ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ & ΑΕΡΟΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Χρήση Μεθόδων Συνοριακών Στοιχείων και
Τοπικών Ολοκληρωτικών Εξισώσεων χωρίς
Διακριτοποίηση για την Αριθμητική Επίλυση
Προβλημάτων Κυματικής Διάδοσης σε
Εφαρμογές Μη-Καταστροφικού Ελέγχου

Συγγραφέας:
Βασίλειος Βαβουράκης

Επιβλέπων Καθηγητής:
Δημοσθένης Πολύζος

15 Νοεμβρίου 2006

Στους γονείς μου και στην αδερφή μου

Η παρούσα διδακτορική διατριβή υποστηρίχθηκε από τον υποψήφιο διδάκτορα κ. Βασίλειο Βαβουράκη στις 15 Νοεμβρίου 2006 ενώπιον της επταμελούς εξεταστικής επιτροπής, αποτελούμενη από τους κ.κ. Δημοσθένη Πολύζο (Καθηγητή του Τμήματος Μηχανολόγων και Αεροναυπηγών Μηχανικών του Πανεπιστημίου Πατρών), Θεόδωρο Φιλίππιδη (Αναπληρωτή Καθηγητή του Τμήματος Μηχανολόγων και Αεροναυπηγών Μηχανικών του Πανεπιστημίου Πατρών), Ευάγγελο Δερματά (Επίκουρο Καθηγητή του Τμήματος Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας Υπολογιστών του Πανεπιστημίου Πατρών), Δημήτριο Μπέσκο (Καθηγητή του Τμήματος Πολιτικών Μηχανικών του Πανεπιστημίου Πατρών), Δημήτριο Σαραβάνο (Αναπληρωτή Καθηγητή του Τμήματος Μηχανολόγων και Αεροναυπηγών Μηχανικών του Πανεπιστημίου Πατρών), Βασίλειο Κωστόπουλο (Καθηγητή του Τμήματος Μηχανολόγων και Αεροναυπηγών Μηχανικών του Πανεπιστημίου Πατρών) και Σπήλιο Φασόη (Καθηγητή του Τμήματος Μηχανολόγων και Αεροναυπηγών Μηχανικών του Πανεπιστημίου Πατρών). Η επταμελής εξεταστική επιτροπή ορίστηκε σύμφωνα με την υπ' αριθμό 1/26-9-2006 συνεδρίαση της Γενικής Συνέλευσης με την Ειδική Σύνθεση του Τμήματος Μηχανολόγων και Αεροναυπηγών Μηχανικών του Πανεπιστημίου Πατρών.

Περίληψη

Ο στόχος της παρούσας διδακτορικής διατριβής είναι διττός: η ανάπτυξη και η εφαρμογή αριθμητικών τεχνικών για την επίλυση προβλημάτων που εμπίπτουν στην περιοχή του Μη-Καταστροφικού Ελέγχου. Συγκεκριμένα αναπτύχθηκαν η Μέθοδος των Συνοριακών Στοιχείων (ΜΣΣ) και η Μέθοδος των Τοπικών Ολοκληρωτικών Εξισώσεων χωρίς Διακριτοποίηση για την αριθμητική ανάλυση στατικών και μεταβατικών προβλημάτων στο πεδίο της ελαστικότητας και της αλληλεπίδρασης ελαστικού με ακουστικό μέσο στις δύο διαστάσεις. Σημαντικό μέρος της διδακτορικής διατριβής αποτέλεσε η ανάπτυξη προγράμματος ηλεκτρονικού υπολογιστή, το οποίο επιλύει τα προβλήματα στα οποία πραγματεύεται το παρόν σύγγραμμα.

Η διδακτορική διατριβή αποτελείται από τρεις ενότητες. Στην πρώτη ενότητα γίνεται πλήρης περιγραφή της απαραίτητης θεωρίας για την κάλυψη και κατανόηση των αριθμητικών ΜΣΣ αλλά και των Τοπικών Μεθόδων χωρίς Διακριτοποίηση (ΤΜΧΔ). Στη δεύτερη ενότητα εφαρμόζονται οι προαναφερθείσες αριθμητικές μέθοδοι για την επίλυση στατικών και δυναμικών (στο πεδίο συχνοτήτων) διδιάστατων προβλημάτων, ώστε να πιστοποιηθεί η ακρίβεια και η αξιοπιστία των εν λόγω μεθοδολογιών. Τέλος, στην τρίτη ενότητα οι αριθμητικές ΜΣΣ και ΤΜΧΔ εφαρμόζονται για την επίλυση προβλημάτων κυματικής διάδοσης που εμπίπτουν στο πεδίο του Μη-Καταστροφικού Ελέγχου. Πιο συγκεκριμένα μελετήθηκε η κυματική διάδοση σε ελεύθερες επίπεδες πλάκες και σε κυλινδρικές δεξαμενές αποθήκευσης υγρών καυσίμων.

Abstract

The aim of this doctoral thesis is twofold: the development and implementation of numerical techniques for solving wave propagation problems in Non-Destructive Testing applications. Particularly, the Boundary Element Method (BEM) and the Local Boundary Integral Equation Method are developed, so as to numerically solve static and transient problems on the field of elasticity and fluid-structure interaction in two dimensions. A major part of the present research is the construction of a computer program for solving such kind of problems.

This textbook consists of three sections. In the first section, a thorough description on the theory of the BEM and the Local Meshless Methods (LMM) is done. The second section is dedicated for the numerical implementation of the BEM and LMM for solving steady state and time-harmonic two dimensional elastic and acoustic problems, in order to verify the accuracy and the ability of the proposed methodologies to solve the above-mentioned problems. Finally in the third section, the wave propagation problems of traction-free plates and cylindrical fuel storage tanks is studied, from the perspective of Non-Destructive Testing. The numerical methods of BEM and LMM are implemented, as well as spectral methods are utilized, for drawing useful conclusions on the wave propagation phenomena.

Ευχαριστήρια

Πρώτα από όλα επιθυμώ να ευχαριστήσω από καρδιάς το μέντορά μου και συνάνθρωπο κ. Δημοσθένη Πολύζο, Καθηγητή του Πανεπιστημίου Πατρών, για την αμέριστη στήριξή του στα δύσκολα χρόνια των μεταπτυχιακών μου σπουδών. Η παρούσα διδακτορική διατριβή φέρει πέρα την προσωπική μου εργασία και τη δικιά του υπογραφή.

Θερμές ευχαριστίες θα ήθελα να εκφράσω στο διδάκτορα Ευριπίδη Σελλούντο που είχα την τιμή και τη μεγάλη χαρά να συνεργαστώ τα πρώτα τρία χρόνια της διδακτορικής μου διατριβής. Οι οδηγητήριες γραμμές που μου έδωσε καθώς και οι συμβουλές του ήταν καθοριστικές για την θετική πορεία μου ως υποψήφιος διδάκτορας.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω το διδάκτορα Στέφανο Τσινόπουλο για τη στενή συνεργασία μας καθ' όλη τη διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών. Η θερμή του διάθεση να με βοηθήσει όποτε του το ζήτησα είναι κάτι που το εκτίμησα ιδιαίτερα.

Τις ειλικρινείς μου ευχαριστίες θα ήθελα να εκφράσω σε αυτό το σημείο στον υποψήφιο διδάκτορα κ. Βασίλη Πρωτόπαππα και στον Καθηγητή του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων κ. Δημήτρη Φωτιάδη για την ευχάριστη και δημιουργική συνεργασία που πραγματοποιήθηκε στα τέλη της διδακτορικής μου διατριβής, καθώς και για την φιλοξενία τους κατά την παραμονή στην πόλη των Ιωαννίνων. Αποτέλεσμα αυτής της γόνιμης συνεργασίας είναι μια εργασία που πρόκειται να δημοσιευτεί σύντομα σε διεθνές έγκριτο περιοδικό.

Επιπλέον θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου στην Γενική Γραμματεία Έρευνας και Τεχνολογίας, στο Ερευνητικό Ινστιτούτο Χημικής Μηχανικής και Χημικών Διεργασιών Υψηλής Θερμοκρασίας (ΕΙΧΗΜΥΘ-ΙΤΕ) καθώς και στην εταιρία ENVIROCOUSTICS A.E. για την οικονομική υποστήριξη που μου παρείχαν ως μεταπτυχιακός υπότροφος κατά τη διάρκεια των σπουδών μου στο πλαίσιο του ερευνητικού προγράμματος ΠΕΝΕΔ 2001.

Τέλος θα ήθελα να εκφράσω τις προσωπικές μου ευχαριστίες στους γονείς μου, στην αδερφή μου Κατερίνα, στους φίλους και στις φίλες μου που με στήριξαν όλα αυτά τα χρόνια, η βοήθειά τους ήταν ανεκτίμητη.

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	1
1.1	Η χρήση των αριθμητικών μεθόδων στο Μη-Καταστροφικό Έλεγχο	2
1.2	Οι Τοπικές Μέθοδοι χωρίς Διακριτοποίηση	3
1.3	Δομή του διδακτορικού συγγράμματος	6
1.4	Πρωτότυπα στοιχεία της διατριβής	7
1.5	Περί μαθηματικών συμβολισμών	8
1.6	Μερικά λόγια για το πρόγραμμα Ηλεκτρονικού Υπολογιστή	9
2	Μέθοδος Συνοριακών Στοιχείων	21
2.1	Γραμμικό ελαστικό μέσο στις δύο διαστάσεις	21
2.1.1	Ολοκληρωτική εξίσωση γραμμικού ελαστοστατικού μέσου	23
2.1.2	Ολοκληρωτική εξίσωση δυναμικής γραμμικής ελαστικότητας στο πεδίο συχνοτήτων	26
2.2	Ακουστικό μέσο στις δύο διαστάσεις	29
2.2.1	Ολοκληρωτική εξίσωση ακουστικού μέσου σε μόνιμη κατάσταση	29
2.2.2	Ολοκληρωτική εξίσωση σε ακουστικό μέσο στο πεδίο συχνοτήτων	30
2.3	Συναρτήσεις παρεμβολής και γεωμετρικοί μετασχηματισμοί	32
2.4	Αριθμητική εφαρμογή της Μεθόδου των Συνοριακών Στοιχείων	35
3	Τοπικές Μέθοδοι χωρίς Διακριτοποίηση	47
3.1	Μέθοδοι προσέγγισης και παρεμβολής του πεδίου	48
3.1.1	Μέθοδος Κινουμένων Ελαχίστων Τετραγώνων	48
3.1.2	Μέθοδος Κινουμένων Ελαχίστων Τετραγώνων με Προσέγγιση Συνθηκών Συνέπειας	52
3.1.3	Μέθοδος Παρεμβολής Σημείων με Βάση Ακτινικών Συναρτήσεων	54
3.1.4	Αναπαράσταση του άγνωστου πεδίου	57
3.1.5	Τεχνική εφαρμογής των συνοριακών συνθηκών	58
3.2	Τοπική Μέθοδος Petrov-Galerkin χωρίς Διακριτοποίηση	59
3.2.1	Τοπική Μέθοδος Petrov-Galerkin χωρίς Διακριτοποίηση πρώτου τύπου	62

3.2.2	Τοπική Μέθοδος Petrov-Galerkin χωρίς Διακριτοποίηση τέταρτου τύπου	63
3.2.3	Τοπική Μέθοδος Petrov-Galerkin χωρίς Διακριτοποίηση πέμπτου τύπου	66
3.2.4	Τοπική Μέθοδος Petrov-Galerkin χωρίς Διακριτοποίηση έκτου τύπου	67
3.3	Μέθοδος Τοπικών Ολοκληρωτικών Εξισώσεων χωρίς Διακριτοποίηση	68
3.3.1	Μέθοδος Τοπικών Ολοκληρωτικών Εξισώσεων χωρίς Διακριτοποίηση πρώτου τύπου	70
3.3.2	Μέθοδος Τοπικών Ολοκληρωτικών Εξισώσεων χωρίς Διακριτοποίηση δεύτερου τύπου	70
3.3.3	Μέθοδος Τοπικών Ολοκληρωτικών Εξισώσεων χωρίς Διακριτοποίηση τρίτου τύπου	71
3.3.4	Μέθοδος Τοπικών Ολοκληρωτικών Εξισώσεων χωρίς Διακριτοποίηση τέταρτου τύπου	73
3.4	Αριθμητική εφαρμογή των Τοπικών Μεθόδων χωρίς Διακριτοποίηση	75
3.5	Παρατηρήσεις	79
4	Εφαρμογή και πιστοποίηση της Μεθόδου των Συνοριακών Στοιχείων και των Τοπικών Μεθόδων χωρίς Διακριτοποίηση	85
4.1	Προβλήματα μόνιμης κατάστασης	85
4.1.1	Αριθμητικά παραδείγματα σε ακουστικό μέσο	87
4.1.2	Αριθμητικά παραδείγματα σε ελαστικό μέσο	94
4.1.3	Επίδραση του κύκλου επιρροής στα αριθμητικά αποτελέσματα των Τοπικών Μεθόδων χωρίς Διακριτοποίηση	104
4.1.4	Υπολογιστικός χρόνος	110
4.2	Προβλήματα στο πεδίο συχνοτήτων	112
5	Εφαρμογή της Μεθόδου των Συνοριακών Στοιχείων και των Τοπικών Μεθόδων χωρίς Διακριτοποίηση σε προβλήματα Μη-Καταστροφικού Ελέγχου	121
5.1	Εύρεση των καμπυλών διασκόρπισης σε κυματοδηγούς	121
5.1.1	Εύρεση καμπυλών διασκόρπισης με τη φασματική μέθοδο ανάλυσης Fourier	125
5.1.2	Εύρεση καμπυλών διασκόρπισης μέσω της Αναπαράστασης Χρόνου-Συχνότητας	134
5.2	Διάδοση κυματικών διαταραχών σε δεξαμενές αποθήκευσης υγρών καυσίμων	152
6	Σύνοψη	199
6.1	Γενικά συμπεράσματα	199
6.2	Προτάσεις για μελλοντική έρευνα	201

A	Αριθμητικές ολοκληρώσεις	205
A.1	Ολοκλήρωση κατά προσέγγιση	205
A.2	Αριθμητικός υπολογισμός των ολοκληρωμάτων επιφάνειας και όγκου	206
A.2.1	Υπολογισμός επιφανειακού ολοκληρώματος στο Γ ή σε τμήμα αυτού	206
A.2.2	Υπολογισμός επιφανειακού ολοκληρώματος στο $\partial\Omega_{(\kappa)}$. . .	215
A.2.3	Υπολογισμός ολοκληρώματος όγκου στο χωρίο $\Omega_{(\kappa)}$	217
B	Συνοριακά Στοιχεία	225
B.1	Μερικά εισαγωγικά στοιχεία	225
B.2	Στοιχείο 2LL: συναρτήσεις μορφής και παράγωγοι	226
B.3	Στοιχείο 3QL: συναρτήσεις μορφής και παράγωγοι	227
B.4	Στοιχείο 3LT: συναρτήσεις μορφής και παράγωγοι	229
B.5	Στοιχείο 6QT: συναρτήσεις μορφής και παράγωγοι	231
B.6	Τμηματοποίηση του στοιχείου τριγώνου	233
B.6.1	Τρίγωνο 1	234
B.6.2	Τρίγωνο 2	236
B.6.3	Τρίγωνο 3	236
B.6.4	Τρίγωνο 4	237
B.6.5	Τρίγωνο 5	238
B.6.6	Τρίγωνο 6	238
Γ	Συναρτήσεις βάρους για τις μεθόδους προσέγγισης και παρεμβολής	241
Γ.1	Συναρτήσεις βάρους για τη Μέθοδο Κινουμένων Ελαχίστων Τετραγώνων	241
Γ.2	Ακτινικές συναρτήσεις για τη Μέθοδο Τοπικής Επιρροής με Βάση Ακτινικών Συναρτήσεων	242
Γ.3	Ακτινικές συναρτήσεις για τη Μέθοδο Παρεμβολής Σημείων με Βάση Ακτινικών Συναρτήσεων	244
Δ	Ανάλυση Φάσματος και Χρόνου-Συχνότητας	249
Δ.1	Ανάλυση φάσματος μέσω του μετασχηματισμού Fourier	249
Δ.2	Αναπαράσταση Χρόνου-Συχνότητας	253
Ε	Αποτελέσματα κυματικής διάδοσης στη δεξαμενή αποθήκευσης καυσίμων	259
E.1	Κυματομορφές αριθμητικής προσομοίωσης πειράματος Ακουστικής Εκπομπής	259

Κατάλογος Σχημάτων

1.1	(α') Διάτρητη επίπεδη πλάκα υπό ομοιόμορφη μονοαξονική φόρτιση και διακριτοποίηση του τέταρτου αυτής σύμφωνα με (β') τη Μέθοδο Πεπερασμένων Στοιχείων, (γ') τη Μέθοδο Συνοριακών Στοιχείων, (δ') τις Τοπικές Μεθόδους χωρίς Διακριτοποίηση.	4
2.1	Ελαστικό σώμα όγκου Ω που περικλείεται από το σύνορο Γ	22
2.2	Σημείο του συνόρου Γ που παρουσιάζει γωνία.	24
2.3	Μετασχηματισμός συνοριακών στοιχείων (α') γραμμής και (β') τριγώνου από γενικές (x_i) σε τοπικές (ζ_i) συντεταγμένες.	32
2.4	Γενική μορφή σώματος με δύο περιοχές ελαστικού μέσου (Ω_{e1} και Ω_{e2}) με διεπιφάνεια Γ_i	37
2.5	Γενική μορφή συνεχούς ελαστικού μέσου (Ω_e) και ακουστικού μέσου (Ω_a) με διεπιφάνεια Γ_i	38
3.1	Τοπικά χωρία ολοκλήρωσης ή/και επιρροής σχήματος (α') κύκλου και (β') τετραγώνου.	48
3.2	Οι κύκλοι των πεδίων επιρροής $\tilde{\Omega}_{(j)}$ των γειτονικών κόμβων $\mathbf{x}^{(j)}$ που εμπεριέχουν το σημείο $\mathbf{y}$ στο διδιάστατο χώρο.	49
3.3	Προσέγγιση του πεδίου στο μονοδιάστατο χώρο, όπου φαίνεται η διαφορά της πραγματικής τιμής u_i και της φανταστικής τιμής $\tilde{u}_i$ του πεδίου για κάθε i κόμβο.	51
3.4	Γενική μορφή συνεχούς μέσου όγκου Ω με σύνορο Γ , και τοπικά χωρία ολοκλήρωσης $\Omega_{(\kappa)}$ με κυκλική περιφέρεια $\partial\Omega_{(\kappa)}$, όπου $\Gamma_{(\kappa)} = \Gamma \cap \partial\Omega_{(\kappa)}$	61
3.5	(α') Τομές του χωρίου ολοκλήρωσης $\Omega_{(\kappa)}$ του σημείου πηγής K από τους κύκλους επιρροής $\tilde{\Omega}_{(j)}$ των γειτονικών κόμβων όταν το σημείο ολοκλήρωσης Q βρίσκεται (β') στο γενικό σύνορο, (γ') στο τοπικό σύνορο $\partial\Omega_{(\kappa)}$ και (δ') στο εσωτερικό του τοπικού χωρίου $\Omega_{(\kappa)}$	77
4.1	(α') Πρόβλημα 1, 2, (β') πρόβλημα 3 και (γ') πρόβλημα 4 που περιγράφονται από τη μερική διαφορική εξίσωση Laplace, (δ') πρόβλημα 5 που περιγράφεται από τη μερική διαφορική εξίσωση Poisson. . . .	86

4.2	Πλέγμα 89 ομοιόμορφα κατανεμημένων κόμβων στο τετράγωνο χω- ρίο με τοποθέτηση τους (α') στο σύνορο και στο εσωτερικό και (β') εντός και εκτός του χωρίου ανάλυσης.	87
4.3	Νόρμα σχετικού σφάλματος της πίεσης στο πρόβλημα 1, υπολογισμέ- νη για τα τρία διαφορετικά πλέγματα και συγκρινόμενη για διάφορες αριθμητικές μεθόδους.	88
4.4	Νόρμα σχετικού σφάλματος της πίεσης στο πρόβλημα 2, υπολογισμέ- νη για τα τρία διαφορετικά πλέγματα και συγκρινόμενη για διάφορες αριθμητικές μεθόδους.	89
4.5	Νόρμα σχετικού σφάλματος της πίεσης στο πρόβλημα 3, υπολογισμέ- νη για τα τρία διαφορετικά πλέγματα και συγκρινόμενη για διάφορες αριθμητικές μεθόδους.	91
4.6	Πλέγμα ενός τεταρτημορίου του κυλίνδρου με κατανομή 176 κόμβων (α') στο σύνορο και στο εσωτερικό του καθώς και (β') στο εσωτερικό και εξωτερικό του χωρίου ανάλυσης.	92
4.7	Νόρμα σχετικού σφάλματος της θερμοκρασίας στο πρόβλημα 4, υπο- λογισμένη για τα τρία διαφορετικά πλέγματα και συγκρινόμενη για διάφορες αριθμητικές μεθόδους.	93
4.8	Νόρμα σχετικού σφάλματος της πίεσης στο πρόβλημα που περιγρά- φεται από τη μερική διαφορική εξίσωση Poisson, υπολογισμένη για τα τρία διαφορετικά πλέγματα και συγκρινόμενη για διάφορες αριθ- μητικές μεθόδους.	94
4.9	(α') Πρόβλημα 1, (β') πρόβλημα 2, (γ') πρόβλημα 3, (δ') πρόβλημα 4 κυλίνδρου υπό εσωτερική πίεση, (ε') πρόβλημα 5 πακτωμένης δοκού και (ς') πρόβλημα 6 διάτρητης πλάκας υπό εφελκυσμό.	95
4.10	Νόρμα σχετικού σφάλματος των μετατοπίσεων στο πρόβλημα 1, υπο- λογισμένη για τα τρία διαφορετικά πλέγματα και συγκρινόμενη για διάφορες αριθμητικές μεθόδους.	96
4.11	Νόρμα σχετικού σφάλματος των μετατοπίσεων στο πρόβλημα 2, υπο- λογισμένη για τα τρία διαφορετικά πλέγματα και συγκρινόμενη για διάφορες αριθμητικές μεθόδους.	97
4.12	Νόρμα σχετικού σφάλματος των μετατοπίσεων στο πρόβλημα 3, υπο- λογισμένη για τα τρία διαφορετικά πλέγματα και συγκρινόμενη για διάφορες αριθμητικές μεθόδους.	98
4.13	Νόρμα σχετικού σφάλματος των μετατοπίσεων στο πρόβλημα του κυλίνδρου υπό ομοιόμορφη εσωτερική πίεση, υπολογισμένη για τα τρία διαφορετικά πλέγματα και συγκρινόμενη για διάφορες αριθμητι- κές μεθόδους.	99
4.14	Ομοιόμορφη κατανομή (α') 223 και (β') 225 κόμβων στη γεωμετρία της πακτωμένης δοκού.	100
4.15	Νόρμα σχετικού σφάλματος των μετατοπίσεων στο πρόβλημα της πακτωμένης δοκού, υπολογισμένη για τα τρία διαφορετικά πλέγματα και συγκρινόμενη για διάφορες αριθμητικές μεθόδους.	101

4.16	Πλέγμα (α') 153 συνοριακών, εσωτερικών κόμβων και (β') 155 εσωτερικών, εξωτερικών κόμβων διατεταγμένων στο ένα τέταρτο της επίπεδης πλάκας με οπή.	102
4.17	Νόρμα σχετικού σφάλματος των μετατοπίσεων στο πρόβλημα της διάτρητης πλάκας σε εφελκυσμό, υπολογισμένη για τα τρία διαφορετικά πλέγματα και συγκρινόμενη για διάφορες αριθμητικές μεθόδους.	103
4.18	Νόρμα σχετικού σφάλματος των μετατοπίσεων στο πρόβλημα 3 στατικού ακουστικού μέσου για διάφορες ακτίνες του κύκλου επιρροής $\tilde{\Omega}_{(\kappa)}$ με σταθερό κύκλο ολοκλήρωσης $\Omega_{(\kappa)}$ όταν χρησιμοποιείται (α') η MKET και (β') η ΜΠΣΒΑΣ.	105
4.19	Νόρμα σχετικού σφάλματος των μετατοπίσεων στο πρόβλημα 1 ακουστικού μέσου για διάφορες ακτίνες του κύκλου επιρροής $\tilde{\Omega}_{(\kappa)}$ με σταθερό κύκλο ολοκλήρωσης $\Omega_{(\kappa)}$ όταν χρησιμοποιείται (α') η MKET και (β') η ΜΠΣΒΑΣ.	107
4.20	Νόρμα σχετικού σφάλματος των μετατοπίσεων στο πρόβλημα 2 ελαστικού μέσου για διάφορες ακτίνες του κύκλου επιρροής $\tilde{\Omega}_{(\kappa)}$ με σταθερό κύκλο ολοκλήρωσης $\Omega_{(\kappa)}$ όταν χρησιμοποιείται (α') η MKET και (β') η ΜΠΣΒΑΣ.	108
4.21	Νόρμα σχετικού σφάλματος των μετατοπίσεων στο πρόβλημα 3 ελαστικού μέσου για διάφορες ακτίνες του κύκλου επιρροής $\tilde{\Omega}_{(\kappa)}$ με σταθερό κύκλο ολοκλήρωσης $\Omega_{(\kappa)}$ όταν χρησιμοποιείται (α') η MKET και (β') η ΜΠΣΒΑΣ.	109
4.22	Καταναλισκόμενος υπολογιστικός χρόνος για το ελαστοστατικό πρόβλημα 3 ως συνάρτηση της ακτίνας επιρροής όταν χρησιμοποιείται (α') η Μέθοδος Κινουμένων Ελαχίστων Τετραγώνων και (β') η Μέθοδος Παρεμβολής Σημείων με Βάση Ακτινικών Συναρτήσεων.	111
4.23	(α') Πλέγμα 49 ομοιόμορφα κατανεμημένων κόμβων στο ορθογώνιο χωρίο με τοποθέτησή τους στο σύνορο και στο εσωτερικό του (β') απόκριση στο πεδίο συχνοτήτων του υλικού σημείου με γεωμετρική θέση (3 cm, 1.5 cm) για το πρόβλημα 1.	113
4.24	(α') Πλέγμα 125 ομοιόμορφα κατανεμημένων κόμβων στο τετράγωνο χωρίο με τοποθέτησή τους στο σύνορο και στο εσωτερικό του (β') απόκριση στο πεδίο συχνοτήτων του υλικού σημείου με γεωμετρική θέση (0.5 cm, 0.5 cm) για το πρόβλημα 2.	115
4.25	(α') Πλέγμα 83 ομοιόμορφα κατανεμημένων κόμβων στο τέταρτο του κυλίνδρου με τοποθέτησή τους στο σύνορο και στο εσωτερικό του χωρίου και (β') απόκριση στο πεδίο συχνοτήτων του υλικού σημείου με γεωμετρική θέση (0.495 cm, 0.495 cm) για το πρόβλημα 3.	117
5.1	(α') Γεωμετρία ελεύθερης επίπεδης πλάκας και (β') μία τομή αυτής.	122
5.2	Τρόποι διάδοσης των συμμετρικών και αντισυμμετρικών τρόπων διάδοσης (α') των οριζόντιων και (β') των κάθετων μετατοπίσεων.	123

5.3	(α') Διάγραμμα $(f-1/\lambda)$ των καμπυλών διασκόρπισης ελεύθερης επίπεδης χαλύβδινης πλάκας πάχους $d = 6\text{mm}$ και (β') αδιάστατο διάγραμμα $(f d/c_s - d/\lambda)$	124
5.4	(α') Διδιάσταση ελεύθερη επίπεδη πλάκα με εφαρμογή στο δεξί άκρο δυναμικής φόρτισης και (β') λεπτομέρεια του τρόπου διακριτοποίησης του συνόρου με στοιχεία για τη ΜΣΣ.	126
5.5	(α') Κρουστική συνάρτηση διέγερσης τύπου Dirac και (β') πλάτος του φάσματος στο πεδίο συχνοτήτων μετά από μετασχηματισμό Fourier.	127
5.6	(α') Σύγκριση των θεωρητικών καμπυλών διασκόρπισης (παχιές γραμμές) με τις αριθμητικά παραγόμενες καμπύλες διασκόρπισης (ισοϋψείς λεπτές γραμμές) και (β') τρισδιάστατο διάγραμμα των αριθμητικών αποτελεσμάτων της ελεύθερης επίπεδης πλάκας.	129
5.7	(α') Γεωμετρία ελεύθερης επίπεδης πλάκας με ορθογωνική επιφανειακή απώλεια υλικού και (β') μία τομή αυτής.	131
5.8	(α') Γεωμετρία ελεύθερης επίπεδης πλάκας με ημι-ελλειπτική επιφανειακή απώλεια υλικού και (β') μία τομή αυτής.	131
5.9	(α') Σύγκριση των θεωρητικών καμπυλών διασκόρπισης (παχιές γραμμές) με τις αριθμητικά παραγόμενες καμπύλες διασκόρπισης (ισοϋψείς λεπτές γραμμές) και (β') τρισδιάστατο διάγραμμα των αριθμητικών αποτελεσμάτων της ελεύθερης επίπεδης πλάκας με ορθογωνική επιφανειακή απώλεια υλικού.	132
5.10	(α') Σύγκριση των θεωρητικών καμπυλών διασκόρπισης (παχιές γραμμές) με τις αριθμητικά παραγόμενες καμπύλες διασκόρπισης (ισοϋψείς λεπτές γραμμές) και (β') τρισδιάστατο διάγραμμα των αριθμητικών αποτελεσμάτων της ελεύθερης επίπεδης πλάκας με ημι-ελλειπτική επιφανειακή απώλεια υλικού.	133
5.11	(α') Τομή της ελεύθερης επίπεδης πλάκας που παρουσιάζει επιφανειακή εγχοπή, με λεπτομέρεια στην εφαρμογή του οριζόντιου τασικού φορτίου στο χείλος της εγχοπής και (β') τρόπος διακριτοποίησης του συνόρου και του εσωτερικού της πλάκας.	136
5.12	Αναπαράσταση Χρόνου-Συχνότητας και απόκριση της (α') u_1 , (β') u_2 συνιστώσας των μετατοπίσεων του σημείου Α και αντίστοιχα της (γ') u_1 , (δ') u_2 συνιστώσας των μετατοπίσεων του σημείου Β για το πρόβλημα της ελεύθερης πλάκας που παρουσιάζει ατέλεια μορφής εγχοπής, υπό κρουστικό τασικό φορτίο.	137
5.13	Τομή της ελεύθερης επίπεδης πλάκας που παρουσιάζει ατέλεια οριζόντιου ελλειψοειδούς εγκλείσματος, με λεπτομέρεια στην εφαρμογή του κάθετου τασικού φορτίου στα δύο άκρα της ατέλειας.	138
5.14	Αναπαράσταση Χρόνου-Συχνότητας και απόκριση της (α') u_1 , (β') u_2 συνιστώσας των μετατοπίσεων του σημείου Α και αντίστοιχα της (γ') u_1 , (δ') u_2 συνιστώσας των μετατοπίσεων του σημείου Β για το πρόβλημα της ελεύθερης πλάκας που παρουσιάζει ατέλεια μορφής οριζόντιου ελλειπτικού εγκλείσματος, υπό κρουστικό τασικό φορτίο.	139

5.15	Τομή της ελεύθερης επίπεδης πλάκας που αλληλεπιδρά με το ρευστό (πετρέλαιο) όταν παρουσιάζει ατέλεια υπό μορφή (α') επιφανειακής εγχοπής και (β') οριζόντιου ελλειφοειδούς εγκλείσματος.	141
5.16	Αναπαράσταση Χρόνου-Συχνότητας και απόκριση της (α') u_1 , (β') u_2 συνιστώσας των μετατοπίσεων του σημείου Α και αντίστοιχα της (γ') u_1 , (δ') u_2 συνιστώσας των μετατοπίσεων του σημείου Β για το πρόβλημα της αλληλεπίδρασης υγρού και επίπεδης πλάκας που παρουσιάζει ατέλεια μορφής εγχοπής, υπό κρουστικό τασικό φορτίο.	143
5.17	Αναπαράσταση Χρόνου-Συχνότητας και απόκριση της (α') u_1 , (β') u_2 συνιστώσας των μετατοπίσεων του σημείου Α και αντίστοιχα της (γ') u_1 , (δ') u_2 συνιστώσας των μετατοπίσεων του σημείου Β για το πρόβλημα της αλληλεπίδρασης υγρού και επίπεδης πλάκας που παρουσιάζει ατέλεια μορφής οριζόντιου ελλειπτικού εγκλείσματος, υπό κρουστικό τασικό φορτίο.	144
5.18	(α') Συνάρτηση διέγερσης τύπου παραθύρου Hanning με κεντρική συχνότητα στα 150 kHz με (β') πλάτος του φάσματος στο πεδίο συχνοτήτων μετά από μετασχηματισμό Fourier, και (γ') η διέγερση ίδιου τύπου με κεντρική συχνότητα στα 300 kHz με (δ') αντίστοιχο πλάτος του φάσματος στο πεδίο συχνοτήτων.	146
5.19	Αναπαράσταση Χρόνου-Συχνότητας και απόκριση της (α') u_1 , (β') u_2 συνιστώσας των μετατοπίσεων του σημείου Α και αντίστοιχα της (γ') u_1 , (δ') u_2 συνιστώσας των μετατοπίσεων του σημείου Β για το πρόβλημα της ελεύθερης πλάκας που παρουσιάζει ατέλεια μορφής εγχοπής, υπό τασικό φορτίο τύπου Hanning βραχέως φάσματος με κεντρική συχνότητα στα 150 kHz.	147
5.20	Αναπαράσταση Χρόνου-Συχνότητας και απόκριση της (α') u_1 , (β') u_2 συνιστώσας των μετατοπίσεων του σημείου Α και αντίστοιχα της (γ') u_1 , (δ') u_2 συνιστώσας των μετατοπίσεων του σημείου Β για το πρόβλημα της ελεύθερης πλάκας που παρουσιάζει ατέλεια μορφής εγχοπής, υπό τασικό φορτίο τύπου Hanning βραχέως φάσματος με κεντρική συχνότητα στα 300 kHz.	148
5.21	(α') Συνάρτηση διέγερσης τύπου παραθύρου Hanning με κεντρική συχνότητα στα 150 kHz με (β') πλάτος του φάσματος στο πεδίο συχνοτήτων μετά από μετασχηματισμό Fourier, και (γ') η διέγερση ίδιου τύπου με κεντρική συχνότητα στα 300 kHz με (δ') πλάτος του φάσματος στο πεδίο συχνοτήτων μετά από μετασχηματισμό Fourier.	149
5.22	Αναπαράσταση Χρόνου-Συχνότητας και απόκριση της (α') u_1 , (β') u_2 συνιστώσας των μετατοπίσεων του σημείου Α και αντίστοιχα της (γ') u_1 , (δ') u_2 συνιστώσας των μετατοπίσεων του σημείου Β για το πρόβλημα της ελεύθερης πλάκας που παρουσιάζει ατέλεια μορφής εγχοπής, υπό τασικό φορτίο τύπου Hanning ευρέως φάσματος με κεντρική συχνότητα στα 150 kHz.	150

5.23	Αναπαράσταση Χρόνου-Συχνότητας και απόκριση της (α') u_1 , (β') u_2 συνιστώσας των μετατοπίσεων του σημείου Α και αντίστοιχα της (γ') u_1 , (δ') u_2 συνιστώσας των μετατοπίσεων του σημείου Β για το πρόβλημα της ελεύθερης πλάκας που παρουσιάζει ατέλεια μορφής εγκοπής, υπό τασικό φορτίο τύπου Hanning ευρέως φάσματος με κεντρική συχνότητα στα 300 kHz.	151
5.24	(α') Φωτογραφία εγκατάστασης δεξαμενών αποθήκευσης βιομηχανικών υγρών και (β') σχηματική αναπαράσταση της κυλινδρικής δεξαμενής που μελετάται.	153
5.25	Αναπαράσταση Χρόνου-Συχνότητας και απόκριση της (α') u_1 , (β') u_2 συνιστώσας των μετατοπίσεων του σημείου Α και αντίστοιχα της (γ') u_1 , (δ') u_2 συνιστώσας των μετατοπίσεων του σημείου Β του πυθμένα της δεξαμενής με εγκοπή υπό κρουστικό τασικό φορτίο. . .	154
5.26	Αναπαράσταση Χρόνου-Συχνότητας και απόκριση της (α') u_1 , (β') u_2 συνιστώσας των μετατοπίσεων του σημείου Α και αντίστοιχα της (γ') u_1 , (δ') u_2 συνιστώσας των μετατοπίσεων του σημείου Β του πυθμένα της δεξαμενής με ελλειψοειδή ρωγμή υπό κρουστικό τασικό φορτίο.	155
5.27	Αναπαράσταση Χρόνου-Συχνότητας και απόκριση της (α') u_1 , (β') u_2 συνιστώσας των μετατοπίσεων του σημείου Α και αντίστοιχα της (γ') u_1 , (δ') u_2 συνιστώσας των μετατοπίσεων του σημείου Β του πυθμένα της δεξαμενής που αλληλεπιδρά με το πετρέλαιο, με εγκοπή υπό κρουστικό τασικό φορτίο.	156
5.28	Αναπαράσταση Χρόνου-Συχνότητας και απόκριση της (α') u_1 , (β') u_2 συνιστώσας των μετατοπίσεων του σημείου Α και αντίστοιχα της (γ') u_1 , (δ') u_2 συνιστώσας των μετατοπίσεων του σημείου Β του πυθμένα της δεξαμενής που αλληλεπιδρά με το πετρέλαιο, με ελλειψοειδή ρωγμή υπό κρουστικό τασικό φορτίο.	157
5.29	Τμήμα της δεξαμενής αποθήκευσης υγρών καυσίμων που παρουσιάζει ατέλεια μορφής (α') επιφανειακής εγκοπής (κατακόρυφη ρωγμή) και (β') ελλειψοειδούς εσωτερικού εγκλείσματος (οριζόντια ρωγμή). . .	158
5.30	Πρόβλημα δεξαμενής τύπου Ι με διέγερση στα 150 kHz κεντρική συχνότητα: Αναπαράσταση Χρόνου-Συχνότητας και απόκριση της κάθετης στην επιφάνεια της δεξαμενής συνιστώσας των μετατοπίσεων όταν (α'), (β') η δεξαμενή είναι άδεια, (γ'), (δ') περιέχει πετρέλαιο και (ε'), (ς') περιέχει πετρέλαιο παρουσία στρώματος ιζήματος για τα σημεία παρατήρησης Α και Γ αντίστοιχα.	161
5.31	Πρόβλημα δεξαμενής τύπου Ι με διέγερση στα 150 kHz κεντρική συχνότητα: Αναπαράσταση Χρόνου-Συχνότητας και απόκριση της κάθετης στην επιφάνεια της δεξαμενής συνιστώσας των μετατοπίσεων όταν (α'), (β') η δεξαμενή είναι άδεια, (γ'), (δ') περιέχει πετρέλαιο και (ε'), (ς') περιέχει πετρέλαιο παρουσία στρώματος ιζήματος για τα σημεία παρατήρησης Δ και Ε αντίστοιχα.	162

5.32	Πρόβλημα δεξαμενής τύπου I με διέγερση στα 300 kHz κεντρική συχνότητα· Αναπαράσταση Χρόνου-Συχνότητας και απόκριση της κάθετης στην επιφάνεια της δεξαμενής συνιστώσας των μετατοπίσεων όταν (α'), (β') η δεξαμενή είναι άδεια, (γ'), (δ') περιέχει πετρέλαιο και (ε'), (ς') περιέχει πετρέλαιο παρουσία στρώματος ιζήματος για τα σημεία παρατήρησης Α και Γ αντίστοιχα.	163
5.33	Πρόβλημα δεξαμενής τύπου I με διέγερση στα 300 kHz κεντρική συχνότητα· Αναπαράσταση Χρόνου-Συχνότητας και απόκριση της κάθετης στην επιφάνεια της δεξαμενής συνιστώσας των μετατοπίσεων όταν (α'), (β') η δεξαμενή είναι άδεια, (γ'), (δ') περιέχει πετρέλαιο και (ε'), (ς') περιέχει πετρέλαιο παρουσία στρώματος ιζήματος για τα σημεία παρατήρησης Δ και Ε αντίστοιχα.	164
5.34	Πρόβλημα δεξαμενής τύπου II με διέγερση στα 150 kHz κεντρική συχνότητα· Αναπαράσταση Χρόνου-Συχνότητας και απόκριση της κάθετης στην επιφάνεια της δεξαμενής συνιστώσας των μετατοπίσεων όταν (α'), (β') η δεξαμενή είναι άδεια, (γ'), (δ') περιέχει πετρέλαιο και (ε'), (ς') περιέχει πετρέλαιο παρουσία στρώματος ιζήματος για τα σημεία παρατήρησης Α και Γ αντίστοιχα.	165
5.35	Πρόβλημα δεξαμενής τύπου II με διέγερση στα 150 kHz κεντρική συχνότητα· Αναπαράσταση Χρόνου-Συχνότητας και απόκριση της κάθετης στην επιφάνεια της δεξαμενής συνιστώσας των μετατοπίσεων όταν (α'), (β') η δεξαμενή είναι άδεια, (γ'), (δ') περιέχει πετρέλαιο και (ε'), (ς') περιέχει πετρέλαιο παρουσία στρώματος ιζήματος για τα σημεία παρατήρησης Δ και Ε αντίστοιχα.	166
5.36	Πρόβλημα δεξαμενής τύπου II με διέγερση στα 300 kHz κεντρική συχνότητα· Αναπαράσταση Χρόνου-Συχνότητας και απόκριση της κάθετης στην επιφάνεια της δεξαμενής συνιστώσας των μετατοπίσεων όταν (α'), (β') η δεξαμενή είναι άδεια, (γ'), (δ') περιέχει πετρέλαιο και (ε'), (ς') περιέχει πετρέλαιο παρουσία στρώματος ιζήματος για τα σημεία παρατήρησης Α και Γ αντίστοιχα.	167
5.37	Πρόβλημα δεξαμενής τύπου II με διέγερση στα 300 kHz κεντρική συχνότητα· Αναπαράσταση Χρόνου-Συχνότητας και απόκριση της κάθετης στην επιφάνεια της δεξαμενής συνιστώσας των μετατοπίσεων όταν (α'), (β') η δεξαμενή είναι άδεια, (γ'), (δ') περιέχει πετρέλαιο και (ε'), (ς') περιέχει πετρέλαιο παρουσία στρώματος ιζήματος για τα σημεία παρατήρησης Δ και Ε αντίστοιχα.	168
5.38	Πρόβλημα δεξαμενής τύπου III με διέγερση στα 150 kHz κεντρική συχνότητα· Αναπαράσταση Χρόνου-Συχνότητας και απόκριση της κάθετης στην επιφάνεια της δεξαμενής συνιστώσας των μετατοπίσεων όταν (α'), (β') η δεξαμενή είναι άδεια, (γ'), (δ') περιέχει πετρέλαιο και (ε'), (ς') περιέχει πετρέλαιο παρουσία στρώματος ιζήματος για τα σημεία παρατήρησης Α και Γ αντίστοιχα.	170

- 5.39 Πρόβλημα δεξαμενής τύπου III με διέγερση στα 150 kHz κεντρική συχνότητα. Αναπαράσταση Χρόνου-Συχνότητας και απόκριση της κάθετης στην επιφάνεια της δεξαμενής συνιστώσας των μετατοπίσεων όταν (α'), (β') η δεξαμενή είναι άδεια, (γ'), (δ') περιέχει πετρέλαιο και (ε'), (ς') περιέχει πετρέλαιο παρουσία στρώματος ιζήματος για τα σημεία παρατήρησης Δ και Ε αντίστοιχα. 171
- 5.40 Πρόβλημα δεξαμενής τύπου III με διέγερση στα 300 kHz κεντρική συχνότητα. Αναπαράσταση Χρόνου-Συχνότητας και απόκριση της κάθετης στην επιφάνεια της δεξαμενής συνιστώσας των μετατοπίσεων όταν (α'), (β') η δεξαμενή είναι άδεια, (γ'), (δ') περιέχει πετρέλαιο και (ε'), (ς') περιέχει πετρέλαιο παρουσία στρώματος ιζήματος για τα σημεία παρατήρησης Α και Γ αντίστοιχα. 172
- 5.41 Πρόβλημα δεξαμενής τύπου III με διέγερση στα 300 kHz κεντρική συχνότητα. Αναπαράσταση Χρόνου-Συχνότητας και απόκριση της κάθετης στην επιφάνεια της δεξαμενής συνιστώσας των μετατοπίσεων όταν (α'), (β') η δεξαμενή είναι άδεια, (γ'), (δ') περιέχει πετρέλαιο και (ε'), (ς') περιέχει πετρέλαιο παρουσία στρώματος ιζήματος για τα σημεία παρατήρησης Δ και Ε αντίστοιχα. 173
- 5.42 Πρόβλημα δεξαμενής τύπου IV με διέγερση στα 150 kHz κεντρική συχνότητα. Αναπαράσταση Χρόνου-Συχνότητας και απόκριση της κάθετης στην επιφάνεια της δεξαμενής συνιστώσας των μετατοπίσεων όταν (α'), (β') η δεξαμενή είναι άδεια, (γ'), (δ') περιέχει πετρέλαιο και (ε'), (ς') περιέχει πετρέλαιο παρουσία στρώματος ιζήματος για τα σημεία παρατήρησης Α και Γ αντίστοιχα. 174
- 5.43 Πρόβλημα δεξαμενής τύπου IV με διέγερση στα 150 kHz κεντρική συχνότητα. Αναπαράσταση Χρόνου-Συχνότητας και απόκριση της κάθετης στην επιφάνεια της δεξαμενής συνιστώσας των μετατοπίσεων όταν (α'), (β') η δεξαμενή είναι άδεια, (γ'), (δ') περιέχει πετρέλαιο και (ε'), (ς') περιέχει πετρέλαιο παρουσία στρώματος ιζήματος για τα σημεία παρατήρησης Δ και Ε αντίστοιχα. 175
- 5.44 Πρόβλημα δεξαμενής τύπου IV με διέγερση στα 300 kHz κεντρική συχνότητα. Αναπαράσταση Χρόνου-Συχνότητας και απόκριση της κάθετης στην επιφάνεια της δεξαμενής συνιστώσας των μετατοπίσεων όταν (α'), (β') η δεξαμενή είναι άδεια, (γ'), (δ') περιέχει πετρέλαιο και (ε'), (ς') περιέχει πετρέλαιο παρουσία στρώματος ιζήματος για τα σημεία παρατήρησης Α και Γ αντίστοιχα. 176
- 5.45 Πρόβλημα δεξαμενής τύπου IV με διέγερση στα 300 kHz κεντρική συχνότητα. Αναπαράσταση Χρόνου-Συχνότητας και απόκριση της κάθετης στην επιφάνεια της δεξαμενής συνιστώσας των μετατοπίσεων όταν (α'), (β') η δεξαμενή είναι άδεια, (γ'), (δ') περιέχει πετρέλαιο και (ε'), (ς') περιέχει πετρέλαιο παρουσία στρώματος ιζήματος για τα σημεία παρατήρησης Δ και Ε αντίστοιχα. 177

5.46 (α') Συνάρτηση διέγερσης τύπου παραθύρου Hanning με κεντρική συχνότητα στα 50 kHz με (β') πλάτος του φάσματος στο πεδίο συχνοτήτων μετά από μετασχηματισμό Fourier.	180
5.47 Πρόβλημα δεξαμενής τύπου I με διέγερση στα 50 kHz κεντρική συχνότητα. Αναπαράσταση Χρόνου-Συχνότητας και απόκριση της κάθεται στην επιφάνεια της δεξαμενής συνιστώσας των μετατοπίσεων όταν (α'), (β') η δεξαμενή είναι άδεια, (γ'), (δ') περιέχει πετρέλαιο και (ε'), (ς') περιέχει πετρέλαιο παρουσία στρώματος ιζήματος για τα σημεία παρατήρησης Α και Γ αντίστοιχα.	181
5.48 Πρόβλημα δεξαμενής τύπου I με διέγερση στα 50 kHz κεντρική συχνότητα. Αναπαράσταση Χρόνου-Συχνότητας και απόκριση της κάθεται στην επιφάνεια της δεξαμενής συνιστώσας των μετατοπίσεων όταν (α'), (β') η δεξαμενή είναι άδεια, (γ'), (δ') περιέχει πετρέλαιο και (ε'), (ς') περιέχει πετρέλαιο παρουσία στρώματος ιζήματος για τα σημεία παρατήρησης Δ και Ε αντίστοιχα.	182
5.49 Πρόβλημα δεξαμενής τύπου II με διέγερση στα 50 kHz κεντρική συχνότητα. Αναπαράσταση Χρόνου-Συχνότητας και απόκριση της κάθεται στην επιφάνεια της δεξαμενής συνιστώσας των μετατοπίσεων όταν (α'), (β') η δεξαμενή είναι άδεια, (γ'), (δ') περιέχει πετρέλαιο και (ε'), (ς') περιέχει πετρέλαιο παρουσία στρώματος ιζήματος για τα σημεία παρατήρησης Α και Γ αντίστοιχα.	183
5.50 Πρόβλημα δεξαμενής τύπου II με διέγερση στα 50 kHz κεντρική συχνότητα. Αναπαράσταση Χρόνου-Συχνότητας και απόκριση της κάθεται στην επιφάνεια της δεξαμενής συνιστώσας των μετατοπίσεων όταν (α'), (β') η δεξαμενή είναι άδεια, (γ'), (δ') περιέχει πετρέλαιο και (ε'), (ς') περιέχει πετρέλαιο παρουσία στρώματος ιζήματος για τα σημεία παρατήρησης Δ και Ε αντίστοιχα.	184
5.51 Πρόβλημα δεξαμενής τύπου III με διέγερση στα 50 kHz κεντρική συχνότητα. Αναπαράσταση Χρόνου-Συχνότητας και απόκριση της κάθεται στην επιφάνεια της δεξαμενής συνιστώσας των μετατοπίσεων όταν (α'), (β') η δεξαμενή είναι άδεια, (γ'), (δ') περιέχει πετρέλαιο και (ε'), (ς') περιέχει πετρέλαιο παρουσία στρώματος ιζήματος για τα σημεία παρατήρησης Α και Γ αντίστοιχα.	186
5.52 Πρόβλημα δεξαμενής τύπου III με διέγερση στα 50 kHz κεντρική συχνότητα. Αναπαράσταση Χρόνου-Συχνότητας και απόκριση της κάθεται στην επιφάνεια της δεξαμενής συνιστώσας των μετατοπίσεων όταν (α'), (β') η δεξαμενή είναι άδεια, (γ'), (δ') περιέχει πετρέλαιο και (ε'), (ς') περιέχει πετρέλαιο παρουσία στρώματος ιζήματος για τα σημεία παρατήρησης Δ και Ε αντίστοιχα.	187

5.53	Πρόβλημα δεξαμενής τύπου IV με διέγερση στα 50 kHz κεντρική συχνότητα. Αναπαράσταση Χρόνου-Συχνότητας και απόκριση της κάθετης στην επιφάνεια της δεξαμενής συνιστώσας των μετατοπίσεων όταν (α'), (β') η δεξαμενή είναι άδεια, (γ'), (δ') περιέχει πετρέλαιο και (ε'), (ς') περιέχει πετρέλαιο παρουσία στρώματος ιζήματος για τα σημεία παρατήρησης Α και Γ αντίστοιχα.	188
5.54	Πρόβλημα δεξαμενής τύπου IV με διέγερση στα 50 kHz κεντρική συχνότητα. Αναπαράσταση Χρόνου-Συχνότητας και απόκριση της κάθετης στην επιφάνεια της δεξαμενής συνιστώσας των μετατοπίσεων όταν (α'), (β') η δεξαμενή είναι άδεια, (γ'), (δ') περιέχει πετρέλαιο και (ε'), (ς') περιέχει πετρέλαιο παρουσία στρώματος ιζήματος για τα σημεία παρατήρησης Δ και Ε αντίστοιχα.	189
A.1	Τοπικό χωρίο ολοκλήρωσης για ένα σημείο πηγής $\mathbf{x}^{(\kappa)}$ του οποίου ο κύκλος ολοκλήρωσης $\partial\Omega_{(\kappa)}$ τέμνει το γενικό σύνορο Γ του σώματος με παρουσίαση των κύκλων επιρροής $\tilde{\Omega}_{(j)}$ των γειτονικών κόμβων $\mathbf{x}^{(j)}$	208
A.2	Τοπικό χωρίο ολοκλήρωσης για ένα σημείο πηγής $\mathbf{x}^{(\kappa)}$ του οποίου ο κύκλος ολοκλήρωσης $\partial\Omega_{(\kappa)}$ βρίσκεται εξ ολοκλήρου στο χωρίο Ω και δεν τέμνει το γενικό σύνορο Γ του σώματος με παρουσίαση των κύκλων επιρροής $\tilde{\Omega}_{(j)}$ των γειτονικών κόμβων $\mathbf{x}^{(j)}$	216
A.3	Τοπικό χωρίο όγκου $\Omega_{(\kappa)}$, το οποίο έχει υποστεί διακριτοποίηση σε τριγωνικά τμήματα μετά από εφαρμογή του προγράμματος Triangle.	218
A.4	Τοπικό χωρίο όγκου $\Omega_{(\kappa)}$, το οποίο έχει υποστεί διακριτοποίηση σε τριγωνικά τμήματα μετά από εφαρμογή του προγράμματος Triangle, στο οποίο λαμβάνονται υπόψη οι κύκλοι των πεδίων επιρροής $\tilde{\Omega}_{(j)}$ των γειτονικών κόμβων.	219
B.1	(α') Συνεχές, (β') μερικώς και πλήρως ασυνεχές δίκομβο γραμμικής-βάσης στοιχείο γραμμής (2LL).	226
B.2	(α') Συνεχές, (β') μερικώς και πλήρως ασυνεχές τρίκομβο τετραγωνικής-βάσης στοιχείο γραμμής (3QL).	228
B.3	(α') Συνεχές, (β') πλήρως ασυνεχές και μερικώς ασυνεχή τρίκομβο γραμμικής-βάσης στοιχεία τριγώνου (3LT).	230
B.4	(α') Συνεχές, (β') πλήρως ασυνεχές και μερικώς ασυνεχή εξάκομβο τετραγωνικής-βάσης στοιχεία τριγώνου (6QT).	232
B.5	Διαίρεση του στοιχείου τριγώνου σε έξι ορθογώνια τρίγωνα.	234
B.6	Ορθογώνιο (α') τρίγωνο 1, (β') τρίγωνο 2, (γ') τρίγωνο 3, (δ') τρίγωνο 4, (ε') τρίγωνο 5 και (ς') τρίγωνο 6.	235
G.1	(α') Κονική συνάρτηση βάρους ($k = 1$), (β') κονική συνάρτηση βάρους ($k = 2$), (γ') συνάρτηση Gauss ($c = 4, k = 1$), (δ') 3 ^{ου} βαθμού, (ε') 4 ^{ου} βαθμού και (ς') 5 ^{ου} βαθμού συνάρτηση spline.	243
G.2	Οι συναρτήσεις του Wu τύπου (α') C2, (β') C4 και οι συναρτήσεις του Wendland τύπου (γ') C0, (δ') C2, (ε') C4 και (ς') C6.	245

Δ.1	(α') Η χρονοσειρά u με (β') το πραγματικό φασματικό διαγράμμα των συντελεστών Fourier U και (γ') το ίδιο διάγραμμα στο διάστημα των κρίσιμων συχνοτήτων Nyquist όταν είναι χαμηλή η συχνότητα δειγματοληψίας.	251
Δ.2	Διδιάστατος μετασχηματισμός Fourier (α') μίας κρουστικής συνάρτησης και (β') μίας σειράς κρουστικών συναρτήσεων στον χώρο-χρόνο.	253
Δ.3	Αναπαράσταση Χρόνου-Συχνότητας ενός σήματος σύμφωνα με (α') την Εξομαλυμένη Ψευδή κατανομή Wigner-Ville και (β') την Επαναπροσδιορισμένη Εξομαλυμένη Ψευδή κατανομή Wigner-Ville.	255
E.1	Χρονικό διάγραμμα μετατοπίσεων (α'), (β') του σημείου A, (γ'), (δ') του σημείου Γ και (ε'), (ς') του σημείου Δ στα 150 kHz κεντρική συχνότητα της διέγερσης για τις δεξαμενές τύπου I και II αντίστοιχα, με σύγκριση των αποτελεσμάτων όταν είναι άδεια, περιέχει πετρέλαιο και όταν παρουσιάζει ίζημα.	260
E.2	Χρονικό διάγραμμα μετατοπίσεων (α'), (β') του σημείου A, (γ'), (δ') του σημείου Γ και (ε'), (ς') του σημείου Δ στα 300 kHz κεντρική συχνότητα της διέγερσης για τις δεξαμενές τύπου I και II αντίστοιχα, με σύγκριση των αποτελεσμάτων όταν είναι άδεια, περιέχει πετρέλαιο και όταν παρουσιάζει ίζημα.	261
E.3	Χρονικό διάγραμμα μετατοπίσεων (α'), (β') του σημείου A, (γ'), (δ') του σημείου Γ και (ε'), (ς') του σημείου Δ στα 150 kHz κεντρική συχνότητα της διέγερσης για τις δεξαμενές τύπου III και IV αντίστοιχα, με σύγκριση των αποτελεσμάτων όταν είναι άδεια, περιέχει πετρέλαιο και όταν παρουσιάζει ίζημα.	262
E.4	Χρονικό διάγραμμα μετατοπίσεων (α'), (β') του σημείου A, (γ'), (δ') του σημείου Γ και (ε'), (ς') του σημείου Δ στα 300 kHz κεντρική συχνότητα της διέγερσης για τις δεξαμενές τύπου III και IV αντίστοιχα, με σύγκριση των αποτελεσμάτων όταν είναι άδεια, περιέχει πετρέλαιο και όταν παρουσιάζει ίζημα.	263
E.5	Χρονικό διάγραμμα μετατοπίσεων (α'), (β') του σημείου A, (γ'), (δ') του σημείου Γ και (ε'), (ς') του σημείου Δ στα 50 kHz κεντρική συχνότητα της διέγερσης για τις δεξαμενές τύπου I και II αντίστοιχα, με σύγκριση των αποτελεσμάτων όταν είναι άδεια, περιέχει πετρέλαιο και όταν παρουσιάζει ίζημα.	264
E.6	Χρονικό διάγραμμα μετατοπίσεων (α'), (β') του σημείου A, (γ'), (δ') του σημείου Γ και (ε'), (ς') του σημείου Δ στα 50 kHz κεντρική συχνότητα της διέγερσης για τις δεξαμενές τύπου III και IV αντίστοιχα, με σύγκριση των αποτελεσμάτων όταν είναι άδεια, περιέχει πετρέλαιο και όταν παρουσιάζει ίζημα.	265

Κατάλογος Πινάκων

3.1	Επαναληπτικός αλγόριθμος για τον υπολογισμό των συναρτήσεων μορφής και των παραγώγων τούς για τη Μέθοδο Κινουμένων Ελαχίστων Τετραγώνων με Προσέγγιση Συνθηκών Συνέπειας.	53
5.1	Ιδιότητες χάλυβα.	122
5.2	Ιδιότητες πετρελαίου.	142
5.3	Διάφοροι τύποι δεξαμενών ανάλογα με το είδος της ατέλειας και την απόστασή (l) της από το τοίχωμα της δεξαμενής.	159
5.4	Ιδιότητες ιζήματος πετρελαίου.	159

Συντμήσεις

2LL	δίκομβο γραμμικής-βάσης στοιχείο γραμμής
3QL	τρίκομβο τετραγωνικής-βάσης στοιχείο γραμμής
3LT	τρίκομβο γραμμικής-βάσης στοιχείο τριγώνου
6QT	εξάκομβο τετραγωνικής-βάσης στοιχείο τριγώνου
ΑΧΣ	Αναπαράσταση Χρόνου-Συχνότητας
ΔΜF	Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier
ΕΕΨΚWV	Επαναπροσδιορισμένη Εξομαλυσμένη Ψευδής Κατανομή Wigner-Ville
MKET	Μέθοδος Κινουμένων Ελαχίστων Τετραγώνων
ΜΠΣΒΑΣ	Μέθοδος Παρεμβολής Σημείων με Βάση Ακτινικών Συναρτήσεων
ΜΤΕΒΑΣ	Μέθοδο Τοπικής Επιρροής με Βάση Ακτινικών Συναρτήσεων
ΜΠΣ	Μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων
ΜΣΣ	Μέθοδος Συνοριακών Στοιχείων
ΜΤΟΕχΔ	Μέθοδος Τοπικών Ολοκληρωτικών Εξισώσεων χωρίς Διακριτοποίηση
ΜΤΟΕχΔ1	Μέθοδος Τοπικών Ολοκληρωτικών Εξισώσεων χωρίς Διακριτοποίηση πρώτου τύπου
ΜΤΟΕχΔ2	Μέθοδος Τοπικών Ολοκληρωτικών Εξισώσεων χωρίς Διακριτοποίηση δεύτερου τύπου
ΜΤΟΕχΔ3	Μέθοδος Τοπικών Ολοκληρωτικών Εξισώσεων χωρίς Διακριτοποίηση τρίτου τύπου
ΜΤΟΕχΔ4	Μέθοδος Τοπικών Ολοκληρωτικών Εξισώσεων χωρίς Διακριτοποίηση τέταρτου τύπου
ΜΚΕ	Μη-Καταστροφικός Έλεγχος
ΤΜΡGχΔ	Τοπική Μέθοδος Petrov-Galerkin χωρίς Διακριτοποίηση
ΤΜΡGχΔ1	Τοπική Μέθοδος Petrov-Galerkin χωρίς Διακριτοποίηση πρώτου τύπου

TMPG $\chi\Delta$ 4	Τοπική Μέθοδος Petrov-Galerkin χωρίς Διακριτοποίηση τέταρτου τύπου
TMPG $\chi\Delta$ 5	Τοπική Μέθοδος Petrov-Galerkin χωρίς Διακριτοποίηση πέμπτου τύπου
TMPG $\chi\Delta$ 6	Τοπική Μέθοδος Petrov-Galerkin χωρίς Διακριτοποίηση έκτου τύπου
TM $\chi\Delta$	Τοπική Μέθοδος χωρίς Διακριτοποίηση

Ονοματολογία Συμβολισμών

$\mathbf{u}$	διάνυσμα μετατοπίσεων
$\boldsymbol{\sigma}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}$	διάνυσμα και τανυστής τάσεων
$\mathbf{t}$	διάνυσμα τάσεων ορισμένο σε επιφάνεια
$\bar{\mathbf{u}}$	προκαθορισμένο διάνυσμα μετατοπίσεων (ουσιαστική συνοριακή συνθήκη)
$\bar{\mathbf{t}}$	προκαθορισμένο διάνυσμα τάσεων σε επιφάνεια (φυσική συνοριακή συνθήκη)
λ, μ	σταθερές Lamè
E	μέτρο ελαστικότητας του Young
ν	λόγος του Poisson
ρ_e	πυκνότητα ελαστικού σώματος
$\tilde{\mathbf{C}}$	μητρώο δυσκαμψίας ελαστικού σώματος
p	πίεση ακουστικού μέσου
$q, \frac{\partial p}{\partial \hat{n}}$	βαθμίδα υπερπίεσης ακουστικού μέσου
$\bar{p}$	προκαθορισμένη πίεση (ουσιαστική συνοριακή συνθήκη)
$\bar{q}$	προκαθορισμένη βαθμίδα υπερπίεσης (φυσική συνοριακή συνθήκη)
ρ_a	πυκνότητα ακουστικού σώματος
X_1, X_2	γενικό Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων
Z_1, Z_2	τοπικό σύστημα συντεταγμένων συνοριακών στοιχείων
$\mathbf{x}^{(\kappa)}$	διάνυσμα θέσης σημείου πηγής
$\mathbf{y}$	διάνυσμα θέσης πεδιακού σημείου (σημείο ολοκλήρωσης)
$\hat{\mathbf{n}}$	μοναδιαίο διάνυσμα, κάθετο εξωτερικά σε μία επιφάνεια αναφοράς
$\mathbf{r}$	διάνυσμα: $\mathbf{r} = \mathbf{y} - \mathbf{x}^{(\kappa)}$

$\ \mathbf{r}\ $	μέτρο του διάνυσματος $\mathbf{r}$
$\hat{\mathbf{r}}$	μοναδιαίο διάνυσμα: $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/\ \mathbf{r}\ $
Γ	γενικό σύνορο ενός σώματος
Ω	όγκος ενός σώματος
$\Omega_{(j)}$	χωρίο ολοκλήρωσης του σημείου $\mathbf{x}^{(j)}$
$\partial\Omega_{(j)}$	επιφάνεια χωρίου ολοκλήρωσης του σημείου $\mathbf{x}^{(j)}$
$\check{\Omega}_{(j)}$	χωρίο επιρροής του σημείου $\mathbf{x}^{(j)}$
$\Gamma_{(j)}$	η τομή του Γ με το $\partial\Omega_{(j)}$ του σημείου $\mathbf{x}^{(j)}$
$\Gamma_{(j)u}, \Gamma_{(j)p}$	τμήμα του $\Gamma_{(j)}$ όπου είναι καθορισμένες οι ουσιαστικές συνοριακές συνθήκες
$\Gamma_{(j)t}, \Gamma_{(j)q}$	τμήμα του $\Gamma_{(j)}$ όπου είναι καθορισμένες οι φυσικές συνοριακές συνθήκες
$r_0^{(j)}$	ακτίνα ολοκλήρωσης του κυκλικού χωρίου $\Omega_{(j)}$ του σημείου $\mathbf{x}^{(j)}$
$r_S^{(j)}$	ακτίνα επιρροής του κυκλικού χωρίου $\check{\Omega}_{(j)}$ του σημείου $\mathbf{x}^{(j)}$
$\tilde{\mathbf{u}}^*, \tilde{\mathbf{t}}^*$	θεμελιώδεις λύσεις ολοκληρωτικής εξίσωσης ελαστικού μέσου
$\tilde{\tilde{\mathbf{u}}}^*, \tilde{\tilde{\mathbf{t}}}^*$	θεμελιώδεις λύσεις υπεριδιόμορφης ολοκληρωτικής εξίσωσης ελαστικού μέσου
p^*, q^*	θεμελιώδεις λύσεις ολοκληρωτικής εξίσωσης ακουστικού μέσου
$\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*$	θεμελιώδεις λύσεις υπεριδιόμορφης ολοκληρωτικής εξίσωσης ακουστικού μέσου
w^*	συνάρτηση πεδίου
t	χρόνος
f	κυκλική συχνότητα
ω	γωνιακή συχνότητα
k	κυματικός αριθμός
λ	μήκος κύματος
c_p	ταχύτητα διάδοσης εγκάρσιου κύματος
c_s	ταχύτητα διάδοσης διαμήκους κύματος
c_r	ταχύτητα διάδοσης κύματος Rayleigh
c_g	ομαδική ταχύτητα διάδοσης κυμάτων
$\tilde{\mathbf{I}}$	μοναδιαίος πίνακας

$\tilde{0}$	μηδενικός πίνακας
j	ο μιγαδικός αριθμός: $j^2 = -1$
∇	τελεστής βάθμωσης
$\cdot, :$	δυαδικός τελεστής του μονού και διπλού εσωτερικού γινομένου αντίστοιχα
$\otimes$	δυαδικός τελεστής της διάταξης

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Σκοπός αυτής της διδακτορικής διατριβής είναι η ανάπτυξη και εφαρμογή αριθμητικών μεθόδων για την επίλυση προβλημάτων που βρίσκουν άμεση εφαρμογή στο Μη-Καταστροφικό Έλεγχο (ΜΚΕ) υλικών και κατασκευών μέσω ακουστικών τεχνικών όπως είναι η Ακουστική Εκπομπή και οι Ακουστο-Υπέρηχοι. Η διατριβή πραγματοποιήθηκε στο πλαίσιο του προγράμματος ΠΕΝΕΔ, με συνχρηματοδότηση του Υπουργείου Ανάπτυξης και της εταιρίας Μη-Καταστροφικού Ελέγχου ENVIROCOUSTICS A.E.¹ Ως εκ τούτου, κατόπιν κοινής συμφωνίας με την ENVIROCOUSTICS A.E., το αντικείμενο της διατριβής μπορεί να διατυπωθεί ακριβέστερα ως η ανάπτυξη και η εφαρμογή αριθμητικών μεθόδων για τη διερεύνηση διάδοσης ακουστικών κυμάτων σε δεξαμενές αποθήκευσης υγρών καυσίμων. Η διερεύνηση αυτή αφορά τη διάδοση τασικών παλμών στον πυθμένα και στο τοίχωμα μιας δεξαμενής με ή χωρίς υγρό καύσιμο. Οι μέθοδοι που αναπτύχθηκαν και χρησιμοποιήθηκαν για το σκοπό αυτό είναι η Μέθοδος των Συνοριακών Στοιχείων (ΜΣΣ), η Μέθοδος των Τοπικών Ολοκληρωτικών Εξισώσεων χωρίς Διακριτοποίηση (ΜΤΟΕχΔ) και η Τοπική Μέθοδος Petrov-Galerkin χωρίς Διακριτοποίηση (ΤΜΡΓχΔ). Σκοπός του παρόντος κεφαλαίου είναι πρώτον η ανασκόπηση της βιβλιογραφίας που σχετίζεται με το εν λόγω αντικείμενο και δεύτερον η περιληπτική παρουσίαση των κεφαλαίων που απαρτίζουν τη διδακτορική διατριβή.

Κάθε αριθμητική ή αναλυτική προσομοίωση μίας πειραματικής διαδικασίας απαιτεί την συνένωση και τον συνδυασμό διαφόρων τεχνικών οι οποίες πολλές φορές αναφέρονται και σε περισσότερες της μίας επιστημονικών περιοχών. Έτσι για την καλύτερη παρακολούθηση της αναδρομής στην πρόσφατη συναφή βιβλιογραφία, θα αναφερθούμε χωριστά για κάθε περιοχή που εμπλέκεται στην εκτέλεση της διατριβής και οι οποίες είναι:

- (α') Η χρήση της Μεθόδου των Συνοριακών Στοιχείων και της Μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων στο Μη-Καταστροφικό Έλεγχο,
- (β') Οι Τοπικές Μέθοδοι χωρίς Διακριτοποίηση.

¹βλ. ιστοσελίδα: <http://www.envirocoustics.gr/>

Αξίζει να σημειωθεί εδώ ότι αν και ο κώδικας της ΜΣΣ που χρησιμοποιήθηκε αναπτύχθηκε πλήρως στο πλαίσιο της παρούσας διατριβής, δεν παρουσιάζει όμως πρωτότυπα στοιχεία μιας και βασίστηκε εξ' ολοκλήρου στη μεθοδολογία των Συνοριακών Στοιχείων που περιγράφεται εκτενώς στις εργασίες [1, 50, 62]. Συνεπώς, για την ανασκόπηση της βιβλιογραφίας που σχετίζεται με τη χρήση της ΜΣΣ στην επίλυση προβλημάτων κυματικής διάδοσης μπορεί να καταφύγει κάποιος στην παραπάνω βιβλιογραφία, καθώς επίσης στις εργασίες ανασκόπησης [19, 20] και στα βιβλία [11, 23, 27, 30, 31].

