεων στο D. Οι Γ. Κωστάκης και Ν. Τσιρίβας μελετάνε μια έννοια ισχυρότερη αυτής των καθολικών σειρών $Taylor$, τις διπλά καθολικές σειρές $Taylor$. Ειδικότερα, για δοσμένη γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών (λ_n), μια ολόμορφη συνάρτηση f στον ανοιχτό μοναδιαίο δίσκο λέγεται διπλά καθολική σειρά $Taylor$, ως προς τις ακολουθίες (n), (λ_n), αν για κάθε συμπαγές $K \subset \mathbb{C}$, με $\mathbb{C} \setminus K$ συνεκτικό σύνολο και K ξένο με τον δίσκο και για κάθε ζεύγος συναρτήσεων (g_1, g_2) συνεχών στο K, ολόμορφων στο εσωτερικό του K, υπάρχει υπακολουθία (μ_n), τέτοια ώστε $(S_{\mu_n}(f,0), S_{\lambda_{\mu_n}}(f,0))$ προσεγγίζουν ομοιόμορφα τις (g_1, g_2) (όπου $S_n(f,0)$ το $n-$οστό μερικό άθροισμα του αναπτύγματος $Taylor$ της f με κέντρο το 0). Το κεντρικό λοιπόν αποτέλεσμα είναι ότι για δοσμένη ακολουθία (λ_n), η οικογένεια των διπλά καθολικών σειρών $Taylor$, ως προς τις ακολουθίες $(n), (\lambda_n)$, είναι G_δ και πυκνή στο σύνολο των ολόμορφων συναρτήσεων στον ανοιχτό μοναδιαίο δίσκο (ειδικότερα είναι μηκενή) αν και μόνο αν $\limsup_n \dfrac{\lambda_n}{n} = +\infty$. Εργαλείο-κλειδί για το παραπάνω αποτέλεσμα είναι το Θεώρημα $Bernstein - Walsh$.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Αρμονικές και υπαρμονικές συναρτήσεις

1.1 Αρμονικές και ολόμορφες συναρτήσεις

Θα θέλαμε, αρχικά, να δώσουμε τον ορισμό της αρμονικής συνάρτησης.

Ορισμός 1.1.1. *Έστω U ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$. Μια συνάρτηση $h : U \to \mathbb{R}$ καλείται αρμονική αν και μόνο αν $h \in C^2(U)$ και $\Delta h = h_{xx} + h_{yy} = 0$ στο U.*

Μια τέτοια συνάρτηση είναι στην ουσία λύση της εξίσωσης του *Laplace*, $\Delta h = 0$. Οι αρμονικές συναρτήσεις, παρουσιάζουν πολλές ιδιότητες παρόμοιες με αυτές των ολόμορφων συναρτήσεων. Συγκεκριμένα, όταν δουλεύουμε στο μιγαδικό επίπεδο υπάρχει άμεση σχέση μεταξύ των δύο κλάσεων, όπως φαίνεται από το θεώρημα που ακολουθεί.

Θεώρημα 1.1.1. *Έστω U ανοιχτό και συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{C}$.*

(α) *Αν f είναι μια ολόμορφη συνάρτηση στο U και $h = Re\, f$, τότε η h είναι αρμονική στο U.*

(β) *Αν το U είναι απλά συνεκτικό σύνολο και h μια αρμονική συνάρτηση στο U, τότε $h = Re\, f$, για κάποια ολόμορφη συνάρτηση f στο U. Επίσης, η f είναι μοναδική, με διαφορά μιας σταθεράς.*

Η απόδειξη του θεωρήματος χρησιμοποιεί τις γνωστές συνθήκες $Cauchy-Riemann$. Άμεσα προκύπτουν τα ακόλουθα πορίσματα.

Πόρισμα 1.1.1. *Έστω U απλά συνεκτικός τόπος του $\mathbb{C}$ και f ολόμορφη, μη-μηδενική συνάρτηση στο U. Τότε υπάρχει ολόμορφη συνάρτηση g στο U, τέτοια ώστε $f = e^g$.*

Πόρισμα 1.1.2. *Αν h είναι μια αρμονική συνάρτηση σε ένα ανοιχτό υποσύνολο U του $\mathbb{C}$, τότε $h \in C^{\infty}(U)$.*

Θεώρημα 1.1.2. *[Ιδιότητα Μέσης Τιμής] Έστω h μια αρμονική συνάρτηση σε μια ανοιχτή περιοχή ενός δίσκου $\overline{D(w,\rho)}$. Τότε*

$$h(w) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(w+\rho\, e^{i\theta})\, d\theta.$$

Απόδειξη. Έστω $\rho' > \rho$ τέτοιο ώστε η h να είναι αρμονική στον ανοιχτό δίσκο $D(w,\rho')$. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 1.1.1 (β), έχουμε ότι υπάρχει ολόμορφη συνάρτηση f στον δίσκο $D(w,\rho')$, τέτοια ώστε $h = Ref$ στο $D(w,\rho')$.

Από τον ολοκληρωτικό τύπο του *Cauchy*, έχουμε ότι

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-w|=\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - w} d\zeta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(w+\rho\, e^{i\theta})\, d\theta.$$

Παίρνοντας το πραγματικό μέρος και στα δύο μέλη της παραπάνω εξίσωσης, έχουμε το ζητούμενο.

□

Τελειώνοντας αυτά τα πρώτα βασικά στοιχεία για αρμονικές συναρτήσεις, παραθέτουμε το ακόλουθο θεώρημα που θα μας χρησιμεύσει στην συνέχεια.

Θεώρημα 1.1.3. *[Αρχή Μεγίστου] Έστω h αρμονική συνάρτηση σε ένα ανοιχτό και συνεκτικό σύνολο $U \subset \mathbb{C}$.*

(α) *Αν η h έχει τοπικό μέγιστο στο U, τότε η h είναι σταθερή.*

(β) *Αν η h επεκτείνεται με συνεχή τρόπο στο $\overline{U}$ και $h \leq 0$ στο ∂U, τότε $h \leq 0$ στο U.*

1.2 Το πρόβλημα του *Dirichlet* στο δίσκο

Το πρόβλημα του *Dirichlet* είναι η εύρεση μιας αρμονικής συνάρτησης, σε ένα ανοιχτό και συνεκτικό σύνολο, με προκαθορισμένες συνοριακές τιμές. Ένα σημαντικό προτέρημα των αρμονικών συναρτήσεων έναντι των ολόμορφων συναρτήσεων είναι ότι για συγκεκριμένα σύνολα, υπάρχει πάντα μια λύση του προβλήματος. Σε αυτή τη παράγραφο θα μελετήσουμε την περίπτωση αρμονικής συνάρτησης ορισμένης σε δίσκο.

Ορισμός 1.2.1. *Έστω $U \subset \mathbb{C}$ τόπος και έστω $\phi : \partial U \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση. Καλούμε πρόβλημα του Dirichlet την εύρεση μιας συνάρτησης h αρμονικής στο U, τέτοια ώστε*

$$\lim_{z \to \zeta} h(z) = \phi(\zeta), \quad \forall \zeta \in \partial U.$$

Όπως φαίνεται από το θεώρημα που ακολουθεί, αν υπάρχει λύση στο πρόβλημα του *Dirichlet* τότε είναι μοναδική.

Θεώρημα 1.2.1. *[Θεώρημα μοναδικότητας] Με τον συμβολισμό του ορισμού* 1.2.1, *υπάρχει το πολύ μία λύση h στο πρόβλημα του Dirichlet.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι h_1, h_2 είναι δύο λύσεις του προβλήματος του *Dirichlet*, δηλαδή ότι h_1, h_2 είναι αρμονικές στο U, με $\lim_{z \to \zeta} h_1(z) = \lim_{z \to \zeta} h_2(z) = \phi(z)$, $\forall \zeta \in \partial U$ και θα καταλήξουμε στο ότι $h_1 = h_2$ στο U.

Ορίζουμε την συνάρτηση $h_1 - h_2 : U \to \mathbb{R}$, η οποία είναι αρμονική στο U, ως διαφορά των αρμονικών h_1 και h_2. Επεκτείνουμε την $h_1 - h_2$ στο $\overline{U}$, ορίζοντας $(h_1 - h_2)(\zeta) = 0$ για κάθε $\zeta \in \partial U$. Τότε η επεκτεταμένη συνάρτηση είναι συνεχής, διότι $\lim_{z \to \zeta}(h_1 - h_2)(z) = \lim_{z \to \zeta} h_1(z) - \lim_{z \to \zeta} h_2(z) = 0, \forall \zeta \in \partial U$. Εφαρμόζοντας την αρχή μεγίστου για τις αρμονικές συναρτήσεις, καταλήγουμε στο ότι $(h_1 - h_2)(z) \leq 0$ στο U.

Επαναλαμβάνοντας τα παραπάνω επιχειρήματα για τη συνάρτηση $-(h_1 - h_2) : U \to \mathbb{R}$, έχουμε ότι η $-(h_1 - h_2)$ είναι αρμονική στο U, επεκτείνεται ξανά με συνεχή τρόπο στο $\overline{U}$, με $-(h_1 - h_2) = 0$ στο ∂U. Από την αρχή μεγίστου για τις αρμονικές συναρτήσεις, $-(h_1 - h_2) \leq 0$ στο U.

Άρα, $h_1 - h_2 = 0$ στο U, δηλαδή αν υπάρχει λύση στο πρόβλημα του *Dirichlet* τότε είναι μοναδική. □

Ας δούμε ένα χρήσιμο εργαλείο για την μελέτη του προβλήματος του *Dirichlet*.

Ορισμός 1.2.2. *(α) Καλούμε πυρήνα του Poisson την απεικόνιση $P : D(0,1) \times \partial D(0,1) \to \mathbb{R}$ η οποία ορίζεται ως εξής:*

$$P(z, \zeta) = Re\left(\frac{\zeta + z}{\zeta - z}\right) = \frac{1 - |z|^2}{|\zeta - z|^2}, \quad |z| < 1, |\zeta| = 1.$$

(β) Αν $D = D(w, \rho)$ και $\phi : \partial D \to \mathbb{R}$ είναι μια Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση, τότε καλούμε ολοκλήρωμα Poisson της ϕ, και συμβολίζουμε με $P_D\phi$, την συνάρτηση $P_D\phi : D \to \mathbb{R}$ που ορίζεται ως εξής:

$$P_D\phi(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(\frac{z-w}{\rho}, e^{i\theta})\phi(w+\rho e^{i\theta})\,d\theta, \qquad z \in D.$$

Ειδικότερα, αν $r < \rho$ και $0 \le t < 2\pi$, τότε

$$P_D\phi(w+re^{it}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 - 2\rho r\cos(\theta - t) + r^2}\phi(w+\rho e^{i\theta})\,d\theta.$$

Παρατήρηση 1.2.1. *Το ολοκλήρωμα Poisson της ϕ είναι καλά ορισμένο διότι η συνάρτηση $P(\frac{z-w}{\rho}, e^{i\theta})\phi(w+\rho e^{i\theta})$, $(z, \rho\, e^{i\theta}) \in D \times \partial D$, είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο ∂D.*

Πράγματι, για κάθε $z \in D(0,1)$ και $\zeta \in \partial D(0,1)$, έχουμε ότι $(|\zeta - z|)^2 \ge (|\zeta| - |z|)^2 \ge (1-|z|)^2$. Άρα,

$$|P(z,\zeta)| \le \frac{1+|z|}{1-|z|}, \text{ για κάθε } z \in D(0,1).$$

Ισοδύναμα, $\left|P(\frac{z-w}{\rho}, e^{i\theta})\right| \le \frac{\rho + |z-w|}{\rho - |z-w|}$, για κάθε $z \in D = D(w,\rho)$.

Η συνάρτηση $\phi : \partial D \to \mathbb{R}$ είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη, άρα και η $|\phi| : \partial D \to [0,+\infty)$ είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Από γνωστό θεώρημα, για κάθε $z \in D$, έχουμε ότι η συνάρτηση $P(\frac{z-w}{\rho}, e^{i\theta})\phi(w+\rho e^{i\theta})$, $\rho\, e^{i\theta} \in \partial D$ είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο ∂D.

Λήμμα 1.2.1. *Ο πυρήνας του Poisson ικανοποιεί τα ακόλουθα:*

(i) $P(z,\zeta) > 0$, *για κάθε* z, ζ *με* $|z| < 1, |\zeta| = 1$,

(ii) $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z, e^{i\theta})\,d\theta = 1$, *για κάθε* z *με* $|z| < 1$,

(iii) $\sup_{|\zeta - \zeta_0| \ge \delta} P(z,\zeta) \to 0$, *καθώς* $z \to \zeta_0$, *όπου* $|\zeta_0| = 1, \delta > 0$.

Απόδειξη. *(i)* Άμεσο από τον ορισμό του πυρήνα του *Poisson*.

(ii) Εκφράζοντας το δοσμένο ολοκλήρωμα σαν ολοκλήρωμα σε κλειστή καμπύλη και χρησιμοποιώντας τον ολοκληρωτικό τύπο του *Cauchy*, έχουμε:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z,e^{i\theta})\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|=1} Re(\frac{\zeta+z}{\zeta-z})\frac{d\zeta}{i\zeta} = Re\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\frac{d\zeta}{\zeta}\right) =$$

$$= Re\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}(\frac{2}{\zeta-z} - \frac{1}{\zeta})\,d\zeta\right) = Re\left(\frac{1}{2\pi i}(2\cdot 2\pi i - 2\pi i)\right) = 1,$$

(αφού $|z| < 1$, δηλαδή το z είναι εσωτερικό σημείο της καμπύλης $|\zeta| = 1$, άρα $\displaystyle\int_{|\zeta|=1} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 2\pi i$).

(iii) Έστω $0 < \delta < 1$ τυχαίο. Θεωρούμε σημείο ζ_0 στο $\partial D(0,1)$. Αν $|z-\zeta_0| < \delta$, τότε για $\zeta \in \partial D(0,1)$ με $|\zeta - \zeta_0| \geq \delta$ έχουμε ότι:

$$P(z,\zeta) = \frac{1-|z|^2}{|\zeta - \zeta_0 + \zeta_0 - z|^2} \leq \frac{1-|z|^2}{(|\zeta - \zeta_0| - |\zeta_0 - z|)^2} \leq \frac{1-|z|^2}{(\delta - |\zeta_0 - z|)^2},$$

άρα $\displaystyle\sup_{|\zeta-\zeta_0|\geq\delta} P(z,\zeta) \leq \frac{1-|z|^2}{(\delta - |\zeta_0 - z|)^2}$

και καθώς $z \to \zeta_0$, $\displaystyle\sup_{|\zeta-\zeta_0|\geq\delta} P(z,\zeta) \to 0$.

□

Το θεώρημα που ακολουθεί, δείχνει την χρησιμότητα του ολοκληρώματος *Poisson*.

Θεώρημα 1.2.2. *Με τον συμβολισμό του ορισμού* 1.2.2, *ισχύουν τα παρακάτω:*

(α) το ολοκλήρωμα Poisson της ϕ, $P_D\phi$, είναι αρμονική συνάρτηση,

(β) αν η συνάρτηση ϕ είναι συνεχής στο σημείο $\zeta_0 \in \partial D$, τότε $\displaystyle\lim_{z\to\zeta_0} P_D\phi(z) = \phi(\zeta_0)$.

Συγκεκριμένα, αν η ϕ είναι συνεχής σε ολόκληρο το ∂D, τότε η $h := P_D\phi$ είναι η λύση του προβλήματος του Dirichlet στο D.

Απόδειξη. (α) Αποδεικνύουμε αρχικά ότι η $P_D\phi$ είναι αρμονική στο D, στην περίπτωση όπου $w = 0$ και $\rho = 1$, δηλαδή όταν $D = D(0,1)$. Τότε,

$$P_D\phi(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P\left(\frac{z-0}{1}, e^{i\theta}\right)\phi(e^{i\theta})\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Re\left(\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\right)\phi(e^{i\theta})\,d\theta$$

$$= Re\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\phi(e^{i\theta})\,d\theta\right), \text{ για κάθε } z \in D.$$

Εύκολα προκύπτει ότι η απεικόνιση $f : D \to \mathbb{R}$, με $f(z) = \dfrac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\phi(e^{i\theta})$, όπου $\phi(e^{i\theta}) \in \mathbb{R}$, είναι ολόμορφη, άρα και η $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\phi(e^{i\theta})\,d\theta$, για $z \in D$ είναι ολόμορφη. Δηλαδή η $P_D\phi$ προέκυψε ως το πραγματικό μέρος μιας ολόμορφης συνάρτησης του z. Άρα είναι αρμονική στο D.

Στην περίπτωση όπου $w \neq 0$ και $\rho \neq 1$, θέτουμε $D' = D(w,\rho)$ και θεωρούμε συνάρτηση $\phi : \partial D' \to \mathbb{R}$, *Lebesgue* ολοκληρώσιμη. Θα αποδείξουμε ότι η $P_{D'}\phi : D' \to \mathbb{R}$ είναι αρμονική στο D'.

Έστω $z \in D = D(0,1)$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : \overline{D(0,1)} \to \overline{D(w,\rho)}$ με τύπο $g(z) = \rho z + w$, η οποία άμεσα προκύτει ότι είναι ακέραια συνάρτηση και σύμμορφη απεικόνιση μεταξύ των ανοιχτών δίσκων. Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $P_D(\phi \circ g) : D \to \mathbb{R}$ και έχουμε ότι

$$P_D(\phi \circ g)(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P\left(\frac{z-0}{1}, e^{i\theta}\right)\phi \circ g(e^{i\theta})\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z, e^{i\theta})\phi(w + \rho e^{i\theta})\,d\theta, \quad \forall z \in D.$$

Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, η $P_D(\phi \circ g)$ προκύπτει ως το πραγματικό μέρος μιας ολόμορφης συνάρτησης του z, άρα είναι αρμονική στο D.

Θεωρούμε τώρα την συνάρτηση $(P_D\phi \circ g) \circ g^{-1} : D' \to \mathbb{R}$. Από γνωστό θεώρημα έχουμε ότι η συνάρτηση αυτή είναι αρμονική στο D', διότι η g^{-1} είναι ολόμορφη στο D'. Αλλά για $z \in D' = D(w,\rho)$ έχουμε ότι

$$(P_D\phi \circ g)\circ g^{-1}(z) = (P_\Delta \phi \circ g)(\frac{z-w}{\rho}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P\left(\frac{\frac{z-w}{\rho} - 0}{1}, e^{i\theta}\right)\phi \circ g(e^{i\theta})\,d\theta$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P\left(\frac{z-w}{\rho}, e^{i\theta}\right)\phi(w + \rho e^{i\theta})\,d\theta = P_{D'}\phi(z)$$

(από τον ορισμό 1.2.2 (β)).

Δηλαδή, η συνάρτηση $P_{D'}\phi : D' \to \mathbb{R}$ είναι αρμονική στο D'.

(β) Όπως και στο μέρος (α) αρκεί να αποδείξουμε το ζητούμενο για $D = D(0,1)$. Έστω λοιπόν $\phi : \partial D \to \mathbb{R}$ συνάρτηση συνεχής στο σημείο $\zeta_0 \in \partial D$. Τότε από το λήμμα 1.2.1 (i) και (ii) έχουμε ότι:

$$|P_D\phi(z) - \phi(\zeta_0)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z, e^{i\theta})(\phi(e^{i\theta}) - \phi(\zeta_0))\,d\theta\right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z, e^{i\theta})|\phi(e^{i\theta}) - \phi(\zeta_0)|\,d\theta, \text{ για κάθε } z \in D.$$

Έστω $\epsilon > 0$. Επειδή η ϕ είναι συνεχής στο $\zeta_0 \in \partial D$, υπάρχει $\delta' > 0$ τέτοιο ώστε:

$\forall \zeta \in \partial D,\ |\zeta - \zeta_0| < \delta' \Rightarrow |\phi(\zeta) - \phi(\zeta_0)| < \epsilon.$

Επίσης, από το λήμμα 1.2.1 (iii), υπάρχει $\delta'' > 0$ τέτοιο ώστε:
$\forall z \in D,\ |z - \zeta_0| < \delta'' \Rightarrow \sup\limits_{|\zeta - \zeta_0| \geq \delta''} P(z, \zeta) < \epsilon.$

Επιλέγουμε $\delta = min\{\delta', \delta''\} > 0$ και από το λήμμα 1.2.1 έχουμε ότι
αν $|z - \zeta_0| < \delta$ τότε

$$|P_\Delta \phi(z) - \phi(\zeta_0)| \leq$$
$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_{|e^{i\theta}-\zeta_0|<\delta} P(z, e^{i\theta})|\phi(e^{i\theta}) - \phi(\zeta_0)|\, d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_{|e^{i\theta}-\zeta_0|\geq\delta} P(z, e^{i\theta})|\phi(e^{i\theta}) - \phi(\zeta_0)|\, d\theta$$
$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z, e^{i\theta})\epsilon\, d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \epsilon|\phi(e^{i\theta}) - \phi(\zeta_0)|\, d\theta$$
$$\leq \epsilon + \epsilon(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\phi(e^{i\theta})|\, d\theta + |\phi(\zeta_0)|)$$
$$\leq \epsilon(1 + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\phi(e^{i\theta})|\, d\theta + |\phi(\zeta_0)|).$$

και αφού το ϵ είναι τυχαίο, προκύπτει ότι $\lim\limits_{z\to\zeta_0}(P_D\phi(z) - \phi(\zeta_0)) = 0$, δηλαδή $\lim\limits_{z\to\zeta_0} P_D\phi(z) = \phi(\zeta_0)$.

□

Πόρισμα 1.2.1. *[Ολοκληρωτικός τύπος του Poisson] Αν h είναι μια αρμονική συνάρτηση σε μια ανοιχτή περιοχή του δίσκου $\overline{D(w,\rho)}$, τότε για $r < \rho$ και $0 \leq t < 2\pi$ ισχύει ότι*

$$h(w + r\, e^{it}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 - 2\rho r\, cos(\theta - t) + r^2} h(w + \rho e^{i\theta})\, d\theta.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε το πρόβλημα του *Dirichlet* στο δίσκο $D := D(w, \rho)$, με $\phi = h|_D$. Από το θεώρημα 1.2.2, οι h και $P_D h$ είναι και οι δύο λύσεις. Άρα, από το θεώρημα 1.2.1, $h = P_D h$ στο D. □

Παραθέτουμε ένα ακόμη βασικό αποτέλεσμα από τη Θεωρία Αρμονικών Συναρτήσεων.

Θεώρημα 1.2.3. *[Αντίστροφο της ιδιότητας Μέσης Τιμής] Έστω $h : U \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση σε ένα ανοιχτό υποσύνολο U του $\mathbb{C}$ και ας υποθέσουμε ότι η h έχει την τοπική ιδιότητα της μέσης τιμής. Δηλαδή, για κάθε $w \in U$, υπάρχει $\rho > 0$, τέτοιο ώστε*

$$h(w) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(w + r\, e^{it})\, dt, \quad 0 \leq r < \rho.$$

Τότε, η h είναι αρμονική στο U.

Απόδειξη. Εφόσον το να είναι μια συνάρτηση αρμονική είναι τοπική ιδιότητα, για να δείξουμε ότι η h είναι αρμονική στο U, αρκεί να δείξουμε ότι είναι αρμονική σε κάθε ανοιχτό δίσκο D, με $\overline{D} \subset U$. Σταθεροποιούμε έναν τέτοιο δίσκο D και ορίζουμε τη συνάρτηση $k : \overline{D} \to \mathbb{R}$ ως εξής:

$$k = \begin{cases} h - P_D h, & \text{στο } D \\ 0 & \text{στο } \partial D \end{cases}.$$

Τότε, η k είναι συνεχής στο $\overline{D}$, αφού οι συναρτήσεις h και $P_D h$ είναι συνεχείς στο D και για κάθε $\zeta_0 \in \partial D$
$\lim\limits_{z\to\zeta_0} k(z) = \lim\limits_{z\to\zeta_0} h(z) - \lim\limits_{z\to\zeta_0} P_D h = h(\zeta_0) - h(\zeta_0) = 0 = k(\zeta_0)$.

Επίσης, η k έχει την τοπική ιδιότητα της μέσης τιμής στο D. Πράγματι, έστω $w \in D$. Τότε, η h έχει την τοπική ιδιότητα της μέσης τιμής, δηλαδή υπάρχει $\rho > 0$, τέτοιο ώστε $h(w) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} h(w + r\, e^{it})\, dt, \quad 0 \leq r < \rho$.

Επιλέγουμε $r > 0$ τέτοιο ώστε $D(w, r) \subset D$. Τότε, η $P_D h$ είναι αρμονική στο D, άρα και στον δίσκο $D(w, r)$, οπότε από ιδιότητα της μέσης τιμής, $P_D h(w) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} P_D h(w + r\, e^{it})\, dt$. Συνεπώς,
$k(w) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} [h(w + r\, e^{it}) - P_D h(w + r\, e^{it})]\, dt = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} k(w + r\, e^{it})\, dt$,
για $r < \rho$. Δηλαδή, η k έχει την τοπική ιδιότητα της μέσης τιμής.

Τώρα, αφού το $\overline{D}$ είναι συμπαγές, η k λαμβάνει μέγιστη τιμή M σε κάποιο σημείο του $\overline{D}$.

Ορίζουμε τα σύνολα $A = \{z \in D : k(z) < M\}$ και $B = \{z \in D : k(z) = M\}$.

Αφού η k είναι συνεχής, εύκολα προκύπτει ότι το A είναι ανοιχτό. Επίσης, το B είναι ανοιχτό, διότι αν $k(w) = M$, για κάποιο $w \in D$, τότε η τοπική ιδιότητα της μέσης τιμής αναγκάζει την k να παίρνει την τιμή M σε ανοιχτό δίσκο κέντρου w.

Αλλά, $A \cup B = D$ και το D είναι συνεκτικό, άρα είτε $A = D$, είτε $B = D$. Στην πρώτη περίπτωση, η k πραγματοποιεί μέγιστη τιμή στο ∂D. Εφόσον $k(\zeta) = 0$, για $\zeta \in \partial D$, προκύπτει ότι $M = 0$. Στην δεύτερη περίπτωση, $k \equiv M$ και αφού $k(\tilde{w}) = h(\tilde{w}) - P_D(\tilde{w}) = 0$, όπου $\tilde{w}$ το κέντρο του δίσκου D, προκύπτει ξανά ότι $M = 0$. Επομένως, $k \leq 0$.

Με όμοια επιχειρήματα, αφού η k πραγματοποιεί την ελάχιστη τιμή της σε κάποιο σημείο του ∂D, συμπεραίνουμε ότι $k \geq 0$.

Επομένως, $k = 0$ στο ∂D, άρα $h = P_D h$ στο D. Όμως, η συνάρτηση $P_D h$ είναι αρμονική στο D, άρα και η h είναι αρμονική στο D. $\square$

Πόρισμα 1.2.2. *Αν $(h_n)_{n\geq 1}$ είναι μια ακολουθία αρμονικών συναρτήσεων στο U, που συγκλίνει τοπικά ομοιόμορφα σε μια συνάρτηση h, τότε η h είναι επίσης αρμονική στο U.*

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι άμεση συνέπεια των θεωρημάτων 1.1.2 και 1.2.3. $\square$

1.3 Θετικές Αρμονικές Συναρτήσεις

Σε αυτή τη παράγραφο θα χρησιμοποιήσουμε τον ολοκληρωτικό τύπο του *Poisson* για να παράγουμε κάποιες χρήσιμες ανισότητες για τις θετικές αρμονικές συναρτήσεις. Με τον όρο θετικές εννοούμε μη αρνητικές, παρόλο που η διαφορά είναι μικρή αφού από το θεώρημα 1.1.3 κάθε αρμονική συνάρτηση που πραγματοποιεί ελάχιστη τιμή μηδέν σε ένα ανοιχτό και συνεκτικό σύνολο, πρέπει να είναι ταυτοτικά ίση με μηδέν σε αυτό το σύνολο.

Θεώρημα 1.3.1. *[Ανισότητα του Harnack] Έστω h θετική, αρμονική συνάρτηση στο δίσκο $D(w,\rho)$. Τότε για $0 < r < \rho$ και $0 \leq t \leq 2\pi$ έχουμε*

$$\frac{\rho - r}{\rho + r} h(w) \leq h(w + r\,e^{it}) \leq \frac{\rho + r}{\rho - r} h(w).$$

Απόδειξη. Επιλέγουμε s με $r < s < \rho$. Εφαρμόζοντας τον ολοκληρωτικό τύπο του *Poisson* στην h, στο $\overline{D(w,s)}$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} h(w + r\,e^{it}) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{s^2 - r^2}{s^2 - 2sr\,cos(\theta - t) + r^2} h(w + s\,e^{i\theta})\,d\theta \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{s^2 - r^2}{s^2 - 2sr + r^2} h(w + s\,e^{i\theta})\,d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{s + r}{s - r} h(w + s\,e^{i\theta})\,d\theta = \frac{s + r}{s - r} h(w), \end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισότητα προέκυψε από την ιδιότητα μέσης τιμής (θεώρημα 1.1.2) για την h.

Αφήνοντας, $s \to \rho$, καταλήγουμε στο ότι $h(w + r\,e^{it}) \leq \dfrac{\rho + r}{\rho - r} h(w)$, που είναι το ζητούμενο άνω φράγμα.

Για το κάτω φράγμα, εφαρμόζουμε ξανά τον ολοκληρωτικό τύπο του *Poisson* στην h, στο $\overline{D(w,s)}$, οπότε

$$h(w + r\,e^{it}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{s^2 - r^2}{s^2 - 2sr\,cos(\theta - t) + r^2} h(w + s\,e^{i\theta})\,d\theta$$

$$\geq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{s^2 - r^2}{s^2 + 2sr + r^2} h(w + s\,e^{i\theta})\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{s - r}{s + r} h(w + s\,e^{i\theta})\,d\theta = \frac{s - r}{s + r} h(w).$$

Για $s \to \rho$, προκύπτει $h(w + r\,e^{it}) \geq \dfrac{\rho - r}{\rho + r} h(w)$. □

Πόρισμα 1.3.1. *Έστω U ανοιχτό και συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{C}_\infty$ και έστω $z, w \in U$. Τότε υπάρχει αριθμός τ, ώστε για κάθε θετική αρμονική συνάρτηση h στο U, να ισχύει*

$$\tau^{-1} h(w) \leq h(z) \leq \tau\, h(w). \qquad (1)$$

Απόδειξη. Για δοσμένα $z, w \in U$, γράφουμε $z \sim w$ αν υπάρχει αριθμός τ, τέτοιος ώστε η σχέση (1), να ισχύει για κάθε αρμονική συνάρτηση h στο U. Εύκολα προκύπτει ότι η σχέση $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας στο U.

Από την ανισότητα του *Harnack* προκύπτει ότι οι κλάσεις ισοδυναμίας πρέπει να είναι ανοιχτά σύνολα. Όμως το σύνολο U είναι συνεκτικό, άρα πρέπει να υπάρχει μοναδική τέτοια κλάση ισοδυναμίας. Δηλαδή, για τυχαίο ζεύγος σημείων $z, w \in U$, υπάρχει αριθμός τ τέτοιος ώστε για κάθε θετική αρμονική συνάρτηση h στο U να ισχύει η σχέση (1). □

Ορισμός 1.3.1. *Έστω U ανοιχτό και συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{C}_\infty$. Για δοσμένα $z, w \in U$, καλούμε απόσταση Harnack μεταξύ των z και w και συμβολίζουμε $\tau_U(z,w)$, τον μικρότερο θετικό αριθμό που ικανοποιεί το εξής:*
για κάθε θετική αρμονική συνάρτηση h στο U

$$\tau_U^{-1} h(w) \leq h(z) \leq \tau_U h(w). \qquad (2)$$

Θεώρημα 1.3.2. *Θεωρούμε τον δίσκο $D := D(w,\rho)$. Τότε*

$$\tau_D(z,w) = \frac{\rho + |z - w|}{\rho - |z - w|}, \text{ για κάθε } z \in D.$$

Απόδειξη. Από το θεώρημα 1.3.1, προκύπτει ότι ο θετικός αριθμός $\dfrac{\rho+|z-w|}{\rho-|z-w|}$ ικανοποιεί την διπλή ανίσωση και εφόσον εξ ορισμού του ο τ_D είναι ο ελάχιστος τέτοιος αριθμός, προκύπτει ότι

$$\tau_D(z,w) \leq \frac{\rho+|z-w|}{\rho-|z-w|}, \quad z \in D.$$

Από την άλλη μεριά, θεωρώντας την παρακάτω θετική αρμονική συναρτήση h στο D,

$$h(z) = P(\frac{z-w}{\rho},1) = Re\left(\frac{\rho+(z-w)}{\rho-(z-w)}\right),$$

έχουμε ότι $\tau_D(z,w)h(w) \geq h(z) \Rightarrow$

$$\tau_D(z,w) \geq \frac{h(z)}{h(w)} = \frac{1-|\frac{z-w}{\rho}|^2}{\left|1-\frac{z-w}{\rho}\right|^2} \geq \frac{1-|\frac{z-w}{\rho}|}{1+|\frac{z-w}{\rho}|} = \frac{\rho+|z-w|}{\rho-|z-w|}.$$

□

Θεώρημα 1.3.3. *Έστω U, V ανοιχτα και συνεκτικά υποσύνολα του $\mathbb{C}_\infty$ και $f : U \to V$ μερόμορφη συνάρτηση. Τότε*

$$\tau_V(f(z),f(w)) \leq \tau_U(z,w), \qquad z,w \in U,$$

με ισότητα αν η f είναι σύμμορφη απεικόνιση από το U στο V.

Απόδειξη. Έστω z, $w \in U$. Αν h θετική, αρμονική συνάρτηση στο V, τότε η σύνθεση $h \circ f$ είναι θετική, αρμονική συνάρτηση στο U. Από τη σχέση (2), έχουμε ότι

$$\tau_U(z,w)^{-1}h(f(w)) \leq h(f(z)) \leq \tau_U(z,w)h(f(w)).$$

Αλλά, $f(z), f(w) \in V$ και ο $\tau_V(f(z),f(w))$ είναι ο μικρότερος αριθμός που ικανοποιεί την ανίσωση

$$\tau_V(f(z),f(w))^{-1}h(f(w)) \leq h(f(z)) \leq \tau_V(f(z),f(w))h(f(w)).$$

Άρα, $\tau_V(f(z),f(w)) \leq \tau_U(z,w)$.

Αν η f είναι σύμμορφη απεικόνιση από το U στο V, τότε εφαρμόζοντας το ίδιο επιχείρημα στην f^{-1}, προκύπτει η ζητούμενη ισότητα. □

Πόρισμα 1.3.2. *Αν $U \subset V$, τότε $\tau_V(z,w) \leq \tau_U(z,w), \quad z,w \in U$.*

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι άμεση από το παραπάνω θεώρημα αν θεωρήσουμε για f την συνάρτηση $f : U \to V$, $f(z) = z$. $\square$

Θεώρημα 1.3.4. *Έστω U ανοιχτό και συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{C}_\infty$. Τότε η συνάρτηση $\log \tau_U$ είναι συνεχής ημιμετρική στο U.*

Απόδειξη. Για να δείξουμε ότι η $\log \tau_U$ είναι ημιμετρική, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\tau_U(z,w) \geq 1, \qquad \tau_U(z,z) = 1, \qquad \text{για κάθε } z, w \in D,$$

$$\tau_U(z,w) = \tau_U(w,z), \qquad \text{για κάθε } z, w \in D,$$

$$\tau_U(z,w) \leq \tau_U(z,z')\,\tau_U(z',w), \qquad \text{για κάθε } z, z', w \in D,$$

τα οποία προκύπτουν άμεσα από τον ορισμό του τ_U.

Έστω $w \in U$. Θα αποδείξουμε ότι αν $z \to w$ τότε $\tau_U(z,w) \to \tau_U(w,w) = 0$.

Έστω $\rho > 0$, τέτοιο ώστε $D := D(w,\rho) \subset U$. Τότε, για $z \in D$, από το πόρισμα 1.3.2 και το θεώρημα 1.3.2 έχουμε ότι

$$0 \leq \log \tau_U(z,w) \leq \log \tau_D(z,w) = \log\left(\frac{\rho + |z-w|}{\rho - |z-w|}\right).$$

Οπότε, πράγματι $\tau_U(z,w) \to \tau_U(w,w) = 0$ καθώς $z \to w$.

Έστω τώρα $(z_0, w_0) \in U \times U$ και $z \to z_0$, $w \to w_0$. Θα αποδείξουμε ότι $\log \tau_U(z,w) \to \log \tau_U(z_0,w_0)$. Πράγματι, από ιδιότητες της $\log \tau_U$ έχουμε:

$|\log \tau_U(z,w) - \log \tau_U(z_0,w_0)| \leq$

$|\log \tau_U(z,w) - \log \tau_U(z_0,w)| + |\log \tau_U(z_0,w) - \log \tau_U(z_0,w_0)| =$

$|\log \tau_U(z,w) - \log \tau_U(z_0,w)| + |\log \tau_U(w,z_0) - \log \tau_U(w_0,z_0)| \to 0,$

καθώς $z \to z_0$ και $w \to w_0$. Δηλαδή, η συνάρτηση $\log \tau_U$ είναι συνεχής. $\square$

Θεώρημα 1.3.5. *[Θεώρημα του Harnack] Έστω $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία αρμονικών συναρτήσεων, ορισμένες σε ένα ανοιχτό και συνεκτικό υποσύνολο U του $\mathbb{C}_\infty$ και ας υποθέσουμε ότι $h_1 \leq h_2 \leq h_3 \leq \cdots$ στο U. Τότε είτε $h_n \to \infty$ τοπικά ομοιόμορφα, είτε $h_n \to h$ τοπικά ομοιόμορφα, όπου h αρμονική συνάρτηση στο U.*

Απόδειξη. Έστω $w \in U$ και K συμπαγές υποσύνολο του U. Για την απόδειξη του θεωρήματος 1.3.4, δείξαμε ότι η συνάρτηση τ_U είναι συνεχής στο U. Άρα, $c_K := \sup\limits_{z\in K} \tau_U(z,w) < +\infty$.

