ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΘΕΩΡΗΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ»

Επί των πεπερασμένα γενόμενων προβολικών modules επί του δακτυλίου $k[x_1, \dots, x_m]$

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Παναγιώτα Ι. Αρβανίτη

Επιβλέπων:Παύλος Λεντούδης

Επίκουρος Καθηγητής Πανεπιστημίου Πατρών

Πάτρα, Σεπτέμβριος 2014

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΘΕΩΡΗΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ»

Επί των πεπερασμένα γενόμενων προβολικών modules επί του δακτυλίου $k[x_1, \dots, x_m]$

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Παναγιώτα Ι. Αρβανίτη

Επιβλέπων:Παύλος Λεντούδης

Επίκουρος Καθηγητής Πανεπιστημίου Πατρών

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 4η Σεπτεμβρίου 2014.

………………………………	……………………………	……………………………
Π. Λεντούδης	Π. Τζερμιάς	Π. Καραζέρης
Επίκουρος Καθηγητής	Καθηγητής	Επίκουρος Καθηγητής
Πανεπιστημίου Πατρών	Πανεπιστημίου Πατρών	Πανεπιστημίου Πατρών

Πάτρα, Σεπτέμβριος 2014

………………………………………..

Παναγιώτα Ι. Αρβανίτη

Πτυχιούχος Μαθηματικός Πανεπιστημίου Πατρών

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η διπλωματική εργασία κινείται γύρω από το θεώρημα Quillen-Suslin (1976):

" Κάθε πεπερασμένα γενόμενο προβολικό module επί του δακτυλίου των πολυωνύμων $k[x_1, \dots, x_m]$ (όπου k σώμα) είναι ελεύθερο ".

Το πρόβλημα ξεκίνησε το 1955, όταν ο J. P. Serre, σε υποσημείωση της ένδοξης εργασίας του "Faisceaux Algebriques Coherents" (σελίδα 243), σημειώνει:

" On ignore s'il existe des A-modules projectifs de type fini qui ne soient pas libres" ($A = k[x_1, \dots x_m]$, k σώμα).*

Το πρόβλημα, που στη βιβλιογραφία αναφέρεται ως εικασία του Serre, λύθηκε από τους Quillen και Suslin (ανεξάρτητα) είκοσι χρόνια μετά. Για την απόδειξη του θεωρήματος είναι απαραίτητο το αποτέλεσμα που οφείλεται στον ίδιο τον Serre (1958):

" Κάθε πεπερασμένα γενόμενο προβολικό $k[x_1, \dots, x_m]$-module P είναι σταθερά ελεύθερο" (δηλαδή το P δέχεται πεπερασμένα γενόμενο ελεύθερο συμπλήρωμα F, ώστε το $P \oplus F$ να είναι ελεύθερο).

Στο Κεφάλαιο 2 αυτής της εργασίας, θα παρουσιάσουμε την απόδειξη του ανωτέρω θεωρήματος του Serre και τελικά, στο Κεφάλαιο 3, θα σκιαγραφήσουμε την απόδειξη της "εικασίας" του Serre, με τη μέθοδο του Suslin.

*Αγνοούμε αν υπάρχουν πεπερασμένα γενόμενα προβολικά A-modules που δεν είναι ελεύθερα.

SUMMARY

This work is about the Quillen-Suslin Theorem (1976):

" If k is a field , then every finitely generated projective $k[x_1, \dots, x_m]$-module is free ".

This problem started in 1955, when J.P. Serre, in his glorious paper "Faisceaux Algebriques Coherents" (page 243), noted:

" On ignore s'il existe des A-modules projectifs de type fini qui ne soient pas libres " $(A = k[x_1, \dots x_m]$, k is field).*

This problem, which, in the bibliography, is mentioned like Serre's conjecture, was solved from Quillen and Suslin (independently) twenty years after. For the proof of this theorem is necessary the result, due to Serre (1958):

" Every finitely generated projective $k[x_1, \dots, x_m]$-module P is stably free " (ie. P admits a finitely generated free complement F, so that $P \oplus F$ is free).

In Chapter 2 of this work, we will represent the proof of the above Serre's Theorem and, finally, in Chapter 3, we will sketch the proof of "Serre's conjecture", with Suslin's method.

*We ignore, if exist finitely generated projective A-modules, that they are not free.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κ. Παύλο Λεντούδη για την πολύτιμη βοήθεια και στήριξή του στην εκπόνηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Επίσης, ευχαριστώ τα μέλη της εξεταστικής επιτροπής, κ. Παναγή Καραζέρη και κ. Παύλο Τζερμιά. Τέλος, ένα μεγάλο ευχαριστώ στην οικογένεια μου και τους φίλους μου, που μου έχουν σταθεί σε κάθε μου βήμα.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η παρούσα εργασία πραγματεύεται το θεώρημα Quillen-Suslin (1976) σύμφωνα με το οποίο:

“ Κάθε πεπερασμένα γενόμενο προβολικό module επί του δακτυλίου των πολυωνύμων $k[x_1, \dots x_m]$ (k αντιμεταθετικό σώμα) είναι ελεύθερο ”.

Το πρόβλημα ετέθη όταν, το 1955, ο J.P. Serre στην ένδοξη εργασία του “ Faisceaux algebriques coherents (1955) Ann. Math. **61**, 191-278 ”, στην σελίδα 243 σημειώνει:

“ On ignore s’il existe des A-modules projectifs de type fini qui ne soient pas libres ” ($A = k[x_1, \dots x_m]$, k σώμα). *

Το πρόβλημα, που λύθηκε από τους Quillen και Suslin (ανεξάρτητα) είκοσι χρόνια μετά, αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως εικασία του Serre, ενώ ο ίδιος ο Serre αρνείται ότι έγραψε ποτέ κάτι που να υποδεικνύει ότι πίστευε ή δεν πίστευε σε μία θετική λύση του προβλήματος [4, σελ. 1] . Αναμφίβολα, το κύρος του μαθηματικού J.P. Serre έκανε τους συναδέλφους του να του αποδώσουν την θέση του προβλήματος ως εικασία.

Οι μέθοδοι των Quillen και Suslin είναι διαφορετικές. Εμείς θα προσεγγίσουμε αυτή του δεύτερου. Για την απόδειξη αυτή, είναι απαραίτητη η παρουσίαση του προγενέστερου και ασθενέστερου θεωρήματος Serre (1958), σύμφωνα με το οποίο :

“ Κάθε πεπερασμένα γενόμενο προβολικό module επί του δακτυλίου $k[x_1, \dots x_m]$ είναι σταθερά ελεύθερο ”.

*Αγνοούμε αν υπάρχουν πεπερασμένα γενόμενα προβολικά A-modules που δεν είναι ελεύθερα.

Θα παρουσιάσουμε, λεπτομερώς, την απόδειξη του θεωρήματος Serre όπως εκτίθεται στο βιβλίο του J.J. Rotman [8] και στη συνέχεια, θα σκιαγραφήσουμε την απόδειξη Suslin και πάλι ακολουθώντας το [8].

Οι κατάλληλες έννοιες που μελετώνται και μας οδηγούν στα αποτελέσματα είναι :

a) Το σταθερά ελεύθερο module (stably free).
b) Η πεπερασμένη ελεύθερη επίλυση, συντομογραφικά Π.Ε.Ε. (finite free resolution, FFR) ενός module.
c) Η μονομετρική ιδιότητα ενός δακτυλίου (unimodular).

Η φύση του δακτυλίου $k[x_1, \dots x_m]$ όπως και των Π.Ε.Ε. καθιστούν δυνατές αποδείξεις επαγωγικού χαρακτήρα (επί του πλήθους των μεταβλητών x_i, όπως και επί τους μήκους των επιλύσεων).

Η εργασία χωρίζεται σε τρία κεφάλαια. Στο πρώτο αναφέρονται, χωρίς απόδειξη, αναγκαία προαπαιτούμενα που βρίσκουμε στα βιβλία της βιβλιογραφίας. Στο Κεφάλαιο 2, εκτίθεται το θεώρημα Serre και στο Κεφάλαιο 3, το θεώρημα Quillen-Suslin.

Όλοι οι δακτύλιοι της εργασίας μας, επί των οποίων θεωρούμε τα modules, είναι αντιμεταθετικοί και μοναδιαίοι, και τα modules επ' αυτών πεπερασμένα γενόμενα. Η επιπλέον συνθήκη, ο δακτύλιος να είναι Noether εξασφαλίζει ότι και τα υποmodules των θεωρούμενων πεπερασμένα γενόμενων modules που εμφανίζονται είναι και αυτά πεπερασμένα γενόμενα. Στις ακριβείς ακολουθίες, τα βέλη μεταξύ των R-modules είναι R-ομομορφισμοί, εκτός αν, ρητά, αναφέρεται κάτι άλλο. Κάποια από τα αποτελέσματα του Κεφαλαίου 1, ισχύουν γενικότερα και για μη αντιμεταθετικούς δακτυλίους, καθώς και για modules μη πεπερασμένα γενόμενα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγικές Έννοιες

Σε όλη την εργασία, συμβολίζουμε με R έναν αντιμεταθετικό και μοναδιαίο δακτύλιο.

1.1 Ακριβείς ακολουθίες

1.1.1 Μία ακολουθία (πεπερασμένου ή άπειρου μήκους) R-ομομορφισμών και R-modules

$$\dots \to M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n-1} \to \cdots \qquad (s)$$

καλείται **ακριβής στο $\boldsymbol{M_n}$**, αν ισχύει $imf_{n+1} = kerf_n$. Αν η ακολουθία (s) είναι ακριβής σε κάθε M_n, τότε καλείται **ακριβής ακολουθία** (αναφέρεται και ως R-ακριβής).

1.1.2 Ιδιότητες ακριβών ακολουθιών.

- **i.** Μία ακολουθία $0 \to A \xrightarrow{f} B$ είναι ακριβής αν και μόνο αν $kerf = 0$, δηλαδή η f είναι αμφί.
- **ii.** Μία ακολουθία $B \xrightarrow{g} C \to 0$ είναι ακριβής αν και μόνο αν $img = C$, δηλαδή η g είναι επί.
- **iii.** Μία ακολουθία $0 \to A \xrightarrow{h} B \to 0$ είναι ακριβής αν και μόνο αν η h είναι ισομορφισμός.

1.1.3 Μία ακριβής ακολουθία καλείται **σύντομη ακριβής ακολουθία** όταν είναι της μορφής

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0.$$

1.1.4 Μία σύντομη ακριβής ακολουθία

$$0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \to 0$$

διασπάται (split), αν υπάρχει R-ομομορφισμός $j: C \to B$ τέτοιος ώστε $p \circ j = 1_C$. Στην περίπτωση αυτή, ο j είναι R-μονομορφισμός και

$$B = i(A) \oplus j(C) \cong A \oplus C.$$

1.1.5 Για οποιαδήποτε modules A και C, θεωρώντας το ευθύ τους άθροισμα $A \times C \cong A \oplus C$, έχουμε ότι η ακολουθία

$$0 \to A \xrightarrow{i} A \oplus C \xrightarrow{p} C \to 0$$

όπου $i(a) = (a, 0)$ και $p(a, c) = c$,

είναι σύντομη ακριβής.

Όμως, δεν διασπάται κάθε ακολουθία της μορφής $0 \to A \xrightarrow{i} A \oplus C \xrightarrow{p} C \to 0$.

1.2 Πεπερασμένα γενόμενα και ελεύθερα modules

1.2.1 Έστω M ένα R-module.

- **i.** Αν το M είναι το άθροισμα πεπερασμένου πλήθους από πεπερασμένα γενόμενα modules, τότε το M είναι πεπερασμένα γενόμενο.
- **ii.** Αν το M μπορεί να παράγεται από n στοιχεία και N είναι ένα υπομodule του M, τότε το M/N μπορεί να παράγεται από n στοιχεία.
- **iii.** Αν $M \cong M_1 \oplus M_2$ και το M μπορεί να παράγεται από n στοιχεία, τότε και το M_1 μπορεί να παράγεται από n στοιχεία.

1.2.2 Ένα R-module M είναι κυκλικό αν και μόνο αν $M \cong R/I$, για κάποιο ιδεώδες I του δακτυλίου R.

1.2.3 Κάθε R-module M είναι πηλίκο ενός ελεύθερου R-module F (ορίζεται R-επιμορφισμός $\varepsilon: F \to M$). Επιπλέον, το M είναι πεπερασμένα γενόμενο αν και μόνο αν το F μπορεί να επιλεγεί πεπερασμένα γενόμενο.

1.2.4 Έστω R αντιμεταθετικός δακτύλιος.