1.1 Η χρήση των αριθμητικών μεθόδων στο Μη-Καταστροφικό Έλεγχο

Έχει αναγνωρισθεί πλέον ότι η ραγδαία ανάπτυξη των υπολογιστών έδωσε το έναυσμα για την επίσης ραγδαία ανάπτυξη της υπολογιστικής μηχανικής. Συνεπώς κάθε ερευνητής, μηχανικός προτού καταφύγει σε πολυδάπανες πειραματικές διατάξεις για τη διερεύνηση ενός προβλήματος μπορεί πλέον οικονομικά και προπαντός με ταχύτητα να εκτελέσει πληθώρα παραμετρικών μελετών μέσω υπολογιστικών προτύπων που προσομοιώνουν με υψηλή ακρίβεια το υπό-εξέταση πρόβλημα. Ως εκ τούτου πολλές εμπειρικές τεχνικές του παρελθόντος έχουν αντικατασταθεί με βέλτιστες και ακριβέστερες μεθοδολογίες και φυσικά με προφανή οικονομικά οφέλη.

Ειδικά στην περιοχή του ΜΚΕ, οι μέθοδοι των Πεπερασμένων και Συνοριακών Στοιχείων έχουν χρησιμοποιηθεί εκτενώς κυρίως για δύο λόγους. Πρώτον για τη μελέτη διάδοσης διαταραχών σε κυματοδηγούς και δεύτερον για την επίδραση ρωγμών και ατελειών μιας κατασκευής στη διάδοση κυμάτων μέσα σ' αυτή. Στην πρώτη περίπτωση η χρήση των προαναφερθέντων αριθμητικών μεθόδων αποσκοπεί στην εύρεση των καμπυλών διασκόρπισης διαφόρων κυματομορφών που διαδίδονται σε κυματοδηγούς, όπως είναι πλάκες, κελύφη, τοιχώματα δοχείων πίεσης, πυθμένες δεξαμενών κ.α. Οι κυματομορφές αυτές εξαρτώνται από τη γεωμετρία και τη μορφή διέγερσης του κυματοδηγού και κάθε μία από αυτές διαδίδεται με το δικό της τρόπο ενώ παράλληλα υφίσταται διασκόρπιση. Διασκόρπιση είναι το φαινόμενο κατά το οποίο η φασική ταχύτητα διάδοσης κάθε αρμονικής συνιστώσας της κυματομορφής είναι συνάρτηση της συχνότητας. Δεδομένου ότι κάθε παλμός που διαδίδεται σε ένα κυματοδηγό είναι συνισταμένη όλων των κυματομορφών που μπορεί να διαδώσει ο κυματοδηγός, καταλαβαίνει αμέσως κάποιος τη σπουδαιότητα εύρεσης των προαναφερθέντων χαρακτηριστικών. Για χάρη συντομίας αντί του «εύρεση των κυματομορφών και των εξαρτημένων από τη συχνότητα φασικών ταχυτήτων των αρμονικών συνιστωσών τους» θα λέμε «εύρεση των καμπυλών διασκόρπισης». Αναλυτικοί τύποι που δίνουν τον χάρτη των καμπυλών διασκόρπισης είναι γνωστοί μόνο για απλές γεωμετρίες όπως κυλινδρικές δοκοί, πλάκες, κυλινδρικοί σωλήνες κ.λ.π. Για πιο περίπλοκες κατασκευές οι καμπύλες διασκόρπισης μπορούν να προσδιοριστούν είτε πειραματικά, είτε αριθμητικά μέσω μεθοδολογιών όπως η ΜΠΣ και η Μέθοδος των Πεπερασμένων Διαφορών σε συνδυασμό με την φασματική ανάλυση του μετα-

σχηματισμού Fourier. Για περισσότερες τεχνικές λεπτομέρειες μπορεί κάποιος να αναφερθεί στο Παρ. Δ. Στο πλαίσιο της ΜΠΣ, αντιπροσωπευτικές εργασίες στην περιοχή αυτή είναι οι [2, 12, 14, 25, 26, 32, 34, 35, 43, 44, 45, 48, 59, 60, 70], ενώ εκτενής βιβλιογραφία εφαρμογής της ΜΠΣ στο ΜΚΕ μπορεί να βρεί κάποιος στην εργασία [57]. Ο τρόπος εφαρμογής της ΜΣΣ για την εύρεση των καμπυλών διασκόρπισης αλλά και για τη μελέτη διάδοσης κυματικών διαταραχών σε κυματοδηγούς μπορεί να αναζητηθεί στις εργασίες [39, 42, 65, 86, 87]. Τέλος πρέπει να σημειωθεί ότι η Μέθοδος των Πεπερασμένων Διαφορών χρησιμοποιήθηκε κυρίως για την εύρεση καμπυλών διασκόρπισης σε οπτικές ίνες και ηλεκτρομαγνητικούς κυματοδηγούς παρά για αντίστοιχες εφαρμογές σε ακουστική και ελαστικότητα. Για το λόγο αυτό στην παρούσα ανασκόπηση δεν αναφερόμαστε στη μέθοδο αυτή.

Ο δεύτερος λόγος εφαρμογής των Μεθόδων Πεπερασμένων και Συνοριακών Στοιχείων στο Μη-Καταστροφικό Έλεγχο είναι η μελέτη επίδρασης ρωγμών και ατελειών στη διάδοση κυματικών διαταραχών σε υλικά και κατασκευές. Εδώ η χρήση των μεθόδων αυτών στην επίλυση δύσκολων προβλημάτων αλληλεπίδρασης κυμάτων-ατελειών συνέβαλε τα μέγιστα τόσο στη κατανόηση του περίπλοκου μηχανισμού απλής ή πολλαπλής σκέδασης, όσο και στο σχεδιασμό αποτελεσματικών διατάξεων Ακουστικής Εκπομπής και Ακουστο-Υπερήχων. Χαρακτηριστικές εργασίες όπου γίνεται εφαρμογή της Μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων είναι οι [46, 47, 58] και άλλες που περιέχονται στην εργασία ανασκόπησης του Mackerle [57]. Στη Μέθοδο των Συνοριακών Στοιχείων μπορεί να αναφέρει κάποιος αρκετές εργασίες, όμως οι περισσότερες και σημαντικότερες από αυτές αναφέρονται στο βιβλίο του Rose [64].

1.2 Οι Τοπικές Μέθοδοι χωρίς Διακριτοποίηση

Η έρευνα και ανάπτυξη προσεγγιστικών μεθόδων για την αριθμητική επίλυση μερικών διαφορικών εξισώσεων έχει τραβήξει τα τελευταία πενήντα χρόνια την προσοχή των μηχανικών, των φυσικών και των μαθηματικών. Το κόστος της υπολογιστικής ισχύος των ηλεκτρονικών υπολογιστών έχει φθίνει αρκετά, σε σύγκριση το αντίστοιχο κόστος των προηγούμενων δεκαετιών, δικαιολογώντας με αυτό τον τρόπο τη ραγδαία ανάπτυξη της επιστήμης της υπολογιστικής μηχανικής. Παρόλα αυτά η εξαιρετικά επίπονη διαδικασία της διακριτοποίησης του χωρίου που αναλύεται παραμένει ένα σημαντικό εμπόδιο στην εφαρμογή των αριθμητικών αυτών μεθόδων σε πολύπλοκες γεωμετρίες ή σε κατασκευές μεγάλης κλίμακας.

Η Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων είναι αδιαμφισβήτητη η πλέον διαδεδομένη για την αριθμητική επίλυση επιστημονικών και τεχνολογικών προβλημάτων. Σύμφωνα με τη Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων όλο το προς ανάλυση σώμα ή η προς ανάλυση κατασκευή διακριτοποιούνται σε μικρά στοιχεία, δημιουργώντας έτσι ένα πλέγμα καλούμενο συχνά ως κάναβος. Μέσω της αρχής των μεταβολών και των αντίστοιχων καταστατικών εξισώσεων και εξισώσεων συμβατότητας οδηγείται

Σχήμα 1.1: (α') Διάτρητη επίπεδη πλάκα υπό ομοιόμορφη μονοαξονική φόρτιση και διακριτοποίηση του τέταρτου αυτής σύμφωνα με (β') τη Μέθοδο Πεπερασμένων Στοιχείων, (γ') τη Μέθοδο Συνοριακών Στοιχείων, (δ') τις Τοπικές Μεθόδους χωρίς Διακριτοποίηση.

κάποιος σε ένα τελικό σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων, ως προς τους αγνώστους του προβλήματος, το οποίο επιλύεται μέσω προηγμένων τεχνικών γραμμικής άλγεβρας. Το τελικό αυτό σύστημα εξισώσεων –λόγω της αρχής της αμοιβαιότητας και του τοπικού χαρακτήρα της ΜΠΣ– είναι συνήθως συμμετρικό και μορφής ζώνης, δύο χαρακτηριστικά που επιταχύνουν εντυπωσιακά την επίλυσή του ακόμη και για την περίπτωση ιδιαίτερα πυκνής κανάβου. Όμως σε περιπτώσεις συνεχούς αλλαγής της γεωμετρίας της προς ανάλυση κατασκευής ή αλλαγής φάσεων, η διακριτοποίηση πρέπει να αλλάζει συνεχώς κάτι το οποίο υπολογιστικά είναι ιδιαίτερος χρονοβόρο.

Από την άλλη πλευρά η Μέθοδος Συνοριακών Στοιχείων παρουσιάζει το πλεονέκτημα της διακριτοποίησης μόνο του συνόρου της κατασκευής (βλ. Σχ. 1.1(γ')) και όχι όλης της κατασκευής, όπως γίνεται στη Μέθοδο Πεπερασμένων Στοιχείων (βλ. Σχ. 1.1(β')). Συνεπώς το πρόβλημα αλλαγής γεωμετρίας ή φάσεων αντιμετωπίζεται εύκολα μιας και διακριτοποιούνται μόνο τα νέα σύνορα που εμφανίζονται

στην εξέλιξη του φαινομένου. Το πρόβλημα όμως με τη ΜΣΣ είναι διπλό. Πρώτον, για να υπάρχει η ολοκληρωτική αναπαράσταση του προβλήματος απαιτείται η γνώση της θεμελιώδους λύσης της αντίστοιχης διαφορικής εξίσωσης ισορροπίας ή κίνησης, απαίτηση η οποία ικανοποιείται μόνο σε ορισμένες κατηγορίες προβλημάτων. Δεύτερον το σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων στο οποίο καταλήγει η ΜΣΣ –όμοιο με αυτό της ΜΠΣ– είναι μη-συμμετρικό και πλήρους πύκνωσης χωρίς να παρουσιάζει μορφή ζώνης, με αποτέλεσμα η επίλυσή του να καθυστερεί σημαντικά.

Πρόσφατα διάφορες νέες αριθμητικές μέθοδοι χωρίς διακριτοποίηση έχουν προταθεί ως εναλλακτικές της κλασικής Μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων και των Συνοριακών Στοιχείων, όπου ξεπερνούνται τα γνωστά προβλήματα που αντιμετωπίζουν οι τελευταίες δύο, κυρίως αυτό της διακριτοποίησης (βλ. Σχ. 1.1(δ')). Επίσης οι μέθοδοι χωρίς διακριτοποίηση μετριάζουν προβλήματα που συναντά κάποιος στη ΜΠΣ σε ζητήματα στρέβλωσης των στοιχείων της κανάβου, επαναδιακριτοποίησης λόγω μεγάλων παραμορφώσεων, αλλαγής φάσεων, δημιουργία νέων συνόρων λόγω διάδοσης ρωγμών κ.α. Επιπλέον αυτές οι νέες τεχνικές έχουν το πλεονέκτημα της προσθήκης ή αφαίρεσης κόμβων στο υπό-διακριτοποίηση χωρίο, διαδικασία αρκετά εύκολη σε σχέση με τη πρόσθεση ή αφαίρεση στοιχείων στις ΜΠΣ και ΜΣΣ. Διάφορες μέθοδοι χωρίς διακριτοποίηση έχουν προταθεί και αναπτυχθεί για την αριθμητική επίλυση προβλημάτων συνοριακών τιμών με τις πιο γνωστές από αυτές να είναι: (α') Smooth Particle Hydrodynamics [36], (β') Diffuse Element method [61], (γ') Element-Free Galerkin method [16, 56, 17, 18], (δ') Reproducing Kernel Particle Method [37, 53], (ε') Partition of Unity Finite Element Method [10], (ς') Natural Element Method [85, 92, 95, 96], (ζ') Meshless Local Petrov-Galerkin method (Τοπική Μέθοδος Petrov-Galerkin χωρίς Διακριτοποίηση) [3, 5, 94], (η') Local Boundary Integral Equation method (Μέθοδος Τοπικών Ολοκληρωτικών Εξισώσεων χωρίς Διακριτοποίηση) [6, 99, 100] και (ια') hp-Meshless cloud method [29, 52]. Οι ουσιαστικότερες διαφορές σε αυτές τις μεθοδολογίες εντοπίζονται κυρίως στην τεχνική που υλοποιείται κάθε φορά για την παρεμβολή των μεταβλητών του πεδίου. Οι σημαντικότερες από αυτές είναι: (α') Moving Least Squares (Μέθοδος Κινούμενων Ελαχίστων Τετραγώνων) [51], (β') Partition of Unity [10] και (γ') Radial Basis Point Interpolation Functions (Μέθοδος Παρεμβολής Σημείων με Βάση Ακτινικών Συναρτήσεων) [41, 54, 93]. Οι πρώτες έξι από τις παραπάνω μεθόδους χρησιμοποιούν κελία στο υπόβαθρο (background cells) της διασποράς των σημείων της κανάβου, ώστε να είναι εφικτή η πραγματοποίηση των αριθμητικών ολοκληρώσεων που συναντούνται στην Ασθενή Διατύπωση του Galerkin. Η υποχρεωτική χρήση αυτών των κελιών καθιστούν τις μεθόδους ως «μη-αληθινές» τεχνικές χωρίς διακριτοποίηση. Στον αντίποδα αυτών, στην Τοπική Μέθοδο Petrov-Galerkin χωρίς Διακριτοποίηση προτείνεται μία νέα αριθμητική μέθοδος ολοκλήρωσης του τοπικού χωρίου, βασισμένη σε μία τοπική συμμετρική ασθενή διατύπωση του Galerkin, όπου ο Atluri και οι συνεργάτες του [6] αποδεικνύουν ότι η μεθοδός τους είναι μία πραγματικά χωρίς-διακριτοποίηση αριθμητική μέθοδος (mesh-free method). Μία επιπλέον πολλά υποσχόμενη τεχνική είναι η Μέθοδος των Τοπικών Ολοκληρωτικών Εξισώσεων χωρίς Διακριτοποίηση, της οποίας οι ολοκληρωτικές εξισώσεις

είναι ουσιαστικά ίδιες με αυτές της Μεθόδου των Συνοριακών Στοιχείων. Παρόλα αυτά, λόγω της παρουσίας ιδιόμορφων επιφανειακών ή/και ολοκληρωμάτων όγκου, απαιτείται ειδική μεταχείρισή τους για το σωστό υπολογισμό τους και τη σύγκλιση των αριθμητικών αποτελεσμάτων.

Μετά τις πρωτοποριακές εργασίες του Zhu και των συνεργατών του [99, 100], αρκετές εργασίες βασισμένες στη Μέθοδο των Τοπικών Ολοκληρωτικών Εξισώσεων χωρίς Διακριτοποίηση έχουν προταθεί τα τελευταία χρόνια. Οι πιο αντιπροσωπευτικές δημοσιεύσεις που μπορεί κάποιος να βρει στη διεθνή βιβλιογραφία είναι οι [24, 98, 99, 100] για γραμμικά και μη-γραμμικά προβλήματα που περιγράφονται από τη μερική διαφορική εξίσωση του Poisson, οι εργασίες [5, 6, 8, 21, 38, 40, 73, 74] που αφορούν την ανάλυση μη-ομογενών και γραμμικών ελαστικών μέσων, οι εργασίες [55, 77, 78, 82] που μελετούν λεπτότοιχες πλάκες, οι δημοσιεύσεις [75, 81] αφορούν την μελέτη μεταβατικών προβλημάτων θερμοελαστικότητας και μετάδοσης θερμότητας, οι δημοσιεύσεις [79, 80] για μικροπολική ελαστικότητα και μη-τοπική ελαστικότητα, και οι δημοσιεύσεις σχετικά με ανάλυση που παρουσιάζουν αξονοσυμμετρία στη γεωμετρία [15, 63, 81, 88]. Επιπλέον σχετικά πρόσφατα στις εργασίες [66, 67, 68, 69, 83, 90] προτείνονται νέες τεχνικές –βασισμένες στη Μέθοδο των Τοπικών Ολοκληρωτικών Εξισώσεων χωρίς Διακριτοποίηση– που επιλύουν στατικά, ημι-μόνιμης κατάστασης και δυναμικά ελαστικά προβλήματα στις δύο διαστάσεις. Για περισσότερες λεπτομέρειες στην αριθμητική εφαρμογή της Μεθόδου των Τοπικών Ολοκληρωτικών Εξισώσεων χωρίς Διακριτοποίηση, τις τεχνικές ολοκλήρωσης και την αναπαράσταση των μεταβλητών του πεδίου μπορεί κάποιος να ανατρέξει στις εργασίες ανασκόπησης [4, 7, 76, 89] και στο βιβλίο του Atluri [9].

1.3 Δομή του διδακτορικού συγγράμματος

Η δομή του παρόντος διδακτορικού συγγράμματος είναι η εξής:

1. Το πρώτο κεφάλαιο αποτελεί την εισαγωγή της διδακτορικής διατριβής. Γίνεται μία ανασκόπηση της διεθνούς βιβλιογραφίας στην εξέλιξη των αριθμητικών Μεθόδων των Συνοριακών Στοιχείων και των Τοπικών Μεθόδων χωρίς Διακριτοποίηση, καθώς και της χρήσης των μεθόδων αυτών στο Μη-Καταστροφικό Έλεγχο.
2. Στο δεύτερο κεφάλαιο παρατίθεται η απαραίτητη θεωρία της Μεθόδου των Συνοριακών Στοιχείων για την ανάλυση ισότροπων ομογενών ελαστικών και ακουστικών συνεχών σωμάτων στις δύο διαστάσεις, τόσο για μεταβατικά όσο και για μόνιμης κατάστασης προβλήματα.
3. Η παρουσίαση της θεωρίας για την περιγραφή των Τοπικών Μεθόδων χωρίς Διακριτοποίηση, με εφαρμογή στα προαναφερθέντα συνεχή μέσα στις δύο διαστάσεις, παρουσιάζεται στο τρίτο κεφάλαιο.

4. Στο τέταρτο κεφάλαιο γίνεται πιστοποίηση του προγράμματος Η/Υ για όλες τις αριθμητικές μεθόδους που πραγματεύονται τα Κεφ. 2 και 3. Η πρωτοτυποποίηση διαφόρων απλών προβλημάτων και η σύγκριση των αριθμητικών τούσ αποτελεσμάτων αποδεικνύει την αξιοπιστία των μεθόδων αλλά και την ικανότητα του προγράμματος να τα επιλύει.
5. Στο πέμπτο κεφάλαιο γίνεται εφαρμογή των αριθμητικών μεθόδων σε προβλήματα του Μη-Καταστροφικού Ελέγχου. Συγκεκριμένα επιλύονται τα προβλήματα κυματικής διάδοσης της ελεύθερης επίπεδης πλάκας –με ή χωρίς ατέλειες– και της δεξαμενής αποθήκευσης υγρών καυσίμων. Δύο τεχνικές φασματικής ανάλυσης εφαρμόζονται ώστε να εξαχθούν χρήσιμα συμπεράσματα για την κατανόηση του φαινομένου της διάδοσης των κυμάτων σε αυτές τις κατασκευές.
6. Τα γενικά συμπεράσματα της έρευνας που διεξήχθη στη παρούσα διδακτορική διατριβή περιγράφονται εν συντομία στο έκτο και τελευταίο κεφάλαιο. Τέλος παρατίθενται ορισμένες προτάσεις για μελλοντική έρευνα στο πεδίο των Συνοριακών Στοιχείων και των Τοπικών Μεθόδων χωρίς Διακριτοποίηση, καθώς και της εφαρμογής τους στο Μη-Καταστροφικό Έλεγχο.

1.4 Πρωτότυπα στοιχεία της διατριβής

Τα πρωτότυπα στοιχεία της παρούσης διδακτορικής διατριβής είναι τα εξής:

- (α') Ανάπτυξη πρωτότυπων αριθμητικών μεθοδολογιών χωρίς διακριτοποίηση για την επίλυση στατικών και δυναμικών προβλημάτων ελαστικότητας και ακουστικής στις δύο διαστάσεις.
- (β') Ανάπτυξη αριθμητικών τεχνικών των βασισμένες στη Μέθοδο των Συνοριακών Στοιχείων και των Τοπικών Μεθόδων χωρίς Διακριτοποίηση σε συνδυασμό με τη φασματική ανάλυση του μετασχηματισμού Fourier και της Αναπαράστασης Χρόνου-Συχνότητας, για την εύρεση καμπυλών διασκόρπισης σε κυματοδηγούς.
- (γ') Πρωτότυπα συμπεράσματα για τη διάδοση ελαστικών κυμάτων σε δεξαμενές αποθήκευσης υγρών καυσίμων.

Μέρος του ερευνητικού έργου –στο πλαίσιο της διδακτορικής διατριβής– είναι ήδη δημοσιευμένο σε διεθνή έγκριτα περιοδικά και συνέδρια. Αναφορά στις δημοσιεύσεις και στα πρακτικά των συνεδρίων πρόκειται να γίνει στα επόμενα κεφάλαια με παραπομπή στην αντίστοιχη βιβλιογραφία του εκάστοτε κεφαλαίου.

1.5 Περί μαθηματικών συμβολισμών

Σε όλες τις μαθηματικές εξισώσεις και διατυπώσεις, που παρατίθεται στην παρούσα διδακτορική διατριβή, ακολουθήθηκε ένας γενικός κανόνας συμβολισμού προκειμένου ο αναγνώστης να μπορεί να τις κατανοεί και να τις αναγνωρίζει με εύκολο τρόπο. Ο τανυστικός συμβολισμός υιοθετήθηκε για τη περιγραφή των ποσοτήτων που παρουσιάζονται στις εξισώσεις στο παρόν σύγγραμμα.

Για την περίπτωση του τανυστικού συμβολισμού οι βαθμωτές γενικά ποσότητες συμβολίζονται με μικρά κανονικού πάχους γράμματα, ενώ οι διανυσματικές με παχιά μικρά γράμματα. Οι δυαδικοί και τριαδικοί πίνακες παρουσιάζονται με παχιά γράμματα και με μία ή δύο κυματοειδείς παύλες άνω από αυτούς αντίστοιχα. Συνεπώς ισχύουν οι παρακάτω συμβολισμοί:

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= v_1 \hat{\mathbf{e}}^{(1)} + v_2 \hat{\mathbf{e}}^{(2)} + \dots, \\ \nabla f &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \hat{\mathbf{e}}^{(1)} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \hat{\mathbf{e}}^{(2)} + \dots, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \dots, \\ \nabla \cdot \nabla f &\equiv \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \dots, \\ \nabla^2 \mathbf{v} &= \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} \hat{\mathbf{e}}^{(1)} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} \hat{\mathbf{e}}^{(2)} + \dots, \\ \tilde{\mathbf{I}} &= \hat{\mathbf{e}}^{(1)} \otimes \hat{\mathbf{e}}^{(1)} + \hat{\mathbf{e}}^{(2)} \otimes \hat{\mathbf{e}}^{(2)} + \dots, \\ \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} &= \tilde{\mathbf{W}}, \\ \tilde{\mathbf{A}} \otimes \mathbf{b} &= \tilde{\tilde{\mathbf{c}}},\end{aligned}$$

όπου $\hat{\mathbf{e}}^{(i)}$ το μοναδιαίο διάνυσμα στην i διεύθυνση του συστήματος συντεταγμένων που αναφέρεται κάποιος, ∇ είναι ο τελεστής βάθμωσης, « $\otimes$ », « $\cdot$ » ο δυαδικός τελεστής της διάταξης και το σύμβολο του εσωτερικού γινομένου αντίστοιχα. Ο μοναδιαίος πίνακας θα συμβολίζεται στο εξής ως $\tilde{\mathbf{I}}$. Επίσης στα διανύσματα, των οποίων το μέτρο είναι ίσο με τη μονάδα, θα τοποθετείται σε αυτά μία τεθλασμένη παύλα ($\hat{\mathbf{n}}$) για γρήγορη αναγνώρισή τους από τον αναγνώστη. Τέλος το διάνυσμα $\mathbf{0}$ και το μητρώο $\tilde{\mathbf{O}}$ έχουν όλα τους τα στοιχεία ίσα με μηδέν, ενώ το διάνυσμα $\mathbf{e}$ έχει όλα του τα στοιχεία ίσα με τη μονάδα.

Αν θεωρηθεί ότι ο τανυστής $\tilde{\mathbf{v}}$ εκφράζεται μέσω της διάταξης των διανυσμάτων $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$, τότε ισχύει ο παρακάτω συμβολισμός

$$(\tilde{\mathbf{v}} \otimes \mathbf{w})^{132} = ((\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) \otimes \mathbf{w})^{132} = \mathbf{u} \otimes \mathbf{w} \otimes \mathbf{v}.$$

Επίσης στις αριθμητικές μεθόδους που πραγματεύεται η διδακτορική διατριβή είναι αναγκαίος ο υπολογισμός ολοκληρωμάτων επιφάνειας και όγκου. Αυτά συμβολίζονται ως εξής

$$\int_{\Gamma} \cdot dS_{\mathbf{y}}, \quad \int_{\Omega} \cdot dV_{\mathbf{y}},$$

όπου στο κάτω μέρος του συμβόλου της ολοκλήρωσης υποδηλώνεται η επιφάνεια Γ και ο όγκος Ω στον οποίο λαμβάνει χώρα η ολοκλήρωση. Το διάνυσμα θέσης $\mathbf{y}$ είναι το σημείο πεδίου –συχνά αποκαλούμενο και ως σημείο ολοκλήρωσης– το οποίο ανήκει στο χώρο όπου κάθε φορά γίνεται η ολοκλήρωση.

Γενικά στο παρόν σύγγραμμα της διδακτορικής διατριβής θα χρησιμοποιούνται οι μονάδες του διεθνούς συστήματος μονάδων (S.I.). Στην περίπτωση που δεν αναγράφονται θα εννοούνται: συγκεκριμένα για διαστάσεις μήκους θα χρησιμοποιείται η θεμελιώδης μονάδα του μέτρου (m), για διαστάσεις μάζας η θεμελιώδης μονάδα του χιλιογράμμου (kg), για διαστάσεις χρόνου η θεμελιώδης μονάδα του δευτερολέπτου (sec), για διαστάσεις θερμοκρασίας η μονάδα του Kelvin (K), για τη δύναμη η μονάδα του Newton ($\text{N} = \text{kg m/sec}^2$), για διαστάσεις πίεσης η μονάδα του Pascal ($\text{Pa} = \text{N/m}^2$), για διαστάσεις κυκλικής συχνότητας η μονάδα του Hertz (Hz), για διαστάσεις γωνιακής συχνότητας η μονάδα rad/sec κ.ο.κ.

1.6 Μερικά λόγια για το πρόγραμμα Ηλεκτρονικού Υπολογιστή

Για την παραγωγή των αποτελεσμάτων και την επαλήθευση της αριθμητικής Μεθόδου των Συνοριακών Στοιχείων και των Τοπικών Μεθόδων χωρίς Διακριτοποίηση αναπτύχθηκε πρόγραμμα Ηλεκτρονικού Υπολογιστή (H/Y) γραμμένο στη γλώσσα προγραμματισμού C++ [13, 84] κατά τα διεθνή πρότυπα ISO/ANSI. Το πρόγραμμα αυτό σχεδιάστηκε με τέτοιο τρόπο ώστε να γίνεται εφαρμογή της τεχνολογίας του αντικειμενοστρεφούς προγραμματισμού (object oriented programing), για την οποία μπορεί κάποιος να διαβάσει στο βιβλίο [22]. Επίσης έγινε χρήση της πρότυπης βιβλιοθήκης Standart Template Library² [49] της C++, της επιστημονικής βιβλιοθήκης ανοιχτού κώδικα GNU Scientific Library³ γραμμένη στη γλώσσα ANSI-C [33] και της βιβλιοθήκης πινάκων blitz++⁴ κωδικοποιημένη στη γλώσσα προγραμματισμού C++ [91]. Για την τριγωνοποίηση γεωμετρικών έγινε χρήση του προγράμματος Triangle⁵ [71, 72], κωδικοποιημένο στη γλώσσα προγραμματισμού ANSI-C. Επίσης έγινε χρήση των έτοιμων υπορουτινών του Bond⁶ για τον υπολογισμό των συναρτήσεων Bessel [97]. Τέλος, για την επίλυση των γραμμικών συστημάτων που προέκυψαν στις αριθμητικές μεθόδους που πραγματεύεται η παρούσα διδακτορική διατριβή, έγινε χρήση των έτοιμων υπορουτινών της βιβλιοθήκης GNU Scientific Library καθώς και της βιβλιοθήκης SparseLib++⁷ για αραιές πύκνωσης πίνακες, κωδικοποιημένη στη γλώσσα προγραμματισμού C++ [28].

Το πρόγραμμα που χτίστηκε είναι ικανό να επιλύει προβλήματα δύο διαστάσεων τόσο για ισότροπο ομογενές συνεχές γραμμικό ελαστικό μέσο όσο και για ισότροπο

²βλ. ιστοσελίδα: <http://www.sgi.com/tech/stl/>

³βλ. ιστοσελίδα: <http://www.gnu.org/software/gsl/>

⁴βλ. ιστοσελίδα: <http://sourceforge.net/projects/blitz/>

⁵βλ. ιστοσελίδα: <http://www.cs.cmu.edu/~quake/triangle.research.html>

⁶βλ. ιστοσελίδα: <http://www.crbond.com>

⁷βλ. ιστοσελίδα: <http://math.nist.gov/sparselib++/>

ομογενές συνεχές ακουστικό μέσο σε σταθερή κατάσταση, στο πεδίο των συχνοτήτων και σε δυναμικά φαινόμενα. Στο πρόγραμμα αυτό γίνεται χρήση της αριθμητικής Μεθόδου των Συνοριακών Στοιχείων και των Τοπικών Μεθόδων Petrov-Galerkin χωρίς Διακριτοποίηση τύπου 1, και τύπων 4 έως 6 και η Μέθοδος των Τοπικών Ολοκληρωτικών Εξισώσεων χωρίς Διακριτοποίηση τύπων 1 έως 4) που πρόκειται να παρουσιαστούν στα Κεφ. 2 και 3 αντίστοιχα.

Βιβλιογραφία

- [1] Agnatiaris JP, Polyzos D (2005): A boundary element method for acoustic scattering from non-axisymmetric and axisymmetric elastic shells. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, **4**, 197–212.
- [2] Alleyne D, Cawley P (1991): A two-dimensional Fourier transform method for the measurement of propagating multimode signals. *Journal of the Acoustical Society of America*, **89**, 1159–1168.
- [3] Atluri SN, Zhu T (1998): A new Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics. *Computational Mechanics*, **22**, 117–127.
- [4] Atluri SN, Kim H-G, Cho JY (1999): A critical assessment of the truly Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG), and Local Boundary Integral Equation (LBIE) methods. *Computational Mechanics*, **24**, 348–372.
- [5] Atluri SN, Zhu T (2000): The meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach for solving problems in elasto-statics. *Computational Mechanics*, **25**, 169–179.
- [6] Atluri SN, Sladek J, Sladek V, Zhu T (2000): The local boundary integral equation (LBIE) and its meshless implementation for linear elasticity. *Computational Mechanics*, **25**, 180–198.
- [7] Atluri SN, Shen S (2002): The Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Method: A Simple & Less-costly Alternative to the Finite Element and Boundary Element Methods. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, **3**, 11–51.
- [8] Atluri SN, Han ZD, Shen S (2003): Meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approaches for solving the weakly-singular traction and displacement boundary integral equations. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, **4**, 507–517.
- [9] Atluri SN (2004): *The Meshless Method (MPLG) for Domain & BIE discretizations*. Tech Science Press.

-
- [10] Babuška I, Melenk JM (1997): The partition of unity method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **40**, 727–758.
 - [11] Banerjee PK (1994): *The Boundary Element Methods in Engineering*. McGraw-Hill.
 - [12] Bartoli I, Marzania A, di Scalea FL, Viola E (2006): Modeling wave propagation in damped waveguides of arbitrary cross-section. *Journal of Sound and Vibration*, **295**, 685–707.
 - [13] Barton JJ, Nackman LR (1994): *Scientific and Engineering C++*. Addison-Wesley.
 - [14] Basri R, Chiu WK (2004): Numerical analysis on the interaction of guided Lamb waves with a local elastic stiffness reduction in quasi-isotropic composite plate structures. *Composite Structures*, **66**, 87–99.
 - [15] Batra RC, Porfiri M, Spinello D (2004): Treatment of material discontinuity in two meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) formulations of axisymmetric transient heat conduction. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **61**, 2461–2479.
 - [16] Belytschko T, Lu YY, Gu L (1994): Element-free Galerkin methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **37**, 229–256.
 - [17] Belytschko T, Lu YY, Gu L (1995): Element-free Galerkin methods for static and dynamic fracture. *International Journal of Solids and Structures*, **32**, 2547–2570.
 - [18] Belytschko T, Krongauz Y, Organ D, Fleming M, Krysl P (1996): Meshless methods: An overview and recent developments. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **139**, 3–47.
 - [19] Beskos DE (1987): Boundary element methods in dynamic analysis. *Applied Mechanics Reviews ASME*, **40**, 1–23.
 - [20] Beskos DE (1997): Boundary element methods in dynamic analysis. Part II. *Applied Mechanics Reviews ASME*, **50**, 149–197.
 - [21] Bodin A, Ma J, Xin XJ, Krishnaswami P (2006): A meshless integral method based on regularized boundary integral equation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **195**, 6258–6286.
 - [22] Booch G (1994): *Object-Oriented Analysis and Design*. Benjamin/Cummings.
 - [23] Brebbia CA (1978): *The Boundary Element Method for Engineers*. Pentech Press.

- [24] Chen T, Raju IS (2003): A coupled finite element and meshless local Petrov-Galerkin method for two-dimensional potential problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **192**, 4533–4550.
- [25] Damjanović V, Weaver RL (2004): Propagating and evanescent elastic waves in cylindrical waveguides of arbitrary cross section. *Journal of the Acoustical Society of America*, **115**, 1572–1581.
- [26] Dattal D, Kishoret NN (1996): Features of ultrasonic wave propagation to identify defects in composite materials modelled by finite element method. *NDT & E international*, **29**, 213–223.
- [27] Dominguez J (1993): *Boundary Elements in Dynamics*. Computational Mechanics Publications.
- [28] Dongarra J, Lumsdaine A, Pozo R, Remington K (1994): A Sparse Matrix Library in C++ for High Performance Architectures. *Proceedings of the Second Object Oriented Numerics Conference*, 214–218.
- [29] Duarte CA, Oden JT (1996): An h-p adaptive method using clouds. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **139**, 237–262.
- [30] El-Zafrany A (1993): *Techniques of the Boundary Element Method*. Ellis Horwood.
- [31] von Estorff O (2000): *Boundary Elements in Acoustics: Advances and Applications*. WIT press.
- [32] Finnveden S (2004): Evaluation of modal density and group velocity by a finite element method. *Journal of Sound and Vibration*, **273**, 51–75.
- [33] Galassi M, Davies J, Theiler J, Gough B, Jungman G, Booth M, Rossi F (2005): *GNU Scientific Library; Reference Manual*.
<http://www.gnu.org/software/gsl/>.
- [34] Gavrić L (1994): Finite element computation of dispersion properties of thin-walled waveguides. *Journal of Sound and Vibration*, **173**, 113–124.
- [35] Gavrić L (1995): Computation of propagating waves in free rail using a finite element technique. *Journal of Sound and Vibration*, **185**, 531–543.
- [36] Gingold RA, Monaghan JJ (1977): Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **181**, 375–389.
- [37] Gosz S, Liu WK (1996): Admissible approximations for essential boundary conditions in the reproducing kernel particle method. *Computational Mechanics*, **19**, 120–135.

-
- [38] Gu YT, Liu GR (2001): A coupled element free Galerkin/boundary element method for stress analysis of two-dimensional solids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **190**, 4405–4419.
- [39] Gunawan A, Hirose S (2005): Boundary element analysis of guided waves in a bar with an arbitrary cross-section. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **29**, 913–924.
- [40] Han ZD, Atluri SN (2004): Meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approaches for solving 3D Problems in elasto-statics. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, **6**, 169–188.
- [41] Hardy RL (1971): Multiquadric equations of topography and other irregular surfaces. *Journal of Geophysical Research*, **76**, 1905–1915.
- [42] Hayashi T, Endoh S (2000): Calculation and visualization of Lamb wave motion. *Ultrasonics*, **38**, 770–773.
- [43] Hayashi T, Tamayama C, Murase M (2006): Wave structure analysis of guided waves in a bar with an arbitrary cross-section. *Ultrasonics*, **44**, 17–24.
- [44] Hesse D, Cawley P (2006): Surface wave modes in rails. *Journal of the Acoustical Society of America*, **120**, 733–740.
- [45] Hladky-Hennion AC, Langlet P, de Billy M (1996): Finite element analysis of the propagation of acoustic waves along waveguides. *Journal of Sound and Vibration*, **200**, 519–530.
- [46] Hosten B, Castaings M (2004): Finite methods for modelling the guided waves propagation in structures with weak interfaces. *Journal of the Acoustical Society of America*, **117**, 1108–1113.
- [47] Hosten B, Castaings M (2006): FE modeling of Lamb mode diffraction by defects in anisotropic viscoelastic plates. *NDT & E International*, **39**, 195–204.
- [48] Houillon L, Ichchou MN, Jezequel L (2005): Wave motion in thin-walled structures. *Journal of Sound and Vibration*, **281**, 483–507.
- [49] Josuttis NM (1999): *The C++ Standard Library; A Tutorial and Reference*. Addison-Wesley.
- [50] Kattis SE, Polyzos D, Beskos DE (1994): Dynamic response of 3-D elastic systems by an improved frequency domain BEM. *Proceedings of the BEM-16 Conference, Southampton, UK*.

- [51] Lancaster P, Salkauskas K (1981): Surfaces generated by Moving Least Squares Methods. *Mathematics of Computations*, **37**, 141–158.
- [52] Liszka TJ, Duarte CAM, Tworzydło WW (1996): hp-Meshless cloud method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **139**, 263–288.
- [53] Liu WK, Jun S, Zhang YF (1995): Reproducing Kernel Particle methods. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **20**, 1081–1106.
- [54] Liu GR, Gu YT (2001): A local point interpolation method for stress analysis of two-dimensional solids. *Structural Engineering and Mechanics*, **11**, 221–236.
- [55] Long S, Zhang Q (2002): Analysis of thin plates by the local boundary integral equation (LBIE) method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **26**, 707–718.
- [56] Lu YY, Belytschko T, Gu L (1994): A new implementation of the element free Galerkin method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **113**, 397–414.
- [57] Mackerle J (1999): Finite-element modelling of non-destructive material evaluation: a bibliography (1976-1997). *Modeling and Simulation in Materials Science and Engineering*, **7**, 107–145.
- [58] Moreau L, Castaings M, Hosten B (2006): An orthogonality relation-based technique for post-processing finite element predictions of waves scattering in solid waveguides. *Journal of the Acoustical Society of America*, **120**, 611–620.
- [59] Moser F, Jacobs LJ (1998): Application of finite element methods to study transient wave propagation in elastic wave-guides. *Review of Progress in Quantitative NDE*, **17**, 161–167.
- [60] Moser F, Jacobs LJ, Qu J (1999): Modeling elastic wave propagation in waveguides with the finite element method. *NDT & E international*, **32**, 225–234.
- [61] Nayroles B, Touzot G, Villon P (1992): Generalizing the finite element method: Diffuse approximation and diffuse elements. *Computational Mechanics*, **10**, 307–318.
- [62] Polyzos D, Tsinopoulos SV, Beskos DE (1998): Static and dynamic boundary element analysis in incompressible linear elasticity. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, **17**, 515–536.

-
- [63] Raju IS, Chen T (2001): Meshless Petrov-Galerkin Method applied to axisymmetric problems. *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, **AIAA-2001-1253**, 1–12.
- [64] Rose JL (1999): *Ultrasonic waves in solid media*. Cambridge University Press.
- [65] Rus G, Wooha S-C, Gallego R (2004): Analysis and design of wedge transducers using the boundary element method. *Journal of the Acoustical Society of America*, **115**, 2919–2927.
- [66] Sellountos EJ, Polyzos D (2003): A MLPG (LBIE) method for solving frequency domain elastic problems. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, **4**, 619–636.
- [67] Sellountos EJ, Polyzos D (2005): A MLPG (LBIE) approach in combination with BEM. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **194**, 859–875.
- [68] Sellountos EJ, Polyzos D (2005): A meshless local boundary integral equation method for solving transient elastodynamic problems. *Computational Mechanics*, **35**, 265–276.
- [69] Sellountos EJ, Vavourakis V, Polyzos D (2005): A new Singular/Hypersingular MLPG (LBIE) method for 2D elastostatics. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, **7**, 35–48.
- [70] Seron FJ, Sanz FJ, Kindelan M, Badal JI (1990): Finite element method for elastic wave propagation. *Communications in Applied Numerical Methods*, **6**, 359–368.
- [71] Shewchuk JR (1996): Triangle: Engineering a 2D Quality Mesh Generator and Delaunay Triangulator. *Applied Computational Geometry: Towards Geometric Engineering*, **1148**, 203–222.
- [72] Shewchuk JR (2002): Delaunay refinement algorithms for triangular mesh generation. *Computational Geometry*, **22**, 21–74.
- [73] Sladek J, Sladek V, Atluri SN (2000): Local boundary integral equation (LBIE) method for solving problems of elasticity with non-homogeneous material properties. *Computational Mechanics*, **24**, 456–462.
- [74] Sladek J, Sladek V, Van Keer R (2000): Numerical integration of singularities of local boundary integral equations. *Computational Mechanics*, **25**, 394–403.

- [75] Sladek J, Sladek V, Atluri SN (2001): A pure contour formulation for meshless local boundary integral equation method in thermoelectricity. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, **2**, 423–434.
- [76] Sladek J, Sladek V, Atluri SN (2002): Application of the local boundary integral equation method to boundary value problems. *International Journal of Applied Mechanics*, **38**, 1025–1043.
- [77] Sladek J, Sladek V, Mang HA (2002): Meshless formulation for simply supported and clamped plate problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **55**, 359–375.
- [78] Sladek J, Sladek V, Mang HA (2002): Meshless local boundary integral equation method for plates resting on the elastic foundation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **191**, 5943–5959.
- [79] Sladek J, Sladek V (2003): Application of local boundary integral method in to micropolar elasticity. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **27**, 81–90.
- [80] Sladek J, Sladek V, Bazant ZP (2003): Non-local boundary integral formulation for softening damage. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **57**, 103–116.
- [81] Sladek J, Sladek V, Krivacek J, Zhang Ch (2003): Local BIEM for transient heat conduction analysis in 3D axisymmetric functionally graded solids. *Computational Mechanics*, **32**, 169–176.
- [82] Sladek J, Sladek V, Mang HA (2003): Meshless formulations for simply supported and clamped plates under dynamic load. *Computers and Structures*, **81**, 1643–1651.
- [83] Sladek J, Sladek V, Van Keer R (2003): Meshless local boundary integral equation method for 2D elastodynamic problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **57**, 235–249.
- [84] Stroupstrup B (2000): *The C++ Programming Language*. AT&T.
- [85] Sukumar N, Moran B, Belytschko T (1998): The natural element method in solid mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **43**, 839–887.
- [86] Tsinopoulos SV, Agnatiaris JP, Polyzos D (1999): An advanced boundary element fast Fourier transform axisymmetric formulation for acoustic radiation and wave scattering problems. *Journal of the Acoustical Society of America*, **105**, 1517–1526.

-
- [87] Vavourakis V, Polyzos D (2003): *A BEM/2D-FFT numerical technique for solving wave propagation problems in damaged plates*. ICCES-03 Conference, Corfu, Greece.
- [88] Vavourakis V, Polyzos D (2006): A MLPG4(LBIE) formulation for solving axisymmetric problems. *Advances in Meshless Methods*, eds: Sladek J, Sladek V, Tech Science Press.
- [89] Vavourakis V, Sellountos EJ, Polyzos D (2006): A comparison study on different MLPG(LBIE) formulations. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, **13**, 171–184.
- [90] Vavourakis V, Polyzos D (2006): A MLPG4 (LBIE) formulation in elastostatics. *Computers, Materials & Continua*, (IN PRESS).
- [91] Veldhuizen T (2005): *Blitz++ User's Guide; A C++ class library for scientific computing*.
<http://sourceforge.net/projects/blitz/>.
- [92] Wang K, Zhou S, Shan G (2005): The natural neighbour Petrov-Galerkin method for elasto-statics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **63**, 1126–1145.
- [93] Wendland H (1995): Piecewise polynomial, positive definite and compactly supported radial basis functions of minimal degree. *Advances in Computational Mathematics*, **4**, 389–396.
- [94] Wendland H (1999): Meshless Galerkin methods using radial basis function. *Mathematics of Computations*, **68**, 1521–1531.
- [95] Xiao JR (2004): Local Heaviside weighted MLPG meshless method for two-dimensional solids using compactly supported radial basis functions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **193**, 117–138.
- [96] Yongchang C, Hehua Z (2004): A meshless local natural neighbour interpolation method for stress analysis of solids. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **28**, 607–613.
- [97] Zhang S, Jin J (1996): *Computation of Special Functions*. John Wiley & Sons.
- [98] Zhang J, Tanaka M, Matsumoto T (2004): Meshless analysis of potential problems in three dimensions with the hybrid boundary node method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **59**, 1147–1166.

- [99] Zhu T, Zhang J-D, Atluri SN (1998): A local boundary integral equation (LBIE) method in computational mechanics, and a meshless discretization approach. *Computational Mechanics*, **21**, 223–235.
- [100] Zhu T, Zhang J-D, Atluri SN (1998): A meshless local boundary integral equation (LBIE) method for solving non-linear problems. *Computational Mechanics*, **22**, 174–186.

Κεφάλαιο 2

Μέθοδος Συνοριακών Στοιχείων

Σκοπός αυτού του κεφαλαίου είναι η παρουσίαση της Μεθόδου των Συνοριακών Στοιχείων (ΜΣΣ) που αναπτύχθηκε για τις ανάγκες της παρούσης διδακτορικής διατριβής και η οποία επιλύει προβλήματα ελαστικότητας, ακουστικής και αλληλεπίδρασης ελαστικού-ακουστικού μέσου στις δύο διαστάσεις. Πρώτα θα γίνει μία σύντομη εισαγωγή στην κλασική γραμμική θεωρία ελαστικότητας. Έπειτα θα παρουσιαστούν οι ολοκληρωτικές εξισώσεις –που προκύπτουν από το αμοιβαίο θεώρημα του Betti– τόσο για μέσο σε ισορροπία όσο και στο πεδίο συχνοτήτων. Στη συνέχεια παρουσιάζονται οι βασικές εξισώσεις και οι ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις προβλημάτων συνοριακών τιμών στην ακουστική. Ακολούθως γίνεται μία σύντομη περιγραφή των συνοριακών στοιχείων, των συναρτήσεων μορφής, των γεωμετρικών μετασχηματισμών που απαιτούνται για την παρεμβολή συναρτήσεων και τη περιγραφή-διακριτοποίηση ενός προβλήματος συνοριακών τιμών. Τέλος το κεφάλαιο αυτό θα κλείσει με μία παράγραφο που παρουσιάζει τον τρόπο με τον οποίο γίνεται η αριθμητική εφαρμογή της ΜΣΣ.

2.1 Γραμμικό ελαστικό μέσο στις δύο διαστάσεις

Έστω ένα συνεχές ομογενές γραμμικό ελαστικό μέσο, που έχει όγκο Ω και περικλείεται από το σύνορο Γ , όπως αυτό φαίνεται στο Σχ. 2.1. Η καταστατική εξίσωση που συνδέει τον ταυστή των τάσεων $\tilde{\sigma}$ με τον αντίστοιχο των παραμορφώσεων $\tilde{\epsilon}$ είναι η εξής

$$\tilde{\sigma} = \hat{\tilde{C}} : \tilde{\epsilon}, \quad (2.1)$$

όπου ο ταυστής τέταρτης τάξης $\hat{\tilde{C}}$ περιέχει –στη γενικότερη των περιπτώσεων– 21 ανεξάρτητες σταθερές που περιγράφουν τη συμπεριφορά του πλήρως ανισότροπου ελαστικού μέσου.

Στην ειδική περίπτωση ενός ισότροπου ελαστικού μέσου στις δύο διαστάσεις η Εξ. (2.1) γράφεται στην ακόλουθη απλοϊκή μορφή

 Σχήμα 2.1: Ελαστικό σώμα όγκου Ω που περικλείεται από το σύνορο Γ .

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}) \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{12} \end{Bmatrix}, \quad (2.2)$$

όπου $\tilde{\mathbf{C}}$ το συμμετρικό μητρώο δυσκαμψίας και λ, μ οι σταθερές Lamé, οι οποίες συνδέονται με το μέτρο ελαστικότητας του Young (E) και τον λόγο του Poisson (ν) σύμφωνα με τις παρακάτω σχέσεις

$$\lambda = \begin{cases} \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} & , \text{ επίπεδη παραμορφωσιακή κατάσταση} \\ \frac{E\nu}{1-\nu^2} & , \text{ επίπεδη εντατική κατάσταση} \end{cases}, \quad (2.3)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (2.4)$$

Ο ταυστής των παραμορφώσεων συναρτήσει του διανύσματος των μετατοπίσεων ($\mathbf{u}$) εκφράζεται μέσω της σχέσης

$$\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left(\nabla_{\mathbf{x}} \otimes \mathbf{u}(\mathbf{x}) + (\nabla_{\mathbf{x}} \otimes \mathbf{u}(\mathbf{x}))^T \right), \quad (2.5)$$

ή ισοδύναμα

$$\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}. \quad (2.6)$$

Το διάνυσμα των τάσεων $\mathbf{t}$ για ένα συνοριακό σημείο ($\mathbf{x} \in \Gamma$) συνδέεται με τον ταυστή τάσεων ως εξής

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}) . \quad (2.7)$$

Λόγω της συμμετρίας του τανυστή των τάσεων $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$, η Εξ. (2.7) μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{n}_1 & 0 & \hat{n}_2 \\ 0 & \hat{n}_2 & \hat{n}_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} , \quad (2.8)$$

με $\hat{n}_i$ να είναι οι συνιστώσες του εξωτερικού μοναδιαίου διάνυσματος, κάθετο στο σύνορο Γ του σώματος.

Η μερική διαφορική εξίσωση που περιγράφει τη δυναμική συμπεριφορά του ελαστικού σώματος στο σημείο $\mathbf{x} \in \Omega$ είναι η Navier-Cauchy [5, 7] που γράφεται ως

$$\mu \nabla_{\mathbf{x}}^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + (\lambda + \mu) \nabla_{\mathbf{x}} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \rho_e \frac{\partial^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} , \quad (2.9)$$

όπου $\mathbf{f}$ το διανυσματικό πεδίο των πεδιακών φορτίσεων και ρ_e η πυκνότητα του υλικού. Στην παρούσα διδακτορική διατριβή οι πεδιακές δυνάμεις αγνοούνται, παρόλα αυτά για χάρη διατήρησης της γενικότητας δεν πρόκειται να αφαιρεθούν στις παρακάτω εξισώσεις.

Για να είναι καλά «τοποθετημένο» το παραπάνω πρόβλημα συνοριακών τιμών θα πρέπει να ορισθούν και οι κατάλληλες συνοριακές συνθήκες

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= \bar{\mathbf{u}}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_u \\ \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) &= \bar{\mathbf{t}}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_t \end{aligned} , \quad (2.10)$$

όπου $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_t$, με $\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{t}}$ να αντιπροσωπεύουν τα προκαθορισμένα διανύσματα των ουσιαστικών και φυσικών συνοριακών συνθηκών του προβλήματος αντίστοιχα.

2.1.1 Ολοκληρωτική εξίσωση γραμμικού ελαστοστατικού μέσου

Εάν κάποιος αφαιρέσει τον αδρανειακό όρο στο δεξί μέρος της μερικής διαφορικής Εξ. (2.9) τότε προκύπτει η εξίσωση ισορροπίας ενός συνεχούς ομογενούς ισότροπου γραμμικού ελαστικού μέσου

$$\mu \nabla_{\mathbf{x}}^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}) + (\lambda + \mu) \nabla_{\mathbf{x}} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} , \quad (2.11)$$

με αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}) &= \bar{\mathbf{u}}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_u \\ \mathbf{t}(\mathbf{x}) &= \bar{\mathbf{t}}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_t \end{aligned} . \quad (2.12)$$

Με βάση το αμοιβαίο θεώρημα του Betti μεταξύ δύο εντατικών καταστάσεων $(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}, \mathbf{f})$ και $(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^*, \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^*, \mathbf{f}^*)$ για ένα υλικό σημείο $\mathbf{x}^{(\kappa)}$ του σώματος [2, 4, 7]

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{u}^* (\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{f} (\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} + \int_{\Gamma} \mathbf{u}^* (\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{t} (\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} = \\ \int_{\Omega} \mathbf{u} (\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{f}^* (\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} + \int_{\Gamma} \mathbf{u} (\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{t}^* (\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

όπου το $\mathbf{x}^{(\kappa)}$ το διάνυσμα θέσης του σημείου πηγής (source point) και $\mathbf{y}$ το διάνυσμα θέσης του σημείου ολοκλήρωσης ή σημείου πεδίου (field point), το οποίο κατά περίπτωση ανήκει είτε στο σύνορο Γ είτε στο εσωτερικό Ω του χωρίου του ελαστικού σώματος.

Από την Εξ. (2.13) μετά από μαθηματικές πράξεις προκύπτει η ολοκληρωτική εξίσωση, γνωστή ως ταυτότητα του Somigliana

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\alpha}} (\mathbf{x}^{(\kappa)}) \cdot \mathbf{u} (\mathbf{x}^{(\kappa)}) + \int_{\Gamma} \tilde{\mathbf{t}}^* (\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{u} (\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} = \\ \int_{\Gamma} \tilde{\mathbf{u}}^* (\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{t} (\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} - \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{u}}^* (\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{f} (\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

όπου $\tilde{\boldsymbol{\alpha}} = \tilde{\mathbf{I}}$ όταν το σημείο στο οποίο αναφέρεται η ολοκληρωτική αναπαράσταση είναι εντός του σώματος πλην του συνόρου του ($\mathbf{x}^{(\kappa)} \in \{\Omega - \Gamma\}$), $\tilde{\boldsymbol{\alpha}} = \tilde{\mathbf{O}}$ όταν το σημείο είναι εκτός του σώματος ($\mathbf{x}^{(\kappa)} \notin \Omega$). Στην περίπτωση που $\mathbf{x}^{(\kappa)} \in \Gamma$, με το σύνορο Γ να είναι ομαλό, τότε θεωρείται $\tilde{\boldsymbol{\alpha}} = 1/2 \tilde{\mathbf{I}}$. Όταν δε το σύνορο Γ δεν είναι ομαλό στο σημείο $\mathbf{x}^{(\kappa)}$ τότε αντικαθίσταται από τον ακόλουθο πίνακα

$$\tilde{\boldsymbol{\alpha}} (\mathbf{x}^{(\kappa)}) = \begin{bmatrix} \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} - \frac{\sin 2\theta_1 - \sin 2\theta_2}{8\pi(1-\bar{\nu})} & \frac{\cos 2\theta_1 - \cos 2\theta_2}{8\pi(1-\bar{\nu})} \\ \frac{\cos 2\theta_1 - \cos 2\theta_2}{8\pi(1-\bar{\nu})} & \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} + \frac{\sin 2\theta_1 - \sin 2\theta_2}{8\pi(1-\bar{\nu})} \end{bmatrix}, \quad (2.15)$$

και $\bar{\nu} = \nu$ για επίπεδη εντατική κατάσταση και αντίστοιχα $\bar{\nu} = \nu/(1+\nu)$ για επίπεδη παραμορφωσιακή κατάσταση, με τις γωνίες θ_1, θ_2 να διευκρινίζονται στο Σχ. 2.2.

Σχήμα 2.2: Σημείο του συνόρου Γ που παρουσιάζει γωνία.

Ένας τρόπος αποφυγής υπολογισμού του μητρώου $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}$ ενός σημείου $\mathbf{x}^{(\kappa)}$ που ανήκει σε γωνία του συνόρου Γ του υπό-ανάλυση σώματος, είναι η ελαφριά μετατόπισή

του ώστε να μην ανήκει στη γωνία και να είναι μοναδικά ορισμένο το εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα $\hat{\mathbf{n}}$ στο σημείο πηγής $\mathbf{x}^{(\kappa)}$. Στην παρούσα διδακτορική διατριβή, όταν το σύνορο παρουσιάζει είτε γωνίες είτε αλλαγή στις συνοριακές συνθήκες τοπικά, τα αντίστοιχα συνοριακά στοιχεία που τοποθετήθηκαν για τη διακριτοποίηση του συνόρου (βλ. Εδάφ. 2.3) θεωρήθηκαν μερικώς ασυνεχή ή πλήρως ασυνεχή. Για περισσότερες λεπτομέρειες για τα συνοριακά στοιχεία μπορεί κάποιος να ανατρέξει στο Παρ. Β.

Εάν στην Εξ. (2.14) εφαρμοσθεί ο τελεστής απόκλισης $\nabla_{\mathbf{x}}^{(\kappa)}$ και γίνει διαδοχικά χρήση της σχέσης παραμορφώσεων-μετατοπίσεων (βλ. Εξ. (2.5)) και του νόμου του Hooke (βλ. Εξ. (2.1)) τότε προκύπτει η αντίστοιχη υπεριδιόμορφη ολοκληρωτική εξίσωση των τάσεων

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x}^{(\kappa)}) \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}^{(\kappa)}) + \int_{\Gamma} \tilde{\mathbf{t}}^*(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} = \\ \int_{\Gamma} \tilde{\mathbf{u}}^*(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{t}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} - \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{u}}^*(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

ή αλλιώς, αν εκμεταλλευτεί κάποιος τη συμμετρία του τανυστή των τάσεων μέσω της Εξ. (2.2), μπορεί να γραφτεί η Εξ. (2.16) ως

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x}^{(\kappa)}) \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}^{(\kappa)}) + \int_{\Gamma} \tilde{\boldsymbol{\tau}}^*(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} = \\ \int_{\Gamma} \tilde{\mathbf{v}}^*(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{t}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} - \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{v}}^*(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

όπου

$$\tilde{\mathbf{v}}^*(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}) = \begin{bmatrix} u_{111}^* & u_{112}^* \\ u_{221}^* & u_{222}^* \\ u_{121}^* & u_{122}^* \end{bmatrix}, \quad (2.18)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}}^*(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}) = \begin{bmatrix} t_{111}^* & t_{112}^* \\ t_{221}^* & t_{222}^* \\ t_{121}^* & t_{122}^* \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

Οι θεμελιώδεις πυρήνες των ολοκληρωτικών εξισώσεων Εξ. (2.14) και (2.17) είναι οι ακόλουθες [2, 10, 13, 15]

$$\tilde{\mathbf{u}}^*(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2\pi\mu} \left[\Psi \tilde{\mathbf{I}} - X \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \right], \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{t}}^*(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2\pi} \left[\left(\frac{d\Psi}{dr} - \frac{X}{r} \right) \left(\frac{\partial r}{\partial \hat{n}} \tilde{\mathbf{I}} + \hat{\mathbf{n}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \right) + \left(Z - \frac{2X}{r} \right) \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{n}} + \right. \\ \left. \left(\frac{4X}{r} - 2 \frac{dX}{dr} \right) \frac{\partial r}{\partial \hat{n}} \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \right], \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\tilde{\mathbf{u}}^* (\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2\pi} \left[\left(\frac{X}{r} - \frac{d\Psi}{dr} \right) \tilde{\mathbf{I}} \otimes \hat{\mathbf{r}} + \left(\frac{2X}{r} - Z \right) (\tilde{\mathbf{I}} \otimes \hat{\mathbf{r}})^{132} + \left(\frac{X}{r} - \frac{d\Psi}{dr} \right) \hat{\mathbf{r}} \otimes \tilde{\mathbf{I}} + \left(2 \frac{dX}{dr} - \frac{4X}{r} \right) \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \right], \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{t}}^* (\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}) = & \frac{\mu}{2\pi} \left[\left(\frac{4}{r} \frac{dX}{dr} - \frac{8X}{r^2} + Y \right) \left(\frac{\partial r}{\partial \hat{n}} (\tilde{\mathbf{I}} \otimes \hat{\mathbf{r}})^{132} + \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{n}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \right) + \right. \\ & \left(4 \frac{d^2 X}{dr^2} - \frac{20}{r} \frac{dX}{dr} + \frac{32X}{r^2} \right) \frac{\partial r}{\partial \hat{n}} \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} + \\ & \left(\frac{3}{r} \frac{dX}{dr} - \frac{6X}{r^2} - \frac{d^2 \Psi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Psi}{dr} \right) \frac{\partial r}{\partial \hat{n}} (\hat{\mathbf{r}} \otimes \tilde{\mathbf{I}} + \tilde{\mathbf{I}} \otimes \hat{\mathbf{r}}) + \\ & \left(\frac{3}{r} \frac{dX}{dr} - \frac{6X}{r^2} - \frac{d^2 \Psi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Psi}{dr} \right) (\hat{\mathbf{n}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{n}}) + \\ & \left. \left(\frac{4X}{r^2} - \frac{4Z}{r} - \Theta \right) (\tilde{\mathbf{I}} \otimes \hat{\mathbf{n}})^{132} + \left(\frac{2X}{r^2} - \frac{2}{r} \frac{d\Psi}{dr} \right) (\hat{\mathbf{n}} \otimes \tilde{\mathbf{I}} + \tilde{\mathbf{I}} \otimes \hat{\mathbf{n}}) \right], \quad (2.23) \end{aligned}$$

όπου $\mathbf{r} = \mathbf{y} - \mathbf{x}^{(\kappa)}$ η Ευκλείδεια απόσταση των σημείων $\mathbf{y}$ και $\mathbf{x}^{(\kappa)}$, με μέτρο: $r = \|\mathbf{r}\|$, $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$ και $\frac{\partial r}{\partial \hat{n}} = \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{y})$. Οι όροι X, Ψ, Z, Y, Θ και οι παράγωγοι μερικών από αυτούς δίδονται από τις ακόλουθες σχέσεις

$$\begin{aligned} X &= -\frac{1}{4(1-\bar{\nu})}, \quad \frac{dX}{dr} = \frac{d^2 X}{dr^2} = 0, \\ \Psi &= \frac{4\bar{\nu}-3}{4(1-\bar{\nu})} \ln(r), \quad \frac{d\Psi}{dr} = \frac{4\bar{\nu}-3}{4(1-\bar{\nu})} \frac{1}{r}, \quad \frac{d^2 \Psi}{dr^2} = \frac{3-4\bar{\nu}}{4(1-\bar{\nu})} \frac{1}{r^2}, \\ Z &= \frac{\bar{\nu}}{\bar{\nu}-1} \frac{1}{r}, \quad Y = \frac{4\bar{\nu}}{\bar{\nu}-1} \frac{1}{r^2}, \quad \Theta = 0. \end{aligned}$$

2.1.2 Ολοκληρωτική εξίσωση δυναμικής γραμμικής ελαστικότητας στο πεδίο συχνοτήτων

Για την αριθμητική μελέτη δυναμικών προβλημάτων μέσω της Μεθόδου των Συνοριακών Στοιχείων μπορεί κάποιος να ακολουθήσει δύο δρόμους: (α') να το επιλύσει απευθείας στο πεδίο του χρόνου [2, 3, 14] ή (β') να μετασχηματίσει και να επιλύσει το υπό-ανάλυση πρόβλημα σε ένα φανταστικό πεδίο (Laplace, Fourier) ακολουθώντας έπειτα τον αντίστροφο μετασχηματισμό για την αναγωγή των αποτελεσμάτων στο πραγματικό πεδίο του χρόνου [4, 7]. Στην παρούσα διδακτορική διατριβή επιλέχθηκε ο δεύτερος τρόπος, όπου ο μετασχηματισμός που χρησιμοποιήθηκε να είναι ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier (ΔΜΦ) [6, 16]. Στο Εδάφ. Δ.1 γίνεται μία περιληπτική παρουσίαση του μετασχηματισμού Fourier και του αντιστρόφου του.

Εάν εφαρμοσθεί ο μετασχηματισμός Fourier στη μερική διαφορική Εξ. (2.9) τότε αυτή ανάγεται στη νέα τής μορφή στο πεδίο συχνοτήτων

$$\mu \nabla_{\mathbf{x}}^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) + (\lambda + \mu) \nabla_{\mathbf{x}} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) + \mathbf{f}(\mathbf{x}) = -\rho_e \omega^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega), \quad (2.24)$$

όπου ω η γωνιακή συχνότητα, με αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) &= \bar{\mathbf{u}}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_u \\ \mathbf{t}(\mathbf{x}, \omega) &= \bar{\mathbf{t}}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_t \end{aligned} \quad (2.25)$$

Οι ολοκληρωτικές αναπαράστάσεις των μετατοπίσεων και τάσεων για το αρμονικό πρόβλημα παρουσιάζουν την ίδια μορφή με αυτή των Εξ. (2.14) και (2.17) αντίστοιχα [13], δηλαδή

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x}^{(\kappa)}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \omega) + \int_{\Gamma} \tilde{\mathbf{t}}^*(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}, \omega) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{y}, \omega) dS_{\mathbf{y}} = \\ \int_{\Gamma} \tilde{\mathbf{u}}^*(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}, \omega) \cdot \mathbf{t}(\mathbf{y}, \omega) dS_{\mathbf{y}} - \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{u}}^*(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}, \omega) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{y}, \omega) dV_{\mathbf{y}}, \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x}^{(\kappa)}) \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \omega) + \int_{\Gamma} \tilde{\boldsymbol{\tau}}^*(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}, \omega) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{y}, \omega) dS_{\mathbf{y}} = \\ \int_{\Gamma} \tilde{\mathbf{v}}^*(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}, \omega) \cdot \mathbf{t}(\mathbf{y}, \omega) dS_{\mathbf{y}} - \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{v}}^*(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}, \omega) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{y}, \omega) dV_{\mathbf{y}}, \end{aligned} \quad (2.27)$$

με τους θεμελιώδεις πυρήνες είναι ίδιοι με αυτούς των Εξ. (2.20), (2.21), (2.22), (2.23), με μόνη διαφορά την αλλαγή των παρακάτω συντελεστών

$$\begin{aligned} X &= K_2(\bar{s}) - \frac{k_p^2}{k_s^2} K_2(\bar{p}), \\ \frac{dX}{dr} &= -j k_s K_1(\bar{s}) + \frac{j k_p^3}{k_s^2} K_1(\bar{p}) - \frac{2}{r} K_2(\bar{s}) + \frac{2 k_p^2}{r k_s^2} K_2(\bar{p}), \\ \frac{d^2 X}{dr^2} &= -k_s^2 K_0(\bar{s}) + \frac{k_p^4}{k_s^2} K_0(\bar{p}) + \frac{3 j k_s}{r} K_1(\bar{s}) - \frac{3 j k_p^3}{r k_s^2} K_1(\bar{p}) + \frac{6}{r^2} K_2(\bar{s}) - \frac{6 k_p^2}{r^2 k_s^2} K_2(\bar{p}), \\ \Psi &= K_0(\bar{s}) + \left(\frac{1}{s} K_1(\bar{s}) - \frac{k_p}{s k_s} K_1(\bar{p}) \right), \\ \frac{d\Psi}{dr} &= -\frac{1}{r} K_0(\bar{s}) + \frac{k_p^2}{r k_s^2} K_0(\bar{p}) - \left(j k_s + \frac{2}{j k_s r^2} \right) K_1(\bar{s}) + \frac{2 k_p}{j k_s^2 r^2} K_1(\bar{p}), \\ \frac{d^2 \Psi}{dr^2} &= \left(\frac{3}{r^2} - k_s^2 \right) K_0(\bar{s}) - \frac{3 k_p^2}{k_s^2 r^2} K_0(\bar{p}) + \\ &\quad \left(\frac{2 j k_s}{r} + \frac{6}{j k_s r^3} \right) K_1(\bar{s}) - \left(\frac{j k_p^3}{k_s^2 r} + \frac{6 k_p}{j k_s^2 r^3} \right) K_1(\bar{p}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Z &= \left(\frac{2j k_p^3}{k_s^2} - j k_p \right) K_1(\bar{p}), \\
 Y &= \left(2k_p^2 - \frac{4k_p^4}{k_s^2} \right) K_0(\bar{p}) + \left(\frac{8j k_p^3}{r k_s^2} - \frac{4j k_p}{r} \right) K_1(\bar{p}), \\
 \Theta &= \left(4k_p^2 - k_s^2 - \frac{4k_p^4}{k_s^2} \right) K_0(\bar{p}),
 \end{aligned}$$

όπου $j^2 = -1$, K_n είναι οι τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel δευτέρου είδους n -ιστής τάξης με μιγαδικό όρισμα [1]. Επίσης $\bar{p} = j k_p r$, $\bar{s} = j k_s r$, με $k_p = \omega/c_p$, $k_s = \omega/c_s$ να είναι οι κυματικοί αριθμοί των αντίστοιχων διαμηκών και εγκάρσιων κυμάτων, των οποίων η ταχύτητα διάδοσης δίδεται από τις ακόλουθες σχέσεις

$$c_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho_e}}, \quad (2.28\alpha')$$

$$c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_e}}. \quad (2.28\beta')$$

Εναλλακτική πρόταση για την επίλυση δυναμικού προβλήματος στο πεδίο συχνοτήτων, χωρίς να απαιτείται η παραγωγή των μιγαδικών θεμελιωδών λύσεων, είναι η μεταχείριση του όρου αδράνειας στο δεξί μέλος της Εξ. (2.24) ως πεδιακής δύναμης, οπότε οι Εξ. (2.26), (2.27) γράφονται

$$\begin{aligned}
 \tilde{\alpha}(\mathbf{x}^{(\kappa)}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \omega) + \int_{\Gamma} \tilde{\mathbf{t}}^*(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{y}, \omega) dS_{\mathbf{y}} = \\
 \int_{\Gamma} \tilde{\mathbf{u}}^*(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{t}(\mathbf{y}, \omega) dS_{\mathbf{y}} - \\
 \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{u}}^*(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}) \cdot [\mathbf{f}(\mathbf{y}, \omega) + \rho_e \omega^2 \mathbf{u}(\mathbf{y}, \omega)] dV_{\mathbf{y}}, \quad (2.29)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\alpha}(\mathbf{x}^{(\kappa)}) \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \omega) + \int_{\Gamma} \tilde{\boldsymbol{\tau}}^*(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{y}, \omega) dS_{\mathbf{y}} = \\
 \int_{\Gamma} \tilde{\boldsymbol{\nu}}^*(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{t}(\mathbf{y}, \omega) dS_{\mathbf{y}} - \\
 \int_{\Omega} \tilde{\boldsymbol{\nu}}^*(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}) \cdot [\mathbf{f}(\mathbf{y}, \omega) + \rho_e \omega^2 \mathbf{u}(\mathbf{y}, \omega)] dV_{\mathbf{y}}, \quad (2.30)
 \end{aligned}$$

Συγκρίνοντας κάποιος τις Εξ. (2.29), (2.30) με τις αντίστοιχες Εξ. (2.26), (2.27) παρατηρεί ότι οι πυρήνες των ολοκληρωμάτων στις πρώτες δύο να είναι οι στατικές θεμελιώδεις λύσεις (βλ. Υποεδράφ. 2.1.1) και όχι οι μιγαδικοί πυρήνες. Η μοναδική όμως επιβάρυνση σε αυτή τη μεθοδολογία είναι ο επιπλέον υπολογισμός του ολοκληρώματος όγκου του όρου της αδράνειας.