Επίσης, για κάθε $n \geq m \geq 1$ και για κάθε $z \in K$ ισχύει ότι

$h_n(w) - h_1(w) \leq \tau_U(z,w)(h_n(z) - h_1(z))$ και

$h_n(z) - h_m(z) \leq \tau_U(z,w)(h_n(w) - h_m(w)),$

διότι οι συναρτήσεις $h_n - h_1$ και $h_n - h_m$ είναι θετικές, αρμονικές στο U.

Οπότε, για κάθε $n \geq m \geq 1$ και για κάθε $z \in K$ έχουμε ότι

$h_n(w) - h_1(w) \leq c_K(h_n(z) - h_1(z))$ (3) και

$h_n(z) - h_m(z) \leq c_K(h_n(w) - h_m(w))$ (4).

Από την σχέση (3) προκύπτει ότι για κάθε $n \geq m \geq 1$ και για κάθε $z \in K$

$c_K h_n(z) \geq h_n(w) - h_1(w) + c_K h_1(z) \geq h_n(w) - h_1(w) + h_1(w) = h_n(w)$.

Άρα, αν $h_n(w) \to \infty$, καθώς $n \to \infty$, τότε $h_n(z) \to \infty$, για κάθε $z \in K$. Δηλαδή, $h_n \to \infty$, ομοιόμορφα στο K. Αφού όμως το K είναι τυχαίο συμπαγές υποσύνολο του U, καταλήγουμε στο ότι $h_n \to \infty$, τοπικά ομοιόμορφα στο U.

Από την άλλη μεριά, αν $h_n(w)$ τείνει σε ένα πεπερασμένο όριο, τότε η $(h_n(w))_{n\geq 1}$ είναι ακολουθία *Cauchy*.

Από την σχέση (4), προκύπτει ότι $h_n(z) - h_m(z) \leq h_n(w) - h_m(w)$, για κάθε $z \in K$. Άρα και η ακολουθία $(h_n(z))_{n\geq 1}$ είναι ακολουθία *Cauchy*, για κάθε $z \in K$. Συνεπώς, η $(h_n)_{n\geq 1}$ είναι ομοιόμορφα *Cauchy* στο K. Ξανά, αφού το K είναι τυχαίο συμπαγές υποσύνολο του U, έπεται ότι η h_n συγκλίνει τοπικά ομοιόμορφα στο U, σε μια πεπερασμένη συνάρτηση h, η οποία πρέπει να είναι αρμονική στο U, από το πόρισμα 1.2.2. □

1.4 Υπαρμονικές Συναρτήσεις

Σε αναλογία με τις αρμονικές συναρτήσεις, μια συνάρτηση u θα λέγεται υπαρμονική αν ικανοποεί την ανίσωση $\Delta u \geq 0$. Ωστόσο, μας εξυπηρετεί να τις ορίσουμε με διαφορετικό τρόπο. Θα χρειαστούμε πρώτα μια έννοια ασθενέστερη της συνέχειας.

Ορισμός 1.4.1. *Έστω X τοπολογικός χώρος και συνάρτηση $u : X \to [-\infty, \infty)$. Θα λέμε ότι η συνάρτηση u είναι άνω ημισυνεχής αν και μόνο αν το σύνολο $\{x \in X : u(x) < \alpha\}$ είναι ανοιχτό στον X, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Επίσης, έστω $v : X \to [-\infty, \infty)$. Θα λέμε ότι η συνάρτηση v είναι κάτω ημισυνεχής αν και μόνο αν η συνάρτηση $-v$ είναι άνω ημισυνεχής.

Παρατήρηση 1.4.1. *Εύκολα προκύπτει ότι η u είναι άνω ημισυνεχής αν και μόνο αν*

$$\limsup_{y \to x} u(y) \leq u(x) \qquad \text{για κάθε } x \in X.$$

Επιπλέον, η u είναι συνεχής αν και μόνο αν είναι άνω και κάτω ημισυνεχής.

Θεώρημα 1.4.1. *Έστω u άνω ημισυνεχής συνάρτηση σε τοπολογικό χώρο X και έστω K συμπαγές υποσύνολο του X. Τότε, η u είναι άνω φραγμένη στο K και συγκεκριμένα πραγματοποιεί μέγιστο στο K.*

Απόδειξη. Τα σύνολα $\{x \in X : u(x) < n\}$, για κάθε $n \geq 1$, αποτελούν ανοιχτό κάλυμμα για το K, άρα υπάρχει πεπερασμένο υποκάλυμμα. Επομένως, η u είναι άνω φραγμένη στο K. Έστω $M = \sup_K u$. Ας υποθέσουμε ότι $K \subseteq \{x \in X : u(x) < M\}$. Τότε τα ανοιχτά σύνολα $\{x \in X : u(x) < M - 1/n\}$, για κάθε $n \geq 1$, είναι κάλυμμα για το K. Επομένως, θα υπάρχει $N \in \mathbb{N}$, ώστε $K \subseteq \{x \in X : u(x) < M - 1/N\}$, πράγμα άτοπο γιατί θα είχαμε $M - 1/N = \sup_K u$. Συνεπώς, $K \not\subseteq \{x \in X : u(x) < M\}$, δηλαδή $u(x) = M$, για τουλάχιστον ένα στοιχείο $x \in X$. □

Θεώρημα 1.4.2. *Έστω u άνω ημισυνεχής συνάρτηση σε ένα μετρικό χώρο (X, d), τέτοια ώστε να είναι άνω φραγμένη στο X. Τότε, υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις $\phi_n : X \to \mathbb{R}$, τέτοιες ώστε $\phi_1 \geq \phi_2 \geq \cdots \geq u$ στο X και $\lim_{n\to\infty} \phi_n = u$.*

Απόδειξη. Αν $u \equiv -\infty$, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε $\phi_n \equiv -n$, $n \in \mathbb{N}$. Έστω ότι $u \not\equiv -\infty$. Για κάθε $n \geq 1$, ορίζουμε

$$\phi_n(x) = \sup_{y \in X}(u(y) - n\, d(x, y)), \qquad \text{για κάθε } x \in X.$$

Τότε, για κάθε $n \geq 1$ έχουμε ότι

$$|\phi_n(x) - \phi_n(x')| \leq n\, d(x, x'), \qquad \text{για κάθε } x, x' \in X.$$

Επομένως, κάθε ϕ_n είναι συνεχής στο X. Επίσης, είναι προφανές ότι $\phi_1 \geq \phi_2 \geq \cdots \geq u$, οπότε $\lim_{n\to\infty} \phi_n \geq u$.

Από την άλλη μεριά, αν σταθεροποιήσουμε $x \in X$ και θεωρήσουμε τον δίσκο $D(x, \rho) = \{y \in X : d(x, y) < \rho\}$, για κάποιο $\rho > 0$, τότε

$$\phi_n(x) \leq \left(\sup_{D(x,\rho)} u, \sup_X u - n\rho \right).$$

Άρα,

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n(x) \leq \sup_{D(x,\rho)} u.$$

Αφού η u είναι άνω ημισυνεχής, αφήνοντας το $\rho \to 0$, προκύπτει ότι $\lim_{n\to\infty} \phi_n(x) \leq u(x)$. Εφόσον το x ήταν τυχαίο στοιχείο του X, έχουμε ότι $\lim_{n\to\infty} \phi_n \leq u$ και άρα το ζητούμενο. □

Ορισμός 1.4.2. *Έστω U ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$. Μια συνάρτηση $u : U \to [-\infty, \infty)$ θα λέμε ότι είναι υπαρμονική αν και μόνο αν είναι άνω* *ημισυνεχής και ικανοποιεί την εξής ιδιότητα ("submean ανισότητα"): για κάθε $w \in U$, υπάρχει $\rho > 0$ τέτοιο ώστε*

$$u(w) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(w + r\, e^{it})\, dt, \quad \text{για } 0 \leq r \leq \rho.$$

Επίσης, μια συνάρτηση $v : U \to [-\infty, \infty)$ θα λέμε ότι είναι υπεραρμονική αν και μόνο αν η $-v$ είναι υπαρμονική.

Παρατήρηση 1.4.2. *Από τα θεωρήματα 1.1.2 και 1.2.3, έπεται ότι μια συνάρτηση είναι αρμονική αν και μόνο αν είναι υπαρμονική και υπεραρμονική.*

Άμεσες συνέπειες του παραπάνω ορισμού είναι τα επόμενα δύο θεωρήματα.

Θεώρημα 1.4.3. *Αν f είναι μια ολόμορφη συνάρτηση σε ένα ανοιχτό σύνολο $U \subset \mathbb{C}$, τότε η συνάρτηση $\log|f|$ είναι υπαρμονική στο U.*

Θεώρημα 1.4.4. *Έστω u και v υπαρμονικές συναρτήσεις σε ένα ανοιχτό σύνολο $U \subset \mathbb{C}$, τότε*

(i) η συνάρτηση $\max(u, v)$ είναι υπαρμονική στο U,

(ii) η συνάρτηση $\alpha\, u + \beta\, v$ είναι υπαρμονική στο U, για κάθε $\alpha, \beta \geq 0$.

Στη συνέχεια θα δούμε ένα σημαντικό θεώρημα για υπαρμονικές συναρτήσεις.

Θεώρημα 1.4.5. *[Αρχή Μεγίστου για Υπαρμονικές συναρτήσεις]*
Έστω U ανοιχτό και συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και u υπαρμονική συνάρτηση στο U.

(α) Αν η u έχει ολικό μέγιστο στο U, τότε η u είναι σταθερή συνάρτηση.

(β) Αν $\limsup\limits_{z \to \zeta} u(z) \leq 0$, για κάθε $\zeta \in \partial U$, τότε $u \leq 0$ στο U.

Απόδειξη. (α) Ας υποθέσουμε ότι η u έχει ολικό μέγιστο στο U και έστω M η μέγιστη τιμή της. Θεωρούμε τα παρακάτω σύνολα

$$A = \{z \in U : u(z) < M\} \text{ και } B = \{z \in U : u(z) = M\}.$$

Τότε, το A είναι ανοιχτό, διότι η u είναι άνω-ημισυνεχής. Επίσης το B είναι ανοιχτό, γιατί αν $u(w) = M$ τότε αφού η u είναι υπαρμονική, υπάρχει $\rho > 0$ τέτοιο ώστε $u(w) \leq \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} u(w + r\, e^{it})\, dt$, για $0 \leq r \leq \rho$, οπότε η u παίρνει την τιμή M σε αρκετά μικρούς δίσκους κέντρου w.

Προφανώς, $U = A \cup B$. Αλλά, το σύνολο U είναι συνεκτικό και αφού το B είναι μη-κενό από υπόθεση, προκύπτει ότι $U = B$. Δηλαδή, $u(z) = M$, για κάθε $z \in U$.

(β) Έστω ότι $\limsup_{z\to\zeta} u(z) \leq 0$, για κάθε $\zeta \in \partial U$. Αν το U δεν είναι φραγμένο, υποθέτουμε ότι $\infty \in \partial U$. Επεκτείνουμε την u στο ∂U, ορίζοντας $u(\zeta) = \limsup_{z\to\zeta} u(z)$, για κάθε $\zeta \in \partial U$. Τότε, η u γίνεται άνω ημισυνεχής στο συμπαγές $\overline{U}$, άρα από το θεώρημα 1.4.1 πραγματοποιεί μέγιστο σε κάποιο $w \in \overline{U}$.

Αν $w \in \partial U$, τότε από υπόθεση $u(w) \leq 0$, επομένως $u \leq 0$ στο U. Από την άλλη μεριά, αν $w \in U$, τότε από το μέρος (α), η u είναι σταθερή στο U, άρα και στο $\overline{U}$, οπότε ξανά προκύπτει ότι $u \leq 0$ στο U.

□

Θεώρημα 1.4.6. *Έστω U ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και $u : U \to [-\infty, \infty)$ άνω ημισυνεχής συνάρτηση. Τότε, τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(α) *Η συνάρτηση u είναι υπαρμονική στο U.*

(β) *Αν $\overline{D(w,\rho)}$ είναι κλειστός δίσκος που περιέχεται στο U, τότε για κάθε $r < \rho$ και $0 \leq t < 2\pi$ ισχύει ότι*

$$u(w + r\,e^{it}) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 - 2\rho\, r\cos(\theta - t) + r^2} u(w + \rho\, e^{it})\, d\theta.$$

(γ) *Αν V σχετικά συμπαγές, ανοιχτό και συνεκτικό υποσύνολο του U και h αρμονική συνάρτηση στο V, τέτοια ώστε*

$$\limsup_{z\to\zeta}(u - h)(z) \leq 0 \text{ για κάθε } \zeta \in \partial V,$$

τότε $u \leq h$ στο V.

Απόδειξη. (α) ⇒ (γ) : Για V και h όπως στο (γ), έχουμε ότι η συνάρτηση $u - h$ είναι υπαρμονική στο V, άρα από την αρχή μεγίστου για τις υπαρμονικές συναρτήσεις (θεώρημα 1.4.5 (β)), έπεται το ζητούμενο.

(γ) ⇒ (β) : Ας θεωρήσουμε κλειστό δίσκο $\overline{D} := \overline{D(w,\rho)} \subset U$. Από το θεώρημα 1.4.2, υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις $\phi_n : \partial D \to \mathbb{R}$, τέτοιες ώστε $\phi_n \searrow u$ στο ∂D. Από το θεώρημα 1.2.2, κάθε $P_D\phi_n$ είναι αρμονική στο D. Επίσης, $\lim_{z\to\zeta} P_D\phi_n(z) = \phi_n(\zeta)$, για κάθε $\zeta \in \partial D$. Άρα,

$$\limsup_{z\to\zeta}(u - P_D\phi_n)(z) \leq u(\zeta) - \phi_n(\zeta) \leq 0, \text{ για κάθε } \zeta \in \partial D.$$

Από το (γ) προκύπτει ότι $u \leq P_D\phi_n$ στο D. Τώρα, αφήνοντας το $n \to \infty$ και εφαρμόζοντας το θεώρημα μονότονης σύγκλισης, έχουμε τη ζητούμενη ανισότητα.

$(\beta) \Rightarrow (\alpha)$: Άμεσο από τον ορισμό της υπαρμονικής συνάρτησης. □

Πόρισμα 1.4.1. *Αν u υπαρμονική συνάρτηση σε ένα ανοιχτό σύνολο $U \subset \mathbb{C}$ και αν $\overline{D(w,\rho)}$ κλειστός δίσκος που περιέχεται στο U, τότε*

$$u(w) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(w+\rho\, e^{i\theta})\, d\theta.$$

Απόδειξη. Προκύπτει άμεσα από το θεώρημα 1.4.6 (β), για $r=0$. □

Από το κριτήριο (γ) του θεωρήματος 1.4.6, προκύπτει το πόρισμα που ακολουθεί.

Πόρισμα 1.4.2. *Αν $f : U_1 \to U_2$ μια σύμμορφη απεικόνιση μεταξύ των ανοιχτών υποσυνόλων U_1, U_2 του $\mathbb{C}$ και αν u υπαρμονική συνάρτηση στο U_2, τότε η συνάρτηση $u \circ f$ είναι υπαρμονική συνάρτηση στο U_1.*

Το επόμενο θεώρημα είναι ένα εντυπωσιακό και πολύ χρήσιμο εργαλείο στην θεωρία που μελετάμε.

Θεώρημα 1.4.7. *[Θεώρημα Gluing] Έστω u υπαρμονική συνάρτηση σε ένα ανοιχτό σύνολο $U \subset \mathbb{C}$ και v υπαρμονική συνάρτηση σε ένα ανοιχτό σύνολο $V \subset U$, τέτοιες ώστε*

$$\limsup_{z\to\zeta} v(z) \leq u(\zeta), \ \text{για κάθε } \zeta \in U \cap \partial V.$$

Τότε η συνάρτηση

$$\tilde{u} = \begin{cases} \max(u,v) & \text{στο } V, \\ u & \text{στο } U \setminus V, \end{cases}$$

είναι υπαρμονική στο U.

Απόδειξη. Από το θεώρημα 1.4.4 (α), η $\tilde{u}$ είναι υπαρμονική στο V.

Μένει να αποδείξουμε ότι η $\tilde{u}$ είναι υπαρμονική στο $U \setminus V$. Αν $z \in U \setminus \overline{V}$, τότε $\tilde{u}(z) = u(z)$, άρα από υπόθεση είναι άνω ημισυνεχής. Αν $\zeta \in (U \cap \partial V)$ τότε

$$\limsup_{z\to\zeta} \tilde{u}(z) = \max\left\{ \limsup_{z\to\zeta, z\in U\setminus V} \tilde{u}(z), \limsup_{z\to\zeta, z\in V} \tilde{u}(z) \right\} \leq$$

$$\leq \max\left\{ \limsup_{z\to\zeta, z\in U\setminus V} u(z), u(\zeta) \right\} \leq u(\zeta),$$

διότι $\limsup_{z\to\zeta} u(z) \leq u(\zeta)$, από άνω ημισυνέχεια της u και $\limsup_{z\to\zeta} v(z) \leq u(\zeta)$, από υπόθεση. Άρα η $\tilde{u}$ είναι άνω ημισυνεχής στο U. Επίσης, αφού $\tilde{u} \geq u$, στο U, έχουμε ότι αν $w \in U \setminus V$ και $\overline{D(w,\rho)} \subset U$ τότε

$$\tilde{u}(w) = u(w) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(w+\rho\, e^{i\theta})\, d\theta \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \tilde{u}(w+\rho\, e^{i\theta})\, d\theta,$$

δηλαδή η $\tilde{u}$ είναι υπαρμονική στο $U \setminus V$. □

Θεώρημα 1.4.8. *Έστω $(u_n)_{n\geq 1}$ υπαρμονικές συναρτήσεις σε ένα ανοιχτό $U \subseteq \mathbb{C}$ και έστω $u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq \ldots$ στο U. Τότε η συνάρτηση $u(z) = \lim_{n\to\infty} u_n(z), \forall z \in U$, είναι υπαρμονική στο U.*

Απόδειξη. Θεωρούμε την απεικόνιση $u : U \to [-\infty, \infty)$ με τύπο $u(z) = \lim_{n\to\infty} u_n(z)$. Για κάθε z στο U, η ακολουθία $u_n(z)$ είναι φθίνουσα ακολουθία πραγματικών αριθμών, οπότε είτε είναι κάτω φραγμένη και το όριο της $\lim_{n\to\infty} u_n(z) \in \mathbb{R}$, είτε δεν είναι κάτω φραγμένη άρα $u(z) = -\infty$. Σε κάθε περίπτωση το όριο των $u_n(z)$ για $n \to \infty$ υπάρχει, επομένως η απεικόνιση u είναι καλά ορισμένη.

Για να αποδείξουμε ότι η u είναι υπαρμονική στο U, θα αποδείξουμε ότι η u είναι άνω ημισυνεχής και ότι ικανοποιεί την παρακάτω ανισοτική σχέση: για δοσμένο $w \in U$, υπάρχει $\rho > 0$ τέτοιο ώστε

$u(w) \leq \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} u(w+re^{it})\, dt$ για $0 \leq r < \rho$.

Για την ημισυνέχεια, θεωρούμε τυχαίο $a \in \mathbb{R}$ και ισχυριζόμαστε ότι

$\{z : u(z) < \alpha\} = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{z : u_n(z) < \alpha\}$.

Πράγματι, αν $z \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{z : u_n(z) < \alpha\}$, δηλαδή το z είναι τέτοιο ώστε $u_n(z) < a$, για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, τότε αφού η ακολουθία $(u_n)_n$ είναι φθίνουσα και συγκλίνει στο $u(z)$, έχουμε ότι $u(z) \leq u_n(z), \forall n \in \mathbb{N}$. Άρα $u(z) < a$, δηλαδή $z \in \{z : u(z) < \alpha\}$.

Έστω τώρα $z \in \{z : u(z) < \alpha\}$, δηλαδή z τέτοιο ώστε $u(z) < a$. Τότε θεωρούμε το διάστημα $(u(z), a)$. Αφού $u_n(z) \to u(z)$, για $n \to \infty$, πρέπει να υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $\forall n \geq n_0$ να ισχύει $u_n(z) \in (u(z), a)$. Άρα $\forall n \geq n_0$, $u_n(z) < a$, δηλαδή $z \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{z : u_n(z) < \alpha\}$ και έτσι αποδεικνύεται ο ισχυρισμός.

Αλλά για κάθε n, η u_n είναι υπαρμονική συνάρτηση, άρα για κάθε n το σύνολο $\{z : u_n(z) < \alpha\}$ είναι ανοιχτό. Επομένως και η ένωση τους $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{z :$

$u_n(z) < \alpha\}$ είναι ανοιχτό, δηλαδή και το $\{z : u(z) < \alpha\}$ είναι ανοιχτό, γεγονός που αποδεικνύει την ημισυνέχεια.

Τώρα για να αποδείξουμε την ανισοτική σχέση, θεωρούμε $w \in U$ και $\rho = dist(w, \partial U) > 0$. Για $0 \leq r < \rho$, $D(w,r) \subset U$ και από Global submean inequality για τις u_n έχουμε ότι $\forall n \geq 1$,

$$u_n(w) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_n(w + re^{i\theta})\, d\theta.$$

Αφήνοντας το $n \to \infty$ και εφαρμόζοντας το θεώρημα μονότονης σύγκλισης, καταλήγουμε στο ότι η u ικανοποιεί την submean inequality. □

Κλείνοντας αυτό το εισαγωγικό κεφάλαιο, παραθέτουμε χωρίς απόδειξη τρία ακόμη αποτελέσματα που θα μας χρειαστούν στην συνέχεια.

Θεώρημα 1.4.9. *Έστω U ανοιχτό και συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και u υπαρμονική συνάρτηση στο U, τέτοια ώστε $u \not\equiv -\infty$ στο U. Τότε η u είναι τοπικά ολοκληρώσιμη στο U, δηλαδή $\int_K |u|\, dA < \infty$, για κάθε συμπαγές $K \subset U$, όπου με dA συμβολίζουμε το μέτρο Lebesgue στο μιγαδικό επίπεδο.*

Πόρισμα 1.4.3. *Έστω U ανοιχτό και συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και u υπαρμονική συνάρτηση στο U, τέτοια ώστε $u \not\equiv -\infty$ στο U. Αν $\overline{D(w,\rho)} \subset U$ τότε*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(w + \rho\, e^{i\theta})\, d\theta > -\infty.$$

Θεώρημα 1.4.10. *Έστω u και v υπαρμονικές συναρτήσεις σε ένα ανοιχτό σύνολο $U \subset \mathbb{C}$, τέτοιες ώστε $u = v$ σχεδόν παντού στο U. Τότε $u \equiv v$ στο U.*

Κεφάλαιο 2

Θεωρία Δυναμικού

2.1 Εισαγωγικές έννοιες θεωρίας Δυναμικού

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε δύσκολες και βαθιές έννοιες από Θεωρία Δυναμικού, με στόχο να καταλήξουμε στην απόδειξη του Θεωρήματος *Bernstein – Walsh*. Σε αυτήν την πρώτη παράγραφο, παραθέτουμε κάποια βασικά θεωρήματα χωρίς απόδειξη, με εξαίρεση το θεωρήμα του *Frostman*, το οποίο θα χρησιμοποιήσουμε πολλές φορές στην συνέχεια.

Αναφέρουμε αρχικά κάποια στοιχεία από θεωρία μέτρου που θα χρειαστούμε.

Ορισμός 2.1.1. *Έστω μ ένα Borel μέτρο σε έναν τοπολογικό χώρο X. Καλούμε φορέα του μ και συμβολίζουμε $supp\,\mu$ το σύνολο των $x \in X$, για τα οποία $\mu(U) > 0$, για κάθε ανοιχτή περιοχή U του x.*

Θεώρημα 2.1.1. *Ας υποθέσουμε ότι ο X έχει μια αριθμήσιμη βάση ανοιχτών συνόλων. Τότε $supp\,\mu$ είναι το μικρότερο κλειστό υποσύνολο F του X, με την ιδιότητα $\mu(X \setminus F) = 0$.*

Ορισμός 2.1.2. *Έστω μ ένα Borel μέτρο σε έναν τοπολογικό χώρο X. Τότε το μ καλείται κανονικό (regular) αν και μόνο αν κάθε Borel σύνολο B έχει την εξής ιδιότητα: για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει ανοιχτό σύνολο U και κλειστό σύνολο F τέτοια ώστε $F \subset B \subset U$ και $\mu(U \setminus F) = 0$.*

Θεώρημα 2.1.2. *Αν το μ είναι πεπερασμένο Borel μέτρο σε έναν μετρικό χώρο X, τότε το μ είναι κανονικό.*

Έστω X συμπαγής μετρικός χώρος. Συμβολίζουμε με $C(X)$ τον χώρο των συνεχών συναρτήσεων $\phi : X \to \mathbb{R}$, εφοδιασμένο με τη νόρμα-*supremum* και $P(X)$ τη συλλογή όλων των *Borel* μέτρων πιθανότητας στον X.

Ορισμός 2.1.3. *Μια ακολουθία $(\mu_n)_{n\geq 1}$ στον $P(X)$ θα λέμε ότι συγκλίνει ασθενώς στο $\mu \in P(X)$ αν και μόνο αν $\int_X \phi \, d\mu_n \to \int_X \phi \, d\mu$, για κάθε $\phi \in C(X)$.*

Θεώρημα 2.1.3. *Έστω X συμπαγής μετρικός χώρος. Τότε κάθε ακολουθία $(\mu_n)_{n\geq 1}$ στον $P(X)$ έχει υπακολουθία που συγκλίνει ασθενώς σε κάποιο $\mu \in P(X)$.*

Θα ορίσουμε τώρα το δυναμικό για πεπερασμένα μέτρα, με συμπαγή φορέα.

Ορισμός 2.1.4. *Έστω μ ένα πεπερασμένο Borel μέτρο στο $\mathbb{C}$ με συμπαγή φορέα. Η συνάρτηση $p_\mu : \mathbb{C} \to [-\infty, \infty)$ με*

$$p_\mu(z) = \int \log|z-w| \, d\mu(w), \quad z \in \mathbb{C}$$

καλείται το δυναμικό (potential) του μέτρου μ.

Θεώρημα 2.1.4. *Με τον συμβολισμό του ορισμού 2.1.4, η συνάρτηση p_μ είναι υπαρμονική στο $\mathbb{C}$ και αρμονική στο $\mathbb{C} \setminus (\mathrm{supp}\, \mu)$. Επίσης,*

$$p_\mu(z) = \mu(\mathbb{C}) \log|z| + O(|z|^{-1}) \text{ καθώς } z \to \infty.$$

Θεώρημα 2.1.5. *[Αρχή Ελαχίστου] Έστω μ πεπερασμένο Borel μέτρο στο $\mathbb{C}$, με συμπαγή φορέα K. Αν $p_\mu \geq M$ στο K, τότε $p_\mu \geq M$ σε ολόκληρο το $\mathbb{C}$.*

Στη συνέχεια θα ορίσουμε τα *polar* σύνολα, τα οποία παίζουν το ρόλο των αμελητέων συνόλων στη θεωρία δυναμικού, όπως τα σύνολα με μέτρο μηδέν στη θεωρία μέτρου. Για να τα ορίσουμε, πρώτα θα χρειαστούμε την έννοια της ενέργειας (*energy*).

Ορισμός 2.1.5. *Έστω μ ένα πεπερασμένο Borel μέτρο στο $\mathbb{C}$ με συμπαγή φορέα. Καλούμε ένεργεια του μέτρου μ τον παρακάτω μιγαδικό αριθμό*

$$I(\mu) = \int \int \log|z-w| \, d\mu(z) \, d\mu(w) = \int p_\mu(z) \, d\mu(z).$$

Ορισμός 2.1.6. *(α) Ένα σύνολο $E \subset \mathbb{C}$ καλείται polar αν και μόνο αν $I(\mu) = -\infty$, για κάθε πεπερασμένο Borel μέτρο $\mu \neq 0$, για το οποίο το σύνολο $\mathrm{supp}\, \mu$ είναι συμπαγές υποσύνολο του E.*

(β) Μία ιδιότητα θα λέμε ότι ισχύει "nearly" παντού σε ένα σύνολο $S \subset \mathbb{C}$ αν και μόνο αν ισχύει παντού στο $S \setminus E$, για κάποιο Borel, polar σύνολο E.

Παρατήρηση 2.1.1. *Τα μονοσύνολα είναι polar σύνολα. Επιπλέον, κάθε υποσύνολο ενός polar συνόλου είναι polar. Ισοδύναμα, έχουμε ότι αν ένα σύνολο δεν είναι polar, τότε περιέχει ένα συμπαγές σύνολο το οποίο δεν είναι polar (συγκεκριμένα, το σύνολο supp μ για κάποιο μέτρο μ, με $I(\mu) > -\infty$).*

Θεώρημα 2.1.6. *Έστω μ ένα πεπερασμένο Borel μέτρο στο $\mathbb{C}$ με συμπαγή φορέα και έστω ότι $I(\mu) > -\infty$. Τότε $\mu(E) = 0$, για κάθε Borel, polar σύνολο E.*

Πόρισμα 2.1.1. *Κάθε Borel, polar σύνολο έχει Lebesgue μέτρο μηδέν.*

Πόρισμα 2.1.2. *Αριθμήσιμη ένωση από Borel, polar σύνολα είναι polar σύνολο. Ειδικότερα, κάθε αριθμήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{C}$ είναι polar.*

Ορισμός 2.1.7. *Έστω K συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{C}$. Συμβολίζουμε με $P(K)$ τη συλλογή όλων των Borel μέτρων πιθανότητας στο K. Αν υπάρχει $\nu \in P(K)$, τέτοιο ώστε*

$$I(\nu) = \sup_{\mu \in P(K)} I(\mu),$$

τότε το ν καλείται equilibrium μέτρο για το K.

Λήμμα 2.1.1. *Αν μια ακολουθία $(\mu_n) \in P(K)$ συγκλίνει ασθενώς σε ένα μέτρο $\mu \in P(K)$, τότε $\limsup_{n\to\infty} I(\mu_n) \le I(\mu)$.*

Θεώρημα 2.1.7. *Κάθε συμπαγές σύνολο K στο $\mathbb{C}$, έχει equilibrium μέτρο.*

Θεώρημα 2.1.8. *[Θεώρημα του Frostman] Έστω K συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και ν equilibrium μέτρο για το K. Τότε*

(α) $p_\nu \ge I(\nu)$ στο $\mathbb{C}$,

(β) $p_\nu = I(\nu)$ στο $K \setminus E$, όπου E ένα F_σ, polar υποσύνολο του ∂K.

Απόδειξη. Έστω $K \subset \mathbb{C}$ συμπαγές και ν *equilibrium* μέτρο για το K. Αν το σύνολο K είναι *polar*, τότε $I(\nu) = -\infty$, οπότε το (α) είναι προφανές. Για το (β), θεωρούμε το σύνολο $E = \{z \in K : p_\nu(z) \neq I(\nu)\}$. Αφού $E \subseteq K$, το K θα είναι *polar*. Επίσης, το σύνολο K δεν μπορεί να έχει εσωτερικά σημεία διότι είναι *polar* σύνολο, δηλαδή $K = \partial K$. Οπότε $E \subseteq \partial K$. Μένει να αποδείξουμε ότι το E είναι F_σ. Πράγματι, $E = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{z \in K : p_\nu(z) \ge -n\}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το σύνολο $\{z \in K : p_\nu(z) \ge -n\}$ είναι κλειστό, ως συμπλήρωμα του συνόλου $\{z \in K : p_\nu(z) < -n\}$ το οποίο είναι ανοιχτό γιατί η p_ν είναι υπαρμονική. Αποδείξαμε λοιπόν και τα (α) και (β), στην περίπτωση όπου το σύνολο K είναι *polar*.

Ας υποθέσουμε ότι το σύνολο K δεν είναι *polar*. Ισχυριζόμαστε ότι για να αποδείξουμε τα συμπεράσματα (α) και (β) αρκεί να αποδείξουμε τα παρακάτω:

(i) τα σύνολα $K_n := \{z \in K : p_\nu(z) \geq I(\nu) + \dfrac{1}{n}\}$ είναι *polar*, για κάθε $n \geq 1$ και

(ii) τα σύνολα $L_n := \{z \in supp\,\nu : p_\nu(z) < I(\nu) - \dfrac{1}{n}\}$ είναι κενά, για κάθε $n \geq 1$.

Από την (ii) προκύπτει ότι $p_\nu \geq I(\nu)$ στο $supp\,\nu$, οπότε από την αρχή ελαχίστου (θεώρημα 2.1.5) έχουμε ότι $p_\nu \geq I(\nu)$ στο $\mathbb{C}$, που δίνει το συμπέρασμα (α).

Από την (i) συμπεραίνουμε ότι τα σύνολα K_n είναι *polar*, για κάθε $n \geq 1$. Επιπλέον, τα σύνολα K_n είναι κλειστά, για κάθε $n \geq 1$, ως συμπλήρωματα των ανοιχτών συνόλων $\{z \in K : p_\nu(z) < I(\nu) + \frac{1}{n}\}$. Δηλαδή, για κάθε $n \geq 1$, το K_n είναι κλειστό και *polar* σύνολο. Αν θέσουμε $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$, τότε από το πόρισμα 2.1.2, έχουμε ότι το E είναι *polar* σύνολο. Αφού $p_\nu \leq I(\nu)$ στο $K \setminus E$ και το E είναι F_σ, *polar* σύνολο, για να προκύψει το (β) μένει να αποδείξουμε ότι $E \subset \partial K$.

Πράγματι, το σύνολο E, ως *polar*, έχει *Lebesgue* μέτρο μηδέν, άρα $p_\nu = I(\nu)$, σχεδόν παντού στο K και από το θεώρημα 1.4.10, $p_\nu = I(\nu)$ παντού στο $int(K)$. Αποδείξαμε λοιπόν ότι αν ισχύουν οι συνθήκες (i) και (ii), τότε έχουμε το ζητούμενο.

Απομένει να αποδείξουμε τις (i) και (ii). Θα αποδείξουμε την (i) με απαγωγή σε άτοπο. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $n \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε το K_n να μην είναι *polar*. Τότε, υπάρχει $\mu \in P(K_n)$ έτσι ώστε $I(\mu) > -\infty$. Έστω μ το *equilibrium* μέτρο για το K_n. Αν $p_\nu(z) > I(\nu)$, για κάθε $z \in supp\,\nu$, τότε $\int p_\nu\, d\nu > I(\nu)\nu(K) = I(\nu)$, πράγμα άτοπο. Άρα, υπάρχει $z_0 \in supp\,\nu$ με $p_\nu(z_0) \leq I(\nu)$. Από άνω ημισυνέχεια της p_ν, υπάρχει $r > 0$, ώστε $p_\nu < I(\nu) + \dfrac{1}{2n}$ στο δίσκο $\overline{D(z_0, r)}$. Συγκεκριμένα, $\overline{D(z_0, r)} \cap K_n = \emptyset$. Αφού $z_0 \in supp\,\nu$, ο αριθμός $a := \nu(\overline{D(z_0, r)})$ είναι γνήσια θετικός. Ορίζουμε ένα προσημασμένο μέτρο σ στο K ως εξής:

$$\sigma = \begin{cases} \mu & \text{στο } K_n, \\ -\nu/a & \text{στο } \overline{D(z_0, r)}, \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}.$$

Τότε, για κάθε $t \in (0, a)$, θεωρούμε το μέτρο $\nu_t := \nu + t\sigma$ στο K. Δηλαδή, $\nu_t(K) = \nu(K) + t\,\sigma(K) = \nu(K) + t(\mu(K_n) - \nu(\overline{D(z_0, r)})/a) = 1 + t(1 - 1) = 1$. Το μέτρο ν_t είναι θετικό, άρα $\nu_t \in P(K)$. Επιπλέον, αφού $I(\nu) > -\infty$, έχουμε ότι $I(|\sigma|) > -\infty$, οπότε

$$\begin{aligned}
&I(\nu_t) - I(\nu) \\
&= 2t \int\int \log|z-w|\, d\nu(w)\, d\sigma(z) - t^2 \int\int \log|z-w|\, d\sigma(w)\, d\sigma(z) \\
&= 2t \int p_\nu(z)\, d\sigma(z) + O(t^2) \\
&= 2t \left(\int_{K_n} p_\nu(z)\, d\mu(z) - \int_{\overline{D(z_0,r)}} p_\nu(z)\, d\nu(z)/a + O(t) \right) \\
&\geq \left(\left(I(\nu) + \frac{1}{n} \right) - \left(I(\nu) + \frac{1}{2n} \right) + O(t) \right).
\end{aligned}$$

Άρα, $I(\nu_t) > I(\nu)$, για αρκετά μικρό t, πράγμα που έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεση ότι το ν είναι *equilibrium* μέτρο. Επομένως, κάθε K_n είναι *polar*, γεγονός που αποδεικνύει το (i).

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε το (ii), ξανά με απαγωγή σε άτοπο. Ας υποθέσουμε ότι κάποιο L_n είναι μη-κενό και έστω $z_1 \in L_n$. Από άνω-ημισυνέχεια της p_ν, υπάρχει $s > 0$ έτσι ώστε $p_\nu < I(\nu) - \dfrac{1}{n}$ στο $\overline{D(z_1,s)}$. Αφού το $z_1 \in supp\, \nu$, ο αριθμός $b := \nu(\overline{D(z_1,s)})$ είναι γνήσια θετικός. Τώρα, από το (i) και το πόρισμα 2.1.1, $\nu(K_n) = 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα $p_\nu \leq I(\nu)$ $\nu-$σχεδόν παντού στο K. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
&I(\nu) = \int_K p_\nu\, d\nu \\
&= \int_{\overline{D(z_1,s)}} p_\nu\, d\nu + \int_{K \setminus \overline{D(z_1,s)}} p_\nu\, d\nu \\
&\leq \left(I(\nu) - \frac{1}{n} \right) b + I(\nu)(1-b) \\
&< I(\nu),
\end{aligned}$$

το οποίο προφανώς είναι άτοπο. Κατά συνέπεια, κάθε L_n είναι κενό σύνολο, πράγμα που δίνει το (ii) και ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Θεώρημα 2.1.9. *Έστω E ένα F_σ, polar σύνολο και F ένα F_σ σύνολο, ξένο με το E. Τότε, υπάρχει υπαρμονική συνάρτηση $u : \mathbb{C} \to [-\infty, \infty)$, τέτοια ώστε $u = -\infty$ στο E και $u > -\infty$ στο F.*

Το θεώρημα που ακολουθεί μας βοηθάει να καταλάβουμε με ποιά έννοια τα *polar* σύνολα είναι "αμελητέα" στη θεωρία δυναμικού.