- **i.** Κάθε δύο βάσεις ενός ελεύθερου R-module F έχουν τον ίδιο πληθάριθμο.

ii. Δύο ελεύθερα R-modules F και F' είναι ισόμορφα αν και μόνο αν υπάρχουν βάσεις αυτών με τον ίδιο πληθάριθμο.
iii. Αν $m, n \in \mathbb{N}$, τότε $R^m \cong R^n$ αν και μόνο αν $m = n$.
iv. Ο κοινός πληθάριθμος όλων των βάσεων ενός ελεύθερου R-module F συμβολίζεται με $rank(F)$ (η προϋπόθεση, ο δακτύλιος R να είναι αντιμεταθετικός, είναι ουσιώδης).

1.3 Προβολικά modules

1.3.1 Έστω P ένα R-module. Το P καλείται **προβολικό** αν, για κάθε R-επιμορφισμό $p: A \to A''$ και τυχόντα R-ομομορφισμό $h: P \to A''$, υπάρχει R-ομομορφισμός $g: P \to A$ τέτοιος ώστε $p \circ g = h$.

1.3.2 Ιδιότητες προβολικών modules.

i. Κάθε ελεύθερο R-module είναι προβολικό.
ii. Αν P είναι προβολικό R-module, τότε η τυχούσα σύντομη ακριβής ακολουθία από R-modules
$$0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} P \to 0$$
διασπάται.
iii. Αν A είναι ένα υποmodule ενός module B και το πηλίκο B/A είναι προβολικό, τότε το A δέχεται συμπλήρωμα. Συγκεκριμένα, υπάρχει υποmodule C του B, τέτοιο ώστε $C \cong B/A$ και $B = A \oplus C$.
iv. Ένα R-module P είναι προβολικό αν και μόνο αν το P είναι ευθύς προσθετέος ενός ελεύθερου R-module.
v. Ένα πεπερασμένα γενόμενο R-module P είναι προβολικό αν και μόνο αν το P είναι ευθύς προσθετέος του R^n, για κάποιο $n \in \mathbb{N}$.
vi. Κάθε ευθύς προσθετέος ενός προβολικού module είναι προβολικό module.
vii. Κάθε ευθύ άθροισμα από προβολικά modules είναι προβολικό module.
viii. Έστω M'' ένα προβολικό R-module και μία σύντομη ακριβής ακολουθία
$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$
Τότε, το M' είναι προβολικό αν και μόνο αν το M είναι προβολικό.

1.3.3 (Λήμμα Schanuel) Έστω M ένα R-module και δύο σύντομες ακριβείς ακολουθίες

$$0 \to K \xrightarrow{i} P \xrightarrow{\pi} M \to 0$$

και
$$0 \to K' \xrightarrow{i'} P' \xrightarrow{\pi'} M \to 0,$$

όπου τα P και P' είναι προβολικά R-modules. Τότε, έχουμε την ισομορφία.

$$K \oplus P' \cong K' \oplus P.$$

1.3.4 (Γενικευμένο Λήμμα Schanuel) [3, σελ. 137] Έστω M ένα R-module και δύο ακριβείς ακολουθίες

$$0 \to K \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$$

και
$$0 \to K' \to Q_n \to Q_{n-1} \to \cdots \to Q_1 \to Q_0 \to M \to 0$$

όπου τα P_i και τα Q_i $(i = 1, \dots, n)$ είναι προβολικά R-modules. Τότε, ισχύει ότι

$$K \oplus Q_n \oplus P_{n-1} \oplus \dots \cong K' \oplus P_n \oplus Q_{n-1} \oplus \dots \ .$$

1.4 Δακτύλιοι και modules Noether

1.4.1 Έστω M ένα R-module. Οι ακόλουθες τρεις συνθήκες είναι ισοδύναμες.

- **i.** Κάθε αύξουσα ακολουθία από υποmodules του M είναι στάσιμη.
- **ii.** Κάθε μη κενή οικογένεια από υποmodules του M δέχεται maximal στοιχείο.
- **iii.** Κάθε υποmodule του M είναι πεπερασμένα γενόμενο.

1.4.2 Όταν οι ισοδύναμες συνθήκες του (1.4.1) πληρούνται, τότε το R-module M καλείται **module Noether**.

1.4.3 Ένας δακτύλιος R, θεωρούμενος ως R-module που ικανοποιεί τις συνθήκες του (1.4.1), ονομάζεται **δακτύλιος Noether** (τα υποmodules αυτού είναι τα ιδεώδη του).

1.4.4 Ιδιότητες των modules Noether.

- **i.** Έστω M ένα module Noether. Τότε, κάθε υπομodule και κάθε module-πηλίκο του M είναι module Noether.
- **ii.** Έστω M ένα module και N ένα υπομodule του. Υποθέτουμε ότι τα N και M/N είναι modules Noether. Τότε, το M είναι module Noether.
- **iii.** Έστω M ένα module και N, N' υπομodules του M. Αν ισχύει $M = N + N'$ και αν τα N και N' είναι modules Noether, τότε το M είναι module Noether. Κάθε ευθύ άθροισμα από modules Noether, πεπερασμένου πλήθους, είναι module Noether.
- **iv.** Έστω R δακτύλιος Noether και M ένα πεπερασμένα γενόμενο R-module. Τότε, το M είναι module Noether.

1.4.5 Έστω R κύριος δακτύλιος [8, σελ. 163] .

- **i.** Κάθε υπομodule A ενός ελεύθερου R-module F είναι ελεύθερο, με $rank(A) \leq rank(F)$.
- **ii.** Αν A είναι ένα πεπερασμένα γενόμενο R-module, που παράγεται από n στοιχεία του, και A' ένα υπομodule του A, τότε το A' μπορεί να γεννηθεί από πλήθος στοιχείων $\leq n$.
- **iii.** Αν A είναι ένα προβολικό R-module, τότε είναι ελεύθερο (συνέπεια του ότι το προβολικό A, ως υπομodule, και μάλιστα ευθύς προσθετέος, ελεύθερου είναι ελεύθερο).

1.4.6 (Hilbert) Αν R είναι δακτύλιος Noether τότε, ο δακτύλιος πολυωνύμων $R[x]$ είναι επίσης δακτύλιος Noether.

1.4.7 Έστω k ένα σώμα. Ο δακτύλιος πολυωνύμων $k[x_1, \dots, x_m]$ είναι δακτύλιος Noether.

1.4.8 (Noether) [2, σελ. 699] , [8, σελ. 206] Θεωρούμε τον δακτύλιο $R = k[x_1, \dots, x_m]$, όπου το k είναι σώμα. Έστω $a \in R$ με (ολικό) βαθμό δ και έστω $b = \delta + 1$. Θέτουμε

$$y = x_m$$

και, για $1 \leq i \leq m-1$, ορίζουμε

$$y_i = x_i - x_m^{b^{m-i}} = x_i - y^{b^{m-i}}.$$

Τότε, ισχύει $a = ra'$, όπου το $r \in k$ και το $a' \in (k[y_1, \dots, y_{m-1}])[y]$ είναι μονικό πολυώνυμο ως προς την μεταβλητή y.

(Το (1.4.8) είναι ένα τεχνικό αποτέλεσμα και αποτελεί βασικό συλλογισμό σε αυτό, που στη βιβλιογραφία αναφέρεται ως λήμμα κανονικοποίησης της Noether, και μας δίνει τη δυνατότητα να εκφράσουμε ένα πολυώνυμο πολλών μεταβλητών, με τον κατάλληλο μετασχηματισμό των μεταβλητών, σαν ένα μονικό πολυώνυμο ως προς μία εξ' αυτών.)

1.5 Τανυστικό γινόμενο και επίπεδα modules

1.5.1 Έστω M ένα R-module. Μέσω της αντιστοιχίας $r \otimes m \mapsto rm$ όπου $r \in R$, $m \in M$, ορίζεται R-ισομορφισμός $R \otimes_R M \cong M$.
Αντίστοιχη ιδιότητα ισχύει και για το τανυστικό γινόμενο $M \otimes_R R$.

1.5.2 Το τανυστικό γινόμενο εναλλάσσεται με το ευθύ άθροισμα. Συγκεκριμένα, αν $(B_i)_{i \in I}$ οικογένεια R-modules και A ένα R-module, τότε, μέσω της αντιστοιχίας $a \otimes (b_i) \mapsto (a \otimes b_i)$, ορίζεται ισομορφισμός αβελιανών ομάδων

$$A \otimes_R (\oplus_{i \in I} B_i) \cong \oplus_{i \in I} (A \otimes_R B_i).$$

1.5.3 Έστω A ένα R-module. Ο συναρτητής $A \otimes_R \_$ είναι δεξιά ακριβής, δηλαδή μία ακριβής ακολουθία R-modules της μορφής

$$B' \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} B'' \to 0$$

επάγει την ακριβή ακολουθία αβελιανών ομάδων [2, σελ. 399] , [8, σελ. 84]

$$A \otimes_R B' \xrightarrow{1_A \otimes i} A \otimes_R B \xrightarrow{1_A \otimes p} A \otimes_R B'' \to 0. \qquad (s)$$

1.5.4 Παρατηρήσεις.

i. Στη γενική περίπτωση ενός, όχι υποχρεωτικά αντιμεταθετικού, δακτυλίου R, όταν θεωρήσουμε το δεξί R-module A και το αριστερό R-module B, το τανυστικό γινόμενο $A\otimes_R B$ έχει τη δομή αβελιανής ομάδας και τα αντίστοιχα βέλη της ανωτέρου ακριβούς ακολουθίας (s) στο (1.5.3) είναι ομομορφισμοί αβελιανών ομάδων ($\mathbb{Z}$-module).

ii. Στην περίπτωση που ο δακτύλιος R είναι αντιμεταθετικός (όπως συμβαίνει στην παρούσα εργασία), θέτοντας $ra = ar$, για $r \in R$ και $a \in A$, το module A καθίσταται (R,R)-διπλής πλευράς module ((R,R)-bimodule). Στην περίπτωση αυτή, δρώντας επί των τανυστών μέσω της σχέσης

$$r(a\otimes b) = (ra)\otimes b \quad (r \in R, a \in A, b \in B)$$

και επεκτείνοντας γραμμικά, το $A\otimes_R B$ καθίσταται αριστερό R-module. Ανάλογη δράση από τα δεξιά επί του B, μας δίνει τις σχέσεις

$$r(a\otimes b) = (ra)\otimes b = (ar)\otimes b = a\otimes(rb) = a\otimes(br) = (a\otimes b)r.$$

Μέσω του τρόπου αυτού, το τανυστικό γινόμενο $A\otimes_R B$ γίνεται (R,R)-διπλής πλευράς module, τα βέλη της ακριβούς ακολουθίας

$$A\otimes_R B' \xrightarrow{1_A\otimes i} A\otimes_R B \xrightarrow{1_A\otimes p} A\otimes_R B'' \to 0 \qquad (s)$$

γίνονται R-ομομορφισμοί, καθώς και η ισομορφία του (1.5.2) γίνεται R-ισομορφισμός. [2, σελ. 370,400]

iii. Γενίκευση των ανωτέρω, λαμβάνουμε αν θεωρήσουμε έναν επιπλέον δακτύλιο S και το A ένα (S,R)-διπλής πλευράς module. Δηλαδή, το A να είναι και αριστερό S-module, με την ιδιότητα

$$s(ar) = (sa)r \qquad (s \in S, r \in R, a \in A).$$

Τότε, διά της δράσης $s(a\otimes b) = (sa)\otimes b$, το $A\otimes_R B$ γίνεται αριστερό S-module και τα βέλη της ακριβούς ακολουθίας (s) γίνονται ομομορφισμοί αριστερών S-modules.

1.5.5 Έστω R αντιμεταθετικός δακτύλιος και A ένα R-module. Το A καλείται **επίπεδο** (flat) αν και μόνο αν ο συναρτητής $A\otimes_R\_$ είναι ακριβής. Δηλαδή, μία ακριβής ακολουθία από R-modules, της μορφής

$$0 \to B' \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} B'' \to 0$$

επάγει την ακριβή ακολουθία από R-modules

$$0 \to A\otimes_R B' \xrightarrow{1_A\otimes i} A\otimes_R B \xrightarrow{1_A\otimes p} A\otimes_R B'' \to 0. \text{ [2, σελ. 400]}$$

(Το A είναι επίπεδο αν και μόνο αν ο $1_A\otimes i$ είναι 1-1, όταν ο i είναι 1-1.)

1.5.6 Ιδιότητες των επίπεδων modules (ισχύουν και για μη πεπερασμένα γενόμενα modules).

- **i.** Ο R, ως R-module, είναι επίπεδο.
- **ii.** Κάθε ευθύ άθροισμα $\bigoplus_j A_j$ από R-modules είναι επίπεδο R-module αν και μόνο αν κάθε A_j είναι επίπεδο.
- **iii.** Κάθε ευθύς προσθετέος ενός επίπεδου R-module είναι επίπεδο.
- **iv.** Κάθε ελεύθερο R-module είναι επίπεδο.
- **v.** Κάθε προβολικό R-module είναι επίπεδο.