2.2 Ακουστικό μέσο στις δύο διαστάσεις

Η μερική διαφορική εξίσωση που περιγράφει την κυματική διάδοση σε ένα ακουστικό μέσο (π.χ. υγρό ή αέριο σώμα) –αποκαλούμενη στη διεθνή βιβλιογραφία ως εξίσωση Helmholtz– είναι η ακόλουθη [2, 8, 14]

$$\nabla_{\mathbf{x}}^2 p(\mathbf{x}, t) + g(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c_p^2} \frac{\partial^2 p(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2}, \quad (2.31)$$

όπου p είναι η πίεση, c_p η ταχύτητα του διαμήκους κύματος, ρ_a η πυκνότητα του συνεχούς μέσου και g το μέγεθος πεδιακής πηγής.

Οι απαιτούμενες συνοριακές συνθήκες για τη σωστή και πλήρη τοποθέτηση του προβλήματος συνοριακών τιμών της μερική διαφορικής Εξ. (2.31) είναι οι εξής

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}, t) &= \bar{p}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_p \\ q(\mathbf{x}, t) &= \bar{q}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_q \end{aligned}, \quad (2.32)$$

όπου

$$q(\mathbf{x}) \equiv \frac{\partial p(\mathbf{x})}{\partial \hat{n}(\mathbf{x})} = \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} p(\mathbf{x}), \quad (2.33)$$

ονομαζόμενη στο εξής βαθμίδα υπερπίεσης, $\Gamma = \Gamma_p \cup \Gamma_q$, με $\bar{p}$, $\bar{q}$ να είναι οι προκαθορισμένες ουσιαστικές και φυσικές συνοριακές συνθήκες του προβλήματος αντίστοιχα.

2.2.1 Ολοκληρωτική εξίσωση ακουστικού μέσου σε μόνιμη κατάσταση

Ένα ακουστικό μέσο σε μόνιμη κατάσταση περιγράφεται από την ακόλουθη εξίσωση Poisson

$$\nabla_{\mathbf{x}}^2 p(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) = 0. \quad (2.34)$$

Στην περίπτωση που θεωρηθούν οι πεδιακές πηγές αμελητέες ($g = 0$) τότε η Εξ. (2.34) ανάγεται στην απλουστευμένη εξίσωση Laplace.

Οι συνοριακές συνθήκες που περιγράφουν πλήρως το πρόβλημα είναι οι εξής

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}) &= \bar{p}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_p \\ q(\mathbf{x}) &= \bar{q}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_q \end{aligned}. \quad (2.35)$$

Με βάση τη δεύτερη ταυτότητα Green για δύο καταστάσεις (p, q, g) και (p^*, q^*, g^*) του ίδιου ακουστικού μέσου προκύπτει η ολοκληρωτική αναπαράσταση του προβλήματος των Εξ. (2.34), (2.35) για ένα υλικό σημείο $\mathbf{x}^{(\kappa)}$ που ανήκει στον χώρο Ω του ακουστικού μέσου

$$\alpha \left(\mathbf{x}^{(\kappa)} \right) p \left(\mathbf{x}^{(\kappa)} \right) + \int_{\Gamma} q^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) p \left(\mathbf{y} \right) dS_{\mathbf{y}} = \int_{\Gamma} p^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) q \left(\mathbf{y} \right) dS_{\mathbf{y}} - \int_{\Omega} p^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) g \left(\mathbf{y} \right) dV_{\mathbf{y}}, \quad (2.36)$$

Αν στην Εξ. (2.36) εφαρμοσθεί ο τελεστής βάρθρωσης τότε προκύπτει η αντίστοιχη ολοκληρωτική εξίσωση των παραγώγων της πίεσης ανά διεύθυνση

$$\alpha \left(\mathbf{x}^{(\kappa)} \right) \nabla_{\mathbf{x}^{(\kappa)}} p \left(\mathbf{x}^{(\kappa)} \right) + \int_{\Gamma} \mathbf{q}^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) p \left(\mathbf{y} \right) dS_{\mathbf{y}} = \int_{\Gamma} \mathbf{p}^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) q \left(\mathbf{y} \right) dS_{\mathbf{y}} - \int_{\Omega} \mathbf{p}^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) g \left(\mathbf{y} \right) dV_{\mathbf{y}}. \quad (2.37)$$

Ο συντελεστής γεωμετρίας του συνόρου όταν $\mathbf{x}^{(\kappa)} \in \Gamma$ και το σύνορο σε αυτό το σημείο παρουσιάζει γωνία (βλ. Σχ. 2.2) ισούται με $\alpha = \frac{\theta_2 - \theta_1}{2\pi}$. Όταν το σημείο πηγής $\mathbf{x}^{(\kappa)}$ ανήκει στο ομαλό σύνορο Γ τότε $\alpha = 1/2$ και όταν ανήκει εξολοκλήρου εντός του χωρίου ανάλυσης τότε $\alpha = 1$.

Οι θεμελιώδεις πυρήνες της ολοκληρωτικής Εξ. (2.36) στις δύο διαστάσεις είναι οι ακόλουθοι [2]

$$p^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) = -\frac{1}{2\pi} \ln(r), \quad (2.38)$$

$$q^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial \hat{n}}, \quad (2.39)$$

ενώ αντίστοιχα οι πυρήνες της υπεριδιόμορφης ολοκληρωτικής Εξ. (2.37) στις δύο διαστάσεις είναι οι εξής [11]

$$\mathbf{p}^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) = -\frac{1}{2\pi r} \hat{\mathbf{r}}, \quad (2.40)$$

$$\mathbf{q}^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) = -\frac{1}{2\pi r^2} \left(\hat{\mathbf{n}} - 2 \frac{\partial r}{\partial \hat{n}} \hat{\mathbf{r}} \right). \quad (2.41)$$

Συγκρίνοντας κάποιος τους θεμελιώδεις πυρήνες των Εξ. (2.38)-(2.41) με τους αντίστοιχους των Εξ. (2.20)-(2.23) μπορεί εύκολα να παρατηρήσει ότι η τάξη της ιδιομορφίας τους καθώς το σημείο πεδίου $\mathbf{y}$ πλησιάζει το σημείο πηγής $\mathbf{x}^{(\kappa)}$ (δηλαδή καθώς $r \rightarrow 0$) είναι η ίδια.

2.2.2 Ολοκληρωτική εξίσωση σε ακουστικό μέσο στο πεδίο συχνοτήτων

Εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό Fourier στην Εξ. (2.31), προκύπτει η μερική διαφορική εξίσωση που περιγράφει τη συμπεριφορά του ακουστικού μέσου στο πεδίο συχνοτήτων

$$\nabla_{\mathbf{x}}^2 p(\mathbf{x}, \omega) + g(\mathbf{x}, \omega) = -\frac{\omega^2}{c_p^2} p(\mathbf{x}, \omega), \quad (2.42)$$

με το πρόβλημα να είναι καλά τοποθετημένο δοσμένων των ακόλουθων συνοριακών συνθηκών

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}, \omega) &= \bar{p}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_p \\ q(\mathbf{x}, \omega) &= \bar{q}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_q \end{aligned} \quad (2.43)$$

Οι ολοκληρωτικές εξισώσεις που περιγράφουν το άγνωστο πεδίο της πίεσης και της μεταβολής της πίεσης σε ένα συνεχές ακουστικό μέσο στο πεδίο συχνοτήτων είναι οι εξής

$$\begin{aligned} \alpha(\mathbf{x}^{(\kappa)}) p(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \omega) + \int_{\Gamma} q^*(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}, \omega) p(\mathbf{y}, \omega) dS_{\mathbf{y}} = \\ \int_{\Gamma} p^*(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}, \omega) q(\mathbf{y}, \omega) dS_{\mathbf{y}} - \int_{\Omega} p^*(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}, \omega) g(\mathbf{y}, \omega) dV_{\mathbf{y}}, \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} \alpha(\mathbf{x}^{(\kappa)}) \nabla_{\mathbf{x}^{(\kappa)}} p(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \omega) + \int_{\Gamma} \mathbf{q}^*(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}, \omega) p(\mathbf{y}, \omega) dS_{\mathbf{y}} = \\ \int_{\Gamma} \mathbf{p}^*(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}, \omega) q(\mathbf{y}, \omega) dS_{\mathbf{y}} - \int_{\Omega} \mathbf{p}^*(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}, \omega) g(\mathbf{y}, \omega) dV_{\mathbf{y}}. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Οι θεμελιώδεις πυρήνες των ολοκληρωτικών εξισώσεων Εξ. (2.44) και (2.45) στις δύο διαστάσεις είναι οι ακόλουθοι [2]

$$p^*(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}, \omega) = \frac{1}{2\pi} K_0(\bar{p}), \quad (2.46)$$

$$q^*(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}, \omega) = -\frac{j k_p}{2\pi} \frac{\partial r}{\partial \hat{n}} K_1(\bar{p}), \quad (2.47)$$

$$\mathbf{p}^*(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}, \omega) = -\frac{1}{2\pi} K_1(\bar{p}) \hat{\mathbf{r}}, \quad (2.48)$$

$$\mathbf{q}^*(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}, \omega) = \frac{j k_p}{2\pi r} \left(2 \frac{\partial r}{\partial \hat{n}} K_1(\bar{p}) \hat{\mathbf{r}} - K_1(\bar{p}) \hat{\mathbf{n}} - r \frac{\partial r}{\partial \hat{n}} K_0(\bar{p}) \hat{\mathbf{r}} \right), \quad (2.49)$$

όπου $\bar{p} = j k_p r$ και $k_p = \omega/c_p$.

Αν κάποιος μεταχειριστεί τον όρο στο δεξί μέρος της Εξ. (2.42) σαν πεδιακή πηγή—όπως στο Υποεδάφ. 2.1.2—τότε μπορεί να οδηγηθεί στις ακόλουθες ολοκληρωτικές εξισώσεις

$$\begin{aligned} \alpha(\mathbf{x}^{(\kappa)}) p(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \omega) + \int_{\Gamma} q^*(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}) p(\mathbf{y}, \omega) dS_{\mathbf{y}} = \\ \int_{\Gamma} p^*(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}) q(\mathbf{y}, \omega) dS_{\mathbf{y}} - \int_{\Omega} p^*(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}) \left[g(\mathbf{y}, \omega) + \frac{\omega^2}{c_p^2} p(\mathbf{y}, \omega) \right] dV_{\mathbf{y}}, \end{aligned} \quad (2.50)$$

$$\begin{aligned} \alpha(\mathbf{x}^{(\kappa)}) \nabla_{\mathbf{x}^{(\kappa)}} p(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \omega) + \int_{\Gamma} \mathbf{q}^*(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}) p(\mathbf{y}, \omega) dS_{\mathbf{y}} = \\ \int_{\Gamma} \mathbf{p}^*(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}) q(\mathbf{y}, \omega) dS_{\mathbf{y}} - \\ \int_{\Omega} \mathbf{p}^*(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}) \left[g(\mathbf{y}, \omega) + \frac{\omega^2}{c_p^2} p(\mathbf{y}, \omega) \right] dV_{\mathbf{y}}, \end{aligned} \quad (2.51)$$

των οποίων οι θεμελιώδεις πυρήνες δίδονται πλέον από τις Εξ. (2.38)-(2.41).

2.3 Συναρτήσεις παρεμβολής και γεωμετρικοί μετασχηματισμοί

Η υλοποίηση της Μεθόδου των Συνοριακών Στοιχείων προαπαιτεί τον ορισμό του συνόρου Γ του υπό-ανάλυση σώματος και σε μερικές περιπτώσεις και τον όγκο τού Ω . Η αναπαράσταση των επιφανειών και των χωρίων αυτών μπορεί να γίνει με τη διακριτοποίησή τους σε μικρά τμήματα, όπως ακριβώς γίνεται και στη Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων.

Σχήμα 2.3: Μετασχηματισμός συνοριακών στοιχείων (α') γραμμής και (β') τριγώνου από γενικές (x_i) σε τοπικές (z_i) συντεταγμένες.

Έστω τυχαίας μορφής καμπύλο τμήμα, όμοιο με αυτό του Σχ. 2.3(α'), τμήμα του συνόρου Γ . Δεδομένης της γεωμετρικής θέσης ($\mathbf{x}^{(j)}$) των κόμβων που απαρτίζουν

το συνοριακό στοιχείο, μπορεί κάποιος να υπολογίσει την ακριβή γεωμετρική θέση ενός αυθαίρετα επιλεγμένου σημείου $\mathbf{y}$ στο γενικό σύστημα συντεταγμένων, δοσμένης όμως της θέσης του στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων (ζ). Αυτό μπορεί να εκφραστεί μαθηματικά ως άθροισμα τόσων όρων όσο είναι και το πλήθος των κόμβων (n_e) του στοιχείου, δηλαδή

$$\mathbf{y}(\zeta) = \sum_{j=1}^{n_e} \phi^{(j)}(\zeta) \mathbf{x}^{(j)}, \quad (2.52)$$

όπου $\phi^{(j)}$ είναι πολυωνυμικές συναρτήσεις, ονομαζόμενες συχνά συναρτήσεις μορφής. Η Εξ. (2.52) μπορεί να γραφτεί σε μητρική μορφή

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(\zeta) &= \tilde{\Phi}(\zeta) \cdot \tilde{\mathbf{x}} \\ &= \begin{bmatrix} \ddots & \phi^{(j)}(\zeta) & 0 & \ddots \\ & 0 & \phi^{(j)}(\zeta) & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}_{[2 \times 2n_e]} \cdot \begin{Bmatrix} \vdots \\ x_1^{(j)} \\ x_2^{(j)} \\ \vdots \end{Bmatrix}_{[2n_e]}. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Ενδεικτικά, για το τρίκομβο τετραγωνής-βάσης στοιχείο γραμμής οι συναρτήσεις μορφής είναι οι εξής: $\phi^{(1)} = \zeta_1(\zeta_1 - 1)/2$, $\phi^{(2)} = \zeta_1(\zeta_1 + 1)/2$, $\phi^{(3)} = 1 - \zeta_1^2$. Για συναρτήσεις μορφής τόσο σε μονοδιάστατα στοιχεία όσο και σε διδιάστατα στοιχεία υπάρχει αναλυτική περιγραφή αυτών στο Παρ. Β.

Οι συναρτήσεις μορφής έχουν όμως κάποιες αξιοσημείωτες ιδιότητες:

$$\phi^{(j)}(\zeta^{(i)}) = \delta_{ij}, \quad (2.54\alpha')$$

$$\sum_{j=1}^{n_e} \phi^{(j)}(\zeta) = 1, \quad (2.54\beta')$$

$$\sum_{j=1}^{n_e} \frac{\partial \phi^{(j)}(\zeta)}{\partial \zeta_i} = 0. \quad (2.54\gamma')$$

Η Εξ. (2.54α') φανερώνει ότι η συνάρτηση μορφής παίρνει την τιμή της μονάδας στο «δικό» της κόμβο ($i = j$) ενώ μηδέν για οποιονδήποτε άλλο. Με άλλα λόγια οι συναρτήσεις $\phi^{(j)}$ έχουν τη «δέλτα» ιδιότητα, άρα μπορούν να ικανοποιηθούν οι ουσιαστικές συνοριακές συνθήκες απευθείας. Οι Εξ. (2.54β') και (2.54γ') δείχνουν ότι το άθροισμα των συναρτήσεων μορφής για ένα τυχαίο σημείο ζ είναι ίσο με τη μονάδα ενώ το άθροισμα των πρώτων παραγώγων είναι ίσο με μηδέν.

Ακολουθώντας κάποιος την ίδια σχέση –όπως την Εξ. (2.53)– μπορεί όμοια να πραγματοποιήσει την παρεμβολή του πεδίου των μετατοπίσεων, του διανύσματος των τάσεων, της πίεσης, της βαθμίδας υπερπίεσης κ.λ.π. σε ένα οποιοδήποτε σημείο ζ του στοιχείου

$$\mathbf{u}(\zeta) = \tilde{\Phi}(\zeta) \cdot \tilde{\mathbf{u}}, \quad (2.55)$$

$$\mathbf{t}(\zeta) = \tilde{\Phi}(\zeta) \cdot \tilde{\mathbf{t}}, \quad (2.56)$$

$$\mathbf{p}(\zeta) = \Phi(\zeta) \cdot \check{\mathbf{p}}, \quad (2.57)$$

$$\mathbf{q}(\zeta) = \Phi(\zeta) \cdot \check{\mathbf{q}}, \quad (2.58)$$

όπου $\Phi(\zeta) = \{ \dots \phi^{(j)}(\zeta) \dots \}_{[n_e]}$ και

$$\tilde{\mathbf{u}} = \{ u_1^{(1)} \ u_2^{(1)} \ \dots \ u_1^{(n_e)} \ u_2^{(n_e)} \}_{[2n_e]}^T, \quad (2.59\alpha')$$

$$\tilde{\mathbf{t}} = \{ t_1^{(1)} \ t_2^{(1)} \ \dots \ t_1^{(n_e)} \ t_2^{(n_e)} \}_{[2n_e]}^T, \quad (2.59\beta')$$

$$\check{\mathbf{p}} = \{ p^{(1)} \ \dots \ p^{(n_e)} \}_{[n_e]}^T, \quad (2.59\gamma')$$

$$\check{\mathbf{q}} = \{ q^{(1)} \ \dots \ q^{(n_e)} \}_{[n_e]}^T. \quad (2.59\delta')$$

Όταν ο βαθμός των πολυωνυμικών συναρτήσεων ϕ είναι ίδιος για την προσέγγιση της γεωμετρίας και μίας συνάρτησης πεδίου, τότε το στοιχείο ονομάζεται ισοπαραμετρικό. Προφανώς, μπορεί να χρησιμοποιηθεί ανώτερης τάξης πολυώνυμο για την καλύτερη προσέγγιση ιδιόμορφων πεδίων. Στην παρούσα διδακτορική διατριβή όλα τα συνοριακά στοιχεία που χρησιμοποιήθηκαν για τη διακριτοποίηση της γεωμετρίας του σώματος που αναλύεται θεωρήθηκαν ισοπαραμετρικά.

Στις ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις, όπως παρουσιάζονται στα Εδάφ. 2.1 και 2.2, πρέπει να υπολογισθούν τόσο επιφανειακά ολοκληρώματα όσο και ολοκληρώματα όγκου στις δύο διαστάσεις. Για να γίνει όμως αυτό πρέπει να αναχθούν τα ολοκληρώματα αυτά στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων, στο οποίο έχουν εκφραστεί τα συνοριακά στοιχεία που περιγράφουν το σύνορο Γ και το χωρίο Ω . Ο μετασχηματισμός αυτός μέσω διανυσματικής άλγεβρας, όπως φαίνεται στο Σχ. 2.3, είναι ο ακόλουθος

$$dS_{\mathbf{y}} = J_s(\zeta) \, dS_{\zeta} \equiv J_s(\zeta_1) \, d\zeta_1, \quad (2.60)$$

$$dV_{\mathbf{y}} = J_v(\zeta) \, dV_{\zeta} \equiv J_v(\zeta_1, \zeta_2) \, d\zeta_1 \, d\zeta_2, \quad (2.61)$$

όπου οι ορίζουσες των αντίστοιχων Ιακωβιανών πινάκων μετασχηματισμού [2]

$$J_s(\zeta_1) = \left\| \frac{d\mathbf{y}}{d\zeta_1} \right\| = \sqrt{\left(\frac{dy_1}{d\zeta_1} \right)^2 + \left(\frac{dy_2}{d\zeta_1} \right)^2}, \quad (2.62)$$

$$J_v(\zeta) = \left\| \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \zeta_1} \times \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \zeta_2} \right\| = \frac{\partial y_1}{\partial \zeta_1} \frac{\partial y_2}{\partial \zeta_2} - \frac{\partial y_1}{\partial \zeta_2} \frac{\partial y_2}{\partial \zeta_1}, \quad (2.63)$$

οι οποίες υπολογίζονται αριθμητικά σε κάθε στοιχείο με βάση τις σχέσεις

$$J_s(\zeta_1) = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n_e} \frac{d\phi^{(i)}(\zeta_1)}{d\zeta_1} x_1^{(i)}\right)^2 + \left(\sum_{j=1}^{n_e} \frac{d\phi^{(j)}(\zeta_1)}{d\zeta_1} x_2^{(j)}\right)^2}, \quad (2.64)$$

$$J_v(\zeta) = \left(\sum_{i=1}^{n_e} \frac{\partial\phi^{(i)}(\zeta)}{\partial\zeta_1} x_1^{(i)}\right) \left(\sum_{j=1}^{n_e} \frac{\partial\phi^{(j)}(\zeta)}{\partial\zeta_2} x_2^{(j)}\right) - \left(\sum_{k=1}^{n_e} \frac{\partial\phi^{(k)}(\zeta)}{\partial\zeta_2} x_1^{(k)}\right) \left(\sum_{l=1}^{n_e} \frac{\partial\phi^{(l)}(\zeta)}{\partial\zeta_1} x_2^{(l)}\right). \quad (2.65)$$

Αναλυτική περιγραφή του αριθμητικού τρόπου υπολογισμού των απαιτούμενων ολοκληρωμάτων για τη Μέθοδο Συνοριακών Στοιχείων γίνεται στο Παρ. Α.

2.4 Αριθμητική εφαρμογή της Μεθόδου των Συνοριακών Στοιχείων

Σε αυτό το εδάφιο πρόκειται να παρουσιαστεί η αριθμητική εφαρμογή της ΜΣΣ για προβλήματα δύο διαστάσεων γραμμικής ελαστικότητας, ακουστικού μέσου, καθώς επίσης και του συζευγμένου προβλήματος ελαστικού με ακουστικό μέσο.

Για την απλή περίπτωση μίας περιοχής ελαστικού ή ακουστικού μέσου, εισάγοντας στις ολοκληρωτικές εξισώσεις Εξ. (2.14) και (2.36) τις σχέσεις παρεμβολής του αγνώστου πεδίου Εξ. (2.55), (2.56) και Εξ. (2.57), (2.58) τότε προκύπτει

$$\begin{aligned} & \tilde{\alpha}(\mathbf{x}^{(\kappa)}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}^{(\kappa)}) + \int_{\Gamma} \tilde{\mathbf{t}}^*(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}) \cdot \tilde{\Phi}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \cdot \tilde{\mathbf{u}} = \\ & \int_{\Gamma} \tilde{\mathbf{u}}^*(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}) \cdot \tilde{\Phi}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \cdot \tilde{\mathbf{t}} - \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{u}}^*(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}}, \end{aligned} \quad (2.66)$$

$$\begin{aligned} & \alpha(\mathbf{x}^{(\kappa)}) p(\mathbf{x}^{(\kappa)}) + \int_{\Gamma} q^*(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}) \Phi(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \cdot \tilde{\mathbf{p}} = \\ & \int_{\Gamma} p^*(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}) \Phi(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \cdot \tilde{\mathbf{q}} - \int_{\Omega} p^*(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}) g(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}}, \end{aligned} \quad (2.67)$$

ή αλλιώς σε μητρική μορφή

$$\tilde{\mathbf{H}}_{(e)} \cdot \tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{G}}_{(e)} \cdot \tilde{\mathbf{t}} + \tilde{\mathbf{f}}, \quad (2.68)$$

$$\tilde{\mathbf{H}}_{(a)} \cdot \tilde{\mathbf{p}} = \tilde{\mathbf{G}}_{(a)} \cdot \tilde{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{g}}. \quad (2.69)$$

Τα διανύσματα $\bar{\mathbf{f}}$ και $\bar{\mathbf{g}}$ είναι έκτασης 2 και 1 αντίστοιχα, τα οποία προκύπτουν από τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων όγκου των πεδιακών πηγών. Αν υποθεθεί ότι το σύνορο Γ του συνεχούς μέσου έχει διακριτοποιηθεί με συνοριακά στοιχεία, με n_d να είναι το σύνολο των συνοριακών κόμβων, τότε οι πίνακες $\tilde{\mathbf{H}}_{(e)}$, $\tilde{\mathbf{G}}_{(e)}$ είναι έκτασης $2 \times 2n_d$, ενώ οι πίνακες $\tilde{\mathbf{H}}_{(a)}$, $\tilde{\mathbf{G}}_{(a)}$ είναι αντίστοιχα έκτασης $1 \times n_d$. Οι πίνακες αυτοί εμπεριέχουν τα επιφανειακά ολοκληρώματα των παραπάνω ολοκληρωτικών εξισώσεων. Αναλυτική περιγραφή του αριθμητικού υπολογισμού τόσο των επιφανειακών όσο και των ολοκληρωμάτων όγκου γίνεται στο Εδάφ. Α.2 του Παρ. Α. Επίσης στα Υποεδάφ. Α.2.1 και Α.2.3 γίνεται ειδικός σχολιασμός για τη σύγκλιση των αριθμητικών αποτελεσμάτων των ολοκληρωμάτων καθώς και παρουσίαση του τρόπου μεταχείρισης των ιδιόμορφων και υπεριδιόμορφων ολοκληρωμάτων που προκύπτουν. Τέλος τα διανύσματα των άγνωστων επικόμβιων πεδίων των μετατοπίσεων, τάσεων, πίεσης και βαθμίδας υπερπίεσης είναι τα εξής

$$\tilde{\mathbf{u}} = \{ u_1^{(1)} \ u_2^{(1)} \ \dots \ u_1^{(n_d)} \ u_2^{(n_d)} \}_{[2n_d]}^T, \quad (2.70\alpha')$$

$$\tilde{\mathbf{t}} = \{ t_1^{(1)} \ t_2^{(1)} \ \dots \ t_1^{(n_d)} \ t_2^{(n_d)} \}_{[2n_d]}^T, \quad (2.70\beta')$$

$$\tilde{\mathbf{p}} = \{ p^{(1)} \ \dots \ p^{(n_d)} \}_{[n_d]}^T, \quad (2.70\gamma')$$

$$\tilde{\mathbf{q}} = \{ q^{(1)} \ \dots \ q^{(n_d)} \}_{[n_d]}^T. \quad (2.70\delta')$$

Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία υπολογισμού των εξισώσεων (2.68) ή (2.69), για το ελαστικό και ακουστικό μέσο αντίστοιχα για το σύνολο των n_d συνοριακών κόμβων, εφαρμόζοντας διαδοχικά τις συνοριακές συνθήκες και διαχωρίζοντας γνωστούς από αγνώστους τότε μπορεί κάποιος να καταλήξει σε ένα γραμμικό αλγεβρικό σύστημα της μορφής

$$\tilde{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{b}, \quad (2.71)$$

όπου ο πίνακας $\tilde{\mathbf{A}}$ —έκτασης $2n_d \times 2n_d$ για ελαστικό μέσο και $n_d \times n_d$ για ακουστικό μέσο—έχει ως στοιχεία τα αριθμητικά υπολογισμένα επιφανειακά ολοκληρώματα. Το διάνυσμα $\mathbf{b}$, έκτασης $2n_d$ για ελαστικό μέσο και n_d για ακουστικό μέσο, έχει ως στοιχεία τα αριθμητικά υπολογισμένα ολοκληρώματα όγκου των πεδιακών πηγών και τα αντίστοιχα επιφανειακά ολοκληρώματα στα οποία είναι προκαθορισμένες οι συνοριακές συνθήκες. Συνεπώς στο διάνυσμα $\mathbf{v}$ εμπεριέχονται οι επικόμβιες τιμές του άγνωστου πεδίου των μετατοπίσεων, οι άγνωστες συνιστώσες του διανύσματος τάσεων, της πίεσης, της βαθμίδας υπερπίεσης αντίστοιχα. Χαρακτηριστικό του πίνακα $\tilde{\mathbf{A}}$ είναι ότι είναι μη-συμμετρικός πλήρους πύκνωσης, γεγονός που καθιστά ιδιαίτερα χρονοβόρα την επίλυση του γραμμικού συστήματος όταν η έκτασή του αυξηθεί δραματικά. Γνωστές διαδικασίες επίλυσης τέτοιων συστημάτων είναι η απαλοιφή Gauss, η αποσύνθεση σε άνω και κάτω τριγωνικούς πίνακες (LU decomposition) κ.α. Στην παρούσα διδακτορική διατριβή έγινε χρήση της LU αποσύνθεσης μέσω των υπορουτινών της επιστημονικής βιβλιοθήκης ανοιχτού κώδικα GNU Scientific Library [9].

Στην περίπτωση που το προς μελέτη πρόβλημα αποτελείται από περισσότερες της μίας ελαστικές ή ακουστικές περιοχές τότε οι Εξ. (2.68), (2.69) τροποποιούνται ως εξής

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{H}}_{(e1)} & \tilde{\mathbf{O}} \\ \tilde{\mathbf{O}} & \tilde{\mathbf{H}}_{(e12)} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \check{\mathbf{u}}_{(1)} \\ \check{\mathbf{u}}_{(12)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{G}}_{(e1)} & \tilde{\mathbf{O}} \\ \tilde{\mathbf{O}} & \tilde{\mathbf{G}}_{(e12)} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \check{\mathbf{t}}_{(1)} \\ \check{\mathbf{t}}_{(12)} \end{Bmatrix} - \bar{\mathbf{f}}_{(1)}, \quad (2.72)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{H}}_{(a1)} & \tilde{\mathbf{O}} \\ \tilde{\mathbf{O}} & \tilde{\mathbf{H}}_{(a12)} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \check{\mathbf{p}}_{(1)} \\ \check{\mathbf{p}}_{(12)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{G}}_{(a1)} & \tilde{\mathbf{O}} \\ \tilde{\mathbf{O}} & \tilde{\mathbf{G}}_{(a12)} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \check{\mathbf{q}}_{(1)} \\ \check{\mathbf{q}}_{(12)} \end{Bmatrix} - \bar{\mathbf{g}}_{(1)}, \quad (2.73)$$

για την περιοχή (1) και

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{H}}_{(e2)} & \tilde{\mathbf{O}} \\ \tilde{\mathbf{O}} & \tilde{\mathbf{H}}_{(e21)} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \check{\mathbf{u}}_{(2)} \\ \check{\mathbf{u}}_{(21)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{G}}_{(e2)} & \tilde{\mathbf{O}} \\ \tilde{\mathbf{O}} & \tilde{\mathbf{G}}_{(e21)} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \check{\mathbf{t}}_{(2)} \\ \check{\mathbf{t}}_{(21)} \end{Bmatrix} - \bar{\mathbf{f}}_{(2)}, \quad (2.74)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{H}}_{(a2)} & \tilde{\mathbf{O}} \\ \tilde{\mathbf{O}} & \tilde{\mathbf{H}}_{(a21)} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \check{\mathbf{p}}_{(2)} \\ \check{\mathbf{p}}_{(21)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{G}}_{(a2)} & \tilde{\mathbf{O}} \\ \tilde{\mathbf{O}} & \tilde{\mathbf{G}}_{(a21)} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \check{\mathbf{q}}_{(2)} \\ \check{\mathbf{q}}_{(21)} \end{Bmatrix} - \bar{\mathbf{g}}_{(2)}, \quad (2.75)$$

για την περιοχή (2).

Σχήμα 2.4: Γενική μορφή σώματος με δύο περιοχές ελαστικού μέσου (Ω_{e1} και Ω_{e2}) με διεπιφάνεια Γ_i .

Επειδή όμως το σύστημα εξισώσεων που προκύπτει για το συζευγμένο πρόβλημα είναι ασθενώς ορισμένο, δηλαδή ο αριθμός των εξισώσεων είναι μικρότερος του αριθμού των αγνώστων μεταβλητών, είναι απαραίτητο να εισαχθούν επιπλέον εξισώσεις. Οι επιπρόσθετες αυτές εξισώσεις δίδονται από τις συνθήκες συνέχειας μεταξύ των ανά-ζευγάρια μέσων που είναι σε επαφή. Συγκεκριμένα, οι συνθήκες συνέχειας μεταξύ δύο ελαστικών σωμάτων θέλουν το διάνυσμα των μετατοπίσεων για ένα υλικό σημείο –το οποίο ανήκει στη διεπιφάνεια Γ_i – να είναι ίσο, ενώ για το διάνυσμα των τάσεων ίσο και αντίρροπο (βλ. Σχ. 2.4). Μαθηματικά οι συνθήκες συνέχειας μεταξύ δύο ελαστικών σωμάτων εκφράζονται ως εξής

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{(12)}(\mathbf{x}) &= \mathbf{u}_{(21)}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{t}_{(12)}(\mathbf{x}) &= -\mathbf{t}_{(21)}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_i, \end{aligned} \quad (2.76)$$

ενώ αντίστοιχα οι συνθήκες συνέχειας μεταξύ δύο ακουστικών σωμάτων είναι οι ακόλουθες

$$\begin{aligned} p_{(12)}(\mathbf{x}) &= p_{(21)}(\mathbf{x}) \\ q_{(12)}(\mathbf{x}) &= -q_{(21)}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_i. \end{aligned} \quad (2.77)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι οι ίδιες ακριβώς συνθήκες συνέχειας ισχύουν και για την περίπτωση ενός προβλήματος δύο ή περισσότερων περιοχών στο πεδίο συχνοτήτων.

Ως εκ τούτου, αν επαναληφθεί η διαδικασία υπολογισμού των εξισώσεων Εξ. (2.72), (2.74) ή των Εξ. (2.73), (2.75), για το ελαστικό και ακουστικό μέσο αντίστοιχα για το σύνολο των συνοριακών κόμβων, εφαρμόζοντας διαδοχικά τις συνοριακές συνθήκες και τις συνθήκες συνέχειας (Εξ. (2.76) ή Εξ. (2.77)) διαχωρίζοντας γνωστούς από αγνώστους τότε μπορεί κάποιος να καταλήξει σε ένα γραμμικό αλγεβρικό σύστημα παρόμοιας μορφής με αυτό της Εξ. (2.71).

Οι συνθήκες συνέχειας μεταξύ ενός ελαστικού συνεχούς μέσου με ένα ακουστικό μέσο (βλ. Σχ. 2.5) σε μόνιμη κατάσταση είναι οι εξής

$$\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{t}(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_i, \quad (2.78)$$

ενώ αντίστοιχα στην περίπτωση του πεδίου συχνοτήτων οι συνθήκες συνέχειας είναι οι ακόλουθες

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) &= -\frac{1}{\rho_a \omega^2} \nabla_{\mathbf{x}} p(\mathbf{x}, \omega) \\ \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{t}(\mathbf{x}, \omega) &= p(\mathbf{x}, \omega), \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_i, \end{aligned} \quad (2.79)$$

όπου ρ_a η πυκνότητα του συνεχούς ακουστικού μέσου.

Σχήμα 2.5: Γενική μορφή συνεχούς ελαστικού μέσου (Ω_e) και ακουστικού μέσου (Ω_a) με διεπιφάνεια Γ_i .

Συνοψίζοντας τα παραπάνω, η αριθμητική εφαρμογή της Μεθόδου των Συνοριακών Στοιχείων για ένα σώμα σε μόνιμη κατάσταση ή στο πεδίο συχνοτήτων περιγράφεται από τον ακόλουθο αλγόριθμο:

- (α') Διακριτοποίηση της γεωμετρίας του σώματος με συνοριακά στοιχεία, επιλογή της πολυωνυμικής τάξης των συναρτήσεων παρεμβολής και εφαρμογή σε κάθε στοιχείο των συνοριακών συνθηκών.
- (β') Δημιουργία των λειτουργικών κόμβων από τους αντίστοιχους γεωμετρικούς. Όταν όλα τα στοιχεία είναι πλήρως συνεχή τότε οι γεωμετρικοί κόμβοι είναι συνάμα και λειτουργικοί κόμβοι.
- (γ') Έναρξη επαναληπτικής διαδικασίας για όλους του συνοριακούς λειτουργικούς κόμβους ανά περιοχή.
 - (i) Επιλογή του αριθμού σημείων ολοκλήρωσης κατά προσέγγιση.
 - (ii) Έναρξη επαναληπτικής διαδικασίας για όλα τα σημεία ολοκλήρωσης.
 - Υπολογισμός των συναρτήσεων μορφής για το σημείο ολοκλήρωσης.
 - Υπολογισμός των πυρήνων ολοκλήρωσης u^* , t^* ή/και p^* , q^* .
 - Αριθμητικός υπολογισμός των ολοκληρωμάτων των Εξ. (2.14) ή/και Εξ. (2.36) για στατικό πρόβλημα, των Εξ. (2.26) ή/και Εξ. (2.44) για πρόβλημα στο πεδίο συχνοτήτων με μιγαδικούς πυρήνες, των Εξ. (2.29) ή/και Εξ. (2.50) για στατικούς πυρήνες με ολοκληρώμα όγκου.
 - (iii) Αναβάθμιση των μητρών $\tilde{\mathbf{H}}_{(e)}$, $\tilde{\mathbf{G}}_{(e)}$ ή/και $\tilde{\mathbf{H}}_{(a)}$, $\tilde{\mathbf{G}}_{(a)}$ και των διανυσμάτων $\tilde{\mathbf{f}}$, $\tilde{\mathbf{g}}$ των Εξ. (2.68) ή/και (2.69).
- (δ') Εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών και των συνθηκών συνέχειας, σε περίπτωση ύπαρξης περισσότερων της μίας περιοχής ανάλυσης του προς μελέτη πρωτοτυποποιημένου προβλήματος.
- (ε') Επίλυση του γραμμικού συστήματος της Εξ. (2.71).

Στην περίπτωση επίλυσης προβλήματος στο πεδίο των συχνοτήτων για περισσότερες της μίας αρμονικές συχνότητες, τότε τα βήματα (3), (4) και (5) μπορούν να επαναληφθούν τόσες φορές όσες είναι στο σύνολο οι αρμονικές. Το μεγάλο κόστος σε αυτή τη μεθοδολογία είναι η επανάληψη υπολογισμού όλων των ολοκληρωμάτων ανα αρμονική. Τούτο οδηγεί στο συμπέρασμα ότι για μεταβατικά προβλήματα στα οποία ο αριθμός των δειγμάτων στο χρόνο είναι αρκετά μεγάλος, η συνολική διάρκεια επίλυσης του δυναμικού προβλήματος μεγαλώνει δραματικά λόγω του αριθμητικού υπολογισμού όλων των ολοκληρωμάτων ανά αρμονική συχνότητα.

Στην ειδική περίπτωση που γίνει ανάλυση σώματος στο πεδίο συχνοτήτων για περισσότερες της μίας συχνότητες, κάνοντας χρήση της ολοκληρωτικής Εξ. (2.29) για ελαστικό μέσο ή της Εξ. (2.50) για ακουστικό μέσο, τότε μπορεί κάποιος να

παρατηρήσει ότι τα επιφανειακά ολοκληρώματα και το ολοκλήρωμα όγκου του όρου της αδράνειας αρκεί να υπολογιστούν μία φορά. Τούτο οφείλεται στο γεγονός ότι γενικά οι ολοκληρωτές ποσότητες δεν έχουν εξάρτηση με τη συχνότητα. Το μόνο ολοκλήρωμα που ίσως χρειαστεί να υπολογιστεί ανά αρμονική είναι το ολοκλήρωμα όγκου των πεδιακών πηγών-φορτίσεων, μόνο εάν η πεδιακή επίδραση είναι συνάρτηση της συχνότητας. Η επιρροή της συχνότητας εισάγεται στον όρο αδράνειας εξωτερικά του ολοκληρώματος και οι μιγαδικές συνοριακές συνθήκες μπορούν να επιβληθούν στις Εξ. (2.68) ή (2.69) απευθείας. Γενικά αυτή η τεχνική μπορεί να χαρακτηριστεί ως ταχύς όταν χρειάζεται να γίνει ανάλυση του σώματος για πολλές αρμονικές συχνότητες –ιδιαίτερα σε δυναμικά προβλήματα που γίνεται χρήση του έμμεσου τρόπου υπολογισμού– παρόλο που η διαδικασία υπολογισμού των ολοκληρωμάτων όγκου αποδείχτηκε μετά από σειρά πειραμάτων ως χρονοβόρα διαδικασία. Συγκεκριμένα για την πρώτη αρμονική συχνότητα υπολογίζονται αριθμητικά όλα τα ολοκληρώματα, κατασκευάζεται το τελικό γραμμικό σύστημα της Εξ. (2.71) μετά από επιβολή των συνοριακών συνθηκών και τέλος επιλύεται αριθμητικά ενώ για τις υπόλοιπες αρμονικές απλά κατασκευάζεται το τελικό σύστημα μετά από επιβολή των αντίστοιχων συνοριακών συνθηκών στην εκάστοτε αρμονική συχνότητα. Ένα επιπλέον θετικό στοιχείο της τεχνικής αυτής είναι η απαλλαγή του αναλυτικού υπολογισμού των μιγαδικών θεμελιωδών λύσεων –διαδικασία σε ορισμένες περιπτώσεις εξαιρετικά επίπονη– ενώ οι αντίστοιχοι στατικοί πυρήνες μπορούν να δώσουν αρκετά ικανοποιητικά αποτελέσματα και να λύσουν το πρόβλημα στο πεδίο συχνοτήτων.

Όπως έγινε αναφορά στο Υποεδάφ. 2.1.2, η τεχνική επίλυσης μεταβατικών φαινομένων με τη ΜΣΣ έγινε μέσω του μετασχηματισμού Fourier, με «μεταφορά» του προβλήματος στο πεδίο συχνοτήτων. Τέλος έγινε χρήση του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier έτσι ώστε να αναχθούν τα τελικά αποτελέσματα στο πραγματικό πεδίο του χρόνου. Συνεπώς ο αλγόριθμος εφαρμογής της τεχνικής αυτής συνοψίζεται ως εξής:

- (α') Επιλογή της χρονικής διάρκειας παρατήρησης του μεταβατικού φαινομένου και του βήματος χρονικής διακριτοποίησης των εξωτερικών διεγέρσεων στο σώμα.
- (β') Εφαρμογή του μετασχηματισμού Fourier στις συνοριακές συνθήκες και μετασχηματισμός του προβλήματος στο πεδίο συχνοτήτων.
- (γ') Διακριτοποίηση της γεωμετρίας του σώματος με συνοριακά στοιχεία και επιλογή της πολυωνυμικής τάξης των συναρτήσεων παρεμβολής. Το μήκος των στοιχείων τίθεται με γνώμονα τυποποιημένο κριτήριο σύγκλισης των αποτελεσμάτων.
- (δ') Δημιουργία των λειτουργικών κόμβων από τους αντίστοιχους γεωμετρικούς. Όταν όλα τα στοιχεία είναι πλήρως συνεχή τότε οι γεωμετρικοί κόμβοι είναι συνάμα και λειτουργικοί κόμβοι.
- (ε') Έναρξη επαναληπτικής διαδικασίας για όλες τις αρμονικές συχνότητες.

- (i) Έναρξη επαναληπτικής διαδικασίας για όλους του συνοριακούς λειτουργικούς κόμβους ανά περιοχή.
 - (1) Επιλογή του αριθμού σημείων ολοκλήρωσης κατά προσέγγιση.
 - (2) Έναρξη επαναληπτικής διαδικασίας για όλα τα σημεία ολοκλήρωσης.
 - Υπολογισμός των συναρτήσεων μορφής για το σημείο ολοκλήρωσης.
 - Υπολογισμός των πυρήνων ολοκλήρωσης u^* , t^* ή/και p^* , q^* .
 - Αριθμητικός υπολογισμός των συνοριακών και ολοκληρωμάτων όγκου των ολοκληρωτικών Εξ. (2.26) ή/και Εξ. (2.44) με μιγαδικούς πυρήνες ή των Εξ. (2.29) ή/και Εξ. (2.50) για στατικούς πυρήνες με ολοκληρώμα όγκου.
 - (3) Αναβάθμιση των μητρώων $\tilde{\mathbf{H}}_{(e)}$, $\tilde{\mathbf{G}}_{(e)}$ ή/και $\tilde{\mathbf{H}}_{(a)}$, $\tilde{\mathbf{G}}_{(a)}$ και των διανυσμάτων $\tilde{\mathbf{f}}$, $\tilde{\mathbf{g}}$ των Εξ. (2.68) ή/και (2.69).
- (ii) Εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών και των συνθηκών συνέχειας, σε περίπτωση ύπαρξης περισσότερων της μίας περιοχής ανάλυσης του προς μελέτη πρωτοτυποποιημένου προβλήματος, για την τρέχουσα αρμονική συνιστώσα.
- (iii) Επίλυση του μιγαδικού γραμμικού συστήματος της Εξ. (2.71).
- (ε') Εφαρμογή του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier για όλους τους συνοριακούς λειτουργικούς κόμβους και μετασχηματισμός των αποτελεσμάτων από το πεδίο συχνοτήτων στο αντίστοιχο του χρόνου.

Για τη σωστή αριθμητική επίλυση μεταβατικών φαινομένων γίνεται η αρχική υπόθεση εργασίας που θέλει τη συχνότητα δειγματοληψίας να είναι μεγαλύτερη της κρίσιμης συχνότητας του Nyquist (βλ. Εδάφ. Δ.1). Συνεπώς αν οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος διακριτοποιηθούν με N_s τον αριθμό δειγμάτων στο χρόνο και σταθερό χρονικό βήμα ίσο με Δt , τότε η συχνότητα δειγματοληψίας θα ισούται με $1/\Delta t$. Το αντίστοιχο βήμα στο πεδίο συχνοτήτων θα ισούται με $\Delta f = 1/(N_s \Delta t)$. Αξίζει σε αυτό το σημείο να σημειωθεί ότι ο αριθμός των δειγμάτων στο χρόνο επιλέχθηκε να είναι δύναμης του δύο ($N_s = 2^a$) ούτως ώστε να είναι δυνατό να υλοποιηθεί ο αλγόριθμος του Ταχέως Μετασχηματισμού Fourier. Εφαρμόζοντας στις χρονο-συναρτήσεις των συνοριακών συνθηκών του σώματος τον Ταχύ Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier μπορεί με αυτό τον τρόπο να παραχθεί το φάσμα του πλάτους και της φάσης των μιγαδικών συντελεστών της σειράς Fourier. Το πρώτο πράγμα που παρατηρείται είναι η συμμετρία του πλάτους του φάσματος ως προς τη συχνότητα. Αυτό οδηγεί στο συμπέρασμα –αφού αυτό βέβαια επιβεβαιώθηκε πειραματικά– ότι δεν είναι απαραίτητο να επιλυθεί το μεταβατικό πρόβλημα σε όλες τις N_s αρμονικές συχνότητες παρά μονάχα στις $N'_s = N_s/2 + 1$. Συνεπώς η ελάχιστη συχνότητα που αναλύεται το πρόβλημα ισούται με $f_{min} = 0$ ενώ η μέγιστη ισούται με $f_{max} = N'_s \Delta f$. Συνεπώς για την πρώτη αρμονική συχνότητα γίνεται επίλυση του προβλήματος σαν σε σώμα σε μόνιμη κατάσταση, και για τις υπόλοιπες αρμονικές συχνότητες γίνεται επίλυση απευθείας στο πεδίο συχνοτήτων.

Στην εργασία [17] προτείνεται η εισαγωγή ενός μικρού μιγαδικού μέρους στις κυκλικές συχνότητες ανάλυσης του προβλήματος για την αποφυγή του φαινομένου αναδίπλωσης των συχνοτήτων (aliasing), κάνοντας χρήση της μεθόδου του εκθετικού παραθύρου (exponential window method). Σύμφωνα με αυτή τη μεθοδολογία οι κυκλικές συχνότητες τροποποιούνται ως εξής: $\bar{\omega} = \omega - j c_{\omega}$, όπου c_{ω} μία σταθερά που εκφράζεται ακόλουθα: $c_{\omega} = \bar{\lambda} \Delta\omega$, όπου $\Delta\omega = 2\pi\Delta f$ και $\bar{\lambda}$ μια προεπιλεγμένη παράμετρος. Η σταθερά c_{ω} δεν πρέπει να λαμβάνει αυθαίρετα μεγάλες τιμές διότι αυτό μπορεί να οδηγήσει είτε σε μείωση της ακρίβειας των αριθμητικών αποτελεσμάτων είτε σε λάθος εκτίμηση του εκθετικού παραθύρου παρατήρησης. Όπως σχολιάζεται στην ίδια εργασία, η μείωση της ακρίβειας οφείλεται στη δημιουργία αριθμητικού (θορύβου) σφάλματος στα παραγόμενα αποτελέσματα. Στην παρούσα διδακτορική διατριβή –μετά τη διεξαγωγή πληθώρας αριθμητικών πειραμάτων– επιλέχθηκε ως βέλτιστη η τιμή της παραμέτρου αυτής ίση με $\bar{\lambda} = 0.65$. Συνεπώς η πρώτη αρμονική συχνότητα δεν είναι ακριβώς μηδέν αλλά λαμβάνει μία σχετικά χαμηλή τιμή ίση με $\bar{\omega} = j c_{\omega}$. Με αυτό τον τρόπο το πρόβλημα επιλύεται για όλες τις αρμονικές συχνότητες με την προαναφερθείσα τεχνική στο πεδίο συχνοτήτων. Το μόνο σημείο στο οποίο αξίζει να γίνει αναφορά είναι ότι τα αποτελέσματα στο πεδίο του χρόνου πρέπει να πολλαπλασιαστούν με τον εκθετικό παράγοντα της μορφής $e^{c_{\omega}t}$ ούτως ώστε να γίνει επαναφορά των αποτελεσμάτων στο χρόνο στη σωστή κλίμακα. Για περισσότερες λεπτομέρειες σε αυτή τη μέθοδο εφαρμογής του εκθετικού παραθύρου μπορεί κάποιος να συμβουλευτεί την εργασία [12]. Γενικά στο εξής της παρούσης διδακτορικής διατριβής όλα τα μεταβατικά φαινόμενα θα αναλύονται μέσω της τεχνικής του εκθετικού παραθύρου. Η εμπειρία σε διάφορα αριθμητικά προβλήματα υπέδειξαν αυτό τον τρόπο ως τον πιο ευσταθή και ως τον καλύτερο δυνατό για την βελτίωση της ακρίβειας των αποτελεσμάτων.

Σε ορισμένες περιπτώσεις μεταβατικών φαινομένων οι συνοριακές συνθήκες τυγχάνει για μερικές αρμονικές συχνότητες να είναι σχεδόν αμελητέες ή ακόμα και μηδενικές. Τότε μπορεί κάποιος να αποφύγει την αριθμητική επίλυση του προβλήματος σε τούτες τις αρμονικές και να θέσει απευθείας την απόκριση του συστήματος ίση με μηδέν. Το όφελος από αυτή την παραδοχή είναι η δραστική μείωση του υπολογιστικού χρόνου υλοποίησης του εν λόγω προβλήματος αριθμητικά. Ο τρόπος απαλοιφής των αρμονικών συχνοτήτων πραγματοποιήθηκε με την υιοθέτηση ενός κατωφλίου αποκοπής από το συνολικό πλήθος των N'_s συχνοτήτων επίλυσης. Προφανώς η επιλογή αρκετά μεγάλου κατωφλίου μπορεί να οδηγήσει σε απαλοιφή πολλών αρμονικών συχνοτήτων, με άμεση συνέπεια την «παραμόρφωση» της τελικής απόκρισης του συστήματος στο πεδίο του χρόνου μετά την εφαρμογή του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier.

Στις προηγούμενες παραγράφους έγινε αναλυτική περιγραφή της χρονικής διακριτοποίησης του προβλήματος που αναλύεται. Κρίσιμο σημείο στην επιτυχή αριθμητική επίλυση ενός μεταβατικού φαινομένου μέσω της ΜΣΣ είναι η χωρική διακριτοποίηση, δηλαδή ο τρόπος δημιουργίας της κανάβου. Το μήκος των συνοριακών στοιχείων επιλέγεται με γνώμονα την ύπαρξη τουλάχιστον εννέα κόμβων ανά ελάχιστο μήκος του κύματος που διαδίδεται. Συνεπώς εάν ένα ελαστικό σώμα, με ταχύτητες διαμη-

κών και εγκαρσίων κυμάτων να δίδονται από τις Εξ. (2.28α') και (2.28β'), υπόκειται σε δυναμικό φορτίο με φασματικό περιεχόμενο το οποίο έχει μέγιστη συχνότητα ανάλυσης f_{max} . Σε αυτή την περίπτωση το ελάχιστο μήκος κύματος που μπορεί να διαδοθεί ισούται με $\lambda_{min} = c_s/f_{max}$. Αν υποτεθεί ότι χρησιμοποιούνται τρίκομβα τετραγωνικής-βάσης μονοδιάστατα στοιχεία για τη διακριτοποίηση του συνόρου του σώματος, τότε τέσσερα στοιχεία ανά ελάχιστο μήκος κύματος είναι επαρκή για το σωστό υπολογισμό του μεταβατικού φαινομένου. Το μήκος των στοιχείων (l_e) σε αυτή την περίπτωση θα είναι ίσο με

$$l_e \leq \frac{\lambda_{min}}{4}. \quad (2.80)$$

Προφανώς μπορεί κάποιος να χρησιμοποιήσει περισσότερα στοιχεία ανά ελάχιστο μήκος κύματος. Το όφελος της πιο πυκνής χωρικής διακριτοποίησης –αύξηση των βαθμών ελευθερίας του συστήματος– είναι η βελτίωση των αριθμητικών αποτελεσμάτων, με παράλληλη επιβάρυνση στην αύξηση του συνολικού χρόνου επίλυσης του προβλήματος που αναλύεται.

Βιβλιογραφία

- [1] Abramowitz M, Stegun IA (1972): *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications.
- [2] Banerjee PK (1994): *The Boundary Element Methods in Engineering*. McGraw-Hill.
- [3] Bathe K-J (1996): *Finite Element Procedures*. Prentice Hall.
- [4] Beskos DE (1987): Boundary element methods in dynamic analysis. *Applied Mechanics Reviews ASME*, **40**, 1–23.
- [5] Brebbia CA (1978): *The Boundary Element Method for Engineers*. Pentech Press.
- [6] Cooley JW, Tukey JW (1965): An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series. *Mathematics of Computations*, **19**, 297–301.
- [7] Dominguez J (1993): *Boundary Elements in Dynamics*. Computational Mechanics Publications, Elsevier.
- [8] El-Zafrany A (1993): *Techniques of the Boundary Element Method*. Ellis Horwood.
- [9] Galassi M, Davies J, Theiler J, Gough B, Jungman G, Booth M, Rossi F (2005): *GNU Scientific Library; Reference Manual*.
<http://www.gnu.org/software/gsl/>.
- [10] Gao X-W, Davies TG (2002): *Boundary Element Programming in Mechanics*. Cambridge University Press.
- [11] Guiggiani M (1998): Formulation and numerical treatment of boundary integral equations with hypersingular kernels. *Singular Integrals in Boundary Element Methods*, eds: Sladek V, Sladek J.
- [12] Kausel E, Roësset JM (1992): Frequency domain analysis of undamped systems. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, **118**, 721–734.

-
- [13] Polyzos D, Tsinopoulos SV, Beskos DE (1998): Static and dynamic boundary element analysis in incompressible linear elasticity. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, **17**, 515–536.
 - [14] Ramachandran PA (1994): *Boundary Element Methods in Transport Phenomena*. Computational Mechanics Publications.
 - [15] Rizzo FJ (1967): An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics. *Quarterly of Applied Mathematics*, **85**, 83–95.
 - [16] Sneddon IA (1951): *Fourier Transforms*. McGraw-Hill.
 - [17] Tadeu A, António J, Godinho L, Simões N (2004): Boundary element method analyses of transient heat conduction in an unbounded solid layer containing inclusions. *Computational Mechanics*, **34**, 99–110.

Κεφάλαιο 3

Τοπικές Μέθοδοι χωρίς Διακριτοποίηση

Σε αυτό το κεφάλαιο πρόκειται να παρουσιαστεί η Μέθοδος των Τοπικών Ολοκληρωτικών Εξισώσεων χωρίς Διακριτοποίηση (ΜΤΟΕχΔ) και η Τοπική Μέθοδος Petrov-Galerkin χωρίς Διακριτοποίηση (ΤΜΡΓχΔ) στις δύο διαστάσεις. Οι δύο αυτές μέθοδοι κατατάσσονται στη γενική κατηγορία των Τοπικών Μεθόδων χωρίς Διακριτοποίηση (ΤΜχΔ).

Η Μέθοδος των Συνοριακών Στοιχείων (ΜΣΣ) και η Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων (ΜΠΣ) σε σύγκριση με τις Τοπικές Μεθόδους χωρίς Διακριτοποίηση, είναι μεθοδολογίες βασισμένες σε γενικής μορφής διατυπώσεις (global formulations) [5, 7, 8, 9, 21], οι οποίες απαιτούν την τοποθέτηση στοιχείων (elements) στο σύνορο και στον χώρο Ω του σώματος αντίστοιχα, προκειμένου να γίνει χωρική διακριτοποίηση του προς ανάλυση προβλήματος. Ο τοπικός χαρακτήρας στις μεθόδους χωρίς διακριτοποίηση υπεισέρχεται μέσω των τοπικών χωρίων ολοκλήρωσης $\Omega_{(\kappa)}$ (βλ. Σχ. 3.4), όπου η διακριτοποίηση του προς ανάλυση σώματος πραγματοποιείται με την τοποθέτηση διάσπαρτων σημείων (scattered nodes). Για την προσέγγιση ή παρεμβολή της συνάρτησης του αγνώστου πεδίου έχουν αναπτυχθεί διάφορες μεθοδολογίες [11, 12, 16, 17, 19, 28, 30], δοσμένης όμως της κατανομής των σημείων και ενός τρόπου επιρροής μεταξύ αυτών, όπως φαίνεται στο Σχ. 3.1. Γενικά στην παρούσα διατριβή, στις μεθόδους χωρίς διακριτοποίηση τόσο τα τοπικά χωρία ολοκλήρωσης $\Omega_{(\kappa)}$ όσο και τα πεδία επιρροής $\Omega_{(\kappa)}$ ενός σημειακού κόμβου $\mathbf{x}^{(\kappa)}$ του πλέγματος σημείων θεωρούνται κύκλοι με κέντρο το ίδιο το σημείο. Σε διάφορες δημοσιευμένες εργασίες έχει γίνει χρήση άλλων σχημάτων ολοκλήρωσης ή επιρροής (π.χ. τετράγωνο, έλλειψη κ.α.) (βλ. Σχ. 3.1(β')). Η επιλογή του σχήματος του κύκλου επιλέχθηκε σαν η απλούστερη και καλύτερη λύση για πολλούς λόγους που θα γίνουν παρακάτω ξεκάθαροι.

Σχήμα 3.1: Τοπικά χωρία ολοκλήρωσης ή/και επιρροής σχήματος (α') κύκλου και (β') τετραγώνου.

3.1 Μέθοδοι προσέγγισης και παρεμβολής του πεδίου

Σε αυτό το εδάφιο πρόκειται να παρουσιασθούν σε συντομία η προσεγγιστική Μέθοδος Κινουμένων Ελαχίστων Τετραγώνων (Moving Least Squares approximation method), η Μέθοδος Κινουμένων Ελαχίστων Τετραγώνων με Προσέγγιση Συνθηκών Συνέπειας (Moving Least Squares approximation method with Consistency Approach) και η Μέθοδος Παρεμβολής Σημείων με Βάση Ακτινικών Συναρτήσεων (Radial Basis Point Interpolation Method).

3.1.1 Μέθοδος Κινουμένων Ελαχίστων Τετραγώνων

Έστω πραγματικός χώρος $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, στον οποίο εμπεριέχεται πλήθος σημείων με θέση $\mathbf{x}^{(j)}$, τα οποία είναι κέντρα κύκλων ακτίνας $r_S^{(j)}$, όπως φαίνεται στο Σχ. 3.2. Κάθε τέτοιος κύκλος θα καλείται στο εξής πεδίο επιρροής $\Omega_{(j)}$ του σημείου $\mathbf{x}^{(j)}$. Βέβαια αξίζει να σημειωθεί ότι το σχήμα του πεδίου επιρροής $\Omega_{(j)}$ μπορεί να επιλεγεί αυθαίρετα (κύκλος, τετράγωνο, έλλειψη κ.α. για τις δύο διαστάσεις). Στην παρούσα διδακτορική διατριβή επιλέχθηκε η απλή γεωμετρία του κύκλου. Για ένα τυχαίο σημείο παρατήρησης $\mathbf{y} \in \Omega$, η ένωση των κύκλων επιρροής $\Omega_{(j)}$ των γειτονικών κόμβων $\mathbf{x}^{(j)}$, $j = 1, \dots, n_a$, των οποίων οι κύκλοι εμπεριέχουν το σημείο $\mathbf{y}$ ορίζουν ένα χωρίο καλούμενο πεδίο ορισμού, δηλαδή: $\hat{\Omega}_{\mathbf{y}} = \Omega_{(1)} \cup \dots \cup \Omega_{(n_a)}$. Για το σημείο αυτό η προσέγγιση, για παράδειγμα της i συνιστώσας του διανυσματικού πεδίου των μετατοπίσεων στην ελαστικότητα, μπορεί να γραφτεί ως [17]

$$u_i(\mathbf{y}) = \mathbf{p}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{y}), \quad (3.1)$$

όπου $\mathbf{p}$ είναι ένα διάνυσμα έκτασης m του οποίου οι συνιστώσες σχηματίζουν μία πλήρη βάση από μονώνυμα των μεταβλητών του χώρου $\mathbf{x} = \{x_1 \dots x_D\}^T$ παραγόμενο με βάση το τρίγωνο Pascal [21] και ικανοποιώντας τις κάτωθι συνθήκες

$$p_1(\mathbf{x}) = 1, \quad (3.2\alpha')$$

$$p_i(\mathbf{x}) : C^{(\beta)}, \quad (3.2\beta')$$

$$\exists \left\{ \bar{\mathbf{x}}^{(1)} \dots \bar{\mathbf{x}}^{(m)} \right\} \subset \left\{ \mathbf{x}^{(1)} \dots \mathbf{x}^{(n_a)} \right\} : \left\{ \mathbf{p}(\bar{\mathbf{x}}^{(1)}) \dots \mathbf{p}(\bar{\mathbf{x}}^{(m)}) \right\}, \quad (3.2\gamma')$$

με $C^{(\beta)}$ να σημαίνει ότι η πολυωνυμική βάση έχει συνεχείς παραγώγους έως και β τάξης.

Σχήμα 3.2: Οι κύκλοι των πεδίων επιρροής $\check{\Omega}_{(j)}$ των γειτονικών κόμβων $\mathbf{x}^{(j)}$ που εμπεριέχουν το σημείο $\mathbf{y}$ στο διδιάστατο χώρο.

Συγκεκριμένα το διάνυσμα $\mathbf{p}$ εκφράζεται αντίστοιχα για γραμμική, τετραγωνική και κυβική βάση ως

$$\mathbf{p}(\mathbf{y}) = \left\{ 1 \quad y_1 \quad y_2 \right\}^T, \quad m = 3, \quad (3.3\alpha')$$

$$\mathbf{p}(\mathbf{y}) = \left\{ 1 \quad y_1 \quad y_2 \quad y_1^2 \quad y_1 y_2 \quad y_2^2 \right\}^T, \quad m = 6, \quad (3.3\beta')$$

$$\mathbf{p}(\mathbf{y}) = \left\{ 1 \quad y_1 \quad y_2 \quad y_1^2 \quad y_1 y_2 \quad y_2^2 \quad y_1^3 \quad y_1^2 y_2 \quad y_1 y_2^2 \quad y_2^3 \right\}^T, \quad m = 10. \quad (3.3\gamma')$$

Οι m άγνωστες συνιστώσες του διανύσματος $\mathbf{a}^{(i)}$ μπορούν να καθοριστούν με ελαχιστοποίηση της ακόλουθης L_2 νόρμας:

$$J^{(i)} = \sum_{j=1}^{n_a} w(\mathbf{y}, \mathbf{x}^{(j)}) \left[\mathbf{p}(\mathbf{x}^{(j)}) \cdot \mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{y}) - \check{u}_i(\mathbf{x}^{(j)}) \right]^2, \quad (3.4)$$

όπου $\check{u}_i$ είναι η άγνωστη επικόμβια τιμή του πεδίου στον κόμβο $\mathbf{x}^{(j)}$ και w μία συνεχής συνάρτηση, επονομαζόμενη συνάρτηση βάρους. Στην παρούσα διατριβή

χρησιμοποιήθηκαν κυρίως η συνάρτηση βάρους του Gauss, η κονική συνάρτηση και η συνάρτηση spline (βλ. Εδάφ. Γ.1).

Η ελαχιστοποίηση της ποσότητας J_i οδηγεί στην παρακάτω γραμμική εξίσωση

$$\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{y}, \mathbf{x}^{(j)}) \cdot \mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{y}) = \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{y}, \mathbf{x}^{(j)}) \cdot \tilde{\mathbf{u}}^{(i)}, \quad (3.5)$$

όπου

$$\tilde{\mathbf{u}}^{(i)} = \left\{ \tilde{u}_i(\mathbf{x}^{(1)}) \quad \dots \quad \tilde{u}_i(\mathbf{x}^{(n_a)}) \right\}_{[n_a]}^T, \quad (3.6)$$

$$\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{y}, \mathbf{x}^{(j)}) = \sum_{l=1}^{n_a} w(\mathbf{y}, \mathbf{x}^{(l)}) \mathbf{p}(\mathbf{x}^{(l)}) \otimes \mathbf{p}(\mathbf{x}^{(l)}), \quad (3.7)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{y}, \mathbf{x}^{(j)}) = \left[w(\mathbf{y}, \mathbf{x}^{(1)}) \mathbf{p}(\mathbf{x}^{(1)}) \quad \dots \quad w(\mathbf{y}, \mathbf{x}^{(n_a)}) \mathbf{p}(\mathbf{x}^{(n_a)}) \right]_{[m \times n_a]}. \quad (3.8)$$

Η προσέγγιση με τη Μέθοδο Κινουμένων Ελαχίστων Τετραγώνων (MKET) είναι καλά ορισμένη όταν και μόνο όταν το μητρώο $\tilde{\mathbf{A}}$ είναι μη-ιδιόμορφο, δηλαδή αντιστρέψιμο. Απαραίτητη προϋπόθεση είναι οι m συναρτήσεις βάρους να είναι μη-μηδενικές ($n_a \geq m$) για το σημείο παρατήρησης $\mathbf{y}$, και ότι οι κόμβοι $\mathbf{x}^{(j)}$ να μην είναι τοποθετημένοι με κάποιο ειδικό τρόπο [18], όπως για παράδειγμα σε ευθεία γραμμή. Συνεπώς από την Εξ. (3.5) συνεπάγεται

$$\mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{y}) = \tilde{\mathbf{A}}^{-1}(\mathbf{y}, \mathbf{x}^{(j)}) \cdot \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{y}, \mathbf{x}^{(j)}) \cdot \tilde{\mathbf{u}}^{(i)}. \quad (3.9)$$

Λαμβάνοντας τις Εξ. (3.1) και (3.9) μπορεί να επιτευχθεί η προσέγγιση μέσω της εξίσωσης

$$u_i(\mathbf{y}) = \mathbf{p}(\mathbf{y}) \cdot \tilde{\mathbf{A}}^{-1}(\mathbf{y}, \mathbf{x}^{(j)}) \cdot \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{y}, \mathbf{x}^{(j)}) \cdot \tilde{\mathbf{u}}^{(i)}, \quad (3.10)$$

ή αλλιώς σε πιο απλούστερη μορφή, όμοια με αυτή της Εξ. (2.55), για την γενική περίπτωση του διανυσματικού πεδίου των μετατοπίσεων

$$\mathbf{u}(\mathbf{y}) = \tilde{\Phi}(\mathbf{y}) \cdot \tilde{\mathbf{u}}, \quad (3.11)$$

όπου $\tilde{\mathbf{u}} = \{ \dots \tilde{u}_1(\mathbf{x}^{(j)}) \tilde{u}_2(\mathbf{x}^{(j)}) \dots \}_{[2n_a]}^T$ είναι το διάνυσμα των φανταστικών επικόμβιων τιμών των μετατοπίσεων στις δύο διαστάσεις των n_a γειτονικών κόμβων και ο πίνακας

$$\tilde{\Phi}(\mathbf{y}) = \left[\begin{array}{ccc} \ddots & \phi_j(\mathbf{y}) & 0 \\ & 0 & \phi_j(\mathbf{y}) \\ & & \ddots \end{array} \right]_{[2 \times 2n_a]}, \quad (3.12)$$

με τις συναρτήσεις μορφής να δίνονται από τη μητρική σχέση

$$\phi(\mathbf{y}) = \mathbf{p}(\mathbf{y}) \cdot \tilde{\mathbf{A}}^{-1}(\mathbf{y}, \mathbf{x}^{(j)}) \cdot \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{y}, \mathbf{x}^{(j)}) . \quad (3.13)$$

Αντίστοιχα για ένα ακουστικό μέσο η προσέγγιση της πίεσης μπορεί να γίνει μέσω της έκφρασης

$$p(\mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{y}) \cdot \check{\mathbf{p}} , \quad (3.14)$$

όπου το διάνυσμα $\Phi(\mathbf{y}) = \{\dots \phi_j(\mathbf{y}) \dots\}_{[n_a]}^T$ και το διάνυσμα των φανταστικών επικόμβιων τιμών (fictitious nodal values) της πίεσης $\check{\mathbf{p}} = \{\dots \check{p}(\mathbf{x}^{(j)}) \dots\}_{[n_a]}^T$ των γειτονικών κόμβων.