Θεώρημα 2.1.10. *[Removable Singularity Theorem] Έστω U ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$, E κλειστό polar σύνολο και u υπαρμονική συνάρτηση στο $U \setminus E$. Αν κάθε σημείο του $U \cap E$ έχει μια ανοιχτή περιοχή N τέτοια ώστε η u να είναι άνω φραγμένη στο $N \setminus E$, τότε η u έχει μοναδική υπαρμονική επέκταση σε ολόκληρο το U.*

Πόρισμα 2.1.3. *Έστω U ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$, E κλειστό polar σύνολο και h αρμονική συνάρτηση στο $U \setminus E$. Αν κάθε σημείο του $U \cap E$ έχει ανοιχτή περιοχή N τέτοια ώστε η h να είναι φραγμένη στο $N \setminus E$, τότε η h έχει μοναδική αρμονική επέκταση σε ολόκληρο το U.*

Θεώρημα 2.1.11. *Έστω U ανοιχτό και συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και E κλειστό polar σύνολο. Τότε, το σύνολο $U \setminus E$ είναι συνεκτικό.*

Θεώρημα 2.1.12. *[Επεκτεταμένο θεώρημα του Liouville] Έστω E κλειστό, polar υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και έστω u υπαρμονική συνάρτηση στο $\mathbb{C} \setminus E$, άνω φραγμένη. Τότε η u είναι σταθερή.*

Θεώρημα 2.1.13. *[Επεκτεταμένη αρχή μεγίστου] Έστω U ανοιχτό και συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και u άνω φραγμένη, υπαρμονική συνάρτηση στο U.*

(α) *Αν το ∂U είναι polar, τότε η u είναι σταθερή συνάρτηση.*

(β) *Αν το ∂U είναι $non - polar$ και $\limsup_{z \to \zeta} u(z) \leq 0$, για ζ στο ∂U εκτός από κάποιο Borel, polar σύνολο, τότε $u \leq 0$ στο U.*

Θεώρημα 2.1.14. *Το equilibrium μέτρο ενός κλειστού δίσκου $\overline{D}$ είναι ένα κανονικοποιημένο μέτρο Lebesgue στο ∂D.*

2.2 Συνάρτηση *Green*

Ορισμός 2.2.1. *Έστω U γνήσιο, ανοιχτό και συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{C}_\infty$. Λέμε ότι η απεικόνιση $g_U : U \times U \to (-\infty, \infty]$ είναι συνάρτηση Green για το U αν ικανοποιεί τα ακόλουθα:*

(α) *η απεικόνιση $g_U(., w)$ είναι αρμονική στο $U \setminus \{w\}$ και φραγμένη έξω από κάθε γειτονιά του w,*

(β) *$g_U(w, w) = \infty$ και καθώς $z \to w$,*

$$g_U(z, w) = \begin{cases} \log|z| + O(1), & w = \infty \\ -\log|z - w| + O(1), & w \neq \infty, \end{cases}$$

(γ) *$g_U(z, w) \to 0$ καθώς $z \to \zeta$ για ζ σχεδόν παντού στο ∂U.*

Παράδειγμα 2.2.1. *Αν θεωρήσουμε τον ανοιχτό δίσκο $D = D(0, 1)$, τότε η συνάρτηση $g_D(z, w) := \log\left|\dfrac{1 - z\bar{w}}{z - w}\right|$ είναι μια συνάρτηση Green για το D.*

Πράγματι, θα αποδείξουμε ότι ισχύουν οι συνθήκες $\alpha - \beta - \gamma$ του ορισμού.

(α) *Θεωρούμε* $w \in D$. *Η απεικόνιση* $\log\left|\frac{1-z\bar{w}}{z-w}\right|, z \in D$, *είναι αρμονική στο* $D \setminus \{w\}$ *διότι είναι τοπικά το πραγματικό μέρος ολόμορφης συνάρτησης. Συγκεκριμένα, για οποιοδήποτε ανοιχτό δίσκο στο* $D \setminus \{w\}$, *η συνάρτηση* $\frac{1-z\bar{w}}{z-w}$ *δεν μηδενίζεται σε αυτόν τον δίσκο, άρα ορίζεται ο κλάδος λογαρίθμου αυτής, ο οποίος είναι ολόμορφη συνάρτηση.*

Έστω τώρα U *ανοιχτή περιοχή του* w *με* $U \subset D$. *Θα δείξουμε ότι η* $g_D(.,w)$ *είναι φραγμένη στο* $D \setminus U$. *Ας υποθέσουμε ότι δεν είναι. Έστω λοιπόν ότι*

$\forall M \in \mathbb{N}, \exists z \in D \setminus U: \quad \log\left|\frac{1-z\bar{w}}{z-w}\right| > M$. *Τότε*

$\left|\frac{1-z\bar{w}}{z-w}\right| > e^M \Rightarrow |1-z\bar{w}| > e^M|z-w| > e^M dist(w, \Delta \setminus U) = e^M c,$

με $c \in \mathbb{R}$. *Έστω* $M_1 = \log\left(\frac{1+|\bar{w}|}{c}\right)$. *Για* $M > M_1$ *έχουμε ότι υπάρχει* $z \in D \setminus U$ *ώστε* $|1-z\bar{w}| > \frac{1+|\bar{w}|}{c}c = 1+|\bar{w}|$ *που είναι άτοπο, διότι* $|1-z\bar{w}| < 1+|z||\bar{w}| < 1+|\bar{w}|$ *αφού* $z \in D \setminus U$.

Άρα η $g_D(.,w)$ *είναι φραγμένη στο έξω από τυχαία γειτονιά του* w.

(β) *Έστω* $w \in D$. *Τότε* $g_D(w,w) = \log\left|\frac{1-w\bar{w}}{w-w}\right| = \log\left|\frac{1-|w|^2}{w-w}\right| = \infty$.

Επίσης, καθώς $z \to w$ *έχουμε:*

$g_D(z,w) = \log\left|\frac{1-z\bar{w}}{z-w}\right| = -\log|z-w| + \log|1-z\bar{w}|,$

όπου για τη συνάρτηση: $\log|1-z\bar{w}|, \quad z \in \Delta$ *έχουμε ότι είναι συνεχής στο* D *και καθώς* $z \to w$, $\log|1-z\bar{w}| \to \log|1-w\bar{w}| = \log|1-|w|^2| = \log(1-|w|^2) \geq \log\left(\frac{1-|w|^2}{2}\right)$.

Άρα καθώς $z \to w, \quad \log|1-z\bar{w}| \geq \log\left(\frac{1-|w|^2}{2}\right)$.

Επιπλέον, άμεσα παρατηρούμε ότι: $\forall z \in D \setminus \{w\}, \quad \log|1-z\bar{w}| < \log 2$.

Συνεπώς, συμπεραίνουμε ότι καθώς $z \to w$,

$g_D(z,w) = -\log|z-w| + O(1)$.

(γ) *Έστω* $w \in D$ *και* $\zeta \in \partial D$.

Είναι προφανές ότι $|1-\zeta\bar{w}| = |\zeta - w|$.

Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $\log\left|\dfrac{1-z\bar{w}}{z-w}\right|$ *ορισμένη στο* $\overline{D}$, *τότε είναι συνεχής στο* $\overline{D}\setminus\{w\}$, *άρα καθώς* $z\to\zeta$,

$\log\left|\dfrac{1-z\bar{w}}{z-w}\right| \to \log\left|\dfrac{1-\zeta\bar{w}}{\zeta-w}\right| = 0.$

Θεώρημα 2.2.1. *Αν* U *ανοιχτό και συνεκτικό υποσύνολο του* $\mathbb{C}_\infty$, *τέτοιο ώστε το* ∂U *να είναι* $non-polar$, *τότε υπάρχει μοναδική συνάρτηση* $Green$ g_U *για το* U.

Απόδειξη. Ξεκινάμε με την μοναδικότητα:

Ας υποθέσουμε ότι g_1 και g_2 είναι δύο συναρτήσεις $Green$ για το U. Για δοσμένο $w\in U$, ορίζουμε $h(z)=g_1(z,w)-g_2(z,w), \quad z\in U\setminus\{w\}$. Τότε η h είναι αρμονική στο $U\setminus\{w\}$, αφού οι συναρτήσεις g_1 και g_2 είναι αρμονικές στο $U\setminus\{w\}$. Επίσης, η h είναι φραγμένη έξω από κάθε γειτονιά του w (ξανά, διότι οι g_1 και g_2 είναι φραγμένες συναρτήσεις έξω από κάθε γειτονιά του w). Τώρα για $z\to w$, $z\neq w$,

αν $w\neq\infty$, τότε $h(z)=-\log|z-w|+O(1)+\log|z-w|-O(1)=O(1)$ και αν $w=\infty$, τότε $h(z)=\log|z|+O(1)-\log|z|-O(1)=O(1)$. Άρα η h είναι φραγμένη στο $U\setminus\{w\}$. Επιπλέον, $\lim\limits_{z\to\zeta}h(z)=0$ για ζ σχεδόν παντού στο ∂U.

Οπότε απο την επεκτεταμένη αρχή μεγίστου, έχουμε ότι

$h\equiv 0$ στο $U\setminus\{w\}$.

Όμως απο το πόρισμα 2.1.3 η h έχει μοναδική αρμονική επέκταση σε όλο το U, επομένως μπορούμε να την θεωρήσουμε ως συνεχή συνάρτηση σε όλο το U. Τώρα αφού η h είναι συνεχής σε όλο το U και $h(z)=0, \forall z\in U\setminus\{w\}$, πρέπει και $h(w)=0$.

Δηλαδή $h(z)=0$ για κάθε $z\in U$, άρα $g_1=g_2$ στο $U\times U$.

Θα αποδείξουμε την ύπαρξη της $g_U(z,w)$ στην περίπτωση όπου

$w=\infty\in U$.

Θέτουμε $K=\mathbb{C}_\infty\setminus U$. Το K είναι συμπαγές διότι είναι κλειστό, ως συμπλήρωμα του U, και φραγμένο γιατί $\infty\notin K$. Επίσης το K είναι $non-polar$ γιατί περιέχει το σύνορο του U το οποίο είναι $non-polar$. Έστω ν το $equilibrium$ μέτρο του. Αν ορίσουμε

$$g_U(z,\infty)=\begin{cases} p_\nu(z)-I(\nu), & z\in U\setminus\{\infty\}\\ \infty, & z=\infty\end{cases}$$

τότε με τη βοήθεια του θεωρήματος του $Frostman$ μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι η $g_U(.,\infty)$ ικανοποιεί τις συνθήκες $\alpha-\beta-\gamma$ του ορισμού 2.2.1, με $w=\infty$. Πράγματι, (α) Γνωρίζουμε ότι η p_ν είναι αρμονική στο $\mathbb{C} \setminus (supp\nu) = \mathbb{C} \setminus K = U \setminus \{\infty\}$ άρα και η

$$g_U(z, \infty) = \begin{cases} p_\nu(z) - I(\nu), & z \in U \setminus \{\infty\} \\ \infty, & z = \infty \end{cases}$$

είναι αρμονική στο $U \setminus \{\infty\}$.

Η $g_U(., \infty)$ είναι φραγμένη έξω από κάθε γειτονιά του w, διότι η $\log |z|$ είναι φραγμένη έξω από κάθε γειτονιά του ∞, άρα η $p_\nu(z) = \nu(K) \log |z| + O(|z|^{-1})$, καθώς το $z \to \infty$, είναι φραγμένη έξω από κάθε γειτονιά του ∞ και αφού $I(\nu) \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι η $p_\nu(z) - I(\nu)$ είναι φραγμένη έξω από κάθε γειτονιά του ∞.

(β) Όπως ορίστηκε παραπάνω, $g_U(\infty, \infty) = \infty$.

Τώρα καθώς $z \to \infty$,

$g_U(z, \infty) = \nu(K) \log |z| + O(|z|^{-1}) = \log |z| + O(|z|^{-1}) = O(1)$

(αφού αν $f(z) = O(\frac{1}{|z|})$ καθώς το $z \to \infty$ τότε $\exists M > 0, \exists z_0 \in \mathbb{C}$: $|f(z)| \leq M \frac{1}{|z|} < M \cdot 1, \forall z : |z| > |z_0|$, άρα $f(z) = O(1)$).

(γ) Θα δείξουμε ότι $g_U(z, \infty) \to 0$ καθώς $z \to \zeta$ για $\zeta \in \partial U \setminus E$, όπου E Borel, polar σύνολο.

Από το θεώρημα του *Frostman* έχουμε ότι $p_\nu = I(\nu)$ στο $K \setminus E$, για κάποιο E F_σ, *polar* υποσύνολο του ∂K.

Αλλά αφού U συνεκτικό και ανοιχτό, και $K = \mathbb{C}_\infty \setminus U$, έχουμε ότι $\partial U = \partial K \subset K$, άρα $p_\nu = I(\nu)$ στο $\partial K \setminus E$, όπου E F_σ (άρα και *Borel*), *polar* υποσύνολο του ∂K.

Επομένως $g_U(z, \infty) = 0$ στο $\partial U \setminus E$, όπου E Borel, polar σύνολο.

Τώρα για $w \in U, w \neq \infty$, ορίζουμε:

$$g_U(z, w) = g_{U'}\left(\frac{1}{z - w}, \infty\right), \quad z \in D,$$

όπου U' η εικόνα του U μέσω της απεικόνισης $z \mapsto (z - w)^{-1}$.

Εφαρμόζοντας τα παραπάνω για τον τόπο U', έπεται ότι η $g_U(., w)$ ικανοποιεί τις συνθήκες $\alpha - \beta - \gamma$ του ορισμού 2.2.1.

Συγκεκριμένα, η απεικόνιση $h(z) = \dfrac{1}{z - w}$, $z \in U$ είναι ολόμορφη μεταξύ των ανοιχτών U και U', και η $g_{U'}(., \infty)$ (ορισμένη όμοια με την προηγούμενη περίπτωση) είναι αρμονική συνάρτηση στο $U' \setminus \{\infty\}$. Άρα η $g_U(z, w) = g_{D'}\left(\dfrac{1}{z - w}, \infty\right) = (g_{U'}(., \infty) \circ h)(z)$ είναι αρμονική στο $U \setminus \{w\}$.

Επίσης, είναι φραγμένη έξω από κάθε γειτονιά του w, διότι η $g_{U'}\left(\frac{1}{z-w}, \infty\right)$ είναι φραγμένη έξω από κάθε γειτονιά του ∞.

Ακόμη, $g_U(w,w) = g_{U'}\left(\frac{1}{z-w}, \infty\right) = g_{U'}(\infty,\infty) = \infty$ και καθώς $z \to w$,

$$g_U(z,w) = g_{U'}\left(\frac{1}{z-w}, \infty\right) = \log\left|\frac{1}{z-w}\right| + O(1) = -\log|z-w| + O(1).$$

Τέλος, $g_U(z,w) = g_{D'}\left(\frac{1}{z-w}, \infty\right) \to 0$ καθώς $z \to \zeta$, $\zeta \in \partial D \setminus E$.

Άρα η $g_U(z,w)$ υπάρχει για κάθε $z, w \in U$.

□

Θεώρημα 2.2.2. *Έστω U ανοιχτό και συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{C}_\infty$, τέτοιο ώστε το ∂U να είναι $non-polar$. Τότε $g_U(z,w) > 0$, για κάθε $z, w \in U$.*

Απόδειξη. Έστω $w \in U$. Ορίζουμε $u(z) = -g_U(z,w), \quad z \in U$.

Έχουμε ότι η g_U είναι αρμονική στο $U \setminus \{w\}$, άρα και η u είναι αρμονική στο $U \setminus \{w\}$. Επίσης, η u είναι υπαρμονική στο w, διότι $u(w) = -g_U(w,w) = -\infty$, άρα ικανοποιείται η *local submean* ανισότητα. Συνεπώς η u είναι υπαρμονική στο U.

Επίσης, η u είναι άνω φραγμένη στο U. Πράγματι, η $g_U(.,w)$ είναι φραγμένη έξω από κάθε γειτονιά του w, επομένως η $-g_U(.,w)$ θα είναι επίσης φραγμένη έξω από κάθε γειτονιά του w. Τώρα για z κοντά στο w, η $g_U(z,w) \to \infty$, άρα η $-g_U(z,w) \to -\infty$. Συνεπώς, υπάρχει δίσκος $D(w,\rho)$ τέτοιος ώστε $-g_U(z,w) \leq 0$ για $z \in \overline{D(w,\rho)}$. Δηλαδή, στον δίσκο $\overline{D(w,\rho)}$, η $u(z) = -g_U(.,w)$ είναι άνω φραγμένη από την τιμή 0 και έξω από τον δίσκο είναι άνω και κάτω φραγμένη. Άρα η u είναι άνω φραγμένη στο U.

Επιπλέον, $\limsup_{z\to\zeta} u(z) = 0$, για ζ σχεδόν παντού στο ∂U.

Άρα, από την επεκτεταμένη αρχή του μεγίστου, $u \leq 0$ στο U.

Όμως, αν $u(z) = 0$, για κάποιο $z \in U$, τότε από την αρχή μεγίστου για τις υπαρμονικές συναρτήσεις, θα είχαμε $u \equiv 0$ στο U, που είναι άτοπο (αφού για παράδειγμα $u(w) = -g_U(w,w) = -\infty$).

Άρα, $u < 0$ στο U, συνεπώς $g_U(z,w) > 0$, για κάθε $z, w \in U$. □

Θεώρημα 2.2.3. *[Subordination Principle]*

Έστω U_1, U_2 ανοιχτά και συνεκτικά υποσύνολα του $\mathbb{C}_\infty$, με $non-polar$ σύνορα, και έστω $f: U_1 \to U_2$ μερόμορφη συνάρτηση. Τότε

$$g_{U_2}(f(z), f(w)) \geq g_{U_1}(z,w), \text{ για κάθε } z, w \in U_1,$$

και ισχύει η ισότητα αν η f είναι σύμμορφη απεικόνιση από το U_1 στο U_2.

Απόδειξη. Έστω $w \in U_1$. Ας υποθέσουμε αρχικά ότι $w \neq \infty$ και $f(w) \neq \infty$. Ορίζουμε $u(z) = g_{U_1}(z,w) - g_{U_2}(f(z), f(w)), \quad \forall z \in U_1 \setminus \{w\}$.

Τότε η u είναι αρμονική στο $U_1 \setminus \{w\}$, διότι η $g_{U_2} \circ f$ είναι αρμονική συνάρτηση στο $U_1 \setminus \{w\}$ (ως αρμονική σύνθεση με ολόμορφη συνάρτηση) και η g_{U_1} είναι επίσης αρμονική στο $U_1 \setminus \{w\}$.

Επίσης, η u είναι άνω φραγμένη έξω από κάθε γειτονιά του w. Πράγματι, η $g_{U_1}(.,w)$ είναι φραγμένη έξω από κάθε γειτονιά του w, άρα για τυχαίο ανοιχτό υποσύνολο του U_1, έστω V_w, με $w \in V_w$, υπάρχει $M > 0$, τέτοιο ώστε $g_{U_1}(z,w) < M, \quad \forall z \in U_1 \setminus V_w$, που συνεπάγεται ότι $u(z) = g_{U_1}(z,w) - g_{U_2}(f(z), f(w)) < g_{U_1}(z,w) < M, \quad \forall z \in U_1 \setminus V_w$ (αφού $g_{U_2}(f(z), f(w)) > 0$).

Καθώς τώρα $z \to w$,

$u(z) = -\log|z-w| + O(1) + \log|f(z)-f(w)| - O(1) = \log\left|\dfrac{f(z)-f(w)}{z-w}\right| + O(1) = \log|f'(w)| + O(1)$,

άρα η u είναι άνω φραγμένη στο U_1.

Τέλος, αφού $g_{U_2} > 0$, $\limsup_{z\to\zeta} u(z) \leq \lim_{z\to\zeta} g_{U_1}(z,w) = 0$, για ζ σχεδόν παντού στο ∂U_1.

Άρα, από την επεκτεταμένη αρχή μεγίστου, $u \leq 0$, στο $U_1 \setminus \{w\}$, που δίνει τη ζητούμενη ανισότητα.

Στην περίπτωση όπου $w = \infty$ και $f(w) \neq \infty$,

όπως και στην κατασκευή της συνάρτησης *Green*, θα έχουμε $g_{U_1}(z,\infty) = g_{U_1'}\left(\dfrac{1}{z}, 0\right)$, όπου U_1' είναι η εικόνα του U_1 μέσω της απεικόνισης $z \mapsto \dfrac{1}{z}$.

Άρα το αποτέλεσμα έπεται εφαρμόζοντας την προηγούμενη περίπτωση στη συνάρτηση $z \mapsto f(\dfrac{1}{z}) : U_1' \to U_2$.

Στην περίπτωση όπου $f(w) = \infty$, όμοια θεωρούμε την $g_{U_2}(f(z), f(w)) = g_{U_2'}\left(\dfrac{1}{f(z)}, 0\right)$, όπου U_2' είναι η εικόνα του U_2 μέσω της απεικόνισης $z \mapsto \dfrac{1}{f}(z) : U_1 \to U_2'$.

Τέλος, αν η f είναι σύμμορφη απεικόνιση από το U_1 στο U_2, τότε μπορούμε να καταλήξουμε στη σχέση $g_{U_2}(f(z), f(w)) \leq g_{U_1}(z,w)$ μέσω της f^{-1} και έτσι να έχουμε την ισότητα. □

Πόρισμα 2.2.1. *Έστω U_1, U_2 ανοιχτά και συνεκτικά υποσύνολα του $\mathbb{C}_\infty$, με non − polar σύνορα. Αν $U_1 \subset U_2$, τότε $g_{U_1}(z,w) \leq g_{U_2}(z,w)$, για κάθε $z, w \in U_1$.*

Απόδειξη. Άμεσο από το θεώρημα 2.2.3, με $f : U_1 \to U_2$ την απεικόνιση εγκλεισμού. $\square$

Θεώρημα 2.2.4. *Έστω U ανοιχτό και συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{C}_\infty$, τέτοιο ώστε το ∂U να είναι $non-polar$, και έστω $(U_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία υποσυνόλων του U τέτοια ώστε για κάθε φυσικό n το U_n είναι τόπος, $U_1 \subset U_2 \subset U_3 \subset \ldots$ και $\bigcup\limits_n U_n = U$.*

Τότε $\lim\limits_{n\to\infty} g_{U_n}(z,w) = g_U(z,w)$, για κάθε $z, w \in U$.

Απόδειξη. Έστω $w \in U$. Τότε το $w \in U_{n_0}$, για κάποιο $n_0 \in \mathbb{N}$ και παραλείποντας τους πρώτους $n_0 - 1$ όρους και αλλάζοντας την αρίθμηση των δεικτών στην ακολουθία $(U_n)_n$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $n_0 = 1$. Για $n \geq 1$ ορίζουμε:

$h_n(z) = g_U(z,w) - g_{U_n}(z,w)$, για κάθε $z \in U_n \setminus \{w\}$.

Τότε η h_n είναι αρμονική στο $U_n \setminus \{w\}$ και φραγμένη κοντά στο w, αφού για $z \to w$ έχουμε $h_n(z) = \log|z-w| + O(1) - \log|z-w| - O(1) = O(1)$.

Από το removable singularity theorem (πόρισμα 2.1.3) η h_n επεκτείνεται σε αρμονική συνάρτηση σε όλο το U_n.

Από το πόρισμα 2.2.1, $h_n \geq h_{n+1}$ στο U_n, για κάθε n, άρα μπορούμε να ορίσουμε την απεικόνιση $u : U \to [-\infty, \infty)$ με $u(z) = \lim\limits_{n\to\infty} h_n(z), \forall z \in U$ (αφού η ακολουθία $h_n(z)$ είναι φθίνουσα ακολουθία πραγματικών αριθμών και έτσι το όριο $\lim\limits_{n\to\infty} h_n(z)$ υπάρχει για κάθε $z \in U$). Επομένως από το θεώρημα 1.4.8, η u είναι υπαρμονική στο U.

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι η u είναι άνω φραγμένη στο U. Πράγματι, αφου το σύνολο U_1 είναι ανοιχτό, επιλέγουμε δίσκο $D(w,\rho) \subset U_1$ και έχουμε ότι $u \leq h_1$ στο $D(w,\rho)$, διότι $u = \lim\limits_{n\to\infty} h_n$ και η ακολουθία h_n είναι φθίνουσα. Όμως η απεικόνιση $h_1(z) = g_U(z,w) - g_{U_1}(z,w)$ είναι φραγμένη για z κοντά στο w, γιατί αν $w = \infty$ τότε $h_1(z) = g_U(z,w) - g_{U_1}(z,w) = \log|z| + O(1) - \log|z| - O(1) = O(1)$, ενώ αν $w \neq \infty$ τότε $h_1(z) = g_U(z,w) - g_{U_1}(z,w) = -\log|z-w| + O(1) + \log|z-w| - O(1) = O(1)$. Άρα η u είναι άνω φραγμένη για z κοντά στο w.

Μένει να αποδείξουμε ότι η u είναι άνω φραγμένη για z έξω από κάθε περιοχή του w. Έχουμε λοιπόν ότι $u(z) = \lim\limits_{n\to\infty} h_n(z) = g_U(z,w) - \lim\limits_{n\to\infty} g_{U_n}(z,w)$. Επίσης, για κάθε $z \in U$, η ακολουθία $(g_{U_n}(z,w))_n$ είναι αύξουσα ακολουθία πραγματικών θετικών αριθμών, άρα $\lim\limits_{n\to\infty} g_{U_n}(z,w) > 0$. Οπότε $u(z) \leq g_U(z,w)$. Αλλά η $g_U(z,w)$ είναι άνω φραγμένη για z έξω από κάθε περιοχή του w, άρα το ίδιο θα ισχύει και για την u. Συνεπώς η u είναι άνω φραγμένη στο U.

Επίσης, $\limsup\limits_{z\to\zeta} u(z) \leq \lim\limits_{z\to\zeta} g_U(z,w) = 0$, για ζ σχεδόν παντού στο ∂U.

Επομένως, από την επεκτεταμένη αρχή μεγίστου, $u \leq 0$ στο U. Δηλαδή, $\liminf_{n\to\infty} g_{U_n}(z,w) \geq g_U(z,w)$, $z \in U$.

Αλλά από το πόρισμα 2.2.1 έχουμε επίσης ότι

$\limsup_{n\to\infty} g_{U_n}(z,w) \leq g_U(z,w)$, $z \in U$.

Συνδυάζοντας τις δύο ανισότητες, έχουμε ότι

$\liminf_{n\to\infty} g_{U_n}(z,w) = \limsup_{n\to\infty} g_{U_n}(z,w) = \lim_{n\to\infty} g_{U_n}(z,w) = g_U(z,w)$, $z \in U$.

Και αφού το w ήταν τυχαίο, το αποτέλεσμα ισχύει για κάθε $z, w \in U$. $\square$

2.3 Γενική Λύση του Προβλήματος του *Dirichlet*

Θυμίζουμε ότι για δοσμένο χωρίο U και συνεχή συνάρτηση $\phi : \partial U \to \mathbb{R}$, το πρόβλημα του *Dirichlet* είναι η εύρεση αρμονικής συνάρτησης h στο U, τέτοια ώστε $\lim_{z\to\zeta} h(z) = \phi(\zeta)$, για κάθε $\zeta \in \partial U$. Από το θεώρημα 1.2.1, αν μια τέτοια λύση υπάρχει τότε είναι μοναδική. Επίσης, αν το χωρίο U είναι ένας ανοιχτός δίσκος τότε το πρόβλημα του *Dirichlet* έχει πάντα λύση, η οποία είναι το ολοκλήρωμα *Poisson* της συνεχής συνάρτησης ϕ. Όμως, για τυχαίο ανοιχτό και συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ το πρόβλημα του *Dirichlet* μπορεί να μην έχει λύση.

Παράδειγμα 2.3.1. *Ας θεωρήσουμε το σύνολο* $U = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ *το οποίο είναι ανοιχτό και συνεκτικό υποσύνολο του* $\mathbb{C}$ *και ας ορίσουμε την συνάρτηση* $\phi : \partial U \to \mathbb{R}$ *με* $\phi(z) = \begin{cases} 0, & |z| = 1 \\ 1, & z = 0 \end{cases}$. *Άμεσα προκύπτει ότι η συνάρτηση* ϕ *είναι συνεχής. Θα αποδείξουμε ότι το πρόβλημα του Dirichlet σε αυτή τη περίπτωση δεν έχει λύση. Ας θεωρήσουμε ότι* $h : U \to \mathbb{R}$ *είναι λύση στο πρόβλημα του Dirichlet, δηλαδή ότι η* h *είναι αρμονική στο* U *με* $\lim_{z\to\zeta} h(z) = \phi(\zeta), \forall \zeta \in \partial U$ *και θα καταλήξουμε σε άτοπο.*

Θεωρούμε τον ανοιχτό δίσκο $D(0,1) \subset \mathbb{C}$ *και έχουμε ότι η* h *είναι αρμονική στο* $D(0,1) \setminus \{0\}$. *Αλλά,* $\lim_{z\to 0} h(z) = \phi(0) = 1 < +\infty$, *άρα από θεωρία αρμονικών συναρτήσεων, το* 0 *είναι επουσιώδης ανωμαλία της* h. *Συνεπώς η* h *μπορεί να οριστεί στο σημείο* 0 *και να γίνει αρμονική σε ολόκληρο τον δίσκο* $D(0,1)$.

Επίσης, αν ορίσουμε $h(\zeta) = \lim_{z\to\zeta} h(z) = 0, \quad \forall \zeta \in \partial D(0,1)$, *τότε η* h *επεκτείνεται με συνεχή τρόπο στον κλειστό δίσκο* $\overline{D(0,1)}$. *Από την αρχή του μεγίστου για τις αρμονικές συναρτήσεις, θα έχουμε ότι* $h \leq 0$ *στο* $D(0,1)$ *και συγκεκριμένα* $h(0) \leq 0$, *πράγμα που έρχεται σε αντίφαση με την συνθήκη*

$\lim_{z\to 0} h(z) = \phi(0) = 1$. *Άρα για το σύνολο* $U = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ *και τη δοσμένη συνάρτηση* ϕ, *το πρόβλημα του Dirichlet δεν έχει λύση.*

Ορισμός 2.3.1. *Έστω* U *ένα γνήσιο ανοιχτό και συνεκτικό υποσύνολο του* $\mathbb{C}_\infty$ *και έστω* $\phi : \partial U \to \mathbb{R}$ *μια φραγμένη συνάρτηση. Καλούμε συσχετισμένη συνάρτηση Perron, και συμβολίζουμε με* $H_U\phi$, *την συναρτηση που ορίζεται ως εξής:*

$$H_U\phi : U \to \mathbb{R}, \quad \text{με} \quad H_U\phi = \sup_{u\in V} u,$$

όπου με V *συμβολίζουμε την οικογένεια όλων των υπαρμονικών συναρτήσεων* u *στο* U, *για τις οποίες* $\limsup_{z\to\zeta} u(z) \le \phi(\zeta)$, *για κάθε* ζ *στο* ∂U.

Παρατήρηση 2.3.1. *(α) Το σύνολο* V *του παραπάνω ορισμού είναι μη κενό. Πράγματι, αφού η συνάρτηση* ϕ *είναι φραγμένη στο* ∂U, *υπάρχει πραγματικός αριθμός* $M > 0$, *τέτοιος ώστε* $|\phi(z)| < M$, *για κάθε* $z \in \partial U$. *Θεωρούμε την απεικόνιση* $u : U \to \mathbb{R}$ *με* $u(z) = -M, \quad z \in U$. *Τότε η* u *είναι υπαρμονική στο* U *και* $\limsup_{z\to\zeta} u(z) = \lim_{z\to\zeta}(u(z)) = -M < \phi(\zeta)$, *για κάθε* $\zeta \in U$. *Άρα η* u *είναι στοιχείο του* U, *δηλαδή το* U *είναι μη κενό.*

(β) Έστω $z \in U$. *Το σύνολο* $\{u(z) : u \in V\}$ *είναι άνω φραγμένο, διότι αν* M *είναι ένα άνω φράγμα της συνάρτησης* ϕ, *τότε για κάθε συνάρτηση* $u \in V$, *έχουμε ότι* $\limsup_{z\to\zeta} u(z) \le \phi(z) < M, \ \forall\zeta \in \partial U$. *Δηλαδή,* $\limsup_{z\to\zeta} u(z) - M < 0, \ \forall\zeta \in \partial U$. *Άρα από αρχή μεγίστου για τις υπαρμονικές συναρτήσεις (θεώρημα 1.4.5), έχουμε ότι* $u - M \le 0$, *για κάθε* z *στο* U.

Παρατήρηση 2.3.2. *Με στόχο να εξετάσουμε τις συνθήκες κάτω από τις οποίες υπάρχει λύση στο πρόβλημα του Dirichlet, και κυρίως να επαναδιατυπώσουμε το πρόβλημα ώστε να έχει πάντα λύση, επιτρέπουμε το* U *του ορισμού 1.2.1 να είναι οποιοδήποτε γνήσιο, ανοιχτό και συνεκτικό υποσύνολο του* $\mathbb{C}_\infty$ *και θεωρούμε τυχαίες φραγμένες συναρτήσεις* $\phi : \partial U \to \mathbb{R}$, *αντί για συνεχείς.*

Με τις παραπάνω τροποποιήσεις, αν το πρόβλημα του Dirichlet έχει λύση, τότε η λύση είναι η συσχετισμένη συνάρτηση του Perron. Πράγματι, έστω U *γνήσιο, ανοιχτό και συνεκτικό υποσύνολο του* $\mathbb{C}_\infty$ *και* $\phi : \partial U \to \mathbb{R}$ *φραγμένη συνάρτηση. Αν η* h *είναι λύση στο πρόβλημα του Dirichlet, δηλαδή αν η* h *είναι αρμονική στο* U *με* $\lim_{z\to\zeta} h(z) = \phi(z), \forall\zeta \in \partial U$, *τότε προφανώς* $h \in V$.*Άρα* $h \le \sup_{u\in U} u = H_U\phi$.

Από την άλλη μεριά, αν $u \in V$ τότε η συνάρτηση $u - h : U \to \mathbb{R}$ είναι υπαρμονική ως διαφορά υπαρμονικών συναρτήσεων και $\limsup_{z\to\zeta}(u(z) - h(z)) = \limsup_{z\to\zeta} u(z) - \lim_{z\to\zeta} h(z) \leq \phi(\zeta) - \phi(\zeta) = 0, \forall \zeta \in \partial U$. Άρα από την αρχή μεγίστου για τις υπαρμονικές συναρτήσεις, θα έχουμε ότι $u - h \leq 0$ στο U, δηλαδή $u \leq h$ στο U. Αφού όμως η u ήταν τυχαίο στοιχείο του V, θα έχουμε ότι $\sup_{u\in V} u = H_U\phi \leq h$. Επομένως, με την υπόθεση πως υπάρχει λύση στο πρόβλημα του Dirichlet καταλήξαμε στο ότι $H_U\phi = h$.

Λήμμα 2.3.1. *[Μετασχηματισμός Poisson] Έστω U ανοιχτό και συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{C}$, D ανοιχτός δίσκος με $\overline{D} \subset U$ και u υπαρμονική συνάρτηση στο U με $u \not\equiv -\infty$. Αν ορίσουμε την συνάρτηση $\tilde{u}$ στο U με*

$$\tilde{u}(z) = \begin{cases} P_D u, & z \in D \\ u, & z \in U \setminus D \end{cases}$$

τότε η $\tilde{u}$ είναι υπαρμονική στο U, αρμονική στο D και $\tilde{u} \geq u$ στο U.

Απόδειξη. Αρχικά, από γνωστό θεώρημα, αφού η u είναι υπαρμονική συνάρτηση με $u \neq -\infty$, τότε είναι *Lebesgue* ολοκληρώσιμη στο ∂D, οπότε το $P_D u$ έχει νόημα.

Από το θεώρημα 1.2.2 (α) έχουμε επίσης ότι η $P_D u$ είναι αρμονική στο D, άρα από το θεώρημα 1.4.6 προκύπτει ότι $P_D u \geq u$ στο D, δηλαδή $\tilde{u} \geq u$ στο U.

Μένει να αποδείξουμε ότι η $\tilde{u}$ είναι υπαρμονική στο U. Έχουμε λοιπόν ότι η u είναι υπαρμονική στο ανοιχτό $U \subseteq \mathbb{C}$ και η $P_D u$ αρμονική (ειδικότερα και υπαρμονική) συνάρτηση στο ανοιχτό υποσύνολο D του U. Αν αποδείξουμε ότι $\limsup_{z\to\zeta} P_D u(z) \leq u(\zeta)$, για κάθε $\zeta \in U \cap \partial D = \partial D$, τότε από το θεώρημα *Gluing* έχουμε ότι η $\tilde{u} = \begin{cases} \max(P_D u, u) = P_D u, & \text{στο } D \\ u, & \text{στο } U \setminus D \end{cases}$

είναι υπαρμονική στο U, δηλαδή έχουμε το ζητούμενο.