1.5.7 Ο δακτύλιος $R[x]$, ως R-module, είναι ελεύθερο, αφού δέχεται βάση, για παράδειγμα την $\{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$, άρα είναι και επίπεδο R-module.

1.5.8 Έστω A ένα επίπεδο R-module και I ένα ιδεώδες του δακτυλίου R. Μέσω της αντιστοιχίας $a\otimes i \mapsto ai$, ορίζεται ένας R-ισομορφισμός $A\otimes_R I \cong AI$. [2, σελ. 406] , [8, σελ. 139]

1.5.9 Έστω M ένα R-module και A μία R-άλγεβρα. Θεωρούμε το τανυστικό γινόμενο $A\otimes_R M$, το οποίο μέσω της σχέσης

$$a(a_1\otimes m) = aa_1\otimes m \quad (a, a_1 \in A, m \in M)$$

καθίσταται ένα A-module (1.5.4 iii. με $S = A$). Τέτοιας μορφής επεκτάσεις, για $A = R[x]$, θα εμφανιστούν στη συνέχεια, όπως και ιδιότητες αυτών [8, σελ. 210]:

i. M ελεύθερο R-module $\Longrightarrow$ $A \otimes_R M$ ελεύθερο A-module.

ii. M προβολικό R-module $\Longrightarrow$ $A \otimes_R M$ προβολικό A-module.

1.6 Προβολικές και ελεύθερες επιλύσεις modules

1.6.1 Έστω M ένα R-module και μία ακριβής ακολουθία από R-modules, της μορφής

$$\ldots \to P_n \overset{d_n}{\to} P_{n-1} \to \cdots \to P_2 \overset{d_2}{\to} P_1 \overset{d_1}{\to} P_0 \overset{\varepsilon}{\to} M \to 0. \qquad (s)$$

Η ακολουθία (s) καλείται **προβολική επίλυση** του M, εάν κάθε P_i $(i = 0,1,2, \ldots)$ είναι προβολικό R-module.

(Κάποιες φορές, για συντομία, θα συμβολίζουμε την ανωτέρω προβολική επίλυση του M, ως $P_\bullet$.)

1.6.2 Μία προβολική επίλυση ενός R-module M καλείται ελεύθερη επίλυση του M, όταν κάθε P_i $(i = 0,1,2, \ldots)$ είναι ελεύθερο R-module.

1.6.3 Κάθε R-module M δέχεται ελεύθερη επίλυση, η οποία είναι, προφανώς, και προβολική (το αποτέλεσμα αυτό προκύπτει σχεδόν άμεσα από το ότι κάθε module είναι πηλίκο ενός ελεύθερου module).

1.6.4 Έστω M ένα R-module και

$$\ldots \to P_n \overset{d_n}{\to} P_{n-1} \to \cdots \to P_2 \overset{d_2}{\to} P_1 \overset{d_1}{\to} P_0 \overset{\varepsilon}{\to} M \to 0 \quad (s)$$

μία προβολική επίλυση του M. Ορίζουμε $K_0 = ker\varepsilon$ και $K_n = kerd_n$, για $n \geq 1$. Καλούμε κάθε K_n $(n \geq 0)$ ***n*-συζυγή** της προβολικής επίλυσης του M.
[8, σελ. 327]

Η επίλυση (s) περιορίζεται στον n-συζυγή K_n μέσω της παρεμβολής της έγκλεισης $i: K_n \to P_n$ και μας δίνει την πεπερασμένου μήκους επίλυση

$$0 \to K_n \overset{i}{\to} P_n \overset{d_n}{\to} P_{n-1} \to \cdots \to P_2 \overset{d_2}{\to} P_1 \overset{d_1}{\to} P_0 \overset{\varepsilon}{\to} M \to 0.$$

1.6.5 Στο κύριο μέρος της παρούσης εργασίας (Κεφάλαιο 2), θα μας απασχολήσουν ειδικού τύπου προβολικές επιλύσεις πεπερασμένα γενόμενων modules, τις οποίες θα καλούμε Π.Ε.Ε. . Συγκεκριμένα, θα είναι ακριβείς ακολουθίες πεπερασμένου μήκους, δηλαδή της μορφής

$$0 \to P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \to \cdots \to P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \to 0$$

όπου κάθε P_i $(i = 0,1, \ldots, n)$ θα είναι πεπερασμένα γενόμενο ελεύθερο module.

1.6.6 Έστω $0 \to M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M'' \to 0$ σύντομη ακριβής ακολουθία modules και $P_\bullet'$, $P_\bullet$, $P_\bullet''$ προβολικές επιλύσεις των M', M, M'' αντίστοιχα. Ονομάζουμε **ακριβή ακολουθία των επιλύσεων** και συμβολίζουμε με

$$0 \to P_\bullet' \to P_\bullet \to P_\bullet'' \to 0$$

μία οικογένεια ακριβών ακολουθιών σε κάθε επίπεδο n $(n \geq 0)$ των επιλύσεων:

$$0 \to P_n' \xrightarrow{i_n} P_n \xrightarrow{p_n} P_n'' \to 0$$

ώστε τα διαγράμματα που προκύπτουν μεταξύ διαδοχικών επιπέδων να είναι αντιμεταθετικά.

1.6.7 (Λήμμα πετάλου ή ταυτόχρονης επίλυσης) [2, σελ. 783] , [6, σελ. 804] , [9, σελ. 171] Έστω $0 \to M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M'' \to 0$ σύντομη ακριβής ακολουθία modules και $P_\bullet'$, $P_\bullet''$ προβολικές επιλύσεις των M', M'' αντίστοιχα. Θέτουμε $P_n = P_n' \oplus P_n''$. Για κάθε $n \geq 0$, οι ακριβείς ακολουθίες

$$0 \to P_n' \xrightarrow{i_n} P_n = P_n' \oplus P_n'' \xrightarrow{p_n} P_n'' \to 0$$

του (1.1.5), ορίζουν μία ακριβή ακολουθία των ανωτέρω προβολικών επιλύσεων των M', M, M'' και επάγουν ακριβείς ακολουθίες

$$0 \to K_n' \to K_n \to K_n'' \to 0$$

στους n-συζυγείς. (Η απόδειξη του λήμματος αυτού, γίνεται επαγωγικά επί του n, με τη χρήση του γνωστού λήμματος 3×3 της ομολογιακής άλγεβρας.)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Θεώρημα Serre

[8, σελ. 476-482] , [7, σελ. 251-255]

2.1 Σταθερά ελεύθερα modules

2.1.1 Ορισμός. Έστω P ένα πεπερασμένα γενόμενο R-module. Το P καλείται **σταθερά ελεύθερο** (stably free), αν υπάρχει πεπερασμένα γενόμενο ελεύθερο R-module F_1 τέτοιο ώστε το $F_0 \cong P \oplus F_1$ να είναι ελεύθερο.

2.1.2 Παρατηρήσεις.

- **i.** Στον παραπάνω ορισμό, το ελεύθερο R-module F_0, ως ευθύ άθροισμα των πεπερασμένα γενόμενων ελεύθερων P και F_1, είναι και αυτό πεπερασμένα γενόμενο. Δηλαδή $F_0 \cong R^n$, για κάποιο $n \in \mathbb{N}$.
- **ii.** Κάθε πεπερασμένα γενόμενο ελεύθερο R-module είναι σταθερά ελεύθερο.
- **iii.** Ως συνέπεια του ορισμού (2.1.1), έχουμε ότι για ένα σταθερά ελεύθερο R-module P, υπάρχουν πεπερασμένα γενόμενα ελεύθερα R-modules F_0 και F_1 και σύντομη ακριβής ακολουθία
$$0 \to F_1 \to F_0 \to P \to 0,$$
η οποία διασπάται, αφού $F_0 \cong P \oplus F_1$.
- **iv.** Κάθε σταθερά ελεύθερο module P, ως ευθύς προσθετέος ελεύθερου εξ' ορισμού, είναι προβολικό module (1.3.2 v.), και επομένως κάθε σύντομη ακριβής ακολουθία της μορφής
$$0 \to A \to B \to P \to 0$$
διασπάται (1.3.2 ii.).
- **v.** Υπάρχουν πεπερασμένα γενόμενα προβολικά modules τα οποία δεν είναι σταθερά ελεύθερα. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε τους δακτύλιους $\mathbb{Z}_2$

και $\mathbb{Z}_3$ ως $\mathbb{Z}_6$-modules και τον $\mathbb{Z}_6$ ως ελεύθερο module επί του εαυτού του. Από τη σχέση

$$\mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3,$$

όπου $\mathbb{Z}_2 \cong \{[0],[3]\}$ και $\mathbb{Z}_3 \cong \{[0],[2],[4]\}$, προκύπτει ότι το $\mathbb{Z}_2$ είναι πεπερασμένα γενόμενο προβολικό $\mathbb{Z}_6$-module, ως ευθύς προσθετέος του ελεύθερου $\mathbb{Z}_6$. Όμως, μία σχέση της μορφής

$$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_6^m \cong \mathbb{Z}_6^n \text{ για κάθε } m, n \in \mathbb{N},$$

είναι αδύνατη, δηλαδή το $\mathbb{Z}_2$ δεν μπορεί να είναι σταθερά ελεύθερο $\mathbb{Z}_6$-module. Το ίδιο, προφανώς, ισχύει και για το $\mathbb{Z}_6$-module $\mathbb{Z}_3$.

vi. Έστω P και Q δύο σταθερά ελεύθερα R-modules. Τότε και το ευθύ τους άθροισμα, $P \oplus Q$, είναι σταθερά ελεύθερο R-module.

vii. Δεν είναι αλήθεια ότι κάθε ευθύς προσθετέος ενός σταθερά ελεύθερου είναι σταθερά ελεύθερο module. Πράγματι , κάθε προβολικό είναι ευθύς προσθετέος ενός ελεύθερου, άρα και σταθερά ελεύθερου (2.1.2 ii.), ενώ υπάρχουν προβολικά τα οποία δεν είναι σταθερά ελεύθερα (2.1.2 v.).

viii. Αν έχουμε $P \cong P' \oplus P''$, με τα P και P' σταθερά ελεύθερα modules, τότε και το P'' είναι σταθερά ελεύθερο.

ix. Η συνθήκη στον ορισμό (2.1.1), το ελεύθερο module F_1 να είναι πεπερασμένα γενόμενο, είναι ουσιώδης. Αν δεν το απαιτούσε ο ορισμός, τότε κάθε προβολικό θα ήταν σταθερά ελεύθερο module, όπως αποδεικνύεται με το τέχνασμα του Eilenberg [4, σελ. 25] .

Έστω P ένα προβολικό module. Τότε υπάρχει Q τέτοιο ώστε το $P \oplus Q = E$ να είναι ελεύθερο. Το άπειρο άθροισμα $F = E \oplus E \oplus \ldots$ είναι επίσης ελεύθερο. Τότε, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} P \oplus F &\cong P \oplus E \oplus E \oplus \ldots \\ &\cong P \oplus (Q \oplus P) \oplus (Q \oplus P) \oplus \ldots \\ &\cong (P \oplus Q) \oplus (P \oplus Q) \oplus \ldots \\ &\cong E \oplus E \oplus \ldots \cong F. \end{aligned}$$

x. Η θεωρία των σταθερά ελεύθερων modules έχει ενδιαφέρον και νόημα μόνο για πεπερασμένα γενόμενα modules, λόγω του παρακάτω αποτελέσματος, που οφείλεται στον Gabel [4, σελ. 25] :
« Αν ένα module P είναι σταθερά ελεύθερο, αλλά όχι πεπερασμένα γενόμενο, τότε το P είναι ελεύθερο ».

xi. Κύριος στόχος του Κεφαλαίου 2 είναι η παρουσίαση του Θεωρήματος Serre (1958), σύμφωνα με το οποίο αποδεικνύεται ότι:
« Επί του δακτυλίου των πολυωνύμων $R = k[x_1, \dots, x_m]$ (όπου k σώμα), κάθε πεπερασμένα γενόμενο προβολικό R-module P είναι σταθερά ελεύθερο ».

xii. Στην απόδειξη του Θεωρήματος Serre (2.4.7) εμπλέκονται modules που δέχονται κάποιου ειδικού τύπου προβολικές επιλύσεις, τις πεπερασμένες ελεύθερες επιλύσεις (Π.Ε.Ε.), των οποίων ο ορισμός ακολουθεί.

2.2 Πεπερασμένες ελεύθερες επιλύσεις (Π.Ε.Ε.)