Σχήμα 3.3: Προσέγγιση του πεδίου στο μονοδιάστατο χώρο, όπου φαίνεται η διαφορά της πραγματικής τιμής u_i και της φανταστικής τιμής $\check{u}_i$ του πεδίου για κάθε i κόμβο.

Από τις Εξ. (3.11), (3.14) παρατηρείται ότι για να γίνει η προσέγγιση στο αυθαίρετο σημείο $\mathbf{y}$ δεν είναι απαραίτητο να έχει κάποιος τις πραγματικές επικόμβιες τιμές του πεδίου των γειτονικών κόμβων (βλ. Σχ. 3.3) αλλά κάποιες φανταστικές τιμές αυτών. Με τον όρο φανταστικές τιμές δεν νοείται ότι το διανυσματικό πεδίο των μετατοπίσεων $\check{u}_i$ ή πιέσεων $\check{p}$ λαμβάνει μιγαδικές τιμές· απλά ο πιο δόκιμος όρος της λέξης «fictitious» –που χρησιμοποιείται εκτενώς στη διεθνή βιβλιογραφία– είναι αυτός, για την απόδοση και περιγραφή των ποσοτήτων: $\check{u}_i, \check{p}$. Η φανταστικές τιμές του πεδίου που αναπαριστάται είναι πάντα κατά-προσέγγιση τιμές.

Όπως φαίνεται από τις Εξ. (3.13) και Εξ. (3.17) είναι απαραίτητη η πράξη της αντιστροφής του πίνακα $\tilde{\mathbf{A}}$. Στην εργασία [10] παρουσιάζεται μία εναλλακτική διαδικασία που είναι περισσότερο αποδοτική από αριθμητικής σκοπιάς, σύμφωνα με την οποία γίνεται αποσύνθεση του μητρώου $\tilde{\mathbf{A}}$ σε άνω και κάτω τριγωνικό πίνακα αντί της αντιστροφής του. Συγκεκριμένα, η Εξ. (3.13) μπορεί να γραφτεί ως εξής

$$\phi(\mathbf{y}) = \mathbf{p}(\mathbf{y}) \cdot \tilde{\mathbf{A}}^{-1}(\mathbf{y}, \mathbf{x}^{(j)}) \cdot \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{y}, \mathbf{x}^{(j)}) = \boldsymbol{\gamma} \cdot \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{y}, \mathbf{x}^{(j)}) , \quad (3.15)$$

όπου το διάνυσμα γ μπορεί να υπολογισθεί μέσω της LU-αποσύνθεσης του μητρώου $\tilde{\mathbf{A}}$, δεδομένου ότι

$$\gamma \cdot \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{y}, \mathbf{x}^{(j)}) = \mathbf{p}(\mathbf{y}) . \quad (3.16)$$

Οι συνιστώσες της πρώτης χωρικής παραγώγου των συναρτήσεων μορφής δίδονται από τη σχέση

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi(\mathbf{y})}{\partial y_k} &= \mathbf{p}(\mathbf{y}) \cdot \tilde{\mathbf{A}}^{-1}(\mathbf{y}, \mathbf{x}^{(j)}) \cdot \frac{\partial \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{y}, \mathbf{x}^{(j)})}{\partial y_k} + \mathbf{p}(\mathbf{y}) \cdot \frac{\partial \tilde{\mathbf{A}}^{-1}(\mathbf{y}, \mathbf{x}^{(j)})}{\partial y_k} \cdot \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{y}, \mathbf{x}^{(j)}) + \\ &\quad \frac{\partial \mathbf{p}(\mathbf{y})}{\partial y_k} \cdot \tilde{\mathbf{A}}^{-1}(\mathbf{y}, \mathbf{x}^{(j)}) \cdot \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{y}, \mathbf{x}^{(j)}) , \end{aligned} \quad (3.17)$$

με την παράγωγο του αντιστρόφου του πίνακα $\tilde{\mathbf{A}}$ να δίνεται από τη σχέση

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{A}}^{-1}(\mathbf{y}, \mathbf{x}^{(j)})}{\partial y_k} = -\tilde{\mathbf{A}}^{-1}(\mathbf{y}, \mathbf{x}^{(j)}) \cdot \frac{\partial \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{y}, \mathbf{x}^{(j)})}{\partial y_k} \cdot \tilde{\mathbf{A}}^{-1}(\mathbf{y}, \mathbf{x}^{(j)}) . \quad (3.18)$$

Η χωρική παράγωγος του διανύσματος γ μπορεί να υπολογιστεί μέσω της Εξ. (3.16)

$$\begin{aligned} \gamma \cdot \frac{\partial \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{y}, \mathbf{x}^{(j)})}{\partial y_k} + \frac{\partial \gamma}{\partial y_k} \cdot \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{y}, \mathbf{x}^{(j)}) &= \frac{\partial \mathbf{p}(\mathbf{y})}{\partial y_k} \Leftrightarrow \\ \frac{\partial \gamma}{\partial y_k} \cdot \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{y}, \mathbf{x}^{(j)}) &= \frac{\partial \mathbf{p}(\mathbf{y})}{\partial y_k} - \gamma \cdot \frac{\partial \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{y}, \mathbf{x}^{(j)})}{\partial y_k} , \end{aligned} \quad (3.19)$$

οδηγώντας έτσι σε απλούστερη μορφή την Εξ. (3.17) που δίδει την παράγωγο της συνάρτησης μορφής

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{y})}{\partial y_k} = \gamma \cdot \frac{\partial \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{y}, \mathbf{x}^{(j)})}{\partial y_k} + \frac{\partial \gamma}{\partial y_k} \cdot \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{y}, \mathbf{x}^{(j)}) . \quad (3.20)$$

3.1.2 Μέθοδος Κινουμένων Ελαχίστων Τετραγώνων με Προσέγγιση Συνθηκών Συνέπειας

Ένα από τα πλεονεκτήματα υλοποίησης της Μεθόδου Κινουμένων Ελαχίστων Τετραγώνων με Προσέγγιση Συνθηκών Συνέπειας –όπως προτάθηκε στην εργασία [12]– είναι η απουσία της πράξης αντιστροφής πίνακα για την κατασκευή των συναρτήσεων μορφής. Παρακάτω παρουσιάζεται συνοπτικά η μέθοδος αυτή, ενώ για περισσότερες λεπτομέρειες μπορεί κάποιος να ανατρέξει στην βιβλιογραφία [11, 12].

Κάνοντας τις ίδιες παραδοχές με αυτές του Υποεδράφ. 3.1.1, η προσέγγιση του πεδίου για ένα αυθαίρετα επιλεγμένο σημείο $\mathbf{y}$ επιτυγχάνεται μέσω της ελαχιστοποίησης της νόρμας

$$J = \phi(\mathbf{y}) \cdot \tilde{\mathbf{W}}^{-1}(\mathbf{y}, \mathbf{x}^{(j)}) \cdot \phi(\mathbf{y}) , \quad (3.21)$$

και των ακόλουθων Συνθηκών Συνέπειας

$$\sum_{j=0}^{n_a} \phi_j(\mathbf{y}) = 1, \quad (3.22\alpha')$$

$$\sum_{j=0}^{n_a} \phi_j(\mathbf{y}) \mathbf{x}^{(j)} = \mathbf{y}, \quad (3.22\beta')$$

όπου $\tilde{\mathbf{W}}$ είναι ένας διαγώνιος $n_a \times n_a$ πίνακας του οποίου τα διαγώνια στοιχεία W_{jj} είναι οι συναρτήσεις βάρους $w(\mathbf{y}, \mathbf{x}^{(j)})$. Οι παραπάνω Συνθήκες Συνέπειας μπορούν να γραφτούν σε μητρική μορφή ως εξής

$$\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{x}^{(j)}) \cdot \phi(\mathbf{y}) = \check{\mathbf{e}}, \quad (3.23)$$

όπου $\check{\mathbf{e}} = \{1 \ 0 \ \dots \ 0\}_{[m]}^T$ και

$$\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{x}^{(j)}) = \left[\dots \ \mathbf{p}(\mathbf{x}^{(j)}) \ \dots \right]_{[m \times n_a]}, \quad (3.24)$$

με το διάνυσμα $\mathbf{p}$ να δίνεται από την Εξ. (3.3).

Αρχικοποίηση:

$$W_{ij}^{(1)} \equiv \tilde{\mathbf{W}} \quad W_{ij,k}^{(1)} \equiv \frac{\partial W_{ij}}{\partial y_k}$$

Επανάληψη: $l = 2, \dots, m$

$$\begin{aligned} c_i &= W_{ij}^{(l-1)} P_{jl} & c_{i,k} &= W_{ij,k}^{(l-1)} P_{jl} + W_{ij}^{(l-1)} P_{jl,k} \\ d &= P_{li} c_i & d_{,k} &= P_{li,k} c_i + P_{li} c_{i,k} \\ W_{ij}^{(l)} &= W_{ij}^{(l-1)} - \frac{c_i c_j}{d} & W_{ij,k}^{(l)} &= W_{ij,k}^{(l-1)} - \frac{c_{i,k} c_j + c_i c_{j,k}}{d} - \frac{c_i c_j d_{,k}}{d^2} \end{aligned}$$

Τέλος επαναληπτικής διαδικασίας

Υπολογισμός:

$$\begin{aligned} c_i &= \sum_j W_{ij}^{(m)} & c_{i,k} &= \sum_j W_{ij,k}^{(m)} \\ d &= \sum_i \sum_j W_{ij}^{(m)} & d_{,k} &= \sum_i \sum_j W_{ij,k}^{(m)} \end{aligned}$$

Συναρτήσεις μορφής και οι παράγωγοι:

$$\phi_i = \frac{c_i}{d} \quad \phi_{i,k} = \frac{c_{i,k} + \phi_i d_{,k}}{d}$$

Πίνακας 3.1: Επαναληπτικός αλγόριθμος για τον υπολογισμό των συναρτήσεων μορφής και των παραγώγων τούς για τη Μέθοδο Κινουμένων Ελαχίστων Τετραγώνων με Προσέγγιση Συνθηκών Συνέπειας.

Μετά την ελαχιστοποίηση του J , μπορεί κάποιος να σχηματίσει το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων με πολλαπλασιαστές Lagrange:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{W}}^{-1} & \tilde{\mathbf{P}}^T \\ \tilde{\mathbf{P}} & \tilde{\mathbf{O}} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \check{\mathbf{e}} \end{Bmatrix}. \quad (3.25)$$

Σύμφωνα με την εργασία [12], το γραμμικό σύστημα της Εξ. (3.25) μπορεί να επιλυθεί μέσω διαδοχικής απαλοιφής των πολλαπλασιαστών Lagrange και «αναβάθμισης» του αρχικά διαγώνιου πίνακα των συναρτήσεων βάρους $\tilde{\mathbf{W}}$. Ο αλγόριθμος υπολογισμού των συναρτήσεων μορφής και των παραγώγων τούς παρουσιάζεται συνοπτικά στον Πίν. 3.1.

3.1.3 Μέθοδος Παρεμβολής Σημείων με Βάση Ακτινικών Συναρτήσεων

Η παρεμβολή με βάση ακτινικών συναρτήσεων (Radial Basis functions) έχει γίνει ένα ισχυρό εργαλείο στην προσέγγιση συναρτήσεων πολλών μεταβλητών, ειδικά με τη μέθοδο συνεπτυγμένης στήριξης με βάση ακτινικών συναρτήσεων (Compactly supported Radial Basis functions). Οι πιο διαδεδομένες συναρτήσεις είναι αυτές του Wendland [28, 29] και του Wu [30] (βλ. Εδάφ. Γ.2).

Όπως και στο Υποεδράφ. 3.1.1, για ένα αυθαίρετα επιλεγμένο σημείο $\mathbf{y}$ η παρεμβολή της i συνιστώσας του διανυσματικού πεδίου των μετατοπίσεων στην ελαστικότητα, γίνεται μέσω της εξίσωσης [28, 30]

$$u_i(\mathbf{y}) = \mathbf{g}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{b}^{(i)}(\mathbf{y}), \quad (3.26)$$

όπου $\mathbf{b}^{(i)}$ είναι διάνυσμα άγνωστων συντελεστών και

$$\mathbf{g}(\mathbf{y}) = \left\{ g(\mathbf{y}, \mathbf{x}^{(1)}) \quad \dots \quad g(\mathbf{y}, \mathbf{x}^{(n_a)}) \right\}_{[n_a]}^T, \quad (3.27)$$

του οποίου τα στοιχεία είναι οι συναρτήσεις των Εξ. (Γ.6)-(Γ.7) ή Εξ. (Γ.8)-(Γ.11) των n_a γειτονικών κόμβων (βλ. Παρ. Γ), των οποίων τα πεδία επιρροής εμπεριέχουν το σημείο $\mathbf{y}$.

Από την Εξ. (3.26) παρεμβολής, το διάνυσμα των άγνωστων συντελεστών $\mathbf{b}^{(i)}$ υπολογίζεται μέσω της αλγεβρικής εξίσωσης

$$\mathbf{b}^{(i)}(\mathbf{y}) = \tilde{\mathbf{G}}^{-1}(\mathbf{x}^{(j)}) \cdot \tilde{\mathbf{u}}^{(i)}, \quad (3.28)$$

με το διάνυσμα $\tilde{\mathbf{u}}^{(i)}$ και το μητρώο $\tilde{\mathbf{G}}$ να δίδονται ακολούθως

$$\tilde{\mathbf{u}}^{(i)} = \left\{ \check{u}_i^{(1)} \quad \check{u}_i^{(2)} \quad \dots \quad \check{u}_i^{(n_a)} \right\}_{[n_a]}^T, \quad (3.29)$$

$$\tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{x}^{(j)}) = \begin{bmatrix} g(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(1)}) & g(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}) & \dots & g(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(n_a)}) \\ g(\mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{x}^{(1)}) & g(\mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{x}^{(2)}) & \dots & g(\mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{x}^{(n_a)}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g(\mathbf{x}^{(n_a)}, \mathbf{x}^{(1)}) & g(\mathbf{x}^{(n_a)}, \mathbf{x}^{(2)}) & \dots & g(\mathbf{x}^{(n_a)}, \mathbf{x}^{(n_a)}) \end{bmatrix}_{[n_a \times n_a]}, \quad (3.30)$$

με $\tilde{u}_i^{(j)}$ να είναι τώρα η πραγματική επικρόμβια i συνιστώσα των μετατοπίσεων και όχι μία κατά προσέγγιση τιμή, όπως στη MKET. Αξίζει όμως κάποιος να παρατηρήσει στον πίνακα $\tilde{\mathbf{G}}$ ότι: $g(\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{x}^{(j)}) = g(\mathbf{x}^{(j)}, \mathbf{x}^{(i)})$, γεγονός που μπορεί να επιταχύνει τον υπολογισμό του εν λόγω μητρώου. Εξαιτίας του ότι ο πίνακας $\tilde{\mathbf{G}}$ είναι θετικά ορισμένος μπορεί εύκολα να αντιστραφεί.

Συνεπώς η παρεμβολή του πεδίου της i συνιστώσας των μετατοπίσεων μπορεί να εκφραστεί ως

$$u_i(\mathbf{y}) = \mathbf{g}(\mathbf{y}) \cdot \tilde{\mathbf{G}}^{-1}(\mathbf{x}^{(j)}) \cdot \tilde{\mathbf{u}}^{(i)}, \quad (3.31)$$

ή αλλιώς σε μορφή παρόμοια με αυτή της Εξ. (3.11), με τις συναρτήσεις μορφής και τις παραγώγους τούς να δίδονται από τις ακόλουθες σχέσεις

$$\phi(\mathbf{y}) = \mathbf{g}(\mathbf{y}) \cdot \tilde{\mathbf{G}}^{-1}(\mathbf{x}^{(j)}), \quad (3.32)$$

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{y})}{\partial y_k} = \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{y})}{\partial y_k} \cdot \tilde{\mathbf{G}}^{-1}(\mathbf{x}^{(j)}), \quad (3.33)$$

όπου $\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial y_k} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial d_j} \frac{\partial d_j}{\partial y_k}$ και $\frac{\partial d_j}{\partial y_k} = (y_k - x_k^{(j)})/d_j$.

Η παρεμβολή της i συνιστώσας του διανυσματικού πεδίου των μετατοπίσεων στην ελαστικότητα για ένα σημείο $\mathbf{y}$ μέσω της Μεθόδου Παρεμβολής Σημείων με Βάση Ακτινικών Συναρτήσεων (ΜΠΣΒΑΣ), γίνεται μέσω της Εξ. (3.26) με προσθήκη των όρων της πολυωνυμικής βάσης [16, 19, 20]

$$u_i(\mathbf{y}) = \mathbf{g}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{b}^{(i)}(\mathbf{y}) + \mathbf{p}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{y}), \quad (3.34)$$

με συνθήκη περιορισμού

$$\sum_{j=1}^{n_a} \tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{x}^{(j)}) \cdot \mathbf{b}^{(i)}(\mathbf{y}) = \mathbf{0}, \quad (3.35)$$

όπου $\mathbf{a}^{(i)}$, $\mathbf{b}^{(i)}$ είναι διανύσματα άγνωστων συντελεστών, το διάνυσμα $\mathbf{p}(\mathbf{y})$ είναι το ίδιο με αυτό των Εξ. (3.2), το διάνυσμα $\mathbf{g}$ ίδιο με αυτό της Εξ. (3.27) και το μητρώο $\tilde{\mathbf{P}}$ είναι όμοιο με αυτό της Εξ. (3.24). Οι εκτενώς διαδεδομένες ακτινικές συναρτήσεις που μπορεί κάποιος να χρησιμοποιήσει δίδονται αναλυτικά στο Εδάφ. Γ.3 του Παραρτήματος.

Η επίτευξη της παρεμβολής στα n_a διεσπαρμένα σημεία $\mathbf{x}^{(j)}$ οδηγεί στον ακόλουθο συνδυασμό των Εξ. (3.34), (3.35)

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{G}} & \tilde{\mathbf{P}} \\ \tilde{\mathbf{P}}^T & \tilde{\mathbf{O}} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{b}^{(i)} \\ \mathbf{a}^{(i)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}^{(i)} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}, \quad (3.36)$$

με το μητρώο $\tilde{\mathbf{P}}$ να περιγράφεται από την Εξ. (3.24).

Αντιστρέφοντας τον πίνακα της Εξ. (3.36) συνεπάγεται

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{b}^{(i)} \\ \mathbf{a}^{(i)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{G}} & \tilde{\mathbf{P}} \\ \tilde{\mathbf{P}}^T & \tilde{\mathbf{O}} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}^{(i)} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} = \tilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{x}^{(j)}) \cdot \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}^{(i)} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}, \quad (3.37)$$

Τελικά η παρεμβολή στο σημείο $\mathbf{y}$, με βάση τις Εξ. (3.34) και (3.37), είναι η εξής

$$u_i(\mathbf{y}) = \left\{ \mathbf{g}^T(\mathbf{y}) \quad \mathbf{p}^T(\mathbf{y}) \right\} \cdot \tilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{x}^{(j)}) \cdot \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}^{(i)} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}. \quad (3.38)$$

Γράφοντας την Εξ. (3.38) σε παρόμοια μορφή με αυτή της Εξ. (3.11) τότε οι συναρτήσεις μορφής δίδονται από την ακόλουθη σχέση

$$\phi(\mathbf{y}) = \left\{ \mathbf{g}^T(\mathbf{y}) \quad \mathbf{p}^T(\mathbf{y}) \right\} \cdot \tilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{x}^{(j)}), \quad (3.39)$$

με την πρώτη χωρική παράγωγο των συναρτήσεων μορφής να είναι

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{y})}{\partial y_k} = \left\{ \frac{\partial \mathbf{g}^T(\mathbf{y})}{\partial y_k} \quad \frac{\partial \mathbf{p}^T(\mathbf{y})}{\partial y_k} \right\} \cdot \tilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{x}^{(j)}). \quad (3.40)$$

Το μεγάλο πλεονέκτημα της Μεθόδου Παρεμβολής Σημείων με Βάση Ακτινικών Συναρτήσεων σε σύγκριση με τη Μέθοδο Κινουμένων Ελαχίστων Τετραγώνων είναι ότι η πρώτη κάνει παρεμβολή στο άγνωστο πεδίο, π.χ. των μετατοπίσεων $\mathbf{u}$, της διασποράς των σημείων $\mathbf{x}^{(j)}$ ενώ η δεύτερη πραγματοποιεί προσέγγιση του αντίστοιχου πεδίου. Άρα η ΜΠΣΒΑΣ χαρακτηρίζεται από τη «δέλτα» ιδιότητα: καθιστώντας έτσι δυνατό να ικανοποιηθούν απευθείας οι ουσιαστικές συνοριακές συνθήκες, όπως ακριβώς και στα συνοριακά στοιχεία της Μεθόδου των Συνοριακών Στοιχείων. Επίσης η ΜΠΣΒΑΣ έχει συνεχείς συναρτήσεις μορφής μέχρι και παραγώγους δευτέρας τάξεως ($C^{(2)}$), σε αντίθεση με τη ΜΚΕΤ που έχει συνεχείς συναρτήσεις μέχρι πρώτης τάξης παραγώγους ($C^{(1)}$). Αυτό το πλεονέκτημα της πρώτης μεθόδου σε σχέση με τη δεύτερη είναι απαραίτητο σε περίπτωση που απαιτείται να υπολογισθεί και δεύτερης τάξης παράγωγος των συναρτήσεων μορφής. Στην παρούσα διδακτορική διατριβή μονάχα μέχρι πρώτης τάξης παράγωγοι χρησιμοποιούνται, αν και με βάση τις παρατηρήσεις που έγιναν στην πρόσφατη δημοσίευση [25] προτείνεται η αποφυγή υπολογισμού των. Το μόνο μειονέκτημα όμως της ΜΠΣΒΑΣ είναι η αντιστροφή του μητρώου $\tilde{\mathbf{Q}}$, το οποίο είναι μεγέθους $(n_a+m) \times (n_a+m)$, σε σύγκριση με τον κατά-συνθήκη μικρότερο πίνακα $\tilde{\mathbf{A}}$ της Εξ. (3.7) του οποίου το μέγεθος είναι

σταθερό $m \times m$. Συνεπώς σε περίπτωση που ένα σημείο $\mathbf{y}$ επηρεάζεται από μεγάλο αριθμό «γειτονικών» σημείων $\mathbf{x}^{(j)}$ τότε μπορεί ο πίνακας αυτός να μεγαλώσει δραματικά, με τον φόβο βέβαια του να είναι ιδιόμορφος. Μία πηγή μη-αντιστρεψιμότητας του εν λόγω μητρώου είναι η παθητική τοποθέτηση των κόμβων στον χώρο Ω του σώματος που αναλύεται [5, 18, 21].

3.1.4 Αναπαράσταση του άγνωστου πεδίου

Όπως έγινε φανερό στα Υποεδάφ. 3.1.1, 3.1.2 και 3.1.3 η προσέγγιση ή παρεμβολή του άγνωστου πεδίου των μετατοπίσεων $\mathbf{u}$ σε ένα τυχαίο σημείο $\mathbf{y}$ μπορεί να γίνει μέσω της Εξ. (3.11). Αντίστοιχα η αναπαράσταση του γνωστού πεδίου των τάσεων $\mathbf{t}$ μπορεί να γίνει είτε μέσω της

$$\mathbf{t}(\mathbf{y}) = \tilde{\Phi}(\mathbf{y}) \cdot \check{\mathbf{t}}, \quad (3.41)$$

παρόμοια σε μορφή με την Εξ. (3.11), είτε να θεωρηθεί το διάνυσμα των τάσεων $\mathbf{t}$ άμεσα εξαρτημένο του διανύσματος των μετατοπίσεων $\tilde{\mathbf{u}}$. Συγκεκριμένα, με βάση την Εξ. (2.8) και εφαρμόζοντας διαδοχικά σε αυτή το νόμο του Hooke (βλ. Εξ. (2.2)) και τη σχέση παραμορφώσεων-μετατοπίσεων (βλ. Εξ. (2.6)) προκύπτει ότι

$$\mathbf{t}(\mathbf{y}) = \tilde{\mathbf{N}}(\mathbf{y}) \cdot \tilde{\mathbf{C}} \cdot \tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{y}) = \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{y}). \quad (3.42)$$

Εισάγοντας την Εξ. (3.11) στην Εξ. (3.42) προκύπτει η τελική μορφή της αναπαράστασης του άγνωστου πεδίου του διανύσματος των τάσεων

$$\mathbf{t}(\mathbf{y}) = \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{y}) \cdot \tilde{\Phi}(\mathbf{y}) \cdot \check{\mathbf{u}}, \quad (3.43)$$

συναρτήσει δηλαδή των επικόμβιων τιμών των μετατοπίσεων των «γειτονικών» κόμβων $\mathbf{x}^{(j)}$.

Όμοια για το ακουστικό μέσο η βαθμίδα υπερπίεσης μπορεί να αναπαρασταθεί μέσω της αντίστοιχης σχέσης

$$q(\mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{y}) \cdot \check{q}, \quad (3.44)$$

είτε μέσω της

$$q(\mathbf{y}) = \Psi(\mathbf{y}) \cdot \check{\mathbf{p}}, \quad (3.45)$$

με την βαθμίδα της υπερπίεσης q στην Εξ. (3.45) να είναι άμεσα εξαρτημένη των επικόμβιων τιμών της πίεσης των «γειτονικών» κόμβων $\mathbf{x}^{(j)}$ και

$$\Psi(\mathbf{y}) = \left\{ \dots \quad \hat{n}_1(\mathbf{y}) \frac{\partial \phi_j(\mathbf{y})}{\partial y_1} + \hat{n}_2(\mathbf{y}) \frac{\partial \phi_j(\mathbf{y})}{\partial y_2} \quad \dots \right\}_{[na]}^T. \quad (3.46)$$

Επίσης, για λόγους που θα γίνουν προφανείς σε επόμενο εδάφιο, η προσέγγιση ή παρεμβολή του διανύσματος των τάσεων

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y}) \equiv \begin{Bmatrix} \sigma_{11}(\mathbf{y}) \\ \sigma_{22}(\mathbf{y}) \\ \sigma_{12}(\mathbf{y}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11}(\mathbf{y}) \\ \sigma_{22}(\mathbf{y}) \\ \sigma_{21}(\mathbf{y}) \end{Bmatrix}, \quad (3.47)$$

στο σημείο $\mathbf{y}$ μπορεί να γίνει μέσω της σχέσης

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y}) = \tilde{\boldsymbol{\Theta}}(\mathbf{y}) \cdot \check{\boldsymbol{\sigma}}, \quad (3.48)$$

όπου $\check{\boldsymbol{\sigma}} = \{ \dots \check{\sigma}_{11}(\mathbf{x}^{(j)}) \check{\sigma}_{22}(\mathbf{x}^{(j)}) \check{\sigma}_{12}(\mathbf{x}^{(j)}) \dots \}_{[3n_a]}^T$ και

$$\tilde{\boldsymbol{\Theta}}(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} \phi_j(\mathbf{y}) & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \phi_j(\mathbf{y}) & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \phi_j(\mathbf{y}) & \dots \end{bmatrix}_{[3 \times 3n_a]}. \quad (3.49)$$

3.1.5 Τεχνική εφαρμογής των συνοριακών συνθηκών

Ως γνωστόν από τα προηγούμενα υποεδάφια, μονάχα η Μέθοδος Παρεμβολής Σημείων με Βάση Ακτινικών Συναρτήσεων έχει την ικανότητα παρεμβολής του άγνωστου πεδίου, σε αντίθεση με τη Μέθοδο Κινουμένων Ελαχίστων Τετραγώνων που απλά προσεγγίζει δεδομένα. Αυτό το χαρακτηριστικό καθιστά αδύνατη την εφαρμογή των ουσιαστικών συνοριακών συνθηκών απευθείας στις επικόμβιες τιμές $\check{\mathbf{u}}, \check{p}$ για ελαστικό ή ακουστικό μέσο αντίστοιχα, όπως συμβαίνει στη Μέθοδο Συνοριακών Στοιχείων. Όπως σχολιάζεται στην αναφορά [15], η Μέθοδος Κινουμένων Ελαχίστων Τετραγώνων μπορεί να παράγει συναρτήσεις μορφής που κατέχουν τη «δέλτα» ιδιότητα μονάχα στην ειδική περίπτωση που οι διεσπαρμένοι κόμβοι είναι ομοιόμορφα κατανομημένοι. Παράλληλα στην εργασία [2] παρουσιάστηκε μία απλή τεχνική εφαρμογής των συνοριακών συνθηκών, όπου η τιμή του άγνωστου πεδίου υπολογίζεται μέσω της παρεμβολής των πραγματικών επικόμβιων τιμών των γειτονικών σημείων $\mathbf{x}^{(j)}$ και όχι μέσω της προσέγγισης των αντίστοιχων φανταστικών τους τιμών.

Συγκεκριμένα αν κάποιος επιθυμεί να προσεγγίσει το άγνωστο πεδίο της πίεσης p σε ένα σημείο $\mathbf{y}$ μέσω της Εξ. (3.14), τότε αντίστροφα μπορεί να γράψει ότι η φανταστική επικόμβια τιμή της πίεσης στον κόμβο $\mathbf{x}^{(j)}$ να δίδεται από τη σχέση

$$\check{p}(\mathbf{x}^{(j)}) = \sum_{i=1}^{n_a} R_{ji} p(\mathbf{x}^{(i)}), \quad (3.50)$$

όπου ο πίνακας μετασχηματισμού μπορεί να υπολογισθεί άμεσα μέσω

$$R_{ij} = \left[\phi_j(\mathbf{x}^{(i)}) \right]^{-1}, \quad (3.51)$$

διότι οι συναρτήσεις μορφής των κόμβων μπορούν να εκτιμηθούν στους κόμβους του χωρίου.

Ως εκ τούτου είναι δυνατόν η προσέγγιση να επαναδιατυπωθεί χρησιμοποιώντας τις πραγματικές επικόμβιες τιμές ως εξής

$$p(\mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{y}) \cdot \tilde{\mathbf{R}} \cdot \tilde{\mathbf{p}}, \quad (3.52)$$

με το διάνυσμα των πραγματικών τιμών της πίεσης να είναι πλέον ίσο με $\tilde{\mathbf{p}} = \{\dots p(\mathbf{x}^{(j)}) \dots\}_{[n_a]}^T$ των γειτονικών κόμβων. Αντίστοιχα για το διάνυσμα των μετατοπίσεων μπορεί να γραφτεί

$$\mathbf{u}(\mathbf{y}) = \tilde{\Phi}(\mathbf{y}) \cdot \tilde{\mathbf{R}} \cdot \tilde{\mathbf{u}}, \quad (3.53)$$

όπου $\tilde{\mathbf{u}} = \{\dots u_1(\mathbf{x}^{(j)}) u_2(\mathbf{x}^{(j)}) \dots\}_{[2n_a]}^T$ είναι πλέον το διάνυσμα των πραγματικών επικόμβιων τιμών των συνιστωσών των μετατοπίσεων στις δύο διαστάσεις στον εκάστοτε γειτονικό κόμβο $\mathbf{x}^{(j)}$.

Οι συναρτήσεις μορφής που υπολογίζονται μέσω του πολλαπλασιασμού διανύσματος με πίνακα για την Εξ. (3.52) και πίνακα με πίνακα για την Εξ. (3.53) κατέχουν τη «δέλτα» ιδιότητα. Συνεπώς μπορούν εύκολα να ικανοποιηθούν οι ουσιαστικές συνοριακές συνθήκες του προβλήματος, όπως θα φανεί στο παρακάτω Υποεδάφ. 3.3.2. Αυτή η τεχνική –υιοθετώντας την ορολογία του βιβλίου [5]– θα καλείται στο εξής Μέθοδος Μετασχηματισμού. Προφανώς η τεχνική αυτή δεν έχει νόημα να εφαρμοστεί σε Τοπικές Μεθόδους χωρίς Διακριτοποίηση όταν γίνεται χρήση μεθοδολογίας παρεμβολής της άγνωστης συνάρτησης του πεδίου (π.χ. η Μέθοδος Παρεμβολής Σημείων με Βάση Ακτινικών Συναρτήσεων), της οποίας ως γνωστόν οι συναρτήσεις μορφής κατέχουν τη «δέλτα» ιδιότητα. Σε αυτό το σημείο αξίζει να τονιστεί μία παρατήρηση που εξήχθη μετά τη διεξαγωγή πληθώρας αριθμητικών πειραμάτων στις Τοπικές Μεθόδους χωρίς Διακριτοποίηση, όπου για μη-ομοιόμορφη κατανομή κόμβων η Μέθοδος Μετασχηματισμού έδινε μειωμένης ακρίβειας αποτελέσματα. Παρόμοια σχόλια έγιναν στην εργασία [6], γεγονός που επιβεβαιώνει την ορθότητα των συμπερασμάτων μας.

3.2 Τοπική Μέθοδος Petrov-Galerkin χωρίς Διακριτοποίηση

Θεμέλια λίθος για την ανάπτυξη της αριθμητικής Μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων είναι η γενική συμμετρική ασθενής μορφή, της οποίας η τοπική τής μορφή αποτέλεσε το πρώτο σκαλοπάτι για την ανάπτυξη της Τοπικής Μεθόδου Petrov-Galerkin χωρίς Διακριτοποίηση (TMPGΧΔ). Η τοπική συμμετρική ασθενής μορφή (local symmetric weak form) για ένα ακουστικό μέσο σε μόνιμη κατάσταση, βασισμένη στην ισχυρή μορφή της μερικής διαφορικής Εξ. (2.34) του Poisson μέσω της μεθόδου των υπολοίπων βάρους (weighted residuals method), για ένα σημείο $\mathbf{x}^{(\kappa)} \in \Omega$, είναι η εξής [1, 21]

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{(\kappa)}} w^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) \left[\nabla_{\mathbf{x}^{(\kappa)}}^2 p \left(\mathbf{x}^{(\kappa)} \right) - g \left(\mathbf{x} \right) \right] dV_{\mathbf{y}} = \\ a \int_{\Gamma_{(\kappa)p}} w^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) [\bar{p}(\mathbf{y}) - p(\mathbf{y})] dS_{\mathbf{y}}, \end{aligned} \quad (3.54)$$

ενώ για ένα ελαστικό μέσο ισχύει αντίστοιχα ότι

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{(\kappa)}} \tilde{w}^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) \cdot \left[\nabla_{\mathbf{x}^{(\kappa)}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \left(\mathbf{x}^{(\kappa)} \right) - \mathbf{f} \left(\mathbf{x}^{(\kappa)} \right) \right] dV_{\mathbf{y}} = \\ a \int_{\Gamma_{(\kappa)u}} \tilde{w}^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) \cdot [\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{y}) - \mathbf{u}(\mathbf{y})] dS_{\mathbf{y}}, \end{aligned} \quad (3.55)$$

όπου

$$\tilde{w}^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) = w^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) \tilde{\mathbf{I}}, \quad (3.56)$$

και a είναι μία παράμετρος –καλούμενη στο εξής παράγοντας ποινής (penalty parameter)– με την οποία μπορούν να ικανοποιηθούν οι ουσιαστικές συνοριακές συνθήκες $(\bar{p}, \bar{\mathbf{u}})$. Στην εργασία [31] μπορεί κάποιος να διαβάσει για τη μέθοδο ποινής και για τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange καθώς επίσης για τον τρόπο επιλογής του μεγέθους του παράγοντα ποινής. Ο όρος w^* καλείται συνάρτηση πεδίου (test function) και αντίστοιχα οι όροι $p, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \mathbf{u}$ συναρτήσεις δοκιμής (trial functions) του άγνωστου πεδίου της πίεσης για ακουστικό μέσο, τάσεων και μετατοπίσεων για ελαστικό μέσο. Οι παραπάνω ολοκληρωτικές εξισώσεις ασθενούς μορφής ονομάζονται συμμετρικές όταν και μόνο όταν η τάξη συνέχειας ($C^{(\beta)}$) της συνάρτησης πεδίου με τη συνάρτηση δοκιμής είναι ίδια· στην αντίθετη περίπτωση ονομάζονται εξισώσεις μη-συμμετρικής μορφής. Από τις Εξ. (3.54), (3.55) γίνεται εμφανές ότι για να έχουν ισχύ θα πρέπει οι συναρτήσεις δοκιμής να είναι κατά $C^{(2)}$ και $C^{(1)}$ τουλάχιστον συνεχείς αντίστοιχα.

Όπως φαίνεται στο Σχ. 3.4, όταν ο κύκλος ολοκλήρωσης $\Omega_{(\kappa)}$ του σημείου πηγής $\mathbf{x}^{(\kappa)}$ δεν τέμνει το γενικό σύνορο Γ τότε τα επιφανειακά ολοκληρώματα εξαφανίζονται. Επίσης ισχύει ότι: $\Gamma_{(\kappa)} = \Gamma_{(\kappa)p} \cup \Gamma_{(\kappa)q}$ για το ακουστικό μέσο και $\Gamma_{(\kappa)} = \Gamma_{(\kappa)u} \cup \Gamma_{(\kappa)t}$ για το ελαστικό μέσο, τμήματα δηλαδή του τομέα του συνόρου $\Gamma_{(\kappa)}$ όπου είναι καθορισμένες οι ουσιαστικές και οι φυσικές συνοριακές συνθήκες αντίστοιχα.

Εφαρμόζοντας τον κανόνα παραγωγίσης για τον πρώτο όρο του ολοκληρώματος όγκου στις δύο παραπάνω εξισώσεις και το θεώρημα της απόκλισης του Gauss τότε προκύπτει αντίστοιχα

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_{(\kappa)}} \left[\nabla_{\mathbf{x}^{(\kappa)}} w^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{x}^{(\kappa)}} p \left(\mathbf{y} \right) - w^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) g \left(\mathbf{y} \right) \right] dV_{\mathbf{y}} - \\
 & \int_{\partial\Omega_{(\kappa)} \cup \Gamma_{(\kappa)p}} w^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) q \left(\mathbf{y} \right) dS_{\mathbf{y}} = \int_{\Gamma_{(\kappa)q}} w^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) \bar{q} \left(\mathbf{y} \right) dS_{\mathbf{y}} + \\
 & a \int_{\Gamma_{(\kappa)p}} w^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) [\bar{p} \left(\mathbf{y} \right) - p \left(\mathbf{y} \right)] dS_{\mathbf{y}}, \quad (3.57)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_{(\kappa)}} \left[\nabla_{\mathbf{x}^{(\kappa)}} \tilde{w}^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \left(\mathbf{y} \right) - \tilde{\omega}^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) \cdot \mathbf{f} \left(\mathbf{y} \right) \right] dV_{\mathbf{y}} - \\
 & \int_{\partial\Omega_{(\kappa)} \cup \Gamma_{(\kappa)u}} \tilde{\omega}^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) \cdot \mathbf{t} \left(\mathbf{y} \right) dS_{\mathbf{y}} = \int_{\Gamma_{(\kappa)t}} \tilde{\omega}^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) \cdot \bar{\mathbf{t}} \left(\mathbf{y} \right) dS_{\mathbf{y}} + \\
 & a \int_{\Gamma_{(\kappa)u}} \tilde{\omega}^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) \cdot [\bar{\mathbf{u}} \left(\mathbf{y} \right) - \mathbf{u} \left(\mathbf{y} \right)] dS_{\mathbf{y}}. \quad (3.58)
 \end{aligned}$$

Σχήμα 3.4: Γενική μορφή συνεχούς μέσου όγκου Ω με σύνορο Γ , και τοπικά χωρία ολοκλήρωσης $\Omega_{(\kappa)}$ με κυκλική περιφέρεια $\partial\Omega_{(\kappa)}$, όπου $\Gamma_{(\kappa)} = \Gamma \cap \partial\Omega_{(\kappa)}$.

Όμοια μπορεί εύκολα να παρατηρηθεί από τις Εξ. (3.57), (3.58) ότι για να έχουν νόημα οι ολοκληρωτικές αυτές εκφράσεις θα πρέπει η συνάρτηση πεδίου να είναι κατά $C^{(1)}$ τουλάχιστον, δηλαδή η πρώτη παράγωγος της w^* να είναι συνεχής συνάρτηση.

Υιοθετώντας τη συντομογραφική ονομασία των διάφορων παραλλαγών της Τοπικής Μεθόδου Petrov-Galerkin χωρίς Διακριτοποίηση –όπως αυτές παρουσιάζονται στην εργασία [4] και στο βιβλίο [5]– στην παρούσα διδακτορική διατριβή έγινε αριθμητική εφαρμογή των μεθοδολογιών των TMPGΧΔ πρώτου, τέταρτου, πέμπτου και έκτου τύπου. Η διαφορά των τεσσάρων αυτών μεθοδολογιών έγκειται στο γεγονός ότι η συνάρτηση πεδίου είναι στη μεν πρώτη η συνάρτηση βάρους που χρησιμοποιείται στην αναπαράσταση του άγνωστου πεδίου, στη δεύτερη η θεμελιώδεις πυρήνες (βλ. Υποεδράφ. 2.1.1, 2.2.1), στη τρίτη μεθοδολογία γίνεται χρήση της συνάρτησης βήματος Heaviside σαν συνάρτηση πεδίου και τέλος στη τέταρτη μεθοδολογία η

συνάρτηση μορφής της μεθόδου παρεμβολής ή προσέγγισης του άγνωστου πεδίου (συνάρτηση δοκιμής) να είναι και συνάρτηση πεδίου. Και στις τέσσερις μεθοδολογίες οι συναρτήσεις δοκιμής είναι οι αντίστοιχες συναρτήσεις μορφής που προκύπτουν από τις μεθόδους προσέγγισης ή παρεμβολής του πεδίου (βλ. Υποεδάφ. 3.1.1-3.1.3).

3.2.1 Τοπική Μέθοδος Petrov-Galerkin χωρίς Διακριτοποίηση πρώτου τύπου

Εάν στην Εξ. (3.57) εισαχθεί ως συνάρτηση πεδίου μία συνάρτηση της μορφής – όπως αυτές δίδονται στο Παρ. Γ– η οποία είναι ομαλή, συνεχής (τουλάχιστον κατά $C^{(1)}$) και που είναι μηδέν εκτός του πεδίου ορισμού της, δηλαδή για κάθε σημείο ολοκλήρωσης $\mathbf{y} \notin \Omega_{(\kappa)}$, τότε ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{(\kappa)}} \left[\nabla_{\mathbf{x}^{(\kappa)}} w^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{x}^{(\kappa)}} p \left(\mathbf{y} \right) - w^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) g \left(\mathbf{y} \right) \right] dV_{\mathbf{y}} - \\ \int_{\Gamma_{(\kappa)p}} w^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) q \left(\mathbf{y} \right) dS_{\mathbf{y}} = \int_{\Gamma_{(\kappa)q}} w^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) \bar{q} \left(\mathbf{y} \right) dS_{\mathbf{y}} + \\ a \int_{\Gamma_{(\kappa)p}} w^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) [\bar{p} \left(\mathbf{y} \right) - p \left(\mathbf{y} \right)] dS_{\mathbf{y}}. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Αντίστοιχα για τη γραμμική ελαστικότητα, αν στην Εξ. (3.58) μηδενιστεί το επιφανειακό ολοκλήρωμα στο $\partial\Omega_{(\kappa)}$, εφαρμόζοντας παράλληλα το νόμο του Hooke της Εξ. (2.2) και τη σχέση παραμορφώσεων-μετατοπίσεων μέσω της Εξ. (2.6) τότε συνεπάγεται

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{(\kappa)}} \left[\tilde{\omega}^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) \cdot \tilde{\mathbf{C}} \cdot \tilde{\mathbf{D}} \left(\mathbf{y} \right) \cdot \mathbf{u} \left(\mathbf{y} \right) - \tilde{\omega}^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) \cdot \mathbf{f} \left(\mathbf{y} \right) \right] dV_{\mathbf{y}} - \\ \int_{\Gamma_{(\kappa)u}} \tilde{\omega}^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) \cdot \mathbf{t} \left(\mathbf{y} \right) dS_{\mathbf{y}} = \int_{\Gamma_{(\kappa)t}} \tilde{\omega}^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) \cdot \bar{\mathbf{t}} \left(\mathbf{y} \right) dS_{\mathbf{y}} + \\ a \int_{\Gamma_{(\kappa)u}} \tilde{\omega}^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) \cdot [\bar{\mathbf{u}} \left(\mathbf{y} \right) - \mathbf{u} \left(\mathbf{y} \right)] dS_{\mathbf{y}}, \end{aligned} \quad (3.60)$$

όπου

$$\tilde{\omega}^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial w^*}{\partial \mathbf{x}_1^{(\kappa)}} & 0 & \frac{\partial w^*}{\partial \mathbf{x}_2^{(\kappa)}} \\ 0 & \frac{\partial w^*}{\partial \mathbf{x}_2^{(\kappa)}} & \frac{\partial w^*}{\partial \mathbf{x}_1^{(\kappa)}} \end{bmatrix}. \quad (3.61)$$

Εισάγοντας τις εξισώσεις προσέγγισης ή παρεμβολής του άγνωστου πεδίου της πίεσης (βλ. Εξ. (3.14)) και της βαθμίδας υπερπίεσης (βλ. Εξ. (3.45)) στην ολοκληρωτική Εξ. (3.59) προκύπτει

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega(\kappa)} \nabla_{\mathbf{x}^{(\kappa)}} w^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) \cdot \tilde{\mathbf{V}}(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} \cdot \tilde{\mathbf{p}} + a \int_{\Gamma(\kappa)_p} w^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) \Phi(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \cdot \tilde{\mathbf{p}} - \\
 & \int_{\Gamma(\kappa)_p} w^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) \Psi(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \cdot \tilde{\mathbf{p}} = \int_{\Gamma(\kappa)_q} w^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) \bar{q}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} + \\
 & a \int_{\Gamma(\kappa)_p} w^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) \bar{p}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} + \int_{\Omega(\kappa)} w^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) g(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}}. \quad (3.62)
 \end{aligned}$$

όπου το μητρώο

$$\tilde{\mathbf{V}}(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} \ddots & \frac{\partial \phi_j}{\partial y_1} + \frac{\partial \phi_j}{\partial y_2} & \ddots \\ \frac{\partial \phi_j}{\partial y_1} + \frac{\partial \phi_j}{\partial y_2} & & \end{bmatrix}_{[2 \times n_a]}, \quad (3.63)$$

ενώ αντίστοιχα εάν στην Εξ. (3.60) εισαχθούν οι σχέσεις προσέγγισης ή παρεμβολής του αγνώστου πεδίου των μετατοπίσεων (βλ. Εξ. (3.11)) και επιφανειακών τάσεων (βλ. Εξ. (3.43)) τότε ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega(\kappa)} \tilde{\omega}^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) \cdot \tilde{\mathbf{C}} \cdot \tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} \cdot \tilde{\mathbf{u}} - a \int_{\Gamma(\kappa)_u} \tilde{\omega}^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) \cdot \tilde{\Phi}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \cdot \tilde{\mathbf{u}} - \\
 & \int_{\Gamma(\kappa)_u} \tilde{\omega}^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) \cdot \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{y}) \cdot \tilde{\Phi}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \cdot \tilde{\mathbf{u}} = \int_{\Gamma(\kappa)_t} \tilde{\omega}^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) \cdot \tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} + \\
 & a \int_{\Gamma(\kappa)_u} \tilde{\omega}^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) \cdot \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} + \int_{\Omega(\kappa)} \tilde{\omega}^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}}, \quad (3.64)
 \end{aligned}$$

Η υλοποίηση των ολοκληρωτικών Εξ. (3.62) και (3.64) αντικατοπτρίζουν τη μεθοδολογία της Τοπικής Μεθόδου Petrov-Galerkin χωρίς Διακριτοποίηση πρώτου τύπου (TMPGχΔ1).

3.2.2 Τοπική Μέθοδος Petrov-Galerkin χωρίς Διακριτοποίηση τέταρτου τύπου

Στο προηγούμενο κεφάλαιο έγινε η σωστή τοποθέτηση ενός προβλήματος συνοριακών τιμών ενός ακουστικού και ενός ελαστικού συνεχούς μέσου μέσω της Μεθόδου των Συνοριακών Στοιχείων. Η ολοκληρωτική Εξ. (2.36) για ακουστικό μέσο και η Εξ. (2.14) για ελαστικό μέσο αντίστοιχα συνεχίζει να ισχύει και για ένα τοπικό χωρίο $\Omega(\kappa) \subset \Omega$ με την προϋπόθεση ότι το σημείο πεδίου $\mathbf{y}$ δεν πλησιάζει το σημείο πηγής $\mathbf{x}^{(\kappa)}$ διότι τότε οι θεμελιώδεις πυρήνες απειρίζονται. Συνεπώς στο γενικό σύνορο Γ και κατ'επέκταση και στο τοπικό σύνορο $\Gamma(\kappa)$, $\partial\Omega(\kappa)$ τα άγνωστα πεδία πίεσης, βαθμίδας υπερπίεσης και μετατοπίσεων, τάσεων μπορούν να καθοριστούν μέσω των μεθόδων προσέγγισης ή παρεμβολής που αναπτύχθηκαν στο Εδάφ. 3.1. Στο επόμενο Εδάφ. 3.3 πρόκειται να παρουσιαστούν αναλυτικά οι ολοκληρωτικές

εξισώσεις στην τοπική τους μορφή τόσο για το ακουστικό (βλ. Εξ. (3.85)) όσο και για το ελαστικό μέσο (βλ. Εξ. (3.86)).

Από τις ολοκληρωτικές Εξ. (3.85) και (3.86) παρατηρεί κάποιος ότι δεν είναι δυνατό να αναπαρασταθεί η άγνωστη ποσότητα της βαθμίδας υπερπίεσης q και του διανύσματος της τάσης $\mathbf{t}$ μέσω των Εξ. (3.44) και Εξ. (3.41) αντίστοιχα, για ένα σημείο που ανήκει στην περιφέρεια του κύκλου ολοκλήρωσης ($\mathbf{y} \in \partial\Omega_{(\kappa)}$). Ως γνωστόν οι συναρτήσεις πεδίου q και $\mathbf{t}$ έχουν φυσική σημασία μονάχα για ένα κόμβο που ανήκει στο σύνορο του σώματος ($\mathbf{x}^{(j)} \in \Gamma$), αλλά δεν έχουν φυσική σημασία για έναν αντίστοιχο που ανήκει εσωτερικά του υπό-ανάλυση χωρίου ($\mathbf{x}^{(j)} \in \{\Omega - \Gamma\}$). Συνεπώς η αναπαράσταση του πεδίου της βαθμίδας υπερπίεσης ή του διανύσματος της τάσης στο σημείο ολοκλήρωσης γίνεται μονάχα μέσω των αντίστοιχων πεδίων των κόμβων που ανήκουν στο σύνορο. Τούτο όμως εγκυμονεί τον κίνδυνο σε ορισμένες περιπτώσεις, όταν οι συνοριακοί κόμβοι που «επηρεάζουν» στην παρεμβολή των εν λόγω πεδιακών ποσοτήτων να είναι λίγοι ή και ανύπαρκτοι, καθιστώντας έτσι αδύνατη την επιτυχή παρεμβολή των πεδίων q , $\mathbf{t}$ αντίστοιχα.

Προηγουμένως υιοθετήθηκαν οι σχέσεις αναπαράστασης Εξ. (3.45) και (3.43), στις οποίες γίνεται απαραίτητος ο υπολογισμός των παραγώγων των συναρτήσεων μορφής και της εισαγωγής τους στα επιφανειακά ολοκληρώματα του κύκλου $\partial\Omega_{(\kappa)}$. Για την αποφυγή αυτής της διαδικασίας πρέπει με κάποιο έμμεσο τρόπο να γίνει απαλοιφή των ολοκληρωμάτων αυτών. Τούτο μπορεί να επιτευχθεί με την εισαγωγή μίας επιπλέον λύσης, η οποία για το πρόβλημα ακουστικού μέσου ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες

$$\nabla_{\mathbf{x}^{(\kappa)}}^2 p^c(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}) + g(\mathbf{x}^{(\kappa)}) = 0, \quad (3.65\alpha')$$

$$p^c(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}) = p^*(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{y} \in \partial\Omega_{(\kappa)}, \quad (3.65\beta')$$

και αντίστοιχα για ελαστικό μέσο ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες

$$\mu \nabla_{\mathbf{x}^{(\kappa)}}^2 \mathbf{u}^c(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}) + (\lambda + \mu) \nabla_{\mathbf{x}^{(\kappa)}} \nabla_{\mathbf{x}^{(\kappa)}} \cdot \mathbf{u}^c(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}) + \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(\kappa)}) = \mathbf{0}, \quad (3.66\alpha')$$

$$\tilde{\mathbf{u}}^c(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}) = \tilde{\mathbf{u}}^*(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{y} \in \partial\Omega_{(\kappa)}, \quad (3.66\beta')$$

όπου

$$\mathbf{u}^c(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}) = \hat{\mathbf{e}}^{(1)} \cdot \tilde{\mathbf{u}}^c(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}) + \hat{\mathbf{e}}^{(2)} \cdot \tilde{\mathbf{u}}^c(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}). \quad (3.67)$$

Οι λύσεις p^c , $\tilde{\mathbf{u}}^c$ στο εξής θα καλούνται συνοδευτικές λύσεις, οι οποίες είναι ομαλές συναρτήσεις ανεξάρτητα της απόστασης των σημείων $\mathbf{x}^{(\kappa)}$ και $\mathbf{y}$.

Στις εργασίες [3, 32] υπολογίσθηκε αναλυτικά η συνοδευτική λύση για τις μερικές διαφορικές Εξ. (2.11) και (2.34), ενώ στην εργασία [22] γίνεται αναλυτικός υπολογισμός της συνοδευτικής λύσης για τη μερική διαφορική Εξ. (2.24) στο πεδίο

συχνοτήτων. Για περισσότερες λεπτομέρειες του τρόπου υπολογισμού των συνοδευτικών λύσεων μπορεί κάποιος να ανατρέξει στις προαναφερθείσες εργασίες.

Σύμφωνα με την αναφορά [32] η τελική μορφή της ολοκληρωτικής Εξ. (3.85) για ένα μέσο που περιγράφεται από τη μερική διαφορική εξίσωση τύπου Poisson είναι η εξής

$$\alpha(\mathbf{x}^{(\kappa)})p(\mathbf{x}^{(\kappa)}) + \int_{\partial\Omega_{(\kappa)} \cup \Gamma_{(\kappa)}} q^{**}(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}) p(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} = \int_{\Gamma_{(\kappa)}} p^{**}(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}) q(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} - \int_{\Omega_{(\kappa)}} p^{**}(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}) g(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}}, \quad (3.68)$$

όπου οι τροποποιημένοι πυρήνες για τις δύο διαστάσεις είναι η διαφορά της αντίστοιχης θεμελιώδους λύσης με τη συνοδευτική λύση, δηλαδή

$$p^{**}(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{r_0^{(\kappa)}}{r} \right), \quad (3.69)$$

$$q^{**}(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial \hat{n}}, \quad (3.70)$$

με $r_0^{(\kappa)}$ να είναι η ακτίνα ολοκλήρωσης του υποχωρίου $\Omega_{(\kappa)}$ του σημείου πηγής $\mathbf{x}^{(\kappa)}$ (βλ. Σχ. 3.4).

Όμοια για ένα ελαστικό μέσο σε μόνιμη κατάσταση ή ισορροπία, αποδείχθηκε στην εργασία [3] ότι η τοπική ολοκληρωτική εξίσωση έχει τη μορφή

$$\tilde{\alpha}(\mathbf{x}^{(\kappa)}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}^{(\kappa)}) + \int_{\partial\Omega_{(\kappa)} \cup \Gamma_{(\kappa)}} \tilde{\mathbf{t}}^{**}(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} = \int_{\Gamma_{(\kappa)}} \tilde{\mathbf{u}}^{**}(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{t}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} - \int_{\Omega_{(\kappa)}} \tilde{\mathbf{u}}^{**}(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}}, \quad (3.71)$$

με τους αντίστοιχους τροποποιημένους πυρήνες για τις δύο διαστάσεις να είναι οι εξής

$$\tilde{\mathbf{u}}^{**}(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2\pi\mu} \left[(\Psi - \Pi)\tilde{\mathbf{I}} - (X + \Xi)\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \right], \quad (3.72)$$

$$\tilde{\mathbf{t}}^{**}(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2\pi} \left[\left(\frac{d\Psi}{dr} - \frac{X}{r} + \Lambda \right) \frac{\partial r}{\partial \hat{n}} \tilde{\mathbf{I}} + \left(\frac{d\Psi}{dr} - \frac{X}{r} + M \right) \hat{\mathbf{n}} \otimes \hat{\mathbf{r}} + \left(Z - \frac{2X}{r} + N \right) \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{n}} + \left(\frac{4X}{r} - 2 \frac{dX}{dr} \right) \frac{\partial r}{\partial \hat{n}} \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \right], \quad (3.73)$$

των οποίων μερικοί συντελεστές είναι δοσμένοι στο Υποεδάφ. 2.1.1, ενώ οι υπόλοιποι ισούνται με

$$\begin{aligned}\Xi &= \frac{1}{4(1-\bar{\nu})} \frac{r^2}{(r_0^{(\kappa)})^2}, \quad \Pi = -\frac{4\bar{\nu}-3}{4(1-\bar{\nu})} \ln(r_0^{(\kappa)}) + \frac{5-4\bar{\nu}}{2(3-4\bar{\nu})} \frac{r^2}{(r_0^{(\kappa)})^2}, \\ \Lambda &= \frac{1}{2(1-\bar{\nu})(3-4\bar{\nu})} \frac{1}{(r_0^{(\kappa)})^2}, \\ M &= \frac{1}{2(1-\bar{\nu})(3-4\bar{\nu})} \frac{r}{(r_0^{(\kappa)})^2}, \quad N = -\frac{3}{2(1-\bar{\nu})(3-4\bar{\nu})} \frac{r}{(r_0^{(\kappa)})^2}.\end{aligned}$$

Εισάγοντας στις Εξ. (3.68) και (3.71) τις σχέσεις Εξ. (3.14), (3.45) και Εξ. (3.11), (3.43) αντίστοιχα, τότε μπορεί κάποιος να γράψει ότι

$$\begin{aligned}\alpha(\mathbf{x}^{(\kappa)}) \Phi(\mathbf{x}^{(\kappa)}) \cdot \check{\mathbf{p}} + \int_{\partial\Omega_{(\kappa)} \cup \Gamma_{(\kappa)}} q^{**}(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}) \Phi(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \cdot \check{\mathbf{p}} = \\ \int_{\Gamma_{(\kappa)}} p^{**}(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}) \Psi(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \cdot \check{\mathbf{p}} - \int_{\Omega_{(\kappa)}} p^{**}(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}) g(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}},\end{aligned}\quad (3.74)$$

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}(\mathbf{x}^{(\kappa)}) \cdot \tilde{\Phi}(\mathbf{x}^{(\kappa)}) \cdot \check{\mathbf{u}} + \int_{\partial\Omega_{(\kappa)} \cup \Gamma_{(\kappa)}} \tilde{t}^{**}(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}) \cdot \tilde{\Phi}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \cdot \check{\mathbf{u}} = \\ \int_{\Gamma_{(\kappa)}} \tilde{\mathbf{u}}^{**}(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}) \cdot \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{y}) \cdot \tilde{\Phi}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \cdot \check{\mathbf{u}} - \int_{\Omega_{(\kappa)}} \tilde{\mathbf{u}}^{**}(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}}.\end{aligned}\quad (3.75)$$

Οι ολοκληρωτικές Εξ. (3.74), (3.75) ακουστικού και ελαστικού συνεχούς μέσου αντίστοιχα στις δύο διαστάσεις αποτελούν τη διατύπωση της Τοπικής Μεθόδου Petrov-Galerkin χωρίς Διακριτοποίηση τέταρτου τύπου (TMPGχΔ4).

3.2.3 Τοπική Μέθοδος Petrov-Galerkin χωρίς Διακριτοποίηση πέμπτου τύπου

Η Τοπική Μέθοδος Petrov-Galerkin χωρίς Διακριτοποίηση πέμπτου τύπου (TMPGχΔ5) είναι μία παραλλαγή της TMPGχΔ1, με τη διαφορά ότι για συνάρτηση πεδίου χρησιμοποιείται η συνάρτηση βήματος Heaviside. Συνεπώς εάν εισαχθεί στη τοπική συμμετρική ασθενή μορφή των Εξ. (3.57), (3.58) η παραπάνω συνάρτηση τότε προκύπτει αντίστοιχα ότι

$$\begin{aligned}a \int_{\Gamma_{(\kappa)p}} p(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} - \int_{\partial\Omega_{(\kappa)} \cup \Gamma_{(\kappa)p}} q(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} = \\ \int_{\Gamma_{(\kappa)q}} \bar{q}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} + a \int_{\Gamma_{(\kappa)p}} \bar{p}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} + \int_{\Omega_{(\kappa)}} g(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}},\end{aligned}\quad (3.76)$$

$$a \int_{\Gamma_{(\kappa)u}} \mathbf{u}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} - \int_{\partial\Omega_{(\kappa)} \cup \Gamma_{(\kappa)u}} \mathbf{t}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} = \int_{\Gamma_{(\kappa)t}} \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} + a \int_{\Gamma_{(\kappa)u}} \mathbf{u}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} + \int_{\Omega_{(\kappa)}} \mathbf{f}(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}}. \quad (3.77)$$

Αξίζει να παρατηρηθεί ότι το επιφανειακό ολοκλήρωμα στο τοπικό εσωτερικό σύνορο $\partial\Omega_{(\kappa)}$ δεν εξαφανίζεται. Επίσης στις ολοκληρωτικές Εξ. (3.76), (3.77) αν θεωρηθούν αμελητέες οι πεδιακές φορτίσεις τότε απαλείφονται τα ολοκληρώματα όγκου, γεγονός που μπορεί να επιταχύνει την αριθμητική επίλυση ενός προβλήματος με αυτή τη μεθοδολογία σημαντικά. Ο υπολογισμός των ολοκληρωμάτων όγκου γενικά έχει παρατηρηθεί, μετά από διάφορα αριθμητικά πειράματα στο πλαίσιο της διδακτορικής διατριβής, ότι κοστίζει σε χρόνο και σε ακρίβεια της εκτίμησης του αποτελέσματος.

Εάν στις Εξ. (3.76), (3.77) κάποιος εισάγει τις σχέσεις προσέγγισης ή παρεμβολής των άγνωστων πεδίων τότε προκύπτει και στις δύο περιπτώσεις αντίστοιχα ότι

$$a \int_{\Gamma_{(\kappa)p}} \Phi(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \cdot \check{\mathbf{p}} - \int_{\partial\Omega_{(\kappa)} \cup \Gamma_{(\kappa)p}} \Psi(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \cdot \check{\mathbf{p}} = \int_{\Gamma_{(\kappa)q}} \bar{q}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} + a \int_{\Gamma_{(\kappa)p}} \bar{p}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} + \int_{\Omega_{(\kappa)}} g(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}}, \quad (3.78)$$

$$a \int_{\Gamma_{(\kappa)u}} \tilde{\Phi}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \cdot \check{\mathbf{u}} - \int_{\partial\Omega_{(\kappa)} \cup \Gamma_{(\kappa)u}} \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{y}) \cdot \tilde{\Phi}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \cdot \check{\mathbf{u}} = \int_{\Gamma_{(\kappa)t}} \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} + a \int_{\Gamma_{(\kappa)u}} \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} + \int_{\Omega_{(\kappa)}} \mathbf{f}(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}}. \quad (3.79)$$

3.2.4 Τοπική Μέθοδος Petrov-Galerkin χωρίς Διακριτοποίηση έκτου τύπου

Η έκτη παραλλαγή της Τοπικής Μεθόδου Petrov-Galerkin χωρίς Διακριτοποίηση (TMPGχΔ6) διαφέρει της TMPGχΔ1 στο ότι ως συνάρτηση πεδίου χρησιμοποιείται η συνάρτηση μορφής της μεθόδου προσέγγισης ή παρεμβολής που χρησιμοποιείται στον υπολογισμό του άγνωστου πεδίου, όπως αυτή περιγράφεται αναλυτικά στα Υποεδράφ. 3.1.1-3.1.3. Συγκεκριμένα, οι Εξ. (3.59) και (3.60) γράφονται αλλιώς

$$\int_{\Omega_{(\kappa)}} \left[\nabla_{\mathbf{x}^{(\kappa)}} \phi(\mathbf{x}^{(\kappa)}) \cdot \nabla_{\mathbf{y}} p(\mathbf{y}) - \phi(\mathbf{x}^{(\kappa)}) g(\mathbf{y}) \right] dV_{\mathbf{y}} - \int_{\Gamma_{(\kappa)p}} \phi(\mathbf{x}^{(\kappa)}) q(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} = \int_{\Gamma_{(\kappa)q}} \phi(\mathbf{x}^{(\kappa)}) \bar{q}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} + a \int_{\Gamma_{(\kappa)p}} \phi(\mathbf{x}^{(\kappa)}) [\bar{p}(\mathbf{y}) - p(\mathbf{y})] dS_{\mathbf{y}}, \quad (3.80)$$

και αντίστοιχα για συνεχές ισότροπο ομογενές ελαστικό σώμα

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_{(\kappa)}} \left[\tilde{\boldsymbol{\vartheta}} \left(\mathbf{x}^{(\kappa)} \right) \cdot \tilde{\mathbf{C}} \cdot \tilde{\mathbf{D}} \left(\mathbf{y} \right) \cdot \mathbf{u} \left(\mathbf{y} \right) - \tilde{\boldsymbol{\varphi}} \left(\mathbf{x}^{(\kappa)} \right) \cdot \mathbf{f} \left(\mathbf{y} \right) \right] dV_{\mathbf{y}} - \\
 & \int_{\Gamma_{(\kappa)u}} \tilde{\boldsymbol{\varphi}} \left(\mathbf{x}^{(\kappa)} \right) \cdot \mathbf{t} \left(\mathbf{y} \right) dS_{\mathbf{y}} = \int_{\Gamma_{(\kappa)t}} \tilde{\boldsymbol{\varphi}} \left(\mathbf{x}^{(\kappa)} \right) \cdot \bar{\mathbf{t}} \left(\mathbf{y} \right) dS_{\mathbf{y}} + \\
 & a \int_{\Gamma_{(\kappa)u}} \tilde{\boldsymbol{\varphi}} \left(\mathbf{x}^{(\kappa)} \right) \cdot [\bar{\mathbf{u}} \left(\mathbf{y} \right) - \mathbf{u} \left(\mathbf{y} \right)] dS_{\mathbf{y}}, \quad (3.81)
 \end{aligned}$$

όπου

$$\tilde{\boldsymbol{\varphi}} \left(\mathbf{x}^{(\kappa)} \right) = \phi \left(\mathbf{x}^{(\kappa)} \right) \tilde{\mathbf{I}}, \quad (3.82)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\vartheta}} \left(\mathbf{x}^{(\kappa)} \right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}_1^{(\kappa)}} & 0 & \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}_2^{(\kappa)}} \\ 0 & \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}_2^{(\kappa)}} & \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}_1^{(\kappa)}} \end{bmatrix}. \quad (3.83)$$

Κάνοντας χρήση των εξισώσεων αναπαράστασης του άγνωστου πεδίου της πίεσης (βλ. Εξ. (3.14)) και της βαθμίδας υπερπίεσης (βλ. Εξ. (3.45)) στην ολοκληρωτική Εξ. (3.80) τότε συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_{(\kappa)}} \nabla_{\mathbf{x}^{(\kappa)}} \phi \left(\mathbf{x}^{(\kappa)} \right) \cdot \tilde{\mathbf{V}} \left(\mathbf{y} \right) dV_{\mathbf{y}} \cdot \check{\mathbf{p}} + a \int_{\Gamma_{(\kappa)p}} \phi \left(\mathbf{x}^{(\kappa)} \right) \Phi \left(\mathbf{y} \right) dS_{\mathbf{y}} \cdot \check{\mathbf{p}} - \\
 & \int_{\Gamma_{(\kappa)p}} \phi \left(\mathbf{x}^{(\kappa)} \right) \Psi \left(\mathbf{y} \right) dS_{\mathbf{y}} \cdot \check{\mathbf{p}} = \int_{\Gamma_{(\kappa)q}} \phi \left(\mathbf{x}^{(\kappa)} \right) \bar{q} \left(\mathbf{y} \right) dS_{\mathbf{y}} + \\
 & a \int_{\Gamma_{(\kappa)p}} \phi \left(\mathbf{x}^{(\kappa)} \right) \bar{p} \left(\mathbf{y} \right) dS_{\mathbf{y}} + \int_{\Omega_{(\kappa)}} \phi \left(\mathbf{x}^{(\kappa)} \right) g \left(\mathbf{y} \right) dV_{\mathbf{y}}. \quad (3.84)
 \end{aligned}$$

Με παρόμοιο τρόπο μπορεί κάποιος να εργαστεί στην ολοκληρωτική Εξ. (3.81) ενός ισότροπου συνεχούς και ομογενούς γραμμικού ελαστικού μέσου, όπως στο Υποεδάφ. 3.2.1.