Γνωρίζουμε (από το θεώρημα 1.4.1) ότι η συνάρτηση u, ως άνω ημισυνεχής συνάρτηση στο συμπαγές σύνολο ∂D, είναι άνω φραγμένη στο ∂D. Άρα από το θεώρημα 1.4.2, υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις ψ_n στο ∂D τέτοιες ώστε $\psi_n \searrow u$ στο ∂D. Τότε για κάθε n, έχουμε ότι

$$u(z) \leq \psi_n(z), \forall z \in \partial D \Rightarrow P_D u(z) \leq P_D \psi_n(z), \forall z \in \partial D,$$

άρα για κάθε n ισχύει:

$$\limsup_{z\to\zeta} P_D u(z) \leq \lim_{z\to\zeta} P_D\psi_n(z) = \psi_n(\zeta),$$

για κάθε $\zeta \in \partial D$ (με την τελευταία ισότητα να προκύπτει από το θεώρημα 1.2.2 (β)).

Αφήνοντας το $n \to \infty$ έχουμε ότι $\limsup_{z\to\zeta} P_D u(z) \leq u(\zeta)$, για κάθε $\zeta \in \partial D$, γεγονός που ολοκληρώνει την απόδειξη. $\square$

Θεώρημα 2.3.1. *Έστω U γνήσιο, ανοιχτό και συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{C}_\infty$ και $\phi : \partial U \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Τότε η $H_U\phi$ είναι αρμονική στο U και*

$$\sup_U |H_U\phi| \leq \sup_{\partial U} |\phi|.$$

Απόδειξη. Έστω V η οικογένεια όλων των υπαρμονικών συναρτήσεων u στο U, τέτοιων ώστε $\limsup_{z\to\zeta} u(z) \leq \phi(\zeta), \quad \forall\zeta \in \partial U$.

Θέτουμε $M = \sup_{\partial U} |\phi|$. Προφανώς, $M \in \mathbb{R}$ αφού η ϕ είναι φραγμένη συνάρτηση στο U. Τότε, όπως αποδείξαμε και στην παρατήρηση 2.3.1 (α), για οποιοδήποτε άνω φράγμα M της ϕ ισχύει ότι $-M \in V$, άρα

$$H_U\phi \geq -M.$$

Επίσης, για δοσμένη $u \in V$ και για κάθε $z \in U$, ξανά από την παρατήρηση 2.3.1 (β), έχουμε ότι $u(z) \leq M$. Αφού όμως η u ήταν τυχαία στο V έχουμε ότι

$$H_U\phi = \sup_{u\in V} u \leq M.$$

Συνεπώς $|H_U\phi| \leq M, \quad \forall z \in U$ και άρα $\sup_U |H_U\phi| \leq \sup_{\partial U} |\phi|$, που είναι η ζητούμενη ανισοτική σχέση.

Μένει να αποδείξουμε ότι η $H_U\phi$ είναι αρμονική στο U. Αποδεικνύουμε αρχικά στην περίπτωση όπου $\infty \notin U$, δηλαδή όταν το U είναι ανοιχτό και συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{C}$. Τότε, αρκεί να αποδείξουμε ότι η $H_U\phi$ είναι αρμονική σε κάθε ανοιχτό δίσκο $D = D(w,\rho)$ με $\overline{D(w,\rho)} \subset U$. Σταθεροποιούμε ένα τέτοιο D και ένα σημείο $w_0 \in D$. Από τον ορισμό του $H_U\phi = \sup_{u\in V} u$, μπορούμε να βρούμε ακολουθία $(u_n)_{n\geq 1} \in V$, τέτοια ώστε $u_n(w_0) \to H_U\phi(w_0)$. Αντικαθιστώντας κάθε όρο u_n με το $max(u_1, \cdots, u_n)$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $u_1 \leq u_2 \leq u_3 \leq \cdots$ στο U.

Τώρα για κάθε n, έστω $\tilde{u}_n$ ο μετασχηματισμός *Poisson* του u_n, όπως ορίστηκε στο λήμμα 2.3.1. Τότε αφού $u_n \leq u_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$, άμεσα προκύπτει ότι $P_D u_n \leq P_D u_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (όπου $P_D u_n$ το ολοκλήρωμα *Poisson* της u_n), άρα $\tilde{u}_1 \le \tilde{u}_2 \le \tilde{u}_3 \le \cdots$ στο U. Επίσης, για κάθε $z \in U$, η ακολουθία $(\tilde{u}_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι άνω φραγμένη στο U. Πράγματι, αν $z \in U \setminus D$ τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$\tilde{u}_n(z) = u_n(z) \le \sup_{\partial U} |\phi|$, αφού $u_n \in U$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Αν τώρα $z \in D$ τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$\tilde{u}_n(z) = P_D u_n(z) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} P(\frac{z-w}{\rho}, e^{i\theta}) u_n(w+\rho e^{i\theta})\, d\theta$

$\le \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} P(\frac{z-w}{\rho}, e^{i\theta}) \sup_{\partial U}|\phi|\, d\theta = \sup_{\partial U}|\phi| \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(\frac{z-w}{\rho}, e^{i\theta})\, d\theta = \sup_{\partial U}|\phi|$ (από λήμμα 1.2.1).

Αφού λοιπόν για κάθε $z \in U$, η ακολουθία των $(\tilde{u}_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσα και άνω φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών, έχουμε ότι συγκλίνει κατά σημείο. Έστω $\tilde{u} := \lim_{n\to\infty} \tilde{u}_n$. Ισχυριζόμαστε τα εξής:

(i) $\tilde{u} \le H_U\phi$ στο U,

(ii) $\tilde{u}(w_0) = H_U\phi(w_0)$,

(iii) η $\tilde{u}$ είναι αρμονική στο D.

Πράγματι, από το λήμμα 2.3.1 κάθε $\tilde{u}_n$ είναι υπαρμονική στο U. Επίσης, για κάθε n στο $\mathbb{N}$ και για z αρκετά κοντά στο ∂U έχουμε ότι $\tilde{u}_n(z) = u_n(z)$, άρα $\limsup_{z\to\zeta} \tilde{u}_n(z) = \limsup_{z\to\zeta} u_n(z) \le \phi(\zeta)$, για κάθε $\zeta \in \partial U$. Δηλαδή, $\tilde{u}_n \in U$. Επομένως, $\tilde{u}_n \le \sup_{u\in U} u = H_U\phi$, $\forall n \in \mathbb{N}$ και συνεπώς $\lim_{n\to\infty} \tilde{u}_n \le H_U\phi$, που αποδεικνύει τον ισχυρισμό (i).

Από το λήμμα 2.3.1 έχουμε επίσης ότι $\tilde{u}_n \ge u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, οπότε

$$\tilde{u}(w_0) = \lim_{n\to\infty} \tilde{u}_n(w_0) \ge \lim_{n\to\infty} u_n(w_0) = H_U\phi(w_0)$$

και από το (i) έχουμε ειδικότερα ότι $\tilde{u}(w_0) \le H_U\phi(w_0)$, άρα $\tilde{u}(w_0) = H_U\phi(w_0)$.

Τέλος, κάθε $\tilde{u}_n$ είναι αρμονική στο D και $\tilde{u}_1 \le \tilde{u}_2 \le \cdots$ στο D. Από το θεώρημα του *Harnack* (1.3.5), $\tilde{u}_n \to \tilde{u}$ τοπικά ομοιόμορφα και η $\tilde{u}$ είναι αρμονική στο D, που αποδεικνύει το (iii).

Για την απόδειξη του θεωρήματος, αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι $\tilde{u} = H_U\phi$ στο D. Γι αυτό το σκοπό επιλέγουμε ένα τυχαίο σημείο $w \in D$ και μια ακολουθία $(v_n)_{n\ge 1} \in V$ τέτοια ώστε $v_n(w) \to H_U\phi(w)$ (ξανά, υπάρχει τέτοια ακολουθία από τον ορισμό του $H_U\phi$).

Αντικαθιστώντας τώρα κάθε όρο v_n με το $max(u_1, \cdots, u_n, v_1, \cdots, v_n)$ μπορούμε να υποθέσουμε ότι $v_1 \le v_2 \le v_3 \le \cdots$ και $v_n \ge u_n$ στο U.

Έστω $\tilde{v}_n$ ο μετασχηματισμός *Poisson* του v_n. Τότε όμοια με πριν $\tilde{v}_n \nearrow \tilde{v}$, όπου

(i) $\tilde{v} \leq H_U\phi$ στο U,

(ii) $\tilde{v}(w) = H_U\phi(w)$,

(iii) η $\tilde{v}$ είναι αρμονική στο D.

Ειδικότερα από το (i) έχουμε ότι $\tilde{v}(w_0) \leq H_U\phi(w_0) = \tilde{u}(w_0)$. Από την άλλη μεριά, $\tilde{v}_n \geq \tilde{u}_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$, άρα $\tilde{v} \geq \tilde{u}$. Άρα η συνάρτηση $\tilde{u}-\tilde{v} : U \to \mathbb{R}$, η οποία είναι αρμονική στο D παρουσιάζει μέγιστη τιμή, το 0, στο σημείο w_0. Από την αρχή μεγίστου για τις αρμονικές συναρτήσεις, προκύπτει ότι $\tilde{u} - \tilde{v} \equiv 0$ στο 0 στο D. Δηλαδή, $\tilde{u}(w) = \tilde{v}(w) = H_U\phi(w)$.

Εφόσον το w είναι τυχαίο στοιχείο του D, έπεται ότι $\tilde{u} = H_U\phi$ στο D, άρα η $H_U\phi$ είναι αρμονική στο D. Και αφού το D είναι τυχαίο ανοιχτό σύνολο με $\overline{D} \subset U$, η $H_U\phi$ είναι αρμονική στο U.

Έστω τώρα ότι $\infty \in U$. Έστω $\phi : \partial U \to \mathbb{R}$ μια φραγμένη συνάρτηση. Θα αποδείξουμε ότι η $H_U\phi : U \to \mathbb{R}$, με $H_U\phi = \sup_{u \in V} u$, όπου

$V = \{u : U \to [-\infty, +\infty)$, υπαρμονική, $\limsup_{z \to \zeta} u(z) \leq \phi(\zeta), \forall \zeta \in \partial U\}$

είναι αρμονική στο U. Έχουμε από υπόθεση ότι $\mathbb{C}_\infty \setminus U \neq \emptyset$, άρα υπάρχει $\alpha \in \mathbb{C}_\infty$ τέτοιο ώστε $\alpha \notin U$. Θεωρούμε την απεικόνιση $f : U \to \mathbb{C}$ με $f(z) = \dfrac{1}{\alpha - z}$. Τότε το $f(U)$ δεν περιέχει το ∞ και περιέχει το 0. Έστω $U' = f(U)$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι η απεικόνιση $f : U \to U'$ είναι σύμμορφη. Τώρα η συνάρτηση $H_{U'}(\phi \circ f^{-1}) : U' \to \mathbb{R}$ με $H_{U'}(\phi \circ f^{-1}) = \sup_{\tilde{u} \in V'} \tilde{u}$, όπου

$V' = \{\tilde{u} : U' \to \mathbb{R}, \tilde{u}$ υπαρμονική, $\limsup_{z \to \tilde{\zeta}} \tilde{u}(z) \leq \phi \circ f^{-1}(\tilde{\zeta}), \forall \tilde{\zeta} \in \partial U'\}$,

είναι αρμονική, όπως δείξαμε στην προηγούμενη περίπτωση.

Θα αποδείξουμε ότι $H_{U'}(\phi \circ f^{-1}) \circ f = H_U\phi$. Πράγματι, έστω $\tilde{u} \in V'$. Τότε η $\tilde{u} \circ f : U \to [-\infty, \infty)$ είναι υπαρμονική στο U, διότι είναι σύνθεση της υπαρμονικής $\tilde{u}$ με την ολόμορφη συνάρτηση f. Για κάθε $\zeta \in \partial U$,

$\limsup_{z \to \zeta} (\tilde{u} \circ f)(z) = \limsup_{f(z) \to \tilde{\zeta}} \tilde{u}(f(z))$, όπου $f(z) \in U'$ και $\tilde{\zeta} \in \partial U'$. Άρα, $\limsup_{z \to \zeta} (\tilde{u} \circ f)(z) \leq \phi \circ f^{-1}(\tilde{\zeta}) = \phi(\zeta)$. Άρα, $\tilde{u} \circ f \in U$. Δηλαδή, για τυχαία $\tilde{u} \in V'$, $\tilde{u} \circ f \leq H_U\phi$. Συνεπώς, $\sup_{\tilde{u} \in V'} (\tilde{u} \circ f) = (\sup_{\tilde{u} \in V'} \tilde{u}) \circ f = H_{U'}(\phi \circ f^{-1}) \circ f \leq H_U\phi$.

Έστω τώρα $u \in V$. Τότε, η $u \circ f^{-1} : U' \to [-\infty, \infty)$ είναι υπαρμονική στο U' (αφού η f^{-1} είναι ολόμορφη συνάρτηση) και για κάθε $\tilde{\zeta} \in \partial U'$ ισχύει

$\limsup_{z\to\tilde{\zeta}} u\circ f^{-1}(z) = \limsup_{f^{-1}(z)\to f(\tilde{\zeta})} u(f^{-1}(z)) \leq \phi(f(\tilde{\zeta}))$, όπου $f^{-1}(z)\in U$.
Άρα, $u\circ f^{-1}\in V'$, δηλαδή $u\circ f^{-1}\leq H_{U'}(\phi\circ f^{-1})$. Άρα, $u\leq H_{U'}(\phi\circ f^{-1})\circ f$. Και αφού η u ήταν τυχαία συνάρτηση στο V, έχουμε ότι $\sup_{u\in V} u = H_U\phi \leq H_{U'}(\phi\circ f^{-1})\circ f$. Άρα, $H_{U'}(\phi\circ f^{-1})\circ f = H_U\phi$.

Αφού τώρα η $H_{U'}(\phi\circ f^{-1})$ είναι αρμονική στο U' και η f είναι ολόμορφη στο U, προκύπτει ότι η $H_U\phi$ είναι αρμονική στο U, γεγονός που ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Λήμμα 2.3.2. *Αν U γνήσιο, ανοιχτό και συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{C}_\infty$ και $\phi:\partial U\to\mathbb{R}$ μια φραγμένη συνάρτηση, τότε $H_U\phi\leq -H_U(-\phi)$ στο U.*

Απόδειξη. Έστω V η οικογένεια των υπαρμονικών συναρτήσεων, όπως περιγράφηκε στον ορισμό 2.3.1 και έστω W η αντίστοιχη οικογένεια συναρτήσεων για την φραγμένη συνάρτηση $-\phi:\partial U\to\mathbb{R}$.

Τότε, δοσμένων $u\in V, v\in W$, έχουμε ότι η συνάρτηση $u+v:\partial U\to\mathbb{R}$, με $(u+v)(z)=u(z)+v(z),\quad z\in\partial U$, είναι υπαρμονική στο ∂U και ικανοποιεί:

$$\limsup_{z\to\zeta}(u+v)(z)\leq \limsup_{z\to\zeta}u(z)+\limsup_{z\to\zeta}v(z)\leq\phi(\zeta)+(-\phi(\zeta))=0,\quad \forall z\in\partial U.$$

Άρα, από την αρχή του μεγίστου για τις υπαρμονικές συναρτήσεις, προκύπτει ότι $u+v\leq 0$ στο U. Επομένως, $\sup_{u\in V, v\in W}(u+v)\leq 0$ στο U,

άρα $H_U\phi + H_U(-\phi)\leq 0$ στο U, δηλαδή $H_U\phi\leq -H_U(-\phi)$ στο U. □

Ορισμός 2.3.2. *Έστω U γνήσιο, ανοιχτό και συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{C}_\infty$ και έστω $\zeta_0\in\partial U$. Θεωρούμε υπαρμονική συνάρτηση $b:U\cap N\to\mathbb{R}$, όπου N ανοιχτή περιοχή του ζ_0. Η συνάρτηση b καλείται barrier στο ζ_0 αν και μόνο αν ικανοποιεί τα εξής:*

$$b<0 \text{ στο } U\cap N \text{ και } \lim_{z\to\zeta_0} b(z)=0.$$

Ένα συνοριακό σημείο στο οποίο υπάρχει barrier καλείται κανονικό (regular). Αν κάθε ζ στο ∂U είναι κανονικό, τότε το σύνολο U ονομάζεται κανονικό.

Λήμμα 2.3.3. *Έστω U γνήσιο, ανοιχτό και συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{C}_\infty$ και $f:\mathbb{C}_\infty\to\mathbb{C}_\infty$ σύμμορφη απεικόνιση. Αν ζ_0 είναι ένα κανονικό συνοριακό σημείο του U τότε το $f(\zeta_0)$ είναι κανονικό συνοριακό σημείο του $f(U)$.*

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε αρχικά ότι το $f(\zeta_0)$ είναι συνοριακό σημείο του $f(U)$. Πράγματι, αφού ζ_0 είναι συνοριακό σημείο του U, έχουμε ότι υπάρχει ακολουθία στοιχείων του U, έστω $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, τέτοια ώστε $z_n \to \zeta_0$ και υπάρχει ακολουθία στοιχείων του $\mathbb{C}_\infty \setminus U$, έστω $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, τέτοια ώστε $w_n \to \zeta_0$. Αφού όμως η f είναι συνεχής, άρα $f(z_n) \to f(\zeta_0)$ και $f(w_n) \to f(\zeta_0)$, όπου $(f(z_n))_n$ είναι ακολουθία στοιχείων του $f(U)$ και $(f(w_n))_n$ είναι ακολουθία στοιχείων του $f(\mathbb{C}_\infty \setminus U)$. Άρα το $f(\zeta_0)$ είναι συνοριακό σημείο του $f(U)$.

Έστω N ανοιχτή περιοχή του ζ_0 και $b : U \cap N \to \mathbb{R}$ *barrier* στο ζ_0. Τότε η συνάρτηση $b \circ f^{-1} : f(U) \to \mathbb{R}$ είναι υπαρμονική στο $f(U)$. Θα αποδείξουμε ότι ειναι *barrier* στο $f(\zeta_0)$. Έστω $w \in f(U)$, δηλαδή $w = f(z)$, για κάποιο $z \in U$. Έχουμε ότι $b \circ f^{-1}(w) = b \circ f^{-1}(f(z)) = b(z) < 0$ (αφού b *barrier* στο ζ_0). Επίσης, $\lim\limits_{w \to f(\zeta_0)} b \circ f^{-1}(w) = \lim\limits_{f(z) \to f(\zeta_0)} b \circ f^{-1}(f(z)) = \limsup\limits_{z \to \zeta_0} b(f^{-1}(f(z))) = \limsup\limits_{z \to \zeta_0} b(z) = 0$ (επειδή ξανά η b είναι *barrier* στο ζ_0).

□

Λήμμα 2.3.4. *[Λήμμα του Bouligand] Έστω U γνήσιο, ανοιχτό και συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{C}_\infty$, έστω ζ_0 ένα κανονικό συνοριακό σημείο του U και N_0 ανοιχτή περιοχή του ζ_0. Τότε για δοσμένο $\varepsilon > 0$, υπάρχει υπαρμονική συνάρτηση b_ε στο U, τέτοια ώστε*

$$b_\varepsilon < 0 \text{ στο } U,\ b_\varepsilon \leq -1 \text{ στο } U \setminus N_0 \text{ και } \liminf_{z \to \zeta_0} b_\varepsilon(z) \geq -\varepsilon.$$

Απόδειξη. Αποδεικνύουμε αρχικά το ζητούμενο στην περίπτωση όπου $\zeta_0 \neq \infty$. Αφού το ζ_0 είναι κανονικό σημείο, υπάρχει ανοιχτή περιοχή N του ζ_0 και *barrier* b στο $U \cap N$, όπως στον ορισμό 2.3.2. Τώρα το σύνολο $N \cap N_0$ είναι ανοιχτή περιοχή του ζ_0, άρα υπάρχει $\rho > 0$ τέτοιο ώστε $\overline{D} = \overline{D(\zeta_0, \rho)} \subset N \cap N_0$.

Θεωρούμε το κανονικοποιημένο μέτρο *Lebesgue*, μ, στο κλειστό σύνολο ∂D το οποίο είναι πεπερασμένο *Borel* μέτρο, άρα από το θεώρημα 2.1.2 είναι *regular* μέτρο. Άρα, για το *Borel* σύνολο $U \cap \partial D$ ισχύει ότι για δοσμένο $\varepsilon > 0$, υπάρχει σύνολο V σχετικά ανοιχτό στο ∂D και κλειστό σύνολο K, τέτοια ώστε

$K \subset U \cap \partial D \subset V$ και $\mu(V \setminus K) < \varepsilon$.

Θέτουμε $L = (U \cap \partial D) \setminus K$. Τότε, αφού $U \cap \partial D \subset V$, $\mu(L) \leq \mu(V \setminus K) < \varepsilon$.

Έχουμε επίσης ότι το L είναι ανοιχτό στο ∂D. Αν θεωρήσουμε τη χαρακτηριστική συνάρτηση του L, $1_L : \partial(U \cap D) \to \mathbb{R}$, τότε είναι συνεχής στο L και από το θεώρημα 1.2.2 (β) έπεται ότι $\lim\limits_{z \to \eta, z \in D} P_D 1_L(z) = 1_L(\eta) = 1$, για κάθε $\eta \in L$.

Ακόμη, αφού $K \subset U \cap \partial D \subset N$, έχουμε ότι $b < 0$ στο K, άρα υπάρχει το $\sup\limits_K b$ και είναι πεπερασμένο. Έστω $m = -\sup\limits_K b$. Προφανώς, $m > 0$. Τότε η συνάρτηση $(\frac{b}{m} - P_D 1_L) : U \cap D \to \mathbb{R}$ είναι υπαρμονική στο $U \cap D$ (αφού η b είναι υπαρμονική στο $U \cap N \supset U \cap D$ και η $P_D 1_L$ είναι αρμονική στο $D \supset U \cap D$) και για $\eta \in U \cap \partial D$,

$$\limsup_{z \to \eta, z \in U \cap \partial D} \left(\frac{b(z)}{m} - P_D 1_L(z) \right) \leq \begin{cases} \frac{b(\eta)}{m} - 0, & \eta \in K \\ 0 - 1, & \eta \in L \end{cases} \leq -1.$$

Επομένως, ορίζουμε την συνάρτηση b_ε στο U ως εξής:

$$b_\varepsilon = \begin{cases} max(-1, \frac{b}{m} - P_D 1_L), & \text{στο } U \cap D \\ -1, & \text{στο } U \setminus D \end{cases}.$$

Από το θεώρημα *Gluing* έχουμε ότι η b_ε είναι υπαρμονική στο U. Επίσης $b(z)/m - P_D 1_L(z) < 0$, για κάθε $z \in U \cap D$, άρα προκύπτει ότι $b_\varepsilon < 0$ στο U και $b_\varepsilon \leq -1$ στο $(U \setminus N_0) \subset (U \setminus D)$. Τέλος, έχουμε

$$\liminf_{z \to \zeta_0} b_\varepsilon(z) \geq \lim_{z \to \zeta_0} \left(\frac{b(z)}{m} - P_D 1_L(z) \right) = 0 - P_D 1_L(\zeta_0) =$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(\frac{\zeta_0 - \zeta_0}{\rho}, e^{i\theta}) 1_L(\zeta_0 + \rho e^{i\theta}) \, d\theta = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{|e^{i\theta}|^2} 1_L(\zeta_0 + \rho e^{i\theta}) \, d\theta =$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 1_L(\zeta_0 + \rho e^{i\theta}) \, d\theta = -\frac{1}{2\pi} 2\pi \mu(L) > -\varepsilon.$$

Μένει να αποδείξουμε ότι για δοσμένο $\varepsilon > 0$, υπάρχει συνάρτηση b_ε στο U, με τις παραπάνω ιδιότητες, στην περίπτωση όπου $\zeta_0 = \infty$. Θεωρούμε την απεικόνιση $f : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ με $f(z) = \frac{1}{z}$. Άμεσα προκύπτει ότι η f είναι σύμμορφη απεικόνιση, με $f(\infty) = 0$. Από το λήμμα 2.3.3, το $f(\infty)$ είναι κανονικό συνοριακό σημείο του $f(U)$.

Αν N_0 ανοιχτή περιοχή του ζ_0, τότε το σύνολο $f(N_0)$ είναι ανοιχτή περιοχή του $f(\zeta_0)$, αφού η f^{-1} είναι συνεχής. Συνεπώς, για δοσμένο $\varepsilon > 0$, όπως αποδείξαμε στην προηγούμενη περίπτωση, υπάρχει υπαρμονική συνάρτηση b_ε στο $f(U)$, τέτοια ώστε $b_\varepsilon < 0$ στο $f(U)$, $b_\varepsilon \leq -1$ στο $f(U) \setminus f(N)$ και $\liminf_{z \to f(\zeta_0)} b_\varepsilon(z) \geq -\varepsilon$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $b_\varepsilon \circ f : U \to \mathbb{R}$ η οποία είναι υπαρμονική στο U, αφού η f είναι ολόμορφη στο U. Επίσης, για κάθε $z \in U$, $b_\varepsilon \circ f(z) = b_\varepsilon(\frac{1}{z}) = b_\varepsilon(\tilde{z})$, για κάποιο $\tilde{z} \in f(U)$, άρα $b_\varepsilon \circ f(z) < 0$. Ακόμη, για κάθε $z \in U \setminus N$, $b_\varepsilon \circ f(z) = b_\varepsilon(\tilde{z})$, για κάποιο $\tilde{z} \in f(U) \setminus f(N)$, άρα $b_\varepsilon \circ f(z) \leq -1$. Τέλος, $\liminf_{z \to \zeta_0} b_\varepsilon \circ f(z) = \liminf_{f(z) \to f(\zeta_0)} b_\varepsilon(f(z)) \geq -\varepsilon$. Άρα η $b_\varepsilon \circ f(z)$ είναι η ζητούμενη υπαρμονική συνάρτηση για το U. □

Θεώρημα 2.3.2. *Έστω U γνήσιο, ανοιχτό και συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{C}_\infty$, ζ_0 ένα κανονικό συνοριακό σημείο του U και $\phi : \partial U \to \mathbb{R}$ μια φραγμένη συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής στο ζ_0. Τότε*

$$\lim_{z\to\zeta_0} H_U\phi(z) = \phi(z_0).$$

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Εφόσον η ϕ είναι συνεχής στο ζ_0, υπάρχει ανοιχτή γειτονιά N_0 του ζ_0, τέτοια ώστε:

$$\text{αν } \zeta \in \partial U \cap \bar{N}_0 \text{ τότε } |\phi(\zeta) - \phi(\zeta_0)| < \varepsilon \qquad \text{σχέση (1)}.$$

Κατασκευάζουμε την συνάρτηση b_ε όπως στο λήμμα 2.3.4 και ορίζουμε τη συνάρτηση $u : U \to \mathbb{R}$ ως εξής:

$$u = \phi(\zeta_0) - \varepsilon + (M + \phi(\zeta_0))b_\varepsilon, \text{ όπου } M = \sup_{\partial U} |\phi|.$$

Τότε η u είναι υπαρμονική στο U. Έστω $\zeta \in \partial U$.

Αν $\zeta \in \partial U \cap \bar{N}_0$, τότε $\limsup_{z\to\zeta} b_\varepsilon(z) \le 0$, (αφού $b_\varepsilon(z) < 0, \forall z \in U$).

Συνεπώς, αν $\zeta \in \partial U \cap \bar{N}_0$, τότε

$$\limsup_{z\to\zeta} u(z) = \phi(\zeta_0) - \varepsilon + (M + \phi(\zeta_0)) \limsup_{z\to\zeta} b_\varepsilon(z) \le \phi(\zeta_0) - \varepsilon + 0 \le \phi(\zeta)$$

(από τη σχέση (1)).

Αν $\zeta \in \partial U \setminus \bar{N}_0$, τότε $\limsup_{z\to\zeta} b_\varepsilon(z) \le -1$ (αφού $b_\varepsilon \le -1$, στο $U \setminus N_0$).

Άρα, αν $\zeta \in \partial U \setminus \bar{N}_0$ έχουμε ότι

$$\limsup_{z\to\zeta} u(z) = \phi(\zeta_0) - \varepsilon + (M + \phi(\zeta_0)) \limsup_{z\to\zeta} b_\varepsilon(z) \le \phi(\zeta_0) - \varepsilon - (M + \phi(\zeta_0)) = -M - \varepsilon \le \phi(\zeta).$$

Άρα, από τον ορισμό 2.3.1, $u \le H_U\phi$ στο D. Συγκεκριμένα,

$$\liminf_{z\to\zeta_0} H_U\phi(z) = \liminf_{z\to\zeta_0} u(z) \ge \phi(\zeta_0) - \varepsilon + (M + \phi(\zeta_0)) \liminf_{z\to\zeta_0} b_\varepsilon(z) \ge$$

$$\phi(\zeta_0) - \varepsilon + (M + \phi(\zeta_0))(-\varepsilon) = \phi(\zeta_0) - \varepsilon(1 + M + \phi(\zeta_0)).$$

Αφού το ε ήταν τυχαίο, έπεται ότι:

$$\liminf_{z\to\zeta_0} H_U\phi(z) \ge \phi(\zeta_0), \qquad \text{σχέση (2)}.$$

Επαναλαμβάνοντας το παραπάνω επιχείρημα με $-\phi$ αντί για ϕ, έχουμε ότι:

$$\liminf_{z\to\zeta_0} H_U(-\phi)(z) \ge -\phi(\zeta_0)$$

.

Όμως, από το λήμμα 2.3.2, $H_U\phi \leq -H_U(-\phi)$, οπότε

$$-\liminf_{z\to\zeta_0} H_U(-\phi)(z) \leq \phi(\zeta_0) \Leftrightarrow \limsup_{z\to\zeta_0}(-H_U(-\phi)(z)) \leq \phi(\zeta_0)$$

$$\Leftrightarrow \limsup_{z\to\zeta_0} H_U\phi(z) \leq \phi(\zeta_0), \qquad \text{σχέση (3).}$$

Από τις σχέσεις (2) και (3) έχουμε το ζητούμενο. □

Θεώρημα 2.3.3. *[Λύση του προβλήματος του Dirichlet]*

Έστω U ένα κανονικό, ανοιχτό και συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{C}_\infty$ και $\phi : \partial U \to \mathbb{R}$ μια φραγμένη και συνεχής συνάρτηση. Τότε, υπάρχει μοναδική αρμονική συνάρτηση h στο U τέτοια ώστε

$$\lim_{z\to\zeta} h(z) = \phi(\zeta), \quad \text{για κάθε } \zeta \in \partial U.$$

Απόδειξη. Η μοναδικότητα έχει αποδειχθεί στο θεώρημα 1.2.1. Θεωρούμε την συνάρτηση $H_U\phi : U \to \mathbb{R}$. Από το θεώρημα 2.3.1, η $H_U\phi$ είναι αρμονική στο U και από το θεώρημα 2.3.2, έχουμε ότι $\lim_{z\to\zeta} H_U\phi(z) = \phi(\zeta), \quad \forall \zeta \in \partial U.$ □

Εφόσον η λύση του προβλήματος του *Dirichlet* που δόθηκε στο παραπάνω θεώρημα, προϋποθέτει το χωρίο U να είναι κανονικό, θα μελετήσουμε εκτενέστερα την έννοια της κανονικότητας. Ακολουθούν λοιπόν κάποια κριτήρια για την ύπαρξη συνάρτησης *barier*.

Θεώρημα 2.3.4. *Έστω D ένα ανοιχτό, συνεκτικό και απλά συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{C}_\infty$, τέτοιο ώστε το σύνολο $\mathbb{C}_\infty \setminus D$ να περιέχει τουλάχιστον δύο σημεία. Τότε το D είναι κανονικό σύνολο.*

Απόδειξη. Για να αποδείξουμε ότι το D είναι κανονικό, αρκεί να αποδείξουμε ότι κάθε συνοριακό σημείο του είναι κανονικό. Έστω $\zeta_0 \in \partial D$. Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

(*i*) Διακρίνουμε αρχικά την περίπτωση όπου $\zeta_0 \in \mathbb{C}$ και $\infty \notin D$. Τότε το D είναι απλά συνεκτικό, ανοιχτό και συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{C}$, οπότε από το πόρισμα 1.1.1 υπάρχει ολόμορφος κλάδος λογαρίθμου $logz$ στο D. Θέτουμε $N = D(\zeta_0, 1)$ και ορίζουμε την συνάρτηση $b : D \cap N \to \mathbb{R}$, $b(z) = Re\left(\dfrac{1}{log(z-\zeta_0)}\right)$. Τότε η b ικανοποιεί όλες τις συνθήκες για *barrier* στο ζ_0. Πράγματι, είναι υπαρμονική στο $D\cap N$, ως το πραγματικό μέρος ολόμορφης συνάρτησης, για $z \in D \cap N$ ισχύει ότι

$b(z) = Re\left(\dfrac{1}{log(z-\zeta_0)}\right) = \dfrac{log|z-\zeta_0|}{(log|z-\zeta_0|)^2 + (Arg(z-\zeta_0))^2} < 0$, αφού $|z-\zeta_0| < 1$ και

$$\lim_{z\to\zeta_0} b(z) = \lim_{z\to 0} Re\left(\frac{1}{log(z-\zeta_0)}\right) = 0.$$

(ii) Έστω τώρα ότι $\zeta_0 \in \mathbb{C}$ και $\infty \in D$. Έστω $\zeta_1 \in \partial D$, με $\zeta_1 \neq \zeta_0$ (υπάρχει τέτοιο ζ_1 από υπόθεση). Θεωρούμε την απεικόνιση $f : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$, $f(z) = \dfrac{1}{z-\zeta_1}$. Εύκολα προκύπτει ότι η f είναι σύμμορφη απεικόνιση. Επιπλέον, $f(\zeta_0) \in \mathbb{C}$ και από τη συνέχεια της f έχουμε ότι το $f(\zeta_0)$ είναι συνοριακό σημείο του $f(D)$. Ακόμη, $\infty \notin f(D)$, άρα την περίπτωση (i) έχουμε ότι το $f(\zeta_0)$ είναι κανονικό συνοριακό σημείο για το $f(D)$. Όμως η συνάρτηση $f^{-1} : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$, $f^{-1}(z) = \dfrac{1}{z} + \zeta_1$ είναι επίσης σύμμορφη απεικόνιση και από το λήμμα 2.3.3 προκύπτει ότι το $f^{-1}(f(\zeta_0)) = \zeta_0$ είναι κανονικό συνοριακό σημείο για το D.

(iii) Αν $\zeta_0 = \infty$, τότε θεωρούμε την απεικόνιση $f : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$, $f(z) = \dfrac{1}{z}$. Η f είναι σύμμορφη απεικόνιση, με $f(\infty) = 0 \in \mathbb{C}$. Αν $0 \in D$, τότε $\infty \in f(D)$ και από την περίπτωση (ii), το 0 είναι κανονικό συνοριακό σημείο γα το $f(D)$. Αν $0 \notin D$, τότε $\infty \notin f(D)$ και από την περίπτωση (i), το 0 είναι ξανά κανονικό συνοριακό σημείο γα το $f(D)$. Οπότε, από το λήμμα 2.3.3, προκύπτει ότι το ∞ είναι κανονικό συνοριακό σημείο για το D.

Άρα κάθε συνοριακό σημείο του D είναι κανονικό.

$\square$

Θεώρημα 2.3.5. *Έστω U γνήσιο ανοιχτό και συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{C}_\infty$ και έστω $\zeta_0 \in \partial U$. Αν υπάρχει ανοιχτή γειτονιά N του ζ_0 τέτοια ώστε το σύνολο $\partial U \cap N$ να είναι polar, τότε το ζ_0 δεν είναι κανονικό.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι το ζ_0 είναι κανονικό σημείο, δηλαδή ότι υπάρχει *barrier* b για το ζ_0 και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Έστω ότι η συνάρτηση b ορίζεται στο $U \cap \tilde{N}$, όπου $\tilde{N}$ ανοιχτή περιοχή του ζ_0. Τότε το σύνολο $N \cap \tilde{N}$ είναι ανοιχτή περιοχή του ζ_0. Θεωρούμε ανοιχτό δίσκο $D = D(\zeta_0, \rho) \subset N \cap \tilde{N}$. Τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το *barrier* ορίζεται στο $U \cap D$ και έχουμε ότι το D είναι συνεκτικό. Επίσης, $E := \partial U \cap \overline{D} \subset \partial U \cap N$ και αφού το $\partial U \cap N$ είναι *polar* από υπόθεση, έχουμε και ότι το υποσύνολο του, E, είναι *polar*.

Από το θεώρημα 2.1.11 το σύνολο $D \backslash E$ είναι συνεκτικό, άρα πρέπει $D \backslash E \subset U \cap D$. Διότι διαφορετικά, το $D \setminus E$ μπορεί να γραφεί σαν την ένωση των ανοιχτών, μη κενών συνόλων $U \cap D$ και $D \setminus \overline{U}$, το οποίο είναι άτοπο λόγω συνεκτικότητας του $D \setminus E$. Άμεσα προκύπτει το ότι $U \cap D \subset D \setminus E$, άρα $U \cap D = D \setminus E$.

Δηλαδή, η b είναι υπαρμονική συνάρτηση στο $D \setminus E$ και για κάθε σημείο του $D \cap E$, υπάρχει γειτονιά του, ας θεωρήσουμε το D σαν μια τέτοια γειτονιά, τέτοια ώστε η b να είναι άνω φραγμένη (από το 0) στο $D \setminus E$. Συνεπώς, από το θεώρημα 2.1.10 (removable singularity theorem) η b έχει μοναδική υπαρμονική επέκταση σε όλο το D.

Εφόσον $b < 0$ στο $D \setminus E$, έχουμε ότι $max(b, 0) = 0$ σχεδόν παντού στο D και άρα, λόγω της επέκτασης, η ίδια ισότητα θα ισχύει παντού στο N, δηλαδή $b \leq 0$ στο N.