2.2.1 Ορισμός. Έστω μία προβολική επίλυση ενός R-module M της μορφής

$$0 \to P_n \overset{d_n}{\to} P_{n-1} \to \cdots \to P_2 \overset{d_2}{\to} P_1 \overset{d_1}{\to} P_0 \overset{\varepsilon}{\to} M \to 0.$$

Η επίλυση αυτή καλείται **πεπερασμένη ελεύθερη επίλυση** (finite free resolution) μήκους $\leq n$, όταν κάθε P_i $(i = 0,1, \dots, n)$ είναι πεπερασμένα γενόμενο ελεύθερο R-module.

Για λόγους συντομίας, θα γράφουμε **Π.Ε.Ε.** (FFR).

2.2.2 Παρατηρήσεις.

i. Η ύπαρξη Π.Ε.Ε. για το M, μας εξασφαλίζει ότι το M είναι πεπερασμένα γενόμενο, ως ομομορφική εικόνα του πεπερασμένα γενόμενου P_0.

ii. Η έννοια "Π.Ε.Ε." περιορίζει την γενικότερη έννοια της ελεύθερης επίλυσης, που επιδέχονται όλα τα modules (1.6.3), με δύο συνθήκες:
    - Όλα τα ελεύθερα P_i είναι πεπερασμένα γενόμενα.

- Η επίλυση είναι πεπερασμένου μήκους, δηλαδή τερματίζεται σε ένα ελεύθερο module P_n, για κάποιο n, πράγμα που δηλώνουμε με τον συμβολισμό $0 \to P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \to \cdots$.

iii. Η ύπαρξη επιλύσεων ενός πεπερασμένα γενόμενου module, που ικανοποιούν την πρώτη συνθήκη του (2.2.2 ii.), εξασφαλίζεται όταν, για παράδειγμα, ο δακτύλιος είναι Noether (2.3.2).

iv. Η σύνδεση των εννοιών "Π.Ε.Ε." και "σταθερά ελεύθερο module" γίνεται στην επόμενη πρόταση.

2.2.3 Πρόταση. (Λήμμα Serre) Για κάθε πεπερασμένα γενόμενο προβολικό R-module P, οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

i. Το P είναι σταθερά ελεύθερο.

ii. Το P δέχεται Π.Ε.Ε..

Απόδειξη.

$(\text{i.} \Longrightarrow \text{ii.})$ Αν το P είναι σταθερά ελεύθερο, τότε υπάρχει ένα πεπερασμένα γενόμενο ελεύθερο R-module F με το $P \oplus F$ ελεύθερο (2.1.1). Άρα το P δέχεται Π.Ε.Ε. μήκους ≤ 1, αφού η ακολουθία

$$0 \to F \to P \oplus F \to P \to 0$$

είναι ακριβής (2.1.2 iii.).

$(\text{ii.} \Longrightarrow \text{i.})$ Θεωρούμε ότι το P δέχεται Π.Ε.Ε. μήκους $\leq n$.

Θα αποδείξουμε ότι το P είναι σταθερά ελεύθερο επαγωγικά επί του μήκους $n \geq 0$ της επίλυσης.

Αν $n = 0$, τότε υπάρχει μία ακριβής ακολουθία

$$0 \to F_0 \xrightarrow{\varepsilon} P \to 0,$$

όπου το F_0 είναι πεπερασμένα γενόμενο ελεύθερο.

Λόγω της ακρίβειας αυτής της ακολουθίας, έχουμε ότι η ε είναι ισομορφισμός (1.1.2 iii.), δηλαδή $F_0 \cong P$. Άρα το P είναι πεπερασμένα γενόμενο ελεύθερο, οπότε και σταθερά ελεύθερο (2.1.2 ii.).

Υποθέτουμε ότι κάθε προβολικό R-module που δέχεται Π.Ε.Ε. μήκους $\leq n$ είναι σταθερά ελεύθερο. Έστω, τώρα, ότι το προβολικό R-module P δέχεται Π.Ε.Ε. μήκους $\leq n+1$, έστω την

$$0 \to F_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} F_n \to \cdots \to F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} P \to 0. \qquad (s)$$

Θεωρούμε τον πυρήνα $K = ker\varepsilon$ και παραγοντοποιούμε την επίλυση (s) στο επίπεδο του F_0. Έτσι, λαμβάνουμε τις εξής δύο ακριβείς ακολουθίες

$$0 \to F_{n+1} \to F_n \to \cdots \to F_1 \to K \to 0 \qquad (s_1)$$

$$0 \to K \xrightarrow{i} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} P \to 0. \qquad (s_2)$$

Από την ακολουθία (s_1), προκύπτει ότι το K, ως ομομορφική εικόνα του πεπερασμένα γενόμενου F_1 (2.2.2 i.), είναι πεπερασμένα γενόμενο module και δέχεται Π.Ε.Ε. μήκους $\leq n$. Επειδή (εξ' υποθέσεως) το P είναι προβολικό, η σύντομη ακριβής ακολουθία (s_2) διασπάται, άρα $F_0 \cong P \oplus K$, και έτσι το K, ως ευθύς προσθετέος του ελεύθερου F_0, είναι προβολικό. Λόγω της υπόθεσης της επαγωγής, το K είναι σταθερά ελεύθερο. Άρα, υπάρχει πεπερασμένα γενόμενο ελεύθερο Q με το $K \oplus Q$ να είναι ελεύθερο.

Από τα παραπάνω, έχουμε ότι

$$P \oplus (K \oplus Q) \cong (P \oplus K) \oplus Q \cong F_0 \oplus Q,$$

σχέση από την οποία προκύπτει ότι το P είναι σταθερά ελεύθερο. ■

2.2.4 Πρόταση. Αν ένα R-module M δέχεται προβολική επίλυση

$$0 \to P_n \to \cdots \to P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \to 0 \qquad (s)$$

στην οποία κάθε P_i $(i = 0,1,\dots,n)$ είναι σταθερά ελεύθερο R-module, τότε το M δέχεται Π.Ε.Ε. μήκους $\leq n+1$.

Απόδειξη. Η απόδειξη του λήμματος θα γίνει επαγωγικά επί του μήκους $n \geq 0$ της επίλυσης του M από σταθερά ελεύθερα R-modules.

Για $n = 0$, έχουμε την ακριβή ακολουθία

$$0 \to P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \to 0$$

η οποία είναι επίλυση του M από σταθερά ελεύθερα modules, μήκους 0. Λόγω της ακρίβειας της ακολουθίας, η ε είναι ισομορφισμός, άρα το $M \cong P_0$ είναι σταθερά ελεύθερο. Δηλαδή, υπάρχουν πεπερασμένα γενόμενα ελεύθερα F_0 και F_1 με $F_0 \cong M \oplus F_1$, και η ακριβής ακολουθία

$$0 \to F_1 \to F_0 \to M \to 0$$

η οποία είναι Π.Ε.Ε. του M, μήκους ≤ 1.

Έστω $n > 0$. Υποθέτουμε ότι κάθε R-module, το οποίο δέχεται επίλυση από σταθερά ελεύθερα modules μήκους $n-1$, δέχεται Π.Ε.Ε. μήκους $\leq n$.

Για το επαγωγικό βήμα, έστω ότι το R-module M δέχεται σταθερά ελεύθερη επίλυση μήκους n:

$$0 \to P_n \to \cdots \to P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \to 0.$$

Αφού το P_0 είναι σταθερά ελεύθερο, τότε υπάρχει ένα πεπερασμένα γενόμενο ελεύθερο R-module F με το $P_0 \oplus F$ πεπερασμένα γενόμενο ελεύθερο.

Θεωρούμε την ακολουθία

$$0 \to P_n \to \cdots \to P_2 \xrightarrow{d_2'} P_1 \oplus F \xrightarrow{d_1 \oplus 1_F} P_0 \oplus F \xrightarrow{\varepsilon'} M \to 0 \qquad (s_1)$$

όπου
$$d_2' : p_2 \mapsto (d_2(p_2), 0)$$

$$d_1 \oplus 1_F : (p_1, f) \mapsto (d_1(p_0), f)$$

$$\varepsilon' : (p_0, f) \mapsto m = \varepsilon(p_0)$$

η οποία είναι ακριβής.

Θεωρούμε τον πυρήνα $ker\varepsilon'$, παραγοντοποιούμε την (s_1) στο επίπεδο του $P_0 \oplus F$ και λαμβάνουμε την σταθερά ελεύθερη επίλυση του $ker\varepsilon'$, μήκους $n-1$:

$$0 \to P_n \to \cdots \to P_2 \to P_1 \oplus F \to ker\varepsilon' \to 0.$$

Σημειώνουμε ότι ο $ker\varepsilon'$ είναι πεπερασμένα γενόμενο R-module, ως ομομορφική εικόνα του πεπερασμένα γενόμενου $P_1 \oplus F$. Η υπόθεση της επαγωγής μας εξασφαλίζει ότι ο $ker\varepsilon'$ δέχεται Π.Ε.Ε. μήκους $\leq n$. Συνδέουμε αυτήν την τελευταία Π.Ε.Ε. με την σύντομη ακριβή ακολουθία

$$0 \to ker\varepsilon' \to P_0 \oplus F \to M \to 0,$$

οπότε προκύπτει για το M μία Π.Ε.Ε. μήκους $\leq n + 1$. ■

2.3 Π.Ε.Ε. επί δακτυλίου Noether

2.3.1 Λήμμα. Έστω R δακτύλιος Noether και μία σύντομη ακριβής ακολουθία από R-modules

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0.$$

Αν δύο εκ των modules της ακολουθίας είναι πεπερασμένα γενόμενα, τότε και το τρίτο είναι πεπερασμένα γενόμενο.

Απόδειξη. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις.

1) Έστω ότι ένα εκ των δύο R-modules, που είναι πεπερασμένα γενόμενα, είναι το M. Τότε το $M'' \cong M/M'$, ως module-πηλίκο του πεπερασμένα γενόμενου M, είναι πεπερασμένα γενόμενο, ενώ το M', ως υποmodule του M επί δακτυλίου Noether, είναι και αυτό πεπερασμένα γενόμενο.
2) Αν τα M' και M'' είναι πεπερασμένα γενόμενα R-modules, τότε και το M είναι πεπερασμένα γενόμενο, αφού $M'' \cong M/M'$. ■

2.3.2 Λήμμα. Έστω R δακτύλιος Noether και M ένα πεπερασμένα γενόμενο R-module. Τότε υπάρχει μία προβολική επίλυση του M, της οποίας κάθε όρος είναι πεπερασμένα γενόμενο R-module.

Απόδειξη. Αφού, από υπόθεση, το M είναι πεπερασμένα γενόμενο, τότε υπάρχει ένα πεπερασμένα γενόμενο ελεύθερο R-module P_0 και ένας R-επιμορφισμός $\varepsilon: P_0 \to M$ (1.2.3) και έτσι η ακολουθία

$$0 \to ker\varepsilon \xrightarrow{i} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \to 0$$

είναι ακριβής.

Επειδή ο R είναι δακτύλιος Noether, τότε ο $ker\varepsilon$, ως υπομodule του P_0, είναι πεπερασμένα γενόμενο R-module. Οπότε, θα υπάρχει ένα πεπερασμένα γενόμενο ελεύθερο R-module P_1 και ένας R-επιμορφισμός $d_1: P_1 \to ker\varepsilon$.

Ορίζουμε $D_1: P_1 \to P_0$, ως τη σύνθεση id_1, όπου $i: ker\varepsilon \to P_0$, οπότε προκύπτει η ακριβής ακολουθία

$$0 \to kerD_1 \to P_1 \xrightarrow{D_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \to 0.$$

Ο $kerD_1$, ως υπομodule του P_1, είναι πεπερασμένα γενόμενο R-module. Έτσι, η παραπάνω κατασκευή μπορεί να συνεχιστεί και η απόδειξη ολοκληρώνεται επαγωγικά. ∎

2.3.3 Παρατηρήσεις.

- **i.** Στην ουσία, αποδεικνύοντας το λήμμα (2.3.2), προκύπτει ότι το M δέχεται ελεύθερη επίλυση από πεπερασμένα γενόμενα modules, η οποία, φυσικά, θα είναι και προβολική επίλυση.
- **ii.** Η απόδειξη του λήμματος (2.3.2) είναι η ίδια με την απόδειξη που μας εξασφαλίζει ότι κάθε module δέχεται προβολική, και ειδικότερα, ελεύθερη επίλυση (1.6.3). Η επιπλέον συνθήκη, το M να είναι πεπερασμένα γενόμενο, επιτρέπει το πρώτο ελεύθερο P_0 να επιλέγεται σαν πεπερασμένα γενόμενο και η συνθήκη ο R να είναι δακτύλιος Noether, επιτρέπει όλα τα modules που εμφανίζονται στην επίλυση να επιλέγονται ως πεπερασμένα γενόμενα.