3.3 Μέθοδος Τοπικών Ολοκληρωτικών Εξισώσεων χωρίς Διακριτοποίηση

Στη Μέθοδο Τοπικών Ολοκληρωτικών Εξισώσεων χωρίς Διακριτοποίηση (ΜΤΟΕχΔ) γίνεται χρήση της αντίστοιχης ολοκληρωτικής αναπαράστασης της Μεθόδου των Συνοριακών Στοιχείων, όπου η συνάρτηση πεδίου σε σύγκριση με τις τεχνικές των ΤΜΡΓχΔ1, ΤΜΡΓχΔ5 και ΤΜΡΓχΔ6 είναι η θεμελιώδης λύση. Συνεπώς αν ληφθεί η τοπική μορφή των αντίστοιχων ολοκληρωτικών Εξ. (2.36), (2.14) σε ένα κλειστό υποχωρίο $\Omega_{(\kappa)} \subset \Omega$ (βλ. Σχ. 3.4) τότε προκύπτει αντίστοιχα

$$\alpha \left(\mathbf{x}^{(\kappa)} \right) p \left(\mathbf{x}^{(\kappa)} \right) + \int_{\partial\Omega_{(\kappa)} \cup \Gamma_{(\kappa)}} q^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) p \left(\mathbf{y} \right) dS_{\mathbf{y}} = \int_{\partial\Omega_{(\kappa)} \cup \Gamma_{(\kappa)}} p^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) q \left(\mathbf{y} \right) dS_{\mathbf{y}} - \int_{\Omega_{(\kappa)}} p^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) g \left(\mathbf{y} \right) dV_{\mathbf{y}}, \quad (3.85)$$

$$\tilde{\alpha} \left(\mathbf{x}^{(\kappa)} \right) \cdot \mathbf{u} \left(\mathbf{x}^{(\kappa)} \right) + \int_{\partial\Omega_{(\kappa)} \cup \Gamma_{(\kappa)}} \tilde{\mathbf{t}}^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) \cdot \mathbf{u} \left(\mathbf{y} \right) dS_{\mathbf{y}} = \int_{\partial\Omega_{(\kappa)} \cup \Gamma_{(\kappa)}} \tilde{\mathbf{u}}^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) \cdot \mathbf{t} \left(\mathbf{y} \right) dS_{\mathbf{y}} - \int_{\Omega_{(\kappa)}} \tilde{\mathbf{u}}^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) \cdot \mathbf{f} \left(\mathbf{y} \right) dV_{\mathbf{y}}. \quad (3.86)$$

Διαχωρίζοντας τα επιφανειακά ολοκληρώματα στο τμήμα του γενικού συνόρου $\Gamma_{(\kappa)}$ ανάλογα με το είδος των συνοριακών συνθηκών τότε οι Εξ. (3.85) και (3.86) γράφονται σε νέα μορφή

$$\alpha \left(\mathbf{x}^{(\kappa)} \right) p \left(\mathbf{x}^{(\kappa)} \right) + \int_{\partial\Omega_{(\kappa)} \cup \Gamma_{(\kappa)}q} q^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) p \left(\mathbf{y} \right) dS_{\mathbf{y}} - \int_{\partial\Omega_{(\kappa)} \cup \Gamma_{(\kappa)}p} p^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) q \left(\mathbf{y} \right) dS_{\mathbf{y}} = \int_{\Gamma_{(\kappa)}q} p^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) \bar{q} \left(\mathbf{y} \right) dS_{\mathbf{y}} - \int_{\Gamma_{(\kappa)}p} q^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) \bar{p} \left(\mathbf{y} \right) dS_{\mathbf{y}} - \int_{\Omega_{(\kappa)}} p^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) g \left(\mathbf{y} \right) dV_{\mathbf{y}}, \quad (3.87)$$

$$\tilde{\alpha} \left(\mathbf{x}^{(\kappa)} \right) \cdot \mathbf{u} \left(\mathbf{x}^{(\kappa)} \right) + \int_{\partial\Omega_{(\kappa)} \cup \Gamma_{(\kappa)}t} \tilde{\mathbf{t}}^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) \cdot \mathbf{u} \left(\mathbf{y} \right) dS_{\mathbf{y}} - \int_{\partial\Omega_{(\kappa)} \cup \Gamma_{(\kappa)}u} \tilde{\mathbf{u}}^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) \cdot \mathbf{t} \left(\mathbf{y} \right) dS_{\mathbf{y}} = \int_{\Gamma_{(\kappa)}t} \tilde{\mathbf{u}}^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) \cdot \bar{\mathbf{t}} \left(\mathbf{y} \right) dS_{\mathbf{y}} - \int_{\Gamma_{(\kappa)}u} \tilde{\mathbf{t}}^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) \cdot \bar{\mathbf{u}} \left(\mathbf{y} \right) dS_{\mathbf{y}} - \int_{\Omega_{(\kappa)}} \tilde{\mathbf{u}}^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) \cdot \mathbf{f} \left(\mathbf{y} \right) dV_{\mathbf{y}}, \quad (3.88)$$

δεδομένου ότι $\Gamma_{(\kappa)} = \Gamma_{(\kappa)p} \cup \Gamma_{(\kappa)q}$ για το τοπικό σύνορο ενός ακουστικού σώματος και $\Gamma_{(\kappa)} = \Gamma_{(\kappa)u} \cup \Gamma_{(\kappa)t}$ ενός ελαστικού σώματος αντίστοιχα. Παρατηρείται στις ολοκληρωτικές Εξ. (3.87) και (3.88) ότι οι προκαθορισμένες συνοριακές συνθήκες εισέρχονται απευθείας στα επιφανειακά ολοκληρώματα και όχι στις επικόμβιες τιμές, όπως συμβαίνει στη ΜΣΣ (βλ. Εδάφ. 2.4).

Σύμφωνα με το πρόσφατο βιβλίο του Atluri [5], η Μέθοδος των Τοπικών Ολοκληρωτικών Εξισώσεων χωρίς Διακριτοποίηση κατατάσσεται στην τέταρτη μορφή των Τοπικών Μεθόδων Petrov-Galerkin χωρίς Διακριτοποίηση (βλ. Υποεδάφ. 3.2.2). Στην παρούσα διδακτορική διατριβή η TMPGχΔ4 αποτελεί μία ξεχωριστή τεχνική των Μεθόδων των Τοπικών Ολοκληρωτικών Εξισώσεων χωρίς Διακριτοποίηση που πρόκειται να αναπτυχθούν στα παρακάτω υποεδάφια.

Η δυσκολία τελικής υλοποίησης των ολοκληρωτικών Εξ. (3.85), (3.86) ή/και των Εξ. (3.87), (3.88) έγκειται στον υπολογισμό του άγνωστου πεδίου της βαθμίδας υπερπίεσης και διανύσματος των τάσεων αντίστοιχα, των σημείων ολοκλήρωσης $\mathbf{y}$ στο τοπικό εσωτερικό σύνορο $\partial\Omega_{(\kappa)}$. Για τον λόγο αυτό έχουν προταθεί διάφορες μεθοδολογίες για τον αριθμητικό υπολογισμό των ολοκληρωτικών αυτών εξισώσεων.

3.3.1 Μέθοδος Τοπικών Ολοκληρωτικών Εξισώσεων χωρίς Διακριτοποίηση πρώτου τύπου

Έστω συνεχές ακουστικό μέσο που περιγράφεται από την τοπική ολοκληρωτική Εξ. (3.87). Εάν σε αυτή εισαχθούν οι σχέσεις αναπαράστασης των Εξ. (3.14) και (3.45) τότε προκύπτει

$$\begin{aligned} & \alpha \left(\mathbf{x}^{(\kappa)} \right) \Phi \left(\mathbf{x}^{(\kappa)} \right) \cdot \check{\mathbf{p}} + \int_{\partial\Omega_{(\kappa)} \cup \Gamma_{(\kappa)q}} q^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) \Phi \left(\mathbf{y} \right) dS_{\mathbf{y}} \cdot \check{\mathbf{p}} - \\ & \int_{\partial\Omega_{(\kappa)} \cup \Gamma_{(\kappa)p}} p^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) \Psi \left(\mathbf{y} \right) dS_{\mathbf{y}} \cdot \check{\mathbf{p}} = \int_{\Gamma_{(\kappa)q}} p^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) \bar{q} \left(\mathbf{y} \right) dS_{\mathbf{y}} - \\ & \int_{\Gamma_{(\kappa)p}} q^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) \bar{p} \left(\mathbf{y} \right) dS_{\mathbf{y}} - \int_{\Omega_{(\kappa)}} p^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) g \left(\mathbf{y} \right) dV_{\mathbf{y}}, \end{aligned} \quad (3.89)$$

και αντίστοιχα για ένα ελαστικό σώμα σε ισορροπία, μέσω της Εξ. (3.88) κάνοντας χρήση των Εξ. (3.11) και (3.43), συνεπάγεται

$$\begin{aligned} & \tilde{\alpha} \left(\mathbf{x}^{(\kappa)} \right) \cdot \tilde{\Phi} \left(\mathbf{x}^{(\kappa)} \right) \cdot \check{\mathbf{u}} + \int_{\partial\Omega_{(\kappa)} \cup \Gamma_{(\kappa)t}} \tilde{\mathbf{t}}^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) \cdot \tilde{\Phi} \left(\mathbf{y} \right) dS_{\mathbf{y}} \cdot \check{\mathbf{u}} - \\ & \int_{\partial\Omega_{(\kappa)} \cup \Gamma_{(\kappa)u}} \tilde{\mathbf{u}}^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) \cdot \tilde{\mathbf{E}} \left(\mathbf{y} \right) \cdot \tilde{\Phi} \left(\mathbf{y} \right) dS_{\mathbf{y}} \cdot \check{\mathbf{u}} = \\ & \int_{\Gamma_{(\kappa)t}} \tilde{\mathbf{u}}^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) \cdot \tilde{\mathbf{t}} \left(\mathbf{y} \right) dS_{\mathbf{y}} - \int_{\Gamma_{(\kappa)u}} \tilde{\mathbf{t}}^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) \cdot \tilde{\mathbf{u}} \left(\mathbf{y} \right) dS_{\mathbf{y}} - \\ & \int_{\Omega_{(\kappa)}} \tilde{\mathbf{u}}^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) \cdot \mathbf{f} \left(\mathbf{y} \right) dV_{\mathbf{y}}. \end{aligned} \quad (3.90)$$

Παρατηρεί κάποιος ότι στη Μέθοδο Τοπικών Ολοκληρωτικών Εξισώσεων χωρίς Διακριτοποίηση πρώτου τύπου (ΜΤΟΕχΔ1) ότι το πεδίο πίεσης και της βαθμίδας υπερπίεσης θεωρούνται ως εξαρτημένες μεταβλητές.

3.3.2 Μέθοδος Τοπικών Ολοκληρωτικών Εξισώσεων χωρίς Διακριτοποίηση δεύτερου τύπου

Η Μέθοδος Τοπικών Ολοκληρωτικών Εξισώσεων χωρίς Διακριτοποίηση δεύτερου τύπου (ΜΤΟΕχΔ2) μπορεί να πει κάποιος ότι πλησιάζει σημαντικά την ΤΜΡΓχΔ4

του Υποεδράφ. 3.2.2. Χρησιμοποιώντας τις τοπικές ολοκληρωτικές Εξ. (3.68), (3.71) και εισάγοντας σε αυτές τις αντίστοιχες Εξ. (3.14), (3.44) και Εξ. (3.11), (3.41) αντίστοιχα, τότε μπορεί κάποιος να γράψει ότι

$$\alpha \left(\mathbf{x}^{(\kappa)} \right) \Phi \left(\mathbf{x}^{(\kappa)} \right) \cdot \check{\mathbf{p}} + \int_{\partial\Omega_{(\kappa)} \cup \Gamma_{(\kappa)}} q^{**} \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) \Phi \left(\mathbf{y} \right) dS_{\mathbf{y}} \cdot \check{\mathbf{p}} = \int_{\Gamma_{(\kappa)}} p^{**} \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) \Phi \left(\mathbf{y} \right) dS_{\mathbf{y}} \cdot \check{\mathbf{q}} - \int_{\Omega_{(\kappa)}} p^{**} \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) g \left(\mathbf{y} \right) dV_{\mathbf{y}}, \quad (3.91)$$

$$\tilde{\alpha} \left(\mathbf{x}^{(\kappa)} \right) \cdot \tilde{\Phi} \left(\mathbf{x}^{(\kappa)} \right) \cdot \check{\mathbf{u}} + \int_{\partial\Omega_{(\kappa)} \cup \Gamma_{(\kappa)}} \tilde{\mathbf{t}}^{**} \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) \cdot \tilde{\Phi} \left(\mathbf{y} \right) dS_{\mathbf{y}} \cdot \check{\mathbf{u}} = \int_{\Gamma_{(\kappa)}} \tilde{\mathbf{u}}^{**} \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) \cdot \tilde{\Phi} \left(\mathbf{y} \right) dS_{\mathbf{y}} \cdot \check{\mathbf{t}} - \int_{\Omega_{(\kappa)}} \tilde{\mathbf{u}}^{**} \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) \cdot \mathbf{f} \left(\mathbf{y} \right) dV_{\mathbf{y}}. \quad (3.92)$$

Συγκρίνοντας τις ολοκληρωτικές εξισώσεις της ΜΤΟΕχΔ2 με τις αντίστοιχες της ΜΤΟΕχΔ1 παρατηρείται ότι στην πρώτη απουσιάζει το επιφανειακό ολοκλήρωμα στο τοπικό εσωτερικό σύνορο $\partial\Omega_{(\kappa)}$ όπου είναι άγνωστο το πεδίο της βαθμίδας υπερπίεσης ή των τάσεων. Επιπλέον μονάχα οι συναρτήσεις δοκιμής είναι αναγκαίες για την παρεμβολή ή προσέγγιση των αγνώστων πεδίων καθώς αποφεύγεται ο υπολογισμός των παραγώγων τους. Επίσης παρατηρείται ότι οι άγνωστες μεταβλητές στην ΤΜΡΓχΔ4 είναι μονάχα η πίεση για ακουστικό μέσο και το διάνυσμα των μετατοπίσεων σε ελαστικό μέσο, σε αντίθεση με τη ΜΤΟΕχΔ2 όπου οι άγνωστοι είναι η πίεση, η βαθμίδα υπερπίεσης και το διάνυσμα των μετατοπίσεων, τάσεων στα αντίστοιχα συνεχή μέσα.

3.3.3 Μέθοδος Τοπικών Ολοκληρωτικών Εξισώσεων χωρίς Διακριτοποίηση τρίτου τύπου

Αν κάποιος πάρει την τοπική μορφή της ολοκληρωτικής Εξ. (2.16) τότε μπορεί να παράγει την τοπική ολοκληρωτική αναπαράσταση του διανύσματος των τάσεων ορισμένη μονάχα σε σημεία $\mathbf{x}^{(\kappa)}$ που ανήκουν στο γενικό σύνορο Γ του σώματος, μέσω της Εξ. (2.7), δηλαδή

$$\tilde{\alpha} \left(\mathbf{x}^{(\kappa)} \right) \cdot \mathbf{t} \left(\mathbf{x}^{(\kappa)} \right) + \int_{\partial\Omega_{(\kappa)} \cup \Gamma_{(\kappa)}} \tilde{\mathbf{T}}^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) \cdot \mathbf{u} \left(\mathbf{y} \right) dS_{\mathbf{y}} = \int_{\partial\Omega_{(\kappa)} \cup \Gamma_{(\kappa)}} \tilde{\mathbf{U}}^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) \cdot \mathbf{t} \left(\mathbf{y} \right) dS_{\mathbf{y}} - \int_{\Omega_{(\kappa)}} \tilde{\mathbf{U}}^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) \cdot \mathbf{f} \left(\mathbf{y} \right) dV_{\mathbf{y}}, \quad (3.93)$$

όπου $\tilde{\mathbf{U}}^* = \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}^{(\kappa)}) \cdot \tilde{\tilde{\mathbf{u}}}^*$ και $\tilde{\mathbf{T}}^* = \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}^{(\kappa)}) \cdot \tilde{\tilde{\mathbf{t}}}^*$, με τους πυρήνες $\tilde{\tilde{\mathbf{u}}}^*$, $\tilde{\tilde{\mathbf{t}}}^*$ να δίδονται αναλυτικά στο Υποεδράφ. 2.1.1.

Προκειμένου κάποιος να απαλλαχθεί από το διάνυσμα των άγνωστων τάσεων –ορισμένων στο τοπικό σύνορο $\partial\Omega_{(\kappa)}$ – αρκεί να ακολουθήσει τη μεθοδολογία υπολογισμού των επιπλέον συνοδευτικών λύσεων για την Εξ. (3.93), όπως αυτή προτείνεται στην πρόσφατη εργασία [23]. Σύμφωνα με τη δημοσίευση αυτή συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned} & \tilde{\alpha}(\mathbf{x}^{(\kappa)}) \cdot \mathbf{t}(\mathbf{x}^{(\kappa)}) + \int_{\partial\Omega_{(\kappa)} \cup \Gamma_{(\kappa)}} \tilde{\mathbf{T}}^{**}(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} = \\ & \int_{\Gamma_{(\kappa)}} \tilde{\mathbf{U}}^{**}(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{t}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} - \int_{\Omega_{(\kappa)}} \tilde{\mathbf{B}}^{**}(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} - \\ & \int_{\Omega_{(\kappa)}} \tilde{\mathbf{U}}^{**}(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}}, \end{aligned} \quad (3.94)$$

με τους πυρήνες $\tilde{\mathbf{U}}^{**} = \tilde{\mathbf{U}}^* - \tilde{\mathbf{U}}^c$, $\tilde{\mathbf{T}}^{**} = \tilde{\mathbf{T}}^* - \tilde{\mathbf{T}}^c$ και $\tilde{\mathbf{B}}^{**}$ να δίδονται αναλυτικά στην αναφορά [23].

Όταν το σημείο πηγής $\mathbf{x}^{(\kappa)} \in \{\Omega - \Gamma\}$ τότε χρησιμοποιείται μονάχα η ολοκληρωτική Εξ. (3.71), ενώ όταν $\mathbf{x}^{(\kappa)} \in \Gamma$ τότε χρησιμοποιούνται ταυτόχρονα οι Εξ. (3.71) και (3.94). Συνεπώς για ένα τυχαίο κομβικό σημείο $\mathbf{x}^{(\kappa)}$ της κανάβου οι παραπάνω ολοκληρωτικές εξισώσεις –κάνοντας χρήση των Εξ. (3.11), (3.41) αναπαράστασης των πεδίων– λαμβάνουν τη μορφή

$$\begin{aligned} & \tilde{\alpha}(\mathbf{x}^{(\kappa)}) \cdot \left\{ \begin{array}{c} \tilde{\Phi}(\mathbf{x}^{(\kappa)}) \\ \bar{\mathbf{u}} \end{array} \right\} + \int_{\partial\Omega_{(\kappa)} \cup \Gamma_{(\kappa)}} \tilde{\mathbf{t}}^{**}(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}) \cdot \tilde{\Phi}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \cdot \bar{\mathbf{u}} = \\ & \int_{\Gamma_{(\kappa)}} \tilde{\mathbf{u}}^{**}(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}) \cdot \tilde{\Phi}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \cdot \bar{\mathbf{t}} - \int_{\Omega_{(\kappa)}} \tilde{\mathbf{u}}^{**}(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}}, \end{aligned} \quad (3.95)$$

$$\begin{aligned} & \tilde{\alpha}(\mathbf{x}^{(\kappa)}) \cdot \left\{ \begin{array}{c} \tilde{\Phi}(\mathbf{x}^{(\kappa)}) \\ \bar{\mathbf{t}} \end{array} \right\} + \int_{\partial\Omega_{(\kappa)} \cup \Gamma_{(\kappa)}} \tilde{\mathbf{T}}^{**}(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}) \cdot \tilde{\Phi}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \cdot \bar{\mathbf{u}} = \\ & \int_{\Gamma_{(\kappa)}} \tilde{\mathbf{U}}^{**}(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}) \cdot \tilde{\Phi}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \cdot \bar{\mathbf{t}} - \int_{\Omega_{(\kappa)}} \tilde{\mathbf{B}}^{**}(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}) \cdot \tilde{\Phi}(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}} \cdot \bar{\mathbf{u}} - \\ & \int_{\Omega_{(\kappa)}} \tilde{\mathbf{U}}^{**}(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}}. \end{aligned} \quad (3.96)$$

Όπως φαίνεται από τις Εξ. (3.95), (3.96), όταν ο κόμβος $\mathbf{x}^{(\kappa)} \notin \Gamma$ τότε ο ελεύθερος όρος της πρώτης ολοκληρωτικής εξίσωσης αντικαθίσταται από την Εξ. (3.11). Όταν όμως ο συνοριακός κόμβος $\mathbf{x}^{(\kappa)}$ έχει προκαθορισμένες τις ουσιαστικές συνοριακές συνθήκες ($\mathbf{x}^{(\kappa)} \in \Gamma_u$) τότε αυτές υπεισέρχονται απευθείας στον ελεύθερο όρο της Εξ. (3.95) ενώ στον αντίστοιχο όρο της Εξ. (3.96) γίνεται χρήση της Εξ.

(3.41). Αντίθετα όταν $\mathbf{x}^{(\kappa)} \in \Gamma_t$ τότε οι φυσικές συνοριακές συνθήκες εισέρχονται στον ελεύθερο όρο της Εξ. (3.96) κάνοντας παράλληλα χρήση της Εξ. (3.11) στην Εξ. (3.95).

3.3.4 Μέθοδος Τοπικών Ολοκληρωτικών Εξισώσεων χωρίς Διακριτοποίηση τέταρτου τύπου

Η ιδέα για τη δημιουργία της Μεθόδου των Τοπικών Ολοκληρωτικών Εξισώσεων χωρίς Διακριτοποίηση τέταρτου τύπου (ΜΤΟΕχΔ4) προήλθε από την ανάγκη αποφυγής της χρήσης των παραγώγων των συναρτήσεων μορφής –κάτι που επετεύχθη στη ΜΤΟΕχΔ2 και την ΤΜΡΓχΔ4– με παράλληλη απεξάρτηση από τον αναλυτικό υπολογισμό των συνοδευτικών λύσεων [26, 27]. Το αντεπιχείρημα σε αυτή την «εναλλακτική» μεθοδολογία είναι ότι οι συνοδευτικές λύσεις σε προβλήματα ακουστικής και ελαστικότητας έχουν υπολογιστεί αναλυτικά. Ο τρόπος όμως εφαρμογής της ΜΤΟΕχΔ2 και της ΤΜΡΓχΔ4 σε ζητήματα τριών διαστάσεων όμως φαντάζει εξαιρετικά επίπονος, λόγω της γεωμετρικών δυσκολιών υπολογισμού των τομών των σφαιρών ολοκλήρωσης με το γενικό σύνορο και άρα ορισμού του χωρίου $\partial\Omega_{(\kappa)}$ για τον αναλυτικό υπολογισμό των συνοδευτικών λύσεων. Παρόμοιο πρόβλημα συναντάται και σε αξονοσυμμετρικές γεωμετρίες όπου η παραγωγή των συνοδευτικών λύσεων είναι σχεδόν ανέφικτη [24].

Για ένα σημείο $\mathbf{x}^{(\kappa)} \in \Omega$ το οποίο περικλύεται σε ένα κύκλο $\Omega_{(\kappa)} \subset \Omega$ (κύκλος ολοκλήρωσης) με κέντρο τον εαυτό του, οι υπερδιόμορφες ολοκληρωτικές αναπαράστασεις των Εξ. (2.37), (2.17) μπορούν να γραφτούν στη τοπική μορφή του κλειστού χωρίου, όπως φαίνεται στο Σχ. 3.4, ως εξής

$$\begin{aligned} & \alpha \left(\mathbf{x}^{(\kappa)} \right) \nabla_{\mathbf{x}^{(\kappa)}} p \left(\mathbf{x}^{(\kappa)} \right) + \int_{\partial\Omega_{(\kappa)} \cup \Gamma_{(\kappa)q}} \mathbf{q}^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) p \left(\mathbf{y} \right) dS_{\mathbf{y}} - \\ & \int_{\partial\Omega_{(\kappa)} \cup \Gamma_{(\kappa)p}} \mathbf{p}^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) q \left(\mathbf{y} \right) dS_{\mathbf{y}} = \int_{\Gamma_{(\kappa)q}} \mathbf{p}^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) \bar{q} \left(\mathbf{y} \right) dS_{\mathbf{y}} - \\ & \int_{\Gamma_{(\kappa)p}} \mathbf{q}^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) \bar{p} \left(\mathbf{y} \right) dS_{\mathbf{y}} - \int_{\Omega_{(\kappa)}} \mathbf{p}^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) g \left(\mathbf{y} \right) dV_{\mathbf{y}}, \end{aligned} \quad (3.97)$$

$$\begin{aligned} & \tilde{\alpha} \left(\mathbf{x}^{(\kappa)} \right) \cdot \boldsymbol{\sigma} \left(\mathbf{x}^{(\kappa)} \right) + \int_{\partial\Omega_{(\kappa)} \cup \Gamma_{(\kappa)t}} \tilde{\boldsymbol{\tau}}^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) \cdot \mathbf{u} \left(\mathbf{y} \right) dS_{\mathbf{y}} - \\ & \int_{\partial\Omega_{(\kappa)} \cup \Gamma_{(\kappa)u}} \tilde{\mathbf{v}}^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) \cdot \mathbf{t} \left(\mathbf{y} \right) dS_{\mathbf{y}} = \int_{\Gamma_{(\kappa)t}} \tilde{\mathbf{v}}^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) \cdot \bar{\mathbf{t}} \left(\mathbf{y} \right) dS_{\mathbf{y}} - \\ & \int_{\Gamma_{(\kappa)u}} \tilde{\boldsymbol{\tau}}^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) \cdot \bar{\mathbf{u}} \left(\mathbf{y} \right) dS_{\mathbf{y}} - \int_{\Omega_{(\kappa)}} \tilde{\mathbf{v}}^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) \cdot \mathbf{f} \left(\mathbf{y} \right) dV_{\mathbf{y}}. \end{aligned} \quad (3.98)$$

Εφαρμόζοντας την Εξ. (2.33) και την Εξ. (2.8) στις παραπάνω ολοκληρωτικές αναπαράστασεις αλλά και στις Εξ. (3.87), (3.88) συνεπάγεται για ένα ακουστικό σώμα ότι

$$\begin{aligned}
 & \alpha \left(\mathbf{x}^{(\kappa)} \right) p \left(\mathbf{x}^{(\kappa)} \right) + \int_{\partial\Omega_{(\kappa)} \cup \Gamma_{(\kappa)q}} q^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) p \left(\mathbf{y} \right) dS_{\mathbf{y}} - \\
 & \int_{\partial\Omega_{(\kappa)} \cup \Gamma_{(\kappa)p}} p^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) \hat{\mathbf{n}} \left(\mathbf{y} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{y}} p \left(\mathbf{y} \right) dS_{\mathbf{y}} = \int_{\Gamma_{(\kappa)q}} p^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) \bar{q} \left(\mathbf{y} \right) dS_{\mathbf{y}} - \\
 & \int_{\Gamma_{(\kappa)p}} q^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) \bar{p} \left(\mathbf{y} \right) dS_{\mathbf{y}} - \int_{\Omega_{(\kappa)}} p^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) g \left(\mathbf{y} \right) dV_{\mathbf{y}}, \quad (3.99)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \alpha \left(\mathbf{x}^{(\kappa)} \right) \nabla_{\mathbf{x}^{(\kappa)}} p \left(\mathbf{x}^{(\kappa)} \right) + \int_{\partial\Omega_{(\kappa)} \cup \Gamma_{(\kappa)q}} \mathbf{q}^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) p \left(\mathbf{y} \right) dS_{\mathbf{y}} - \\
 & \int_{\partial\Omega_{(\kappa)} \cup \Gamma_{(\kappa)p}} \mathbf{p}^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) \hat{\mathbf{n}} \left(\mathbf{y} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{y}} p \left(\mathbf{y} \right) dS_{\mathbf{y}} = \int_{\Gamma_{(\kappa)q}} \mathbf{p}^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) \bar{q} \left(\mathbf{y} \right) dS_{\mathbf{y}} - \\
 & \int_{\Gamma_{(\kappa)p}} \mathbf{q}^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) \bar{p} \left(\mathbf{y} \right) dS_{\mathbf{y}} - \int_{\Omega_{(\kappa)}} \mathbf{p}^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) g \left(\mathbf{y} \right) dV_{\mathbf{y}}, \quad (3.100)
 \end{aligned}$$

ενώ αντίστοιχα για ένα ελαστικό σώμα ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
 & \tilde{\alpha} \left(\mathbf{x}^{(\kappa)} \right) \cdot \mathbf{u} \left(\mathbf{x}^{(\kappa)} \right) + \int_{\partial\Omega_{(\kappa)} \cup \Gamma_{(\kappa)t}} \tilde{\mathbf{t}}^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) \cdot \mathbf{u} \left(\mathbf{y} \right) dS_{\mathbf{y}} - \\
 & \int_{\partial\Omega_{(\kappa)} \cup \Gamma_{(\kappa)u}} \tilde{\mathbf{u}}^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) \cdot \tilde{\mathbf{N}} \left(\mathbf{y} \right) \cdot \boldsymbol{\sigma} \left(\mathbf{y} \right) dS_{\mathbf{y}} = \int_{\Gamma_{(\kappa)t}} \tilde{\mathbf{u}}^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) \cdot \bar{\mathbf{t}} \left(\mathbf{y} \right) dS_{\mathbf{y}} - \\
 & \int_{\Gamma_{(\kappa)u}} \tilde{\mathbf{t}}^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) \cdot \bar{\mathbf{u}} \left(\mathbf{y} \right) dS_{\mathbf{y}} - \int_{\Omega_{(\kappa)}} \tilde{\mathbf{u}}^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) \cdot \mathbf{f} \left(\mathbf{y} \right) dV_{\mathbf{y}}, \quad (3.101)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \tilde{\alpha} \left(\mathbf{x}^{(\kappa)} \right) \cdot \boldsymbol{\sigma} \left(\mathbf{x}^{(\kappa)} \right) + \int_{\partial\Omega_{(\kappa)} \cup \Gamma_{(\kappa)t}} \tilde{\boldsymbol{\tau}}^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) \cdot \mathbf{u} \left(\mathbf{y} \right) dS_{\mathbf{y}} - \\
 & \int_{\partial\Omega_{(\kappa)} \cup \Gamma_{(\kappa)u}} \tilde{\mathbf{v}}^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) \cdot \tilde{\mathbf{N}} \left(\mathbf{y} \right) \cdot \boldsymbol{\sigma} \left(\mathbf{y} \right) dS_{\mathbf{y}} = \int_{\Gamma_{(\kappa)t}} \tilde{\mathbf{v}}^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) \cdot \bar{\mathbf{t}} \left(\mathbf{y} \right) dS_{\mathbf{y}} - \\
 & \int_{\Gamma_{(\kappa)u}} \tilde{\boldsymbol{\tau}}^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) \cdot \bar{\mathbf{u}} \left(\mathbf{y} \right) dS_{\mathbf{y}} - \int_{\Omega_{(\kappa)}} \tilde{\mathbf{v}}^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) \cdot \mathbf{f} \left(\mathbf{y} \right) dV_{\mathbf{y}}. \quad (3.102)
 \end{aligned}$$

Εισάγοντας κάποιος στις τοπικές ολοκληρωτικές Εξ. (3.101), (3.102) τις σχέσεις αναπαράστασης του άγνωστου πεδίου των μετατοπίσεων και τάσεων μέσω των Εξ. (3.11), (3.48) τότε

$$\begin{aligned} & \tilde{\alpha}(\mathbf{x}^{(\kappa)}) \cdot \tilde{\Phi}(\mathbf{x}^{(\kappa)}) \cdot \tilde{\mathbf{u}} + \int_{\partial\Omega_{(\kappa)} \cup \Gamma_{(\kappa)t}} \tilde{\mathbf{t}}^*(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}) \cdot \tilde{\Phi}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \cdot \tilde{\mathbf{u}} - \\ & \int_{\partial\Omega_{(\kappa)} \cup \Gamma_{(\kappa)u}} \tilde{\mathbf{u}}^*(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}) \cdot \tilde{\mathbf{N}}(\mathbf{y}) \cdot \tilde{\Theta}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \cdot \tilde{\sigma} = \int_{\Gamma_{(\kappa)t}} \tilde{\mathbf{u}}^*(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}) \cdot \tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} - \\ & \int_{\Gamma_{(\kappa)u}} \tilde{\mathbf{t}}^*(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}) \cdot \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} - \int_{\Omega_{(\kappa)}} \tilde{\mathbf{u}}^*(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}}, \end{aligned} \quad (3.103)$$

$$\begin{aligned} & \tilde{\alpha}(\mathbf{x}^{(\kappa)}) \cdot \tilde{\Phi}(\mathbf{x}^{(\kappa)}) \cdot \tilde{\sigma} + \int_{\partial\Omega_{(\kappa)} \cup \Gamma_{(\kappa)t}} \tilde{\tau}^*(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}) \cdot \tilde{\Phi}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \cdot \tilde{\mathbf{u}} - \\ & \int_{\partial\Omega_{(\kappa)} \cup \Gamma_{(\kappa)u}} \tilde{\mathbf{v}}^*(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}) \cdot \tilde{\mathbf{N}}(\mathbf{y}) \cdot \tilde{\Theta}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \cdot \tilde{\sigma} = \int_{\Gamma_{(\kappa)t}} \tilde{\mathbf{v}}^*(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}) \cdot \tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} - \\ & \int_{\Gamma_{(\kappa)u}} \tilde{\tau}^*(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}) \cdot \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} - \int_{\Omega_{(\kappa)}} \tilde{\mathbf{v}}^*(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}}. \end{aligned} \quad (3.104)$$

Κάνοντας την υπόθεση ότι οι ίδιες συναρτήσεις μορφής που αναπαριστούν το άγνωστο πεδίο της πίεσης (βλ. Εξ. (3.14)) μπορούν να αναπαραστήσουν την βαθμίδα της πίεσης (∇p) και εφαρμόζοντάς τις στις ολοκληρωτικές Εξ. (3.99), (3.100) τότε προκύπτει ένα ζεύγος εξισώσεων όμοιο με πριν. Οι μόνοι άγνωστοι στις εξισώσεις αυτές είναι η πίεση και η βαθμίδα της σε όλους τους κόμβους του πλέγματος σημείων.

3.4 Αριθμητική εφαρμογή των Τοπικών Μεθόδων χωρίς Διακριτοποίηση

Σε αυτό το εδάφιο πρόκειται να γίνει αναφορά στην αριθμητική εφαρμογή των Τοπικών Μεθόδων χωρίς Διακριτοποίηση (TMPGχΔ και MTOEχΔ) για προβλήματα γραμμικής ελαστικότητας και ακουστικού μέσου στις δύο διαστάσεις.

Υπολογίζοντας τα επιφανειακά και τα ολοκληρώματα όγκου —όπου υπάρχουν ή χρειάζεται να υπολογιστούν— στις ολοκληρωτικές εξισώσεις των αριθμητικών τεχνικών των TMPGχΔ1, TMPGχΔ4-6, καθώς και των MTOEχΔ1, MTOEχΔ4 που αναπτύχθηκαν στα προηγούμενα δύο εδάφια, τότε μπορεί κάποιος να γράψει σε μητρική μορφή τα ακόλουθα συστήματα γραμμικών εξισώσεων για ελαστικό και ακουστικό μέσο αντίστοιχα

$$\tilde{\mathbf{H}}_{(e)} \cdot \tilde{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{f}}, \quad (3.105)$$

$$\tilde{\mathbf{H}}_{(a)} \cdot \tilde{\mathbf{p}} = \bar{\mathbf{g}}, \quad (3.106)$$

όπου τα διανύσματα $\bar{\mathbf{f}}$ και $\bar{\mathbf{g}}$ είναι έκτασης 2 και 1 αντίστοιχα, τα οποία προκύπτουν από τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων όγκου των πεδιακών πηγών αλλά και

από τα επιφανειακά ολοκληρώματα στα οποία είναι προκαθορισμένες οι συνοριακές συνθήκες. Αναλυτική περιγραφή του τρόπου υπολογισμού τόσο των επιφανειακών όσο και των ολοκληρωμάτων όγκου –όπου υπάρχουν– έχει γίνει στο Εδάφ. Α.2 του Παραρτήματος, με ειδικό σχολιασμό στη σύγκλιση των αριθμητικών αποτελεσμάτων των ολοκληρωμάτων στα Υποεδάφ. Α.2.1 και Α.2.3.

Κάνοντας την ίδια υπόθεση εργασίας με αυτή του Εδάφ. 2.4, δηλαδή αν υποτεθεί ότι το συνεχές μέσο διακριτοποιείται με n_d πλήθος κόμβων, τότε ο πίνακας $\tilde{\mathbf{H}}_{(e)}$ είναι έκτασης $2 \times 2n_d$, ενώ ο πίνακας $\tilde{\mathbf{H}}_{(a)}$ είναι έκτασης $1 \times n_d$. Οι πίνακες αυτοί εμπεριέχουν τα επιφανειακά ολοκληρώματα αλλά και τα ολοκληρώματα όγκου (βλ. Τοπική Μέθοδο Petrov-Galerkin χωρίς Διακριτοποίηση πρώτου και έκτου τύπου) των παραπάνω ολοκληρωτικών εξισώσεων και είναι αραιής πυκνωσης. Επίσης τα διανύσματα

$$\tilde{\mathbf{u}} = \{ \tilde{u}_1^{(1)} \ \tilde{u}_2^{(1)} \ \dots \ \tilde{u}_1^{(n_d)} \ \tilde{u}_2^{(n_d)} \}^T_{[2n_d]}, \quad (3.107\alpha')$$

$$\tilde{\mathbf{p}} = \{ \tilde{p}^{(1)} \ \dots \ \tilde{p}^{(n_d)} \}^T_{[n_d]}, \quad (3.107\beta')$$

έχουν ως στοιχεία τις άγνωστες φανταστικές επικόμβιες τιμές των αντίστοιχων πεδίων όταν γίνεται χρήση μεθόδων προσέγγισης των συναρτήσεων μέσω της Μεθόδου Κινουμένων Ελαχίστων Τετραγώνων ή της MKET με Προσέγγιση Συνθηκών Συνέπειας. Στην αντίθετη περίπτωση που γίνει χρήση μεθόδων παρεμβολής –όπως είναι η Μέθοδος Παρεμβολής Σημείων με Βάση Ακτινικών Συναρτήσεων– τότε τα στοιχεία των διανυσμάτων αυτών αντιστοιχούν στις πραγματικές επικόμβιες τιμές του άγνωστου πεδίου.

Για να γίνει κατανοητό από τον αναγνώστη του παρόντος διδακτορικού συγγράμματος ο λόγος για τον οποίο τα παραπάνω μητρώα είναι αραιής πυκνωσης αρκεί να παρατηρήσει το Σχ. 3.5(α'). Στο σχήμα αυτό με παχιά διακεκομμένη γραμμή ορίζεται το χωρίο ολοκλήρωσης $\Omega_{(K)}$ του σημείου πηγής K ενώ με πιο λεπτούς κύκλους αναπαριστώνται οι κύκλοι επιρροής των γειτονικών κόμβων καθώς και του κόμβου K . Οι λεπτοί κύκλοι με διακεκομμένες γραμμές είναι οι μη-γειτονικοί κόμβοι ως προς το πεδιακό σημείο του κόμβου K . Όπως φαίνεται στα Σχ. 3.5(β')-3.5(δ'), ανάλογα με τη θέση του σημείου ολοκλήρωσης Q ορισμένοι από του γειτονικούς κόμβους (ελαφρά σκιασμένοι κύκλοι) επηρεάζουν για την αναπαράσταση του εκάστοτε άγνωστου πεδίου με τις μεθόδους προσέγγισης ή παρεμβολής. Συνεπώς ένα σύνολο των διεσπαρμένων κόμβων του πλέγματος επιδρά καθόδου στην αναπαράσταση των άγνωστων πεδίων. Ως εκ τούτου τα προαναφερθέντα μητρώα εμπεριέχουν μηδενικά στοιχεία τα οποία προκύπτουν από το παραπάνω φαινόμενο, γεγονός που αποδεικνύει τον τοπικό χαρακτήρα των αριθμητικών μεθοδολογιών που πραγματεύεται το παρόν κεφάλαιο.

Στην ειδική περίπτωση της Μεθόδου των Τοπικών Ολοκληρωτικών Εξισώσεων χωρίς Διακριτοποίηση τέταρτου τύπου (MTOEχΔ4) οι πίνακες $\tilde{\mathbf{H}}_{(e)}$, $\tilde{\mathbf{H}}_{(a)}$ έχουν έκταση $5 \times 5n_d$ και $3 \times 3n_d$, αντίστοιχα, ενώ τα διανύσματα του άγνωστου πεδίου είναι τα παρακάτω

Σχήμα 3.5: (α') Τομές του χωρίου ολοκλήρωσης $\Omega_{(\kappa)}$ του σημείου πηγής K από τους κύκλους επιρροής $\tilde{\Omega}_{(j)}$ των γειτονικών κόμβων όταν το σημείο ολοκλήρωσης Q βρίσκεται (β') στο γενικό σύνορο, (γ') στο τοπικό σύνορο $\partial\Omega_{(\kappa)}$ και (δ') στο εσωτερικό του τοπικού χωρίου $\Omega_{(\kappa)}$.

$$\tilde{\mathbf{u}} = \{ \check{u}_1^{(1)} \check{u}_2^{(1)} \check{\sigma}_1^{(1)} \check{\sigma}_2^{(1)} \check{\sigma}_3^{(1)} \dots \check{u}_1^{(n_d)} \check{u}_2^{(n_d)} \check{\sigma}_1^{(n_d)} \check{\sigma}_2^{(n_d)} \check{\sigma}_3^{(n_d)} \}^T_{[5n_d]}, \quad (3.108\alpha')$$

$$\tilde{\mathbf{p}} = \{ \check{p}^{(1)} \frac{\partial \check{p}^{(1)}}{\partial x_1^{(\kappa)}} \frac{\partial \check{p}^{(1)}}{\partial x_2^{(\kappa)}} \dots \check{p}^{(n_d)} \frac{\partial \check{p}^{(n_d)}}{\partial x_1^{(\kappa)}} \frac{\partial \check{p}^{(n_d)}}{\partial x_2^{(\kappa)}} \}^T_{[3n_d]}. \quad (3.108\beta')$$

Όμοια με πριν, υπολογίζοντας τα επιφανειακά και τα ολοκληρώματα όγκου των ολοκληρωτικών εξισώσεων της αριθμητικής ΜΤΟΕχΔ2 του Υποεδράφ. 3.3.2 τότε μπορεί κάποιος να γράψει σε μητρική μορφή τα συστήματα γραμμικών εξισώσεων για ελαστικό και ακουστικό μέσο όπως ακριβώς είναι οι Εξ. (2.68) και (2.69), αντίστοιχα. Βέβαια με βάση την τεχνική επιβολής των συνοριακών συνθηκών που περιγράφηκε στο Υποεδράφ. 3.1.5, μπορεί να δημιουργηθεί μία παραλλαγή της ΜΤΟΕχΔ2 μέσω της Μεθόδου Μετασχηματισμού. Η μόνη αριθμητική επιβάρυνση σε αυτή τη τεχνική είναι ο υπολογισμός του μητρώου $\tilde{\mathbf{R}}$ (βλ. Εξ. (3.53)) αλλά και ο πολλαπλασιασμός τού αριστερά με τους πίνακες $\tilde{\mathbf{H}}_{(e)}$, $\tilde{\mathbf{G}}_{(e)}$ για ελαστικό μέσο και $\tilde{\mathbf{H}}_{(a)}$, $\tilde{\mathbf{G}}_{(a)}$ για ακουστικό μέσο, αντίστοιχα. Στο εξής αυτή η μεθοδολογία θα

συμβολίζεται με τη συντομογραφία ΜΤΟΕχΔ2-Τ. Εδώ πρέπει να σημειωθεί ότι τα υπολογιζόμενα άγνωστα πεδία στο υπό-ανάλυση πρόβλημα αντιστοιχούν στις πραγματικές επικόμβιες τιμές των πεδίων, όπως ακριβώς συμβαίνει στη ΜΣΣ αλλά και στη ΜΤΟΕχΔ2 όταν γίνεται χρήση μεθόδων παρεμβολής.

Αναλυτική περιγραφή του αριθμητικού υπολογισμού τόσο των επιφανειακών όσο και των ολοκληρωμάτων όγκου έχει γίνει στο Εδάφ. Α.2 του Παραρτήματος. Επίσης στα Υποεδάφ. Α.2.1, Α.2.2 και Α.2.3 του Παρ. Α γίνεται ειδικός σχολιασμός για τη σύγκλιση των αριθμητικών αποτελεσμάτων των ολοκληρωμάτων καθώς και παρουσίαση του τρόπου μεταχείρισης των ιδιόμορφων και υπεριδιόμορφων ολοκληρωμάτων που προκύπτουν.

Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία υπολογισμού των Εξ. (3.105) ή (3.106), για το ελαστικό και ακουστικό μέσο αντίστοιχα για το σύνολο των n_d κόμβων, εφαρμόζοντας διαδοχικά τις συνοριακές συνθήκες και διαχωρίζοντας γνωστούς από αγνώστους τότε μπορεί κάποιος να καταλήξει σε ένα γραμμικό αλγεβρικό σύστημα όμοιο με αυτό της Εξ. (2.71). Ο τελικός Σπίνακας $\tilde{\mathbf{A}}$ για τις Τοπικές Μεθόδους χωρίς Διακριτοποίηση είναι μη-συμμετρικός αραιής πυκνώσης, όπου στην ειδική περίπτωση κατάλληλης αρίθμησης των κόμβων της κανάβου, τότε ο πίνακας αυτός μπορεί να πάρει τη μορφή πίνακα ζώνης, όπως προκύπτει στη ΜΠΣ. Οι αλγόριθμοι επίλυσης των γραμμικών συστημάτων έγιναν τόσο με την αποσύνθεση σε άνω και κάτω τριγωνικούς πίνακες μέσω της βιβλιοθήκης ανοιχτού κώδικα GNU Scientific Library [14] αλλά και της βιβλιοθήκης SparseLib++ [13] για πίνακες αραιής πυκνώσης.

Υπολογίζοντας τα επιφανειακά και τα ολοκληρώματα όγκου των ολοκληρωτικών εξισώσεων της ΜΤΟΕχΔ3 του Υποεδάφ. 3.3.3 τότε μπορεί κάποιος να γράψει σε μητρική μορφή το σύστημα γραμμικών εξισώσεων για ελαστικό μέσο όπως ακριβώς είναι η Εξ. (2.68). Τα μητρώα $\tilde{\mathbf{H}}_{(e)}$, $\tilde{\mathbf{G}}_{(e)}$ έχουν έκταση $4 \times 4n_d$, με τη διαφορά ότι τα στοιχεία του διανύσματος των τάσεων $\tilde{\mathbf{t}}$ αλλά και του μητρώου $\tilde{\mathbf{G}}_{(e)}$ για τους μη-συνοριακούς κόμβους τίθενται ίσα με μηδέν. Συνεπώς με σωστή αναδιάταξη των μητρώων, μετά από απαλοιφή των παραπάνω μηδενικών στοιχείων, προκύπτει ένα γραμμικό σύστημα όμοιο με αυτό της Εξ. (2.71). Αν από το σύνολο των n_d κόμβων της κανάβου, n_b από αυτούς ανήκουν στο σύνορο Γ του σώματος, τότε ο πίνακας $\tilde{\mathbf{A}}$ έχει έκταση $(2n_d + 2n_b) \times (2n_d + 2n_b)$, του οποίου στοιχεία είναι τα επιφανειακά ολοκληρώματα και τα ολοκληρώματα όγκου. Το διάνυσμα $\mathbf{v}$ έχει έκταση $(2n_d + 2n_b)$ με στοιχεία τις φανταστικές ή πραγματικές επικόμβιες συνιστώσες των μετατοπίσεων των n_d κόμβων και τις συνιστώσες του διανύσματος της τάσης για τους n_b συνοριακούς κόμβους.

Για τις Τοπικές Μεθόδους χωρίς Διακριτοποίηση (εξαιρουμένων των ΜΤΟΕχΔ2 και ΜΤΟΕχΔ3) αν εφαρμοστούν οι σχέσεις των Εξ. (3.43), (3.45) μπορεί να υπολογιστεί το άγνωστο πεδίο του διανύσματος των επιφανειακών τάσεων και της βαθμίδας υπερπίεσης μέσω των γνωστών πλέον –φανταστικών ή πραγματικών– διανυσμάτων των μετατοπίσεων και των πιέσεων των γειτονικών κόμβων. Επιπλέον, αν στη Τοπική Μέθοδο χωρίς Διακριτοποίηση που υλοποιείται γίνει χρήση μεθόδου προσέγγισης του άγνωστου πεδίου τότε εφαρμόζονται αντίστοιχα οι Εξ. (3.11), (3.14) για τον υπολογισμό των πραγματικών επικόμβιων τιμών των μετατοπίσεων

και πιέσεων.

Εν κατακλείδη η αριθμητική εφαρμογή των Τοπικών Μεθόδων χωρίς Διακριτοποίηση για ένα σώμα σε μόνιμη κατάσταση, στο πεδίο συχνοτήτων και στο πεδίο του χρόνου για δυναμικά προβλήματα μπορεί να περιγραφεί από τον ίδιο αλγόριθμο όπως αυτός περιγράφηκε αναλυτικά στο Εδάφ. 2.4 για τη Μέθοδο των Συνοριακών Στοιχείων.

3.5 Παρατηρήσεις

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάστηκαν οι Τοπικές Μέθοδοι χωρίς Διακριτοποίηση για ισότροπα ομογενή συνεχή ακουστικά και ελαστικά σώματα στις δύο διαστάσεις. Οι μέθοδοι που πραγματεύτηκαν ήταν κάποιες παραλλαγές της Τοπικής Μεθόδου Petrov-Galerkin και της Μεθόδου των Τοπικών Ολοκληρωτικών Εξισώσεων χωρίς Διακριτοποίηση.

Από τα Εδάφ. 3.2, 3.3 μπορεί να παρατηρηθεί ότι υπάρχει ένας μεγάλος αριθμός παραλλαγών των ΤΜΧΔ ανάλογα με τις συναρτήσεις πεδίου και δοκιμής που μπορεί κάποιος να χρησιμοποιήσει, το σχήμα του χωρίου ολοκλήρωσης και επιρροής. Συγκεκριμένα, εάν υπάρχουν M τον αριθμό είδη συναρτήσεων πεδίου, N είδη συναρτήσεων δοκιμής, K μεθοδολογίες προσέγγισης ή παρεμβολής του άγνωστου πεδίου, P είδη σχήματος του χωρίου επιρροής και R είδη σχήματος του χωρίου ολοκλήρωσης· τότε το πλήθος δυνατών συνδυασμών για τη δημιουργία μίας Τοπικής Μεθόδου χωρίς Διακριτοποίηση είναι ίσο $M \times N \times K \times P \times R$. Με αυτό το τρόπο γίνεται φανερό ότι ο χώρος μελλοντικής έρευνας και ανάπτυξης της μεθόδου παραμένει αρκετά μεγάλος διότι μονάχα ένα μικρό τμήμα αυτής ήταν δυνατό να διερευνηθεί στην παρούσα διδακτορική διατριβή.

Βιβλιογραφία

- [1] Atluri SN, Zhu T (1998): A new Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics. *Computational Mechanics*, **22**, 117–127.
- [2] Atluri SN, Kim H-G, Cho JY (1999): A critical assessment of the truly Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG), and Local Boundary Integral Equation (LBIE) methods. *Computational Mechanics*, **24**, 348–372.
- [3] Atluri SN, Sladek J, Sladek V, Zhu T (2000): The local boundary integral equation (LBIE) and it's meshless implementation for linear elasticity. *Computational Mechanics*, **25**, 180–198.
- [4] Atluri SN, Shen S (2002): The Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Method: A Simple & Less-costly Alternative to the Finite Element and Boundary Element Methods. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, **3**, 11–51.
- [5] Atluri SN (2004): *The Meshless Method (MPLG) for Domain & BIE discretizations*. Tech Science Press.
- [6] Augarde CE, Deeks AJ (2003): On the effects of nodal distributions for imposition of essential boundary conditions in the MLPG meshfree method. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, **21**, 389–395.
- [7] Banerjee PK (1994): *The Boundary Element Methods in Engineering*. McGraw-Hill.
- [8] Bathe K-J (1996): *Finite Element Procedures*. Prentice Hall.
- [9] Beer G, Watson JO (1992): *Introduction to Finite and Boundary Element Methods for Engineers*. John Wiley & Sons.
- [10] Belytschko T, Krongauz Y, Fleming M, Organ D, Liu WK (1996): Smoothed and Accelerated Computations in the Element-free Galerkin Method. *Journal of Computational and Applied Mechanics*, **74**, 111–126.

-
- [11] Breitskopf P, Touzot G, Villon P (1998): Consistency approach and diffuse derivation in element free methods based on moving least squares approximation. *Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences*, **5**, 479–501.
- [12] Breitskopf P, Rassineux A, Touzot G, Villon P (2000): Explicit form and efficient computation of MLS shape functions and their derivatives. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **48**, 451–466.
- [13] Dongarra J, Lumsdaine A, Pozo R, Remington K (1994): A Sparse Matrix Library in C++ for High Performance Architectures. *Proceedings of the Second Object Oriented Numerics Conference*, 214–218.
- [14] Galassi M, Davies J, Theiler J, Gough B, Jungman G, Booth M, Rossi F (2005): *GNU Scientific Library; Reference Manual*. <http://www.gnu.org/software/gsl/>.
- [15] Gosz S, Liu WK (1996): Admissible approximations for essential boundary conditions in the reproducing kernel particle method. *Computational Mechanics*, **19**, 120–135.
- [16] Hardy RL (1971): Multiquadric equations of topography and other irregular surfaces. *Journal of Geophysical Research*, **76**, 1905–1915.
- [17] Lancaster P, Salkauskas K (1981): Surfaces generated by Moving Least Squares Methods. *Mathematics of Computations*, **37**, 141–158.
- [18] Liszka TJ, Duarte CAM, Tworzydło WW (1996): hp-Meshless cloud method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **139**, 263–288.
- [19] Liu GR, Gu YT (2001): A local point interpolation method for stress analysis of two-dimensional solids. *Structural Engineering and Mechanics*, **11**, 221–236.
- [20] Liu GR, Gu YT (2002): Comparison of two meshfree local point interpolation methods for structural analyses. *Computational Mechanics*, **29**, 107–121.
- [21] Liu GR (2003): *Mesh Free Methods*. CRC Press.
- [22] Sellountos EJ, Polyzos D (2003): A MLPG (LBIE) method for solving frequency domain elastic problems. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, **4**, 619–636.
- [23] Sellountos EJ, Vavourakis V, Polyzos D (2005): A new Singular/Hypersingular MLPG (LBIE) method for 2D elastostatics. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, **7**, 35–48.

- [24] Vavourakis V, Polyzos D (2006): A MLPG4(LBIE) formulation for solving axisymmetric problems. *Advances in Meshless Methods*, eds: Sladek J, Sladek V, Tech Science Press.
- [25] Vavourakis V, Sellountos EJ, Polyzos D (2006): A comparison study on different MLPG(LBIE) formulations. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, **13**, 171–184.
- [26] Vavourakis V, Polyzos D (2006): A MLPG4 (LBIE) formulation in elastostatics. *Computers, Materials & Continua*, (IN PRESS).
- [27] Vavourakis V, Polyzos D (2006): A MLPG(LBIE) numerical method for solving 2D incompressible and nearly incompressible elastostatic problems. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, (IN PRESS).
- [28] Wendland H (1995): Piecewise polynomial, positive definite and compactly supported radial basis functions of minimal degree. *Advances in Computational Mathematics*, **4**, 389–396.
- [29] Wendland H (1999): Meshless Galerkin methods using radial basis function. *Mathematics of Computations*, **68**, 1521–1531.
- [30] Wu Z (1995): Compactly supported positive definite radial functions. *Advances in Computational Mathematics*, **4**, 283–292.
- [31] Zhu T, Atluri SN (1998): A modified collocation method and a penalty formulation for enforcing the essential conditions in the element free Galerkin method. *Computational Mechanics*, **21**, 211–222.
- [32] Zhu T, Zhang J-D, Atluri SN (1998): A local boundary integral equation (LBIE) method in computational mechanics, and a meshless discretization approach. *Computational Mechanics*, **21**, 223–235.

Κεφάλαιο 4

Εφαρμογή και πιστοποίηση της Μεθόδου των Συνοριακών Στοιχείων και των Τοπικών Μεθόδων χωρίς Διακριτοποίηση

Σε αυτό το κεφάλαιο πρόκειται να γίνει η αριθμητική εφαρμογή των Μεθόδων των Συνοριακών Στοιχείων και των Τοπικών Μεθόδων χωρίς Διακριτοποίηση, καθώς και η πιστοποίηση της ποιότητας των αποτελεσμάτων που παράγουν. Τούτο θα πραγματοποιηθεί στα ακόλουθα εδάφια για απλά προβλήματα ελαστικών και ακουστικών σωμάτων στις δύο διαστάσεις. Στο πρώτο εδάφιο θα γίνει η παρουσίαση των αριθμητικών αποτελεσμάτων σε προβλήματα μόνιμης κατάστασης, ενώ στο δεύτερο εδάφιο θα επιλυθούν μερικά μεταβατικά προβλήματα δύο διαστάσεων της ακουστικής και της ελαστικότητας στο πεδίο συχνοτήτων. Στα προβλήματα που υπάρχει αναλυτική λύση θα παρατίθενται και θα αποτελεί μέτρο σύγκρισης για την εκτίμηση της ποιότητας των αποτελεσμάτων των αριθμητικών μεθόδων. Αντίθετα όταν δεν υπάρχει αναλυτική έκφραση που να περιγράφει το πεδίο ενός προβλήματος τότε θα γίνεται σύγκριση των αποτελεσμάτων των Τοπικών Μεθόδων χωρίς Διακριτοποίηση με αυτά της Μεθόδου των Συνοριακών Στοιχείων, προκειμένου να αναδειχθεί η επίτευξη σύγκλισής τους. Επίσης μερικά σχόλια σχετικά με τον υπολογιστικό χρόνο που απαιτούν για την υλοποίησή τους οι προτεινόμενες αριθμητικές μέθοδοι πρόκειται να γίνουν παρακάτω.

4.1 Προβλήματα μόνιμης κατάστασης

Η σύγκλιση και η ακρίβεια των αριθμητικών αποτελεσμάτων στα παρακάτω στατικά προβλήματα εξετάσθηκε μέσω του υπολογισμού της νόρμας του σχετικού σφάλματος. Έστω ότι το προς-ανάλυση πρόβλημα διακριτοποιείται με n_d πλήθος κόμβων. Η έκφραση που δίδει τη νόρμα του σχετικού σφάλματος ενός διανυσματικού πεδίου $\mathbf{v}$ είναι η εξής:

$$RelErr_{L_2} = \frac{1}{n_d} \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n_d} \|\mathbf{v}_{ex}^{(j)} - \mathbf{v}_{num}^{(j)}\|^2}{\sum_{j=1}^{n_d} \|\mathbf{v}_{ex}^{(j)}\|^2}}, \quad (4.1)$$

όπου $\mathbf{v}_{ex}^{(j)}$ η αναλυτική λύση και $\mathbf{v}_{num}^{(j)}$ η αριθμητικά υπολογισμένη λύση του διανυσματικού πεδίου στον j κόμβο. Στα διαγράμματα που θα ακολουθήσουν παρουσιάζεται ο λογάριθμος με βάση το δέκα ($\log_{10}(\cdot)$) της νόρμας του σχετικού σφάλματος. Όσο πιο χαμηλή είναι η τιμή της νόρμας τόσο μεγάλη είναι η ακρίβεια των αποτελεσμάτων, συγκρινόμενα πάντα με τις αναλυτικά δοσμένες λύσεις. Στην περίπτωση που η τιμή της νόρμας του σχετικού σφάλματος στη λογαριθμική κλίμακα είναι μεγαλύτερη του -0.5 τότε τα αριθμητικά αποτελέσματα θα θεωρούνται στο εξής ως «φτωχής» ποιότητας ενώ αντίστοιχα για θετικές τιμές της εν λόγω νόρμας θα θεωρείται ότι τα αποτελέσματα είναι μη αποδεκτά. Προφανώς η νόρμα της Εξ. (4.1) μπορεί να απλοποιηθεί αντίστοιχα για την περίπτωση βαθμωτού πεδίου.

Σχήμα 4.1: (α') Πρόβλημα 1, 2, (β') πρόβλημα 3 και (γ') πρόβλημα 4 που περιγράφονται από τη μερική διαφορική εξίσωση Laplace, (δ') πρόβλημα 5 που περιγράφεται από τη μερική διαφορική εξίσωση Poisson.

4.1.1 Αριθμητικά παραδείγματα σε ακουστικό μέσο

Πρόβλημα 1: Το πρώτο πρόβλημα που μελετάται είναι αυτό ενός τετραγωνικού χωρίου $1\text{ m} \times 1\text{ m}$ συνεχούς ισότροπου ακουστικού μέσου (βλ. Σχ. 4.1(α')) στο οποίο είναι καθορισμένες οι ουσιαστικές συνοριακές συνθήκες τύπου Dirichlet σύμφωνα με την Εξ. (4.2) παντού στο γενικό σύνορο του σώματος. Οι αναλυτικές λύσεις του πεδίου της πίεσης p και της βαθμίδας υπερπίεσης q δίδονται από τις εκφράσεις [12]

$$p(\mathbf{x}) = x_1 + x_2, \quad (4.2)$$

$$q(\mathbf{x}) = \begin{cases} -1, & x_2 = 0 \\ 1, & x_2 = 1\text{ m} \\ -1, & x_1 = 0 \\ 1, & x_1 = 1\text{ m} \end{cases}. \quad (4.3)$$

Σχήμα 4.2: Πλέγμα 89 ομοιόμορφα κατανεμημένων κόμβων στο τετράγωνο χωρίο με τοποθέτηση τους (α') στο σύνορο και στο εσωτερικό και (β') εντός και εκτός του χωρίου ανάλυσης.

Η αριθμητική επίλυση του εν λόγω προβλήματος μέσω της Μεθόδου των Συνοριακών Στοιχείων έγινε με διακριτοποίηση του συνόρου του σώματος με 2, 4 και 6 τρίκομβα τετραγωνικής-βάσης μονοδιάστατα στοιχεία ανά πλευρά του τετραγώνου (βλ. Σχ. 4.2(α')), με επιπλέον τοποθέτηση 9, 49 και 121 εσωτερικών σημείων στα αντίστοιχα πλέγματα. Από το παρακάτω σχήμα της διακριτοποιηθείσας γεωμετρίας παρατηρείται ότι τα συνοριακά στοιχεία –των οποίων το άκρο αποτελούσε γωνία/α/συνέχεια του συνόρου– θεωρήθηκαν μερικώς ασυνεχή, δικαιολογώντας έτσι την ελαφριά μετατόπιση των κόμβων των στοιχείων από τις γωνίες του τετραγώνου.

Για την επίλυση του προβλήματος με τις Τοπικές Μεθόδους χωρίς Διακριτοποίηση θεωρήθηκαν δύο τρόποι διακριτοποίησης: (α') τοποθέτηση κόμβων στο σύνορο και στο εσωτερικό του χωρίου (βλ. Σχ. 4.2(α')) και (β') τοποθέτηση κόμβων στο

Σχήμα 4.3: Νόρμα σχετικού σφάλματος της πίεσης στο πρόβλημα 1, υπολογισμένη για τα τρία διαφορετικά πλέγματα και συγκρινόμενη για διάφορες αριθμητικές μεθόδους.

εσωτερικό και στο εξωτερικό του χωρίου ανάλυσης (βλ. Σχ. 4.2(β')). Οι διαφορές στα πλέγματα, όπως φαίνεται στο Σχ. 4.2, είναι εμφανείς. Αφορμή για την αφαίρεση των συνοριακών σημείων είναι η αποφυγή του υπολογισμού των ιδιόμορφων επιφανειακών ολοκληρωμάτων στις Μεθόδους Τοπικών Ολοκληρωτικών Εξισώσεων χωρίς Διακριτοποίηση. Βέβαια αυτή η τεχνική δεν έχει αντίκρισμα στις Τοπικές Μεθόδους Petrov-Galerkin χωρίς Διακριτοποίηση διότι οι ολοκληρωταίοι πυρήνες είναι πάντα ομαλοί, αλλά και στις ΜΤΟΕχΔ2, 3 όπου η εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών δεν γίνεται με εισαγωγή τους στα επιφανειακά ολοκληρώματα αλλά στις επικόμβιες τιμές. Η πρόσθεση εξωτερικών σημείων στο υπό-ανάλυση χωρίο δεν είναι απαραίτητη, αρκεί το μέγεθος των κύκλων επιρροής των κόμβων να είναι τέτοιο ώστε κατά τη διάρκεια υλοποίησης των ολοκληρώσεων στο τμήμα του γενικού συνόρου $\Gamma_{(\kappa)}$ να είναι ικανή η υλοποίηση της προσέγγισης ή παρεμβολής (βλ. Υποεδάφ. Α.2.1). Μετά από σειρά πειραμάτων παρατηρήθηκε ότι η ανάγκη επιλογής μεγάλων κύκλων επιρροής οδηγούσε σε μεγένθυση του αριθμητικού σφάλματος των αποτελεσμάτων. Σε αυτό θα μπορούσε κάποιος να προτείνει δύο λύσεις: (α') να τοποθετήσει εσωτερικά σημεία κοντά στο γενικό σύνορο Γ , στη θέση τρόπον τινά των αντίστοιχων συνοριακών σημείων και (β') σημεία έξω από το υπό-ανάλυση χωρίο και σχετικά κοντά σε αυτό. Όπως όμως σχολιάζεται αναλυτικά στο Υποεδάφ. Α.2.1 του Παραρτήματος, η τοποθέτηση κόμβων πολύ κοντά στο γενικό σύνορο καθιστά στη ΜΣΣ και στη ΜΤΟΕχΔ επιτακτική ανάγκη τον προσεκτικό αριθμητικό υπολογισμό των σχεδόν ιδιόμορφων επιφανειακών ολοκληρωμάτων που προκύπτουν [3]. Παρολα αυτά έγινε διερεύνηση της ακρίβειας των αποτελεσμάτων και στις δύο τεχνικές από όπου παρατηρήθηκε ότι η δεύτερη υπερτερεί σημαντικά για τρεις λόγους: (α') ο υπολογισμός των επιφανειακών ολοκληρωμάτων στο $\Gamma_{(\kappa)}$ ήταν ταχύς διότι για

μικρό αριθμό σημείων ολοκλήρωσης τα ολοκληρώματα συνέκλιναν, (β') η τεχνική τοποθέτησης διάσπαρτων σημείων εντός και εκτός του χώρου ανάλυσης απλοποιεί τους αλγόριθμους διακριτοποίησης, ισχυροποιώντας έτσι το επιχείρημα ανάπτυξης των Τοπικών Μεθόδων χωρίς Διακριτοποίηση σε σύγκριση με τις άλλες «κλασικές» αριθμητικές μεθόδους και (γ') τα αποτελέσματα παρουσίαζαν σημαντική βελτίωση. Τα τρία πλέγματα διακριτοποίησης του τετραγώνου για ανάλυση με τις Τοπικές Μεθόδους χωρίς Διακριτοποίηση ήταν πυκνότητας 29, 85 και 173 συνοριακών και εσωτερικών σημείων ή 33, 89 και 177 εσωτερικών και εξωτερικών σημείων.

Σχήμα 4.4: Νόρμα σχετικού σφάλματος της πίεσης στο πρόβλημα 2, υπολογισμένη για τα τρία διαφορετικά πλέγματα και συγκρινόμενη για διάφορες αριθμητικές μεθόδους.

Λόγω του ότι το πεδίο της πίεσης στην Εξ. (4.2) είναι γραμμικό, γραμμική πολυωνυμική βάση είναι αρκετή (βλ. Εξ. (3.3α')) για την προσέγγιση του άγνωστου πεδίου μέσω της Μεθόδου Κινουμένων Ελαχίστων Τετραγώνων, όπου συνάρτηση βάρους επιλέχθηκε να είναι η spline τετάρτου βαθμού (βλ. Εξ. (Γ.4)) επειδή είναι ανεξάρτητη από συντελεστές. Επίσης ο κύκλος ολοκλήρωσης τέθηκε ίσος με τον κύκλο επιρροής και ίδιος για όλους τους κόμβους, όπου για την περίπτωση διακριτοποίησης με τοποθέτηση συνοριακών και εσωτερικών κόμβων η ακτίνα ήταν ίση με $1.5 \times \delta$, ενώ για την περίπτωση τοποθέτησης κόμβων εντός και εκτός του χωρίου η ακτίνα ήταν ίση με $1.7 \times \delta$, με δ να είναι η ελάχιστη Ευκλείδεια απόσταση δύο διαδοχικών κόμβων.

Στο Σχ. 4.3 παρουσιάζεται η νόρμα σχετικού σφάλματος της πίεσης p υπολογισμένη για τις τρεις διαφορετικές κατανομές κόμβων ή/και συνοριακών στοιχείων για τις διάφορες αριθμητικές μεθόδους που υλοποιήθηκαν. Όπως παρατηρείται από το σχήμα αυτό καθώς πυκνώνει η διάταξη της κανάβου σε στοιχεία ή/και σε κόμβους επιτυγχάνεται σύγκλιση, μιας και η νόρμα σε λογαριθμική κλίμακα μειώνεται. Η συμφωνία των αριθμητικών αποτελεσμάτων σε σύγκριση με την αναλυτική λύση

δείχνει να είναι εξαιρετική ακόμα και για την περίπτωση του πιο αραιού πλέγματος.

Πρόβλημα 2: Το δεύτερο πρόβλημα είναι μία παραλλαγή του προηγούμενου με καθορισμένες τις ουσιαστικές συνοριακές συνθήκες σε όλες τις πλευρές του τετραγωνικού χωρίου (βλ. Σχ. 4.1(α')). Το βαθμωτό πεδίο της πίεσης είναι δευτέρου βαθμού πολυώνυμο και το πεδίο της βαθμίδας υπερπίεσης να είναι γραμμική συνάρτηση, με τις αναλυτικές λύσεις να είναι οι ακόλουθες [6]

$$p(\mathbf{x}) = x_1 x_2, \quad (4.4)$$

$$q(\mathbf{x}) = \begin{cases} -x_1, & x_2 = 0 \\ x_1, & x_2 = 1 \text{ m} \\ -x_2, & x_1 = 0 \\ x_2, & x_1 = 1 \text{ m} \end{cases}. \quad (4.5)$$

Για την αριθμητική επίλυση του προβλήματος αυτού χρησιμοποιήθηκαν τα ίδια ακριβώς πλέγματα συνοριακών στοιχείων ή/και κόμβων με αυτά του προηγούμενου προβλήματος. Η μόνη διαφορά ήταν ότι χρησιμοποιήθηκε τετραγωνική βάση πολυωνυμικής προσέγγισης για τις Τοπικές Μεθόδους χωρίς Διακριτοποίηση (βλ. Εξ. (3.3β')). Όμοια με πριν, ο κύκλος ολοκλήρωσης τέθηκε ίσος με τον κύκλο επιρροής και ίδιος για όλους τους κόμβους, όπου για την περίπτωση διακριτοποίησης με τοποθέτηση συνοριακών και εσωτερικών κόμβων η ακτίνα ήταν ίση με $2.5 \times \delta$ ενώ για την περίπτωση τοποθέτησης κόμβων εντός και εκτός του χωρίου η ακτίνα ήταν ίση με $2.7 \times \delta$.

Στο Σχ. 4.4 παρουσιάζεται η νόρμα σχετικού σφάλματος της πίεσης υπολογισμένη για τα τρία διαφορετικά πλέγματα κόμβων ή/και συνοριακών στοιχείων για τις διάφορες αριθμητικές μεθόδους που υλοποιήθηκαν. Είναι εμφανής στο σχήμα αυτό η σύγκλιση των αποτελεσμάτων που επιτυγχάνεται καθώς η κάναβος πυκνώνει. Ένα επιπλέον στοιχείο που μπορεί κάποιος να παρατηρήσει σε συνδυασμό με το προηγούμενο Σχ. 4.3 είναι ότι η TMPGχΔ5 επιδεικνύει μεγάλη ακρίβεια υπολογισμού του πεδίου της πίεσης σε σύγκριση με τις άλλες αριθμητικές μεθόδους.