Επίσης, αφού η b είναι άνω ημισυνεχής στο N, $b(\zeta_0) \geq \limsup_{z \to \zeta_0} b(z) = \lim_{z \to \zeta_0} b(z) = 0$. Δηλαδή, η b έχει ολικό μέγιστο στο D, άρα από την αρχή μεγίστου πρέπει $b \equiv 0$ στο D, το οποίο έρχεται σε αντίφαση με το ότι $b < 0$ στο $U \cap D$. Συνεπώς, δεν υπάρχει τέτοιο *barrier*. $\square$

Ορισμός 2.3.3. *Έστω $S \subset \mathbb{C}$ και $\zeta \in \mathbb{C}$. Το σύνολο S καλείται $non-thin$ στο ζ αν και μόνο αν $\zeta \in \overline{S \setminus \{\zeta\}}$ και αν για κάθε υπαρμονική συνάρτηση u ορισμένη σε μια γειτονιά του ζ, ισχύει ότι*

$$\limsup_{z \to \zeta, z \in S \setminus \{\zeta\}} u(z) = u(\zeta).$$

Διαφορετικά, λέμε ότι το S είναι thin στο ζ.

Θεώρημα 2.3.6. *Ένα F_σ polar σύνολο είναι thin σε κάθε σημείο του $\mathbb{C}$.*

Απόδειξη. Έστω S ένα F_σ *polar* σύνολο και έστω $\zeta \in \mathbb{C}$. Τότε το $S \setminus \{\zeta\}$ είναι επίσης F_σ, διότι το S ως F_σ μπορεί να γραφτεί σαν αριθμήσιμη ένωση κλειστών συνόλων, έστω K_i, δηλαδή $S = \bigcup_{i \in I} K_i$. Τότε, $S \setminus \{\zeta\} = \left(\bigcup_{i \in I} K_i \right) \setminus \{\zeta\} = \left(\bigcup_{i \in I} K_i \right) \cap \{\zeta\}^c$. Αλλά το σύνολο $\{\zeta\}^c$ είναι ανοιχτό, άρα μπορεί να γραφτεί σαν αριθμήσιμη ένωση κλειστών συνόλων, έστω Q_j, δηλαδή $\{\zeta\}^c = \bigcup_{j \in J} Q_j$. Έχουμε λοιπόν ότι $S = \left(\bigcup_{i \in I} K_i \right) \cap \left(\bigcup_{j \in J} Q_j \right) = \bigcup_{i \in I, j \in J} (K_i \cap Q_j)$, που είναι αριθμήσιμη ένωση κλειστών συνόλων, άρα F_σ. Ακόμη το $S \setminus \{\zeta\}$ είναι *polar* σύνολο, ως υποσύνολο του *polar* συνόλου S, και προφανώς είναι ξένο από το μονοσύνολο

$\{\zeta\}$. Άρα από το θεώρημα 2.1.9, υπάρχει υπαρμονική συνάρτηση u στο $\mathbb{C}$ τέτοια ώστε $u = -\infty$ στο $S \setminus \{\zeta\}$ και $u(\zeta) > -\infty$. Άρα, $\limsup_{z\to\zeta, z\in S\setminus\{\zeta\}} \neq u(\zeta)$, δηλαδή το S είναι *thin* στο ζ. □

Θεώρημα 2.3.7. *Έστω U ένα γνήσιο, ανοιχτό και συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{C}_\infty$ και έστω $\zeta_0 \in \partial U$. Θέτουμε $K = \mathbb{C}_\infty \setminus U$. Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(α) *Το ζ_0 είναι κανονικό συνοριακό σημείο στο U.*

(β) *Το K είναι $non - thin$ στο ζ_0.*

Αν επίσης $\infty \in U$, τότε τα παραπάνω είναι ισοδύναμα με:

(γ) *Το K είναι $non - polar$ και $p_\nu(\zeta_0) = I(\nu)$, όπου ν είναι το equilibrium μέτρο για το K.*

Απόδειξη. Όπως έχουμε αποδείξει σε προηγούμενα θεωρήματα, αν αποδείξουμε την συνθήκη (α) στην περίπτωση όπου $\zeta_0 \in \mathbb{C}$, τότε εφαρμόζοντας κάποια σύμμορφη απεικόνιση, μπορούμε να αποδείξουμε ότι η συνθήκη αληθεύει και στην περίπτωση όπου $\zeta_0 = \infty$. Με όμοιο τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε ότι αν υπάρχει υπαρμονική συνάρτηση u ορισμένη σε μια γειτονιά του ζ_0, για την οποία να ισχύει ότι $\limsup_{z\to\zeta_0, z\in K\setminus\{\zeta_0\}} u(z) = u(\zeta_0)$ στην περίπτωση όπου $\infty \in U$, δηλαδή αν το K είναι $non-thin$ στο ζ_0 όταν $\infty \notin K$, τότε ξανά εφαρμόζοντας κάποια σύμμορφη απεικόνιση έχουμε ότι το K είναι $non - thin$ στο ζ_0 όταν $\infty \in K$. Δηλαδή, μπορούμε εξαρχής να υποθέσουμε ότι $\infty \in U$, έτσι ώστε $K \subset \mathbb{C}$.

Θα αποδείξουμε τις συνεπαγωγές $(\alpha) \Rightarrow (\beta) \Rightarrow (\gamma) \Rightarrow (\alpha)$.

$(\alpha) \Rightarrow (\beta)$: Ας υποθέσουμε ότι το ζ_0 είναι κανονικό σημείο για το U και έστω b το $barrier$ του. Θα αποδείξουμε ότι το K είναι $non - thin$ στο ζ_0. Αμεσα, $\zeta_0 \in \overline{K \setminus \{\zeta_0\}} = K$. Έστω u υπαρμονική συνάρτηση, ορισμένη σε μια γειτονιά του ζ_0 και ας επιλέξουμε α τέτοιο ώστε

$$\limsup_{z\to\zeta_0, z\in K\setminus\{\zeta_0\}} u(z) < \alpha. \qquad \text{σχέση (1)}$$

(Υπάρχει τέτοιο $\alpha \in \mathbb{R}$, διότι $\limsup_{z\to\zeta_0, z\in K\setminus\{\zeta_0\}} u(z) \leq \limsup_{z\to\zeta_0, z\neq\zeta_0} u(z) \leq u(\zeta_0) \neq +\infty$.)

Από τον ορισμό του $\limsup$, υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε αν $D = D(\zeta_0, r)$, τότε η u είναι υπαρμονική σε μια γειτονιά του $\overline{D}$ και $u < \alpha$ στο $\overline{D} \cap K \setminus \{\zeta_0\}$. Μειώνοντας το r αν είναι απαραίτητο, μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι η b ορίζεται σε μια γειτονιά του $\overline{D} \setminus K$. (Πράγματι, αν η b ορίζεται στο $U \cap N$, όπου N ανοιχτή περιοχή του ζ_0, μειώνοντας αν είναι απαραίτητο το r, υποθέτουμε ότι $D \subset N$ και περιορίζουμε την b στο $\overline{D} \cap U$. Εξακολουθούν να ισχύουν: $b < 0$ στο $\overline{D} \cap U \subset U \cap N$ και $\limsup_{z \to \zeta_0} b(z) = 0$.)

Θα αποδείξουμε ότι το σύνολο $\{z \in \partial D \setminus K \subset \mathbb{C} : u(z) \geq \alpha\}$ είναι συμπαγές. Έστω $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία στοιχείων του συνόλου $\{z \in \partial D \setminus K \subset \mathbb{C} : u(z) \geq \alpha\}$. Τότε, η $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, έστω $(z_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, που συκλίνει στο $z \in \partial D$, διότι το σύνολο ∂D είναι συμπαγές. Από άνω ημισυνέχεια της u και αφού $u(z_{n_k}) \geq \alpha$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$, έχουμε ότι $u(z) \geq \limsup_{z_{n_k} \to z} u(z_{n_k}) \geq \alpha$. Αν $z \in \partial D \setminus K$, τότε $z \in \{z \in \partial D \setminus K \subset \mathbb{C} : u(z) \geq \alpha\}$ και άρα το σύνολο είναι συμπαγές. Αν $z \notin \partial D \setminus K$, τότε $u(z) < \alpha$, διότι όπως αναφέρουμε παραπάνω $u < \alpha$ στο $\bar{D} \cap K \setminus \{\zeta_0\}$, πράγμα άτοπο. Συνεπώς, το σύνολο $\{z \in \partial D \setminus K \subset \mathbb{C} : u(z) \geq \alpha\}$ είναι συμπαγές.

Έχουμε ότι $b < 0$ στο $\overline{D} \setminus K$, άρα και $b < 0$ στο $\{z \in \partial D \setminus K : u(z) \geq \alpha\}$. Εφόσον το σύνολο $\{z \in \partial D \setminus K \subset \mathbb{C} : u(z) \geq \alpha\}$ είναι συμπαγές, υπάρχει $z_0 \in \partial D \setminus K$, τέτοιο ώστε $u(z_0) \geq u(z)$, για κάθε z στο $\{z \in \partial D \setminus K \subset \mathbb{C} : u(z) \geq \alpha\}$. Επιλέγουμε $t > 0$ τέτοιο ώστε $tb < \alpha - u(z_0)$. Αν $z \in \{z \in \partial D \setminus K \subset \mathbb{C} : u(z) \geq \alpha\}$, τότε $tb + u(z) \leq tb + u(z_0) < \alpha$. Αν $z \in \partial D \setminus K$, με $u(z) < \alpha$, τότε $tb + u(z) < tb + \alpha < \alpha$, γιατί $tb(z) < 0$, για κάθε $z \in \partial D \setminus K$. Δηλαδή, $u + tb < \alpha$ στο $\partial D \setminus K$.

Ας θεωρήσουμε τώρα $\zeta \in \partial(D \setminus K) \setminus \{\zeta_0\}$. Τότε,

$$\limsup_{z \to \zeta, z \in D \setminus K} (u + tb)(z) \leq \begin{cases} (u + tb)(\zeta), & \zeta \in \partial D \setminus K \\ u(\zeta), & \zeta \in D \cap K \setminus \{\zeta_0\} \end{cases} \leq \alpha.$$

Άρα από την επεκτεταμένη αρχή μεγίστου, $u + tb \leq \alpha$ στο $D \setminus K$. Εφόσον $\lim_{z \to \zeta_0} b(z) = 0$, έπεται ότι

$$\limsup_{z \to \zeta_0, z \in D \setminus K} (u(z) + tb(z)) = \limsup_{z \to \zeta_0, z \in D \setminus K} u(z) \leq \alpha.$$

Συνδυάζοντας την παραπάνω σχέση με την σχέση (1), έχουμε ότι $\limsup_{z \to \zeta_0, z \neq \zeta_0} u(z) \leq \alpha$.

Επομένως, απο *submean* ανισότητα, $u(\zeta_0) \leq \alpha$. Αφού αυτό ισχύει για κάθε α που ικανοποιεί την σχέση (1), πρέπει $\limsup_{z \to \zeta_0, z \in K \setminus \{\zeta_0\}} u(z) = u(\zeta_0)$.

Δηλαδή, για τυχαία υπαρμονική συνάρτηση u, ορισμένη σε μια περιοχή του ζ_0 ισχύει ότι $\limsup_{z\to\zeta_0, z\in K\setminus\{\zeta_0\}} u(z) = u(\zeta_0)$. Άρα, το K είναι $non-thin$ στο ζ_0.

$(\beta) \Rightarrow (\gamma)$: Υποθέτουμε ότι το K είναι $non-thin$ στο ζ_0. Αρχικά, αφού το K ως κλειστό σύνολο είναι F_σ, από το θεώρημα 2.3.6, πρέπει να είναι $non-polar$. Στη συνέχεια, αφού το K είναι συμπαγές (ως κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{C}$) γνωρίζουμε ότι έχει $equilibrium$ μέτρο, έστω ν. Τότε από το θεώρημα του $Frostman$, το σύνολο $E := \{z \in K : p_\nu(z) > I(\nu)\}$ είναι F_σ, $polar$ υποσύνολο του ∂K.

Από το θεώρημα 2.3.6 ξανά, έχουμε ότι το E είναι $thin$ στο ζ_0. Άρα, το $K \setminus E$ πρέπει να είναι $non-thin$ στο ζ_0. Πράγματι, αφού το E είναι $thin$ στο ζ_0, έχουμε ότι για κάθε υπαρμονική συνάρτηση u, ορισμένη σε μια γειτονιά του ζ_0 ισχύει ότι $\limsup_{z\to\zeta_0, z\in E\setminus\{\zeta_0\}} u(z) = u(\zeta_0)$. Αν το $K \setminus E$ είναι επίσης $thin$ στο ζ_0, δηλαδή $\limsup_{z\to\zeta_0, z\in (K\setminus E)\setminus\{\zeta_0\}} u(z) = u(\zeta_0)$, τότε $\limsup_{z\to\zeta_0, z\in K\setminus\{\zeta_0\}} u(z) = u(\zeta_0)$, που συνεπάγεται ότι το K είναι $thin$ στο ζ_0, που είναι άτοπο από υπόθεση.

Έχουμε λοιπόν ότι $p_\nu = I(\nu)$ στο $K \setminus E$, άρα $\limsup_{z\to\zeta_0, z\in (K\setminus E)\setminus\{\zeta_0\}} p_\nu(z) = I(\nu)$. Αφού το $K \setminus E$ είναι $non-thin$ στο ζ_0 και η p_ν είναι υπαρμονική στο $\mathbb{C}$, $p_\nu(\zeta_0) = \limsup_{z\to\zeta_0, z\in (K\setminus E)\setminus\{\zeta_0\}} p_\nu(z) = I(\nu)$.

$(\gamma) \Rightarrow (\alpha)$: Ας υποθέσουμε ότι το K είναι $non-polar$ και ότι $p_\nu(\zeta_0) = I(\nu)$, όπου ν το $equilibrium$ μέτρο για το K. Θα αποδείξουμε ότι το ζ_0 είναι $regular$ συνοριακό σημείο στο U. Ορίζουμε $b : U \to [-\infty, \infty)$ ως εξής: $b(z) = I(\nu) - p_\nu(z)$. Τότε η b είναι υπαρμονική στο U και από το θεώρημα του $Frostman$, $b \leq 0$ στο U.

Αν υπάρχει $z \in U$ τέτοιο ώστε $b(z) = 0$, έχουμε ότι η b θα πραγματοποιεί ολικό μέγιστο στο U, άρα από την αρχή μεγίστου για τις υπαρμονικές συναρτήσεις, θα έχουμε ότι $b = 0$ στο U. Άλλα $\infty \in U$ και $b(\infty) = I(\nu) - p_\nu(\infty) = -\infty$ (αφού $I(\nu) > -\infty$), δηλαδή καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα $b < 0$ στο U.

Επίσης, $\liminf_{z\to\zeta_0} b(z) = \liminf_{z\to\zeta_0} I(\nu) - \limsup_{z\to\zeta_0} p_\nu(z) \geq I(\nu) - p_\nu(\zeta_0)$ (από υπαρμονικότητα της p_ν), και αφού $p_\nu(\zeta_0) = I(\nu)$ από υπόθεση, έχουμε ότι $\liminf_{z\to\zeta_0} b(z) = 0$. Συνεπώς το b είναι $barrier$ στο ζ_0 και το ζ_0 είναι κανονικό στο U.

□

Θεώρημα 2.3.8. *[Θεώρημα του Kellog] Έστω U ανοιχτό και συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{C}_\infty$. Τότε το σύνολο των μη-κανονικών, συνοριακών σημείων του είναι ένα F_σ, polar σύνολο.*

Απόδειξη. Θέτουμε $K = \mathbb{C}_\infty \setminus U$. Αν το K είναι $polar$ τότε και το $\partial U \subset K$ είναι $polar$, άρα από το θεώρημα 2.3.5, κάθε σημείο του ∂U είναι μη-κανονικό και αφού το ∂U είναι F_σ σύνολο έχουμε το ζητούμενο.

Αν το K είναι $non - polar$, τότε στην περίπτωση όπου $\infty \notin K$, από το θεώρημα 2.3.7, το σύνολο των μη-κανονικών συνοριακών σημείων του U είναι ακριβώς το $\{z \in K : p_\nu(z) > I(\nu)\}$, όπου ν το $equilibrium$ μέτρο για το K. Σύμφωνα με το θεώρημα του $Frostman$ και αφού το $K \subset \mathbb{C}$ είναι συμπαγές, το σύνολο $\{z \in K : p_\nu(z) > I(\nu)\}$ είναι F_σ, $polar$.

Στην περίπτωση τώρα όπου $\infty \in K$, θεωρούμε την απεικόνιση $f : U \to f(U)$ με $f(z) = \dfrac{1}{z-a}$, όπου $\alpha \in U$. Τότε η f είναι σύμμορφη απεικόνιση και $\infty \in f(U)$. Αν ζ_0 είναι μη-κανονικό, συνοριακό σημείο του U, τότε το $f(\zeta_0)$ είναι μη-κανονικό, συνοριακό σημείο του $f(U)$, διότι αν $f(\zeta_0)$ είναι κανονικό, συνοριακό σημείο του U τότε όπως δείξαμε στο λήμμα του $Bouligand$, το $f^{-1}(f(\zeta_0)) = \zeta_0$ θα είναι κανονικό συνοριακό σημείο του $f^{-1}(f(U)) = U$, που είναι άτοπο. Έστω A το σύνολο όλων των μη-κανονικών, συνοριακών σημείων του U. Τότε το $f(A)$ είναι το σύνολο των μη-κανονικών, συνοριακών σημείων του $f(U)$. Έχουμε ότι $\infty \notin f(K)$ και το $f(K)$ είναι $non - polar$, F_σ σύνολο, αφού η f είναι σύμμορφη απεικόνιση. Άρα, ξανά από το θεώρημα 2.3.7, το σύνολο των μη-κανονικών σημείων του $f(K)$ είναι $f(A) = \{z \in f(K) : p_{\nu'}(z) > I(\nu')\}$, όπου ν' το $equilibrium$ μέτρο για το $f(K)$. Ξανά από το θεώρημα του $Frostman$ και αφού το $f(K)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{C}$, το $f(A)$ είναι F_σ, $polar$ σύνολο. Συνεπώς, το $f^{-1}(f(A)) = A$ είναι F_σ $polar$ σύνολο, αφού η f είναι σύμμορφη απεικόνιση. □

Πόρισμα 2.3.1. *[Λύση του Γενικευμένου Προβλήματος του Dirichlet]*

Έστω U ανοιχτό και συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{C}_\infty$, τέτοιο ώστε το ∂U να είναι non − polar και έστω $\phi : \partial U \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση, συνεχής στο $\partial U \setminus E$, όπου E Borel, polar υποσύνολο του ∂U. Τότε υπάρχει μοναδική φραγμένη, αρμονική συνάρτηση h στο U, τέτοια ωστε

$$\lim_{z\to\zeta} h(z) = \phi(\zeta),$$

για κάθε $\zeta \in \partial U \setminus E'$, όπου E' Borel, polar υποσύνολο του ∂U.

Απόδειξη. Θέτουμε $h = H_U\phi$. Τότε από το θεώρημα 2.3.1 η h είναι αρμονική και φραγμένη στο U. Επίσης, από το θεώρημα 2.3.2, $\lim_{z\to\zeta} h(z) = \phi(\zeta)$, για κάθε

$\zeta \in \partial U \setminus (E_1 \cup E_2)$, όπου E_1 είναι το σύνολο των μη-κανονικών, συνοριακών σημείων του U και E_2 είναι το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της ϕ.

Από το θεώρημα 2.3.8, έχουμε ότι το E_1 είναι *polar*, F_σ σύνολο, άρα και *Borel*. Επίσης, από υπόθεση, το E_2 είναι *polar* και *Borel*. Επομένως, από το θεώρημα 2.1.2, το σύνολο $E_1 \cup E_2$ είναι *polar* και προφανώς *Borel* υποσύνολο του ∂U. Άρα $\lim\limits_{z\to\zeta} h(z) = \phi(\zeta)$, για κάθε $\zeta \in \partial U \setminus (E_1 \cup E_2)$.

Για να αποδείξουμε τη μοναδικότητα, ας υποθέσουμε ότι h_1 και h_2 είναι δύο λύσεις. Τότε η συνάρτηση $h_1 - h_2 : U \to \mathbb{R}$ είναι αρμονική και φραγμένη στο U, για την οποία ισχύει $\lim\limits_{z\to\zeta}(h_1 - h_2) = 0$, για κάθε $\zeta \in \partial U \setminus E$, όπου E είναι κάποιο *Borel*, *polar* υποσύνολο του ∂U. Εφαρμόζοντας την επεκτεταμένη αρχή μεγίστου στην $h_1 - h_2$, έχουμε ότι $h_1 - h_2 \leq 0$ στο U. Ομοίως, η $-(h_1-h_2) : U \to \mathbb{R}$ είναι αρμονική και φραγμένη στο U με $\lim\limits_{z\to\zeta}[-(h_1-h_2)] = 0$, για κάθε $\zeta \in \partial U \setminus E'$, όπου E' είναι κάποιο *Borel*, *polar* υποσύνολο του ∂U. Εφαρμόζοντας ξανά την επεκτεταμένη αρχή μεγίστου, $-(h_1 - h_2) \leq 0$. Συνεπώς, $h_1 = h_2$ στο U. □

Χρησιμοποιώντας την θεωρία που αναπτύξαμε στην παράγραφο αυτή, θα δώσουμε ένα σημαντικό αποτέλεσμα σχετικά με τις συναρτήσεις *Green*. Γνωρίζουμε από τον ορισμό τους ότι $\lim\limits_{z\to\zeta} g_U(z,w) = 0$, για κάθε ζ στο ∂U εκτός από κάποιο *polar* σύνολο. Με το παρακάτω θεώρημα διασαφηνίζεται ποιό είναι αυτό το *polar* σύνολο.

Θεώρημα 2.3.9. *Έστω U ανοιχτό και συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{C}_\infty$, τέτοιο ώστε το ∂U να είναι $non - polar$. Θεωρούμε $w \in U$ και $\zeta \in \partial U$. Τότε,*

$$\lim_{z\to\zeta} g_U(z,w) = 0$$

αν και μόνο αν το ζ είναι κανονικό συνοριακό σημείο του U.

Απόδειξη. $\Rightarrow$) Θεωρούμε τη συνάρτηση *Green* για το U και έστω $w \in U$, $\zeta \in \partial U$, τέτοια ώστε $\lim\limits_{z\to\zeta} g_U(z,w) = 0$. Θα αποδείξουμε ότι το ζ είναι κανονικό συνοριακό σημείο του U. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση
$-g_U(.,w) : U \to (-\infty, \infty]$ είναι *barrier* στο ζ.

Πράγματι, έστω N μια ανοιχτή περιοχή του ζ, τέτοια ώστε $w \notin N$. Τότε, περιορίζουμε την $-g_U(.,w)$ στο $U \cap N$ και έχουμε ότι η $-g_U(.,w)$ είναι υπαρμονική με $-g_U(.,w) < 0$ στο $U \cap N$ (διότι από το θεώρημα 2.2.2, $g_U(z,w) > 0, \forall z, w \in U$) και $\lim\limits_{z\to\zeta}(-g_U(z,w)) = 0$ (από υπόθεση). Άρα, υπάρχει *barrier* για το ζ, δηλαδή είναι κανονικό συνοριακό σημείο του U.

$\Leftarrow$) Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι ζ είναι ένα κανονικό συνοριακό σημείο του U και έστω $w \in U$. Αν g_U η συνάρτηση $Green$ για το U, θα αποδείξουμε ότι $\lim\limits_{z \to \zeta} g_U(z,w) = 0$. Έστω N μια σχετικά συμπαγής γειτονιά του w στο U. (Αν $w \neq \infty$ τότε μπορούμε να επιλέξουμε για N έναν ανοιχτό δίσκο στο U που να περιέχει το w. Αν $w = \infty$, τότε υπάρχει κλειστός δίσκος τέτοιος ώστε το συμπλήρωμα του να περιέχεται στο U και να είναι ανοιχτή περιοχή του w.)

Ορίζουμε $\phi : \partial(U \setminus \overline{N}) \to \mathbb{R}$ ως εξής:

$$\phi(\zeta) = \begin{cases} 0, & \zeta \in \partial U \\ g_U(\zeta, w), & \zeta \in \partial N. \end{cases}$$

Τότε, το $U \setminus \overline{N}$ είναι ανοιχτό και συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{C}_\infty$. Επίσης, το $\partial(U \setminus \overline{N}) = \partial U \cup \partial N$ είναι $non-polar$, διότι αν ήταν $polar$ τότε το $\partial U \subset \partial(U \setminus \overline{N})$ θα ήταν $polar$, το οποίο είναι άτοπο. Ακόμη, η ϕ είναι φραγμένη συνάρτηση, αφού η $g_U(.,w)$ είναι εξ' ορισμού φραγμένη έξω από κάθε γειτονιά του w, άρα είναι φραγμένη και στο ∂N. Τέλος, η ϕ είναι συνεχής στο $\partial(U \setminus \overline{N}) \setminus E$, για κάποιο $Borel$, $polar$ σύνολο E. Πράγματι, η g_U είναι συνεχής στο $\partial N \subset U \setminus \{w\}$ και $g_U(z,w) \to 0$, καθώς $z \to \zeta$, για $\zeta \in \partial U \setminus E$, για κάποιο $Borel$, $polar$ σύνολο E.

Από το πόρισμα 2.3.1 (Λύση του Γενικευμένου Προβλήματος του $Dirichlet$), υπάρχει μοναδική συνάρτηση h ορισμένη στο $U \setminus \overline{N}$, η οποία είναι φραγμένη, αρμονική στο $U \setminus \overline{N}$ και $\lim\limits_{z \to \zeta} h(z) = \phi(\zeta)$, για κάθε $\zeta \in (\partial(U \setminus \overline{N})) \setminus E'$, όπου E' $Borel$, $polar$ υποσύνολο του $\partial(U \setminus \overline{N})$.

Αλλά, η $g_U(.,w)$ είναι λύση του γενικευμένου προβλήματος του $Dirichlet$ στο U, με συνοριακή συνάρτηση ϕ, αφού

$$\lim_{z \to \zeta} g_U(.,w) = \begin{cases} 0, & \zeta \in \partial U \\ g_U(\zeta, w), & \zeta \in \partial N \end{cases} = \phi(\zeta),$$

(όπου η σχέση $\lim\limits_{z \to \zeta} g_U(z,w) = g_U(\zeta,w), \forall \zeta \in \partial N \subset U \setminus \{w\}$ προκύπτει από τη συνέχεια της $g_U(.,w)$ στο $U \setminus \{w\}$).

Άρα, λόγω μοναδικότητας της λύσης, $g_U(z,w) = H_{U \setminus \bar{N}} \phi(z)$, για κάθε $z \in U \setminus \overline{N}$.

Επομένως, αφού το ζ είναι κανονικό συνοριακό σημείο του U και άρα του $U \setminus \overline{N}$, και αφού η ϕ είναι συνεχής στο $\zeta \in \partial U$ και φραγμένη συνάρτηση, από το θεώρημα 2.3.2,

$$\lim_{z \to \zeta} g_U(z,w) = \lim_{z \to \zeta} H_{U \setminus \overline{N}} \phi(z) = \phi(\zeta) = 0.$$

$\square$

2.4 Λογαριθμική Χωρητικότητα

Ορισμός 2.4.1. *Καλούμε λογαριθμική χωρητικότητα (logarithmic capacity) ενός υποσυνόλου E του $\mathbb{C}$ τον θετικό αριθμό*

$$c(E) = \sup_{\mu} e^{I(\mu)},$$

όπου μ Borel, μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{C}$, του οποίου ο φορέας είναι συμπαγές υποσύνολο του E.

Παρατήρηση 2.4.1. *(i) Αν K είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{C}$, με equilibrium μέτρο ν, τότε $c(K) = e^{I(\nu)}$.*

Πράγματι, $c(K) = sup\{e^{I(\mu)} : \mu \in P(\mathbb{C}), supp\mu$ συμπαγές υποσύνολο του $K\} = sup\{e^{I(\mu)} : \mu \in P(\mathbb{C}), supp\mu \subset K\}$, δηλαδή

$c(K) = sup\{e^{I(\mu)} : \mu \in P(K)\} = e^{sup\{I(\mu):\mu\in P(K)\}} = e^{I(\nu)}$.

(ii) Επίσης, $c(E) = 0$ αν και μόνο αν $I(\mu) = -\infty$, για κάθε μ Borel, μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{C}$ με supp μ συμπαγές υποσύνολο του E, δηλαδή αν και μόνο αν το σύνολο E είναι polar.

Θεώρημα 2.4.1. *(α) Αν $E_1 \subset E_2$ τότε $c(E_1) \le c(E_2)$.*

(β) Αν $E \subset \mathbb{C}$ τότε $c(E) = sup\{c(K) : K$ συμπαγές υποσύνολο του $E\}$.

(γ) Αν $E \subset \mathbb{C}$ τότε $c(\alpha E + \beta) = |\alpha| c(E)$, για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

(δ) Αν K συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{C}$, τότε $c(K) = c(\partial_e K)$, όπου $\partial_e K$ το εξωτερικό σύνορο του K.

Απόδειξη. (α) Αν $E_1 \subset E_2$ τότε

$c(E_1) = sup\{e^{I(\mu)} : \mu \in P(\mathbb{C}), supp\mu$ συμπαγές υποσύνολο του $E_1\} \le$

$sup\{e^{I(\mu)} : \mu \in P(\mathbb{C}), supp\mu$ συμπαγές υποσύνολο του $E_2\} = c(E_2)$.

(β) Αν $E \subset \mathbb{C}$ τότε

$c(E) = sup\{e^{I(\mu)} : \mu \in P(\mathbb{C}), supp\mu$ συμπαγές υποσύνολο του $E\} =$

$= sup\{\sup_{\mu\in P(\mathbb{C}), supp\mu\subset K} e^{I(\mu)} : K$ συμπαγές υποσύνολο του $E\} =$

$= sup\{c(K) : K$ συμπαγές υποσύνολο του $E\}$.

(γ) Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ και $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ η απεικόνιση με τύπο $T(z) = \alpha z + \beta$.

Τότε $supp\mu \subset E \Leftrightarrow supp\mu T^{-1} \subset \alpha E + \beta$.

Επίσης,

$I(\mu T^{-1}) = \int\int \log|z-w| d\mu T^{-1}(z) d\mu T^{-1}(w) = \int\int \log|z-w| d\mu(\frac{z-\beta}{\alpha}) d\mu(\frac{w-\beta}{\alpha}) =$
$\int\int \log|\alpha z'+\beta-\alpha w'-\beta| d\mu(z') d\mu(w') = \int\int \log|\alpha(z'-w')| d\mu(z') d\mu(w') =$
$\int\int (\log|\alpha| + \log|z'-w'|) d\mu(z') d\mu(w') =$
$\int\int \log|\alpha| d\mu(z') d\mu(w') + \int\int \log|z'-w'| d\mu(z') d\mu(w') =$
$\log|\alpha| \mu(\mathbb{C}) + I(\mu) = \log|\alpha| + I(\mu)$.

Άρα, $c(\alpha E + \beta) =$
$sup\{e^{I(\mu T^{-1})} : \mu \in P(\mathbb{C}), supp\mu$ συμπαγές υποσύνολο του $E\} =$
$sup\{e^{I(\mu)+\log|\alpha|} : \mu \in P(\mathbb{C}), supp\mu$ συμπαγές υποσύνολο του $E\} =$
$|\alpha| c(E)$.

(δ) Έστω K συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{C}$. Αν το K είναι $polar$, τότε $\partial_e K \subset K$ είναι $polar$, άρα $c(K) = c(\partial_e K) = 0$.

Αν το K δεν είναι $polar$, τότε από το θεώρημα 2.1.12, το $equlibrium$ μέτρο του K, ν, είναι μοναδικό και $supp\nu \subset \partial_e K$. Επομένως, $c(K) \leq c(\partial_e K)$. Αλλά, $\partial_e K \subset K$, οπότε από το (α), $c(\partial_e K) \leq c(K)$. Άρα έχουμε το ζητούμενο.

$\square$

Θεώρημα 2.4.2. *(α) Αν $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \cdots$ συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{C}$ και $K = \cap_{n\in\mathbb{N}} K_n$, τότε $c(K) = \lim_{n\to\infty} c(K_n)$.*

(β) Αν $B_1 \subset B_2 \subset B_3 \subset \cdots$ Borel υποσύνολα του $\mathbb{C}$ και $B = \cup_{n\in\mathbb{N}} B_n$, τότε $c(B) = \lim_{n\to\infty} c(B_n)$.

Απόδειξη. (α) Έστω $K_1 \supset K_2 \supset \cdots$ συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{C}$ και $K = \cap_{n\in\mathbb{N}} K_n$. Από το θεώρημα 2.4.1 (α), έχουμε ότι $c(K_1) \geq c(K_2) \geq c(K_3) \geq \cdots \geq c(K)$ (σχέση 1). Δηλαδή, η ακολουθία $\{c(K_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη από το 0, άρα συγκλίνει. Άρα το όριο $\lim_{n\to\infty} c(K_n)$ υπάρχει και $\lim_{n\to\infty} c(K_n) \geq c(K)$.

Μένει να αποδείξουμε ότι $\lim_{n\to\infty} c(K_n) \leq c(K)$. Για κάθε $n \geq 1$, έστω v_n το $equilibrium$ μέτρο για το K_n. Τότε $v_n \in P(K_1)$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (διότι $v_n(K_1) = v_n(K_1 \cap K_n) = v_n(K_n) = 1$, δηλαδή κάθε v_n είναι μέτρο πιθανότητας για το K_1).

Άρα, από το θεώρημα 2.1.3, υπάρχει υπακολουθία (v_{n_k}), της $(v_n)_n$, η οποία είναι *weak*-συγκλίνουσα σε κάποιο $v \in P(K_1)$. Εφαρμόζοντας το λήμμα 2.1.1, έχουμε $\lim\limits_{k\to\infty} I(v_{n_k}) \leq I(v)$.

Επίσης, αφού $supp v_n \subset K_n$, για κάθε n, προκύπτει ότι $supp v \subset K$. Άρα, $e^{I(v)} \leq c(K)$.

Συνεπώς, $\lim\limits_{k\to\infty} c(K_{n_k}) \leq c(K)$ και μαζί με τη σχέση (1) προκύπτει το ζητούμενο.

(β) Έστω $B_1 \subset B_2 \subset B_3 \subset \cdots$ *Borel* υποσύνολα του $\mathbb{C}$ και $B = \cup_{n\in\mathbb{N}} B_n$. Ξανά από το θεώρημα 2.4.1 (α), έχουμε ότι $c(B_1) \leq c(B_2) \leq \cdots \leq c(B)$. Άρα $\limsup\limits_{n\to\infty} c(B_n) \leq c(B)$ (σχέση 2).

Θα αποδείξουμε ότι $c(B) \leq \liminf\limits_{n\to\infty} c(B_n)$. Από το θεώρημα 2.4.1 ($\beta$), αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε συμπαγές υποσύνολο K του B, ισχύει ότι $c(K) \leq \liminf\limits_{n\to\infty} c(B_n)$. Έστω λοιπόν K συμπαγές υποσύνολο του B και v *equilibrium* μέτρο για το K. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, θεωρούμε τα σύνολα $B_n \cap K$. Αφού τα σύνολα αυτά είναι *Borel* και το μέτρο v είναι πεπερασμένο *Borel* μέτρο για το K, από το θεώρημα 2.1.2, έχουμε ότι για κάθε n, υπάρχουν κλειστά σύνολα $K_n \subset B_n \cap K$ τέτοια ώστε

$$v((B_n \cap K) \setminus K_n) < \tfrac{1}{n}.$$

Επίσης μπορούμε να υποθέσουμε ότι $K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_n \subset \cdots$.

(Η σχέση $K_1 \subset K_2 \subset \cdots$, προκύπτει διότι για κάθε n, υπάρχουν κλειστα $\tilde{K}_n \subset B_n \cap K$ και $\tilde{K}_{n+1} \subset B_{n+1} \cap K$, άρα μπορούμε να θεωρήσουμε $K_{n+1} = \tilde{K}_{n+1} \cup \tilde{K}_n$, τα οποία είναι επίσης κλειστά σύνολα.) Προφανώς, για κάθε n έχουμε ότι τα K_n είναι συμπαγή σύνολα (ως κλειστά υποσύνολα του συμπαγούς K).

Τότε, καθώς $n \to \infty$, $v((B_n \cap K) \setminus K_n) \to 0$ και αφού $v(B_n \cap K) \to v(K) = 1$, προκύπτει ότι $v(K_n) \to 1$.

Συνεπώς, για αρκετά μεγάλο n, έχουμε $v(K_n) > 0$ και για αυτά τα n ορίζουμε $\mu_n = \dfrac{v|_{K_n}}{v(K_n)}$. Τότε, για κάθε n (με $v(K_n) > 0$), το μ_n είναι *Borel probability* μέτρο στο K_n και

$$I(\mu_n) = \int_K \int_K \log|z-w| d\mu_n(z) d\mu_n(w) =$$

$$\int_K \int_K \log|z-w| \frac{1}{(v(K_n))^2} 1_{K_n}(z) 1_{K_n}(w) dv(z) dv(w) =$$

$\frac{1}{(v(K_n))^2}\int_K\int_K \log|z-w| 1_{K_n}(w)dv(z)dv(w)$, όπου με 1_{K_n} συμβολίζουμε την χαρακτηριστική συνάρτηση του K_n.

Καθώς $n\to\infty$, έχουμε ότι $v(K_n)\to v(K)=1$, $1_{K_n}(z)\le 1_{K_{n+1}}(z)$, για κάθε $z\in K$ και $\lim_{n\to\infty} 1_{K_n}=1_K$, v-σχεδόν παντού. Οπότε (από θεώρημα μονότονης σύγκλισης),

$\lim_{n\to\infty} I(\mu_n)=\int_K\int_K \log|z-w|dv(z)dv(w)=I(v)$.

Αφού κάθε μ_n έχει φορέα το σύνολο K_n, το οποίο είναι συμπαγές υποσύνολο του B_n, έχουμε ότι

$c(B_n)=\sup\{e^{I(\mu)} : \mu\in P(\mathbb{C}), supp\mu$ συμπαγές υποσύνολο του $B_n\}\ge e^{I(\mu_v)}$, για κάθε n. Συνεπώς,

$\liminf_{n\to\infty} c(B_n)\ge \lim_{n\to\infty} e^{I(\mu_v)}=e^{\lim_{n\to\infty} I(\mu_v)}=e^{I(v)}=c(K)$.