2.3.4 Λήμμα. Έστω R δακτύλιος Noether και M ένα πεπερασμένα γενόμενο R-module, το οποίο δέχεται Π.Ε.Ε. μήκους $\leq n$. Τότε, ο n-συζυγής κάθε ελεύθερης επίλυσης του M, της οποίας όλοι οι όροι είναι πεπερασμένα γενόμενοι, είναι σταθερά ελεύθερο R-module.

Απόδειξη. Έστω M ένα πεπερασμένα γενόμενο R-module και

$$0 \to F_n \overset{d_n}{\to} F_{n-1} \to \cdots \to F_1 \overset{d_1}{\to} F_0 \overset{\varepsilon}{\to} M \to 0 \qquad (s_1)$$

μία Π.Ε.Ε. του M, μήκους $\leq n$. Θεωρούμε μία τυχούσα ελεύθερη επίλυση του M

$$\dots \to F'_{n+1} \overset{d'_{n+1}}{\longrightarrow} F'_n \overset{d'_n}{\to} F'_{n-1} \to \cdots \to F'_1 \overset{d'_1}{\to} F'_0 \overset{\varepsilon'}{\to} M \to 0 \qquad (s_2)$$

της οποίας κάθε όρος είναι πεπερασμένα γενόμενος. Θα δείξουμε ότι ο n- συζυγής της (s_2), $K'_n = kerd'_n$, είναι σταθερά ελεύθερο R-module.

Ο K'_n, ως υπομodule του πεπερασμένα γενόμενου F'_n, είναι πεπερασμένα γενόμενο, αφού ο R είναι δακτύλιος Noether. Επειδή η (s_1), ως Π.Ε.Ε. του M, είναι το πολύ μήκους n, έχουμε ότι ο n-συζυγής της, $K_n = kerd_n = \{0\}$. Περιορίζουμε την επίλυση (s_2) στο n-συζυγή $K'_n = kerd'_n$ και θεωρούμε την περιορισμένη επίλυση (1.6.4)

$$0 \to K'_n \overset{i'}{\to} F'_n \overset{d'_n}{\to} F'_{n-1} \to \cdots \to F'_1 \overset{d'_1}{\to} F'_0 \overset{\varepsilon'}{\to} M \to 0. \qquad (s_3)$$

Οι ακολουθίες (s_1) και (s_3) πληρούν τις προϋποθέσεις για να εφαρμοστεί το Γενικευμένο Λήμμα Schanuel (1.3.4) (τα F_j και F'_j $(j = 0,1,\dots,n)$ είναι ελεύθερα, άρα και προβολικά) για τους n-συζυγείς $K_n = kerd_n = \{0\}$ και $K'_n = kerd'_n$. Έτσι, θα έχουμε την ισομορφία ευθέων αθροισμάτων, πεπερασμένου πλήθους από πεπερασμένα γενόμενα ελεύθερα

$$\{0\} \oplus F'_n \oplus F_{n-1} \oplus \dots \cong K'_n \oplus F_n \oplus F'_{n-1} \oplus \dots,$$

από την οποία προκύπτει ότι ο K'_n είναι σταθερά ελεύθερο R-module. ■

2.3.5 Πρόταση. Έστω μία σύντομη ακριβής ακολουθία από R-modules

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0,$$

όπου ο R είναι δακτύλιος Noether. Αν δύο εκ των modules της ακολουθίας δέχονται Π.Ε.Ε., τότε και το τρίτο module δέχεται Π.Ε.Ε..

Απόδειξη. Έστω μία σύντομη ακριβής ακολουθία από R-modules

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0. \qquad (s)$$

Από την υπόθεση, δύο εκ των modules αυτής της ακολουθίας δέχονται Π.Ε.Ε., άρα θα είναι πεπερασμένα γενόμενα. Επειδή ο R είναι δακτύλιος Noether, τότε και το τρίτο είναι επίσης πεπερασμένα γενόμενο (2.3.1).

Θεωρούμε δύο τυχούσες ελεύθερες επιλύσεις (s_1) και (s_2), των M' και M'' αντίστοιχα, των οποίων όλοι οι όροι είναι πεπερασμένα γενόμενα R-modules (2.3.3 i.). Μέσω του λήμματος πετάλου, εισάγουμε την ελεύθερη επίλυση (s_3) του M, της οποίας οι όροι $F_i \cong F_i' \oplus F_i''$, για κάθε i (1.6.7).

Σχηματικά, έχουμε την ακριβή ακολουθία επιλύσεων:

$$\begin{array}{c}
0 \\
\downarrow \\
\ldots \to F_2' \xrightarrow{d_2'} F_1' \xrightarrow{d_1'} F_0' \xrightarrow{\varepsilon'} M' \to 0 \qquad (s_1) \\
\downarrow \\
\ldots \to F_2 \xrightarrow{d_2} F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \to 0 \qquad (s_3) \\
\downarrow \\
\ldots \to F_2'' \xrightarrow{d_2''} F_1'' \xrightarrow{d_1''} F_0'' \xrightarrow{\varepsilon''} M'' \to 0 \qquad (s_2) \\
\downarrow \\
0
\end{array}$$

που επάγει, για κάθε $n \geq 0$, σύντομη ακριβή ακολουθία των n-συζυγών των παραπάνω επιλύσεων

$$0 \to K_n' \to K_n \to K_n'' \to 0 \qquad (s_4)$$

όπου $K_n = kerd_n$, $K_n' = kerd_n'$ και $K_n'' = kerd_n''$ (1.6.7).

Από την υπόθεση, έχουμε ότι δύο εκ των modules της ακολουθίας (s) δέχονται Π.Ε.Ε. μήκους $\leq n$. Θα αποδειχθεί ότι και το τρίτο δέχεται Π.Ε.Ε..

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

1) Υποθέτουμε ότι ένα εκ των δύο modules που δέχονται Π.Ε.Ε. μήκους $\leq n$ είναι το M''.

   Τότε, από το λήμμα (2.3.4), έχουμε ότι, για κάποιο n, ο K_n'' είναι σταθερά ελεύθερο module, όπως επίσης και ένα εκ των K_n' και K_n. Επειδή ο K_n'' είναι σταθερά ελεύθερο, άρα προβολικό (2.1.2 iv.), η ακολουθία (s_4) διασπάται, δηλαδή

   $$K_n \cong K_n' \oplus K_n''.$$

   Επομένως, και το τρίτο module της (s_4) είναι σταθερά ελεύθερο. Συγκεκριμένα, το K_n είναι σταθερά ελεύθερο από (2.1.2 vi.), αντίστοιχα το K_n', από (2.1.2 viii.).
   Σε κάθε περίπτωση, περιορίζοντας στον πυρήνα την επίλυση, που δέχεται το τρίτο module της (s) από πεπερασμένα γενόμενα ελεύθερα, προκύπτει επίλυση από σταθερά ελεύθερα modules (2.1.2 ii.).
   Έτσι, λόγω της πρότασης (2.2.4), το τρίτο module της ακολουθίας (s) θα δέχεται Π.Ε.Ε..
2) Έστω ότι τα M' και M δέχονται Π.Ε.Ε. μήκους $\leq n$.
   Τότε, τα K_n και K_n' είναι σταθερά ελεύθερα modules (2.3.4).
   Περιορίζουμε την επίλυση (s_2), για $K_n'' = kerd_n''$, και προκύπτει η εξής ακριβής ακολουθία

   $$0 \to K_n'' \to F_n'' \to \cdots \to F_1'' \to F_0'' \to M'' \to 0$$

   την οποία συνδέουμε, στο K_n'', με την

   $$0 \to K_n' \to K_n \to K_n'' \to 0.$$

   Έτσι, προκύπτει η επίλυση του M''

   $$0 \to K_n' \to K_n \to F_n'' \to \cdots \to F_1'' \to F_0'' \to M'' \to 0,$$

της οποίας οι όροι είναι σταθερά ελεύθερα modules, αφού κάθε F_i'' $(i = 0,1, \dots, n)$ είναι πεπερασμένα γενόμενο ελεύθερο.

Από την πρόταση (2.2.4), έχουμε ότι το M'' δέχεται Π.Ε.Ε.. ■

2.3.6 Ορισμός. Ένα σύνολο από R-modules καλείται **οικογένεια** $\mathcal{F}$ (family), όταν για κάθε ακριβή ακολουθία

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0,$$

με τα δύο εκ των τριών modules να ανήκουν στην $\mathcal{F}$, και το τρίτο να ανήκει στην $\mathcal{F}$.

2.3.7 Παρατηρήσεις.

i. Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό και την πρόταση (2.3.5) αποδεικνύεται ότι το σύνολο των modules επί δακτυλίου Noether, τα οποία δέχονται Π.Ε.Ε., αποτελούν οικογένεια.

ii. Κάθε οικογένεια $\mathcal{F}$ από R-modules περιέχει το μηδενικό module. Πράγματι, αν $M \in \mathcal{F}$, τότε η ακολουθία

$$0 \to M \xrightarrow{1_M} M \to 0 \to 0$$

είναι ακριβής που σημαίνει ότι $\{0\} \in \mathcal{F}$.

Επίσης, για κάθε module που ανήκει στην $\mathcal{F}$, έχουμε ότι ανήκει και κάθε ισόμορφο του. Δηλαδή, αν $M \in \mathcal{F}$, τότε για την ακριβή ακολουθία

$$0 \to M' \xrightarrow{f} M \to 0 \to 0,$$

όπου f είναι ισομορφισμός του M επί του M', και $\{0\} \in \mathcal{F}$, από τον ορισμό της οικογένειας προκύπτει ότι $M' \in \mathcal{F}$.

iii. Κάθε τομή οικογενειών είναι οικογένεια. Πράγματι, θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{F}^* = \bigcap_a \mathcal{F}_a$, όπου κάθε $\mathcal{F}_a$ είναι οικογένεια. Αν

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

είναι μία ακριβής ακολουθία με δύο όρους της στο $\mathcal{F}^*$, τότε αυτοί οι δύο όροι ανήκουν σε κάθε $\mathcal{F}_a$. Αφού κάθε $\mathcal{F}_a$ είναι οικογένεια, τότε ο τρίτος όρος πρέπει να ανήκει σε κάθε $\mathcal{F}_a$, κατά συνέπεια και στο $\mathcal{F}^*$.

iv. Η ιδιότητα της τομής επιτρέπει, για κάθε σύνολο $\mathcal{X}$ από R-modules, να ορίσουμε την παραγόμενη οικογένεια $\mathcal{F}(\mathcal{X})$, ως την τομή όλων των οικογενειών που περιέχουν το $\mathcal{X}$. Η $\mathcal{F}(\mathcal{X})$ είναι η ελάχιστη δυνατή οικογένεια που περιέχει το $\mathcal{X}$.

2.3.8 Έστω $\mathcal{X}$ ένα σύνολο από R-modules, τέτοιο ώστε $\{0\} \in \mathcal{X}$. Ορίζουμε ως $\mathcal{C}(\mathcal{X})$ το σύνολο των R-modules που ικανοποιούν την ιδιότητα:

> «$M \in \mathcal{C}(\mathcal{X})$ τότε και μόνο τότε όταν το M είναι μέλος μίας σύντομης ακριβούς ακολουθίας από R-modules, της οποίας τα δύο άλλα μέλη ανήκουν στο $\mathcal{X}$».

2.3.9 Ισχύει ότι $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}(\mathcal{X})$. Πράγματι, έστω $M \in \mathcal{X}$. Η ακρίβεια της ακολουθίας

$$0 \to M \xrightarrow{1_M} M \to 0 \to 0,$$

δίδει ότι $M \in \mathcal{C}(\mathcal{X})$.

2.3.10 Ορίζουμε επαγωγικά την αύξουσα ακολουθία συνόλων $\mathcal{C}^n(\mathcal{X})$ από R-modules ως εξής:

$$\mathcal{C}^0(\mathcal{X}) = \mathcal{X}$$

$$\mathcal{C}^1(\mathcal{X}) = \mathcal{C}(\mathcal{X})$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{C}^{n+1}(\mathcal{X}) = \mathcal{C}\big(\mathcal{C}^n(\mathcal{X})\big).$$

$$\vdots$$

2.3.11 Πρόταση. Ισχύει ότι $\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{C}^n(\mathcal{X}) = \mathcal{F}(\mathcal{X})$.

Απόδειξη. Κάθε οικογένεια που περιέχει το $\mathcal{X}$, περιέχει και το $\mathcal{C}(\mathcal{X})$. Επομένως, επαγωγικά, περιέχει κάθε $\mathcal{C}^n(\mathcal{X})$, άρα και την ένωσή τους, δηλαδή $\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{C}^n(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{X})$.