Πρόβλημα 3: Έστω τετραγωνικό χωρίο ακουστικού μέσου (βλ. Σχ. 4.1(β')) που περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση του Laplace, όπου είναι καθορισμένες συνοριακές συνθήκες τύπου Dirichlet στα άκρα $x_1 = 1 \text{ m}$, $x_2 = 1 \text{ m}$ με βάση την Εξ. (4.6) και μηδενικές συνοριακές συνθήκες τύπου Neumann στα άκρα $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. Οι αναλυτικές λύσεις που περιγράφουν πλήρως το πρόβλημα οι εξής [6]

$$p(\mathbf{x}) = x_1^2 - x_2^2, \quad (4.6)$$

$$q(\mathbf{x}) = \begin{cases} 2, & x_1 = 1 \text{ m} \\ -2, & x_2 = 1 \text{ m} \end{cases}. \quad (4.7)$$

Η αριθμητική επίλυση του προβλήματος αυτού έγινε με διακριτοποίηση του τετραγωνικού χωρίου όμοια με αυτή των προβλημάτων 1 και 2. Επίσης έγινε χρήση

Σχήμα 4.5: Νόρμα σχετικού σφάλματος της πίεσης στο πρόβλημα 3, υπολογισμένη για τα τρία διαφορετικά πλέγματα και συγκρινόμενη για διάφορες αριθμητικές μεθόδους.

τετραγωνικής πολυωνυμικής βάσης για τη Μέθοδο Κινουμένων Ελαχίστων Τετραγώνων των Τοπικών Μεθόδων χωρίς Διακριτοποίηση, όπου η ακτίνα του κύκλου ολοκλήρωσης ήταν ίση με την ακτίνα επιρροής και όμοια για όλους του κόμβους. Η ακτίνα επιλέχθηκε να είναι ίση με $2.5 \times \delta$ για την περίπτωση τοποθέτησης συνοριακών και εσωτερικών κόμβων, ενώ ίση με $2.7 \times \delta$ στην περίπτωση διακριτοποίησης χωρίς την τοποθέτηση κόμβων στο σύνορο του σώματος.

Η παρουσίαση των αριθμητικών αποτελεσμάτων σύγκλισης των διαφόρων αριθμητικών μεθόδων γίνεται στο Σχ. 4.5. Στο σχήμα αυτό αναπαριστάται η μεταβολή της νόρμας του σχετικού σφάλματος του μεγέθους της πίεσης για τρία διαφορετικά πλέγματα και με εφαρμογή των αριθμητικών μεθόδων που πραγματεύονται στο παρόν σύγγραμμα. Από το σχήμα μπορεί κάποιος να πει ότι το πρόβλημα αυτό επιλύθηκε με επιτυχία ενώ παράλληλα η σύγκλιση των αποτελεσμάτων είναι εμφανής. Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι η απόκλιση των αριθμητικών αποτελεσμάτων από την αντίστοιχη αναλυτική λύση πλησιάζει σε ορισμένες περιπτώσεις την ακρίβεια μηχανής του Η/Υ. Το ενδιαφέρον στοιχείο είναι ότι οι τάσεις μεταβολής της νόρμας του σχετικού σφάλματος του Σχ. 4.5 σε σύγκριση με αυτή του Σχ. 4.3 φαίνεται να είναι σχεδόν ίδια.

Πρόβλημα 4: Η μερική διαφορική εξίσωση που περιγράφει τη μετάδοση θερμότητας σε ένα ομογενές, ισότροπο συνεχές μέσο είναι αυτή της Εξ. (2.34) [7]. Έστω κυλινδρικής γεωμετρίας σώμα, εσωτερικής ακτίνας $r_i = 0.5 \text{ m}$ και εξωτερικής ακτίνας $r_e = 1 \text{ m}$, στο οποίο η θερμοκρασία στην εσωτερική κύλη επιφάνεια είναι $\theta_i = 100 \text{ K}$ και $\theta_e = 25 \text{ K}$ η αντίστοιχη θερμοκρασία στο εξωτερικό του. Η αναλυτική έκφραση που δίνει την θερμοκρασιακή του κατανομή –όταν οι πεδιακές πηγές θεωρηθούν αμελητέες ($g = 0$)– είναι η ακόλουθη [5]

$$\vartheta(r) = \vartheta_i + (\vartheta_e - \vartheta_i) \frac{\ln(r/r_i)}{\ln(r_e/r_i)}. \quad (4.8)$$

Σχήμα 4.6: Πλέγμα ενός τεταρτημορίου του κυλίνδρου με κατανομή 176 κόμβων (α') στο σύνορο και στο εσωτερικό του καθώς και (β') στο εσωτερικό και εξωτερικό του χωρίου ανάλυσης.

Δεδομένης της γεωμετρικής συμμετρίας, διακριτοποιήθηκε μονάχα το άνω δεξί τμήμα του κυλίνδρου, όπως φαίνεται στο Σχ. 4.6, με συνθήκες συμμετρίας $\frac{\partial \vartheta}{\partial n} = 0$ να έχουν επιβληθεί στα δύο ευθύγραμμα τμήματα των τομών. Για την επίλυση του προβλήματος μέσω της Μεθόδου των Συνοριακών Στοιχείων τοποθετήθηκαν 13, 27 και 40 τρίκομβοι τετραγωνικής-βάσης στοιχεία ευθείας, με τα στοιχεία των οποίων τα άκρα είναι στις γωνίες να παρουσιάζουν μερική ασυνέχεια. Επίσης τοποθετήθηκαν στα αντίστοιχα πλέγματα 22, 154, 341 εσωτερικοί κόμβοι για τον υπολογισμό του θερμοκρασιακού πεδίου στη μετεπεξεργασία των αποτελεσμάτων. Στις Τοπικές Μεθόδους χωρίς Διακριτοποίηση το τέταρτο του κυλίνδρου διακριτοποιήθηκε με 52, 176 και 373 συνοριακούς και εσωτερικούς κόμβους, όπως φαίνεται στο Σχ. 4.6(α'), καθώς και με τοποθέτηση του ίδιου αριθμού κόμβων εσωτερικά και εξωτερικά του χωρίου, όπως φαίνεται στο Σχ. 4.6(β').

Στο Σχ. 4.7 παρουσιάζεται η σύγκλιση του προβλήματος μετάδοσης θερμότητας μέσω του υπολογισμού της νόρμας σχετικού σφάλματος της θερμοκρασίας για τρεις πυκνότητες κατανομής κόμβων. Από το σχήμα αυτό μπορεί να εξαχθεί με ασφάλεια το συμπέρασμα ότι το πρόβλημα μετάδοσης θερμότητας σε κυλινδρικό μέσο επιλύθηκε σωστά, αφού τόσο η σύγκλιση των αριθμητικών αποτελεσμάτων –χάνοντας χρήση των διαφόρων μεθοδολογιών– είναι εμφανής καθώς πυκνώνει το πλέγμα σε στοιχεία ή/και σε κόμβους, όσο και το μέγεθος της ακρίβειας των αποτελεσμάτων είναι αρκετά ικανοποιητικό.

Πρόβλημα 5: Έστω η τετραγωνική γεωμετρία του Σχ. 4.1(δ') ενός ακουστικού μέσου που περιγράφεται από τη μερική διαφορική Εξ. (2.34) τύπου Poisson, όπου η πεδιακή πηγή ισούται με $g = -2(c_1 + c_2)$ [4]. Οι συνοριακές συνθήκες είναι

Σχήμα 4.7: Νόρμα σχετικού σφάλματος της θερμοκρασίας στο πρόβλημα 4, υπολογισμένη για τα τρία διαφορετικά πλέγματα και συγκρινόμενη για διάφορες αριθμητικές μεθόδους.

τύπου Dirichlet σε όλο το σύνορο του σώματος και δίδονται από την ακόλουθη σχέση

$$p(\mathbf{x}) = c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 + c_3 x_1 x_2, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (4.9)$$

όπου c_α είναι σταθερές, με την Εξ. (4.9) να αποτελεί συνάμα την αναλυτική λύση του πεδίου της πίεσης για οποιοδήποτε εσωτερικό σημείο του χωρίου.

Το τετράγωνο χωρίο διακριτοποιήθηκε με τον ίδιο τρόπο, όπως αυτός περιγράφεται για το πρόβλημα 1, με τοποθέτηση συνοριακών στοιχείων σε συνδυασμό με εσωτερικούς κόμβους για τη ΜΣΣ και εσωτερικών, συνοριακών κόμβων για τις μεθόδους χωρίς διακριτοποίηση. Επίσης έγινε χρήση τετραγωνικής πολυωνυμικής βάσης για τη Μέθοδο Κινουμένων Ελαχίστων Τετραγώνων με ακτίνα επιρροής ίση με $2.5 \times \delta$. Οι κύκλοι επιρροής και οι κύκλοι ολοκλήρωσης θεωρήθηκαν ίσοι και ίδιοι για όλους τους ομοιόμορφα διεσπαρμένους κόμβους.

Στο Σχ. 4.8 παρουσιάζονται οι νόρμες του σχετικού σφάλματος της πίεσης σε λογαριθμική κλίμακα για τα τρία παραπάνω πλέγματα συνοριακών και εσωτερικών σημείων για οχτώ αριθμητικές μεθολογίες. Όπως φαίνεται από το σχήμα αυτό είναι εμφανής η σύγκλιση των αποτελεσμάτων καθώς γίνεται πιο πυκνό το πλέγμα των συνοριακών και εσωτερικών σημείων, ενώ παράλληλα παρατηρείται η Μέθοδος Συνοριακών Στοιχείων και οι Τοπικές Μέθοδοι χωρίς Διακριτοποίηση να δίνουν παρόμοιας ακρίβειας αποτελέσματα.

Σχήμα 4.8: Νόρμα σχετικού σφάλματος της πίεσης στο πρόβλημα που περιγράφεται από τη μερική διαφορική εξίσωση Poisson, υπολογισμένη για τα τρία διαφορετικά πλέγματα και συγκρινόμενη για διάφορες αριθμητικές μεθόδους.

4.1.2 Αριθμητικά παραδείγματα σε ελαστικό μέσο

Πρόβλημα 1: Το πρώτο αριθμητικό παράδειγμα στη γραμμική ελαστικότητα είναι αυτό ενός τετραγώνου $1\text{ m} \times 1\text{ m}$ με καθορισμένες συνοριακές συνθήκες τύπου Dirichlet σε όλο του το σύνορο (βλ. Σχ. 4.9(α')). Το πεδίο των μετατοπίσεων ενός υλικού σημείου $\forall \mathbf{x} \in \Gamma$ καθορίζεται από τη γραμμική συνάρτηση [1, 2]

$$u_1(\mathbf{x}) = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}, \quad (4.10)$$

$$u_2(\mathbf{x}) = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}, \quad (4.11)$$

όπου $c_{\alpha\beta}$ είναι σταθερές. Η παραπάνω έκφραση αποτελεί και την αναλυτική λύση στο εσωτερικό του σώματος.

Το τετραγωνικό χωρίο διακριτοποιήθηκε με τον ίδιο ακριβώς τρόπο με αυτόν του πρώτου προβλήματος ακουστικού μέσου σε μόνιμη κατάσταση (βλ. Σχ. 4.2).

Λόγω του ότι το πεδίο των μετατοπίσεων είναι πολυωνυμική συνάρτηση πρώτου βαθμού των χωρικών συντεταγμένων του σημείου $\mathbf{x}$, η επιλογή γραμμικής πολυωνυμικής βάσης για την προσέγγιση του πεδίου μέσω της Μεθόδου Κινουμένων Ελαχίστων Τετραγώνων κρίθηκε ικανοποιητική. Επίσης η συνάρτηση spline τετάρτου βαθμού χρησιμοποιήθηκε ως συνάρτηση βάρους στην προαναφερθείσα κατά προσέγγιση μέθοδο. Για τις μεθόδους χωρίς διακριτοποίηση επιλέχθηκε ο κύκλος ολοκλήρωσης να είναι ίδιος με τον κύκλο επιρροής, ακτίνας ίσης με $1.5 \times \delta$ στην περίπτωση των πλεγμάτων όπου δεν λαμβάνονται υπόψη οι εξωτερικοί κόμβοι στην ανάλυση του προβλήματος και $1.7 \times \delta$ όταν λαμβάνονται υπόψη στην ανάλυση οι εξωτερικοί κόμβοι και απορρίπτονται οι αντίστοιχοι συνοριακοί.

Σχήμα 4.9: (α') Πρόβλημα 1, (β') πρόβλημα 2, (γ') πρόβλημα 3, (δ') πρόβλημα 4 κυλίνδρου υπό εσωτερική πίεση, (ε') πρόβλημα 5 πακτωμένης δοκού και (ς') πρόβλημα 6 διάτρητης πλάκας υπό εφελκυσμό.

Τα αποτελέσματα υπολογισμού της νόρμας του σχετικού σφάλματος των μετατοπίσεων για διάφορες αριθμητικές μεθοδολογίες σε τρεις διαφορετικές πυκνώσεις στοιχείων ή/και κόμβων φαίνονται στο Σχ. 4.10. Από το σχήμα αυτό παρατηρείται η υψηλή ακρίβεια των αριθμητικών αποτελεσμάτων, ανεξάρτητα της αριθμητικής μεθόδου που χρησιμοποιείται, γεγονός που οδηγεί σε ασφαλές συμπέρασμα ότι το πρόβλημα έχει λυθεί αρκετά ικανοποιητικά.

Σχήμα 4.10: Νόρμα σχετικού σφάλματος των μετατοπίσεων στο πρόβλημα 1, υπολογισμένη για τα τρία διαφορετικά πλέγματα και συγκρινόμενη για διάφορες αριθμητικές μεθόδους.

Πρόβλημα 2: Έστω τετραγωνική πλάκα υπό επίπεδη εντατική κατάσταση, φορτιζόμενη μονοαξονικά στη x_2 -διεύθυνση με ομοιόμορφα κατανεμημένη τάση μεγέθους $\tau = 10\text{MPa}$. Η αναλυτική έκφραση του πεδίου των μετατοπίσεων δίδεται από τη σχέση [9]

$$u_1(\mathbf{x}) = -\frac{n}{1+n} \frac{x_1}{e} \tau, \quad (4.12)$$

$$u_2(\mathbf{x}) = (1-n^2) \frac{x_2}{e} \tau, \quad (4.13)$$

όπου $n = \nu/(1+\nu)$, $e = E(1+2\nu)/(1+\nu)^2$. Οι ιδιότητες της μεταλλικής πλάκας είναι $E = 200\text{GPa}$ μέτρο ελαστικότητας του Young και $\nu = 0.29$ ο λόγος του Poisson. Λόγω συμμετρίας ως προς τη γεωμετρία και τις συνοριακές συνθήκες, διακριτοποιήθηκε μονάχα το ένα τέταρτο της πλάκας (βλ. Σχ. 4.9(β')) και επιβλήθηκαν στο αριστερό ($\bar{u}_1 = 0$, $\bar{t}_2 = 0$) και στο κάτω άκρο αυτής ($\bar{t}_1 = 0$, $\bar{u}_2 = 0$) συνθήκες συμμετρίας.

Η τετραγωνική γεωμετρία του σώματος διακριτοποιήθηκε με τον ίδιο τρόπο με αυτόν του προηγούμενου προβλήματος ελαστικότητας, καθώς και η επιλογή τόσο

του βαθμού της πολυωνυμικής προσέγγισης μέσω της Μεθόδου Κινουμένων Ελαχίστων Τετραγώνων όσο και η ακτίνα των κύκλων επιρροής και κύκλων ολοκλήρωσης ήταν η ίδια.

Σχήμα 4.11: Νόρμα σχετικού σφάλματος των μετατοπίσεων στο πρόβλημα 2, υπολογισμένη για τα τρία διαφορετικά πλέγματα και συγκρινόμενη για διάφορες αριθμητικές μεθόδους.

Στο Σχ. 4.11 παρουσιάζεται η νόρμα του σχετικού σφάλματος των μετατοπίσεων σε συνάρτηση με τις τρεις διαφορετικές πυκνότητες του πλέγματος διακριτοποίησης, με παράλληλη συσχέτιση των αποτελεσμάτων για διάφορες αριθμητικές μεθοδολογίες. Παρατηρώντας το Σχ. 4.11 φαίνεται η πλήρης σχεδόν ταύτιση της ακρίβειας των αποτελεσμάτων για τις περισσότερες μεθοδολογίες εκτός της ΜΤΟΕΧΔ1, που δείχνει να διαφοροποιείται σχετικά με τις άλλες.

Πρόβλημα 3: Το τρίτο πρόβλημα, όπως φαίνεται στο Σχ. 4.9(γ'), αφορά ένα ελαστικό σώμα στο οποίο επιβάλεται τριγωνικό φορτίο στο δεξί άκρο –μέγιστου πλάτους $\tau = 10\text{MPa}$ – ενώ στο κάτω άκρο είναι καθορισμένες οι ουσιαστικές συνοριακές συνθήκες στην x_2 -διεύθυνση με βάση την Εξ. (4.15). Οι αναλυτικές λύσεις του εν λόγω προβλήματος είναι οι εξής [2, 10]

$$u_1(\mathbf{x}) = \frac{x_1 x_2}{e} \tau, \quad (4.14)$$

$$u_2(\mathbf{x}) = \frac{(x_1^2 + n x_2^2)}{2e} \tau, \quad (4.15)$$

όπου $n = \nu$, $e = E$ για επίπεδη εντατική κατάσταση και $n = \nu/(1 - \nu)$, $e = E/(1 - \nu^2)$ για επίπεδη παραμορφωσιακή κατάσταση. Οι ελαστικές σταθερές θεωρήθηκαν οι ίδιες με αυτές του προηγούμενου προβλήματος 2. Το παρόν πρόβλημα ελαστικότητας

του διδιάστατου σώματος σε ισορροπία επιλύθηκε για την περίπτωση της επίπεδης εντατικής κατάστασης.

Η τετραγωνική γεωμετρία του σώματος διακριτοποιήθηκε όμοια με το δεύτερο πρόβλημα, επίσης έγινε χρήση τετραγωνικής πολυωνυμικής βάσης για τη σωστή επίτευξη της προσέγγισης μέσω της Μεθόδου Κινουμένων Ελαχίστων Τετραγώνων για τις μεθόδους χωρίς διακριτοποίηση, όπου για το σύνολο των κόμβων η ακτίνα του κύκλου ολοκλήρωσης ήταν ίση με την ακτίνα επιρροής. Η ακτίνα επιλέχθηκε να είναι ίση με $2.5 \times \delta$ για την περίπτωση τοποθέτησης συνοριακών, εσωτερικών κόμβων και $2.7 \times \delta$ όταν κατανεμήθηκαν κόμβοι εντός και εκτός του χωρίς αντίστοιχα.

Σχήμα 4.12: Νόρμα σχετικού σφάλματος των μετατοπίσεων στο πρόβλημα 3, υπολογισμένη για τα τρία διαφορετικά πλέγματα και συγκρινόμενη για διάφορες αριθμητικές μεθόδους.

Η νόρμα του σχετικού σφάλματος των μετατοπίσεων για το πρόβλημα της επίπεδης πλάκας σε επίπεδη εντατική κατάσταση υποβαλλόμενη σε τριγωνικό φορτίο, ως συνάρτηση της πυκνότητας του πλέγματος των στοιχείων ή/και των κόμβων παρουσιάζεται στο συγκριτικό διάγραμμα του Σχ. 4.12. Από το σχήμα αυτό παρατηρείται πρώτα ότι όλες οι αριθμητικές μέθοδοι καταφέρνουν να συγκλίνουν καθώς πυκνώνει η κάναβος. Επίσης παρατηρείται ότι σε αυτό το πρόβλημα ελαστικότητας η ΜΤΟΕχΔ4 καταφέρνει την υψηλότερη ακρίβεια στα αριθμητικά αποτελέσματα σε σύγκριση με τις υπόλοιπες.

Πρόβλημα 4: Έστω κύλινδρος εσωτερικής και εξωτερικής ακτίνας $r_i = 0.05 \text{ m}$, $r_e = 0.07 \text{ m}$ αντίστοιχα, υποβαλλόμενος σε ομοιόμορφη εσωτερική πίεση μεγέθους $p_i = 5 \text{ MPa}$ υπό επίπεδη παραμορφωσιακή κατάσταση (βλ. Σχ. 4.9(δ')), με ελαστικές σταθερές: $E = 200 \text{ GPa}$ και $\nu = 0.29$. Τούτο το πρόβλημα είναι γνωστό στη διεθνή βιβλιογραφία ως πρόβλημα του Lamè. Οι αναλυτικές εκφράσεις των ακτινικών μετατοπίσεων, των ακτινικών και γωνιακών τάσεων είναι οι ακόλουθες [8]

$$u_r(\mathbf{x}) = \frac{p_i(1+\nu)}{E(r_e^2 - r_i^2)} \left[(1-2\nu)r_i^2 r + \frac{r_i^2 r_e^2}{r} \right], \quad (4.16)$$

$$\sigma_{rr}(\mathbf{x}) = \frac{p_i}{(r_e^2 - r_i^2)} \left(r_i^2 - \frac{r_i^2 r_e^2}{r^2} \right), \quad (4.17)$$

$$\sigma_{\theta\theta}(\mathbf{x}) = \frac{p_i}{(r_e^2 - r_i^2)} \left(r_i^2 + \frac{r_i^2 r_e^2}{r^2} \right), \quad (4.18)$$

όπου r η θέση του σημείου $\mathbf{x}$ σε πολικές συντεταγμένες ως προς το κέντρο του κυλίνδρου.

Σχήμα 4.13: Νόρμα σχετικού σφάλματος των μετατοπίσεων στο πρόβλημα του κυλίνδρου υπό ομοιόμορφη εσωτερική πίεση, υπολογισμένη για τα τρία διαφορετικά πλέγματα και συγκρινόμενη για διάφορες αριθμητικές μεθόδους.

Λόγω της γεωμετρικής συμμετρίας διακριτοποιήθηκε μονάχα το άνω δεξί τέταρτο της τομής του κυλίνδρου, ακολουθώντας το ίδιο πρότυπο διακριτοποίησης του συνόρου και του εσωτερικού του χωρίου όπως στο Σχ. 4.6. Στη ΜΣΣ χρησιμοποιήθηκαν 23, 46 και 69 τρίκομβα τετραγωνικής-βάσης μονοδιάστατα συνοριακά στοιχεία για τη διακριτοποίηση του συνόρου και 50, 250 και 600 εσωτερικά σημεία για τον υπολογισμό των αντίστοιχων πεδίων στη μετεπεξεργασία των αποτελεσμάτων. Για τις μεθόδους χωρίς διακριτοποίηση –όμοια με τα προηγούμενα προβλήματα– χρησιμοποιήθηκε το ίδιο πλέγμα συνοριακών και εσωτερικών σημείων για την ανάλυση του προβλήματος Lamè, καθώς και διασπορά 100, 346 και 742 εσωτερικών και εξωτερικών σημείων αντίστοιχα. Επίσης έγινε χρήση τετραγωνικής πολυωνυμικής βάσης για τη προσέγγιση του άγνωστου πεδίου μέσω της Μεθόδου Κινουμένων Ελαχίστων Τετραγώνων. Παρόλο που σε αυτή τη διακριτοποιημένη γεωμετρία η

κατανομή των σημείων-κόμβων δεν είναι ακριβώς ομοιόμορφη, ίδιοι κύκλοι ολοκλήρωσης και επιρροής τέθηκαν για όλους του κόμβους. Η ακτίνα τους ισοδυναμούσε περίπου με $2.5 \times \delta$ όταν χρησιμοποιήθηκαν συνοριακοί και εσωτερικοί κόμβοι, ενώ τέθηκε ίση με $2.7 \times \delta$ για την περίπτωση που τοποθετήθηκαν μονάχα εσωτερικοί και εξωτερικοί κόμβοι για τη διακριτοποίηση της γεωμετρίας.

Στο διάγραμμα του Σχ. 4.13 παρουσιάζεται η νόρμα του σχετικού σφάλματος των μετατοπίσεων όλων των κόμβων του πλέγματος ως προς τις τρεις πυκνότητες και για διάφορες αριθμητικές μεθόδους υλοποίησης. Για όλες τις μεθόδους παρατηρείται ότι επιτυγχάνεται σύγκλιση των αποτελεσμάτων, εκτός της ΜΤΟΕχΔ4 (συνεχείς γραμμές) όπου κατά ένα περίεργο λόγο η ποιότητα των αποτελεσμάτων δείχνει να φθίνει. Όπως θα γίνει φανερό παρακάτω, τούτο πιθανώς να οφείλεται στην επιλογή του μεγέθους της ακτίνας ολοκλήρωσης ή/και της ακτίνας επιρροής. Αντίθετα όμως η ίδια μέθοδος –στην περίπτωση όπου στο πλέγμα δεν λαμβάνονται υπόψη οι συνοριακοί κόμβοι (διακεκομμένες γραμμές στο Σχ. 4.13)– τα αποτελέσματα δείχνουν να συγκλίνουν ομαλά.

Σχήμα 4.14: Ομοιόμορφη κατανομή (α') 223 και (β') 225 κόμβων στη γεωμετρία της πακτωμένης δοκού.

Πρόβλημα 5: Ένα από τα κλασικά προβλήματα ελαστικότητας στις δύο διαστάσεις που επιλύονται για την επαλήθευση των αποτελεσμάτων σε αριθμητικές μεθόδους είναι αυτό της πακτωμένης δοκού (βλ. Σχ. 4.9(ε')). Στο παράδειγμα αυτό η δοκός έχει ορθογωνική διατομή πάχους $D = 0.2\text{ m}$ και μήκος $L = 1\text{ m}$ · στην οποία επιβάλεται παραβολικό διατμητικό φορτίο στο δεξί ελεύθερο άκρο σύμφωνα με την έκφραση της Εξ. (4.23), με μέγιστο πλάτος $\tau = 10\text{ MPa}$. Επίσης οι ελαστικές σταθερές παραμένουν ίδιες με αυτές του προβλήματος του Lamè. Οι αναλυτικές λύσεις των μετατοπίσεων και των τάσεων είναι οι εξής [11]

$$u_1 = -\frac{\tau}{6EI} \left[(6Lx_1 - 3x_1^2) + (2 + \nu)(x_2^2 - \frac{D^2}{4}) \right], \quad (4.19)$$

$$u_2 = \frac{\tau}{6EI} \left[3\nu(L - x_1)x_2^2 + (4 + 5\nu)\frac{D}{4}x_1 + (3L - x_1)x_1^2 \right], \quad (4.20)$$

$$\sigma_{11} = \frac{\tau}{I} (L - x_1), \quad (4.21)$$

$$\sigma_{22} = 0, \quad (4.22)$$

$$\sigma_{12} = \frac{\tau}{2I} \left(\frac{D^2}{4} - x_2^2 \right), \quad (4.23)$$

όπου $I = D^3/12$ η δευτεροβάθμια ροπή αδράνειας.

Σχήμα 4.15: Νόρμα σχετικού σφάλματος των μετατοπίσεων στο πρόβλημα της πακτωμένης δοκού, υπολογισμένη για τα τρία διαφορετικά πλέγματα και συγκρινόμενη για διάφορες αριθμητικές μεθόδους.

Στο Σχ. 4.14(α') φαίνεται ο τρόπος με τον οποίο έγινε η κατανομή των κόμβων για τη ΜΣΣ όπου χρησιμοποιήθηκαν 12, 36, 60 τρίκομβα τετραγωνικής-βάσης μονοδιάστατα στοιχεία για τη διακριτοποίηση του συνόρου και 9, 145, 441 εσωτερικά σημεία στο κάθε ένα πλέγμα αντίστοιχα. Η ίδια διάταξη συνοριακών και εσωτερικών σημείων χρησιμοποιήθηκε για τις ΤΜχΔ με συνολική κατανομή 39, 223, 567 κόμβων αντίστοιχα. Επίσης έγινε επίλυση του προβλήματος της πακτωμένης δοκού με αφαίρεση των συνοριακών κόμβων και πρόσθεση κόμβων ευρισκόμενων εξωτερικά του χωρίου. Ο αριθμός των κόμβων στις κανάβους αυτές ήταν 41, 225, 569 αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο Σχ. 4.14(β'). Για την προσέγγιση του πεδίου με τη Μέθοδο Κινουμένων Ελαχίστων Τετραγώνων έγινε χρήση τετραγωνικής πολυωνυμικής βάσης, όπου η ακτίνα του κύκλου επιρροής ήταν ίση με την ακτίνα του κύκλου ολοκλήρωσης και επιλέχθηκε με τον ίδιο τρόπο όπως στο προηγούμενο παράδειγμα.

Η νόρμα του σχετικού σφάλματος των μετατοπίσεων ως συνάρτηση της πυκνότητας του πλέγματος για διάφορες αριθμητικές μεθόδους παρουσιάζεται στο Σχ.

Σχήμα 4.16: Πλέγμα (α') 153 συνοριακών, εσωτερικών κόμβων και (β') 155 εσωτερικών, εξωτερικών κόμβων διατεταγμένων στο ένα τέταρτο της επίπεδης πλάκας με οπή.

4.15. Η σχετικά καλή συμφωνία των μεθόδων αυτών καθώς και οι σύγκλιση των αποτελεσμάτων που επιτυγχάνουν είναι αξιοσημείωτη. Μικρή διαφοροποίηση στις νόρμες παρουσιάζουν οι Τοπικές Μέθοδοι χωρίς Διακριτοποίηση στις οποίες η κάναβος είχε μονάχα εσωτερικούς, εξωτερικούς κόμβους, ενώ η τάση μείωσης της νόρμας δείχνει να είναι σχεδόν ίδια με αυτή του άλλου τρόπου διακριτοποίησης.

Πρόβλημα 6: Το τελευταίο πρόβλημα ελαστοστατικότητας στις δύο διαστάσεις είναι αυτό της διάτρητης πλάκας υπό επίπεδη εντατική κατάσταση, γνωστό στη διεθνή βιβλιογραφία ως πρόβλημα του Kirsch. Έστω επίπεδη μεταλλική πλάκα της οποίας το μήκος είναι ίσο με 1 m, με μία οπή στο κέντρο της ακτίνας ίσης με 0.1 m (βλ. Σχ. 4.9(ε')). Η πλάκα αυτή υφίσταται ομοιόμορφο εφελκυστικό φορτίο στην οριζόντια διεύθυνση μεγέθους $\tau = 1 \text{ MPa}$. Στις υπόλοιπες πλευρές της πλάκας δεν επιβάλεται κάποιο φορτίο και είναι ελεύθερες να παραμορφώνονται. Οι αναλυτικές εξισώσεις που περιγράφουν το πεδίο των μετατοπίσεων και των τάσεων ενός υλικού σημείου, ως προς τις πολικές τού συντεταγμένες με αρχή αξόνων το κέντρο της οπής, είναι οι εξής [11]

$$u_1 = \tau \frac{1 - \nu^2}{E} \left[r \cos \theta + \frac{a^2}{2(1 - \nu)r} \cos 3\theta + \frac{2a^2}{r} \cos \theta - \frac{a^4}{2(1 - \nu)r^3} \cos 3\theta \right], \quad (4.24)$$

$$u_2 = \tau \frac{1 + \nu}{E} \left[-\nu r \sin \theta + \frac{a^2}{2r} \sin 3\theta - \frac{(1 - 2\nu)a^2}{r} \sin \theta - \frac{a^4}{2r^3} \sin 3\theta \right], \quad (4.25)$$

$$\sigma_{11} = \tau \left[1 + \frac{3a^4}{2r^4} \cos 4\theta - \frac{a^2}{r^2} \left(\frac{3}{2} \cos 2\theta + \cos 4\theta \right) \right], \quad (4.26)$$

$$\sigma_{22} = \tau \left[\frac{a^2}{r^2} \left(\cos 4\theta - \frac{1}{2} \cos 2\theta \right) - \frac{3a^4}{2r^4} \cos 4\theta \right], \quad (4.27)$$

$$\sigma_{12} = \tau \left[\frac{3a^4}{2r^4} \sin 4\theta - \frac{a^2}{r^2} \left(\frac{1}{2} \sin 2\theta + \sin 4\theta \right) \right], \quad (4.28)$$

όπου $r^2 = x_1^2 + x_2^2$ και $\tan \theta = x_2/x_1$.

Λόγω της συμμετρίας της γεωμετρίας αλλά και των συνοριακών συνθηκών, διακριτοποιήθηκε μονάχα το ένα τέταρτο της κατασκευής, όπως φαίνεται στο Σχ. 4.16, και επιβλήθηκαν συνθήκες συμμετρίας στην οριζόντια πλευρά ($\bar{t}_1 = 0, \bar{u}_2 = 0$) και στην κάθετη πλευρά ($\bar{u}_1 = 0, \bar{t}_2 = 0$) των τομών.

Η γεωμετρία της διάτρητης πλάκας διακριτοποιήθηκε με 22, 46, 72 τρίκομβα τετραγωνικής-βάσης μονοδιάστατα στοιχεία και 104, 496, 1178 κατανεμημένους εσωτερικούς κόμβους αντίστοιχα –όπως φαίνεται στο Σχ. 4.16(α')– για τη ΜΣΣ. Επίσης για τις ΤΜΧΔ το τεταρτημόριο της πλάκας διακριτοποιήθηκε (α') με 153, 593, 1327 συνοριακούς και εσωτερικούς κόμβους (βλ. Σχ. 4.16(α')) και (β') με 155, 595, 1329 εσωτερικούς και εξωτερικούς κόμβους αντίστοιχα (βλ. Σχ. 4.16(β')).

Σχήμα 4.17: Νόρμα σχετικού σφάλματος των μετατοπίσεων στο πρόβλημα της διάτρητης πλάκας σε εφελκυσμό, υπολογισμένη για τα τρία διαφορετικά πλέγματα και συγκρινόμενη για διάφορες αριθμητικές μεθόδους.

Έχει ενδιαφέρον να παρατηρήσει κάποιος το Σχ. 4.17, όπου παρουσιάζεται η νόρμα του σχετικού σφάλματος των μετατοπίσεων για το πρόβλημα του Kirsch. Εφαρμόζοντας τις προαναφερθείσες αριθμητικές μεθόδους χωρίς διακριτοποίηση σε πλέγματα με συμβατική τοποθέτηση συνοριακών και εσωτερικών κόμβων στο χωρίο ανάλυσης παρήχθησαν καλύτερης ποιότητας αποτελέσματα. Αντίθετα όμως όταν έγινε τοποθέτηση κόμβων εσωτερικά και εξωτερικά της πλάκας παρήχθησαν φτωχής ποιότητας αποτελέσματα. Παρόλα αυτά όλες οι αριθμητικές μέθοδοι καταφέρνουν

να συγκλίνουν σε βελτιωμένες λύσεις καθώς πυκνώνει η κλίμακας, γεγονός που επιβεβαιώνει για άλλη μία φορά την αξιοπιστία των τεχνικών που πραγματεύεται η παρούσα διδακτορική διατριβή.

4.1.3 Επίδραση του κύκλου επιρροής στα αριθμητικά αποτελέσματα των Τοπικών Μεθόδων χωρίς Διακριτοποίηση

Η παραμετρική μελέτη της επίδρασης του μεγέθους του κύκλου επιρροής $\tilde{\Omega}_{(\kappa)}$ στα αριθμητικά αποτελέσματα των Τοπικών Μεθόδων Petrov-Galerkin χωρίς Διακριτοποίηση και των Μεθόδων των Τοπικών Ολοκληρωτικών Εξισώσεων χωρίς Διακριτοποίηση ερευνάται σε αυτό το υποεδάφιο. Τέσσερα αντιπροσωπευτικά προβλήματα από τα παραπάνω επιλέχθηκαν γι' αυτή τη μελέτη: (α') δύο προβλήματα σωμάτων σε μόνιμη κατάσταση στις δύο διαστάσεις που περιγράφονται από τη μερική διαφορική Εξ. (2.34) (πρόβλημα 3 και 5 του Υποεδάφ. 4.1.1) και (β') δύο προβλήματα που περιγράφονται από τη μερική διαφορική εξίσωση (2.11) (πρόβλημα 2 και 3 του Υποεδάφ. 4.1.2). Για τη σωστή κατανόηση της επιρροής της μεταβολής της ακτίνας του κύκλου $\tilde{\Omega}_{(\kappa)}$ σε κάθε πρόβλημα παρουσιάζεται το γράφημα της νόρμας του σχετικού σφάλματος του πεδίου σε συνάρτηση με την αδιάστατη ακτίνα $r_S^{(\kappa)}/\delta$, όπου δ η ελάχιστη Ευκλείδεια απόσταση δύο κοντινών κόμβων, για τις διάφορες μεθοδολογίες των ΤΜΧΔ που αναπτύχθηκαν στα πλαίσια της παρούσης διδακτορικής διατριβής. Αντίθετα με πριν, όπου ο κύκλος ολοκλήρωσης ήταν ίδιος με τον κύκλο επιρροής, σε όλα τα υπό-ανάλυση προβλήματα η ακτίνα $r_0^{(\kappa)}$ του κύκλου ολοκλήρωσης $\Omega_{(\kappa)}$ τέθηκε σταθερή και ίση με $1.05 \times \delta$. Παράλληλα, έγινε διερεύνηση της επίδρασης της μεθόδου αναπαράστασης του πεδίου μέσω της Μεθόδου Κινουμένων Ελαχίστων Τετραγώνων και της Μεθόδου Παρεμβολής Σημείων με Βάση Ακτινικών Συναρτήσεων, όπου για συνάρτηση βάρους χρησιμοποιήθηκε αυθαίρετα η συνάρτηση spline. Επίσης για κάθε πρόβλημα που εξετάζεται ξεχωριστά θα χρησιμοποιείται μονάχα ένα πλέγμα διακριτοποίησης του χωρίου για την παραμετρική μελέτη, συγκεκριμένα η κλίμακας με τοποθέτηση κόμβων στο σύνορο και στο εσωτερικό του σώματος.

Στα διαγράμματα του Σχ. 4.18 παρουσιάζεται η νόρμα του σχετικού σφάλματος της πίεσης για διάφορες ακτίνες του κύκλου επιρροής στο πρόβλημα της μερικής διαφορικής εξίσωσης Laplace με δευτέρου βαθμού πολυωνυμικές συνοριακές συνθήκες τύπου Dirichlet. Η ελάχιστη τιμή της κανονικοποιημένης ακτίνας επιρροής για την οποία έγιναν τα αριθμητικά πειράματα ήταν τουλάχιστον δύο φορές μεγαλύτερη της πλησιέστερης απόστασης δ δύο κόμβων, διότι τετραγωνική βάση επιλέχθηκε για την αναπαράσταση του άγνωστου πεδίου. Από τα διαγράμματα αυτά μπορεί εύκολα να παρατηρηθεί ότι οι ΤΜΡΓΧΔ5, 6 και ΜΤΟΕΧΔ2 παρουσιάζουν μία αξιοσημείωτη ευστάθεια ως προς τη μεταβολή της ακτίνας επιρροής, σε αντίθεση με τις ΤΜΡΓΧΔ1 και ΜΤΟΕΧΔ1 που δείχνουν να είναι ελαφρώς ευαίσθητες και τη ΜΤΟΕΧΔ4 που παρουσιάζει έντονες διακυμάνσεις σε σχέση με τη μεταβολή της ακτίνας αυτής. Συγκρίνοντας όμως τα αποτελέσματα του Σχ. 4.18(α') με τα αντίστοιχα του Σχ. 4.18(β') παρατηρείται κάτι πάρα πολύ ενδιαφέρον, η χρήση της Μεθόδου

(α')

(β')

Σχήμα 4.18: Νόρμα σχετικού σφάλματος των μετατοπίσεων στο πρόβλημα 3 στατικού ακουστικού μέσου για διάφορες ακτίνες του κύκλου επιρροής $\Omega_{(\kappa)}$ με σταθερό κύκλο ολοκλήρωσης $\Omega_{(\kappa)}$ όταν χρησιμοποιείται (α') η ΜΚΕΤ και (β') η ΜΠΣΒΑΣ.

Παρεμβολής Σημείων με Βάση Ακτινικών Συναρτήσεων έναντι της προσεγγιστικής Μεθόδου Κινουμένων Ελαχίστων Τετραγώνων οδηγεί σε περισσότερη ευστάθεια των αποτελεσμάτων σε όλες τις αριθμητικές μεθόδους εκτός της ΜΤΟΕΧΔ4 που τα αποτελέσματα δείχνουν να γίνονται περισσότερο ασταθή.

Στο Σχ. 4.19 παρουσιάζεται η μεταβολή της νόρμας για τις διάφορες αριθμητικές τεχνικές των Τοπικών Μεθόδων χωρίς Διακριτοποίηση καθώς μεταβάλλεται ο κύκλος επιρροής στο πρόβλημα που περιγράφεται από τη μερική διαφορική εξίσωση Poisson με συνοριακές συνθήκες τύπου Dirichlet. Εδώ παρατηρείται το εξής περίεργο, τα αποτελέσματα του Σχ. 4.19(α'), όπου χρησιμοποιείται η Μέθοδος Κινουμένων Ελαχίστων Τετραγώνων, τείνουν να είναι πιο ασταθή στις ΤΜΡΓΧΔ1 και 6 και λιγότερο ασταθή στην ΤΜΡΓΧΔ5. Όταν όμως γίνει η χρήση της Μεθόδου Παρεμβολής Σημείων με Βάση Ακτινικών Συναρτήσεων για το πρόβλημα αυτό τότε όλες οι αριθμητικές μέθοδοι –εκτός της ΤΜΡΓΧΔ6– τόσο γίνονται σημαντικά πιο ευσταθείς όσο και ότι βελτιώνουν σχετικά την ακρίβεια των επιτευχθέντων αποτελεσμάτων λόγω μείωσης της νόρμας του σχετικού σφάλματος.

Το πρόβλημα που εξετάσθηκε στη συνέχεια ήταν αυτό της πλάκας σε μονοαξονικό εφελκυσμό υπό επίπεδη εντατική κατάσταση, με τη μορφή του πεδίου των μετατοπίσεων να είναι γραμμική. Τα αριθμητικά αποτελέσματα της παραμετρικής μελέτης παρουσιάζονται στο Σχ. 4.20. Από τα διαγράμματα αυτά παρατηρείται ό,τι τόσο όταν χρησιμοποιείται η Μέθοδος Κινουμένων Ελαχίστων Τετραγώνων για την προσέγγιση του πεδίου (βλ. Σχ. 4.20(α')) όσο και όταν χρησιμοποιείται η Μέθοδος Παρεμβολής Σημείων με Βάση Ακτινικών Συναρτήσεων (βλ. Σχ. 4.20(β')), οι ΜΤΟΕΧΔ1, 5 τείνουν να έχουν μία ασταθή συμπεριφορά. Η τεχνική ΤΜΡΓΧΔ6 παρουσιάζει μία απρόσμενη συμπεριφορά της μείωσης της ακρίβειας καθώς αυξάνει η ακτίνα επιρροής όταν χρησιμοποιείται η Μέθοδος Κινουμένων Ελαχίστων Τετραγώνων, κάτι που δεν συμβαίνει όταν εφαρμόζεται η Μέθοδος Παρεμβολής Σημείων με Βάση Ακτινικών Συναρτήσεων. Σε γενικές γραμμές στις υπόλοιπες αριθμητικές μεθοδολογίες φαίνεται να μην επηρεάζεται η ευστάθειά τους από τη μεταβολή της ακτίνας $r_S^{(κ)}$. Όμως αυτό που έχει ιδιαίτερη σημασία είναι ότι η Μέθοδος Παρεμβολής Σημείων με Βάση Ακτινικών Συναρτήσεων οδηγεί σε κάποια σχετικά μεγάλη αύξηση της νόρμας σε όλες τις μεθοδολογίες.

Στο Σχ. 4.21(α') παρουσιάζεται η μεταβολή της ακρίβειας των αριθμητικών αποτελεσμάτων των Τοπικών Μεθόδων χωρίς Διακριτοποίηση καθώς η ακτίνα επιρροής αλλάζει τιμές όταν χρησιμοποιείται η Μέθοδος Κινουμένων Ελαχίστων Τετραγώνων και αντίστοιχα στο Σχ. 4.21(β') όταν χρησιμοποιείται η Μέθοδος Παρεμβολής Σημείων με Βάση Ακτινικών Συναρτήσεων. Αντίστοιχα, στο τρίτο πρόβλημα ελαστικού μέσου. Αυτό που παρατηρείται είναι σχετική ευστάθεια όλων των αριθμητικών μεθόδων, με μοναδική πάλι εξαίρεση τη ΜΤΟΕΧΔ5. Η τελευταία τεχνική δείχνει να είναι σχετικά λιγότερο ευσταθής όταν εφαρμόζεται η μέθοδος παρεμβολής του άγνωστου πεδίου μέσω της Μεθόδου Παρεμβολής Σημείων με Βάση Ακτινικών Συναρτήσεων. Η νόρμα του σχετικού σφάλματος των μετατοπίσεων δεν αλλάζει σημαντικά συγκρίνοντας το Σχ. 4.21(α') με το Σχ. 4.21(β'), εκτός της ΜΤΟΕΧΔ2 όπου παρόλο που χάνει λίγο έδαφος σε ευστάθεια βελτιώνει αισθητά την ακρίβεια

(α')

(β')

Σχήμα 4.19: Νόρμα σχετικού σφάλματος των μετατοπίσεων στο πρόβλημα 1 ακουστικού μέσου για διάφορες ακτίνες του κύκλου επιρροής $\tilde{\Omega}_{(\kappa)}$ με σταθερό κύκλο ολοκλήρωσης $\Omega_{(\kappa)}$ όταν χρησιμοποιείται (α') η MKET και (β') η ΜΠΣΒΑΣ.

Σχήμα 4.20: Νόρμα σχετικού σφάλματος των μετατοπίσεων στο πρόβλημα 2 ελαστικού μέσου για διάφορες ακτίνες του κύκλου επιρροής $\tilde{\Omega}_{(\kappa)}$ με σταθερό κύκλο ολοκλήρωσης $\Omega_{(\kappa)}$ όταν χρησιμοποιείται (α') η MKET και (β') η ΜΠΣΒΑΣ.

(α')

(β')

Σχήμα 4.21: Νόρμα σχετικού σφάλματος των μετατοπίσεων στο πρόβλημα 3 ελαστικού μέσου για διάφορες ακτίνες του κύκλου επιρροής $\tilde{\Omega}_{(\kappa)}$ με σταθερό κύκλο ολοκλήρωσης $\Omega_{(\kappa)}$ όταν χρησιμοποιείται (α') η MKET και (β') η ΜΠΣΒΑΣ.

των αποτελεσμάτων που παράγει.

Από την παραπάνω παραμετρική μελέτη που πραγματοποιήθηκε μπορεί κάποιος να εξάγει τα εξής χρήσιμα συμπεράσματα

- (α') Οι αριθμητικές τεχνικές $\text{TMPG}\chi\Delta 1$, 5 και $\text{MTOE}\chi\Delta 2$ παρουσίαζαν κατά γενικό τρόπο στα περισσότερα προβλήματα –ανεξάρτητα της μεθόδου αναπαράστασης του πεδίου– τη μεγαλύτερη ευστάθεια στα αποτελέσματα ως προς τη μεταβολή της ακτίνας επιρροής.
- (β') Η αριθμητική τεχνική $\text{MTOE}\chi\Delta 5$ γενικά μπορεί να χαρακτηριστεί ως η πιο ευαίσθητη στην επιλογή της ακτίνας επιρροής, με την $\text{TMPG}\chi\Delta 6$ και τη $\text{MTOE}\chi\Delta 1$ να ακολουθούν ως οι λιγότερο ασταθείς τεχνικές.
- (γ') Η επιλογή χρήσης της Μεθόδου Παρεμβολής Σημείων με Βάση Ακτινικών Συναρτήσεων –συγκρινόμενη με τη Μέθοδο Κινουμένων Ελαχίστων Τετραγώνων– σε ορισμένες περιπτώσεις βοηθούσε στη βελτίωση της ευστάθειας των αριθμητικών αποτελεσμάτων.

Εδώ πρέπει να σημειωθεί ότι θα ήταν χρήσιμο κάποιος να διεξάγει παραμετρική μελέτη τόσο ως προς τη μεταβολή της ακτίνας ολοκλήρωσης όσο και ως προς την επιλογή διαφόρων συναρτήσεων βάρους για τις μεθόδους προσέγγισης και παρεμβολής που υλοποιήθηκαν, με παράλληλη διερεύνηση των παραμέτρων που διέπουν κάποιες από αυτές (βλ. Παρ. Γ). Επίσης θα ήταν χρήσιμο κάποιος να χρησιμοποιήσει πολυωνυμικές βάσεις ανώτερης τάξης για την προσέγγιση ή παρεμβολή, και να εκτιμήσει τρόπον τινά το ποιά βάση είναι προτιμότερο να χρησιμοποιείται κατά «γενικό» κανόνα.

4.1.4 Υπολογιστικός χρόνος

Γενικά, όπως παρατηρήθηκε στα αριθμητικά πειράματα που διεξήχθησαν στην παρούσα διδακτορική διατριβή, ο χρόνος υλοποίησης κάθε πειράματος μεταβαλλόταν ανάλογα με το ποιά μέθοδος χρησιμοποιούταν αλλά και ανάλογα με το μέγεθος της ακτίνας ολοκλήρωσης και της ακτίνας επιρροής που επιλέχθηκε. Είναι προφανές ότι όσο πιο μεγάλος είναι ο κύκλος ολοκλήρωσης τόσο μεγαλύτερος είναι ο χρόνος υλοποίησης μέσω των Τοπικών Μεθόδων χωρίς Διακριτοποίηση, διότι με αυτό το τρόπο απαιτούνται περισσότερα σημεία ολοκλήρωσης για τη μέθοδο Gauss-Legendre (βλ. Εξ. (Α.2)) ώστε να συγκλίνουν τα επιφανειακά ολοκληρώματα στο εσωτερικό σύνορο $\partial\Omega_{(\kappa)}$ αλλά και στο τμήμα του γενικού συνόρου $\Gamma_{(\kappa)}$ που τέμνει ο κύκλος ολοκλήρωσης. Ειδική μνεία για τις ολοκληρώσεις, τη σύγκλισή τους και παρατηρήσεις του ορθού υπολογισμού τους γίνεται στο Εδάφ. Α.2 του Παραρτήματος.

Στο Σχ. 4.22(α') φαίνεται η μεταβολή του απαιτούμενου υπολογιστικού χρόνου για τις επτά προαναφερθείσες τεχνικές των Τοπικών Μεθόδων χωρίς Διακριτοποίηση, όταν γίνεται χρήση της Μεθόδου Κινουμένων Ελαχίστων Τετραγώνων για την προσέγγιση του άγνωστου πεδίου, ως συνάρτηση της ακτίνας επιρροής. Αντίστοιχα στο Σχ. 4.22(β') συγκρίνεται ο απαιτούμενος υπολογιστικός χρόνος υλοποίησης

Σχήμα 4.22: Καταναλισκόμενος υπολογιστικός χρόνος για το ελαστοστατικό πρόβλημα 3 ως συνάρτηση της ακτίνας επιρροής όταν χρησιμοποιείται (α') η Μέθοδος Κινουμένων Ελαχίστων Τετραγώνων και (β') η Μεθόδος Παρεμβολής Σημείων με Βάση Ακτινικών Συναρτήσεων.

των μεθόδων χωρίς διακριτοποίηση όταν γίνεται χρήση της Μεθόδου Παρεμβολής Σημείων με Βάση Ακτινικών Συναρτήσεων ως συνάρτηση της ακτίνας του κύκλου επιρροής με σταθερό κύκλο ολοκλήρωσης. Από τα ραβδογράμματα αυτά μπορεί εύκολα κάποιος να παρατηρήσει τη δραματική αύξηση του υπολογιστικού χρόνου για τις TMPGΧΔ1 και 6 σε σύγκριση με τις υπόλοιπες. Το φαινόμενο αυτό οφείλεται καθαρά στο γεγονός ότι οι μέθοδοι αυτές απαιτούν τον αριθμητικό υπολογισμό ολοκληρωμάτων όγκου, ανεξάρτητα εάν υπάρχουν ή όχι πεδιακές πηγές-δυνάμεις στο πρόβλημα που αναλύεται. Μάλιστα ο χρόνος για αυτές τις δύο τεχνικές διαφαίνεται να αυξάνει σχεδόν γραμμικά με την αύξηση της ακτίνας επιρροής της μεθόδου προσέγγισης. Οι τεχνικές ΜΤΟΕΧΔ2, 4 και ΜΤΟΕΧΔ2-Τ δείχνουν να έχουν πιο καλή απόδοση σε σύγκριση με τις ΜΤΟΕΧΔ1 και TMPGΧΔ5. Η συμπεριφορά αυτή μπορεί να εξηγηθεί στην απουσία υπολογισμού των παραγώγων των συναρτήσεων μορφής, διαδικασία η οποία επαναλαμβάνόμενη για όλα τα σημεία ολοκλήρωσης (συνήθως τα σημεία ολοκλήρωσης σε ένα πρόβλημα της τάξης αυτής είναι μερικές χιλιάδες) κοστίζει σε χρόνο, ανεξάρτητα του αν έχει υποστεί βελτιστοποιήσεις ο αλγόριθμος υλοποίησης της μεθόδου προσέγγισης. Πάντως η χρήση της Μεθόδου Παρεμβολής Σημείων με Βάση Ακτινικών Συναρτήσεων για την παρεμβολή του άγνωστου πεδίου αντί της προσέγγισης μέσω της Μεθόδου Κινουμένων Ελαχίστων Τετραγώνων, οδηγεί σε μεγαλύτερους απαιτούμενους χρόνους αριθμητικής υλοποίησης διότι το μητρώο $\tilde{\mathbf{Q}}$ (βλ. Εξ. (3.37)) είναι πολύ μεγαλύτερο σε σχέση με το μητρώο $\tilde{\mathbf{A}}$ (βλ. Εξ. (3.7)) της Μεθόδου Κινουμένων Ελαχίστων Τετραγώνων, συνεπώς η αντιστροφή του πρώτου πίνακα είναι περισσότερο χρονοβόρα διαδικασία. Εδώ αξίζει να σημειωθεί ένα επιπλέον ιδιότιμο χαρακτηριστικό του πίνακα $\tilde{\mathbf{Q}}$: το μέγεθός του μεταβάλλεται ανάλογα με την ακτίνα επιρροής και την βάση πολυωνυμικής προσέγγισης, σε αντίθεση με τον πίνακα $\tilde{\mathbf{A}}$ που μεταβάλλεται ανάλογα μονάχα με την πολυωνυμική βάση.

Στη Μέθοδο των Συνοριακών Στοιχείων ο υπολογιστικός χρόνος μεταβάλλεται γραμμικά με το πλήθος των συνοριακών στοιχείων που απαιτούνται για τη διακριτοποίηση του συνόρου του σώματος που αναλύεται. Όσο πιο πυκνή γίνεται η κάναβος των στοιχείων τόσο περισσότερος χρόνος απαιτείται για την επίλυση του προβλήματος που μελετάται αριθμητικά. Αντίθετα όμως ο υπολογιστικός χρόνος δεν εξαρτάται σημαντικά από την τάξη των πολυωνυμικών συναρτήσεων μορφής που χρησιμοποιούνται σε κάθε στοιχείο.

4.2 Προβλήματα στο πεδίο συχνοτήτων

Πρόβλημα 1: Το πρώτο πρόβλημα είναι αυτό ενός ορθογώνιου χωρίου, όπως φαίνεται στο Σχ. 4.23(α'), όπου στη δεξιά πλευρά εφαρμόζεται πίεση $\bar{p} = (1+0.01j)kPa$ ενώ στις υπόλοιπες πλευρές εφαρμόζονται μηδενικές συνοριακές συνθήκες τύπου Neumann. Οι ιδιότητες του συνεχούς ακουστικού μέσου είναι: ταχύτητα διάδοσης διαμήκους κύματος ίση με $c_p = 1500 m/s$ και πυκνότητα $\rho_a = 1000 kg/m^3$. Η αποσβεστική ικανότητα του σώματος θεωρείται αμελητέα.

Σχήμα 4.23: (α') Πλέγμα 49 ομοιόμορφα κατανεμημένων κόμβων στο ορθογώνιο χωρίο με τοποθέτησή τους στο σύνορο και στο εσωτερικό του (β') απόκριση στο πεδίο συχνοτήτων του υλικού σημείου με γεωμετρική θέση (3 cm, 1.5 cm) για το πρόβλημα 1.

Το σύνορο του σώματος διακριτοποιήθηκε με 12 τρίκομβα τετραγωνικής-βάσης μονοδιάστατα στοιχεία και 21 εσωτερικούς κόμβους για τη Μέθοδο των Συνοριακών Στοιχείων, ενώ για τη Μέθοδο των Τοπικών Ολοκληρωτικών Εξισώσεων χωρίς Διακριτοποίηση κατανεμήθηκαν ομοιόμορφα 49 συνοριακοί και εσωτερικοί κόμβοι, όπως φαίνεται στο Σχ. 4.23(α'). Τετραγωνική πολυωνυμική βάση (βλ. Εξ. (3.3β')) χρησιμοποιήθηκε για την προσέγγιση του άγνωστου πεδίου μέσω της Μεθόδου των Κινουμένων Ελαχίστων Τετραγώνων, ενώ η ακτίνα ολοκλήρωσης τέθηκε περίπου ίση με $r_S^{(\kappa)} \approx 1.2 \times \delta$ και η ακτίνα επιρροής περίπου ίση με $r_0^{(\kappa)} \approx 2.4 \times \delta$, όπου δ η Ευκλείδεια απόσταση δύο κοντινών κόμβων.

Το πρόβλημα αυτο επιλύθηκε αριθμητικά σε ένα εύρος συχνοτήτων, όπως φαίνεται στον οριζόντιο άξονα του Σχ. 4.23(β'), τόσο με τη Μέθοδο των Συνοριακών Στοιχείων όσο και με τη Μέθοδο των Τοπικών Ολοκληρωτικών Εξισώσεων χωρίς Διακριτοποίηση τύπου 2 και τύπου 4. Για την επίλυση μέσω της ΜΣΣ έγινε χρήση της μεθοδολογίας που περιγράφεται στο Υποεδάφ. 2.2.2 με χρήση των μιγαδικών θεμελιωδών λύσεων ενώ για τις αντίστοιχες μεθόδους χωρίς διακριτοποίηση έγινε υλοποίηση της αντίστοιχης τεχνικής κάνοντας χρήση των πραγματικών θεμελιωδών λύσεων με παράλληλη μεταχείριση του όρου αδράνειας της μερικής διαφορικής Εξ. (2.42) ως πεδιακή πηγή. Για τη σύγκριση των αποτελεσμάτων επιλέχθηκε τυχαία ο κεντρικός κόμβος του πλέγματος με γεωμετρική θέση (3 cm, 1.5 cm). Από το Σχ. 4.23(β') παρατηρείται ότι τα αριθμητικά αποτελέσματα των τριών αυτών μεθοδολογιών είναι σε πάρα πολύ καλή συμφωνία. Επίσης παρατηρείται μία ασυμπτωτική καμπύλωση των αποτελεσμάτων του πλάτους της πίεσης στη συχνότητα $\omega \approx 39k \text{ rad/s}$, η οποία αντιστοιχεί σε φυσική ιδιοσυχνότητα ταλάντωσης του συστήματος.

Πρόβλημα 2: Έστω επίπεδη τετραγωνική χαλύβδινη πλάκα $1 \text{ cm} \times 1 \text{ cm}$, στην οποία εφαρμόζεται μονοαξονική φόρτιση μεγέθους $\bar{t}_2 = (10 + 0.1j) \text{ MPa}$ στην κάθετη διεύθυνση υπό επίπεδη εντατική κατάσταση. Οι ελαστικές σταθερές του σώματος είναι: μέτρο ελαστικότητας κατά Young $E = 200 \text{ GPa}$, λόγος του Poisson $\nu = 0.29$, πυκνότητα υλικού $\rho_e = 7850 \text{ kg/m}^3$ και αμελητέας αποσβεστικής ικανότητας.

Το σύνορο του σώματος διακριτοποιήθηκε με 20 τρίκομβα τετραγωνικής-βάσης μονοδιάστατα στοιχεία και 81 εσωτερικούς κόμβους για τη ΜΣΣ, ενώ για τη ΜΤΟΕχΔ κατανεμήθηκαν ομοιόμορφα 125 συνοριακοί και εσωτερικοί κόμβοι, όπως φαίνεται στο Σχ. 4.24(α'). Γραμμική πολυωνυμική βάση (βλ. Εξ. (3.3α')) χρησιμοποιήθηκε για την προσέγγιση του άγνωστου πεδίου μέσω της Μεθόδου των Κινουμένων Ελαχίστων Τετραγώνων, ενώ η ακτίνα ολοκλήρωσης τέθηκε περίπου ίση με $r_S^{(\kappa)} \approx 1.5 \times \delta$ και η ακτίνα επιρροής περίπου ίση με $r_0^{(\kappa)} \approx 1.8 \times \delta$.

Στο Σχ. 4.24(β') παρουσιάζεται η απόκριση του πλάτους της κάθετης συνιστώσας των μετατοπίσεων για το σημείο με θέση (0.5 cm, 0.5 cm) ως συνάρτηση της γωνιακής συχνότητας, για τις τρεις αριθμητικές μεθόδους. Οι ίδιες αριθμητικές τεχνικές με πριν εφαρμόστηκαν και σε αυτό το πρόβλημα στο πεδίο συχνοτήτων. Η συμφωνία των αριθμητικών αποτελεσμάτων με βάση το σχήμα αυτό είναι αρκετά ικανοποιητική, αν και πιθανώς μία διόρθωση στην ακτίνα επιρροής μπορεί να βελτιώνει τα αποτελέσματα της ΜΤΟΕχΔ4. Η φυσική ιδιοσυχνότητα ταλάντωσης της επίπεδης μεταλλικής πλάκας σε αυτό το φάσμα συχνοτήτων είναι περίπου ίση με

Σχήμα 4.24: (α') Πλέγμα 125 ομοιόμορφα κατανεμημένων κόμβων στο τετράγωνο χωρίο με τοποθέτησή τους στο σύνορο και στο εσωτερικό του (β') απόκριση στο πεδίο συχνοτήτων του υλικού σημείου με γεωμετρική θέση (0.5 cm, 0.5 cm) για το πρόβλημα 2.

$$\omega \approx 705k \text{ rad/s.}$$

Πρόβλημα 3: Το τρίτο πρόβλημα είναι αυτό ενός μεταλλικού κυλίνδρου εσωτερικής ακτίνας $r_i = 0.4 \text{ cm}$ και εξωτερικής ακτίνας $r_e = 1 \text{ cm}$, στον οποίο εφαρμόζεται εσωτερικά ομοιόμορφο φορτίο πίεσης $p_i = (10 + 0.1j) \text{ MPa}$ υπό επίπεδη παραμορφωσιακή κατάσταση. Οι ελαστικές σταθερές του συνεχούς ελαστικού σώματος είναι οι ίδιες με αυτές του προηγούμενου παραδείγματος.

Λόγω της συμμετρίας της γεωμετρίας και των συνοριακών συνθηκών διακριτοποιήθηκε μονάχα το άνω δεξί τεταρτημόριο του κυλίνδρου, όπως φαίνεται στο Σχ. 4.25(α'), με παράλληλη εφαρμογή συνθηκών συνέχειας στην οριζόντια και στην κάθετη πλευρά των τομών της συμμετρίας. Για τη ΜΣΣ το σύνορο του κυλίνδρου διακριτοποιήθηκε με 17 τρίκομβια τετραγωνικής-βάσης μονοδιάστατα στοιχεία και 45 εσωτερικούς κόμβους, ενώ για τη ΜΤΟΕχΔ κατανεμήθηκαν σχεδόν ομοιόμορφα 83 συνοριακοί και εσωτερικοί κόμβοι. Τετραγωνική πολυωνυμική βάση χρησιμοποιήθηκε στη Μεθόδο Κινουμένων Ελαχίστων Τετραγώνων, με συνάρτηση βάρους αυτήν της Εξ. (Γ.4). Η ακτίνα ολοκλήρωσης τέθηκε περίπου ίση με $r_s^{(\kappa)} \approx 2.4 \times \delta$ και ίση με την ακτίνα επιρροής όλων των κόμβων.

Στο Σχ. 4.25(β') παρουσιάζεται η απόκριση της κάθετης συνιστώσας των μετατοπίσεων του σημείου με θέση $(0.495 \text{ cm}, 0.495 \text{ cm})$. Εδώ πρέπει να σημειωθεί ότι εξετάσθηκε η απόκριση της οριζόντιας συνιστώσας των μετατοπίσεων του ίδιου σημείου και παρατηρήθηκε να έχει την ίδια συμπεριφορά στο ίδιο φάσμα συχνοτήτων. Από το Σχ. 4.25(β') μπορεί εύκολα κάποιος να πει ότι υπάρχει μία σχετικά καλή συμφωνία των αριθμητικών αποτελεσμάτων που παρήγαγαν οι τρεις μεθοδολογίες. Μάλιστα τόσο η ΜΣΣ όσο και οι ΜΤΟΕχΔ2 και 4 εκτίμησαν την ιδιοσυχνότητα ταλάντωσης του συστήματος περίπου στα $815k \text{ rad/s}$ σε αυτό το φάσμα συχνοτήτων. Η ελαφριά απόκλιση των αποτελεσμάτων πιθανώς να οφείλεται στην επιλογή του μεγέθους των ακτίνων ολοκλήρωσης ή/και επιρροής, συνεπώς αν κάποιος διορθώσει τις εν λόγω ακτίνες πραγματοποιώντας διαδοχικές διαδικασίες δοκιμής-σφάλματος μπορεί να καταλήξει σε βελτιωμένα αποτελέσματα.

Σχήμα 4.25: (α') Πλέγμα 83 ομοιόμορφα κατανομημένων κόμβων στο τέταρτο του κυλίνδρου με τοποθέτησή τους στο σύνορο και στο εσωτερικό του χωρίου και (β') απόκριση στο πεδίο συχνοτήτων του υλικού σημείου με γεωμετρική θέση (0.495 cm, 0.495 cm) για το πρόβλημα 3.

Βιβλιογραφία

- [1] Beissel S, Belytschko T (1996): Nodal integration of the element free Galerkin method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **139**, 49–74.
- [2] Belytschko T, Lu YY, Gu L (1994): Element-free Galerkin methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **37**, 229–256.
- [3] Bu S (1997): Infinite boundary elements for the dynamic analysis of machine foundations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **40**, 3901–3917.
- [4] Chen T, Raju IS (2003): A coupled finite element and meshless local Petrov-Galerkin method for two-dimensional potential problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **192**, 4533–4550.
- [5] El-Zafrany A (1993): *Techniques of the Boundary Element Method*. Ellis Horwood.
- [6] Mukherjee YX, Mukherjee S (1997): The Boundary Node Method to Potential Problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **40**, 797–815.
- [7] Ramachandran PA (1994): *Boundary Element Methods in Transport Phenomena*. Computational Mechanics Publications.
- [8] Rekach VG (1979): *Manual of the theory of elasticity*. Mir Publishers.
- [9] Sladek J, Sladek V (2002): A Trefftz function approximation in local boundary integral equations. *Computational Mechanics*, **28**, 212–219.
- [10] Taylor RL, Beresford DJ, Wilson EL (1976): The Boundary Node Method to Potential Problems. *International Journal of Numerical Methods*, **10**, 1211–1219.
- [11] Timoshenko SP, Goodier JN (1970): *Theory of Elasticity*. McGraw-Hill.

- [12] Zhu T (1999): A New Meshless Regular Local Boundary Integral Equation (MRLBIE) approach. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **46**, 1237–1252.

Κεφάλαιο 5

Εφαρμογή της Μεθόδου των Συνοριακών Στοιχείων και των Τοπικών Μεθόδων χωρίς Διακριτοποίηση σε προβλήματα Μη-Καταστροφικού Ελέγχου

Σε αυτό το κεφάλαιο πρόκειται να παρουσιαστούν τα αριθμητικά αποτελέσματα που προέκυψαν από την ανάλυση προβλημάτων που εμπίπτουν στο πεδίο του Μη-Καταστροφικού Έλεγχου (ΜΚΕ). Στο πρώτο εδάφιο γίνεται εκτενής περιγραφή του αριθμητικού προσδιορισμού των καμπυλών διασκόρπισης μέσω δύο τεχνικών: (α') του Διακριτού Μετασχηματισμού Fourier και (β') της Αναπαράστασης Χρόνου-Συχνότητας. Στο δεύτερο και τελευταίο εδάφιο του κεφαλαίου αυτού πρόκειται να επιλυθεί αριθμητικά το πρόβλημα της κυματικής διάδοσης σε δεξαμενές αποθήκευσης υγρών καυσίμων που παρουσιάζουν διαφόρων μορφών ατέλειες. Αποτέλεσμα αυτής της μελέτης είναι η παραμετρική ανάλυση για τον χαρακτηρισμό των σημάτων που μπορούν να καταγράψουν αισθητήρες Ακουστικής Εκπομπής σε πραγματικό πείραμα ΜΚΕ, ώστε να εξαχθούν χρήσιμα συμπεράσματα για τη γενική εκτίμηση της θέσης και του είδους της ατέλειας σε αυτές τις κατασκευές.

5.1 Εύρεση των καμπυλών διασκόρπισης σε κυματοδηγούς

Έστω επίπεδη χαλύβδινη πλάκα, όπως αυτή του Σχ. 5.1, πάχους d και της οποίας οι ιδιότητες δίδονται στον Πίν. 5.1. Εδώ αξίζει να σημειωθεί ότι στο εξής των αναλύσεων θα αγνοούνται φαινόμενα απόσβεσης. Η μεταλλική αυτή πλάκα θεωρείται ελεύθερη, δηλαδή στην άνω και κάτω επιφάνειά της ($x_2 = \pm d/2$) δεν επιβάλλεται κανένα φορτίο υπό μορφή εξωτερικής δύναμης. Υποθέτοντας ότι ένα αρμονικό κύμα

διαδίδεται στην ελεύθερη επίπεδη πλάκα τότε το διάνυσμα των μετατοπίσεων στην επιφάνεια της πλάκας μπορεί να περιγραφεί από τη γενική αναλυτική έκφραση [4]

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{a}(\omega) e^{j(\omega t - kx - \theta)}, \quad (5.1)$$

όπου το διάνυσμα $\mathbf{a}(\omega)$ δηλώνει το εύρος του κύματος, $\omega = 2\pi f$ είναι η γωνιακή συχνότητα, $k = \omega/c$ ο κυματικός αριθμός, c η φασική ταχύτητα (phase velocity) και θ η φάση του κύματος. Ο κυματικός αριθμός συνδέεται με το μήκος κύματος λ σύμφωνα με τη σχέση $k = 2\pi/\lambda$.

μέτρο ελαστικότητας	λόγος Poisson	πυκνότητα
$E = 200\text{GPa}$	$\nu = 0.29$	$\rho_e = 7850\text{ kg/m}^3$
διαμήκες κύμα	εγκάρσιο κύμα	κύμα Rayleigh
$c_p = 5778\text{ m/s}$	$c_s = 3142\text{ m/s}$	$c_r = 2909\text{ m/s}$

Πίνακας 5.1: Ιδιότητες χάλυβα.

Σχήμα 5.1: (α') Γεωμετρία ελεύθερης επίπεδης πλάκας και (β') μία τομή αυτής.