Τέλος, αφού το K είναι τυχαίο συμπαγές υποσύνολο του B, από το θεώρημα 2.4.1 (β),

$\liminf_{n\to\infty} c(B_n)\ge \sup\{c(K) : K$ συμπαγές υποσύνολο του $B\}=c(B)$ και σε συνδυασμό με τη σχέση 2, έχουμε ότι

$\limsup_{n\to\infty} c(B_n)\le c(B)\le \liminf_{n\to\infty} c(B_n)$, άρα $c(B)=\lim_{n\to\infty} c(B_n)$.

□

Θεώρημα 2.4.3. *Έστω K συμπαγές, non−polar σύνολο και U η συνιστώσα του $\mathbb{C}_\infty\setminus K$ που περιέχει το ∞. Τότε*

$$g_U(z,\infty)=\log|z|-\log c(K)+o(1), \textit{ καθώς το } z\to\infty.$$

Απόδειξη. Έστω ν ένα *equilibrium* μέτρο για το συμπαγές σύνολο K. Από τον τρόπο με τον οποίο κατασκευάστηκε η συνάρτηση g_U στο θεώρημα 2.2.1, έχουμε ότι

$$g_U(z,\infty)=p_\nu(z)-I(\nu)=p_\nu(z)-\log c(K),\ z\in U\setminus\{\infty\}.$$

Από το θεώρημα 2.1.4 γνωρίζουμε επίσης ότι

$$p_\nu(z)=\log|z|+o(1), \text{ καθώς } z\to\infty.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω, έχουμε ότι

$$g_U(z,\infty)=\log|z|-\log c(K)+o(1), \text{ καθώς } z\to\infty.$$

□

Πόρισμα 2.4.1. *Αν* $w \in \mathbb{C}$ *και* $r > 0$, *τότε* $c(\overline{D(w,r)}) = r$.

Απόδειξη. Θέτοντας $U = \mathbb{C}_\infty \setminus \overline{D(w,r)}$ έχουμε ότι η συνάρτηση *Green* για το U, $g_U : U \times U \to (-\infty, \infty]$, είναι

$$g_U(z,\infty) = \log\left|\frac{z-w}{r}\right|.$$

Πράγματι, η απεικόνιση $g_U(.,\infty) : U \to (-\infty,\infty]$, με $g_U(z,\infty) = \log\left|\frac{z-w}{r}\right|$ είναι αρμονική στο $U\setminus\{\infty\}$ και φραγμένη έξω από κάθε γειτονιά του ∞. Επίσης, $\log\left|\frac{\infty-w}{r}\right| = \infty$ και $\log\left|\frac{z-w}{r}\right| \to \log\left|\frac{r}{r}\right| = 0$, όταν $z \to \zeta$, για ζ σχεδόν παντού στο $\partial U = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$.

Τέλος, καθώς $z \to \infty$, $\log\left|\dfrac{z-w}{r}\right| = \log\left|\dfrac{z(1-\frac{w}{z})}{r}\right| = \log|z| - \log r + \log\left|1 - \dfrac{w}{z}\right| = \log|z| - \log r + o(1)$. (σχέση (1))

Άρα ικανοποιούνται οι συνθήκες του ορισμού 2.2.1 της συνάρτησης *Green*. Από το θεώρημα 2.4.3, $g_U(z,\infty) = \log|z| - \log c(\overline{D(w,r)} + o(1)$, καθώς το $z \to \infty$. Συγκρίνοντας την παραπάνω σχέση με την σχέση (1), προκύπτει ότι $c(\overline{D(w,r)}) = r$. □

Θεώρημα 2.4.4. *Έστω* K *συμπαγές σύνολο και* $q(z) = \sum_{j=0}^{d} a_j z^j$, *όπου* $a_d \neq 0$. *Τότε*

$$c(q^{-1}(K)) = \left(\frac{c(K)}{|a_d|}\right)^{1/d}.$$

Απόδειξη. Έστω U και U' οι συνιστώσες που περιέχουν το ∞, των $\mathbb{C}_\infty \setminus K$ και $\mathbb{C}_\infty \setminus q^{-1}(K)$ αντίστοιχα. Τότε άμεσα προκύπτει ότι $q(U') = U$ και $q(\partial U') = \partial U$.

Ας υποθέσουμε αρχικά ότι το U είναι κανονικό, δηλαδή κάθε $\zeta \in \partial U$ είναι κανονικό. Τότε, το ∂U είναι $non-polar$ (διότι αν το ∂U ήταν $polar$, τότε για κάθε $\zeta_0 \in \partial U$ και για κάθε ανοιχτή γειτονιά του, έστω N, το σύνολο $\partial U \cap N$ είναι $polar$, ως υποσύνολο του $polar$ ∂U. Αλλά, από το θεώρημα 2.3.5, θα έχουμε ότι το ζ_0 δεν είναι κανονικό, το οποίο έρχεται σε αντίφαση με το ότι το U είναι κανονικό). Εφαρμόζοντας λοιπόν το θεώρημα 2.3.9 έχουμε ότι

$$\lim_{z\to\zeta, z\in U'} g_U(q(z),\infty) = 0, \text{ για κάθε } \zeta \in \partial U.$$

Επίσης, η συνάρτηση $g_U(q(z),\infty)$ είναι αρμονική στο $U' \setminus \{\infty\}$

και καθώς $z \to \infty$, $g_U(q(z),\infty) = \log|q(z)| + O(1) = d\log|z| + O(1)$, όπου $d = deg(q)$.

Από τη μοναδικότητα της συνάρτησης *Green* έπεται ότι

$$g_U(q(z),\infty) = d\, g_{U'}(z,\infty).$$

Από το θεώρημα 2.4.3 γνωρίζουμε επιπλέον ότι καθώς $z \to \infty$,

$$\begin{aligned} g_U(q(z),\infty) &= \log|q(z)| - \log|c(K)| + o(1) \\ &= d\log|z| + \log|a_d| - \log|c(K)| + o(1) \end{aligned}$$

και

$$g_{U'}(z,\infty) = \log|z| - \log c(q^{-1}(K)) + o(1).$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω, έχουμε ότι
$d\log c(q^{-1}(K)) = \log|c(K)| - \log|a_d|$, δηλαδή

$$c(q^{-1}(K)) = \left(\frac{c(K)}{|a_d|}\right)^{1/d}.$$

Στην περίπτωση τώρα όπου το K είναι τυχαίο συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{C}$, υποθέτουμε ότι ζ_0 είναι ένα συνοριακό σημείο του που δεν είναι κανονικό. Τότε από το θεώρημα 2.3.7, το σύνολο K είναι *thin* στο ζ_0 και θα δείξουμε ότι το $\{\zeta_0\}$ είναι η "μεγαλύτερη" συνεκτική συνιστώσα του K που περιέχει το ζ_0. Πράγματι, αν υπάρχει συνεκτικό $E \subset K$, με $\zeta_0 \in E$ και $E \setminus \{\zeta_0\} \neq \emptyset$ τότε από το θεώρημα ;;, το E είναι $non-thin$ στο ζ_0. Δηλαδή, για κάθε υπαρμονική συνάρτηση ορισμένη σε περιοχή του ζ_0, ισχύει ότι

$$\limsup_{z\to\zeta_0, z\in E\setminus\{\zeta_0\}} u(z) = u(\zeta_0).$$

Επιπλέον,

$$\limsup_{z\to\zeta_0, z\in K\setminus\{\zeta_0\}} u(z) \geq \limsup_{z\to\zeta_0, z\in E\setminus\{\zeta_0\}} u(z) = u(\zeta_0)$$

και λόγω υπαρμονικότητας της u,

$$\limsup_{z\to\zeta_0} u(z) \leq u(\zeta_0).$$

Άρα, για κάθε υπαρμονική συνάρτηση u ορισμένη σε περιοχή του ζ_0,

$$\limsup_{z\to\zeta_0, z\in K\setminus\{\zeta_0\}} u(z) = u(\zeta_0),$$

δηλαδή το K είναι *thin* στο ζ_0, το οποίο είναι άτοπο.
Θεωρούμε τώρα $\varepsilon > 0$ και θέτουμε

$$K^{\varepsilon} = \{z : dist(z, K) \leq \varepsilon\}.$$

Αφού καμία καμία συνιστώσα του K^{ε} δεν είναι μονοσύνολο, έπεται ότι κάθε συνοριακό σημείο του είναι κανονικό, δηλαδή ότι το ανοιχτό και συνεκτικό $U^{\varepsilon} = \mathbb{C}_{\infty} \setminus K^{\varepsilon}$ είναι κανονικό. Οπότε, σύμφωνα με τη προηγούμενη περίπτωση,

$$c(q^{-1}(K^{\varepsilon})) = \left(\frac{c(K^{\varepsilon})}{|a_d|}\right)^{1/d}.$$

Το αποτέλεσμα έπεται αφήνοντας το $\varepsilon \to 0$ και εφαρμόζοντας το θεώρημα 2.4.2 (α). □

Ορισμός 2.4.2. *Έστω K ένα συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και έστω $n \geq 2$. Καλούμε $n-$οστή διάμετρο του K τον αριθμό*

$$\delta_n(K) = \sup\{\prod_{j,k:j<k} |w_j - w_k|^{2/n(n-1)} : w_1, \cdots, w_n \in K\}.$$

Η $n-$άδα $w_1, \cdots, w_n \in K$ για την οποία πραγματοποιείται το supremum καλείται Fekete $n-$άδα για το K.

Παρατήρηση 2.4.2. *Αφού το K είναι συμπαγές, μια Fekete $n-$άδα υπάρχει πάντα, ανήκει στο $\partial_e K$ και μπορεί να μην είναι μοναδική.*

Θεώρημα 2.4.5. *[Θεώρημα Fekete − Szegö] Έστω K συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{C}$. Τότε η ακολουθία $(\delta_n(K))_{n\geq 2}$ είναι φθίνουσα και*

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n(K) = c(K).$$

Απόδειξη. Για απλοποίηση του συμβολισμού, σε όλη την απόδειξη θα γράφουμε δ_n αντί για $\delta_n(K)$.

Θα δείξουμε αρχικά ότι η ακολουθία $(\delta_n(K))_{n\geq 2}$ είναι φθίνουσα. Έστω $n \geq 2$. Επιλέγουμε την *Fekete* $(n+1)-$άδα για το K, $w_1, \cdots, w_{n+1} \in K$, για την οποία ισχύει $\delta_{n+1}^{n(n+1)/2} = \prod_{1\leq j<k\leq n+1} |w_j - w_k|$. Τότε αφού τα στοιχεία $w_2, \cdots, w_{n+1}$ είναι μια n-άδα στο K, έχουμε ότι

$$\delta_n^{n(n-1)/2} = \sup\{\prod_{j,k:j<k} |w_j - w_k| : w_1, \cdots, w_n \in K\} \geq \prod_{2\leq j<k\leq n+1} |w_j - w_k|.$$

Υπάρχουν συνολικά $(n+1)$ τέτοιες ανισότητες, όπου η $m-$οστή δίνεται παραλείποντας τους όρους που σχετίζονται με το w_m, δηλαδή

$$\delta_n^{n(n-1)/2} \geq \prod_{j<k,\ j,k\in\{1,2,\cdots,m-1,m+1,\cdots,n\}} |w_j - w_k|.$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη όλες αυτές τις ανισότητες έχουμε:
$(\delta_n^{n(n-1)/2})^{n+1} \geq \prod_{1\leq j<k\leq n+1} |w_j - w_k|^{n-1} = (\delta_{n+1}^{n(n+1)/2})^{n-1}.$
Άρα, $\delta_n \geq \delta_{n+1}$, δηλαδή η ακολουθία είναι φθίνουσα.

Έπειτα θα δείξουμε ότι $\delta_n \geq c(K)$, για κάθε $n \geq 2$.
Αν $z_1, \cdots, z_n \in K$, τότε $\delta_n \geq \prod_{1\leq j<k\leq n} |z_j - z_k|^{2/n(n-1)}$. Επομένως,

$$\log \delta_n \geq \log \prod_{1\leq j<k\leq n} |z_j - z_k|^{2/n(n-1)} = \sum_{1\leq j<k\leq n} \log |z_j - z_k|^{2/n(n-1)} =$$

$$= \frac{2}{n(n-1)} \sum_{1\leq j<k\leq n} \log |z_j - z_k|.$$

Ολοκληρώνοντας την παραπάνω ανισότητα ως προς $d\nu(z_1)\cdots d\nu(z_n)$, όπου ν το *equilibrium* μέτρο για το K, έχουμε:

$$\frac{2}{n(n-1)} \sum_{1\leq j<k\leq n} \int_K \int_K \log |z_j - z_k| d\nu(z_j) d\nu(z_k) \leq \log \delta_n \nu(K) \Rightarrow$$

$$\frac{2}{n(n-1)} \binom{n}{2} I(\nu) \leq \log \delta_n \Rightarrow$$

$$e^{I(\nu)} = c(K) \leq \delta_n.$$

Τέλος, θα αποδείξουμε ότι $\limsup_{n\to\infty} \delta_n \leq c(K)$. Θεωρούμε $\varepsilon > 0$ και θέτουμε $K^\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} : dist(z, K) \leq \varepsilon\}$. Έστω $n \geq 2$. Επιλέγουμε $w_1, \cdots, w_n \in K$ τέτοια ώστε $\delta_n^{n(n-1)/2} = \prod_{j<k} |w_j - w_k|$.

Για κάθε j, έστω μ_j το κανονικοποιημένο μέτρο *Lebesgue* στον κύκλο $\partial D(w_j, \varepsilon)$ και $\mu = n^{-1} \sum_{j=1}^{n} \mu_j$ (δηλαδή, για κάθε $A \subset \mathbb{C}$, $\mu(A) = n^{-1}(\mu_1(A \cap \partial D(w_1, \varepsilon)) + \cdots + \mu_n(A \cap \partial D(w_n, \varepsilon))))$. Τότε, η ενέργεια $I(\mu)$ δίνεται από:

$$\int\int \log |z - w| d\mu(z) d\mu(w) = \int \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \int \log |z - w| d\mu_j(z) d\mu(w) =$$

$$\frac{1}{n^2} \sum_{j} \int\int \log |z-w| d\mu_j(z) d\mu_j(w) + \frac{2}{n^2} \sum_{j<k} \int\int \log |z-w| d\mu_j(z) d\mu_k(w).$$

Τώρα για κάθε $j = 1, \cdots, n$,

$$\int\int \log |z - w| d\mu_j(z) d\mu_j(w) = I(\mu_j).$$

Αλλά, από το θεώρημα 2.1.14, το κανονικοποιημένο μέτρο *Lebesgue* στον κύκλο $\partial D(w_j, \varepsilon)$ ταυτίζεται με το *equilibrium* μέτρο του κλειστού δίσκου $\overline{D(w_j, \varepsilon)}$, έστω ν. Άρα,

$$\int\int \log|z-w|d\mu_j(z)d\mu_j(w) = I(\nu) = \log(c(\overline{D})) = \log\varepsilon,$$

από το πόρισμα 2.4.1.

Επίσης, για κάθε ζεύγος $j < k$,

$$\int\int \log|z-w|d\mu_j(z)d\mu_k(w) = \int p_{\mu_j}(w)d\mu_k(w) \geq p_{\mu_j}(w_k),$$

από *local submean* ανισότητα, διότι η p_{μ_j} είναι υπαρμονική και

$$p_{\mu_j}(w_k) = \int \log|z-w|d\mu_j(z) \geq \log|w_j - w_k|,$$

διότι η $\log|w_j - w_k|$ είναι υπαρμονική. Συνεπώς,

$$I(\mu) \geq \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\log\varepsilon + \frac{2}{n^2}\sum_{j<k}\log|w_j - w_k| =$$

$$\frac{1}{n}\log\varepsilon + \frac{n-1}{n}\log\delta_n.$$

Αφού ο φορέας του μ είναι συμπαγές υποσύνολο του K^ε, έπεται ότι: $c(K^\varepsilon) \geq e^{I(\mu)} \geq \varepsilon^{1/n}\delta_n(K)^{(n-1)/n}$.

Επομένως, $\limsup_{n\to\infty}\delta_n \leq c(K^\varepsilon)$ και επειδή το ε είναι τυχαίο, από το θεώρημα 2.4.2 έχουμε ότι $c(K^\varepsilon) \to c(K)$, καθώς $\varepsilon \to 0$. Άρα,

$$\limsup_{n\to\infty}\delta_n \leq c(K).$$

Δηλαδή, αποδείξαμε ότι για κάθε $n \geq 2$, $c(K) \leq \delta_n \leq \limsup_{n\to\infty}\delta_n \leq c(K)$, οπότε

$$\lim_{n\to\infty}\delta_n(K) = c(K).$$

□

2.5 $n-$οστή Διάμετρος

Ορισμός 2.5.1. *Έστω K συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και έστω $n \geq 2$. Καλούμε πολυώνυμο Fekete για το K, βαθμού n, ένα πολυώνυμο της μορφής*

$$q(z) = \prod_{i=1}^{n}(z - w_i),$$

όπου $w_1, \cdots, w_n$ μια Fekete $n-$άδα για το K.

Θεώρημα 2.5.1. *Έστω K συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{C}$.*

(α) *Αν q μονικό πολυώνυμο, βαθμού $n \geq 1$, τότε $||q||_K^{1/n} \geq c(K)$.*

(β) *Αν q πολυώνυμο Fekete, βαθμού $n \geq 2$, τότε $||q||_K^{1/n} \leq \delta_n(K)$.*

Απόδειξη. (α) Έστω K συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και q μονικό πολυώνυμο, βαθμού $n \geq 1$. Θεωρούμε την ομοιόμορφη νόρμα στο K, όπου $||q||_K = \sup\{|q(z)| : z \in K\}$ και έχουμε ότι για κάθε $z \in K$, $|q(z)| \leq ||q||_K \Rightarrow q(z) \in \overline{D(0, ||q||_K)}$, δηλαδή $z \in q^{-1}(\overline{D(0, ||q||_K)})$. Άρα, $K \subset q^{-1}(\overline{D(0, ||q||_K)})$.

Από το θεώρημα 2.4.1 (α), $c(K) \leq c(q^{-1}(\overline{D(0, ||q||_K)}))$.

Από το θεώρημα 2.4.4, $c(q^{-1}(\overline{D(0, ||q||_K)})) = c(\overline{D(0, ||q||_K)})^{1/n} = ||q||_K^{1/n}$, με την τελευταία ισότητα να προκύπτει από το θεώρημα 2.4.1.

Άρα, $||q||_K^{1/n} \geq c(K)$.

(β) Έστω q πολυώνυμο *Fekete*, βαθμού $n \geq 2$, δηλαδή $q(z) = \prod_{i=1}^{n}(z - w_i)$, όπου $w_1, \cdots, w_n$ μια *Fekete* $n-$άδα για το K. Αν $z \in K$, τότε τα στοιχεία $z, w_1, \cdots, w_n$ είναι μια $(n+1)-$άδα για στο K, άρα

$$\prod_{i=1}^{n}|z - w_i| \prod_{j<k,\ j,k=1}^{n}|w_j - w_k| \leq \delta_{n+1}(K)^{n(n+1)/2}$$

και επομένως,

$$|q(z)| = |\prod_{i=1}^{n}(z - w_i)| \leq \prod_{i=1}^{n}|z - w_i| \leq \frac{\delta_{n+1}(K)^{n(n+1)/2}}{\delta_n(K)^{n(n-1)/2}}.$$

Αφού $\delta_{n+1}(K) \leq \delta_n(K)$ (από θεώρημα 2.4.5), έχουμε ότι

$$\frac{\delta_{n+1}(K)^{n(n+1)/2}}{\delta_n(K)^{n(n-1)/2}} \leq \frac{\delta_n(K)^{n(n+1)/2}}{\delta_n(K)^{n(n-1)/2}} = \delta_n(K)^n.$$

Επειδή το z είναι τυχαίο στοιχείο του K, προκύπτει ότι

$||q||_K^{1/n} \leq \delta_n(K)$.

□

Θεώρημα 2.5.2. *[Λήμμα του Bernstein] Έστω K συμπαγές, $non-polar$ υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και U η συνιστώσα του $\mathbb{C}_\infty \setminus K$ που περιέχει το ∞.*

(α) *Αν* q *πολυώνυμο βαθμού* $n \geq 1$, *τότε*

$$\left(\frac{|q(z)|}{||q||_K}\right)^{1/n} \leq e^{g_U(z,\infty)}, \quad z \in U \setminus \{\infty\},$$

όπου με g_U *συμβολίζουμε τη συνάρτηση Green του* U.

(β) *Αν* q *είναι ένα Fekete πολυώνυμο για το* K, *βαθμού* $n \geq 2$, *τότε*

$$\left(\frac{|q(z)|}{||q||_K}\right)^{1/n} \geq e^{g_U(z,\infty)} \left(\frac{c(K)}{\delta_n(K)}\right)^{\tau_U(z,\infty)}, \quad z \in U \setminus \{\infty\},$$

όπου με τ_D *συμβολίζουμε την απόσταση Harnack για το* D.

Απόδειξη. (α) Έστω q πολυώνυμο βαθμού $n \geq 1$. Πολλαπλασιάζοντας το q με κάποια σταθερά, αν είναι απαραίτητο, μπορούμε να το μετατρέψουμε σε μονικό πολυώνυμο. Αν αποδείξουμε το ζητούμενο για το πολυώνυμο $c\,q$, όπου $c \in \mathbb{R}$, τότε ισχύει και για το πολυώνυμο q. Μπορούμε λοιπόν να υποθέτουμε ότι το q είναι μονικό πολυώνυμο. Ορίζουμε την απεικόνιση $u : U \setminus \{\infty\} \to \mathbb{R}$, με

$u(z) = \frac{1}{n}\log|q(z)| - \frac{1}{n}\log||q||_K - g_U(z,\infty)$.

Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση $\log|q(z)|$ είναι υπαρμονική στο $U\setminus\{\infty\}$, διότι η $q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}$, και η συνάρτηση *Green* $g_U(.,\infty)$ είναι αρμονική στο $U \setminus \{\infty\}$. Άρα, η u είναι υπαρμονική στο $U \setminus \{\infty\}$.

Επίσης, από το θεώρημα 2.4.3,

$u(z) = \log|z| - \frac{1}{n}\log||q||_K - \log|z| + \log c(K) + o(1)$, καθώς το $z \to \infty$.

Επομένως, θέτοντας $u(\infty) = \log c(K) - \frac{1}{n}\log||q||_K$, η u επεκτείνεται σε υπαρμονική στο U, από το θεώρημα 2.1.10, διότι είναι φραγμένη σε περιοχή του ∞.

Τώρα για κάθε $\zeta \in \partial U$, αφού $\lim\limits_{z\to\zeta} g_U(z,\infty) = 0$ και $\partial U \subset K$ έχουμε

$$\limsup_{z\to\zeta} u(z) = \limsup_{z\to\zeta}\left(\frac{1}{n}\log|q(z)| - \frac{1}{n}\log||q||_K - g_U(z,\infty)\right) =$$

$$\limsup_{z\to\zeta}\left(\frac{1}{n}\log|q(z)|\right) - \frac{1}{n}\log||q||_K \leq \frac{1}{n}\log|q(\zeta)| - \frac{1}{n}\log||q||_K \leq 0.$$

Επομένως, από την αρχή μεγίστου, $u \leq 0$ στο U. Άρα,

$\left(\frac{|q(z)|}{||q||_K}\right)^{1/n} \leq e^{g_U(z,\infty)}$, για κάθε $z \in U \setminus \{\infty\}$.

(β) Αν q είναι ένα *Fekete* πολυώνυμο, τότε οι ρίζες του είναι μια *Fekete* $n-$άδα για το K, οι οποίες εξ' ορισμού τους ανήκουν στο K. Δηλαδή, το πολυώνυμο q δεν μηδενίζεται στο U. Άρα, η απεικόνιση $\log|q|$ είναι αρμονική στο U. Επίσης, η $g_U(.,\infty)$ είναι αρμονική στο $U \setminus \{\infty\}$, άρα η u, όπως ορίστηκε στο (α), είναι αρμονική στο $U \setminus \{\infty\}$. Θέτοντας ξανά $u(\infty) = \log c(K) - \frac{1}{n}\log||q||_K$, η u γίνεται αρμονική στο U.

Από το μέρος (α), $u \leq 0$ στο U, οπότε μπορούμε να εφαρμόσουμε την ανισότητα του *Harnack* για την θετική και αρμονική συνάρτηση $-u$ και να έχουμε

$u(z) \geq \tau_U(z,\infty)u(\infty)$, για κάθε $z \in U$.   σχέση (1)

Τώρα από το θεώρημα 2.5.1 (β),

$u(\infty) = \log c(K) - \frac{1}{n}\log||q||_K \geq \log c(K) - \log\delta_n(K)$.   σχέση (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2), για κάθε $z \in U \setminus \{\infty\}$, προκύπτει ότι

$u(z) \geq \tau_U(z,\infty)\log c(K) - \tau_U(z,\infty)\log\delta_n(K) \Rightarrow$

$\dfrac{1}{n}\log|q(z)| - \dfrac{1}{n}\log||q||_K - g_U(z,\infty) \geq \dfrac{\log c(K)^{\tau_U(z,\infty)}}{\log\delta_n(K)^{\tau_U(z,\infty)}} \Rightarrow$

$\left(\dfrac{|q(z)|}{||q||_K}\right)^{1/n} \geq e^{g_U(z,\infty)}\left(\dfrac{c(K)}{\delta_n(K)}\right)^{\tau_U(z,\infty)}$.

□

2.6 Θεώρημα των *Bernstein – Walsh*

Θεώρημα 2.6.1. *[Θεώρημα των Bernstein–Walsh] Έστω K ένα συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{C}$, τέτοιο ώστε το σύνολο $\mathbb{C} \setminus K$ να είναι συνεκτικό και έστω U ανοιχτό σύνολο με $K \subset U$. Αν η f είναι συνάρτηση ολόμορφη στο U, τότε*

$$\limsup_{n\to\infty} d_n(f,K)^{1/n} \leq \theta < 1,$$

όπου

$$d_n(f,K) = \inf\{||f-p||_K : p \text{ πολυώνυμο βαθμού το πολύ } n\} \text{ και}$$

$$\theta = \begin{cases} \sup_{\mathbb{C}_\infty\setminus U}\exp(-g_{\mathbb{C}_\infty\setminus K}(z,\infty)), & c(K) > 0 \\ 0, & c(K) = 0 \end{cases}.$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε αρχικά ότι $c(K) > 0$ και έστω $\theta = \sup_{z\in\mathbb{C}_\infty\setminus U} e^{-g_{\mathbb{C}_\infty\setminus K}(z,\infty)} > 0$. Προφανώς $\theta \leq 1$, διότι η συνάρτηση *Green* $g_{\mathbb{C}_\infty\setminus K}(z,\infty)$, είναι θετική για κάθε $z \in \mathbb{C}_\infty \setminus K$.

Από τον ορισμό της συνάρτησης *Green* $g_{\mathbb{C}_\infty\setminus K}$, έχουμε ότι $\lim_{z\to\infty} e^{-g_{\mathbb{C}_\infty\setminus K}(z,\infty)} = 0$, επομένως υπάρχει $M_1 > 0$ τέτοιο ώστε: $|z| > M_1 \Rightarrow |e^{-g_{\mathbb{C}_\infty\setminus K}(z,\infty)}| < \frac{\theta}{2}$.

Επιπλέον, αφού το K είναι φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{C}$, υπάρχει δίσκος $D(0, M_2)$ τέτοιος ώστε $K \subseteq \overline{D(0, M_2)}$.

Επιλέγοντας $M = \max\{M_1, M_2\}$ έχουμε ότι $K \subseteq \overline{D(0, M)}$ και

$$\theta = \sup_{z\in\mathbb{C}_\infty\setminus U} e^{-g_{\mathbb{C}_\infty\setminus K}(z,\infty)} = \max_{z\in(\mathbb{C}_\infty\setminus U)\cap\overline{D(0,M)}} e^{-g_{\mathbb{C}_\infty\setminus K}(z,\infty)}.$$

Επειδή $\theta = \max_{z\in(\mathbb{C}_\infty\setminus U)\cap\overline{D(0,M)}} e^{-g_{\mathbb{C}_\infty\setminus K}(z,\infty)}$, υπάρχει z_0 στο συμπαγές $(\mathbb{C}_\infty \setminus U) \cap \overline{D(0, M)}$ τέτοιο ώστε $\theta = e^{-g_{\mathbb{C}_\infty\setminus K}(z_0,\infty)} < 1$.

Έστω $\rho = dist(K, \partial U) > 0$. Θέτουμε

$$\widehat{U} = \{z \in U \cap D(0, M) : dist(z, \partial U) < \frac{\rho}{2}\}.$$

Θα αποδείξουμε ότι το σύνολο $\widehat{U}$ είναι ανοιχτό. Έστω $z_0 \in \widehat{U}$, θα αποδείξουμε ότι υπάρχει $\hat{r} > 0$ τέτοιο ώστε $D(z_0, \hat{r}) \subseteq \widehat{U}$. Αφού $z_0 \in \widehat{U}$, έχουμε ότι $z_0 \in U \cap D(0, M)$ και $r_1 := dist(z_0, \partial U) < \frac{\rho}{2}$. Αλλά το $U \cap D(0, M)$ είναι ανοιχτό, άρα υπάρχει $r_2 > 0$ τέτοιο ώστε $D(z_0, r_2) \subseteq U \cap D(0, M)$. Θέτουμε $\hat{r} = \min\{\frac{\rho}{2} - r_1, r_2\}$. Προφανώς, $0 < \hat{r} < \frac{\rho}{2}$. Επιπλέον, $D(z_0, \hat{r}) \subseteq D(z_0, r_2) \subseteq U \cap D(0, M)$ και για κάθε $w \in D(z_0, \hat{r})$ θα αποδείξουμε ότι $dist(w, \partial U) < \frac{\rho}{2}$. Πράγματι, για κάθε $\zeta \in \partial U$ ισχύει ότι $|w - \zeta| \leq |w - z_0| + |z_0 - \zeta| < \hat{r} + r_1 \leq \frac{\rho}{2} - r_1 + r_1 = \frac{\rho}{2}$. Άρα, για κάθε $w \in D(z_0, \hat{r})$, έχουμε ότι $w \in U \cap D(0, M)$ και $dist(w, \partial U) < \frac{\rho}{2}$. Δηλαδή, $w \in \widehat{U}$, που αποδεικνύει ότι το $\widehat{U}$ είναι ανοιχτό.

Στο σύνολο $\widehat{U}$, θεωρούμε Γ, άθροισμα καμπυλών, πεπερασμένες το πλήθος, με τέτοιο δείκτη στροφής ώστε να ισχύει ο τύπος του *Cauchy*. Δηλαδή,

αν $z_0 \in K$ τότε $\int_\Gamma \frac{1}{w - z_0}\, dw = 2\pi\, i$ και

αν $z_0 \in \mathbb{C}_\infty \setminus \hat{U}$ τότε $\int_\Gamma \frac{1}{w - z_0}\, dw = 0$.

Για δοσμένο $n \geq 2$, θεωρούμε q_n ένα *Fekete* πολυώνυμο, βαθμού n, για το K. Δηλαδή, $q_n(z) = \prod_{i=1}^{n}(z - w_i)$, για κάποια *Fekete* $n-$άδα $w_1, \cdots, w_n$.

Ορίζουμε $p_n(w) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma \frac{f(z)}{q_n(z)}\frac{q_n(w)-q_n(z)}{w-z}\,dz, \;\; w \in K.$

Θα αποδείξουμε ότι, για κάθε n, το p_n είναι πολυώνυμο βαθμού $n-1$.

Αναλύουμε σε απλά κλάσματα: $\dfrac{1}{q_n(z)(w-z)} = \dfrac{B_0(w)}{w-z} + \displaystyle\sum_{\rho=1}^{n}\frac{B_\rho(w)}{z-w_\rho}$

και πολλαπλασιάζοντας με $q_n(z)(w-z)$ έχουμε:

$1 = q_n(z)B_0(w) + \displaystyle\sum_{\rho=1}^{n}(w-z)B_\rho(w)\prod_{i=1,i\neq\rho}^{n}(z-w_i).$

Θέτοντας $z=w$, υπολογίζουμε: $1 = q_n(w)B_0(w) \Rightarrow B_0(w) = \dfrac{1}{q_n(w)}.$

Θέτοντας $z = w_\rho$, για κάθε $\rho = 1, 2, \cdots, n$:

$1 = (w-w_\rho)B_\rho(w)\displaystyle\prod_{i=1,i\neq\rho}^{n}(w_\rho - w_i) \Rightarrow B_\rho(w) = \frac{1}{(w-w_\rho)\displaystyle\prod_{i=1,i\neq\rho}^{n}(w_\rho-w_i)}.$

Άρα, $p_n(w) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma \frac{f(z)(q_n(w)-q_n(z))}{(w-z)q_n(w)}\,dz + \sum_{\rho=1}^{n}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)(q_n(w)-q_n(z))}{c_\rho(w-w_\rho)(z-w_\rho)}\,dz,$

όπου $c_\rho = \displaystyle\prod_{i=1,i\neq\rho}^{n}(w_\rho - w_i)$. Εφαρμόζοντας τον ολοκληρωτικό τύπο του $Cauchy$ στις ολόμορφες συναρτήσεις $-f(z)\dfrac{(q_n(w)-q_n(z))}{q_n(w)}$ και $f(z)\dfrac{(q_n(w)-q_n(z))}{c_\rho(w-w_\rho)}$, $z \in U$, έχουμε:

$p_n(w) = \dfrac{-f(w)(q_n(w)-q_n(w))}{q_n(w)} + \displaystyle\sum_{\rho=1}^{n}\frac{f(w_\rho)}{c_\rho(w-w_\rho)}(q_n(w)-q_n(w_\rho))$

και αφού $q_n(w_\rho) = 0$ για κάθε $\rho = 1, \cdots, n$, προκύπτει ότι:

$$p_n(w) = \sum_{\rho=1}^{n}\frac{f(w_\rho)}{c_\rho}\frac{\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(w-w_i)}{w-w_\rho} = \sum_{\rho=1}^{n}\left(\frac{f(w_\rho)}{c_\rho}\prod_{i=1,i\neq\rho}^{n}(w-w_i)\right),$$

όπου $c_\rho = \displaystyle\prod_{i=1,i\neq\rho}^{n}(w_\rho-w_i)$. Οπότε το πολυώνυμο p_n είναι πράγματι $n-1$ βαθμού.

Εφαρμόζοντας τώρα τον ολοκληρωτικό τύπο του $Cauchy$ στην f έχουμε:

$f(w) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-w}\,dz$. Άρα, για κάθε $w \in K$,

$f(w) - p_n(w) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma \left(\frac{f(z)}{z-w} - \frac{f(z)}{q_n(z)}\frac{q_n(w)-q_n(z)}{w-z}\right) dz =$
$\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-w}\frac{q_n(w)}{q_n(z)}\,dz$. Επομένως,
$\sup\limits_{w\in K}|f(w)-p_n(w)| = \sup\limits_{w\in K}\left|\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-w}\frac{q_n(w)}{q_n(z)}\,dz\right| \leq$
$\dfrac{1}{2\pi}\sup\left\{\left|\dfrac{f(z)}{z-w}\dfrac{q_n(w)}{q_n(z)}\,dz\right| : z\in\Gamma, w\in K\right\} l(\Gamma) \leq$
$\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\sup\limits_{z\in\Gamma}|f(z)|}{dist(w,\Gamma)}\dfrac{\sup\limits_{w\in K}|q_n(w)|}{\inf\limits_{z\in\Gamma}|q_n(z)|} l(\Gamma) = c\dfrac{\sup_K |q_n|}{\inf_\Gamma |q_n|}$,

όπου c σταθερά ανεξάρτητη του n (και $l(\Gamma)$ το μήκος της καμπύλης Γ). Από το θεώρημα 2.5.2 (β),
$\left(\dfrac{||q_n||_K}{q_n(z)}\right)^{1/n} \leq e^{-g_{\mathbb{C}_\infty\setminus K}(z,\infty)}\left(\dfrac{\delta_n(K)}{c(K)}\right)^{\tau_{\mathbb{C}_\infty\setminus K}(z,\infty)}$, $z\in\mathbb{C}\setminus K$. Άρα,
$\sup\limits_{z\in\Gamma}\left(\dfrac{||q_n||_K}{q_n(z)}\right)^{1/n} = \left(\dfrac{||q_n||_K}{\inf\limits_{z\in\Gamma} q_n(z)}\right)^{1/n} \leq \sup\limits_{z\in\Gamma} e^{-g_{\mathbb{C}_\infty\setminus K}(z,\infty)}\left(\dfrac{\delta_n(K)}{c(K)}\right)^{\sup_\Gamma \tau_{z\in\mathbb{C}_\infty\setminus K}(z,\infty)}$.
Συνεπώς, $d_n(f,K) = \inf\{||f-p||_K : p$ πολυώνυμο βαθμού το πολύ $n\}$
$\leq ||f-p_n||_K = \sup\limits_{w\in K}|f(w)-p_n(w)| = c\dfrac{\sup_K|q_n|}{\inf_\Gamma|q_n|}$. Άρα,
$\limsup\limits_{n\to\infty} d_n(f,K)^{1/n} \leq \limsup\limits_{n\to\infty}\left(c\dfrac{\sup_K|q_n|}{\inf_\Gamma|q_n|}\right)^{1/n} \leq$
$\limsup\limits_{n\to\infty} c^{1/n}\,\alpha_\Gamma\left(\dfrac{\delta_n(K)}{c(K)}\right)^{\beta} = \alpha_\Gamma$,
(διότι $\lim\limits_{n\to\infty}\delta_n(K) = c(K)$, από 2.4.5)
όπου $\alpha_\Gamma = \sup\limits_{z\in\Gamma} e^{-g_{\mathbb{C}_\infty\setminus K}(z,\infty)}$ και $\beta = \sup\limits_{z\in\Gamma}\tau_{\mathbb{C}_\infty\setminus K}(z,\infty)$.