Αρκεί λοιπόν, για να έχουμε τελικώς ισότητα, να δείξουμε ότι η ένωση $\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{C}^n(\mathcal{X})$ αποτελεί οικογένεια που περιέχει το $\mathcal{X}$. Έστω

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0,$$

μία σύντομη ακριβής ακολουθία της οποίας δύο όροι ανήκουν στην ένωση $\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{C}^n(\mathcal{X})$. Τότε, υπάρχει κάποιο $n \geq 0$, για το οποίο το $\mathcal{C}^n(\mathcal{X})$ περιέχει αυτούς τους δύο όρους και άρα ο τρίτος όρος της ακολουθίας ανήκει στο $\mathcal{C}^{n+1}(\mathcal{X})$. Έτσι, η ένωση $\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{C}^n(\mathcal{X})$ είναι οικογένεια. ■

2.3.12 Πρόταση. Έστω R δακτύλιος Noether και $\mathcal{X}$ ένα σύνολο από R-modules, τα οποία δέχονται Π.Ε.Ε.. Τότε κάθε R-module, που ανήκει στην οικογένεια $\mathcal{F}(\mathcal{X})$, δέχεται Π.Ε.Ε..

Απόδειξη. Αν $M \in \mathcal{F}(\mathcal{X})$, τότε υπάρχει ελάχιστος φυσικός $n \geq 0$ με $M \in \mathcal{C}^n(\mathcal{X})$. Θα αποδείξουμε ότι το M δέχεται Π.Ε.Ε., με επαγωγή επί του n.

Αν $n = 0$, τότε το $M \in \mathcal{X}$ και άρα το M δέχεται Π.Ε.Ε., από υπόθεση.

Έστω $n > 0$. Για το επαγωγικό βήμα, έστω ότι το $M \in \mathcal{C}^n(\mathcal{X})$ ανήκει σε σύντομη ακριβή ακολουθία, της οποίας οι άλλοι δύο όροι βρίσκονται στο $\mathcal{C}^{n-1}(\mathcal{X})$. Από την επαγωγική υπόθεση, αυτοί οι δύο όροι δέχονται Π.Ε.Ε.. Επομένως (2.3.5), το M δέχεται Π.Ε.Ε.. ■

2.4 Θεώρημα Serre

2.4.1 Ορισμός. Έστω M ένα R-module. Ένα υποσύνολο $X \subseteq M$ είναι **κλειστό ως προς τον εξωτερικό πολλαπλασιασμό** (scalar closed) αν $x \in X$ συνεπάγεται ότι $rx \in X$, για όλα τα $r \in R$.

Κάθε υποmodule ενός module M (όπως και το ίδιο το M), είναι προφανώς κλειστό ως προς τον εξωτερικό πολλαπλασιασμό.

2.4.2 Ορισμός. Έστω X ένα υποσύνολο ενός R-module M, κλειστό ως προς τον εξωτερικό πολλαπλασιασμό. Τότε:

- Ο **μηδενιστής** (annihilator) **του $\boldsymbol{x}$** $\in X$ είναι το σύνολο

$$ann(x) = \{r \in R : rx = 0\}.$$

- Ο **μηδενιστής του $\boldsymbol{X}$** είναι το σύνολο

$$ann(X) = \{r \in R : rx = 0 \ \forall x \in X\}.$$

και

- $\mathcal{A}(X) = \{ann(x) : x \in X \ \kappa\alpha\iota \ x \neq 0\}$.

2.4.3 Παρατήρηση. Τα σύνολα $ann(x)$ και $ann(X)$ είναι ιδεώδη του R και το $\mathcal{A}(X)$ είναι σύνολο ιδεωδών του R.

2.4.4 Λήμμα. Έστω R δακτύλιος Noether, M ένα μη μηδενικό R-module και $\emptyset \neq X \neq \{0\}$ ένα υποσύνολο του M, κλειστό ως προς τον εξωτερικό πολλαπλασιασμό. Τότε κάθε maximal στοιχείο του $\mathcal{A}(X)$, είναι πρώτο ιδεώδες του R.

Απόδειξη. Επειδή υποθέσαμε ότι $\emptyset \neq X \neq \{0\}$, έχουμε ότι το σύνολο $\mathcal{A}(X) \neq \emptyset$ και δεδομένου ότι ο R είναι δακτύλιος Noether, περιέχει maximal στοιχείο. Έστω $x \in X$ τέτοιο ώστε το ιδεώδες $I = ann(x)$ να είναι maximal στοιχείο του $\mathcal{A}(X)$. Θα δείξουμε ότι το I είναι πρώτο ιδεώδες του δακτυλίου R.

Έστω $a, b \in R$ με $ab \in I$ και $b \notin I$. Θα δείξουμε ότι $a \in I$. Έχουμε ότι

$$I \subseteq I + Ra \subseteq ann(bx).$$

Επειδή το σύνολο X είναι κλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό, το ιδεώδες $ann(bx) \in \mathcal{A}(X)$. Έτσι, αν $a \notin I$, θα είχαμε ότι $I \subsetneq I + Ra$, κατά συνέπεια αντίφαση με την maximal ιδιότητα του I. Άρα το $a \in I$, δηλαδή το I είναι πρώτο ιδεώδες του R. ■

2.4.5 Λήμμα. Έστω R δακτύλιος Noether και $\{0\} \neq M$ ένα πεπερασμένα γενόμενο R-module. Υπάρχει μία ακολουθία από υπομodules

$$\{0\} = M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots \subseteq M_n = M$$

τέτοια ώστε τα modules-πηλίκο $M_{i+1}/M_i \cong R/p_{i+1}$ $(i = 0,1, \dots, n-1)$, όπου κάθε p_i είναι πρώτο ιδεώδες του R.

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το λήμμα (2.4.4), για $X = M$, θεωρώντας στοιχείο $x_1 \in M$ τέτοιο ώστε το $p_1 = ann(x_1)$ να είναι maximal στοιχείο του συνόλου $\mathcal{A}(M)$ και επομένως πρώτο ιδεώδες του R. Έστω $M_1 = \langle x_1 \rangle$ το κυκλικό υπομodule του M που παράγεται από το x_1. Έχουμε

$$M_1 \cong R/ann(x_1) = R/p_1.$$

Συνεχίζουμε, εφαρμόζοντας το (2.4.4), για $X = M/M_1$, επιλέγοντας στοιχείο $x_2 + M_1 \in M/M_1$, τέτοιο ώστε το ιδεώδες $p_2 = ann(x_2 + M_1)$ να είναι maximal στοιχείο του συνόλου $\mathcal{A}(M/M_1)$ και πρώτο ιδεώδες του R. Έτσι, θέτουμε $M_2 = \langle x_1, x_2 \rangle$ το υπομodule του M που παράγεται από τα x_1, x_2. Έχουμε ότι

$$M/M_1 \supseteq M_2/M_1 = \langle x_2 + M_1 \rangle \cong R/ann(x_2 + M_1) = R/p_2.$$

Επειδή το module M είναι πεπερασμένα γενόμενο επί δακτυλίου Noether, η παραπάνω διαδικασία, που επαναλαμβανόμενη μας δίνει την εξής ακολουθία από υπομodules του M

$$\{0\} \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots \subseteq M_i \subseteq M_{i+1} \subseteq \cdots$$

δεν μπορεί παρά να δώσει για κάποιο δείκτη n, $M_n = M$. ■

2.4.6 Θεώρημα. Έστω R δακτύλιος Noether. Αν κάθε πεπερασμένα γενόμενο R-module δέχεται Π.Ε.Ε., τότε κάθε πεπερασμένα γενόμενο $R[x]$-module δέχεται Π.Ε.Ε..

Απόδειξη. Η απόδειξη του θεωρήματος χωρίζεται σε τρία στάδια.

(I) Έστω $\mathcal{X}$ το σύνολο όλων των πεπερασμένα γενόμενων $R[x]$-modules, της μορφής $M \cong R[x] \otimes_R B$, όπου B κάποιο πεπερασμένα γενόμενο R-module (1.5.9). Θα δείξουμε ότι τα στοιχεία του $\mathcal{X}$ δέχονται Π.Ε.Ε..

Από υπόθεση, το B δέχεται Π.Ε.Ε., δηλαδή υπάρχει μία R-ακριβής ακολουθία

$$0 \to F_m \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to B \to 0$$

στην οποία όλα τα F_i $(i = 0,1, \dots, m)$ είναι πεπερασμένα γενόμενα ελεύθερα R-modules. Αφού ο $R[x]$ είναι επίπεδο R-module (1.5.7), πολλαπλασιάζοντας τανυστικά την παραπάνω ακριβή ακολουθία με τον ακριβή συναρτητή $R[x] \otimes_R \_$, προκύπτει η εξής $R[x]$-ακριβής ακολουθία (1.5.4 iii.)

$$0 \to R[x] \otimes_R F_m \to \cdots \to R[x] \otimes_R F_1 \to R[x] \otimes_R F_0 \to R[x] \otimes_R B \to 0.$$

Κάθε $R[x] \otimes_R F_i$ $(i = 0,1, \dots, m)$ είναι πεπερασμένα γενόμενο ελεύθερο $R[x]$-module (1.5.9) και έτσι έχουμε ότι το M δέχεται Π.Ε.Ε.. Συμπεραίνουμε ότι, κάθε module που ανήκει στο $\mathcal{X}$ δέχεται Π.Ε.Ε..

Αρκεί να αποδείξουμε ότι, κάθε πεπερασμένα γενόμενο $R[x]$-module ανήκει στο σύνολο $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathcal{X})$, και έτσι από την πρόταση (2.3.12), θα δέχεται Π.Ε.Ε..

(II) Θεωρούμε ένα τυχόν πεπερασμένα γενόμενο $R[x]$-module M. Το M είναι και R-module, αφού ο R είναι υποδακτύλιος του $R[x]$. Υποθέτουμε ότι

$$ann(M) \cap R \neq \{0\},$$

όπου το σύνολο $ann(M) \cap R$ είναι ιδεώδες του R. Έστω $0 \neq m \in M$ και $ann(m)$, ο μηδενιστής του m. Ισχύει ότι

$$\{0\} \neq ann(M) \cap R \subseteq ann(m) \cap R$$

και έτσι θέτουμε

$$I = ann(m) \cap R \neq \{0\}.$$

Τότε, θα έχουμε

$$R/I \cong \langle m \rangle_R = \{rm : r \in R\},$$

όπου το $\langle m\rangle_R$ είναι κυκλικό R-υπomodule του M (1.2.2). Αφού ο $R[x]$ είναι επίπεδο R-module, πολλαπλασιάζοντας τανυστικά τη σύντομη ακριβή ακολουθία

$$0 \to I \to R \to R/I \to 0$$

με τον ακριβή συναρτητή $R[x]\otimes_R\_$, προκύπτει η εξής σύντομη ακριβής ακολουθία από $R[x]$-modules

$$0 \to R[x]\otimes_R I \to R[x]\otimes_R R \to R[x]\otimes_R R/I \to 0.$$

Επειδή $R[x]\otimes_R R \cong R[x]$ (1.5.1) και $R/I \cong \langle m\rangle_R$, έχουμε ότι

$$0 \to R[x]\otimes_R I \to R[x] \to R[x]\otimes_R \langle m\rangle_R \to 0. \qquad (s_1)$$

Έχουμε την ισομορφία $R[x]\otimes_R I \cong R[x]I$ (1.5.8), με $R[x]I \neq \{0\}$, αφού $I \neq \{0\}$.

Άρα η ακολουθία (s_1) γράφεται ως

$$0 \to R[x]I \to R[x] \to R[x]\otimes_R \langle m\rangle_R \to 0 \qquad (s_2)$$

και λόγω της ακρίβειας της έχουμε ότι

$$R[x]/R[x]I \cong R[x]\otimes_R \langle m\rangle_R \cong \langle m_1\rangle_{R[x]},$$

δηλαδή το $R[x]\otimes_R \langle m\rangle_R$ είναι ένα κυκλικό $R[x]$-υπomodule, που παράγεται από κάποιο $m_1 \in M$. Οπότε το $\langle m_1\rangle \in \mathcal{X} \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{X})$.