Τα κύματα του Lamb [13] είναι διαταραχές οι οποίες διαδίδονται μέσα στην ελεύθερη πλάκα. Οι μετατοπίσεις των υλικών σημείων του μέσου μπορεί να είναι είτε συμμετρικές, είτε αντισυμμετρικές ως προς το μέσο επίπεδο της πλάκας (βλ. Σχ. 5.1(β')) και αποτελούν λύσεις κάποιων χαρακτηριστικών εξισώσεων [10]. Οι ταχύτητες διάδοσης των διάφορων τρόπων κυμάτων του Lamb παρουσιάζουν το φαινόμενο της διασκόρπισης, δηλαδή η φασική τους ταχύτητα μεταβάλλεται αντίστοιχα με το φασματικό τους περιεχόμενο. Λύνοντας το πρόβλημα συνοριακών τιμών, που αντιστοιχεί στην επίπεδη πλάκα του Σχ. 5.1, εύκολα προκύπτει ότι η σχέση διασκόρπισης που συσχετίζει τη φασική ταχύτητα των συμμετρικών και αντισυμμετρικών τρόπων διάδοσης με τη συχνότητα είναι η εξής [10]

$$\frac{\tan(\beta d/2)}{\tan(\alpha d/2)} + \left[\frac{4\alpha\beta k^2}{(k^2 - \beta^2)^2} \right]^\gamma = 0, \quad (5.2)$$

όπου d το πάχος της πλάκας, $\alpha^2 = (\omega/c_p)^2 - k^2$, $\beta^2 = (\omega/c_s)^2 - k^2$, c_p , c_s οι ταχύτητες διάδοσης των διαμηκών και εγκάρσιων κυμάτων στο ελαστικό μέσο, ενώ $\gamma = +1$ για συμμετρικούς και $\gamma = -1$ για αντισυμμετρικούς τρόπους διάδοσης ελαστικών κυμάτων. Η Εξ. (5.2) είναι γνωστή και ως εξίσωση Rayleigh-Lamb [13, 18]. Το διάγραμμα που προκύπτει από την επίλυση της Εξ. (5.2) ονομάζεται διάγραμμα χαμπυλών διασκόρπισης.

Σχήμα 5.2: Τρόποι διάδοσης των συμμετρικών και αντισυμμετρικών τρόπων διάδοσης (α') των οριζόντιων και (β') των κάθετων μετατοπίσεων.

Στο Σχ. 5.2 παριστάνονται οι συμμετρικοί και οι αντισυμμετρικοί τρόποι διάδοσης του ελαστικών κυμάτων για τις οριζόντιες και κάθετες μετατοπίσεις των υλικών σημείων της πλάκας κατά το πάχος και ως προς το μέσο επίπεδο αυτής.

Στο βιβλίο του Rose [20] γίνεται παρουσίαση ενός αλγόριθμου υπολογισμού των χαμπυλών διασκόρπισης μέσω της πεπλεγμένης Εξ. (5.2) με εφαρμογή της κατά-τμήματα ανέρευσης των ριζών σε αυτή. Επίσης στην εργασία [8] προτείνεται ένας εναλλακτικός τρόπος αριθμητικού προσδιορισμού των χαμπυλών διασκόρπισης με σάρωση ανά συχνότητα ή ανά κυματικό αριθμό.

Για τον αριθμητικό προσδιορισμό των χαμπυλών διασκόρπισης μέσω της εξίσωσης Rayleigh-Lamb κατασκευάστηκε –στο πλαίσιο της παρούσης διδακτορικής διατριβής– κώδικας H/Y γραμμένος στη γλώσσα προγραμματισμού ANSI-C, στον οποίο γίνεται υπολογισμός των ριζών με βάση τη μεθοδολογία που περιγράφεται στο βιβλίο [20]. Τα αριθμητικά αποτελέσματα επίλυσης της Εξ. (5.2) για την περίπτωση της ελεύθερης πλάκας πάχους $d = 6 \text{ mm}$ παρατίθενται στο Σχ. 5.3(α'), όπου στον κάθετο άξονα είναι το φάσμα των συχνοτήτων (f) και στον οριζόντιο άξονα ο αντίστροφος του μήκους κύματος ($1/\lambda$). Στο ίδιο σχήμα αναγράφονται οι

Σχήμα 5.3: (α') Διάγραμμα $(f-1/\lambda)$ των καμπυλών διασκόρπισης ελεύθερης επίπεδης χαλύβδινης πλάκας πάχους $d = 6mm$ και (β') αδιάστατο διάγραμμα $(fd/c_s-d/\lambda)$.

διάφοροι συμμετρικοί και αντισυμμετρικοί τρόποι ελαστικών κυμάτων που διαδίδονται στον κυματοδηγό και που αντιστοιχούν στις καμπύλες διασκόρπισης. Στο Σχ. 5.3(β') μάλιστα παρουσιάζεται το ίδιο διάγραμμα σε αδιάστατη μορφή. Οι τιμές της συχνότητας για τον κάθε τρόπο διάδοσης των κυμάτων που αντιστοιχούν στη τομή των καμπυλών διασκόρπισης με τον κάθετο άξονα του διαγράμματος ονομάζονται συχνότητες αποκοπής (cut-off frequencies). Η σημασία τους μπορεί να περιγραφεί από το γεγονός του ότι όταν το φασματικό περιεχόμενο μίας διαδιδόμενης κυματικής διαταραχής είναι κάτω της συχνότητας αποκοπής κάποιου τρόπου –συμμετρικού ή αντισυμμετρικού– τότε αυτός δε διαδίδεται στο ελαστικό μέσο. Ως εκ τούτου οι τρόποι S0 και A0 διαδίδονται πάντα σε μία ελεύθερη πλάκα διότι έχουν μηδενική συχνότητα αποκοπής, με τον A0 να διαδίδεται χωρίς διασκόρπιση λόγω της γραμμικής εξάρτησης της συχνότητας με το μήκος κύματος, έχοντας δηλαδή σταθερή τιμή της φασικής τού ταχύτητας σε όλο το φάσμα των συχνοτήτων. Η ομαδική ταχύτητα (group velocity) $c_g = \partial\omega/\partial k$ μπορεί να υπολογιστεί απευθείας όταν η φασική ταχύτητα c ή ο κυματικός αριθμός k εκφραστεί ως συνάρτηση της συχνότητας f . Από το αδιάστατο διάγραμμα του Σχ. 5.3(β') μπορεί εύκολα να παρατηρηθεί ότι καθώς το πάχος της πλάκας αυξάνει τότε οι συχνότητες αποκοπής των συμμετρικών αλλά και των αντισυμμετρικών μορφών διάδοσης αυξάνουν, με μοναδικές εξαιρέσεις τους S0 και A0. Συνεπώς από τα παραπάνω μπορεί να ειπωθεί ότι η αύξηση του πάχους σε μία πλάκα εξασθενεί το μέγεθος της διασκόρπισης στο φάσμα των χαμηλών συχνοτήτων.

5.1.1 Εύρεση καμπυλών διασκόρπισης με τη φασματική μέθοδο ανάλυσης Fourier

Η πρώτη εργασία στην οποία γίνεται χρήση των φασματικών μεθόδων για το καθορισμό των φασικών ή/και των ομαδικών ταχυτήτων σε διασκορπίζοντα συνεχή ελαστικά μέσα έγινε από τους Sachse και Pao [22]. Αργότερα ο Rose και οι συνεργάτες του [19] ανέπτυξαν μία μέθοδο σύγκρισης και συσχέτισης των πειραματικών αποτελεσμάτων με ένα προϋπολογισμένο «καλό» φάσμα της κατασκευής. Οι πρώτοι όμως που ανέπτυξαν μία φασματική τεχνική βασισμένη στη χρήση του διδιάστατου μετασχηματισμού Fourier και εφαρμογή του στις κυματομορφές που καταγράφονται από τους αισθητήρες ΜΚΕ έγινε από τους Alleyne και Cawley [1]. Έπειτα ακολούθησαν οι αρκετά ενδιαφέρουσες εργασίες [3, 14] στις οποίες έγινε χρήση της μεθοδολογίας που αναπτύχθηκε στην αναφορά [1] με εφαρμογή σε μεταλλικούς κυματοδηγούς μέσω των αριθμητικών μεθόδων των Πεπερασμένων Διαφορών και Πεπερασμένων Στοιχείων αντίστοιχα. Επίσης στην εργασία [23] έγινε η μελέτη της κυματικής διάδοσης σε επικολημένες πολύστρωτες πλάκες από σύνθετα υλικά τόσο μέσω της ανάπτυξης αναλυτικών μοντέλων όσο και μέσω της αριθμητικής Μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων κάνοντας χρήση του διδιάστατου μετασχηματισμού Fourier.

Στην παρούσα διδακτορική διατριβή έγινε χρήση τόσο της τεχνικής αριθμητικού υπολογισμού και προσδιορισμού των καμπυλών διασκόρπισης που περιγράφεται στην

εργασία [14], αλλά αναπτύχθηκε και μία παραλλαγή της τεχνικής αυτής. Η Μέθοδος Συνοριακών Στοιχείων χρησιμοποιήθηκε για την αριθμητική ανάλυση των προβλημάτων κυματικής διάδοσης με μεγάλη επιτυχία, όπως θα γίνει φανερό παρακάτω.

Σχήμα 5.4: (α') Διδιάσταση ελεύθερη επίπεδη πλάκα με εφαρμογή στο δεξί άκρο δυναμικής φόρτισης και (β') λεπτομέρεια του τρόπου διακριτοποίησης του συνόρου με στοιχεία για τη ΜΣΣ.

Στη συνέχεια της ανάλυσης πρόκειται να παρουσιαστεί ο τρόπος με τον οποίο διακριτοποιήθηκε στο χρόνο και στο χώρο το πρόβλημα της κυματικής διάδοσης στην ελεύθερη επίπεδη πλάκα.

Έστω πλάκα πάχους $d = 6 \text{ mm}$, μήκους $L = 0.4 \text{ m}$ και αρκετά μεγάλου βάρους, συγκριτικά με τις άλλες διαστάσεις όπως φαίνεται στο Σχ. 5.1(α'), θεωρώντας συνεπώς επίπεδη παραμορφωσιακή κατάσταση στις δύο διαστάσεις. Οι ελαστικές ιδιότητες του υλικού δίδονται στον Πίν. 5.1. Στο δεξί ελεύθερο άκρο της πλάκας εφαρμόζεται τασικό φορτίο στις δύο διευθύνσεις όπως φαίνεται στο Σχ. 5.4(α'). Το φορτίο επιλέχθηκε να είναι η κρουστική συνάρτηση Dirac του Σχ. 5.5(α') διότι το πλάτος της διέγερσης για κάθε αρμονική συνιστώσα σε όλο το φάσμα συχνοτήτων είναι σταθερό, όπως διαπιστώνεται στο Σχ. 5.5(β'). Με αυτό τον τρόπο μπορεί να ειπωθεί με ασφάλεια ότι ένα μεγάλος μέρος των διάφορων τρόπων διάδοσης μπορεί να διεγερθεί με το ίδιο ενεργειακό εύρος.

Το χρονικό παράθυρο μελέτης του μεταβατικού φαινομένου επιλέχθηκε να είναι ίσο με $204.6 \mu\text{sec}$, δηλαδή τρεις περίπου φορές του χρόνου που χρειάζεται το διαμήκες κύμα για να διανύσει το συνολικό μήκος της πλάκας. Επίσης το χρονικό βήμα δειγματοληψίας τέθηκε ίσο με $\Delta t = 0.2 \mu\text{sec}$, συνεπώς ο αριθμός των δειγμάτων στο χρόνο ισούται με $N_t = 1024$. Μετά τη διεξαγωγή πληθώρας αριθμητικών πειραμάτων μέσω της τεχνικής ανάλυσης δυναμικών φαινομένων με χρήση μιγαδικών κυκλικών συχνοτήτων —όπως αυτή περιγράφεται στις τελευταίες παραγράφους του Εδάφ. 2.4— παρατηρήθηκε ότι μεγαλύτερη ευστάθεια των αριθμητικών αποτελεσμάτων επιτυγχάνεται όταν το παράθυρο ανάλυσης του μεταβατικού φαινομένου είναι τουλάχιστον δύο φορές μεγαλύτερο σε χρονική διάρκεια του επιθυμητού παραθύρου μελέτης του φαινομένου. Ως εκ τούτου, η συχνότητα δειγματοληψίας είναι ίση με

5 MHz από όπου με βάση το θεώρημα δειγματοληψίας του Nyquist της Εξ. (Δ.9) προκύπτει ότι η μέγιστη συχνότητα ανάλυσης είναι $f_{max} = 2.5 \text{ MHz}$.

Σχήμα 5.5: (α') Κρουστική συνάρτηση διέγερσης τύπου Dirac και (β') πλάτος του φάσματος στο πεδίο συχνοτήτων μετά από μετασχηματισμό Fourier.

Το σύνορο της διδιάστατης ελεύθερης επίπεδης πλάκας διακριτοποιήθηκε με τρίκομβη τετραγωνικής-βάσης μονοδιάστατα στοιχεία (βλ. Σχ. 5.4(β')). Το μήκος των στοιχείων τέθηκε με βάση τον κανόνα της Εξ. (2.80) ίσο με $l_e = 0.5 \text{ mm}$, διότι τέθηκε ως μέγιστη συχνότητα ανάλυσης $f_{max} = 1 \text{ MHz}$. Αξίζει να σημειωθεί εδώ ότι η ομοιόμορφη κατανομή των συνοριακών στοιχείων διευκολύνει και βοηθά στην ταχεία διακριτοποίηση του συνόρου του σώματος.

Το πρόβλημα της κυματικής διάδοσης στην ελεύθερη επίπεδη πλάκα επιλύθηκε μέσω της ΜΣΣ στο πεδίο συχνοτήτων, τεχνική που περιγράφεται αναλυτικά στο Εδάφ. 2.4. Αφότου τα αριθμητικά αποτελέσματα μετασχηματίστηκαν στο πεδίο του χρόνου μέσω του αντίστροφου ΔΜΦ, έπειτα εφαρμόστηκε ο διδιάστατος Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier (βλ. Εδάφ. Δ.1).

Για την βελτίωση της ευκρίνειας ανάλυσης στο σήμα προστέθηκαν στο τέρμα της απόκρισης του σήματος για κάθε κόμβο του πλέγματος 1024 μηδενικά, συνεπώς η απόκριση του συστήματος διπλασιάστηκε σε $N_t = 2048$ χρονικά δείγματα. Η τεχνική αυτή αναφέρεται στη διεθνή βιβλιογραφία ανάλυσης ψηφιακών σημάτων ως zero-padding.

Λόγω του ότι ομοιόμορφη κατανομή στοιχείων τοποθετήθηκε στο σύνορο του σώματος και ότι το μήκος των στοιχείων είναι ίσο με μισό χιλιοστόμετρο, η ελάχιστη απόσταση δύο διαδοχικών κόμβων ισούται με $\Delta x = 0.25 \text{ mm}$. Ως εκ τούτου, η μέγιστη ανάλυση στο αντίστοιχο μετασχηματισμένο πεδίο του χώρου ισούται με $(1/\lambda)_{max} = 2000 \text{ m}^{-1}$. Ο αλγόριθμος του διδιάστατου μετασχηματισμού Fourier εφαρμόστηκε στη χρονική απόκριση των οριζόντιων και κατακόρυφων μετατοπίσεων 1024 διαδοχικών συνοριακών σημείων που ανήκαν στην άνω επιφάνεια της πλάκας. Εξαιτίας του γεγονότος ότι ο αριθμός των δειγμάτων στο χώρο-χρόνο ήταν δύναμης του δύο, εφαρμόστηκε ο αλγόριθμος του ταχέως μετασχηματισμού Fourier.

Τα αριθμητικά αποτελέσματα των χαμπυλών διασκόρπισης μέσω της τεχνικής συνδυασμένης ΜΣΣ και διδιάστατου ΔΜΦ παρουσιάζονται στο επίπεδο του Σχ.

5.6(α') ως ισοϋψείς λεπτές καμπύλες γραμμές, ενώ με παχιές γραμμές αναπαριστώνται οι θεωρητικές καμπύλες που προκύπτουν μετά από αριθμητική επίλυση της Εξ. (5.2). Από το σχήμα αυτό παρατηρείται ότι υπάρχει αρκετά καλή συμφωνία μεταξύ της θεωρίας και των αντίστοιχων αριθμητικών αποτελεσμάτων. Οι αριθμητικά υπολογισμένοι τρόποι διάδοσης ελαστικών κυμάτων S0, S2, A0, A1 και A2 φαίνεται να διεγείρονται από την κρουστική φόρτιση, αφού παρουσιάζουν σημαντικό ενεργειακό εύρος σε αντίθεση με τους ανώτερους τρόπους διάδοσης που διεγείρονται αλλά το ενεργειακό τους πλάτος είναι χαμηλό. Στο Σχ. 5.6(β') παρουσιάζονται τα αριθμητικά αποτελέσματα των καμπυλών διασκόρπισης της ελεύθερης πλάκας στο τρισδιάστατο κανονικοποιημένο διάγραμμα της συχνότητας ως συνάρτηση του αντίστροφου του μήκους κύματος, όπου η αναπαράσταση των καμπυλών με βάση την φασματική μέθοδο του διδιάστατου ΔMF είναι αρκετά εμφανής. Εδώ πρέπει να τονιστεί ότι οι οριζόντιες ή/και κάθετες γραμμές που προκαλούν μία ελαφριά παραμόρφωση στο διάγραμμα των αριθμητικά υπολογισμένων καμπυλών διασκόρπισης είναι αποτέλεσμα του φαινομένου της «διαρροής του Fourier», γεγονός που οφείλεται στη διαφορά φάσης γειτονικών συχνοτήτων [25].

Η τεχνική που παρουσιάστηκε μέχρι τώρα είναι βασισμένη στις εργασίες [1, 14], με τη διαφορά ότι οι συγγραφείς των εργασιών αυτών χρησιμοποίησαν τη Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων για τη μελέτη της κυματικής διάδοσης σε διδιάστατες μεταλλικές κατασκευές. Τα αποτελέσματα της χρήσης της Μεθόδου των Συνοριακών Στοιχείων σε συνδυασμό με το μετασχηματισμό Fourier –με βάση το Σχ. 5.8(α')– κρίνονται αρκετά επιτυχή. Το μειονέκτημα όμως της τεχνικής αυτής είναι ότι απαιτείται η εφαρμογή του μετασχηματισμού πολλές φορές, δηλαδή κατά (α') το μετασχηματισμό των συνοριακών συνθηκών στο πεδίο συχνοτήτων, (β') το μετασχηματισμό των αποτελεσμάτων της ΜΣΣ στο πεδίο του χρόνου και τέλος (γ') της εφαρμογής του διδιάστατου μετασχηματισμού Fourier. Παρόλαυτά στην παρούσα διδακτορική διατριβή προτείνεται μία νέα εναλλακτική μεθοδολογία, περιγραφόμενη εν συντομία παρακάτω.

Δεδομένου ότι η παρούσα αριθμητική μεθοδολογία επίλυσης μεταβατικών προβλημάτων μέσω της Μεθόδου Συνοριακών Στοιχείων είναι διατυπωμένη στο πεδίο συχνοτήτων (βλ. Εδάφ. 2.4), μπορεί κάποιος να απλοποιήσει τη διαδικασία παραγωγής των καμπυλών διασκόρπισης σύμφωνα με τον παρακάτω αλγόριθμο:

- (α') μετασχηματισμός των συνοριακών συνθηκών από το πεδίο του χρόνου στο αντίστοιχο των συχνοτήτων,
- (β') επίλυση του προβλήματος στο πεδίο συχνοτήτων μέσω της Μεθόδου των Συνοριακών Στοιχείων, και
- (γ') εφαρμογή του μονοδιάστατου μετασχηματισμού Fourier στην απόκριση διαδοχικών συνοριακών σημείων και παραγωγή του διαγράμματος των καμπυλών διασκόρπισης.

Αξίζει να σημειωθεί εδώ ότι στην προτεινόμενη αυτή τεχνική δεν μπορεί ενδιάμεσα να εφαρμοστεί η τεχνική της πρόσθεσης μηδενικών (zero-padding) στη χρονική

Σχήμα 5.6: (α') Σύγκριση των θεωρητικών καμπυλών διασκόρπισης (παχιές γραμμές) με τις αριθμητικά παραγόμενες καμπύλες διασκόρπισης (ισοϋψείς λεπτές γραμμές) και (β') τρισδιάστατο διάγραμμα των αριθμητικών αποτελεσμάτων της ελεύθερης επίπεδης πλάκας.

απόκριση, διότι τα αποτελέσματα δεν παρήχθησαν στο πεδίο του χρόνου αλλά απευθείας στο πεδίο συχνότητας.

Μετά από αριθμητική εφαρμογή και επαλήθευση του παραπάνω προτεινόμενου αλγορίθμου για την μελέτη της κυματικής διάδοσης στην ελεύθερη επίπεδη πλάκα και την παραγωγή των καμπυλών διασκόρπισης εξήχθησαν τα ακόλουθα συμπεράσματα:

- (α') η συμφωνία των αριθμητικών αποτελεσμάτων σε σύγκριση με την θεωρία ήταν αρκετά ικανοποιητική,
- (β') η διαδικασία υλοποίησης της προτεινόμενης τεχνικής ήταν αρκετά απλοποιημένη και πιο ταχύς λόγω της δραστικής μείωσης εφαρμογής του ΔMF , και
- (γ') παρατηρήθηκε μικρή ελάττωση του αριθμητικού σφάλματος των αποτελεσμάτων, που πιθανώς να οφείλεται στην αποφυγή εφαρμογής πολλαπλών μετασχηματισμών Fourier.

Όπως σχολιάζεται στην εργασία επισκόπισης [5], η χρήση των κυματομορφών Lamb για το χαρακτηρισμό της δομικής ακεραιότητας κυματοδηγών στο Μη-Καταστροφικό Έλεγχο μέσω του διαγράμματος των καμπυλών διασκόρπισης αποτελεί ένα ισχυρό εργαλείο για το μηχανικό. Συνεπώς ιδιαίτερο ενδιαφέρον θα είχε να μελετηθεί η μεταβολή ή η διαφοροποίηση των καμπυλών διασκόρπισης σε ελεύθερες επίπεδες μεταλλικές πλάκες που παρουσιάζουν επιφανειακή απώλεια υλικού λόγω διάβρωσης. Στη συνέχεια της ανάλυσης και μελέτης του φαινομένου διασκόρπισης θεωρούνται δύο ελεύθερες επίπεδες πλάκες με απώλεια υλικού στην κάτω επιφάνεια: (α') ορθογωνικής (βλ. Σχ. 5.7) και (β') ημι-ελλειπτικής (βλ. Σχ. 5.8) γεωμετρίας. Το μέγιστο βάθος της απώλειας υλικού τέθηκε ίσο με 2.1 mm, ενώ το άνοιγμά της ίσο με 10 mm. Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία ανάλυσης με πριν παρήχθησαν τα τρισδιάστατα κανονικοποιημένα διαγράμματα διασκόρπισης Σχ. 5.9(β'), 5.10(β') για την ορθογωνική και την ημι-ελλειπτική γεωμετρία απουσία υλικού στην επιφάνεια της πλάκας αντίστοιχα.

Στα Σχ. 5.9(α'), 5.10(α') παρουσιάζονται τα αριθμητικά αποτελέσματα των εν λόγω προβλημάτων για ορθογωνική και ημι-ελλειπτική γεωμετρία διάβρωσης υλικού αντίστοιχα, σε σύγκριση με τις αναλυτικές καμπύλες διασκόρπισης της μη-διαβρωμένης ελεύθερης πλάκας. Όμως για την ορθή σύγκριση όλων των διαγραμμάτων διασκόρπισης έχει υιοθετηθεί σε αυτά η ίδια κλίμακα ανάλυσης στις ισοϋψείς γραμμές αλλά και το ίδιο κατώφλι απαλοιφής του θορύβου. Συγκρίνοντας το Σχ. 5.6(α') με τα αντίστοιχα Σχ. 5.9(α'), 5.10(α') παρατηρείται ότι δε μεταβάλλονται οι καμπύλες διασκόρπισης αλλά ούτε «εξαφανίζονται» κάποιοι τρόποι διάδοσης, απλά η επιρροή της γεωμετρίας της ατέλειας στην κυματική διάδοση του ελαστικού μέσου περιορίζεται στην εξασθένηση ορισμένων τρόπων κυμάτων. Το φαινόμενο όμως της διαρροής του Fourier δυστυχώς είναι πιο έντονο σε αυτά τα διαγράμματα, γεγονός που καθιστά τη μέθοδο αυτή λιγότερο ελκυστική, μιας και με αυτό τον τρόπο χαλάει η ποιότητα ανάλυσης των διαγραμμάτων μέσω της εισαγωγής του τεχνικού αυτού θορύβου.

Σχήμα 5.7: (α') Γεωμετρία ελεύθερης επίπεδης πλάκας με ορθογωνική επιφανειακή απώλεια υλικού και (β') μία τομή αυτής.

Σχήμα 5.8: (α') Γεωμετρία ελεύθερης επίπεδης πλάκας με ημι-ελλειπτική επιφανειακή απώλεια υλικού και (β') μία τομή αυτής.

Τα συμπεράσματα της ανάλυσης μέσω του αριθμητικού προσδιορισμού των καμπυλών διασκόρπισης στις ελεύθερες πλάκες με επιφανειακή διάβρωση υλικού σε σύγκριση με τις αντίστοιχες καμπύλες της ελεύθερης πλάκας χωρίς ατέλειες είναι τα εξής:

- (α') Η ορθογωνική γεωμετρία επιφανειακής απώλειας υλικού γενικά εξασθενίζει την ενέργεια στους περισσότερους τρόπους κυματικής διάδοσης. Αυτοί όμως που φαίνεται να επικρατούν σημαντικά είναι ο S0 τρόπος στις χαμηλές συχνότητες, ο A0 σε πιο ευρύ φάσμα συχνοτήτων, ο A1 ελάχιστα εξασθενημένος και ο S2 περισσότερο εξασθενημένος.
- (β') Στην ελεύθερη πλάκα με ημι-ελλειπτική γεωμετρία διάβρωσης υλικού εξασθενεί η ενέργεια στους περισσότερους τρόπους κυματικής διάδοσης, εκτός των

Σχήμα 5.9: (α') Σύγκριση των θεωρητικών καμπυλών διασκόρπισης (παχιές γραμμές) με τις αριθμητικά παραγόμενες καμπύλες διασκόρπισης (ισοϋψείς λεπτές γραμμές) και (β') τρισδιάστατο διάγραμμα των αριθμητικών αποτελεσμάτων της ελεύθερης επίπεδης πλάκας με ορθογωνική επιφανειακή απώλεια υλικού.

Σχήμα 5.10: (α') Σύγκριση των θεωρητικών καμπυλών διασκόρπισης (παχιές γραμμές) με τις αριθμητικά παραγόμενες καμπύλες διασκόρπισης (ισοϋψείς λεπτές γραμμές) και (β') τρισδιάστατο διάγραμμα των αριθμητικών αποτελεσμάτων της ελεύθερης επίπεδης πλάκας με ημι-ελλειπτική επιφανειακή απώλεια υλικού.

A0, A1 και S1 που φαίνονται ιδιαίτερα ενισχυμένοι στο στενό φάσμα συχνοτήτων των 400 kHz έως 500 kHz. Επίσης παρατηρείται η εξασθενημένη παρουσία των S0, S2, A0 και A1 τρόπων διάδοσης σε σχέση με την πλάκα χωρίς ατέλειες.

(γ') Η ελεύθερη πλάκα με ημι-ελλειπτική γεωμετρία διάβρωσης υλικού σε σχέση με την αντίστοιχη ορθογωνική γεωμετρία παρατηρείται να έχει έντονη την παρουσία του S1 τρόπου στο φάσμα συχνοτήτων από 500 kHz έως 700 kHz.

Όπως αναμενόταν πάντως, το σχήμα της γεωμετρίας της απουσίας υλικού παίζει σημαντικό ρόλο στην κυματική διάδοση του κυματοδηγού. Η επιφάνεια της διαβρωμένης επιφάνειας μπορεί να θεωρηθεί ότι επέχει το ρόλο ενός σκεδαστή των κυμάτων. Μάλιστα στις εργασίες [12, 21, 27] γίνεται χρήση της ΜΣΣ για το χαρακτηρισμό του βάθους εγχοπών-ρωγμών σε επίπεδες πλάκες μέσω του υπολογισμού του ποσοστού σκέδασης και διάθλασης του προσπίπτοντος ελαστικού κύματος στον σκεδαστή.

Μετά από αριθμητικά πειράματα που διεξήχθησαν στο πλαίσιο της διδακτορικής διατριβής, έγινε χρήση της τεχνικής Μεθόδου Τοπικών Ολοκληρωτικών Εξισώσεων χωρίς Διακριτοποίηση σε συνδυασμό με το διδιάστατο μετασχηματισμό Fourier και εφαρμόστηκε με επιτυχία στον αριθμητικό προσδιορισμό των καμπυλών διασκόρπισης για κυματοδηγούς. Τα αποτελέσματα δε που παρήχθεισαν μέσω της ΜΤΟΕΧΔ παρουσίαζαν ελάχιστες διαφορές με τα αντίστοιχα της ΜΣΣ, ενώ η συμφωνία με την αντίστοιχη θεωρία ήταν αρκετά καλή.

Γενικά εδώ κρίνεται σκόπιμο να ειπωθεί ότι θα ήταν αρκετά χρήσιμο να πραγματοποιηθεί στο μέλλον παραμετρική μελέτη της μεταβολής του διαγράμματος διασκόρπισης από το μέγεθος και το είδος της επιφανειακής απώλειας υλικού λόγω διάβρωσης. Τα αποτελέσματα της εργασίας αυτής θα μπορούσαν κάλλιστα να συγκεντρωθούν σε μία βάση δεδομένων. Τέτοια έρευνα σε συνδυασμό με την τεχνολογία της αναγνώρισης προτύπων (pattern recognition) θα μπορούσε να δώσει χρήσιμα συμπεράσματα σε πραγματικά προβλήματα που εμπίπτουν στο πεδίο του ΜΚΕ. Επίσης η ίδια τεχνική μπορεί να εφαρμοστεί και σε άλλου είδους κατασκευές, όπως σωληνώσεις, κελύφη κ.α., όπου είναι γνωστές οι αναλυτικές εκφράσεις που περιγράφουν το φαινόμενο της διασκόρπισης.

5.1.2 Εύρεση καμπυλών διασκόρπισης μέσω της Αναπαράστασης Χρόνου-Συχνότητας

Η κατανομή χρόνου-συχνότητας είναι μία μεθοδολογία βάση της οποίας μπορεί κάποιος να εξετάσει το φασματικό περιεχόμενο ενός σήματος σε συγκεκριμένο χρονικό διάστημα. Στην εργασία και στο βιβλίο του Cohen [6, 7] γίνεται εκτενής περιγραφή διαφόρων κατανομών χρόνου-συχνότητας καθώς και σχολιασμός των εφαρμογών τους. Στην εργασία [11] γίνεται σύγκριση της κατανομής Wigner-Ville με τον βραχύως χρόνου μετασχηματισμό Fourier (short time Fourier transform) και το μετασχηματισμό κυματιδίων (wavelet transform) για την ανάλυση μη στάσιμων σημάτων.

Συμπεραίνεται στην εργασία αυτή ότι η κατανομή Wigner-Ville υπερέχει των άλλων φασματικών μετασχηματισμών διότι είναι πιο γενικός και ότι δεν εμφανίζεται κάποια εξάρτηση του χρόνου με την ανάλυση του σήματος στο πεδίο συχνοτήτων. Παρόλα αυτά το κύριο μειονέκτημα της κατανομής Wigner-Ville είναι η πολυπλοκότητα του αριθμητικού υπολογισμού της, καθώς επίσης τα αρνητικά επίπεδα ενέργειας και οι όροι συσχέτισης που μπορεί να εμφανιστούν, φαινόμενο που δεν έχει κάποια φυσική ερμηνεία.

Η ανάλυση με χρήση της Αναπαράστασης Χρόνου-Συχνότητας (ΑΧΣ) εφαρμόστηκε στη μελέτη της διασκόρπισης σε κύματα του Lamb δημιουργούμενα από ακτίνες laser σε εφαρμογές του ΜΚΕ για την ανίχνευση και εντοπισμό ατελειών σε μεταλλικές κατασκευές [15], σε κατασκευές συνθέτων υλικών [16] καθώς και σε οστά [17]. Σε σύγκριση με τις κλασικές τεχνικές ανάλυσης στο πεδίο του χρόνου και της εκτίμησης του φάσματος, οι οποίες εφαρμόζονται στο πεδίο του χώρου-χρόνου, η μέθοδος της Αναπαράστασης Χρόνου-Συχνότητας απαιτεί τουλάχιστον ένα σήμα για την αναπαράσταση πολλαπλών τρόπων διάδοσης κυμάτων. Η Επαναπροσδιορισμένη Εξομαλυσμένη Ψευδής Κατανομή των Wigner-Ville (Reassigned Smooth Pseudo Wigner-Ville distribution) χρησιμοποιείται στην παρούσα διδακτορική διατριβή για την Αναπαράστασης του Χρόνου-Συχνότητας των σημάτων. Σύντομη περιγραφή της Επαναπροσδιορισμένης Εξομαλυσμένης Ψευδούς Κατανομής Wigner-Ville πραγματοποιείται στο Εδάφ. Δ.2 του Παραρτήματος.

Έστω ελεύθερη επίπεδη πλάκα πάχους $d = 6 \text{ mm}$, με ελαστικά χαρακτηριστικά όπως αυτά που δίδονται στον Πίν. 5.1, η οποία παρουσιάζει μία εγχοπή στην άνω ελεύθερη επιφάνεια. Το άνοιγμα της τριγωνικής εγχοπής (βλ. Σχ. 5.11) είναι ίσο με 3 mm και το βάθος της είναι ίσο με 2 mm . Στα δύο χείλη της εγχοπής εφαρμόζεται ίσο και αντίρροπο οριζόντιο τασικό κρουστικό φορτίο, όμοιο με αυτό του Σχ. 5.5(α'). Ο λόγος για τον οποίο θεωρήθηκε τέτοια κατανομή του φορτίου είναι για την προσέγγιση κατά κάποιο τρόπο της δημιουργίας τοπικών τάσεων στην εγχοπή όταν αυτή διαδίδεται ως ρωγμή. Παρόμοιες παραδοχές έγιναν στην εργασία των Arias και Achenbach [2] για την πρωτοτυποποίηση του φαινομένου της διάδοσης μίας ρωγμής σε ημι-άπειρο ελαστικό μέσο μέσω της Μεθόδου Συνοριακών Στοιχείων. Οι διαφορές μεταξύ της ανάλυσης στην παρούσα διδακτορική διατριβή και της εργασίας [2] είναι ότι οι Arias και Achenbach θεώρησαν ομοιόμορφη κατανομή της τάσης στα χείλη της ρωγμής και ότι το τασικό φορτίο που εφαρμόστηκε ήταν βηματική συνάρτηση.

Λόγω συμμετρίας της γεωμετρίας και των συνοριακών συνθηκών ως προς την εγχοπή, διακριτοποιείται μονάχα το δεξί μέρος της διδιάστατης επίπεδης πλάκας. Για τη διακριτοποίηση του συνόρου χρησιμοποιήθηκαν μονάχα τρίκομβα τετραγωνικής-βάσης μονοδιάστατα στοιχεία μήκους $l_e = 0.5 \text{ mm}$ για τη Μέθοδο Συνοριακών Στοιχείων. Αντίστοιχα για τις μεθόδους χωρίς διακριτοποίηση υιοθετήθηκε ομοιόμορφη κατανομή κόμβων στο σύνορο και στο εσωτερικό του χωρίου ανάλυσης, με την απόσταση δύο διαδοχικών κόμβων να είναι ίση με $l_n = 0.25 \text{ mm}$, όπως φαίνεται στο Σχ. 5.11(β'). Η διακριτοποίηση του προβλήματος κυματικής διάδοσης στο χρόνο παρέμεινε η ίδια με αυτή του Υποεδάφ. 5.1.1.

Σχήμα 5.11: (α') Τομή της ελεύθερης επίπεδης πλάκας που παρουσιάζει επιφανειακή εγκοπή, με λεπτομέρεια στην εφαρμογή του οριζόντιου τασικού φορτίου στο χείλος της εγκοπής και (β') τρόπος διακριτοποίησης του συνόρου και του εσωτερικού της πλάκας.

Επόμενο βήμα της ανάλυσης του προβλήματος κυματικής διάδοσης είναι η αριθμητική επίλυσή του μέσω της Μεθόδου Συνοριακών Στοιχείων και των Τοπικών Ολοκληρωτικών Εξισώσεων χωρίς Διακριτοποίηση 4ου τύπου. Συγκρίνοντας τα αριθμητικά αποτελέσματα που παρήγαγαν οι δύο αριθμητικές μεθοδολογίες η συμφωνία τους ήταν πολύ καλή.

Δύο σημεία ενδιαφέροντος θεωρούνται για την παρατήρηση της κυματικής διάδοσης στην άνω επιφάνεια της ελεύθερης πλάκας: το σημείο A(100 mm, 6 mm) και το σημείο B(200 mm, 6 mm), όπου σημείο αναφοράς είναι το κάτω αριστερό άκρο της πλάκας (βλ. Σχ. 5.11). Τα σημεία παρατήρησης θεωρείται ότι αποτελούν σημεία τοποθέτησης αισθητήρων καταγραφής του ΜΚΕ. Συνεπώς για την κατασκευή της ΑΧΣ λαμβάνεται υπόψη η απόκριση μίας δέσμης κόμβων με κέντρο τα σημεία Α και Β και ακτίνα ίση με $D/2$. Βέβαια, όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, η κατανομή των Wigner-Ville μπορεί να εφαρμοστεί με ασφάλεια λαμβάνοντας υπόψη την απόκριση ενός μονάχα κομβικού σημείου· όμως στην εργασία [17] προτείνεται η ανάλυση της απόκρισης μίας δέσμης σημείων, όσων περιέχονται στην περιοχή που καταλαμβάνει ο αισθητήρας καταγραφής. Η διάμετρος του αισθητήρα θεωρήθηκε στο εξής ίση με $D = 5$ mm. Συνεπώς για την κατασκευή της κατανομής Wigner-Ville λαμβάνεται ο μέσος όρος της απόκρισης του διανύσματος των μετατοπίσεων των κόμβων που

εμπίπτουν στην περιοχή κοντά στο εκάστοτε σημείο ενδιαφέροντος.

Σχήμα 5.12: Αναπαράσταση Χρόνου-Συχνότητας και απόκριση της (α') u_1 , (β') u_2 συνιστώσας των μετατοπίσεων του σημείου A και αντίστοιχα της (γ') u_1 , (δ') u_2 συνιστώσας των μετατοπίσεων του σημείου B για το πρόβλημα της ελεύθερης πλάκας που παρουσιάζει ατέλεια μορφής εγκοπής, υπό χρουστικό τασικό φορτίο.

Η Επαναπροσδιορισμένη Εξομαλημένη Ψευδής Κατανομή Wigner-Ville αναπαριστάται στο Σχ. 5.12 ως «χάρτης χρωμάτων», όπου το λευκό χρώμα αντιστοιχεί σε μηδενικό πλάτος του διαγράμματος χρόνου-συχνότητας και το κόκκινο χρώμα αντιστοιχεί στην πιο υψηλή στάθμη του πλάτους. Όλες οι κατανομές στο εξής θα αναπαριστώνται σε λογαριθμική κλίμακα με σταθερό κατώφλι ίσο με 0.5% του μέγιστου ενεργειακού πλάτους του φάσματος. Στα ίδια διαγράμματα παρατίθενται σε υπέρθεση των κατανομών Wigner-Ville και οι αναλυτικές καμπύλες διασκόρπισης της ομαδικής ταχύτητας των κυμάτων ως συνάρτηση της συχνότητας, μέσω της σχέσης των Rayleigh-Lamb (βλ. Εξ. (5.2)). Δεδομένης της απόστασης s μεταξύ της διέγερσης και του σημείου παρατήρησης μπορεί να μετασχηματιστεί το διάγραμμα των καμπυλών διασκόρπισης από (c_g, f) στη γνώριμη μορφή $\langle t = s/c_g, f \rangle$. Με λεπτές συνεχείς γραμμές αναπαριστώνται οι συμμετρικοί και με λεπτές διακεκομ-

μένες γραμμές οι αντισυμμετρικοί τρόποι διάδοσης των ελαστικών κυμάτων στον κυματοδηγό. Στο άνω μέρος των διαγραμμάτων Χρόνου-Συχνότητας παρατίθεται η κυματομορφή της οριζόντιας ή κάθετης συνιστώσας των μετατοπίσεων ως συνάρτηση του χρόνου, για τα δύο σημεία παρατήρησης Α και Β. Στα Σχ. 5.12(α'), 5.12(β') αναπαριστώνται οι ΕΕΨΚWV της απόκρισης της u_1 και u_2 αντίστοιχα του σημείου Α, ενώ οι αποκρίσεις των αντίστοιχων συνιστωσών των μετατοπίσεων για το σημείο Β παρουσιάζονται στα Σχ. 5.12(γ'), 5.12(δ'). Συγκρίνοντας τα αντίστοιχα σχήματα των μετατοπίσεων για τα δύο σημεία παρατήρησης συμπεραίνεται ότι το διάγραμμα των κατανομών δεν αλλάζει σημαντικά. Συνεπώς μπορεί να ειπωθεί με σιγουριά ότι η επιλογή του σημείου παρατήρησης της κυματικής διάδοσης για το πρόβλημα της ελεύθερης επίπεδης πλάκας είναι ανεξάρτητο της θέσης του ως προς την θέση της διέγερσης για την κατασκευή του διαγράμματος Χρόνου-Συχνότητας. Αυτό όμως που πρέπει να τονιστεί είναι ότι το σημείο παρατήρησης δεν θα πρέπει να πλησιάζει το δεξί ελεύθερο άκρο της κατασκευής διότι προφανώς η άφιξη ανεπιθύμητων ανακλάσεων μέσα στο παράθυρο μελέτης της μεταβατικής απόκρισης του φαινομένου μπορεί να επηρεάσει σημαντικά τα αποτελέσματα. Τέτοιες ανακλάσεις είναι εμφανείς στα Σχ. 5.12(α') και 5.12(γ') στις χρονικές στιγμές 135μsec και 112μsec αντίστοιχα. Οι λεπτές χρωματικές επιφάνειες των κατανομών του Σχ. 5.12(α') που ενώνουν τον S0 με τον A0 τρόπο διάδοσης, καθώς και του S1 με τον S2 στο Σχ. 5.12(β') είναι αποτέλεσμα της συσχέτισης γειτονικών στο φάσμα διαφορετικών τρόπων κυμάτων. Τούτο το ανεπιθύμητο φαινόμενο μπορεί να απαλοιφθεί μερικώς με την ανύψωση του κατωφλίου ανάλυσης με αντίκτυπο την «εξαφάνιση» κάποιων τρόπων διάδοσης που πιθανώς να εμφανίζουν χαμηλή ενεργειακή στάθμη στην Αναπαράσταση Χρόνου-Συχνότητας. Από τη σύγκριση των αριθμητικών αποτελεσμάτων με την θεωρία συμπεραίνεται η εξαιρετική συμφωνία τους, καθώς με αυτό τον τρόπο επιβεβαιώνεται η πιστότητα των αριθμητικών αποτελεσμάτων.

Σχήμα 5.13: Τομή της ελεύθερης επίπεδης πλάκας που παρουσιάζει ατέλεια οριζόντιου ελλειψοειδούς εγκλείσματος, με λεπτομέρεια στην εφαρμογή του κάθετου τασιακού φορτίου στα δύο άκρα της ατέλειας.

Έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον όμως να δει κάποιος τον τρόπο με τον οποίο διαδίδονται τα κύματα Lamb στον προαναφερθέντα κυματοδηγό όταν το είδος της ατέλειας διαφέρει σημαντικά σε σχέση με την προηγούμενη ανάλυση.

Έστω ελεύθερη επίπεδη πλάκα –ιδίων διαστάσεων και ελαστικών ιδιοτήτων με πριν– η οποία παρουσιάζει οριζόντιο ελλειπτικό έγκλεισμα στο μέσο επίπεδό της, όπως φαίνεται στο Σχ. 5.13. Το οριζόντιο άνοιγμα της ρωγμής είναι ίσο με 2 mm και το πλάτος της ίσο με 0.5 mm. Για την πρωτοτυποποίηση της διάδοσης της ρωγμής θεωρείται εκθετική κατανομή κάθετων δυνάμεων στα χείλη της ατέλειας. Στο Σχ. 5.13 φαίνεται παραστατικά η κατανομή των διανυσμάτων των τάσεων στα άκρα του οριζόντιου εγκλείσματος.

Σχήμα 5.14: Αναπαράσταση Χρόνου-Συχνότητας και απόκριση της (α') u_1 , (β') u_2 συνιστώσας των μετατοπίσεων του σημείου A και αντίστοιχα της (γ') u_1 , (δ') u_2 συνιστώσας των μετατοπίσεων του σημείου B για το πρόβλημα της ελεύθερης πλάκας που παρουσιάζει ατέλεια μορφής οριζόντιου ελλειπτικού εγκλείσματος, υπό κρουστικό τασικό φορτίο.

Επιλύοντας αριθμητικά το εν λόγω πρόβλημα κυματικής διάδοσης και λαμβάνοντας υπόψη τη μεταβατική απόκριση στα σημεία A και B, στην άνω επιφάνεια της ελεύθερης πλάκας, μπορεί κάποιος να κατασκευάσει τα διαγράμματα Χρόνου-Συχνότητας. Στα Σχ. 5.14(α'), 5.14(β') παρουσιάζονται οι Αναπαραστάσεις Χρόνου-Συχνότητας (ΑΧΣ) της οριζόντιας και κάθετης συνιστώσας των μετατοπίσεων για

το σημείο παρατήρησης A, και στα Σχ. 5.14(γ'), 5.14(δ') παρουσιάζονται όμοια οι αντίστοιχες συνιστώσες των μετατοπίσεων για το σημείο παρατήρησης B. Από το Σχ. 5.14 μπορεί εύκολα κάποιος να συμπεράνει ότι τα αριθμητικά αποτελέσματα είναι σε αρκετά καλή συμφωνία με τα θεωρητικώς αναμενόμενα αποτελέσματα. Εδώ αξίζει να σημειωθεί ότι τα τμήματα στις AXΣ των Σχ. 5.14(α') και 5.14(γ') όπου δεν ταυτίζονται με τις θεωρητικά υπολογισμένες καμπύλες διασκόρπισης είναι αποτέλεσμα των ανακλάσεων που καταφθάνουν στα 120ms περίπου στο σημείο A και αντίστοιχα στα 100ms περίπου στο σημείο B, προερχόμενες κυρίως από το δεξί ελεύθερο άκρο της επίπεδης πλάκας.

Παρόλα αυτά συγκρίνοντας τα αριθμητικά αποτελέσματα που προέκυψαν από την αριθμητική ανάλυση της ελεύθερης επίπεδης πλάκας για δύο γενικές μορφές είδους ατέλειας, μπορεί κάποιος να συμπεράνει τα εξής:

- (α') όταν η ατέλεια είναι κάθετη τότε παρατηρείται να διαδίδονται κυρίως ο S0 και ο A0 τρόπος στο φάσμα συχνοτήτων έως τα 250 kHz, επιπλέον ο A1 τρόπος είναι κυρίαρχος στο στενό φάσμα από τα 300 kHz έως τα 400 kHz και ο S1 με τον S2 (ελαφρώς εξασθενημένο) στο φάσμα από 450 kHz έως 700 kHz,
- (β') όταν η ατέλεια είναι οριζόντια τότε παρατηρείται να διαδίδεται κυρίως ο S0 τρόπος στο φάσμα συχνοτήτων από τα 100 kHz έως τα 400 kHz περίπου και ο S1 με τον S2 (ελαφρώς εξασθενημένο) στο φάσμα από 450 kHz έως 850 kHz,
- (γ') ανεξάρτητα της διεύθυνσης της ατέλειας στην ελεύθερη επίπεδη πλάκα διαδίδονται πάντα οι πρώτοι τρεις συμμετρικοί τρόποι, και
- (δ') στην περίπτωση ατέλειας υπό μορφή οριζόντιας ελλειπτικής ρωγμής φαίνεται να απουσιάζουν γενικά οι αντισυμμετρικοί τρόποι διάδοσης κυμάτων Lamb.

Στη συνέχεια της ανάλυσης θεωρήθηκε ότι η επίπεδη πλάκα αλληλεπιδρά με υγρό μέσο, στην προκειμένη περίπτωση επιλέχθηκε να είναι πετρέλαιο, όπως φαίνεται στο Σχ. 5.15. Οι ιδιότητες του πετρελαίου δίδονται αναλυτικά στον Πίν. 5.2. Το στρώμα του υγρού συνεχούς μέσου θεωρήθηκε ημι-άπειρο, συνεπώς σύμφωνα με τη ΜΣΣ το σύνορο του χωρίου αυτού διακριτοποιήθηκε με μία σειρά μονάχα συνοριακών στοιχείων. Τα στοιχεία και σε αυτή την περίπτωση επιλέχθηκαν να είναι τρίκομβα τετραγωνικής-βάσης μονοδιάστατα στοιχεία μήκους $l_e = 0.5 \text{ mm}$. Διατηρώντας τις υπόλοιπες παραμέτρους σχεδιασμού (συνοριακές συνθήκες, συνάρτηση διέγερσης) και ανάλυσης (χρονικό βήμα, χρονική διάρκεια παρατήρησης μεταβατικού φαινομένου) του προβλήματος αλληλεπίδρασης στερεού-υγρού με προηγουμένως, αυτό επιλύθηκε αριθμητικά διαδοχικά και για τις δύο περιπτώσεις αστοχίας στην επίπεδη πλάκα.

Το πρώτο πρόβλημα αλληλεπίδρασης υγρού-στερεού σώματος που επιλύεται είναι αυτό της πλάκας που παρουσιάζει ατέλεια μορφής εγκοπής. Στο Σχ. 5.16 παρουσιάζονται οι Αναπαραστάσεις Χρόνου-Συχνότητας σε συνδυασμό με το διάγραμμα της οριζόντιας ή κάθετης συνιστώσας των μετατοπίσεων ως συνάρτηση του χρόνου, για τα σημεία παρατήρησης A και B. Στα Σχ. 5.16(α'), 5.16(β') αναπαριστώνται οι

Σχήμα 5.15: Τομή της ελεύθερης επίπεδης πλάκας που αλληλεπιδρά με το ρευστό (πετρέλαιο) όταν παρουσιάζει ατέλεια υπό μορφή (α') επιφανειακής εγκοπής και (β') οριζόντιου ελλειψοειδούς εγκλείσματος.

ΕΕΨΚWV της απόκρισης της u_1 και u_2 αντίστοιχα του σημείου A, ενώ οι αποκρίσεις των αντίστοιχων συνιστωσών των μετατοπίσεων για το σημείο B παρουσιάζονται στα Σχ. 5.16(γ'), 5.16(δ'). Όμοια με πριν, στα διαγράμματα των κατανομών Wigner-Ville έχουν υπερτεθεί οι αναλυτικές καμπύλες διασκόρπισης της ομαδικής ταχύτητας των κυμάτων ως συνάρτηση της συχνότητας του προβλήματος της ελεύθερης επίπεδης πλάκας. Με λεπτές συνεχείς γραμμές αναπαριστώνται οι συμμετρικοί τρόποι διάδοσης των ελαστικών κυμάτων και με λεπτές διακεκομμένες γραμμές οι αντίστοιχοι αντισυμμετρικοί.

Συγκρίνοντας τα αριθμητικά αποτελέσματα των ΑΧΣ για τα δύο προβλήματα κυματικής διάδοσης –την ελεύθερη επίπεδη πλάκα καθώς και την πλάκα που αλληλεπιδρά με το ημι-άπειρο χωρίο του υγρού μέσου που παρουσιάζουν ατέλεια μορφής εγκοπής– μπορεί κάποιος να εξάγει τα ακόλουθα χρήσιμα συμπεράσματα:

- (α') Για το πρόβλημα της ελεύθερης επίπεδης πλάκας παρατηρείται να διεγείρονται περισσότερο οι S0, S1 συμμετρικοί και οι A0, A1 αντισυμμετρικοί τρόποι διάδοσης των κυμάτων του Lamb, ενώ λιγότερο διεγείρεται ο S2. Ο A2 αντισυμμετρικός τρόπος φαίνεται να μην επηρεάζει την κυματική διάδοση στην

$$\begin{array}{cc} \text{διαμήκες κύμα} & \text{πυκνότητα} \\ c_p = 1750 \text{ m/s} & \rho_a = 881 \text{ kg/m}^3 \end{array}$$

Πίνακας 5.2: Ιδιότητες πετρελαίου.

πλάκα διότι δεν εμφανίζεται στην ΕΕΨΚWV των φασματικών διαγραμμάτων του Σχ. 5.12 για τα δύο σημεία παρατήρησης.

- (β') Στο πρόβλημα της ελεύθερης επίπεδης πλάκας που αλληλεπιδρά με το πετρέλαιο παρατηρείται ότι διεγείρονται οι S0, S1 συμμετρικοί και οι A0, A1 αντισυμμετρικοί τρόποι διάδοσης των κυμάτων του Lamb. Ο S2 συμμετρικός και ο A2 αντισυμμετρικός τρόπος φαίνεται να μην επηρεάζουν την κυματική διάδοση στην πλάκα λόγω της απουσίας τους από τα διαγράμματα του Σχ. 5.16 για τα ίδια σημεία παρατήρησης.
- (γ') Οι πιο ουσιαστικές διαφορές μεταξύ των ΑΧΣ για τα δύο προβλήματα κυματικής διάδοσης είναι η απουσία του S2 τρόπου, καθώς και η μη εμφανής παρουσία του S0 τρόπου στο στενό φάσμα συχνοτήτων από 350 kHz έως 410 kHz περίπου για το πρόβλημα της πλάκας με υγρό. Επίσης όμοια ο A1 τρόπος φαίνεται στο δεύτερο πρόβλημα να περιορίζεται στο φάσμα από 360 kHz έως 500 kHz περίπου.
- (δ') Ενδιαφέρον σημείο παρατήρησης είναι το γεγονός ότι μεταξύ των δύο μεταβατικών προβλημάτων, της ελεύθερης επίπεδης χαλύβδινης πλάκας με ή χωρίς πετρέλαιο, στο μεν πρώτο πρόβλημα ο A0 τρόπος φαίνεται να έχει χαμηλή ενεργειακή στάθμη –άρα και μικρότερη επιρροή– στο στενό φάσμα των 60 kHz έως 200 kHz, σε αντίθεση με το δεύτερο πρόβλημα που η παρουσία του είναι πολύ πιο έντονη.

Το δεύτερο πρόβλημα αλληλεπίδρασης υγρού-στερεού σώματος που επιλύεται είναι αυτό της πλάκας που παρουσιάζει ατέλεια μορφής οριζόντιας ρωγμής. Στο Σχ. 5.17 παρουσιάζονται οι ΑΧΣ σε συνδυασμό με το διάγραμμα της οριζόντιας ή κάθετης συνιστώσας των μετατοπίσεων ως συνάρτηση του χρόνου, για τα σημεία παρατήρησης Α και Β. Στα Σχ. 5.17(α'), 5.17(β') αναπαριστώνται οι κατανομές Wigner-Ville της απόκρισης των u_1 και u_2 συνιστωσών των μετατοπίσεων αντίστοιχα στο σημείο Α, ενώ οι αποκρίσεις των αντίστοιχων συνιστωσών στο σημείο Β παρουσιάζονται στα Σχ. 5.17(γ'), 5.17(δ').

Εάν κάποιος συγκρίνει τα αριθμητικά αποτελέσματα των διαγραμμάτων Χρόνου-Συχνότητας και των αντίστοιχων κυματομορφών των διαταραχών που διαδίδονται για τα δύο προβλήματα κυματικής διάδοσης –την ελεύθερη επίπεδη πλάκα καθώς και την πλάκα που αλληλεπιδρά με το ημι-άπειρο χωρίο του υγρού μέσου που παρουσιάζουν ατέλεια μορφής οριζόντιας ρωγμής– μπορεί να εξάγει τα ακόλουθα ενδιαφέροντα συμπεράσματα:

Σχήμα 5.16: Αναπαράσταση Χρόνου-Συχνότητας και απόκριση της (α') u_1 , (β') u_2 συνιστώσας των μετατοπίσεων του σημείου Α και αντίστοιχα της (γ') u_1 , (δ') u_2 συνιστώσας των μετατοπίσεων του σημείου Β για το πρόβλημα της αλληλεπίδρασης υγρού και επίπεδης πλάκας που παρουσιάζει ατέλεια μορφής εγκοπής, υπό κρουστικό τασικό φορτίο.

(α') Οι ΑΧΣ δεν δείχνουν να αλλάζουν σημαντικά, ανεξάρτητα εάν υπάρχει ή όχι υγρό μέσο να αλληλεπιδρά με την μεταλλική κατασκευή. Οι τρόποι κυμάτων Lamb που διαδίδονται και στις δύο περιπτώσεις φαίνεται να έχουν μάλιστα την ίδια ενεργειακή ισχύ.

(β') Αντίθετα αν προσέξει κάποιος τις κυματομορφές μπορεί να παρατηρήσει ότι το μέγιστο πλάτος των κυμάτων που καταγράφονται μειώνεται στην περίπτωση που υπεισέρχεται η αλληλεπίδραση του υγρού σώματος στην κατασκευή. Το φαινόμενο αυτό οφείλεται καθαρά στο γεγονός ότι ένα μέρος της ενέργειας «διαχέεται» στο υγρό μέσο, με αποτέλεσμα την άμεση εξασθένηση του σήματος.

Μέχρι τώρα η ανάλυση της κυματικής διάδοσης σε κυματοδηγούς έγινε με θεωρή-

Σχήμα 5.17: Αναπαράσταση Χρόνου-Συχνότητας και απόκριση της (α') u_1 , (β') u_2 συνιστώσας των μετατοπίσεων του σημείου A και αντίστοιχα της (γ') u_1 , (δ') u_2 συνιστώσας των μετατοπίσεων του σημείου B για το πρόβλημα της αλληλεπίδρασης υγρού και επίπεδης πλάκας που παρουσιάζει ατέλεια μορφής οριζόντιου ελλειπτικού εγκλείσματος, υπό κρουστικό τασικό φορτίο.

ση κρουστικής συνάρτησης διέγερσης. Αυτού του είδους η φόρτιση στην πράξη προσεγγίζει αρκετά ικανοποιητικά την απελευθέρωση τασικής ενέργειας όταν διαδίδεται μία ρωγή στην κατασκευή –προσομοιάζοντας έτσι ένα πραγματικό πείραμα Ακουστικής Εκπομπής– ή το επιφανειακό σπάσιμο μύτης μολυβιού –προσομοιάζοντας αντίστοιχα ένα πείραμα Ακουστο-Υπερήχων (ΑΥ) του ΜΚΕ. Το πρόβλημα όμως που δημιουργείται με την επιλογή τέτοιας συνάρτησης διέγερσης είναι καθαρά θέμα πρωτοτυποποίησης· δηλαδή για την χωρική διακριτοποίηση της κατασκευής που μελετάται απαιτείται πυκνό πλέγμα στοιχείων ή/και κατανομής κόμβων λόγω του ευρέως φάσματος επίλυσης του προβλήματος. Αποτέλεσμα αυτού είναι το υψηλό κόστος σε υπολογιστικό χρόνο για την αριθμητική διεκπεραίωσή του. Ως εκ τούτου, προτείνεται η επίλυση του προβλήματος κυματικής διάδοσης σε ένα στενό φάσμα «χαμηλών» συχνοτήτων έτσι ώστε η χωρική διακριτοποίηση, άρα επομένως

και η συνολική διάρκεια επίλυσης, να μπορεί να επιτευχθεί σε λογικά υπολογιστικά πλαίσια. Ενδεικτικά για το παραπάνω αρμονικά-μεταβαλλόμενο πρόβλημα στο φάσμα συχνοτήτων μέχρι το 1 MHz, ο υπολογιστικός χρόνος που απαιτήθηκε σε ένα συμβατό Η/Υ (με επεξεργαστή Pentium IV συχνότητας χρονισμού στα 3 GHz και μνήμης RAM 4GByte) ήταν περίπου έξι μέρες. Αντίθετα όμως η επίλυση του ίδιου αρμονικά-μεταβαλλόμενου προβλήματος μέχρι τα 300 kHz –μέγιστη αρμονική συχνότητα– ήταν περίπου δύο ώρες.

Ένας επιπλέον λόγος για τον οποίο πρόκειται να γίνει αριθμητική επίλυση των ακόλουθων προβλημάτων κυματικής διάδοσης σε συγκεκριμένα φάσματα συχνοτήτων είναι το είδος των αισθητήρων καταγραφής που χρησιμοποιούνται σε πραγματικά πειράματα του ΜΚΕ. Οι περισσότεροι αισθητήρες από αυτούς που χρησιμοποιούνται στην πράξη έχουν ευαισθησία σε ένα στενό φάσμα συχνοτήτων (narrow band) – συχνά αποκαλούμενων και ως αισθητήρων συντονισμού (resonant sensors)– διότι σε αυτό το φάσμα αποκρίνονται ικανοποιητικότερα. Σε αντίθεση με τους αντίστοιχους αισθητήρες ευρέως φάσματος (broad band), οι οποίοι δεν χρησιμοποιούνται εκτενώς σε πειράματα Ακουστικής Εκπομπής, λόγω της εν γένει μειωμένης ευαισθησίας τους [9]. Επομένως γίνεται κατανοητό ότι οι αισθητήρες συντονισμού συμπεριφέρονται περισσότερο σαν φίλτρα αποκοπής κάποιων συχνοτήτων πέρα του φάσματος λειτουργίας τους. Για παράδειγμα ο αισθητήρας R15 της εταιρίας Μη-Καταστροφικού Ελέγχου: Physical Acoustics Corporation¹, με βάση το διάγραμμα ευαισθησίας του, αποκρίνεται ικανοποιητικότερα στο στενό φάσμα συχνοτήτων από τα 20 kHz μέχρι τα 200 kHz, όπου στα 150 kHz περίπου παρουσιάζει μέγιστη ευαισθησία. Αντίστοιχα ο αισθητήρας R30 της ίδιας εταιρίας έχει φάσμα λειτουργίας μεταξύ των 100 kHz και 400 kHz, όπου περίπου στα 300 kHz παρουσιάζει μέγιστη ευαισθησία. Συνεπώς εάν η κατασκευή διεγερθεί σε ένα ευρύ φάσμα συχνοτήτων τότε οι αισθητήρες συντονισμού δεν θα καταγράψουν τα κύματα που περιέχουν αρμονικές συχνότητες πέρα του φάσματος ευαισθησίας τους.

Εδώ πρέπει να σημειωθεί ένα επιπλέον θετικό χαρακτηριστικό της φύσεως του προβλήματος κυματικής διάδοσης που πραγματεύεται η παρούσα διδακτορική διατριβή. Λόγω της γραμμικής συμπεριφοράς του συστήματος, είναι δυνατό κάποιος να εκμεταλλευτεί την ιδιότητα της υπέρθεσης. Δηλαδή, μπορεί να υπολογιστεί αριθμητικά το πρότυπο σε διάφορες ζώνες ενδιαφέροντος των αρμονικών συνιστωσών και έπειτα να κάνει υπέρθεση της απόκρισης του συστήματος ανά ζώνη, ώστε να εξάγει τη γενική του συμπεριφορά σε ένα ευρύτερο φάσμα συχνοτήτων.

Για τους παραπάνω λόγους επιλέχθηκε η συνάρτηση διέγερσης να έχει στο εξής κατανομή του φάσματος σε σχήμα καμπάνας. Τέτοιες κατανομές είναι οι εξής: Gauss, Hanning, Hamming κ.α. Στην παρούσα διδακτορική διατριβή η συνάρτηση του σήματος διέγερσης ήταν ένας παραθυρικός ημιτονοειδούς-μορφής παλμός καθυστέρησης τύπου Hanning, η οποία μπορεί να εκφραστεί ως [26]

¹βλ. ιστοσελίδα: <http://www.pacndt.com>

Σχήμα 5.18: (α') Συνάρτηση διέγερσης τύπου παραθύρου Hanning με κεντρική συχνότητα στα 150 kHz με (β') πλάτος του φάσματος στο πεδίο συχνοτήτων μετά από μετασχηματισμό Fourier, και (γ') η διέγερση ίδιου τύπου με κεντρική συχνότητα στα 300 kHz με (δ') αντίστοιχο πλάτος του φάσματος στο πεδίο συχνοτήτων.

$$p_0(t) = \begin{cases} \frac{A}{2} \left[1 - \cos(2\pi f_0 t / n_0) \right] \cos(2\pi f_0 t), & \forall t \leq n_0 / f_0 \\ 0, & \forall t > n_0 / f_0 \end{cases}, \quad (5.3)$$

όπου $A = 1\text{MPa}$ το πλάτος της διέγερσης, f_0 η κεντρική συχνότητα (εκφρασμένη σε Hz) και n_0 ο αριθμός των εμπεριεχόμενων ημιτονοειδών κύκλων στον παλμό.

Αντιπροσωπευτικά επιλέχθηκαν οι κεντρικές συχνότητες να είναι τα 150 kHz και τα 300 kHz, συχνότητες που αντιστοιχούν σε δύο τυπικούς αισθητήρες συντονισμού καταγραφής του ΜΚΕ. Ένας επιπλέον λόγος για τον οποίο επιλέχθηκαν αυτές οι συχνότητες στο φάσμα μέχρι το 1 MHz είναι απόρροια της ανάλυσης της ελεύθερης επίπεδης πλάκας μέσω της φασματικής ανάλυσης Fourier του Υποεδάφ. 5.1.1 καθώς και μέσω της ΑΧΣ για το ίδιο πρόβλημα. Με βάση τα προηγούμενα αποτελέσματα έγινε περισσότερο κατανοητό ότι οι επικρατέστεροι τρόποι διάδοσης ελαστικών κυμάτων διεγείρονται στο φάσμα συχνοτήτων μέχρι τα 500 kHz περίπου. Ο αριθμός των εμπεριεχόμενων ημιτονοειδών κύκλων στον παλμό με κεντρική συχνότητα στα 150 kHz και 300 kHz τέθηκε ίσος με $n_0 = 4$ και $n_0 = 8$ αντίστοιχα, έτσι ώστε και οι δύο παλμοί να έχουν την ίδια χρονική διάρκεια άρα και τον ίδιο αριθμό αρμονικών συχνοτήτων στο φάσμα τους. Η διάρκεια μελέτης του δυναμικού φαινομένου επιλέχθηκε να είναι ίση με 210μsec, με αριθμό δειγμάτων ίσο με $N_t = 1024$. Στο Σχ. 5.18(α') αναπαριστάται η διέγερση του παλμού τύπου Hanning με κεντρική συ-

χνότητα στα 150 kHz, με το αντίστοιχο φάσμα ισχύος να δίδεται στο Σχ. 5.18(β'). Επίσης στο Σχ. 5.18(γ') αναπαριστάται η διέγερση του παλμού ίδιου τύπου με κεντρική συχνότητα στα 300 kHz και φάσμα ισχύος να παρουσιάζεται αντίστοιχα στο Σχ. 5.18(δ').

Σχήμα 5.19: Αναπαράσταση Χρόνου-Συχνότητας και απόκριση της (α') u_1 , (β') u_2 συνιστώσας των μετατοπίσεων του σημείου Α και αντίστοιχα της (γ') u_1 , (δ') u_2 συνιστώσας των μετατοπίσεων του σημείου Β για το πρόβλημα της ελεύθερης πλάκας που παρουσιάζει ατέλεια μορφής εγχοπής, υπό τασικό φορτίο τύπου Hanning βραχέως φάσματος με κεντρική συχνότητα στα 150 kHz.

Έστω ελεύθερη επίπεδη μεταλλική πλάκα, η οποία παρουσιάζει ατέλεια υπό μορφή επιφανειακής εγχοπής –όπως φαίνεται στο Σχ. 5.11(α')– με τη διέγερση να είναι της μορφής του Σχ. 5.18(α') ή του Σχ. 5.18(γ'). Στα διαγράμματα του φάσματος ισχύος γίνεται εμφανές ότι σε ένα μεγάλο πλήθος των αρμονικών συνιστωσών το πλάτος είναι πάρα πολύ μικρό, σχεδόν μηδέν. Συνεπώς για ένα μικρότερο αριθμό του συνολικού πλήθους των $N_t/2 + 1$ αρμονικών επιλύθηκε αριθμητικά το μεταβατικό πρόβλημα, εξοικονομώντας έτσι υπολογιστικό χρόνο έως και 60% (βλ. Εδάφ. 2.4). Αντίθετα όμως στο φάσμα συχνοτήτων από 50 έως 250 kHz για τη διέγερση του

Σχήμα 5.20: Αναπαράσταση Χρόνου-Συχνότητας και απόκριση της (α') u_1 , (β') u_2 συνιστώσας των μετατοπίσεων του σημείου A και αντίστοιχα της (γ') u_1 , (δ') u_2 συνιστώσας των μετατοπίσεων του σημείου B για το πρόβλημα της ελεύθερης πλάκας που παρουσιάζει ατέλεια μορφής εγκοπής, υπό τασικό φορτίο τύπου Hanning βραχέως φάσματος με κεντρική συχνότητα στα 300 kHz.

Σχ. 5.18(β') και στο φάσμα από 200 έως 400 kHz για τη διέγερση του Σχ. 5.18(δ') το πλάτος είναι σημαντικό. Για τον καθορισμό του τρόπου αποκοπής των αρμονικών συνιστωσών με χαμηλή ενεργειακή συνεισφορά στο φάσμα των συχνοτήτων υιοθετήθηκε στο εξής κατώφλι ίσο με 0.25% του μέγιστου πλάτους στο φάσμα ισχύος της εκάστοτε διέγερσης. Ως εκ τούτου, με βάση το κριτήριο διακριτοποίησης που περιγράφηκε αναλυτικά στο Εδάφ. 2.4, η ελάχιστη απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών κόμβων τέθηκε περίπου $l_n = 3.5 \text{ mm}$ και $l_n = 2.1 \text{ mm}$ για τα δύο αυτά προβλήματα αντίστοιχα. Διατηρώντας τις υπόλοιπες παραμέτρους σχεδιασμού και ανάλυσης (συνοριακές συνθήκες, χρονικό βήμα, χρονική διάρκεια παρατήρησης μεταβατικού φαινομένου) του μεταβατικού προβλήματος, αυτό επιλύθηκε αριθμητικά.

Η απόκριση των συνιστωσών των μετατοπίσεων με τα αντίστοιχα διαγράμματα Χρόνου-Συχνότητας των σημείων παρατήρησης A και B παρουσιάζονται στο Σχ.