Για κάθε $\sigma\in\mathbb{N}$, θέτουμε $\widehat{U}_\sigma = \{z\in(U\cap D(0,M)) : dist(z,\partial U) < \dfrac{\rho}{2\sigma}\}$. Όμοια προκύπτει ότι το $\widehat{U}_\sigma$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$, για κάθε $\sigma\in\mathbb{N}$. Τότε, ορίζοντας κύκλο, Γ_σ, με τον ίδιο τρόπο, καταλήγουμε στο ότι:

$$\limsup_{n\to\infty} d_n(f,K)^{1/n} \leq \alpha_{\Gamma_\sigma} = \sup_{z\in\Gamma_\sigma} e^{-g_{\mathbb{C}_\infty\setminus K}(z,\infty)}, \quad \forall\sigma\in\mathbb{N}.$$

Η ακολουθία $(\alpha_{\Gamma_\sigma})_{\sigma\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη, άρα συγκλίνει. Θα αποδείξουμε ότι $\lim\limits_{\sigma\to\infty}\alpha_{\Gamma_\sigma} = \theta = \max\limits_{z\in(\mathbb{C}_\infty\setminus U)\cap\overline{D(0,M)}} e^{-g_{\mathbb{C}_\infty\setminus K}(z,\infty)}$.

Άμεσα προκύπτει ότι $\alpha_{\Gamma_\sigma} \geq \theta$, για κάθε $\sigma\in\mathbb{N}$, διότι από αρχή μεγίστου για την συνάρτηση $Green$ $g_{\mathbb{C}_\infty \setminus K}$, $\theta = \max\limits_{z \in \partial U \cap \overline{D(0,M)}} e^{-g_{\mathbb{C}_\infty \setminus K}(z,\infty)}$ και $\forall \sigma \in \mathbb{N}, \forall z \in \partial K$, $dist(z, \Gamma_\sigma) < dist(z, \partial U)$, άρα από ιδιότητες της συνάρτησης $Green$, $\alpha_{\Gamma_\sigma} = \sup\limits_{z \in \Gamma_\sigma} e^{-g_{\mathbb{C}_\infty \setminus K}(z,\infty)} \geq \max\limits_{z \in \partial U \cap \overline{D(0,M)}} e^{-g_{\mathbb{C}_\infty \setminus K}(z,\infty)}$. Και αφού ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό σ, $\lim\limits_{\sigma \to \infty} \alpha_{\Gamma_\sigma} \geq \theta$.

Μένει να αποδείξουμε ότι $\lim\limits_{\sigma \to \infty} \alpha_{\Gamma_\sigma} \leq \theta$. Θέτουμε $K_\epsilon = \{z \in \mathbb{C} : dist(z, K) < \epsilon\}$, για κατάλληλη επιλογή του $\epsilon > 0$, ώστε $\epsilon < \rho/2$. Τότε το σύνολο $\overline{D(0,M)} \setminus K_\epsilon = \overline{D(0,M)} \cap K_\epsilon^c$ είναι συμπαγές. Επομένως, η συνάρτηση $e^{-g_{\mathbb{C}_\infty \setminus K}(z,\infty)}, z \in \mathbb{C}_\infty \setminus K$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\overline{D(0,M)} \setminus K_\epsilon$. Έστω $\epsilon_0 > 0$. Από ομοιόμορφη συνέχεια, υπάρχει $\delta_0 > 0$ τέτοιο ώστε αν $z, w \in \overline{D(0,M)} \setminus K_\epsilon$, με $|z - w| < \delta_0$, τότε $\left|e^{-g_{\mathbb{C}_\infty \setminus K}(z,\infty)} - e^{-g_{\mathbb{C}_\infty \setminus K}(w,\infty)}\right| < \epsilon_0$.

Επιλέγουμε $\sigma_0 \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $\dfrac{\rho}{2\sigma_0} < \delta_0$. Τότε, $\alpha_{\Gamma_{\sigma_0}} = \sup\limits_{z \in \Gamma_{\sigma_0}} e^{-g_{\mathbb{C}_\infty \setminus K}(z,\infty)} = e^{-g_{\mathbb{C}_\infty \setminus K}(w_{\sigma_0},\infty)}$, για κάποιο $w_{\sigma_0} \in \Gamma_{\sigma_0}$.

Αφού $\Gamma_{\sigma_0} \subset \widehat{U}_{\sigma_0}$, υπάρχει $z_0 \in \partial U$ τέτοιο ώστε $|w_{\sigma_0} - z_0| < \frac{\rho}{2\sigma_0} < \delta_0$. Άρα, από ομοιόμορφη συνέχεια, $\left|e^{-g_{\mathbb{C}_\infty \setminus K}(z_0,\infty)} - e^{-g_{\mathbb{C}_\infty \setminus K}(w_{\sigma_0},\infty)}\right| < \epsilon_0$. Επομένως, $e^{-g_{\mathbb{C}_\infty \setminus K}(w_{\sigma_0},\infty)} = \alpha_{\Gamma_{\sigma_0}} < \epsilon_0 + e^{-g_{\mathbb{C}_\infty \setminus K}(z_0,\infty)} \leq \epsilon_0 + \theta$. Δηλαδή, για κάθε $\epsilon > 0$ έχουμε $\lim\limits_{\sigma \to \infty} \alpha_{\Gamma_\sigma} \leq \epsilon + \theta$. Συνεπώς, $\lim\limits_{\sigma \to \infty} \alpha_{\Gamma_\sigma} \leq \theta$ και προκύπτει το ζητούμενο $\limsup\limits_{n \to \infty} d_n(f, K)^{1/n} \leq \theta$.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι $c(K) = 0$. Θα αποδείξουμε ότι $\limsup\limits_{n \to \infty} d_n(f, K)^{1/n} \leq \theta = 0$.

Θέτουμε $K_k = \{z : dist(z, K) \leq \frac{1}{k}\}$. Άμεσα προκύπτει ότι η ακολουθία $(K_k)_{k \geq 1}$ είναι φθίνουσα ακολουθία συμπαγών $non-polar$ υποσυνόλων του U, με $\mathbb{C} \setminus K_k$ συνεκτικά σύνολα και $K_k \searrow K$. Αν $\theta_k = \sup\limits_{\mathbb{C}_\infty \setminus U} \exp(-g_{\mathbb{C}_\infty \setminus K_k}(z,\infty))$ τότε έχουμε αποδείξει ότι $\limsup\limits_{n \to \infty} d_n(f, K)^{1/n} \leq \limsup\limits_{n \to \infty} d_n(f, K_k)^{1/n} \leq \theta_k$. Επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι $\theta_k \to 0$, καθώς $k \to \infty$.

Θέτουμε $h_k(z) = \begin{cases} g_{\mathbb{C}_\infty \setminus K_k}(z,\infty) - g_{\mathbb{C}_\infty \setminus K_1}(z,\infty) & z \in \mathbb{C} \setminus K_1 \\ \log c(K_1) - \log c(K_k) & z = \infty \end{cases}$.

Τότε η $(h_k)_{k \geq 1}$ είναι μια αύξουσα ακολουθία αρμονικών συναρτήσεων στο $\mathbb{C} \setminus K_1$ και $h_k(\infty) \to \infty$, καθώς $k \to \infty$. Άρα, από το θεώρημα του $Harnack$, $h_k \to \infty$ τοπικά ομοιόμορφα στο $\mathbb{C}_\infty \setminus K_1$. Ειδικότερα, $g_{\mathbb{C}_\infty \setminus K_k}(z,\infty) \to \infty$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{C}_\infty \setminus U$. Συνεπώς, $\theta_k \to 0$, δηλαδή $\theta = \sup\limits_{\mathbb{C}_\infty \setminus U} \exp(-g_{\mathbb{C}_\infty \setminus K}(z,\infty)) = 0$, όταν $c(K) = 0$. $\square$

Κεφάλαιο 3

Διπλά Καθολικές Σειρές **Taylor**

3.1 Εισαγωγή στις Διπλά Καθολικές Σειρές *Taylor*

Στόχος μας στο κεφάλαιο αυτό είναι να παρουσιάσουμε ένα καινούργιο και πολύ ενδιαφέρον αποτέλεσμα των Γ. Κωστάκη και Ν. Τσιρίβα, "*Doubly universal Taylor series*"[3]. Πρόκειται για καινούργια κατεύθυνση στην έρευνα των καθολικών συναρτήσεων και πιο συγκεκριμένα των καθολικών σειρών *Taylor*.

Ο πρώτος ορισμός για καθολικές σειρές *Taylor* δόθηκε το 1996 από τον Β. Νεστορίδη και τον παραθέτουμε στη συνέχεια.

Θα συμβολίζουμε με D τον ανοιχτό μοναδιαίο δίσκο στο μιγαδικό επίπεδο και με $H(D)$ το σύνολο των ολόμορφων συναρτήσεων στο D. Επίσης, για κάθε συμπαγές σύνολο $K \subset \mathbb{C}$, θα συμβολίζουμε με $A(K)$ το σύνολο όλων των συναρτήσεων που είναι συνεχείς στο K και ολόμορφες στο εσωτερικό του K, K^0. Επίσης, αν $f \in H(D)$ τότε συμβολίζουμε με $S_n(f,0)$ το $n-$οστό μερικό άθροισμα της σειράς *Taylor* της f με κέντρο το 0, δηλαδή $S_n(f,0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k$. Τέλος, συμβολίζουμε $||h||_K = \sup_{z \in K} |h(z)|$, για κάθε συνάρτηση $h : K \to \mathbb{C}$, συνεχή στο K.

Ορισμός 3.1.1. *Μία συνάρτηση $f \in H(D)$ λέμε ότι ανήκει στην κλάση $U(D,0)$ αν για κάθε συμπαγές σύνολο K, με K^c συνεκτικό σύνολο και $K \cap D = \emptyset$, και για κάθε συνάρτηση $g \in A(K)$, υπάρχει ακολουθία φυσικών αριθμών (λ_n) τέτοια ώστε*

$$||S_{\lambda_n}(f,0) - g||_K \to 0, \text{ καθώς } n \to \infty,$$

Μία τέτοια συνάρτηση καλείται καθολική σειρά Taylor.

Σημαντικό αποτέλεσμα του Β. Νεστορίδη, για το οποίο παραπέμπουμε στο άρθρο [6], είναι ότι η κλάση $U(D,0)$ είναι μη-κενή.

Οι Γ. Κωστάκης και Ν. Τσιρίβας εισάγουν την παρακάτω έννοια καθολικότητας για σειρές *Taylor*.

Ορισμός 3.1.2. *Έστω (λ_n) μία γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών. Μία συνάρτηση $f \in H(D)$ λέμε ότι ανήκει στην κλάση $U(D,(\lambda_n),0)$ αν για κάθε συμπαγές σύνολο K, με K^c συνεκτικό σύνολο και $K \cap D = \emptyset$, και για κάθε ζεύγος συναρτήσεων $(g_1, g_2) \in A(K) \times A(K)$, υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών (μ_n), τέτοια ώστε*

$$||S_{\mu_n}(f,0) - g_1||_K \to 0 \text{ και } ||S_{\lambda_{\mu_n}}(f,0) - g_2||_K \to 0, \text{ καθώς } n \to \infty.$$

Μία τέτοια συνάρτηση καλείται διπλά καθολική σειρά Taylor ως προς τις ακολουθίες (n), (λ_n).

Παρατήρηση 3.1.1. *Άμεσα προκύπτει ότι αν $\lambda_n = n$, για κάθε φυσικό αριθμό n, τότε $U(D,(n),0) = \emptyset$, διότι για κάθε ακολουθία φυσικών αριθμών (μ_n) θα έχουμε ότι $S_{\mu_n}(f,0) = S_{\lambda_{\mu_n}}(f,0)$, οπότε είναι αδύνατο για συναρτήσεις $(g_1, g_2) \in A(K) \times A(K)$, με $g_1 \neq g_2$, να συμβαίνει $||S_{\mu_n}(f,0) - g_1||_K \to 0$ και $||S_{\lambda_{\mu_n}}(f,0) - g_2||_K \to 0$, καθώς $n \to \infty$.*

Το κεντρικό αποτέλεσμα του άρθρου [3], στο οποίο θα καταλήξουμε στο τέλος του κεφαλαίου, είναι το παρακάτω:

Θεώρημα 3.1.1. *Έστω (λ_n) μία γνησιώς αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών. Το σύνολο $U(D,(\lambda_n),0)$ είναι μη-κενό αν και μόνο αν $\limsup\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{\lambda_n}{n} = +\infty$. Επιπλέον αν $\limsup\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{\lambda_n}{n} = +\infty$ τότε το σύνολο $U(D,(\lambda_n),0)$ είναι G_δ και πυκνό στο $H(D)$.*

3.2 Ένα αρνητικό αποτέλεσμα

Ξεκινάμε με ένα αρνητικό αποτέλεσμα το οποίο θα χρησιμοποιήσουμε για τον τελικό μας στόχο.

Πρόταση 3.2.1. *Αν (λ_n) γνησιώς αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών, τέτοια ώστε $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}(\lambda_n - n) < +\infty$, τότε $U(D,(\lambda_n),0) = \emptyset$.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι $U(D,(\lambda_n),0) \neq \emptyset$ και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Έστω $f \in U(D,(\lambda_n),0)$. Θεωρούμε το ανάπτυγμα $Taylor$ της f με κέντρο το 0, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n$, $z \in D$.

$$\text{Θέτουμε } k = \sup_{n\in\mathbb{N}}(\lambda_n - n).$$

Ισχυριζόμαστε ότι $\lambda_n \geq n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Πράγματι, αφού η ακολουθία (λ_n) είναι γνησιώς αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών, έχουμε ότι $\lambda_1 \geq 1$, $\lambda_2 > \lambda_1 \Rightarrow \lambda_2 \geq 2$ και επαγωγικά προκύπτει ότι $\lambda_n > \lambda_{n-1} \geq n-1$, που συνεπάγεται ότι $\lambda_n \geq n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Διακρίνουμε τώρα τις δύο παρακάτω περιπτώσεις:
Αν $\lambda_n = n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, τότε η κλάση $U(D,(\lambda_n),0) = \emptyset$, σύμφωνα με την παρατήρηση 3.1.1, πράγμα άτοπο.
Αν υπάρχει φυσικός αριθμός n_0 ώστε $\lambda_{n_0} > n_0$, τότε προφανώς $\lambda_n > n$, για κάθε $n \geq n_0$. Δηλαδή, $\lambda_n - n > 0$, $\forall n \geq n_0$ και αφού $(\lambda_n - n) \in \mathbb{N}$, προκύπτει ότι $k = \sup_{n\in\mathbb{N}}(\lambda_n - n) > 0$.

Θεωρούμε το συμπαγές διάστημα $[1, 1+k]$ και τις σταθερές συναρτήσεις $\mathbf{0}(z) = 0$ και $\mathbf{1}(z) = 1$, $\forall z \in [1, 1+k]$. Τότε, υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών (μ_n) τέτοια ώστε

$$||S_{\mu_n}(f,0)||_{[1,k+1]} \to 0 \text{ και } ||S_{\lambda_{\mu_n}}(f,0) - \mathbf{1}||_{[1,k+1]} \to 0.$$

Αφού $1 \leq \lambda_n - n \leq k$, για κάθε $n \geq n_0$, προκύπτει ότι $1 \leq \lambda_{\mu_n} - \mu_n \leq k$, $\forall \mu_n \geq n_0$. Δηλαδή, οι ακέραιοι $1, 2, \cdots, k$, οι οποίοι είναι πεπερασμένοι στο πλήθος, είναι οι δυνατές τιμές των άπειρων όρων $\lambda_{\mu_n} - \mu_n$. Υπάρχει λοιπόν $m \in [1,k]$ τέτοιο ώστε $\lambda_{\mu_n} - \mu_n = m$, για άπειρους στο πλήθος όρους της (μ_n). Άρα, θεωρώντας μια υπακολουθία της (μ_n), αν είναι απαραίτητο, μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$\lambda_{\mu_n} - \mu_n = m, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}. \quad (\text{σχέση } 1)$$

Αφού $[1, m+1] \subseteq [1, k+1]$, έχουμε ότι

$||S_{\lambda_{\mu_n}}(f,0) - S_{\mu_n}(f,0) - \mathbf{1}||_{[1,m+1]} \leq ||S_{\lambda_{\mu_n}}(f,0) - S_{\mu_n}(f,0) - \mathbf{1}||_{[1,k+1]} \leq$
$||S_{\lambda_{\mu_n}}(f,0) - \mathbf{1}||_{[1,k+1]} + ||S_{\mu_n}(f,0)||_{[1,k+1]} \to 0.$

Από την σχέση (1), έπεται ότι

$||\alpha_{\mu_n+1} z^{\mu_n+1} + \cdots + \alpha_{\mu_n+m} z^{\mu_n+m} - \mathbf{1}||_{[1,m+1]} \to 0$, δηλαδή

$\sup_{z\in[1,m+1]} |\alpha_{\mu_n+1} z^{\mu_n+1} + \cdots + \alpha_{\mu_n+m} z^{\mu_n+m} - \mathbf{1}| \to 0$, άρα

$\alpha_{\mu_n+1} l^{\mu_n+1} + \alpha_{\mu_n+2} l^{\mu_n+2} + \cdots + \alpha_{\mu_n+m} l^{\mu_n+m} \to 1$, για κάθε $l = 1, 2, \cdots, (m+1)$.

Για $l = 1$, έχουμε $\alpha_{\mu_n+1} + \alpha_{\mu_n+2} + \cdots + \alpha_{\mu_n+m} \to 1$. (σχέση 2)

Για $l = 2, 3, \cdots, m+1$, έχουμε $l^{\mu_n}(\alpha_{\mu_n+1}l + \alpha_{\mu_n+2}l^2 + \cdots + \alpha_{\mu_n+m}l^m) \to 1$.

Αλλά, καθώς $n \to +\infty$, $\mu_n \to +\infty$, άρα για κάθε $l = 2, 3, \cdots, m+1$, $l^{\mu_n} \to +\infty$. Επομένως, πρέπει

$$\alpha_{\mu_n+1}l + \alpha_{\mu_n+2}l^2 + \cdots + \alpha_{\mu_n+m}l^m \to 0 \text{ (σχέση 3)}$$

Ορίζουμε τώρα m ακολουθίες μιγαδικών αριθμών, τις $(\epsilon_{1,n}), (\epsilon_{2,n}), \cdots, (\epsilon_{m,n})$, για $n = 1, 2, \cdots$ ως εξής:

$\epsilon_{1,n} = \alpha_{\mu_n+1}2 + \alpha_{\mu_n+2}2^2 + \cdots + \alpha_{\mu_n+m}2^m \qquad (1)$

$\epsilon_{2,n} = \alpha_{\mu_n+1}3 + \alpha_{\mu_n+2}3^2 + \cdots + \alpha_{\mu_n+m}3^m \qquad (2)$

$$\cdots$$

$\epsilon_{m,n} = \alpha_{\mu_n+1}(m+1) + \alpha_{\mu_n+2}(m+1)^2 + \cdots + \alpha_{\mu_n+m}(m+1)^m \quad (m)$

για $n = 1, 2, \cdots$.

Ορίζονται καλά όλες οι ακολουθίες μιγαδικών αριθμών $(\epsilon_{i,n})$, για $n = 1, 2, \cdots$ και για κάθε $i = 1, 2, \cdots, m$. Από την σχέση (3) έχουμε ότι $\epsilon_{i,n} \to 0$, καθώς $n \to +\infty$, για κάθε $i = 1, 2, \cdots, m$.

Επιλέγουμε τώρα τυχαία ένα $n_0 \in \mathbb{N}$ και το σταθεροποιούμε. Θέτουμε $x_1 = \alpha_{\mu_{n_0}+1}, x_2 = \alpha_{\mu_{n_0}+2}, \cdots, x_m = \alpha_{\mu_{n_0}+m}$. Οι ισότητες $(1), (2), \cdots, (m)$, για $n = n_0$ γίνονται:

$2x_1 + 2^2x_2 + \cdots + 2^mx_m = \epsilon_{1,n_0} \quad (1)'$

$3x_1 + 3^2x_2 + \cdots + 3^mx_m = \epsilon_{2,n_0} \quad (2)'$

$$\cdots$$

$mx_1 + m^2x_2 + \cdots + m^mx_m = \epsilon_{m-1,n_0} \quad (m-1)'$

$(m+1)x_1 + (m+1)^2x_2 + \cdots + (m+1)^mx_m = \epsilon_{m,n_0} \quad (m)'$

Οι παραπάνω εξισώσεις $(1)', (2)', \cdots, (m)'$ ορίζουν ένα σύστημα m εξισώσεων με m αγνώστους, τους $x_1, x_2, \cdots, x_m$. Η ορίζουσα του συστήματος είναι

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 2^2 & 2^3 & \cdots & 2^m \\ 3 & 3^2 & 3^3 & \cdots & 3^m \\ & & \cdots & & \\ m+1 & (m+1)^2 & (m+1)^3 & \cdots & (m+1)^m \end{pmatrix} =$$

$$(m+1)! \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^{m-1} \\ 1 & 3 & 3^2 & \cdots & 3^{m-1} \\ & & \cdots & & \\ 1 & (m+1) & (m+1)^2 & \cdots & (m+1)^{m-1} \end{pmatrix}.$$

Θέτουμε $D_{var} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^{m-1} \\ 1 & 3 & 3^2 & \cdots & 3^{m-1} \\ & & \cdots & & \\ 1 & (m+1) & (m+1)^2 & \cdots & (m+1)^{m-1} \end{pmatrix}$, η οποία είναι η ορίζουσα $Vardermonde$ και υπολογίζεται ως εξής: $D_{var} = \prod_{1 \le i \le j \le m} ((j+1)-(i+1)) = \prod_{1 \le i \le j \le m} (j-i) \neq 0$. Έχουμε λοιπόν ότι $D = (m+1)! D_{var} \neq 0$.

Θεωρούμε τώρα τις παρακάτω ορίζουσες:

$$D_1 = \begin{pmatrix} \epsilon_{1,n_0} & 2^2 & 2^3 & \cdots & 2^m \\ \epsilon_{2,n_0} & 3^2 & 3^3 & \cdots & 3^m \\ & & \cdots & & \\ \epsilon_{m,n_0} & (m+1)^2 & (m+1)^3 & \cdots & (m+1)^m \end{pmatrix},$$

$$D_2 = \begin{pmatrix} 2 & \epsilon_{1,n_0} & 2^3 & \cdots & 2^m \\ 3 & \epsilon_{2,n_0} & 3^3 & \cdots & 3^m \\ & & \cdots & & \\ m+1 & \epsilon_{m,n_0} & (m+1)^3 & \cdots & (m+1)^m \end{pmatrix}, \cdots$$

$$D_m = \begin{pmatrix} 2 & 2^2 & 2^3 & \cdots & \epsilon_{1,n_0} \\ 3 & 3^2 & 3^3 & \cdots & \epsilon_{2,n_0} \\ & & \cdots & & \\ m+1 & (m+1)^2 & (m+1)^3 & \cdots & \epsilon_{m,n_0} \end{pmatrix}$$

Επομένως, η λύση του συστήματος $(1)', (2)', \cdots, (m)'$, από τον κανόνα του $Cramer$, είναι

$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \cdots, x_m = \frac{D_m}{D}$.

Επίσης, από γραμμική άλγεβρα έχουμε ότι αν υπολογίσουμε την ορίζουσα D_1, ως προς τα στοιχεία της πρώτης στήλης της, υπάρχουν σταθεροί μιγαδικοί αριθμοί (που είναι κάποιες ελλάσονες ορίζουσες $(m-1)$ τάξης, με θετικό ή αρνητικό πρόσημο) $c_1^1, c_2^1, \cdots, c_m^1$ ώστε να ισχύει:

$D_1 = c_1^1 \epsilon_{1,n_0} + c_2^1 \epsilon_{2,n_0} + \cdots + c_m^1 \epsilon_{m,n_0}$. Έτσι,

$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{c_1^1}{D} \epsilon_{1,n_0} + \frac{c_2^1}{D} \epsilon_{2,n_0} + \cdots + \frac{c_m^1}{D} \epsilon_{m,n_0}$.

Γενικά, για κάθε $i = 1, 2, \cdots, m$ υπάρχουν m μιγαδικοί αριθμοί $c_1^i, c_2^i, \cdots, c_m^i$, ώστε να ισχύει:

$x_i = \frac{c_1^i}{D} \epsilon_{1,n_0} + \frac{c_2^i}{D} \epsilon_{2,n_0} + \cdots + \frac{c_m^i}{D} \epsilon_{m,n_0}$.

Αν θέσουμε $M_0 = \max_{1 \le i \le m} \left(\frac{1}{D} \sum_{j=1}^{m} |c_j^i| \right)$, τότε

$|x_i| \leq M_0 \sum_{j=1}^{m} |\epsilon_{j,n_0}|$, για κάθε $i = 1, 2, \cdots, m$.

Είναι προφανές ότι ο αριθμός M_0 είναι ανεξάρτητος του n_0, άρα εφαρμόζοντας τα παραπάνω σε κάθε φυσικό αριθμό $n = 1, 2, 3 \cdots$ προκύπτει ότι

$$|\alpha_{\mu_n+i}| \leq M_0 \sum_{j=1}^{m} |\epsilon_{j,n}|,$$

για κάθε κάθε $i = 1, 2, \cdots, m$ και για κάθε $n = 1, 2, \cdots$.

Αλλά, $\epsilon_{j,n} \to 0$, καθώς $n \to +\infty$, για κάθε $j = 1, 2, \cdots, m$. Επομένως, $\alpha_{\mu_n+i} \to 0$, καθώς $n \to +\infty$, για κάθε $i = 1, 2, \cdots, m$, γεγονός που έρχεται σε αντίφαση με την σχέση (2). Άρα, $U(D, (\lambda_n), 0) = \emptyset$.

$\square$

3.3 Ένα θεώρημα τύπου $Bernstein - Walsh$

Η απόδειξη του θεωρήματος 3.1.1 βασίζεται στο παρακάτω θεώρημα προσσέγγισης, το οποίο είναι μια παραλλαγή του θεωρήματος $Bernstein - Walsh$.

Θεώρημα 3.3.1. *Έστω (τ_n), (σ_n) γνησίως αύξουσες ακολουθίες φυσικών αριθμών, τέτοιες ώστε $1 \leq \dfrac{\tau_n}{\sigma_n} \to +\infty$, καθώς $n \to +\infty$. Έστω επιπλέον $r \in (0, 1)$, $K \subset \mathbb{C} \setminus D$, συμπαγές σύνολο, με συνεκτικό συμπλήρωμα και h συνάρτηση αναλυτική στο K.*

Τότε, υπάρχει πραγματικός αριθμός $\theta \in (0, 1)$ και ακολουθία πολυωνύμων (P_n) τέτοια ώστε

(i) $P_n(z) = \sum_{k=\sigma_n}^{\tau_n} c_{n,k} z^k$, *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$,

(ii) $||h - P_n||_K = O(\theta^{\tau_n})$

(iii) $||P_n||_{\overline{D(0,r)}} = O(\theta^{\tau_n})$.

Απόδειξη. Από τα δεδομένα, μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχει $s \in (r, 1)$, τέτοιο ώστε η h να είναι αναλυτική σε κάποιο ανοιχτό υποσύνολο U του $\mathbb{C} \setminus D(0, s)$, που περιέχει το K. Θέτουμε $U_0 = U \cup D(0, s)$, $K_0 = \overline{D(0, r)} \cup K$. Θεωρούμε επίσης Γ ένα άθροισμα κλειστών καμπυλών στο $U_0 \setminus K_0$, έτσι ώστε ο δείκτης στροφής $ind_\Gamma(z) = 1$ αν $z \in K_0$ και $ind_\Gamma(z) = 0$ αν $z \notin U_0$.

Για κάθε φυσικό αριθμό $m \geq 2$, έστω q_m το $Fekete$ πολυώνυμο για το K_0, βαθμού m. Τότε, εφαρμόζοντας το λήμμα του $Bernstein$, για το συμπαγές και $non-polar$ σύνολο K_0 και για $m \geq 2$ προκύπτει ότι

$$\left(\frac{||q_m||_{K_0}}{|q_m(z)|}\right)^{1/m} \leq \frac{1}{e^{g_\Omega(z,\infty)}}\left(\frac{\delta_m(K_0)}{c(K_0)}\right)^{\tau_\Omega(z,\infty)}, \quad z \in \Gamma,$$

όπου $\Omega := \mathbb{C}_\infty \setminus K_0$, g_Ω είναι η συνάρτηση $Green$ για το Ω, $c(K_0)$ είναι η λογαριθμική χωρητικότητα για το K_0, $\delta_m(K_0)$ είναι η $m-$οστή διάμετρος για το K_0 και τ_Ω είναι η απόσταση $Harnack$ για το Ω.

Το σύνολο $K_0 = K \cup \overline{D(0,r)}$ είναι $non-polar$. Πράγματι, γνωρίζουμε από το θεώρημα 2.3.4, ότι ο δίσκος $D(0,r)$ ως ανοιχτό, συνεκτικό και απλά συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{C}_\infty$, με $\mathbb{C}_\infty \setminus D(0,r)$ να μην είναι μονοσύνολο, είναι κανονικό σύνολο, συνεπώς από το θεώρημα 2.3.7 είναι $non-polar$, άρα και το $K \cup \overline{D(0,r)} \supset D(0,r)$ είναι $non-polar$. Επομένως, $c(K \cup \overline{D(0,r)}) > 0$ και από το θεώρημα 2.4.1 (δ), αφού το σύνολο $K \cup \overline{D(0,r)}$ είναι συμπαγές, έχουμε ότι $c(\partial(K \cup \overline{D(0,r)})) = c(K \cup \overline{D(0,r)}) > 0$. Άρα, η συνάρτηση $Green$ για το Ω είναι μοναδική και θετική. Επίσης, επειδή το σύνολο Γ είναι συμπαγές, $\inf\limits_{z\in\Gamma} |q_m(z)| = \min\limits_{z\in\Gamma} |q_m(z)| = |q_m(z_0)|$, για κάποιο $z_0 \in \Gamma$.

Δηλαδή, για $m \geq 2$

$$\left(\frac{||q_m||_{K_0}}{\min_{z\in\Gamma}|q_m(z)|}\right)^{1/m} = \left(\frac{||q_m||_{K_0}}{|q_m(z_0)|}\right)^{1/m} \leq e^{-g_\Omega(z_0,\infty)}\left(\frac{\delta_m(K_0)}{c(K_0)}\right)^{\tau_\Omega(z_0,\infty)}.$$

Θέτουμε $\theta_0 = e^{-g_\Omega(z_0,\infty)}\left(\frac{\delta_N(K_0)}{c(K_0)}\right)^{\tau_\Omega(z_0,\infty)}$, για κατάλληλη επιλογή του N ώστε $\theta_0 \in (0,1)$. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει τέτοιο $N \in \mathbb{N}$.

Πράγματι, θυμόμαστε από το θεώρημα $Fekete - Szegö$ ότι η ακολουθία $(\delta_n(K_0))_{n\geq 2}$ είναι φθίνουσα, με $\delta_n(K_0) \geq c(K_0)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n(K_0) = c(K_0)$. Άρα, $\frac{\delta_n(K_0)}{c(K_0)} \to 1$, καθώς $n \to +\infty$ και αφού η συνάρτηση τ_Ω είναι θετική έχουμε $\left(\frac{\delta_n(K_0)}{c(K_0)}\right)^{\tau_\Omega(z_0,\infty)} \to 1$, καθώς $n \to +\infty$. Τώρα, $e^{-g_\Omega(z_0,\infty)} < e^0 = 1$. Επομένως, $e^{-g_\Omega(z_0,\infty)}\left(\frac{\delta_n(K_0)}{c(K_0)}\right)^{\tau_\Omega(z_0,\infty)} \to e^{-g_\Omega(z_0,\infty)} < 1$, καθώς $n \to +\infty$. Υπάρχει λοιπόν φυσικός αριθμός N, τέτοιος ώστε $e^{-g_\Omega(z_0,\infty)}\left(\frac{\delta_N(K_0)}{c(K_0)}\right)^{\tau_\Omega(z_0,\infty)} < 1$. Δηλαδή, επιλέξαμε κατάλληλο $N \in \mathbb{N}$, ώστε $\theta_0 \in (0,1)$. Άρα,

$$\frac{||q_m||_{K_0}}{\inf_{z\in\Gamma}|q_m(z)|} \leq \theta_0^m, \text{ για κάθε } m \geq N. \tag{3.1}$$

Θέτουμε για $n \in \mathbb{N}$

$$R_n(z) = \begin{cases} h(z)/z^{\sigma_n}, & z \in U \\ 0, & z \in D(0,s) \end{cases}.$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$p_m(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{R_n(z)}{q_m(z)}\frac{q_m(w)-q_m(z)}{w-z}\,dz.$$

Όμοια με την απόδειξη του θεωρήματος $Bernstein - Walsh$ προκύπτει ότι η συνάρτηση p_m είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ $m-1$.

Αν $w \in K_0$ και $m \geq 2$, τότε εφαρμόζοντας τον ολοκληρωτικό τύπο του $Cauchy$ στην R_n, έχουμε

$$R_n(w) - p_m(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{R_n(z)}{z-w}\left(1 - \frac{q_m(z)-q_m(w)}{q_m(z)}\right)dz =$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{R_n(z)}{z-w}\frac{q_m(w)}{q_m(z)}\,dz.$$

Επομένως, για κάθε $w \in K_0$, $m \geq 2$ έχουμε

$$|R_n(w) - p_m(w)| \leq \frac{1}{2\pi} l(\Gamma)|q_m(w)| \sup_{z\in\Gamma}\left|\frac{R_n(z)}{(w-z)q_m(z)}\right|$$

$$\leq \frac{l(\Gamma)||R_n||_\Gamma}{2\pi d(\Gamma,K_0)}\frac{||q_m||_{K_0}}{\min_{z\in\Gamma}|q_m(z)|}.$$

όπου συμβολίζουμε με $l(\Gamma)$ το μήκος της πολυγωνικής γραμμής Γ και με $d(\Gamma,K_0) = \min\{|z-w| : z \in \Gamma, w \in K_0\}$ την απόσταση μεταξύ των Γ και K_0.

Δηλαδή, θέτοντας $C(n) = \dfrac{l(\Gamma)||R_n||_\Gamma}{2\pi d(\Gamma,K_0)}$, έχουμε ότι για κάθε $m \geq 2$,

αν $w \in K$ τότε $|\dfrac{h(w)}{w^{\sigma_n}} - p_m(w)| \leq C(n)\dfrac{||q_m||_{K_0}}{\min_{z\in\Gamma}|q_m(z)|}$

και αν $w \in \overline{D(0,r)}$ τότε $|p_m(w)| \leq C(n)\dfrac{||q_m||_{K_0}}{\min_{z\in\Gamma}|q_m(z)|}$.

Συνδυάζοντας τις παραπάνω σχέσεις με την σχέση (3.1), προκύπτει ότι

$$\sup_{z\in K}|\frac{h(z)}{z^{\sigma_n}} - p_m(z)| \leq C(n)\theta_0^m, \text{ για κάθε } m \geq N, \tag{3.2}$$

$$\sup_{z\in\overline{D(0,r)}}|p_m(z)| \leq C(n)\theta_0^m, \text{ για κάθε } m \geq N. \tag{3.3}$$

Για την σταθερά $C(n)$ έχουμε ότι

$C(n) = \dfrac{l(\Gamma)}{2\pi d(\Gamma, K_0)} \max_{z\in\Gamma} |R_n(z)| = \dfrac{l(\Gamma)}{2\pi d(\Gamma, K_0)} \max_{z\in\Gamma_1} \left|\dfrac{h(z)}{z^{\sigma_n}}\right|$, όπου Γ_1 το τμήμα της καμπύλης Γ που είναι μέσα στο U (γιατί αν $z \in \Gamma \setminus \Gamma_1$ τότε $R_n(z) = 0$). Οπότε,

$C(n) = \dfrac{l(\Gamma)}{2\pi d(\Gamma, K_0)} \max_{z\in\Gamma_1} |h(z)| \dfrac{1}{\min_{z\in\Gamma_1} |z^{\sigma_n}|} \leq C\dfrac{1}{r^{\sigma_n}}$,

με $C = \dfrac{l(\Gamma)}{2\pi d(\Gamma, K_0)} \max_{z\in\Gamma_1} |h(z)|$

(διότι $\min_{z\in\Gamma_1} |z| \geq r$, αφού η Γ_1 έχει στο εξωτερικό της τον δίσκο $D(0, r)$).

Συνεπώς, οι σχέσεις (3.2), (3.3) γίνονται:

$$\sup_{z\in K} |h(z) - p_m(z)\, z^{\sigma_n}| \leq \sup_{z\in K} |\frac{h}{z^{\sigma_n}} - p_m(z)| \max_{z\in K} |z^{\sigma_n}|$$
$$\leq C\frac{1}{r^{\sigma_n}} M^{\sigma_n} \theta_0^m = \left(C^{1/\tau_n} \frac{1}{r^{\sigma_n/\tau_n}} M^{\sigma_n/\tau_n} \theta_0^{m/\tau_n}\right)^{\tau_n},$$

όπου $M := \max_{z\in K} |z|$ και

$$\sup_{z\in\overline{D(0,r)}} |p_m(z)\, z^{\sigma_n}| \leq \left(C^{1/\tau_n} \frac{1}{r^{\sigma_n/\tau_n}} M^{\sigma_n/\tau_n} \theta_0^{m/\tau_n}\right)^{\tau_n}.$$

Τώρα για $m = \tau_n - \sigma_n$, έχουμε

$$\sup_{z\in K} |h(z) - p_{\tau_n-\sigma_n}(z)\, z^{\sigma_n}| \leq \left(C^{1/\tau_n} \frac{1}{r^{\sigma_n/\tau_n}} M^{\sigma_n/\tau_n} \theta_0^{1-\frac{\sigma_n}{\tau_n}}\right)^{\tau_n},$$

και

$$\sup_{z\in\overline{D(0,r)}} |p_{\tau_n-\sigma_n}\, z^{\sigma_n}| \leq \left(C^{1/\tau_n} \frac{1}{r^{\sigma_n/\tau_n}} M^{\sigma_n/\tau_n} \theta_0^{1-\frac{\sigma_n}{\tau_n}}\right)^{\tau_n}.$$

Αλλά, $C^{1/\tau_n} \to 1$ αφού η $(1/\tau_n)_n$ συγκλίνει στο μηδέν και $\dfrac{1}{r^{\sigma_n/\tau_n}} \to 1$, $M^{\sigma_n/\tau_n} \to 1$, $\theta_0^{\sigma_n/\tau_n} \to 1$, διότι $\dfrac{\sigma_n}{\tau_n} \to 0$. Άρα, $\lim_{n\to+\infty} C^{1/\tau_n} \dfrac{1}{r^{\sigma_n/\tau_n}} M^{\sigma_n/\tau_n} \dfrac{\theta_0}{\theta_0^{\sigma_n/\tau_n}} = \theta_0 < 1$,

Επιλέγοντας $\theta \in (\theta_0, 1)$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$, $C^{1/\tau_n} \dfrac{1}{r^{\sigma_n/\tau_n}} M^{\sigma_n/\tau_n} \theta_0^{1-\frac{\sigma_n}{\tau_n}} < \theta$.