Η ακολουθία (s_2) τώρα γίνεται

$$0 \to R[x]I \to R[x] \to \langle m_1\rangle_{R[x]} \to 0.$$

Από την ακρίβεια της (s_2), έχουμε ότι

$$ann(m_1) \cong R[x]I \neq \{0\}.$$

Επίσης, έχουμε ότι $R[x]I \cap R \neq \{0\}$, γιατί $I = ann(m) \cap R \neq \{0\}$. Λόγω των παραπάνω, τελικά προκύπτει ότι

$$ann(m_1) \cap R \neq \{0\}.$$

Επαναλαμβάνουμε την παραπάνω διαδικασία στο module-πηλίκο $M/\langle m_1\rangle$. Έτσι, υπάρχει κάποιο $m_2+\langle m_1\rangle \in M/\langle m_1\rangle$, τέτοιο ώστε $ann(m_2+\langle m_1\rangle)\cap R \neq \{0\}$

και $\langle m_1, m_2\rangle/\langle m_1\rangle \in \mathcal{X}$. Οπότε $\langle m_1, m_2\rangle \in \mathcal{F}(\mathcal{X})$ και

$$ann(\langle m_1, m_2\rangle)\cap R \neq \{0\}.$$

Λόγω του Hilbert (1.4.6), ο δακτύλιος $R[x]$ είναι Noether, οπότε το M, ως πεπερασμένα γενόμενο $R[x]$-module είναι module Noether (1.4.4 iv.) και έτσι, κάθε αύξουσα ακολουθία από υποmodules του M είναι στάσιμη (1.4.2). Γι' αυτό το λόγο, η παραπάνω διαδικασία θα λήξει. Καταλήγουμε ότι:

αν ισχύει $ann(M)\cap R \neq \{0\}$, τότε το $M \in \mathcal{F}(\mathcal{X})$.

(III) Λόγω του (2.4.5), το M δέχεται ακολουθία από υποmodules

$$\{0\} = M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots \subseteq M_{r-1} \subseteq M_r = M \qquad (s')$$

με $M_{i+1}/M_i \cong R[x]/p_{i+1}$ ($i = 0,1,\dots,r-1$), όπου p_i πρώτο ιδεώδες του $R[x]$. Αν, λοιπόν, δείξουμε ότι τα modules της μορφής $R[x]/p_i$ ανήκουν στην $\mathcal{F}(\mathcal{X})$, τότε αποδεικνύεται ότι όλα τα modules της (s') ανήκουν στην $\mathcal{F}(\mathcal{X})$. Πράγματι, αν $M_1 \cong R[x]/p_1 \in \mathcal{F}(\mathcal{X})$ και $M_2/M_1 \cong R[x]/p_2 \in \mathcal{F}(\mathcal{X})$, τότε, από την ακρίβεια της ακολουθίας

$$0 \to M_1 \to M_2 \to M_2/M_1 \to 0$$

έχουμε ότι και το $M_2 \in \mathcal{F}(\mathcal{X})$, αφού το $\mathcal{F}(\mathcal{X})$ είναι οικογένεια και η απόδειξη ολοκληρώνεται επαγωγικά.

Έστω $\{0\} \neq p$ πρώτο ιδεώδες του $R[x]$, με

$$ann(R[x]/p)\cap R = \{0\}.$$

Θα δείξουμε ότι $R[x]/p \in \mathcal{F}(\mathcal{X})$.

Επειδή το p είναι πρώτο ιδεώδες του $R[x]$, έχουμε ότι $ann(R[x]/p) = p$. Επομένως $p \cap R = \{0\}$ και η τομή αυτή είναι ένα πρώτο ιδεώδες του υποδακτυλίου R του $R[x]$. Κατά συνέπεια, ο R όπως και ο $R[x]$ είναι ακέραιες περιοχές.

Θεωρούμε το σώμα Q των κλασμάτων του R. Το ιδεώδες p, επειδή ο δακτύλιος $R[x]$ είναι Noether, είναι πεπερασμένα γενόμενο, έστω $p = (g_1, \dots, g_n)$. Επιλέγουμε εντός του p ένα μη μηδενικό πολυώνυμο f, ελαχίστου δυνατού βαθμού. Θα δείξουμε ότι

$$ann(p/(f)) \cap R \neq \{0\},$$

οπότε, σαν συνέπεια του προηγούμενου βήματος της απόδειξης, θα έχουμε ότι $p/(f) \in \mathcal{F}(\mathcal{X})$.

Εκτελούμε, εντός του $Q[x]$, τον αλγόριθμο διαίρεσης των g_j διά του f $(j = 1, \dots, n)$ [7, σελ. 255]

$$g_j = fq_j + r_j,$$

με $q_j, r_j \in Q[x]$ και $deg r_j < deg f$.

Απαλείφουμε τους παρονομαστές των συντελεστών των πολυωνύμων q_j και r_j και καταλήγουμε στις σχέσεις, για κάθε $j = 1, \dots, n$,

$$a_j g_j = g_j' = fq_j' + r_j',$$

όπου $0 \neq a_j \in R$, $q_j', r_j' \in R[x]$ και $deg r_j' = deg r_j < deg f$.

Επειδή το f έχει επιλεγεί να είναι ελαχίστου βαθμού εντός του p, το υπόλοιπο $r_j' = 0$, για κάθε $j = 1, \dots, n$, και έτσι, προκύπτουν οι σχέσεις

$$a_j g_j = fq_j' .$$

Δηλαδή, έχουμε ότι $a_j g_j \in (f)$, για κάθε $j = 1, \dots, n$.

Θεωρούμε το στοιχείο $0 \neq a = \prod_{j=1}^{n} a_j \in R$. Προφανώς το μη μηδενικό αυτό στοιχείο $a \in ann(p/(f))$, οπότε

$$ann(p/(f)) \cap R \neq 0.$$

Έτσι, έχουμε ότι $p/(f) \in \mathcal{F}(\mathcal{X})$.

Επειδή ο $R[x]$ είναι ακέραια περιοχή, έχουμε την R-ισομορφία $(f) \cong R[x]$, επομένως $(f) \in \mathcal{F}(\mathcal{X})$ (1.5.1). Έτσι, από την ακρίβεια της ακολουθίας

$$0 \to (f) \to p \to p/(f) \to 0,$$

μαζί με το ότι $p/(f) \in \mathcal{F}(\mathcal{X})$, όπως αποδείχτηκε, προκύπτει ότι $p \in \mathcal{F}(\mathcal{X})$ (2.3.5).

Τέλος, από την ακρίβεια της ακολουθίας

$$0 \to p \to R[x] \to R[x]/p \to 0$$

και δεδομένου ότι $p, R[x] \in \mathcal{F}(\mathcal{X})$, έχουμε ότι $R[x]/p \in \mathcal{F}(\mathcal{X})$. ■

Με την απόδειξη του θεωρήματος (2.4.6), το επόμενο θεώρημα που οφείλεται στον Serre, προκύπτει σχεδόν άμεσα.

2.4.7 Θεώρημα. (Serre) Αν k είναι σώμα, τότε κάθε πεπερασμένα γενόμενο προβολικό $k[x_1, \dots, x_m]$-module είναι σταθερά ελεύθερο.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε ότι, αν k είναι σώμα, τότε κάθε πεπερασμένα γενόμενο $k[x_1, \dots, x_m]$-module δέχεται Π.Ε.Ε., και αυτό θα γίνει με επαγωγή στο πλήθος $m \geq 1$ των μεταβλητών του πολυωνυμικού δακτυλίου $k[x_1, \dots, x_m]$. Κατά συνέπεια, θα έχουμε ότι κάθε πεπερασμένα γενόμενο προβολικό $k[x_1, \dots, x_{m+1}]$-module δέχεται Π.Ε.Ε., άρα θα είναι σταθερά ελεύθερο (2.2.3).

Για $m = 1$, θεωρούμε ένα πεπερασμένα γενόμενο $k[x_1]$-module P. Το P γράφεται ως πηλίκο ενός πεπερασμένα γενόμενου ελεύθερου $k[x_1]$-module F_0 και έτσι υπάρχει μία σύντομη ακριβής ακολουθία

$$0 \to F_1 \xrightarrow{i} F_0 \xrightarrow{p} P \to 0.$$

Επειδή το k είναι σώμα, ο δακτύλιος $k[x_1]$ είναι κύριος. Έτσι, το F_1, ως υπομodule του πεπερασμένα γενόμενου ελεύθερου F_0, είναι και αυτό πεπερασμένα γενόμενο ελεύθερο (1.4.5). Άρα το P δέχεται Π.Ε.Ε. μήκους ≤ 1.

Έστω $m > 1$. Υποθέτουμε ότι κάθε πεπερασμένα γενόμενο $k[x_1, \dots, x_m]$-module δέχεται Π.Ε.Ε..

Αφού το k είναι σώμα, τότε ο δακτύλιος $R = k[x_1, \dots, x_m]$ είναι Noether (1.4.7). Από την επαγωγή, κάθε πεπερασμένα γενόμενο R-module δέχεται Π.Ε.Ε., και έτσι από το θεώρημα (2.4.6), για τον δακτύλιο $R[x_{m+1}] = k[x_1, \dots, x_{m+1}]$, έχουμε ότι κάθε πεπερασμένα γενόμενο $k[x_1, \dots, x_{m+1}]$-module δέχεται Π.Ε.Ε.. ■

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Θεώρημα Quillen-Suslin

[8, σελ. 203-210] , [7, σελ. 138-145]

3.1 Μονομετρική ιδιότητα δακτύλιου

3.1.1 Ορισμός. Θεωρούμε το ελεύθερο R-module R^n, βαθμού n. Ένα στοιχείο $\alpha = (a_1, \dots , a_n) \in R^n$ καλείται **μονομετρική στήλη** (unimodular column) όταν υπάρχουν $b_i \in R, i = 1, \dots , n$, τέτοια ώστε

$$a_1 b_1 + \dots + a_n b_n = 1.$$

Με άλλα λόγια, τα στοιχεία $a_1, \dots , a_n \in R$, τα οποία καλούνται μονομετρικά (unimodular elements), παράγουν το μοναδιαίο ιδεώδες του δακτυλίου R, δηλαδή τον δακτύλιο R.

3.1.2 Παρατηρήσεις.

i. Από τη θεωρία οριζουσών πινάκων με συντελεστές επί ενός δακτυλίου R και μέσω του τύπου του γινομένου

$$det(AB) = det(A)det(B)$$

που εξακολουθεί να ισχύει, όπως και στην κλασική γραμμική άλγεβρα (όπου οι συντελεστές ανήκουν σε σώμα) [1, σελ. 453,456] , είναι γνωστό ότι ένας πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν η ορίζουσα του, $det(A)$, είναι αντιστρέψιμο στοιχείο του R. Συμβολίζουμε με $GL(n, R)$, το σύνολο των αντιστρέψιμων $n \times n$ πινάκων, με στοιχεία από το δακτύλιο R.

ii. Η πρώτη στήλη $\alpha = [a_{i1}]$ $(1 \leq i \leq n)$ ενός αντιστρέψιμου πίνακα $M = [a_{ij}]$, με $a_{ij} \in R$ $(1 \leq i, j \leq n)$ είναι πάντα μονομετρική. Πράγματι, αφού ο M είναι αντιστρέψιμος, ισχύει ότι $det(M) = u$, όπου το u είναι αντιστρέψιμο στοιχείο του R. Από το ανάπτυγμα κατά την πρώτη στήλη προκύπτει ότι

$$det(M) = u = \sum_i a_{i1} d_i,$$

δηλαδή, η ορίζουσα του M γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων της πρώτης στήλης του M. Έτσι, έχουμε ότι $\sum_i a_{i1}(u^{-1}d_i) = 1$, άρα το $\alpha = M\varepsilon_1$ είναι μονομετρική στήλη.

3.1.3 Ορισμός. Ένας δακτύλιος R έχει την **μονομετρική ιδιότητα** (unimodular column property) εάν, για κάθε n, κάθε μονομετρική στήλη είναι η πρώτη στήλη κάποιου $n \times n$ αντιστρέψιμου πίνακα με στοιχεία από τον R.

3.1.4 Πρόταση. Αν κάθε πεπερασμένα γενόμενο προβολικό R-module είναι ελεύθερο, τότε ο δακτύλιος R έχει την μονομετρική ιδιότητα.

Απόδειξη. Θεωρούμε το ελεύθερο R-module R^n και $\alpha = (a_1, \dots, a_n) \in R^n$, μία μονομετρική στήλη του . Θα δείξουμε ότι υπάρχει βάση του R^n που περιέχει σαν στοιχείο της το α.