Οπότε, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε

$$\sup_{z \in K} |h - p_{\tau_n - \sigma_n} z^{\sigma_n}| \leq \theta^{\tau_n}$$

και

$$\sup_{z \in \overline{D(0,r)}} |p_{\tau_n - \sigma_n} z^{\sigma_n}| \leq \theta^{\tau_n}.$$

Θέτοντας $P_n = p_{\tau_n - \sigma_n} z^{\sigma_n}$, έχουμε το ζητούμενο.

□

3.4 Μια ενδιάμεση έννοια των διπλά καθολικών σειρών *Taylor*

Η ενδιάμεση έννοια των διπλά καθολικών σειρών *Taylor* που θα παρουσιάσουμε θα μας βοηθήσει να αποδείξουμε το τελικό θεώρημα.

Ορισμός 3.4.1. *Έστω (a_n),(b_n) γνησίως αύξουσες ακολουθίες φυσικών αριθμών. Μια συνάρτηση $f \in H(D)$ θα λέμε ότι ανήκει στην κλάση $W(D,(a_n),(b_n),0)$ αν και μόνο αν για κάθε συμπαγές σύνολο $K \subset \mathbb{C}$, με K^c συνεκτικό και $K \cap D = \emptyset$ και για κάθε συνάρτηση $g \in A(K)$, υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών (μ_n) τέτοια ώστε*

$$||S_{a_{\mu_n}}(f,0) - g||_K \to 0 \text{ και } ||S_{b_{\mu_n}}(f,0) - g||_K \to 0.$$

Λήμμα 3.4.1. *Υπάρχει ακολουθία συμπαγών συνόλων $(K_m)_{m \in \mathbb{N}}$, με τις ακόλουθες ιδιότητες:*

(α) *το σύνολο K_n^c είναι συνεκτικό, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,*

(β) *$K_n \cap D = \emptyset$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,*

(γ) *για κάθε συμπαγές σύνολο $K \subset D^c$, με συνεκτικό συμπλήρωμα, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $K \subset K_{n_0}$.*

Απόδειξη. Για την απόδειξη του λήμματος παραπέμπουμε στο άρθρο του Β. Νεστορίδη [6]. □

Πρόταση 3.4.1. *Έστω (a_n), (b_n) γνησίως αύξουσες ακολουθίες φυσικών αριθμών. Τότε το σύνολο $W(D,(a_n),(b_n),0)$ είναι G_δ και πυκνό στο σύνολο $H(D)$.*

Απόδειξη. Έστω (f_j) μια αρίθμηση όλων των πολυωνύμων με συντελεστές στο $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$. Έστω επίσης (K_m) μια ακολουθία συμπαγών συνόλων, όπως στο λήμμα 3.4.1. Δηλαδή, με συνεκτικό συμπλήρωμα και τέτοια ώστε $K_m \cap D = \emptyset$, για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και για κάθε $K \subset D^c$ συμπαγές, με K^c συνεκτικό, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $K \subset K_n$. Θεωρούμε

$$V(m, j, s, n) := \left\{ f \in H(D) : ||S_{a_n}(f, 0) - f_j||_{K_m} < \frac{1}{s} \text{ και } ||S_{b_n}(f, 0) - f_j||_{K_m} < \frac{1}{s} \right\}$$

για κάθε $m, j, s, n \in \mathbb{N}$. Θα αποδείξουμε ότι

$$W(D, (a_n), (b_n), 0) = \bigcap_{m,j,s \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V(m, j, s, n).$$

Ισχυριζόμαστε ότι $W(D, (a_n), (b_n), 0) \subseteq \bigcap_{m,j,s \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V(m, j, s, n)$.
Πράγματι, έστω $f \in W(D, (a_n), (b_n), 0)$ και $m_0, j_0, s_0 \in \mathbb{N}$. Τότε το σύνολο K_{m_0} είναι συμπαγές, με συνεκτικό συμπλήρωμα και $K_{m_0} \cap D = \emptyset$. Επίσης, το πολυώνυμο f_{j_0} είναι προφανώς συνάρτηση συνεχής στο K_{m_0} και ολόμορφη στο εσωτερικό του K_{m_0}. Αφού $f \in W(D, (a_n), (b_n), 0)$, υπάρχει ακολουθία φυσικών αριθμών (μ_n) τέτοια ώστε

$||S_{a_{\mu_n}}(f, 0) - f_{j_0}||_{K_{m_0}} < \dfrac{1}{s_0}$ και $||S_{b_{\mu_n}}(f, 0) - f_{j_0}||_{K_{m_0}} < \dfrac{1}{s_0}$.

Άρα $f \in \bigcap_{m,j,s \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V(m, j, s, n)$.

Θα αποδείξουμε ότι $\bigcap_{m,j,s \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V(m, j, s, n) \subseteq W(D, (a_n), (b_n), 0)$.
Έστω $f \in \bigcap_{m,j,s \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V(m, j, s, n)$. Θα αποδείξουμε ότι $f \in W(D, (a_n), (b_n), 0)$.
Έστω συμπαγές σύνολο $K \subset \mathbb{C}$, με K^c συνεκτικό και $K \cap D = \emptyset$, συνάρτηση $g \in A(K)$ και $\epsilon > 0$.

Από το θεώρημα του *Mergelyan*, υπάρχει πολυώνυμο p τέτοιο ώστε $||p - g||_K < \dfrac{\epsilon}{3}$.

Επειδή το σύνολο $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ είναι πυκνό στο $\mathbb{C}$, υπάρχει $j_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $||p - f_{j_0}||_K < \dfrac{\epsilon}{3}$.

Επιλέγουμε m_0, $s_0 \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $K \subset K_{m_0}$ και $\dfrac{1}{s_0} < \dfrac{\epsilon}{3}$. Χρησιμοποιώντας το δεδομένο ότι $f \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V(m_0, j_0, s_0, n)$, έχουμε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $f \in V(m_0, j_0, s_0, n_0)$. Επομένως,

$||S_{a_{n_0}}(f,0) - g||_K \leq ||S_{a_{n_0}}(f,0) - f_{j_0}||_K + ||f_{j_0} - p||_K + ||p - g||_K \leq$
$\leq ||S_{a_{n_0}}(f,0) - f_{j_0}||_{K_{m_0}} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} \leq \frac{1}{s_0} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} < \epsilon$ και ομοίως
$||S_{b_{n_0}}(f,0) - g||_K < \epsilon$.

Δηλαδή, υπάρχουν υπακολουθίες των (a_n), (b_n), έστω (a_{μ_n}), (b_{μ_n}) για κάποια αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών (μ_n), έτσι ώστε καθώς $n \to +\infty$ να ισχύει ότι

$||S_{a_{\mu_n}}(f,0) - g||_K \to 0$ και $||S_{b_{\mu_n}}(f,0) - g||_K \to 0$, άρα $f \in W(D,(a_n),(b_n),0)$.

Θα αποδείξουμε στη συνέχεια ότι το σύνολο $V(m,j,s,n)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του $H(D)$, για κάθε $m,j,s,n \in \mathbb{N}$.

Έστω $m,j,s,n \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$T_1(f) = ||S_{a_n}(f,0) - f_j||_{K_m}$ και $T_2(f) = ||S_{b_n}(f,0) - f_j||_{K_m}$, $f \in H(D)$. Εύκολα προκύπτει ότι οι T_1 και T_2 είναι συνεχείς. Άρα, οι αντίστροφες εικόνες $T_1^{-1}((-\frac{1}{s},\frac{1}{s}))$ και $T_2^{-1}((-\frac{1}{s},\frac{1}{s}))$ είναι ανοιχτά υποσύνολα του $H(D)$. Επομένως και η τομή τους

$\left(T_1^{-1}((-\frac{1}{s},\frac{1}{s}))\right) \cap \left(T_2^{-1}((-\frac{1}{s},\frac{1}{s}))\right) = V(m,j,s,n)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του $H(D)$.

Άρα, η αριθμήσιμη ένωση $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} V(m,j,s,n)$ είναι ανοιχτό σύνολο και θα δείξουμε επιπλέον ότι είναι πυκνό στο $H(D)$.

Έστω $m,j,s \in \mathbb{N}$, $\epsilon > 0$, $r \in (0,1)$, $g \in H(D)$. Θα βρούμε συνάρτηση $f \in H(D)$ και $n \in \mathbb{N}$, τέτοια ώστε

$||f - g||_{\overline{D(0,r)}} < \epsilon$, $||S_{a_n}(f,0) - f_j||_{K_m} < \frac{1}{s}$, $||S_{b_n}(f,0) - f_j||_{K_m} < \frac{1}{s}$.

Εφαρμόζοντας το θεώρημα *Mergelyan* στο συμπαγές σύνολο $K_m \cup \overline{D(0,r)}$ και τη συνάρτηση $H(z) = \begin{cases} g(z), & z \in \overline{D(0,r)} \\ f_j(z), & z \in K_m \end{cases}$, υπάρχει πολυώνυμο f τέτοιο ώστε $\sup_{K_m \cup \overline{D(0,r)}} |f - H| < \min\{\epsilon, \frac{1}{s}\}$.

Τότε, $||f - g||_{\overline{D(0,r)}} < \epsilon$ και $||f - f_j||_{K_m} < \frac{1}{s}$.

Αφού οι ακολουθίες (a_n), (b_n) είναι γνησίως αύξουσες μπορούμε να επιλέξουμε έναν αρκετά μεγάλο φυσικό αριθμό n, τέτοιο ώστε $\min\{a_n, b_n\} > deg\, f$. Από την παραπάνω επιλογή του n, έχουμε ότι $S_{a_n}(f,0) = S_{b_n}(f,0) = f$ και επομένως

$||S_{a_n}(f,0) - f_j||_{K_m} < \frac{1}{s}$ και $||S_{b_n}(f,0) - f_j||_{K_m} < \frac{1}{s}$.

Δηλαδή το σύνολο $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} V(m,j,s,n)$ είναι πυκνό στο $H(D)$.

Τέλος, από το θεώρημα του *Baire*, προκύπτει ότι το σύνολο $W(D,(a_n),(b_n),0) = \bigcap_{m,j,s\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V(m,j,s,n)$ είναι πυκνό στο $H(D)$. □

3.5 Απόδειξη του θεωρήματος 3.1.1

Πρόταση 3.5.1. *Έστω (λ_n) μια γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών τέτοια ώστε $\limsup_n \frac{\lambda_n}{n} = +\infty$. Τότε το σύνολο $U(D,(\lambda_n),0)$ είναι G_δ και πυκνό στο $H(D)$. Ειδικότερα, το σύνολο $U(D,(\lambda_n),0)$ είναι μη-κενό.*

Απόδειξη. Έστω (f_j) μια αρίθμηση όλων των πολυωνύμων με συνετελεστές στο $\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}$ και (λ_n) μια γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών τέτοια ώστε $\limsup_n \frac{\lambda_n}{n} = +\infty$. Έστω επίσης (K_m) μια ακολουθία συμπαγών συνόλων, με συνεκτικό συμπλήρωμα και τέτοια ώστε $K_m \cap D = \emptyset$, για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και για κάθε $K \subset D^c$ συμπαγές, με K^c συνεκτικό, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $K \subset K_n$. Ορίζουμε το σύνολο

$$E(m,j_1,j_2,s,n) =$$

$$\left\{ f \in H(D) : ||S_n(f,0) - f_{j_1}||_{K_m} < \frac{1}{s} \text{ και } ||S_{\lambda_n}(f,0) - f_{j_2}||_{K_m} < \frac{1}{s} \right\}$$

για κάθε $m,j_1,j_2,s,n \in \mathbb{N}$. Θα αποδείξουμε ότι

$$U(D,(\lambda_n),0) = \bigcap_{m,j_1,j_2,s\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E(m,j_1,j_2,s,n).$$

Ξανά, ο εγκλεισμός $U(D,(\lambda_n),0) \subseteq \bigcap_{m,j_1,j_2,s\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E(m,j_1,j_2,s,n)$ προκύπτει άμεσα από τους ορισμούς των συνόλων $U(D,(\lambda_n),0)$ και $E(m,j_1,j_2,s,n)$.

Θα αποδείξουμε ότι $\bigcap_{m,j_1,j_2,s\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E(m,j_1,j_2,s,n) \subseteq U(D,(\lambda_n),0)$.

Έστω $f \in \bigcap_{m,j_1,j_2,s\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E(m,j_1,j_2,s,n)$, θα αποδείξουμε ότι $f \in U(D,(\lambda_n),0)$. Έστω λοιπόν συμπαγές σύνολο $K \subset \mathbb{C}$, με K^c συνεκτικό και $K \cap D = \emptyset$. Έστω $(g_1,g_2) \in A(K) \times A(K)$ και $\epsilon > 0$. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$||S_{n_0}(f,0) - g_1||_K < \epsilon \text{ και } ||S_{\lambda_{n_0}}(f,0) - g_2||_K < \epsilon.$$

Από το θεώρημα του *Mergelyan*, υπάρχουν πολυώνυμα p_1, p_2 τέτοια ώστε

$$||p_1 - g_1||_K < \frac{\epsilon}{3} \text{ και } ||p_2 - g_2||_K < \frac{\epsilon}{3}.$$

Επειδή $\overline{(\mathbb{Q} + i\mathbb{Q})} = \mathbb{C}$, υπάρχουν j_{1_0}, j_{2_0} τέτοια ώστε

$$||f_{j_{1_0}} - p_1||_K < \frac{\epsilon}{3} \text{ και } ||f_{j_{2_0}} - p_2||_K < \frac{\epsilon}{3}.$$

Επιλέγουμε m_0 και s_0 έτσι ώστε $K \subset K_{m_0}$ και $\frac{1}{s_0} < \frac{\epsilon}{3}$. Τότε, αφού $f \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E(m_0, j_{1_0}, j_{2_0}, s_0, n)$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, ώστε $f \in E(m_0, j_{1_0}, j_{2_0}, s_0, n_0)$. Άρα,

$$||S_{n_0}(f,0) - g_1||_K \leq ||S_{n_0}(f,0) - f_{j_{1_0}}||_K + ||f_{j_{1_0}} - p_1||_K + ||p_1 - g_1||_K \leq$$

$$\leq ||S_{n_0}(f,0) - f_{j_{1_0}}||_K + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} \leq ||S_{n_0}(f,0) - f_{j_{1_0}}||_{K_{m_0}} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} < \epsilon$$

και όμοια,

$$||S_{\lambda_{n_0}}(f,0) - g_2||_K \leq ||S_{\lambda_{n_0}}(f,0) - f_{j_{2_0}}||_K + ||f_{j_{2_0}} - p_2||_K + ||p_2 - g_2||_K \leq$$

$$\leq ||S_{\lambda_{n_0}}(f,0) - f_{j_{2_0}}||_{K_{m_0}} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} < \epsilon.$$

Οπότε πράγματι, $U(D, (\lambda_n), 0) = \bigcap_{m,j_1,j_2,s\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E(m, j_1, j_2, s, n)$.

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι το σύνολο $E(m, j_1, j_2, s, n)$ είναι ανοιχτό, για κάθε $m, j_1, j_2, s, n \in \mathbb{N}$. Πράγματι, έστω $m, j_1, j_2, s, n \in \mathbb{N}$, τότε

$$E(m, j_1, j_2, s, n) = T_1^{-1}((-\frac{1}{s}, \frac{1}{s})) \cap T_2^{-1}((-\frac{1}{s}, \frac{1}{s})),$$

όπου $T_1(f) = ||S_n(f,0) - f_{j_1}||_{K_m}$ και $T_2(f) = ||S_{\lambda_n}(f,0) - f_{j_2}||_{K_m}$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι οι συναρτήσεις T_1 και T_2 είναι συνεχείς, άρα το σύνολο $E(m, j_1, j_2, s, n)$ είναι ανοιχτό, ως τομή των ανοιχτών συνόλων $T_1^{-1}((-\frac{1}{s}, \frac{1}{s}))$ και $T_2^{-1}((-\frac{1}{s}, \frac{1}{s}))$.

Χρησιμοποιώντας τώρα το θεώρημα του *Baire*, η απόδειξη ολοκληρώνεται έπειτα από το λήμμα που ακολουθεί.

□

Λήμμα 3.5.1. *Για κάθε $m, j_1, j_2, s \in \mathbb{N}$, το σύνολο $\bigcup_n E(m, j_1, j_2, s, n)$ είναι πυκνό στο $H(D)$.*

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε $m, j_1, j_2, s \in \mathbb{N}$. Έστω $\epsilon > 0$, $r \in (0,1)$ και $g \in H(D)$. Θα βρούμε $f \in H(D)$ και $n \in \mathbb{N}$, τέτοια ώστε

$$||f-g||_{\overline{D(0,r)}} < \epsilon, \quad ||S_n(f,0) - f_{j_1}||_{K_m} < \frac{1}{s} \text{ και } ||S_{\lambda_n}(f,0) - f_{j_2}||_{K_m} < \frac{1}{s}.$$

Αφού $\limsup_n \dfrac{\lambda_n}{n} = +\infty$, υπάρχει ακολουθία φυσικών αριθμών (μ_n), τέτοια ώστε $\dfrac{\lambda_{\mu_n}}{\mu_n} \to +\infty$. Εφαρμόζοντας το θεώρημα 3.3.1 για το σταθεροποιημένο $r \in (0,1)$, για το συμπαγές σύνολο $K := K_m$, για $h := f_{j_2} - f_{j_1}$ και τις ακολουθίες $\sigma_n := \mu_n + 1$, $\tau_n := \lambda_{\mu_n}$, υπάρχουν $n_0 \in \mathbb{N}$, $\theta \in (0,1)$, $\rho \in (0,1)$, θετικοί αριθμοί C, A και ακολουθία πολυωνύμων P_n της μορφής $P_n(z) := \displaystyle\sum_{k=\mu_n+1}^{\lambda_{\mu_n}} c_{n,k} z^k$ τέτοια ώστε

$$\sup_{z \in K_m} |P_n(z) - (f_{j_2}(z) - f_{j_1}(z))| < C\theta^{\lambda_{\mu_n}}, \text{ για κάθε } n \geq n_0 \tag{3.4}$$

και

$$\sup_{z \in \overline{D(0,r)}} |P_n(z)| < A\rho^{\lambda_{\mu_n}}, \text{ για κάθε } n \geq n_0. \tag{3.5}$$

Θεωρούμε έναν φυσικό αριθμό $l \geq n_0$ τέτοιο ώστε

$$\mu_n \geq deg\, f_{j_1}, \text{ για κάθε } n \geq l. \tag{3.6}$$

Θέτοντας $Q_n(z) = P_n(z) + f_{j_1}(z)$, έπεται ότι για κάθε $n \geq l$, το πολυώνυμο Q_n έχει βαθμό $deg\, Q_n \leq \lambda_{\mu_n}$ και από τη σχέση (3.6) έχουμε ότι

$$S_{\lambda_{\mu_n}}(Q_n, 0) = Q_n$$

και αφού $degP_n \geq \mu_n + 1$ προκύπτει $S_{\mu_n}(Q_n, 0) = f_{j_1}$, για κάθε $n \geq l$.

Επομένως, οι σχέσεις $(3.4), (3.5), (3.6)$ για $n \geq l$ δίνουν

$$||S_{\lambda_{\mu_n}}(Q_n, 0) - f_{j_2}||_{K_m} < C\theta^{\mu_n}, \tag{3.7}$$

$$||S_{\mu_n}(Q_n, 0) - f_{j_1}||_{K_m} = 0 \tag{3.8}$$

και

$$||Q_n - f_{j_1}||_{\overline{D(0,r)}} < A\rho^{\mu_n}. \tag{3.9}$$

Εφαρμόζοντας την πρόταση 3.4.1 για $a_n := \mu_n$, $b_n := \lambda_{\mu_n}$, $n \geq l$, συμπεραίνουμε ότι το σύνολο $W(D, (\mu_\nu), (\lambda_{\mu_\nu}), 0)$ είναι G_δ και πυκνό στο $H(D)$. Επομένως, υπάρχει συνάρτηση $h \in W(D, (\mu_\nu), (\lambda_{\mu_\nu}), 0)$ τέτοια ώστε

$$||g - (h + f_{j_1})||_{\overline{D(0,r)}} < \frac{\epsilon}{2}. \tag{3.10}$$

Επιπλέον, αφού $h \in W(D, (\mu_\nu), (\lambda_{\mu_\nu}), 0)$, υπάρχει υπακολουθία (k_ν) φυσικών αριθμών, τέτοια ώστε

$$||S_{\mu_{k_\nu}}(h, 0)||_{K_m} \to 0 \text{ καθώς } \nu \to +\infty \tag{3.11}$$

και

$$||S_{\lambda_{\mu_{k_\nu}}}(h, 0)||_{K_m} \to 0 \text{ καθώς } \nu \to +\infty \tag{3.12}$$

Από τις σχέσεις $(3.7) - (3.12)$, μπορούμε να βρούμε αρκετά μεγάλο φυσικό αριθμό ν με $k_\nu \geq l$ έτσι ώστε

$$||g - (h + Q_{k_\nu})||_{\overline{D(0,r)}} < \epsilon \tag{3.13}$$

$$||S_{\mu_{k_\nu}}(h + Q_{k_\nu}, 0) - f_{j_1}||_{K_m} < \frac{1}{s} \tag{3.14}$$

και

$$||S_{\lambda_{\mu_{k_\nu}}}(h + Q_{k_\nu}, 0) - f_{j_2}||_{K_m} < \frac{1}{s}, \tag{3.15}$$

πράγμα που ολοκληρώνει την απόδειξη του λήμματος και κατα συνέπεια την απόδειξη της πρότασης 3.5.1.

□

Θεώρημα 3.5.1. *(Müller − Yavrian) Έστω Γ συμπαγές και συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{C}$, με $\Gamma \neq \{c\}$ για κάθε $c \in \mathbb{C}$. Έστω ακόμη $E \subset \mathbb{C}$ κλειστό σύνολο, τέτοιο ώστε το E να είναι non − thin στο ∞. Υποθέτουμε επιπλέον ότι (P_n) είναι μια ακολουθία πολυωνύμων με $deg\, P_n \leq d_n$, για κάποια αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών (d_n), με τις παρακάτω ιδιότητες:*

(α) *υπάρχει συνάρτηση $f : \Gamma \to \mathbb{C}$ με*

$$\limsup_{n\to+\infty} ||f - P_n||_{\Gamma}^{1/d_n} < 1,$$

(β) *για κάθε $z \in E$*

$$\limsup_{n\to+\infty} |P_n(z)|^{1/d_n} \leq 1.$$

Τότε, ισχύουν τα εξής:

(i) *αν η ακολουθία (d_{n+1}/d_n) είναι φραγμένη, τότε η f επεκτείνεται σε μια ακέραια συνάρτηση και για κάθε συμπαγές σύνολο $K \subset \mathbb{C}$ έχουμε ότι*

$$\limsup_{n\to+\infty} ||f - P_n||_{K}^{1/d_n} < 1,$$

(ii) *για τυχαία ακολουθία (d_n), η συνάρτηση f είναι αναλυτική στο Γ, τότε η f επεκτείνεται σε μια ολόμορφη συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα απλά συνεκτικό σύνολο $G_f \subset \mathbb{C}$ (όπου με G_f συμβολίζουμε το μοναδικό "μεγαλύτερο" σύνολο στο οποίο η f επεκτείνεται σε ολόμορφη συνάρτηση-παρατηρούμε ότι το G_f υπάρχει σε αυτή τη περίπτωση) και για κάθε συμπαγές σύνολο $K \subset G_f$ έχουμε ότι*

$$\limsup_{n\to+\infty} ||f - P_n||_{K}^{1/d_n} < 1.$$

Πρόταση 3.5.2. *Έστω (λ_n) μια γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών, τέτοια ώστε $\limsup_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{\lambda_n}{n} < +\infty$. Τότε το σύνολο $U(D, (\lambda_n), 0)$ είναι κενό.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι $U(D, (\lambda_n), 0) \neq \emptyset$ και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Άφου $\limsup_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{\lambda_n}{n} < +\infty$, υπάρχει φυσικός αριθμός N τέτοιος ώστε

$$\frac{\lambda_n}{n} < N, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Έστω $f \in U(D, (\lambda_n), 0)$. Σταθεροποιούμε κάποιο φυσικό αριθμό ν, ώστε $\nu > 5^N$ και θεωρούμε τον κλειστό δίσκο $D_\nu = \overline{D(\nu, \nu - 5^N)}$ και το συμπαγές σύνολο $K_\nu = D_\nu \cup \{1\}$. Για απλοποίηση του συμβολισμού, θέτουμε $K = K_\nu$. Αφού $f \in U(D, (\lambda_n), 0)$, υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών (μ_n), τέτοια ώστε

$$||S_{\mu_n}(f, 0)||_K \to 0$$

και

$$||S_{\lambda_{\mu_n}}(f, 0) - \mathbf{1}||_K \to 0,$$

όπου με $\mathbf{1}$ συμβολίζουμε τη σταθερή συνάρτηση $\mathbf{1}(z) = 1$, $z \in \mathbb{C}$. Επομένως, υπάρχει φυσικός αριθμός n_1 τέτοιος ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$, με $n \geq n_1$ να έχουμε

$$\begin{aligned} &\sup_{z \in K} |S_{\lambda_{\mu_n}}(f, 0)(z) - S_{\mu_n}(f, 0)(z) - 1| \leq \\ &\leq \sup_{z \in K} |S_{\lambda_{\mu_n}}(f, 0)(z) - 1| + \sup_{z \in K} |S_{\mu_n}(f, 0)(z)| < \frac{1}{\nu}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Παρατηρούμε ότι για $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, $S_{\lambda_{\mu_n}}(f, 0)(z) - S_{\mu_n}(f, 0)(z) = z^{\mu_n+1} P_n(z)$, όπου

$$P_n(z) := \sum_{k=0}^{\lambda_{\mu_n} - (\mu_n+1)} \frac{f^{(k+\mu_n+1)}(0)}{(k + \mu_n + 1)!} z^k$$

και για κάθε $n \geq n_1$

$$deg\, P_n \leq \lambda_{\mu_n} - (\mu_n + 1) < \lambda_{\mu_n} - \mu_n = \mu_n \left(\frac{\lambda_{\mu_n}}{\mu_n} - 1 \right) < N\mu_n.$$

Τώρα, η σχέση (3.16) μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\sup_{z \in K} |z^{\mu_n+1} P_n(z) - 1| < \frac{1}{\nu}, \text{ για κάθε } n \geq n_1 \tag{3.17}$$

και προκύπτει ότι

$$|P_n(z)| < \left(1 + \frac{1}{\nu}\right) \frac{1}{|z|^{\mu_n+1}} \text{ για } z \in D_\nu,\ n \geq n_1. \tag{3.18}$$

Έστω $z \in D_\nu$. Τότε, από τριγωνική ανισότητα έχουμε $\nu - |z| \leq |z - \nu| \leq \nu - 5^N$. Άρα, $|z| \geq 5^N$ και επομένως

$$\frac{1}{|z|^{\mu_n}} \leq \frac{1}{5^{N\mu_n}}, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Από την παραπάνω σχέση και την (3.18), προκύπτει

$$|P_n(z)| \leq \frac{1+\frac{1}{\nu}}{5^N}\frac{1}{5^{N\mu_n}} < \frac{1}{5^{N\mu_n}} \text{ για } z \in D_\nu,\ n \geq n_1. \tag{3.19}$$

Θέτουμε τώρα $\nu_1 = 5^N + 1$, $D_{\nu_1} = \overline{D(\nu_1, 1)}$, $K_{\nu_1} = D_{\nu_1} \cup \{1\}$ και εφαρμόζουμε την προηγούμενη διαδικασία. Ξανά, αφού $f \in U(D, (\lambda_n), 0)$, υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών $(\tilde{\mu}_n)$, τέτοια ώστε

$$||S_{\tilde{\mu}_n}(f,0)||_{K_{\nu_1}} \to 0 \text{ και } ||S_{\lambda_{\tilde{\mu}_n}}(f,0) - \mathbf{1}||_{K_{\nu_1}} \to 0.$$

Άρα, υπάρχει φυσικός αριθμός n_2, έτσι ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$, με $n \geq n_2$ να ισχύει

$$\sup_{z \in K_{\nu_1}} |S_{\lambda_{\tilde{\mu}_n}}(f,0)(z) - S_{\tilde{\mu}_n}(f,0)(z) - 1| < \frac{1}{\nu_1}.$$

Έστω m_1 κάποιος όρος της ακολουθίας $(\tilde{\mu}_n)$ τέτοιος ώστε $m_1 > n_2 \geq 1$. Τότε, υπάρχει πολυώνυμο Q_1 με

$$S_{\lambda_{m_1}}(f,0)(z) - S_{m_1}(f,0)(z) = z^{m_1} Q_1(z)$$

και όμοια με πριν προκύπτει ότι $deg\, Q_1 \leq \lambda_{m_1} - (m_1 + 1) < N\, m_1$. Επομένως,

$$\sup_{z \in K_{\nu_1}} |z^{m_1+1} Q_1(z) - 1| < \frac{1}{\nu_1}$$

και αν $z \in D_{\nu_1}$, τότε $\nu_1 - |z| \leq |z - \nu_1| \leq 1 \Rightarrow \dfrac{1}{|z|} \leq \dfrac{1}{\nu_1 - 1} \Rightarrow \dfrac{1}{|z|} \leq \dfrac{1}{5^N}$.
Άρα,

$$|Q_1(z)| < \left(1 + \frac{1}{\nu_1}\right)\frac{1}{|z|^{m_1+1}} \leq \left(1 + \frac{1}{5^N+1}\right)\frac{1}{5^{N\, m_1}\, 5^N}$$

$$= \frac{5^N + 2}{5^{2N} + 5^N}\frac{1}{5^{N\, m_1}} < \frac{1}{5^{N\, m_1}}, \text{ για } z \in D_{\nu_1}.$$

Εφαρμόζοντας ξανά την παραπάνω διαδικασία για $\nu_2 := \nu_1 + 1$ και τα σύνολα $D_{\nu_2} := \overline{D(\nu_2, 2)}$, $K_{\nu_2} := D_{\nu_2} \cup \{1\}$, υπάρχει πολυωνύμο Q_2 και φυσικός αριθμός $m_2 > \max\{m_1, 2\}$ έτσι ώστε

$$deg\, Q_2 < N\, m_2,$$

$$\sup_{z \in K_{\nu_2}} |z^{m_2+1} Q_2 - 1| < \frac{1}{\nu_2}$$

και

$$|Q_2(z)| < \frac{1}{5^{N m_2}}, \text{ για } z \in D_{\nu_2}.$$

Συνεχίζοντας επαγωγικά, καταλήγουμε στο ότι υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων (Q_ν) και γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών (m_ν) τέτοια ώστε

$$m_{\nu+1} > \max\{m_\nu, \nu + 1\}, \quad deg\, Q_\nu < N\, m_\nu, \tag{3.20}$$

$$\sup_{z \in K_{\nu_1+\nu-1}} |z^{m_\nu+1} Q_\nu(z) - 1| < \frac{1}{\nu_1 + \nu - 1} \tag{3.21}$$

και

$$|Q_\nu(z)| < \frac{1}{5^{N m_\nu}}, \text{ για } z \in D_{\nu_1+\nu-1}, \tag{3.22}$$

για κάθε $\nu = 1, 2, \cdots$.

Αφού $D_{\nu_1+\nu-1} := \overline{D(\nu_1 + \nu - 1, \nu)}$, $K_{\nu_1+\nu-1} := D_{\nu_1+\nu-1} \cup \{1\}$, για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$, εύκολα αποδεικνύουμε ότι

$$D_{\nu_1} \subset D_{\nu_1+\nu}, \text{ για κάθε } \nu \in \mathbb{N}.$$

Πράγματι, έστω $\nu \in \mathbb{N}$. Αν $z \in D_{\nu_1}$, δηλαδή $|z - \nu_1| \leq 1$, τότε $|z - (\nu_1 + \nu)| \leq |z - \nu_1| + |\nu| \leq 1 + \nu$. Άρα, $z \in D_{\nu_1+\nu}$ και έχουμε το ζητούμενο.

Γενικότερα, θα αποδείξουμε ότι η ακολουθία των δίσκων $(D_{\nu_1+\nu})_\nu$ είναι αύξουσα. Αν θεωρήσουμε $z \in D_{\nu_1+\nu-1}$, τότε $|z-(\nu_1+\nu)|-1 \leq |z - (\nu_1 + \nu - 1)| \leq \nu$, δηλαδή $|z - (\nu_1 + \nu)| \leq \nu + 1 \Leftrightarrow z \in D_{\nu_1+\nu}$.

Επομένως, από τη σχέση (3.22) έχουμε

$$|Q_\nu(z)| < \frac{1}{5^{N m_\nu}}, \text{ για } z \in D_{\nu_1}, \nu \in \mathbb{N}$$

που συνεπάγεται ότι

$$\limsup_{\nu \to +\infty} ||Q_\nu||_{D_{\nu_1}}^{\frac{1}{N m_\nu}} \leq \frac{1}{5} < 1. \tag{3.23}$$

Θα αποδείξουμε στη συνέχεια ότι για κάθε $x \in [5^N, +\infty)$, υπάρχει κάποιος φυσικός αριθμός $\nu(x)$, τέτοιος ώστε $x \in D_{\nu_1+\nu}$, για κάθε $\nu \geq \nu(x)$. Πράγματι, έστω $x \in [5^N, +\infty)$. Θέτουμε $\nu(x) = [x] + 1$, όπου με $[x]$ συμβολίζουμε το ακέραιο μέρος του x. Άμεσα προκύπτει ότι $x \in D_{\nu_1+\nu(x)}$, διότι

$$|x-(\nu_1+[x]+1|)| = |x-5^N-1-[x]-1| \leq |x-[x]-5^N|+2 \leq [x]+2,$$

από ιδιότητες του ακέραιου μέρους ενός πραγματικού αριθμού. Αφού τώρα η ακολουθία των δίσκων $(D_{\nu_1+\nu})_\nu$ είναι αύξουσα, έχουμε το ζητούμενο. Συνεπώς, από τη σχέση (3.22), για κάθε $x \in [5^N, +\infty)$ προκύπτει ότι

$$|Q_{\nu+1}(x)|^{\frac{1}{Nm_{\nu+1}}} < \frac{1}{5}, \text{ για } \nu \geq \nu(x),$$

άρα

$$\limsup_{\nu\to+\infty} |Q_\nu(x)|^{\frac{1}{Nm_\nu}} < 1, \text{ για κάθε } x \in [5^N, +\infty). \tag{3.24}$$

Το σύνολο $U = \mathbb{C} \setminus [5^N, +\infty)$ είναι ανοιχτό, συνεκτικό και απλά συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{C}_\infty$ και το $\mathbb{C}_\infty \setminus U$ περιέχει τουλάχιστον δύο σημεία, άρα από το θεώρημα 2.3.4 το U είναι κανονικό. Επομένως, από το θεώρημα 2.3.7, το σύνολο $\mathbb{C}_\infty \setminus U = [5^N, +\infty)$ είναι $non-thin$ στο ∞, το οποίο είναι συνοριακό σημείο του U. Από τις ανισότητες $(3.23), (3.24)$, παρατηρούμε ότι ικανοποιούνται οι συνθήκες (α), (β) του θεωρήματος 3.5.1, επομένως από το μέρος (ii) του θεωρήματος συμπεραίνουμε ότι $Q_\nu \to 0$, ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{C}$. Ειδικότερα, $Q_\nu(1) \to 0$. Από την άλλη μεριά, από τη σχέση (3.21) έχουμε ότι $Q_\nu(1) \to 1$, πράγμα άτοπο. Ολοκληρώσαμε λοιπόν την πρόταση και κατά συνέπεια το θεώρημα 3.1.1.

□

Βιβλιογραφία

[1] D.H. Armitage, S.J. Gardiner, Classical Potential Theory, in: Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag London, Ltd., London, 2001.

[2] C. Chui, M.N. Parnes, Approximation by overconvergence of power series, J. Math. Anal. Appl. 36 (1971) 693-696.

[3] G. Costakis, N. Tsirivas, Doubly universal Taylor series, Journal of Approximation Theory 180 (2014) 21-31.

[4] W. Luh, Approximation analytischer Funktionen durch uberkonvergente Potenzreihen und deren Matrix-Transformierten, Mitt. Mathem. Sem. Giessen 88 (1970) 1-56.

[5] J. M*ü*ller, A. Yavrian, On polynomial sequences with restricted growth near infinity, Bull. London Math. Soc. 34 (2002), 189-199.

[6] V. Nestoridis, Universal Taylor series, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 46 (1996), 1293-1306.

[7] T. Ransford, Potential theory in the complex plane. London Mathematical Society Student Texts, 28. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

9