Αφού το $\alpha \in R^n$ είναι μονομετρική στήλη, τότε, εξ' ορισμού, υπάρχουν $b_i \in R$ $(i = 1, \dots, n)$ ώστε $\sum_{i=1}^n a_i b_i = 1$. Ορίζουμε τον ομομορφισμό

$$\varphi: R^n \to R$$

$$\text{μέσω } (r_1, \dots, r_n) \mapsto \sum_{i=1}^n r_i b_i.$$

Όπως ορίστηκε η φ, έχουμε ότι $\varphi(\alpha) = 1$, δηλαδή η φ είναι επιμορφισμός. Έτσι , υπάρχει μία ακριβής ακολουθία

$$0 \to K \xrightarrow{i} R^n \xrightarrow{\varphi} R \to 0,$$

όπου $K = ker\varphi$. Αφού ο R, ως R-module, είναι ελεύθερο άρα προβολικό, η παραπάνω σύντομη ακριβής ακολουθία διασπάται και ορίζεται μονομορφισμός $\theta: R \to R^n$ μέσω της $\theta(r) = r\alpha$, για κάθε $r \in R$, που ικανοποιεί τη σχέση $\varphi \circ \theta = id_R$. Έτσι, προκύπτει η εξής διάσπαση (1.1.4)

$$R^n = i(K) \oplus \theta(R) = K \oplus \langle \alpha \rangle. \qquad (*)$$

Το R-module K, ως ευθύς προσθετέος του πεπερασμένα γενόμενου ελεύθερου R^n, είναι πεπερασμένα γενόμενο προβολικό και, λόγω της υπόθεσης της πρότασης, είναι ελεύθερο. Στη σχέση $(*)$, όλα τα modules είναι ελεύθερα, επομένως $rank(K) = n - 1$ (αφού ο R είναι αντιμεταθετικός, όλες οι βάσεις του ελεύθερου module έχουν τον ίδιο πληθάριθμο (1.2.4)). Λόγω της ανάλυσης $(*)$, καταλήγουμε ότι υπάρχει βάση B του R^n, που περιέχει σαν στοιχείο την μονομετρική στήλη α, δηλαδή $B = \{\alpha\} \cup B'$, όπου B' είναι βάση του ελεύθερου K. Θεωρούμε $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$, την κανονική βάση του R^n και ορίζουμε ισομορφισμό

$$T: R^n \to R^n,$$

τέτοιος ώστε $T\varepsilon_1 = \alpha$. Ο πίνακας M του ισομορφισμού T, ως προς την βάση $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$, είναι αντιστρέψιμος και έχει ως πρώτη στήλη την μονομετρική $\alpha = M\varepsilon_1$. ■

3.1.5 Το αντίστροφο της πρότασης (3.1.4), δεν ισχύει γενικά, εξαρτάται από τον δακτύλιο επί του οποίου ορίζονται τα modules. Για παράδειγμα, υπάρχουν προβολικά modules επί του δακτυλίου $\mathbb{Z}_6$, τα οποία δεν είναι ελεύθερα, αλλά ο $\mathbb{Z}_6$ ικανοποιεί την ιδιότητα μονομετρικής στήλης.

3.1.6 Πρόταση. Αν ένας δακτύλιος R έχει την μονομετρική ιδιότητα, τότε κάθε σταθερά ελεύθερο R-module P είναι ελεύθερο.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι το $P \oplus R$ είναι ελεύθερο. Θα αποδείξουμε ότι το P είναι ελεύθερο και η απόδειξη ολοκληρώνεται με επαγωγή στο βαθμό του ελεύθερου συμπληρώματος του P.

Έστω ότι $rank(P \oplus R) = n$, δηλαδή $P \oplus R \cong R^n$, για κάποιο n, $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ η κανονική βάση του R^n και π η προβολή του $P \oplus R$ επί του R. Επειδή η π είναι επί, υπάρχει $\alpha = (a_1, \dots, a_n) \in R^n$ τέτοιο ώστε

$$1 = \pi(\alpha) = \pi(a_1\varepsilon_1 + \cdots + a_n\varepsilon_n) = a_1\pi(\varepsilon_1) + \cdots + a_n\pi(\varepsilon_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i\pi(\varepsilon_i).$$

Κατά συνέπεια, το α είναι μία μονομετρική στήλη, άρα υπάρχει $n \times n$ αντιστρέψιμος πίνακας M που την έχει σαν πρώτη στήλη (3.1.3). Έστω ότι $M = (\alpha, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$, δηλαδή $\alpha = M\varepsilon_1$. Ορίζουμε τον ομομορφισμό $T: R^n \to R^n$, θέτοντας $T(\varepsilon_i) = M\varepsilon_i$ $(1 \leq i \leq n)$, επί των στοιχείων της βάσης και επί όλου του R^n μέσω γραμμικής επέκτασης. Ο T είναι προφανώς ισομορφισμός.

Θέτουμε $\pi(\alpha_j) = \lambda_j \in R$, για $2 \leq j \leq n$, και θεωρούμε τον πίνακα M' που έχει σαν στήλες τις

$$M' = (\alpha, \alpha'_2 = \alpha_2 - \lambda_2\alpha, \alpha'_3 = \alpha_3 - \lambda_3\alpha, \dots, \alpha'_n = \alpha_n - \lambda_n\alpha).$$

Ο πίνακας M' είναι και αυτός αντιστρέψιμος και, για $2 \leq j \leq n$, έχουμε

$$\pi(\alpha'_j) = \pi(\alpha_j - \lambda_j\alpha) = \pi(\alpha_j) - \lambda_j\pi(\alpha) = \pi(\alpha_j) - \lambda_j = 0.$$

Ο ισομορφισμός T' που ικανοποιεί τις σχέσεις

$$T'(\varepsilon_i) = M'\varepsilon_i \ (1 \leq i \leq n),$$

ικανοποιεί και τη σχέση

$$T'(\langle \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n \rangle) \subseteq ker\pi = P. \qquad (*)$$

Θα δείξουμε ότι ο περιορισμός T^*, του T' στο υπομodule $\langle \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n \rangle$, μας δίνει την ισομορφία $\langle \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n \rangle \cong P$, απ' όπου θα έχουμε ότι το P είναι ελεύθερο. Ο T^* είναι μονομορφισμός, ως περιορισμός του μονομορφισμού T'. Μας μένει να δείξουμε ότι ο T^* είναι επί του P. Έστω $\beta \in P$. Το β είναι εικόνα κάποιου στοιχείου $r_1\varepsilon_1 + r_2\varepsilon_2 + \dots + r_n\varepsilon_n \in R^n$ μέσω του T'. Έχουμε

$$\beta = T'(r_1\varepsilon_1 + r_2\varepsilon_2 + \dots + r_n\varepsilon_n) = r_1T'(\varepsilon_1) + \dots + r_nT'(\varepsilon_n)$$

με $T'(\varepsilon_i) \in P$, για $i \geq 2$. Άρα, και το $r_1T'(\varepsilon_1) \in P$, όμως $r_1T'(\varepsilon_1) = r_1\alpha \in \langle \alpha \rangle$ και η τομή $P \cap \langle \alpha \rangle = \{0\}$. Άρα, πράγματι, $\beta \in imT^*$, ο T^* είναι επί και έτσι το P είναι ελεύθερο. ■

3.1.7 Γνωρίζουμε ότι κάθε πεπερασμένα γενόμενο ελεύθερο R-module είναι σταθερά ελεύθερο (2.1.2 ii.). Με την πρόταση (3.1.6), αποδείχθηκε ότι αν ο δακτύλιος R έχει την μονομετρική ιδιότητα, τότε ισχύει και το αντίστροφο.

3.2 Θεώρημα Quillen-Suslin

Στη συνέχεια, σκοπός μας είναι να σκιαγραφήσουμε τον τρόπο με τον οποίο αποδεικνύεται το Θεώρημα Quillen-Suslin, σύμφωνα με την μέθοδο του Suslin. Η επόμενη πρόταση (3.2.1) αναφέρεται χωρίς απόδειξη.

3.2.1 Πρόταση. [8, σελ. 208] Έστω B ακέραια περιοχή και $R = B[y]$. Θεωρούμε μία μονομετρική στήλη $\alpha(y) = \big(a_1(y), \dots, a_n(y)\big) \in R^n$ της οποίας τουλάχιστον μία εκ των συντεταγμένων της είναι μονικό πολυώνυμο. Τότε

$$\alpha(y) = M(y)\beta,$$

όπου $M(y) \in GL(n, R)$ και β είναι μονομετρική στήλη επί του B.

3.2.2 Στην πρόταση (3.2.1), η μονομετρική στήλη β είναι ανεξάρτητη της μεταβλητής y, πράγμα που καθιστά δυνατή επαγωγική απόδειξη επί του πλήθους των μεταβλητών πολυωνυμικού δακτυλίου στο επόμενο θεώρημα.

3.2.3 Θεώρημα. Αν k είναι σώμα, τότε ο δακτύλιος $k[x_1, \dots, x_m]$ έχει την μονομετρική ιδιότητα.

Απόδειξη. Το θεώρημα θα αποδειχθεί με επαγωγή στο πλήθος $m \geq 1$ των μεταβλητών του πολυωνυμικού δακτυλίου $R = k[x_1, \dots, x_m]$, όπου το k είναι σώμα.

Για $m = 1$, ο δακτύλιος $k[x_1]$ είναι κύριος και έτσι κάθε πεπερασμένα γενόμενο προβολικό $k[x_1]$-module είναι ελεύθερο (1.4.5). Άρα, από την πρόταση (3.1.4), ο $k[x_1]$ έχει την μονομετρική ιδιότητα.

Υποθέτουμε ότι ο πολυωνυμικός δακτύλιος $k[x_1, \dots, x_{m-1}]$ με συντελεστές από σώμα k, έχει την μονομετρική ιδιότητα.

Για το επαγωγικό βήμα, θεωρούμε $\alpha = (a_1, \dots, a_n)$ μία μονομετρική στήλη επί του $k[x_1, \dots, x_m]$. Υποθέτουμε ότι $a_1 \neq 0$. Οπότε, λόγω του αποτελέσματος της Noether (1.4.8), έχουμε ότι $a_1 = ra_1'$, όπου το $r \in k$ και το $a_1' \in k[y_1, \dots, y_{m-1}][y]$ είναι μονικό πολυώνυμο ως προς y (με τα y και y_i, για $1 \leq i \leq m-1$, όπως ορίζονται στο (1.4.8)). Το $r \in k$ είναι μη μηδενικό, αλλιώς θα είχαμε $a_1 = 0$ και επειδή το k είναι σώμα, το r είναι αντιστρέψιμο. Έτσι, χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $a_1 = a_1'$, δηλαδή το a_1 είναι μονικό.

Έτσι, από την πρόταση (3.2.1), έχουμε ότι

$$\alpha = M\beta,$$

όπου $M \in GL(n, k[x_1, \dots, x_m])$ και το β είναι μονομετρική στήλη επί του $B = k[y_1, \dots, y_{m-1}]$. Από την επαγωγική υπόθεση, ο B έχει την μονομετρική ιδιότητα, έτσι ώστε $\beta = N\varepsilon_1$ για κάποιο $N \in GL(n, B)$. Όμως $MN \in GL(n, k[x_1, \dots, x_m])$, επειδή $B \subseteq k[x_1, \dots, x_m]$, και άρα

$$\alpha = (MN)\varepsilon_1,$$

δηλαδή το α είναι η πρώτη στήλη κάποιου αντιστρέψιμου πίνακα επί του $k[x_1, \dots, x_m]$. Έτσι, ο δακτύλιος $k[x_1, \dots, x_m]$ έχει την μονομετρική ιδιότητα. ■

3.2.4 Έστω P ένα πεπερασμένα γενόμενο προβολικό $k[x_1, \dots, x_m]$-module. Από το Θεώρημα Serre (2.4.7), έχουμε ότι το P είναι σταθερά ελεύθερο. Ο δακτύλιος $k[x_1, \dots, x_m]$, όπου το k είναι σώμα, έχει την μονομετρική ιδιότητα, όπως αποδείχθηκε στο θεώρημα (3.2.3). Κατά συνέπεια, το σταθερά ελεύθερο $k[x_1, \dots, x_m]$-module P είναι ελεύθερο, λόγω της πρότασης (3.1.6).

Συνοψίζοντας τα παραπάνω, διατυπώνουμε το Θεώρημα Quillen-Suslin.

3.2.5 Θεώρημα. (Quillen-Suslin) Αν k είναι σώμα, τότε κάθε πεπερασμένα γενόμενο προβολικό $k[x_1, \dots, x_m]$-module είναι ελεύθερο.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] Artin, M. (1991) . *Algebra* . Prentice Hall.

[2] Dummit, D. S., Foote, R. M. (2004). *Abstract Algebra*. 3rd ed. John Wiley & Sons, Inc.

[3] Kaplansky, I. (1974). *Commutative Rings*. Rev. ed. The University of Chicago Press.

[4] Lam, T.Y. (2006). *Serre's Problem on Projective Modules*. Springer-Verlag.

[5] Lang, S. (2002). *Algebra*. Rev. 3rd ed. Springer-Verlag.

[6] Rotman, J.J. (2010). *Advanced Modern Algebra*. 2nd ed. American Mathematical Society.

[7] Rotman, J.J. (1979). *An Introduction to Homological Algebra*. Academic Press.

[8] Rotman, J. J. (2009).*An Introduction to Homological Algebra*. 2nd ed.Springer.

[9] Wagstaff, S.S. (2009). *Homological Algebra Notes*. University of Fargo North Dakota - Department of Mathematics.