Σχήμα 5.21: (α') Συνάρτηση διέγερσης τύπου παραθύρου Hanning με κεντρική συχνότητα στα 150 kHz με (β') πλάτος του φάσματος στο πεδίο συχνοτήτων μετά από μετασχηματισμό Fourier, και (γ') η διέγερση ίδιου τύπου με κεντρική συχνότητα στα 300 kHz με (δ') πλάτος του φάσματος στο πεδίο συχνοτήτων μετά από μετασχηματισμό Fourier.

5.19 όταν η κεντρική συχνότητα της διέγερσης είναι τα 150 kHz, και στο Σχ. 5.20 όταν η κεντρική συχνότητα είναι τα 300 kHz. Για την πρώτη περίπτωση διέγερσης γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι μονάχα ο S0 και ο A0 τρόπος των κυμάτων του Lamb διαδίδονται, όπως αναμενόταν διότι το φάσμα των αρμονικών συχνοτήτων που διεγείρονται είναι πάρα πολύ στενό. Η χρωματισμένες επιφάνειες στο δεξί μέρος των κατανομών Wigner-Ville είναι ανακλάσεις προερχόμενες από το δεξί ελεύθερο άκρο της πλάκας. Το πιο ενδιαφέρον σημείο που αναδεικνύει τις δυνατότητες της ΑΧΣ είναι η ικανότητά του να αναπαριστά το διαχωρισμό των δύο τρόπων διάδοσης κυμάτων καθώς ο παλμός εξελίσσεται στο χώρο. Συγκεκριμένα ενώ φαίνεται στο Σχ. 5.19(α') ότι οι δύο τρόποι διάδοσης στο σημείο παρατήρησης Α να είναι «ενωμένοι», στο επόμενο Σχ. 5.19(γ') της ΑΧΣ της απόκρισης στο σημείου Β ο τρόπος S0 με τον A0 διαχωρίζονται, δίνοντας έτσι τη δυνατότητα σε κάποιον να τους αναγνωρίσει εύκολα. Για τη δεύτερη περίπτωση διέγερσης παρατηρείται ότι ο S0 και ο A1 τρόπος κύματος του Lamb διαδίδονται με σημαντική ενέργεια, ενώ ο A0 φαίνεται να μην έχει έντονη παρουσία. Έχει σημασία κάποιος να παρατηρήσει ότι για τούτη τη συνάρτηση φόρτισης διεγείρονται οι τρόποι διάδοσης πολύ κοντά στο «τριπλό» σημείο των καμπυλών διασκόρπισης, δηλαδή το σημείο τομής του S0, A0 και A1 τρόπου. Το τριπλό σημείο σε ορισμένα πειράματα ΜΚΕ μπορεί να οδηγήσει σε χρήσιμα συμπεράσματα για την κατανόηση της φύσης του προβλήματος διότι αν κάποιος διεγείρει σε

αυτή τη συχνότητα (για αυτό το πρόβλημα αντιστοιχεί περίπου στα 320 kHz) τρεις τρόποι κυμάτων μπορούν να διαδοθούν με την ίδια ταχύτητα, συνεπώς δεν δύναται να μπερδευτεί κάποιος για το ποιός τρόπος καταφθάνει πρώτος [24].

Σχήμα 5.22: Αναπαράσταση Χρόνου-Συχνότητας και απόκριση της (α') u_1 , (β') u_2 συνιστώσας των μετατοπίσεων του σημείου A και αντίστοιχα της (γ') u_1 , (δ') u_2 συνιστώσας των μετατοπίσεων του σημείου B για το πρόβλημα της ελεύθερης πλάκας που παρουσιάζει ατέλεια μορφής εγκοπής, υπό τασικό φορτίο τύπου Hanning ευρέως φάσματος με κεντρική συχνότητα στα 150 kHz.

Επειδή όμως τα αριθμητικά αποτελέσματα της προηγούμενης ανάλυσης απέδειξαν ότι το φάσμα των αρμονικών συνιστωσών που διεγείρουν οι τασικοί παλμοί είναι πάρα πολύ στενό, οι ίδιες συναρτήσεις τροποποιήθηκαν και στένεψαν σε χρονική διάρκεια, διευρύνοντας με αυτό τον τρόπο το φάσμα τους. Συγκεκριμένα για τη διέγερση με κεντρική συχνότητα στα 150 kHz ο αριθμός των εμπεριεχόμενων ημιτονοειδών κύκλων στον παλμό επιλέχθηκε ίσος με $n_0 = 2$ και στα 300 kHz ίσος με $n_0 = 4$. Η μορφή των τασικών παλμών παρουσιάζεται στα Σχ. 5.22(α') και 5.22(γ') αντίστοιχα, με τα διαγράμματα των φασμάτων ισχύος στα Σχ. 5.22(β'), 5.22(δ'). Στο εξής του κεφαλαίου αυτού, όπου γίνεται αναφορά για διέγερση παλμού τύπου Hanning με

Σχήμα 5.23: Αναπαράσταση Χρόνου-Συχνότητας και απόκριση της (α') u_1 , (β') u_2 συνιστώσας των μετατοπίσεων του σημείου A και αντίστοιχα της (γ') u_1 , (δ') u_2 συνιστώσας των μετατοπίσεων του σημείου B για το πρόβλημα της ελεύθερης πλάκας που παρουσιάζει ατέλεια μορφής εγκοπής, υπό τασικό φορτίο τύπου Hanning ευρέως φάσματος με κεντρική συχνότητα στα 300 kHz.

κεντρική συχνότητα τα 150 kHz ή 300 kHz θα εννοούνται οι διεγέρσεις των Σχ. 5.21(α'), 5.21(γ') μόνο.

Μετά την αριθμητική επίλυση του εν λόγω προβλήματος κυματικής διάδοσης, στη μετεπεξεργασία των αποτελεσμάτων κατασκευάστηκαν τα διαγράμματα AXΣ με βάση τις αποκρίσεις των σημείων παρατήρησης A και B, όπως παρουσιάζονται στο Σχ. 5.22 όταν η κεντρική συχνότητα της διέγερσης είναι τα 150 kHz, και στο Σχ. 5.23 όταν η κεντρική συχνότητα είναι τα 300 kHz. Στην πρώτη περίπτωση φόρτισης –όπως και πριν– ο S0 και ο A0 τρόπος κύματος του Lamb διαδίδονται πιο έντονα, λόγω του ότι η διέγερση περιορίζεται στο ευρύ φάσμα των συχνοτήτων μέχρι τα 300 kHz περίπου. Λόγω της επιλογής χαμηλού κατωφλίου είναι εμφανείς οι χρωματισμένες επιφάνειες συσχέτισης των δύο αυτών τρόπων. Και σε αυτή την περίπτωση στα Σχ. 5.22(α')-5.22(δ') στο δεξί μέρος των ΕΕΨΚWV είναι εμφανείς οι

ανακλάσεις προερχόμενες από το δεξί ελεύθερο άκρο της πλάκας. Στην περίπτωση φόρτισης που αναπαριστάται στο Σχ. 5.21(γ') με κεντρική συχνότητα τα 300 kHz παρατηρείται στα Σχ. 5.23(α')-5.23(δ') η διέγερση των τριών τρόπων διάδοσης: S0, A0 και A1, με τους S0 και A1 να έχουν την πιο έντονη παρουσία.

5.2 Διάδοση κυματικών διαταραχών σε δεξαμενές αποθήκευσης υγρών καυσίμων

Όπως έγινε αναφορά στην Εισαγωγή του Κεφ. 1, το πλαίσιο έρευνας της παρούσης διδακτορικής διατριβής έγινε κατόπιν συνεννόησης με την εταιρία ENVIROCOUSTICS A.E.², η οποία δραστηριοποιείται στο πεδίο του Μη-Καταστροφικού Ελέγχου με πολύχρονη εμπειρία σε πειράματα Ακουστικής Εκπομπής σε δοχεία αποθήκευσης υγρών καυσίμων. Ο κύριος στόχος ήταν η ανάπτυξη και η εφαρμογή αριθμητικών μεθόδων για την επίλυση προβλημάτων κυματικής διάδοσης σε δεξαμενές αποθήκευσης πετρελαιοειδών. Στη φωτογραφία του Σχ. 5.24(α') φαίνεται μία τυπική συστοιχία εγκατάστασης κυλινδρικών δεξαμενών. Τέτοια γεωμετρία δεξαμενών εξετάζεται και μελετάται στο παρόν σύγγραμμα. Όμως λόγω του ότι οι πραγματικές διαστάσεις τέτοιων δεξαμενών κυμαίνονται από 10 m έως 50 m περίπου σε διάμετρο και από 8 m έως 20 m περίπου σε ύψος, γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι δεν είναι δυνατό με τη σύγχρονη υπολογιστική ισχύ να επιλυθεί το μεταβατικό πρόβλημα κυματικής διάδοσης στη δεξαμενή στις πραγματικές του διαστάσεις. Αντί αυτού πρωτοτυποποιείται ένα τμήμα της δεξαμενής (βλ. γραμμοσκιασμένο κύκλο του Σχ. 5.24(β')). Επίσης, μετά από υπόδειξη της εταιρίας ENVIROCOUSTICS A.E. ότι έχει ιδιέταιρη σημασία να παρατηρηθεί το φαινόμενο της διάδοσης μίας ρωγμής στον πυθμένα της δεξαμενής και το πως επηρεάζει την κυματική διάδοση σε αυτή όταν η ατέλεια είναι πολύ κοντά στο κυλινδρικό τοίχωμά της. Συνεπώς με ασφάλεια μπορεί να γίνει η παραδοχή ανάλυσης της δεξαμενής στις δύο διαστάσεις –θεωρώντας επίπεδη παραμορφωσιακή κατάσταση– λόγω των μεγάλων διαστάσεων της κατασκευής σε σύγκριση με το τμήμα αυτής που μελετάται.

Πρώτο βήμα στη μελέτη της κυματικής διάδοσης της δεξαμενής αποθήκευσης καυσίμων είναι η διευρεύνηση του τρόπου διάδοσης των διαταραχών στον πυθμένα της δεξαμενής. Διατηρώντας την ίδια γεωμετρία με αυτή του Σχ. 5.11(α') και Σχ. 5.13, όπου θεωρώντας την κάτω πλευρά του πυθμένα πακτωμένη (μηδενική μετατόπιση των υλικών σημείων της επιφάνειας αυτής), επιλύθηκε αριθμητικά το πρόβλημα της κυματικής διάδοσης. Το τασικό φορτίο που απελευθερώνεται –λόγω διάδοσης της ρωγμής– ήταν κρουστική συνάρτηση τύπου Dirac. Τα υπόλοιπα στοιχεία ανάλυσης, όπως χρόνος μελέτης του μεταβατικού φαινομένου, αριθμός δειγμάτων στο χρόνο, χωρική διακριτοποίηση κ.α. τέθηκαν ίδια με αυτά της ανάλυσης στο Υποεδάφ. 5.1.2.

Στα Σχ. 5.25, 5.26 παρουσιάζονται οι AXΣ σε συνδυασμό με το διάγραμμα της οριζόντιας ή κάθετης συνιστώσας των μετατοπίσεων ως συνάρτηση του χρόνου για

²βλ. ιστοσελίδα: <http://www.envirocoustics.gr/>

Σχήμα 5.24: (α') Φωτογραφία εγκατάστασης δεξαμενών αποθήκευσης βιομηχανικών υγρών και (β') σχηματική αναπαράσταση της κυλινδρικής δεξαμενής που μελετάται.

τα σημεία παρατήρησης Α και Β, για δύο διαφορετικές περιπτώσεις ατέλειας στον πυθμένα της δεξαμενής. Στα Σχ. 5.25(α'), 5.25(β') αναπαριστώνται οι κατανομές Wigner-Ville της απόκρισης της u_1 και u_2 συνιστώσας των μετατοπίσεων αντίστοιχα του σημείου Α· οι αποκρίσεις των αντίστοιχων συνιστωσών των μετατοπίσεων για το σημείο Β παρουσιάζονται στα Σχ. 5.25(γ'), 5.25(δ') όταν η ατέλεια στον πυθμένα της δεξαμενής είναι επιφανειακή εγχοπή (κατακόρυφη ρωγμή). Αντίστοιχα στα Σχ. 5.26(α'), 5.26(β') αναπαριστώνται οι κατανομές Wigner-Ville της u_1 και u_2 συνιστώσας των μετατοπίσεων αντίστοιχα του σημείου Α, ενώ οι αποκρίσεις των αντίστοιχων συνιστωσών των μετατοπίσεων για το σημείο Β παρουσιάζονται στα Σχ. 5.26(γ'), 5.26(δ') όταν η ατέλεια στον πυθμένα της δεξαμενής είναι μορφής οριζόντιας ελλειψοειδούς ρωγμής.

Συγκρίνοντας τις Επαναπροσδιορισμένες Εξομαλυμένες Ψευδείς Κατανομές των Wigner-Ville (ΕΕΨΚWV) με τις θεωρητικές καμπύλες διασκόρπισης της ελεύθερης επίπεδης πλάκας (λεπτές γραμμές) παρατηρείται η μη-ταύτιση των τρόπων διάδοσης σε αυτούς τους δύο κυματοδηγούς. Η αλήθεια είναι ότι η έννοια των συμμετρικών και αντισυμμετρικών τρόπων διάδοσης δεν ισχύει σε αυτό το πρόβλημα διότι η κάτω επιφάνεια δεν παραμορφώνεται ελεύθερα αλλά είναι δεσμευμένη και στις δύο διευθύνσεις. Από τις κατανομές Wigner-Ville των Σχ. 5.25, 5.26 παρατηρείται ότι το σχήμα των καμπυλών διασκόρπισης δεν αλλάζει μορφή για την περίπτωση της πακτωμένης επίπεδης πλάκας σε σχέση με την αντίστοιχη ελεύθερη. Συγκεκριμένα οι καμπύλες διασκόρπισης δείχνουν να αντιστοιχούν στις αντίστοιχες καμπύλες της ελεύθερης επίπεδης χαλύβδινης πλάκας διπλάσιου πάχους σε σύγκριση με αυτή που μελετάται. Συνεπώς κάνοντας την υπόθεση παρουσίας συμμετρικών και αντισυμμετρικών τρόπων, τότε με πλάγια γράμματα στο Σχ. 5.25(α') και στο Σχ. 5.25(β') αναγράφονται οι αντίστοιχοι τρόποι διάδοσης της πακτωμένης επίπεδης πλάκας. Από τα Σχ. 5.25(α'), 5.25(γ') παρατηρείται ότι διεγείρονται περισσότερο ο A1 και ο S0 –στο στενό φάσμα από τα 200 kHz μέχρι τα 300 kHz περίπου– και αμιδρά ο S2 τρό-

Σχήμα 5.25: Αναπαράσταση Χρόνου-Συχνότητας και απόκριση της (α') u_1 , (β') u_2 συνιστώσας των μετατοπίσεων του σημείου A και αντίστοιχα της (γ') u_1 , (δ') u_2 συνιστώσας των μετατοπίσεων του σημείου B του πυθμένα της δεξαμενής με εγχοπή υπό κρουστικό τασικό φορτίο.

πος. Ενώ από τα Σχ. 5.25(β'), 5.25(δ') φαίνεται να διεγείρονται πιο έντονα οι $A1$, $A2$ αντισυμμετρικοί και οι $S0$, $S1$, $S2$ συμμετρικοί τρόποι διάδοσης. Αντίστοιχα στα Σχ. 5.26(α'), 5.26(γ') παρατηρείται στο φάσμα από τα 200 kHz έως τα 400 kHz να εμφανίζονται οι $A1$, $S0$ και $S1$ τρόποι. Μάλιστα ο πρώτος συμμετρικός τρόπος φαίνεται να είναι ο πιο ισχυρός ενεργειακά. Τα χρωματικά αποτυπώματα στα σχήματα αυτά στο φάσμα πέρα των 600 kHz δεν μπορούν να χαρακτηριστούν εύκολα, πιθανώς να είναι ανακλάσεις από το δεξί άκρο της πλάκας. Τα ίδια συμπεράσματα μπορεί κάποιος να εξάγει παρατηρώντας τα Σχ. 5.26(β'), 5.26(δ'). Επίσης από τα αντίστοιχα διαγράμματα των κατανομών Wigner-Ville για τα δύο σημεία παρατήρησης συμπεραίνεται ότι τα διαγράμματα των κατανομών δε μεταβάλλονται σημαντικά με την θέση του σημείου που επιλέγεται για καταγραφή.

Εν συνεχεία έγινε η αριθμητική ανάλυση του τμήματος του πυθμένα της δεξαμενής όταν αλληλεπιδρά με το πετρέλαιο, του οποίου οι ιδιότητες δίδονται στον Πίν.

Σχήμα 5.26: Αναπαράσταση Χρόνου-Συχνότητας και απόκριση της (α') u_1 , (β') u_2 συνιστώσας των μετατοπίσεων του σημείου A και αντίστοιχα της (γ') u_1 , (δ') u_2 συνιστώσας των μετατοπίσεων του σημείου B του πυθμένα της δεξαμενής με ελλειψοειδή ρωγμή υπό κρουστικό τασικό φορτίο.

5.2. Το στρώμα του υγρού συνεχούς μέσου θεωρήθηκε –όμοια με την ανάλυση που πραγματοποιήθηκε στο Υποεδράφ. 5.1.2– ως ημι-άπειρο.

Το διάγραμμα Χρόνου-Συχνότητας σε συνδυασμό με το διάγραμμα της οριζόντιας ή κάθετης συνιστώσας των μετατοπίσεων ως συνάρτηση του χρόνου για τα σημεία παρατήρησης A και B παρουσιάζονται στο Σχ. 5.27 και Σχ. 5.28. Στα Σχ. 5.27(α'), 5.27(β') αναπαριστώνται οι ΕΕΨΚWV της απόκρισης της u_1 και u_2 αντίστοιχα του σημείου A, ενώ οι αποκρίσεις των αντίστοιχων συνιστωσών των μετατοπίσεων για το σημείο B παρουσιάζονται στα Σχ. 5.27(γ'), 5.27(δ') όταν η ατέλεια είναι μορφής κατακόρυφης ρωγμής. Αντίστοιχα στα Σχ. 5.28(α'), 5.28(β') αναπαριστώνται οι κατανομές Wigner-Ville της απόκρισης στο σημείο A, ενώ οι αποκρίσεις των συνιστωσών των μετατοπίσεων για το σημείο B παρουσιάζονται στα Σχ. 5.28(γ'), 5.28(δ') όταν η ατέλεια είναι μορφής οριζόντιας ρωγμής.

Από τις ΕΕΨΚWV των Σχ. 5.27(α'), 5.27(γ') και σε σύγκριση με τις αντί-

Σχήμα 5.27: Αναπαράσταση Χρόνου-Συχνότητας και απόκριση της (α') u_1 , (β') u_2 συνιστώσας των μετατοπίσεων του σημείου A και αντίστοιχα της (γ') u_1 , (δ') u_2 συνιστώσας των μετατοπίσεων του σημείου B του πυθμένα της δεξαμενής που αλληλεπιδρά με το πετρέλαιο, με εγχοπή υπό κρουστικό τασικό φορτίο.

στοιχείες κατανομές του Σχ. 5.25 της πακτωμένης επίπεδης πλάκας, παρατηρείται ότι διεγείρονται οι $A1$ και $S0$ τρόποι διάδοσης. Όμοια από τα Σχ. 5.27(β'), 5.27(δ') διαφαίνεται να διεγείρονται ο $A1$ και ο $S0$ πιο έντονα και ο $S2$ τρόπος διάδοσης λιγότερο έντονα σε σχέση με τις αντίστοιχες κατανομές της πακτωμένης επίπεδης πλάκας. Επίσης από τις κατανομές χρόνου-συχνότητας των Σχ. 5.28(α'), 5.28(γ') και σε σύγκριση με τις αντίστοιχες κατανομές των Σχ. 5.26(α'), 5.26(γ') παρατηρείται ο $S1$ τρόπος διάδοσης να εξαφανίζεται, ο $A1$ φαίνεται να ισχυροποιείται ελάχιστα στο φάσμα από 200 kHz έως 300 kHz και ο $S2$ τρόπος να παρουσιάζεται ιδιαίτερα πιο έντονος. Επιπλέον από τα Σχ. 5.28(β'), 5.28(δ') μπορεί κάποιος να εξάγει τα ίδια συμπεράσματα με πριν για το πρόβλημα αλληλεπίδρασης του πυθμένα της δεξαμενής με το πετρέλαιο.

Συγκρίνοντας τα αριθμητικά αποτελέσματα, όπως φαίνονται στις αντίστοιχες Αναπαραστάσεις Χρόνου-Συχνότητας, για το πρόβλημα της κυματικής διάδοσης

Σχήμα 5.28: Αναπαράσταση Χρόνου-Συχνότητας και απόκριση της (α') u_1 , (β') u_2 συνιστώσας των μετατοπίσεων του σημείου A και αντίστοιχα της (γ') u_1 , (δ') u_2 συνιστώσας των μετατοπίσεων του σημείου B του πυθμένα της δεξαμενής που αλληλεπιδρά με το πετρέλαιο, με ελλειψοειδή ρωγμή υπό κρουστικό τασικό φορτίο.

στην πακτωμένη επίπεδη πλάκα καθώς και της πλάκας που αλληλεπιδρά με το υγρό πετρέλαιο μπορεί κάποιος να εξάγει τα ακόλουθα χρήσιμα συμπεράσματα:

- (α') Επιβάλλοντας κρουστικό τασικό φορτίο στο τμήμα του πυθμένα της άδειας δεξαμενής καυσίμων παρατηρείται να διεγείρονται περισσότερο οι $S0$, $S1$ και $A1$, $A2$ τρόποι διάδοσης κυμάτων του Lamb (βλ. Σχ. 5.25) και λίγοτερο έντονα ο $S2$.
- (β') Στο πρόβλημα της πακτωμένης επίπεδης πλάκας που αλληλεπιδρά με το πετρέλαιο παρατηρείται ότι διεγείρονται $A1$, $A2$ και $S0$ (βλ. Σχ. 5.27) και λίγοτερο έντονα ο $S2$.
- (γ') Οι πιο ουσιαστικές διαφορές μεταξύ των ΑΧΣ για τα δύο προβλήματα κυματικής διάδοσης είναι η απουσία του $S1$ τρόπου στο πρόβλημα της αλληλεπίδρα-

σης της μεταλλικής κατασκευής με το πετρέλαιο στις συχνότητες κοντά στα 280 kHz καθώς και η σχετική απαλοιφή του A2 τρόπου στα 750 kHz περίπου.

Σχήμα 5.29: Τμήμα της δεξαμενής αποθήκευσης υγρών καυσίμων που παρουσιάζει ατέλεια μορφής (α') επιφανειακής εγκοπής (κατακόρυφη ρωγμή) και (β') ελλειψοειδούς εσωτερικού εγκλείσματος (οριζόντια ρωγμή).

Μέχρι τώρα έγινε μελέτη της κυματικής διάδοσης του πυθμένα της δεξαμενής αποθήκευσης υγρών καυσίμων. Είναι προφανές ότι θα είχε ιδιαίτερο ενδιαφέρον κάποιος να μελετήσει το φαινόμενο της διάδοσης των κυμάτων στο κυλινδρικό κάθετο τοίχωμα της δεξαμενής. Έστω τμήμα της δεξαμενής, όπως φαίνεται στο Σχ. 5.29, όπου το συνολικό μήκος του πυθμένα που λαμβάνεται υπόψη είναι ίσο με 0.3 m, το αντίστοιχο ύψος του τοιχώματος ίσο με 0.3 m και το πάχος της κατασκευής να είναι 6 mm παντού. Όμοια με πριν, στον πυθμένα της δεξαμενής εντοπίζεται ατέλεια μορφής εγκοπής (κατακόρυφη ρωγμή) σε απόσταση $l = 0.1$ m ή 0.01 m από το κάθετο τοίχωμά της (βλ. Σχ. 5.29(α')). Η δεξαμενή στο εξής θα καλείται τύπου I ή II αντίστοιχα. Επιπλέον θα θεωρηθεί παρακάτω δεξαμενή που παρουσιάζει ατέλεια μορφής εσωτερικού εγκλείσματος (οριζόντια ρωγμή) σε απόσταση $l = 0.1$ m ή 0.01 m από το κάθετο τοίχωμά της (βλ. Σχ. 5.29(β')). Η δεξαμενή στο εξής θα καλείται τύπου

III και τύπου IV αντίστοιχα. Στον Πίν. 5.3 παρατίθενται συγκεντρωτικά όλοι οι τύποι των δεξαμενών που αναλύονται στο εδάφιο αυτό, οι οποίοι είναι διαχωρισμένοι με βάση το είδος της ατέλειας που παρουσιάζουν αλλά και την απόστασή της από το δεξί κάθετο τοίχωμα της κυλινδρικής δεξαμενής.

τύπος δεξαμενής	είδος ατέλειας	απόσταση l σε m
I	εγκοπή	0.1
II	εγκοπή	0.01
III	ρωγμή	0.1
IV	ρωγμή	0.01

Πίνακας 5.3: Διάφοροι τύποι δεξαμενών ανάλογα με το είδος της ατέλειας και την απόστασή (l) της από το τοίχωμα της δεξαμενής.

Πέρα του προβλήματος της κυματικής διάδοσης στην άδεια δεξαμενή αποθήκευσης καυσίμων, η οποία παρουσιάζει τις παραπάνω δύο είδους ατέλειες· η δεξαμενή υποτέθηκε τόσο ότι είναι γεμάτη με πετρέλαιο όσο και ότι εμπεριέχει ένα λεπτό στρώμα ιζήματος αργού πετρελαίου. Το πάχος του ιζήματος σε αυτή την περίπτωση θεωρήθηκε ότι είναι ίσο με 8 cm, ενώ οι ιδιότητες του συνεχούς αυτού μέσου δίδονται στον Πίν. 5.4. Εδώ πρέπει να τονιστεί ότι δεν τέθηκε ελεύθερη στάθμη του πετρελαίου –όταν αυτό υπάρχει– άρα πρωτοτυποποιήθηκε ως ημι-άπειρο συνεχές μέσο.

διαμήκες κύμα	πυκνότητα
$c_p = 1930 \text{ m/s}$	$\rho_a = 1153 \text{ kg/m}^3$

Πίνακας 5.4: Ιδιότητες ιζήματος πετρελαίου.

Διατηρώντας τις ίδιες παραμέτρους πρωτοτυποποίησης (χωρική διακριτοποίηση της γεωμετρίας και τρόπος δειγματοληψίας του σήματος διέγερσης) όπως και στο πρόβλημα της ελεύθερης επίπεδης πλάκας του Υποεδάφ. 5.1.2, στην οποία επιβλήθηκε τοπικό τασικό φορτίο παλμού τύπου Hanning με κεντρική συχνότητα στα 150 kHz, 300 kHz αντίστοιχα, έτσι έγινε και στο πρόβλημα της δεξαμενής ανάλυση μέσω των αριθμητικών μεθόδων που αναπτύχθηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια. Συγκεκριμένα κάθε είδος δεξαμενής, για κάθε περίπτωση που είναι άδεια ή γεμάτη με πετρέλαιο ή που περιέχει πετρέλαιο και ένα λεπτό στρώμα ιζήματος, επιλύθηκε με επιβολή των δύο προαναφερθέντων διεγέρσεων. Συνεπώς το συνολικό πλήθος των αριθμητικών πειραμάτων που διεξήχθησαν σε αυτό το στάδιο ήταν $(3 \times 2) + (3 \times 2) + (3 \times 2) + (3 \times 2) = 24$. Η όλη διαδικασία της αριθμητικής επίλυσης ήταν μία εξαιρετικά χρονοβόρα και επίπονη διαδικασία διότι τόσο το μέγεθος της καννάβου όσο και της χρονικής μελέτης του δυναμικού φαινομένου απαιτούσε αρκετά μεγάλη υπολογιστική ισχύ.

Από τα αποτελέσματα που παρήχθησαν στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται οι χρωματικοί χάρτες των κατανομών Wigner-Ville καθώς και η απόκριση της κάθετης –στην εξωτερική επιφάνεια της δεξαμενής– συνιστώσας των μετατοπίσεων για τα σημεία παρατήρησης Α, Γ, Δ και Ε. Η θέση των σημείων αυτών φαίνεται καθαρά στο Σχ. 5.29. Η σύγκριση των κυματομορφών των μετατοπίσεων για τα παραπάνω σημεία ενδιαφέροντος παρουσιάζονται σε διαγράμματα στο Παρ. Ε. Αξίζει να σημειωθεί εδώ ότι για τις ΕΕΨΚWV υιοθετήθηκε το ίδιο κατώφλι σε όλους τους χρωματικούς χάρτες –ίσο με 0.5% του μέγιστου πλάτους σε dB– για τη σωστή σύγκρισή τους.

Στα Σχ. 5.30, 5.31 και Σχ. 5.32, 5.33 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για τη δεξαμενή τύπου Ι όταν αυτή είναι άδεια, όταν περιέχει πετρέλαιο και όταν περιέχει υγρό καύσιμο παρουσία στρώματος ιζήματος αντίστοιχα, με παράλληλη παράθεση για σύγκριση των διαγραμμάτων στις δύο διεγέρσεις τύπου Hanning στα 150 kHz και 300 kHz. Όμοια στα Σχ. 5.34, 5.35 και Σχ. 5.36, 5.37 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για τη δεξαμενή τύπου ΙΙ για τόσο για την περίπτωση που είναι άδεια όσο και όταν έχει υγρό περιεχόμενο, και για τις δύο διαφορετικές διεγέρσεις.

Με βάση τα παραπάνω διαγράμματα μπορούν να διατυπωθούν οι ακόλουθες παρατηρήσεις:

- Στη δεξαμενή τύπου Ι στο σημείο Γ στα 150 kHz με βάση την ΑΧΣ διαπιστώνεται ότι το πρωτεύον κύμα είναι μορφής *A1* ενώ ακριβώς ακολουθεί ο *S0* με λιγότερη ενέργεια. Το κύμα που καταγράφεται δε δείχνει να διαφέρει σημαντικά ανάλογα με την ύπαρξη ή όχι περιεχομένου στη δεξαμενή. Ίσως αυτό να οφείλεται στο γεγονός ότι η φόρτιση στην εγχοπή γίνεται οριζόντια, ενώ στο σημείο Γ λαμβάνεται η κάθετη συνιστώσα της μετατόπισης. Οι ανακλάσεις που καταγράφονται όταν είναι άδεια η δεξαμενή απαλοίζονται όταν γεμίζει με πετρέλαιο, λόγω «διαρροής» σημαντικής ενέργειας στο ρευστό μέσω διάθλασης.
- Στη δεξαμενή τύπου ΙΙ στο σημείο Γ στα 150 kHz με βάση την ΑΧΣ διαπιστώνεται ότι το πρωτεύον κύμα είναι μορφής *A1* ενώ ακριβώς ακολουθεί ο *S0* με πολύ περισσότερη ενέργεια από ότι συνέβαινε στη δεξαμενή τύπου Ι. Το προηγούμενο φαινόμενο πιθανώς να είναι αποτέλεσμα της μικρής απόστασης της ατέλειας από το τοίχωμα της δεξαμενής. Όπως και πριν το κύμα που καταγράφεται δεν αλλάζει σχεδόν καθόλου όταν μεταβάλλεται το περιεχόμενο της δεξαμενής.
- Στη δεξαμενή τύπου Ι στο σημείο Δ στα 150 kHz από το ΑΧΣ γίνεται η εκτίμηση ότι ο *A1* τρόπος είναι αυτός που χαρακτηρίζει το κύμα, ο οποίος εξασθενεί στο μισό πλάτος όταν εισέρχεται ρευστό στη δεξαμενή.
- Στη δεξαμενή τύπου ΙΙ στο σημείο Δ στα 150 kHz η κυματομορφή σε αυτή την περίπτωση φαίνεται να αποτελείται κυρίως από πρωτοαφιχθέν κύμα *A0* και τον *A1* τρόπο, ενώ ο *S0* φαίνεται να επηρεάζει σε υψηλότερο φάσμα αλλά με αρκετά μικρότερη ισχύ. Σε αυτή την περίπτωση η παρουσία του ρευστού

Σχήμα 5.30: Πρόβλημα δεξαμενής τύπου Ι με διέγερση στα 150 kHz κεντρική συχνότητα: Αναπαράσταση Χρόνου-Συχνότητας και απόκριση της κάθετης στην επιφάνεια της δεξαμενής συνιστώσας των μετατοπίσεων όταν (α'), (β') η δεξαμενή είναι άδεια, (γ'), (δ') περιέχει πετρέλαιο και (ε'), (ζ') περιέχει πετρέλαιο παρουσία στρώματος ιζήματος για τα σημεία παρατήρησης Α και Γ αντίστοιχα.

Σχήμα 5.31: Πρόβλημα δεξαμενής τύπου I με διέγερση στα 150 kHz κεντρική συχνότητα: Αναπαράσταση Χρόνου-Συχνότητας και απόκριση της κάθετης στην επιφάνεια της δεξαμενής συνιστώσας των μετατοπίσεων όταν (α'), (β') η δεξαμενή είναι άδεια, (γ'), (δ') περιέχει πετρέλαιο και (ε'), (ζ') περιέχει πετρέλαιο παρουσία στρώματος ιζήματος για τα σημεία παρατήρησης Δ και Ε αντίστοιχα.

Σχήμα 5.32: Πρόβλημα δεξαμενής τύπου Ι με διέγερση στα 300 kHz κεντρική συχνότητα: Αναπαράσταση Χρόνου-Συχνότητας και απόκριση της κάθετης στην επιφάνεια της δεξαμενής συνιστώσας των μετατοπίσεων όταν (α'), (β') η δεξαμενή είναι άδεια, (γ'), (δ') περιέχει πετρέλαιο και (ε'), (ζ') περιέχει πετρέλαιο παρουσία στρώματος ιζήματος για τα σημεία παρατήρησης Α και Γ αντίστοιχα.

Σχήμα 5.33: Πρόβλημα δεξαμενής τύπου I με διέγερση στα 300 kHz κεντρική συχνότητα: Αναπαράσταση Χρόνου-Συχνότητας και απόκριση της κάθετης στην επιφάνεια της δεξαμενής συνιστώσας των μετατοπίσεων όταν (α'), (β') η δεξαμενή είναι άδεια, (γ'), (δ') περιέχει πετρέλαιο και (ε'), (ς') περιέχει πετρέλαιο παρουσία στρώματος ιζήματος για τα σημεία παρατήρησης Δ και Ε αντίστοιχα.

Σχήμα 5.34: Πρόβλημα δεξαμενής τύπου II με διέγερση στα 150 kHz κεντρική συχνότητα: Αναπαράσταση Χρόνου-Συχνότητας και απόκριση της κάθετης στην επιφάνεια της δεξαμενής συνιστώσας των μετατοπίσεων όταν (α'), (β') η δεξαμενή είναι άδεια, (γ'), (δ') περιέχει πετρέλαιο και (ε'), (ζ') περιέχει πετρέλαιο παρουσία στρώματος ιζήματος για τα σημεία παρατήρησης Α και Γ αντίστοιχα.

Σχήμα 5.35: Πρόβλημα δεξαμενής τύπου Π με διέγερση στα 150 kHz κεντρική συχνότητα. Αναπαράσταση Χρόνου-Συχνότητας και απόκριση της κάθετης στην επιφάνεια της δεξαμενής συνιστώσας των μετατοπίσεων όταν (α'), (β') η δεξαμενή είναι άδεια, (γ'), (δ') περιέχει πετρέλαιο και (ε'), (ζ') περιέχει πετρέλαιο παρουσία στρώματος ιζήματος για τα σημεία παρατήρησης Δ και Ε αντίστοιχα.

Σχήμα 5.36: Πρόβλημα δεξαμενής τύπου II με διέγερση στα 300 kHz κεντρική συχνότητα. Αναπαράσταση Χρόνου-Συχνότητας και απόκριση της κάθετης στην επιφάνεια της δεξαμενής συνιστώσας των μετατοπίσεων όταν (α'), (β') η δεξαμενή είναι άδεια, (γ'), (δ') περιέχει πετρέλαιο και (ε'), (ζ') περιέχει πετρέλαιο παρουσία στρώματος ιζήματος για τα σημεία παρατήρησης Α και Γ αντίστοιχα.

Σχήμα 5.37: Πρόβλημα δεξαμενής τύπου Π με διέγερση στα 300 kHz κεντρική συχνότητα. Αναπαράσταση Χρόνου-Συχνότητας και απόκριση της κάθετης στην επιφάνεια της δεξαμενής συνιστώσας των μετατοπίσεων όταν (α'), (β') η δεξαμενή είναι άδεια, (γ'), (δ') περιέχει πετρέλαιο και (ε'), (ζ') περιέχει πετρέλαιο παρουσία στρώματος ιζήματος για τα σημεία παρατήρησης Δ και Ε αντίστοιχα.

επιδρά στη σημαντική εξασθένηση του σήματος που καταγράφεται στο σημείο Δ.

- Στη δεξαμενή τύπου I στο σημείο Α στα 150 kHz όταν είναι άδεια η δεξαμενή πρωτεύον τρόπος διάδοσης είναι ο $A0$ και ο $S0$ να ακολουθεί λίγο πιο μετά, ενώ όταν υπεισέρχεται πετρέλαιο ο $S0$ εξασθενεί σημαντικά καθώς επίσης και οι ανακλάσεις από τα ελεύθερα άκρα της κατασκευής λόγω μεταφοράς ποσού της ενέργειας στο ρευστό. Αξίζει να σημειωθεί ότι ανεξάρτητα της ύπαρξης ή όχι περιεχομένου στη δεξαμενή τύπου I, το πρωτοαφιχθέν κύμα δεν αλλάζει μορφή (πλάτος, διάρκεια στον χρόνο).
- Στη δεξαμενή τύπου II στο σημείο Α στα 150 kHz παρατηρείται η ίδια σχεδόν κυματομορφή να καταγράφεται –αν εξαιρέσει κάποιος τις ανακλάσεις στην «ουρά» του σήματος– όπως και στη δεξαμενή τύπου I για το ίδιο σημείο. Τούτο το φαινόμενο είναι αρκετά λογικό και αναμενόμενο, κρίνοντας κάποιος από την θέση του σημείου Α.
- Στη δεξαμενή τύπου I στο σημείο Γ στα 300 kHz με βάση την ΑΧΣ διαπιστώνεται ότι το μέτωπο του κύματος είναι ένας δυνατός $A1$ παλμός, με ένα κύμα τρόπου $S0$ να ακολουθεί αμέσως μετά. Το σήμα γενικά είναι γεμάτο με ανακλάσεις, καθώς επίσης δεν φαίνεται να επηρεάζεται σχεδόν καθόλου από την ύπαρξη ή όχι πετρελαίου και ιζήματος στη δεξαμενή.
- Στη δεξαμενή τύπου II στο σημείο Γ στα 300 kHz παρατηρείται ακριβώς η ίδια συμπεριφορά με αυτή του ίδιου σημείου στη δεξαμενή τύπου I. Τούτο το φαινόμενο αναδεικνύει την ανεξαρτησία των αποτελεσμάτων από την ύπαρξη περιεχομένου στη δεξαμενή, ειδικά όταν γίνεται καταγραφή στο φάσμα συχνοτήτων κοντά στα 300 kHz.
- Στις δεξαμενές τύπου I και II στο σημείο Δ στα 300 kHz με βάση την ΑΧΣ αναγνωρίζεται ότι καταφθάνει ένα κύμα που είναι συνδυασμός του $S0$ και των $A1$, $S1$ με λιγότερη όμως ισχύ. Όταν η δεξαμενή γεμίζει με πετρέλαιο τότε το κύμα μειώνει σε πλάτος σημαντικά και ακόμα περισσότερο όταν υπεισέρχεται και το στρώμα του ιζήματος. Γενικά όμως το «σχήμα» του παλμού δεν αλλάζει.
- Στη δεξαμενή τύπου I στο σημείο Α στα 300 kHz φαίνεται καθαρά στο διάγραμμα της κατανομής Wigner-Ville ότι φθάνει πρώτος ο $A1$ και ακολουθεί με μεγαλύτερη ενέργεια –άρα και πλάτος του σήματος– ο $S0$. Το κυρίως κύμα δεν αλλάζει όταν η άδεια δεξαμενή γεμίζει με πετρέλαιο, απλά στη δεύτερη περίπτωση οι ανακλάσεις έχουν εξαφανιστεί λόγω της διαρροής ενέργειας του ελαστικού κύματος στο ακουστικό μέσο.
- Στη δεξαμενή τύπου II στο σημείο Α στα 300 kHz παρατηρείται ένα ίδιας μορφής κύμα με αυτό της δεξαμενής τύπου I στο σημείο Α στα 300 kHz, αποτέλεσμα αρκετά λογικό και αναμενόμενο.

Σχήμα 5.38: Πρόβλημα δεξαμενής τύπου III με διέγερση στα 150 kHz κεντρική συχνότητα. Αναπαράσταση Χρόνου-Συχνότητας και απόκριση της κάθετης στην επιφάνεια της δεξαμενής συνιστώσας των μετατοπίσεων όταν (α'), (β') η δεξαμενή είναι άδεια, (γ'), (δ') περιέχει πετρέλαιο και (ε'), (ζ') περιέχει πετρέλαιο παρουσία στρώματος ιζήματος για τα σημεία παρατήρησης Α και Γ αντίστοιχα.

Σχήμα 5.39: Πρόβλημα δεξαμενής τύπου III με διέγερση στα 150 kHz κεντρική συχνότητα. Αναπαράσταση Χρόνου-Συχνότητας και απόκριση της κάθετης στην επιφάνεια της δεξαμενής συνιστώσας των μετατοπίσεων όταν (α'), (β') η δεξαμενή είναι άδεια, (γ'), (δ') περιέχει πετρέλαιο και (ε'), (ζ') περιέχει πετρέλαιο παρουσία στρώματος ιζήματος για τα σημεία παρατήρησης Δ και Ε αντίστοιχα.

Σχήμα 5.40: Πρόβλημα δεξαμενής τύπου III με διέγερση στα 300 kHz κεντρική συχνότητα. Αναπαράσταση Χρόνου-Συχνότητας και απόκριση της κάθετης στην επιφάνεια της δεξαμενής συνιστώσας των μετατοπίσεων όταν (α'), (β') η δεξαμενή είναι άδεια, (γ'), (δ') περιέχει πετρέλαιο και (ε'), (ζ') περιέχει πετρέλαιο παρουσία στρώματος ιζήματος για τα σημεία παρατήρησης Α και Γ αντίστοιχα.

Σχήμα 5.41: Πρόβλημα δεξαμενής τύπου III με διέγερση στα 300 kHz κεντρική συχνότητα. Αναπαράσταση Χρόνου-Συχνότητας και απόκριση της κάθετης στην επιφάνεια της δεξαμενής συνιστώσας των μετατοπίσεων όταν (α'), (β') η δεξαμενή είναι άδεια, (γ'), (δ') περιέχει πετρέλαιο και (ε'), (ζ') περιέχει πετρέλαιο παρουσία στρώματος ιζήματος για τα σημεία παρατήρησης Δ και Ε αντίστοιχα.

Σχήμα 5.42: Πρόβλημα δεξαμενής τύπου IV με διέγερση στα 150 kHz κεντρική συχνότητα. Αναπαράσταση Χρόνου-Συχνότητας και απόκριση της κάθετης στην επιφάνεια της δεξαμενής συνιστώσας των μετατοπίσεων όταν (α'), (β') η δεξαμενή είναι άδεια, (γ'), (δ') περιέχει πετρέλαιο και (ε'), (ζ') περιέχει πετρέλαιο παρουσία στρώματος ιζήματος για τα σημεία παρατήρησης Α και Γ αντίστοιχα.

Σχήμα 5.43: Πρόβλημα δεξαμενής τύπου IV με διέγερση στα 150 kHz κεντρική συχνότητα. Αναπαράσταση Χρόνου-Συχνότητας και απόκριση της κάθετης στην επιφάνεια της δεξαμενής συνιστώσας των μετατοπίσεων όταν (α'), (β') η δεξαμενή είναι άδεια, (γ'), (δ') περιέχει πετρέλαιο και (ε'), (ζ') περιέχει πετρέλαιο παρουσία στρώματος ιζήματος για τα σημεία παρατήρησης Δ και Ε αντίστοιχα.

Σχήμα 5.44: Πρόβλημα δεξαμενής τύπου IV με διέγερση στα 300 kHz κεντρική συχνότητα. Αναπαράσταση Χρόνου-Συχνότητας και απόκριση της κάθετης στην επιφάνεια της δεξαμενής συνιστώσας των μετατοπίσεων όταν (α'), (β') η δεξαμενή είναι άδεια, (γ'), (δ') περιέχει πετρέλαιο και (ε'), (ς') περιέχει πετρέλαιο παρουσία στρώματος ιζήματος για τα σημεία παρατήρησης Α και Γ αντίστοιχα.

Σχήμα 5.45: Πρόβλημα δεξαμενής τύπου IV με διέγερση στα 300 kHz κεντρική συχνότητα. Αναπαράσταση Χρόνου-Συχνότητας και απόκριση της κάθετης στην επιφάνεια της δεξαμενής συνιστώσας των μετατοπίσεων όταν (α'), (β') η δεξαμενή είναι άδεια, (γ'), (δ') περιέχει πετρέλαιο και (ε'), (ζ') περιέχει πετρέλαιο παρουσία στρώματος ιζήματος για τα σημεία παρατήρησης Δ και Ε αντίστοιχα.

Στα Σχ. 5.38, 5.39, 5.40, 5.41 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για τη δεξαμενή τύπου III όταν αυτή είναι άδεια, όταν είναι γεμάτη με πετρέλαιο και όταν περιέχει πετρέλαιο συν το στρώμα ιζήματος αντίστοιχα, με παράλληλη παράθεση για σύγκριση των διαγραμμάτων στις δύο διεγέρσεις τύπου Hanning με κεντρική συχνότητα στα 150 kHz και 300 kHz. Επίσης στα Σχ. 5.42, 5.43 και Σχ. 5.44, 5.45 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για τη δεξαμενή τύπου IV για τόσο για την περίπτωση που είναι άδεια όσο και όταν έχει υγρό περιεχόμενο, και για τις δύο διαφορετικές διεγέρσεις.

Μελετώντας τα διαγράμματα των κατανομών Wigner-Ville καθώς και τις αποκρίσεις των σημείων Α, Γ και Δ μπορούν να εξαχθούν οι παρακάτω παρατηρήσεις:

- Στη δεξαμενή τύπου III στο σημείο Γ στα 150 kHz από την ΑΧΣ διαφάνεται το μέτωπο του κύματος που καταφθάνει να είναι ο $A1$ και να ακολουθεί ο $S0$ (διακρίνεται πολύ εύκολα στην κυματομορφή) πιο έντονος. Όταν η δεξαμενή γεμίζει με πετρέλαιο τότε το σήμα μειώνει σε πλάτος τον $S0$ τρόπο στο μισό, ενώ αντίθετα ο $A1$ παραμένει αμετάβλητος. Οι ανακλάσεις γενικά που καταγράφονται εξαφανίζονται σε αυτή την περίπτωση.
- Στη δεξαμενή τύπου IV στο σημείο Γ στα 150 kHz με βάση το διάγραμμα της κατανομής Wigner-Ville και με γνώμονα τις παρατηρήσεις για το ίδιο σημείο της δεξαμενής τύπου III παρατηρούνται τα ίδια σχεδόν αποτελέσματα, εκτός ενός μικρού διαχωρισμού του $A1$ με τον επερχόμενο $S0$ τρόπο. Συνεπώς μπορεί να ειπωθεί ότι το σήμα που καταγράφεται όταν το είδος της ατέλειας είναι τέτοιο και η καταγραφή πραγματοποιείται σε μάλιστα συχνοτήτων γύρω στα 150 kHz ότι η απόκριση του σημείου Γ είναι ανεξάρτητη της θέσης της ατέλειας.
- Στη δεξαμενή τύπου III στο σημείο Δ στα 150 kHz φτάνει πρώτα ο $A1$ τρόπος και ακολουθεί ο $S0$ στην περίπτωση που είναι άδεια η δεξαμενή. Στην περίπτωση που εμπεριέχει πετρέλαιο ή ίζημα και πετρέλαιο τότε καταφθάνει παλμός που έχει τον $S0$ και ένα πολύ στενό φάσμα του $A0$ με σημαντικό πλάτος! Η συνεισφορά του ρευστού επιδρά επίσης στη μείωση του πλάτους της κυματομορφής σχεδόν στο μισό με αυτό του μέγιστου πλάτους του σήματος στην άδεια δεξαμενή.
- Στη δεξαμενή τύπου IV στο σημείο Δ στα 150 kHz παρατηρείται το ίδιο φαινόμενο με το σημείο Δ της δεξαμενής τύπου III στην ίδια μάλιστα συχνοτήτων μελέτης του δυναμικού φαινομένου. Ως εκ τούτου η απόκριση του σημείου Δ είναι σχεδόν ανεξάρτητη της θέσης της ατέλειας.
- Στη δεξαμενή τύπου III στο σημείο Α στα 150 kHz από την ΑΧΣ καταφθάνει κύμα αποτελούμενο από τον $A1$ και τον $S0$ τρόπο διάδοσης. Όταν η δεξαμενή γεμίζει με πετρέλαιο ή με καύσιμο και ίζημα τότε το «σχήμα» της κυματομορφής δεν αλλάζει, εκτός του πλάτους του που υποδιπλασιάζεται και των ανακλάσεων από προερχόμενες από το ελαστικό μέσο που καταγράφονται στην περίπτωση της άδειας δεξαμενής, οι οποίες εξαφανίζονται. Αξίζει

να σημειωθεί ότι το κύμα στη δεξαμενή τύπου III που παρουσιάζει ίζημα ό,τι αναγνωρίζεται μία ανάκλαση (στα 105μsec περίπου) που προέρχεται από τη διεπιφάνεια ιζήματος με το πετρέλαιο.

- Στη δεξαμενή τύπου IV στο σημείο Α στα 150 kHz παρατηρείται η ίδια συμπεριφορά με το σημείο Α της δεξαμενής τύπου III. Επίσης όμοια με πριν παρατηρείται ανάκλαση από τη διεπιφάνεια του ιζήματος-πετρελαίου να αφίχνεται στα 100μsec περίπου.
- Στη δεξαμενή τύπου III στο σημείο Γ στα 300 kHz καταφθάνει πρώτα ένα κύμα χαρακτηριζόμενο από τον *A1* τρόπο και ακριβώς μετά ακολουθεί ένας παλμός τύπου *S0* με πιο υψηλό φασματικό περιεχόμενο. Στην περίπτωση που η δεξαμενή γεμίσει με ρευστό τότε ο *S0* τρόπος φαίνεται πιο καθαρά αλλά με χαμηλότερη ισχύ, ενώ όταν υπεισέρχεται το ίζημα τότε αυτός «εξαφανίζεται». Το πλάτος του σήματος μειώνεται σημαντικά με την εισαγωγή του ρευστού στη δεξαμενή.
- Στη δεξαμενή τύπου IV στο σημείο Γ στα 300 kHz ισχύει ακριβώς το ίδιο φαινόμενο με αυτό του ίδιου σημείου στη δεξαμενή τύπου III, με τη σημαντική διαφορά ότι το πλάτος της κυματομορφής δεν μεταβάλλεται με την εισαγωγή του ρευστού σε αυτή.
- Στη δεξαμενή τύπου III στο σημείο Δ στα 300 kHz, όπως φαίνεται από την κατανομή Wigner-Ville, καταφθάνει πρώτα ο *A1* τρόπος με χαμηλό πλάτος και ακολουθεί διακριτά ο *S0* με περισσότερη ισχύ σε σχέση με τον προηγούμενο. Όταν δεξαμενή γεμίζει με πετρέλαιο φαίνεται το κύμα να καταφθάνει πιο γρήγορα αφού ακολουθεί το σύντομο μονοπάτι μέσω του ρευστού, αλλά το πλάτος του είναι μειωμένο κατά πέντε φορές, όπου ο *A1* τρόπος έχει πιο πολύ ενέργεια σε σχέση με πριν και ο *S0* είναι πιο εξασθενημένος. Όταν υπεισέρχεται το στρώμα του ιζήματος τότε ο *S0* εξασθενεί περισσότερο σε ενέργεια.
- Στη δεξαμενή τύπου IV στο σημείο Δ στα 300 kHz το κύμα εμπεριέχει τον *S0* τρόπο πιο έντονο και λιγότερο τον *A1*. Ο χρόνος άφιξης του σήματος είναι ανεξάρτητος του περιεχομένου της δεξαμενής, κάτι που πιθανώς να οφείλεται στο γεγονός ότι η ατέλεια είναι αρκετά κοντά στο τοίχωμα της δεξαμενής, καθώς επίσης και το «σχήμα» της κυματομορφής. Αντίθετα όμως το πλάτος του σήματος μειώνεται περίπου δύο φορές με την εισαγωγή του ρευστού στην κατασκευή.
- Στη δεξαμενή τύπου III στο σημείο Α στα 300 kHz όταν αυτή είναι άδεια, ο κύριος τρόπος που διαφαίνεται είναι ο *S0*, ενώ όταν σε αυτή μπαίνει πετρέλαιο ή και ίζημα τότε το πρώτο κύμα που φτάνει είναι ο *A1* και ακολουθεί ξεχωριστά ο *S0*, με το επιφανειακό κύμα Rayleigh και το κύμα προερχόμενο από την ανάκλαση στη διεπιφάνεια ιζήματος-πετρελαίου να καταφθάνουν αργοπορημένα. Το πλάτος του κύματος όταν η δεξαμενή περιέχει ρευστό είναι περίπου

τέσσερις φορές μικρότερο σε σχέση με του αντίστοιχου κύματος όταν αυτή είναι άδεια.

- Στη δεξαμενή τύπου IV στο σημείο A στα 300 kHz το κύμα που καταγράφεται αποτελείται κυρίως από το μέτωπο του $A1$ και ακριβώς μετά (σχεδόν αμέσως) του $S0$. Η κυματομορφή δεν αλλάζει ιδιαίτερα μορφή όταν η δεξαμενή είναι άδεια ή γεμάτη με πετρέλαιο, αλλά ούτε αλλάζει φασματικό περιεχόμενο και τρόπους διάδοσης, μόνο που μειώνεται το πλάτος του σήματος τέσσερις φορές στη δεύτερη περίπτωση της δεξαμενής. Το κύμα που προέρχεται από την ανάκλαση στη διεπιφάνεια του ιζήματος με το πετρέλαιο είναι και πάλι εμφανές.

Μέχρι τώρα η μελέτη της κυματικής διάδοσης στην κατασκευή της δεξαμενής αποθήκευσης καυσίμων πραγματοποιήθηκε σε ένα ευρύ φάσμα συχνοτήτων στη ζώνη από τα 50 kHz μέχρι τα 450 kHz. Οι παρατηρήσεις που εξήχθησαν μετά τη διενέργεια όλων αυτών των αριθμητικών πειραμάτων είναι αρκετές, αλλά πάλι όμως κρίνεται απαραίτητο να γίνει διερεύνηση της συμπεριφοράς της κατασκευής σε ένα φάσμα συχνοτήτων αρκετά χαμηλά του προηγούμενου. Για να γίνει κάτι τέτοιο επιλέγεται νέα διέγερση, με φασματικό περιεχόμενο «χαμηλότερο» των προηγούμενων δύο διεγέρσεων στα 150 kHz και 300 kHz κεντρικής συχνότητας.

Η νέα διέγερση τύπου Hanning επιλέγεται να έχει κεντρική συχνότητα τα $f_0 = 50$ kHz και διάρκειας περίπου ίση με 60 μsec . Στο Σχ. 5.46(α') παρουσιάζεται η μορφή του παλμού που πρόκειται να εφαρμοστεί στις δύο διαφορετικές ατέλειες της δεξαμενής ως απελευθέρωση τασικής ενέργειας, ενώ στο Σχ. 5.46(β') αναπαριστάται το φασματικό διάγραμμα του παλμού, σχήματος καμπάνας.

Σχήμα 5.46: (α') Συνάρτηση διέγερσης τύπου παραθύρου Hanning με κεντρική συχνότητα στα 50 kHz με (β') πλάτος του φάσματος στο πεδίο συχνοτήτων μετά από μετασχηματισμό Fourier.

Οι αναπαραστάσεις των κατανομών Wigner-Ville για τη δεξαμενή τύπου I στα σημεία παρατήρησης A και Γ παρουσιάζονται στο Σχ. 5.47 όταν η δεξαμενή είναι άδεια, όταν περιέχει πετρέλαιο και όταν η δεξαμενή περιέχει καύσιμο καθώς και στρώμα ιζήματος αργού πετρελαίου. Επίσης στο Σχ. 5.48 παρουσιάζονται οι κατανομές για την ίδια δεξαμενή στα σημεία παρατήρησης Δ και Ε αντίστοιχα. Οι

Σχήμα 5.47: Πρόβλημα δεξαμενής τύπου Ι με διέγερση στα 50 kHz κεντρική συχνότητα: Αναπαράσταση Χρόνου-Συχνότητας και απόκριση της κάθετης στην επιφάνεια της δεξαμενής συνιστώσας των μετατοπίσεων όταν (α'), (β') η δεξαμενή είναι άδεια, (γ'), (δ') περιέχει πετρέλαιο και (ε'), (ζ') περιέχει πετρέλαιο παρουσία στρώματος ιζήματος για τα σημεία παρατήρησης Α και Γ αντίστοιχα.

Σχήμα 5.48: Πρόβλημα δεξαμενής τύπου I με διέγερση στα 50 kHz κεντρική συχνότητα: Αναπαράσταση Χρόνου-Συχνότητας και απόκριση της κάθετης στην επιφάνεια της δεξαμενής συνιστώσας των μετατοπίσεων όταν (α'), (β') η δεξαμενή είναι άδεια, (γ'), (δ') περιέχει πετρέλαιο και (ε'), (ζ') περιέχει πετρέλαιο παρουσία στρώματος ιζήματος για τα σημεία παρατήρησης Δ και Ε αντίστοιχα.

Σχήμα 5.49: Πρόβλημα δεξαμενής τύπου II με διέγερση στα 50 kHz κεντρική συχνότητα: Αναπαράσταση Χρόνου-Συχνότητας και απόκριση της κάθετης στην επιφάνεια της δεξαμενής συνιστώσας των μετατοπίσεων όταν (α'), (β') η δεξαμενή είναι άδεια, (γ'), (δ') περιέχει πετρέλαιο και (ε'), (ζ') περιέχει πετρέλαιο παρουσία στρώματος ιζήματος για τα σημεία παρατήρησης Α και Γ αντίστοιχα.

Σχήμα 5.50: Πρόβλημα δεξαμενής τύπου Π με διέγερση στα 50 kHz κεντρική συχνότητα: Αναπαράσταση Χρόνου-Συχνότητας και απόκριση της κάθετης στην επιφάνεια της δεξαμενής συνιστώσας των μετατοπίσεων όταν (α'), (β') η δεξαμενή είναι άδεια, (γ'), (δ') περιέχει πετρέλαιο και (ε'), (ζ') περιέχει πετρέλαιο παρουσία στρώματος ιζήματος για τα σημεία παρατήρησης Δ και Ε αντίστοιχα.

κατανομές Wigner-Ville για τη δεξαμενή τύπου II στα σημεία παρατήρησης Α, Γ παρουσιάζονται στο Σχ. 5.49 και των σημείων Δ, Ε στο Σχ. 5.50 για τις τρεις περιπτώσεις κατάστασης της δεξαμενής.

Αναλύοντας τα διαγράμματα των Σχ. 5.47-5.50 μπορούν να γίνουν οι εξής παρατηρήσεις:

- Στη δεξαμενή τύπου I στο σημείο Γ στα 50 kHz από την ΑΧΣ διαφαίνεται να φτάνει ένας παλμός τύπου *A0* χωρίς διασκόρπιση, αφού ο αρχικός παλμός της διέγερσης ταξιδεύει σχεδόν χωρίς να παραμορφώνεται. Οι κυματομορφές παρουσιάζουν αύξηση στο μέγιστο πλάτος και στη διάρκειά τους όταν η δεξαμενή τύπου I γεμίζει με καύσιμο, διότι τότε καταφθάνει πιο γρήγορα το επιφανειακό κύμα Rayleigh. Οι επερχόμενες ανακλάσεις όταν η δεξαμενή είναι άδεια είναι πιο πολλές διότι στην αντίθετη περίπτωση που είναι άδεια ένα μεγάλο μέρος της ενέργειας της διαταραχής διαθλάται στο ρευστό.
- Στη δεξαμενή τύπου II στο σημείο Γ στα 50 kHz το κύμα που φτάνει δεν έχει παραμορφωθεί καθόλου καθώς επίσης δεν έχει μεταβληθεί το μέγιστο πλάτος του και η διάρκειά του. Τούτο οφείλεται καθαρά στο γεγονός ότι η εγκοπή είναι αρκετά κοντά στο τοίχωμα της δεξαμενής.
- Στη δεξαμενή τύπου I στο σημείο Δ στα 50 kHz με βάση την ΑΧΣ φτάνει ο *A1* τρόπος μέσω της κατασκευής, ενώ για την περίπτωση που η δεξαμενή περιέχει πετρέλαιο μετά ακολουθεί ένα κύμα προερχόμενο μέσω του ρευστού, το οποίο από μέρους του προήλθε από τη διάθλαση από το ελαστικό μέσο στο ακουστικό μέσο. Το πλάτος και η διάρκεια του σήματος αυξάνει όταν υπεισέρχεται το καύσιμο σε σχέση με όταν η δεξαμενή τύπου I είναι άδεια.
- Στη δεξαμενή τύπου II στο σημείο Δ στα 50 kHz καταφθάνει μονάχα ο *A1* τρόπος χωρίς διασκόρπιση, ενώ λιγοστή ενέργεια φαίνεται να διαπερνά το ρευστό –όταν αυτό υπάρχει– φαινόμενο παρόμοιο με αυτό που παρατηρήθηκε στο σημείο Γ της δεξαμενής τύπου II.
- Στις δεξαμενές τύπου I, II στο σημείο Α στα 50 kHz παρατηρείται το ίδιο φαινόμενο, δηλαδή πρώτα να φτάνει ο παλμός της διαταραχής απααμόρφωτος και μετά να ακολουθεί ένα ισχυρό κύμα Rayleigh (όταν υπάρχει ρευστό). Το μέγιστο πλάτος του σήματος στο σημείο αυτό είναι πολύ πιο χαμηλό σε σχέση με όταν η δεξαμενή είναι γεμάτη με πετρέλαιο ή και με ίζημα.

Οι αναπαραστάσεις των κατανομών Wigner-Ville για τη δεξαμενή τύπου III στα σημεία παρατήρησης Α, Γ παρουσιάζονται στο Σχ. 5.51 όταν η δεξαμενή είναι άδεια, όταν περιέχει πετρέλαιο και όταν η δεξαμενή περιέχει υγρό καθώς και στρώμα ιζήματος πετρελαίου. Επίσης στο Σχ. 5.52 παρουσιάζονται οι κατανομές για τη δεξαμενή τύπου III στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα. Όμοια οι κατανομές Wigner-Ville για τη δεξαμενή τύπου IV στα σημεία παρατήρησης Α, Γ παρουσιάζονται στο Σχ. 5.53 και των σημείων παρατήρησης Δ, Ε στο Σχ. 5.54 για τις τρεις περιπτώσεις κατάστασης της δεξαμενής.

Σχήμα 5.51: Πρόβλημα δεξαμενής τύπου III με διέγερση στα 50 kHz κεντρική συχνότητα. Αναπαράσταση Χρόνου-Συχνότητας και απόκριση της κάθετης στην επιφάνεια της δεξαμενής συνιστώσας των μετατοπίσεων όταν (α'), (β') η δεξαμενή είναι άδεια, (γ'), (δ') περιέχει πετρέλαιο και (ε'), (ζ') περιέχει πετρέλαιο παρουσία στρώματος ιζήματος για τα σημεία παρατήρησης Α και Γ αντίστοιχα.

Σχήμα 5.52: Πρόβλημα δεξαμενής τύπου ΙΙΙ με διέγερση στα 50 kHz κεντρική συχνότητα: Αναπαράσταση Χρόνου-Συχνότητας και απόκριση της κάθετης στην επιφάνεια της δεξαμενής συνιστώσας των μετατοπίσεων όταν (α'), (β') η δεξαμενή είναι άδεια, (γ'), (δ') περιέχει πετρέλαιο και (ε'), (ζ') περιέχει πετρέλαιο παρουσία στρώματος ιζήματος για τα σημεία παρατήρησης Δ και Ε αντίστοιχα.

Σχήμα 5.53: Πρόβλημα δεξαμενής τύπου IV με διέγερση στα 50 kHz κεντρική συχνότητα. Αναπαράσταση Χρόνου-Συχνότητας και απόκριση της κάθετης στην επιφάνεια της δεξαμενής συνιστώσας των μετατοπίσεων όταν (α'), (β') η δεξαμενή είναι άδεια, (γ'), (δ') περιέχει πετρέλαιο και (ε'), (ζ') περιέχει πετρέλαιο παρουσία στρώματος ιζήματος για τα σημεία παρατήρησης Α και Γ αντίστοιχα.

Σχήμα 5.54: Πρόβλημα δεξαμενής τύπου IV με διέγερση στα 50 kHz κεντρική συχρότητα: Αναπαράσταση Χρόνου-Συχρότητας και απόκριση της κάθετης στην επιφάνεια της δεξαμενής συνιστώσας των μετατοπίσεων όταν (α'), (β') η δεξαμενή είναι άδεια, (γ'), (δ') περιέχει πετρέλαιο και (ε'), (ζ') περιέχει πετρέλαιο παρουσία στρώματος ιζήματος για τα σημεία παρατήρησης Δ και Ε αντίστοιχα.

Με βάση τα διαγράμματα των Σχ. 5.51-5.54 μπορούν να διατυπωθούν οι ακόλουθες παρατηρήσεις:

- Στη δεξαμενή τύπου III στο σημείο Γ στα 50 kHz ο κύριος παλμός που φτάνει μοιάζει να είναι *A0* τρόπου, και είναι ο ίδιος όταν στη δεξαμενή υπεισέρχεται πετρέλαιο επιπλέον. Τότε όμως ακολουθεί ένα ισχυρό επιφανειακό κύμα και η ανάκλαση από τη διεπιφάνεια ιζήματος-πετρελαίου, όταν το στρώμα του ιζήματος είναι υπαρκτό. Με αυτό τον τρόπο μπορεί να γίνει αναγνώριση της ύπαρξης ιζήματος στη δεξαμενή, ενώ πολύ εύκολα μέσω του υπολογισμού του χρόνου άφιξης της ανάκλασης αυτής μπορεί να εκτιμηθεί το πάχος του στρώματος αυτού.
- Στη δεξαμενή τύπου IV στο σημείο Γ στα 50 kHz το κύμα που καταγράφεται είναι μόνο *A0* τρόπου και δεν ακολουθεί τίποτα, εκτός μίας ασθενούς ανάκλασης λόγω της παρουσίας του ιζήματος (όταν αυτό υπάρχει). Γενικά η κυματομορφή δεν αλλάζει σχεδόν καθόλου σε πλάτος και διάρκεια με τη μεταβολή του περιεχομένου της δεξαμενής. Η πιο πιθανή αιτία για αυτό το φαινόμενο είναι η μικρή απόσταση της ρωγμής από το τοίχωμα της δεξαμενής.
- Στη δεξαμενή τύπου III στο σημείο Δ στα 50 kHz το κύριως κύμα είναι τρόπου *A1*, ενώ μετά ακολουθεί το κύμα που έχει διαδοθεί μέσω του ρευστού –όταν αυτό υπάρχει– και ένα ασθενές επιφανειακό κύμα. Το κύμα που προέρχεται από το ρευστό είναι ελάχιστα πιο γρήγορο παρουσία ιζήματος. Γενικά η ύπαρξη του ακουστικού μέσου στη μεταλλική κατασκευή αυξάνει το πλάτος του σήματος που καταγράφεται.
- Στη δεξαμενή τύπου IV στο σημείο Δ στα 50 kHz ισχύει ότι πριν στο ίδιο σημείο της δεξαμενής τύπου III.
- Στις δεξαμενές τύπου III, IV στο σημείο Α στα 50 kHz παρατηρείται να φτάνει με μεγάλη ενέργεια ένας παλμός τρόπου *A1* όταν οι δεξαμενές αυτές είναι άδειες, ενώ όταν είναι γεμάτες με υγρό τότε φτάνει ένα ισχυρό επιφανειακό κύμα Rayleigh καθώς και το κύμα ανάκλασης από τη διεπιφάνεια του ιζήματος με το πετρέλαιο.

Συγκεντρώνοντας τα συμπεράσματα που εξήχθησαν για τις δεξαμενές τύπου I και II καθώς επίσης παρατηρώντας για άλλη μία φορά όλα τα διαγράμματα της ΕΕΨΚWV και των αντίστοιχων κυματομορφών τότε μπορεί κάποιος να οδηγηθεί στις ακόλουθες παρατηρήσεις, για την ειδική περίπτωση που η ατέλεια έχει σχήμα κατακόρυφης επιφανειακής εγκοπής και στην οποία το τασιικό φορτίο που εφαρμόζεται κατά τη διάδοση μίας ρωγμής σε αυτή εφαρμόζεται στην οριζόντια διεύθυνση, όπως φαίνεται στο Σχ. 5.29(α').

- (α') Στο σημείο Δ στα 150 kHz και 300 kHz το πιο μεγάλο μέρος της ενέργειας μεταφέρεται μέσω της μεταλλικής κατασκευής. Όταν η δεξαμενή περιέχει ρευστό τότε ένα σημαντικό ποσό της αρχικής ενέργειας διαχέεται στο υγρό και

«χάνεται». Ως εκ τούτου το σήμα που καταγράφεται σε αυτή την περίπτωση είναι πιο εξασθενημένο, σε αντίθεση με την περίπτωση που η δεξαμενή είναι άδεια. Η μορφή του κύματος που αφίκνεται παραμένει σχεδόν η ίδια, ανάλογα με τη συχνότητα διέγερσης-συντονισμού των αισθητήρων καταγραφής του ΜΚΕ. Στο ίδιο σημείο στα 50 kHz όταν η ατέλεια (εγκοπή) είναι μακριά του τοίχου της δεξαμενής τότε μαζί με το ελαστικό κύμα που καταφθάνει ακολουθεί και ένα σχετικά αργοπορημένο κύμα προερχόμενο από το ρευστό. Στην ειδική περίπτωση που η εγκοπή είναι κοντά στο κάθετο τοίχωμα τότε το σήμα που καταγράφεται προέρχεται κυρίως μέσω του ελαστικού μέσου, άρα το σήμα είναι ανεξάρτητο της ύπαρξης ή όχι του πετρελαίου στη δεξαμενή καθώς και της στάθμης του. Για το σημείο Δ στη δεξαμενή τύπου Ι στα 150 kHz φθάνει σήμα αποτελούμενο κυρίως από τους $A1$, $S0$ · στη δεξαμενή τύπου ΙΙ στην ίδια ζώνη συχνοτήτων λειτουργίας το σήμα που καταγράφεται αποτελείται από τους $A0$, $A1$, $S0$ τρόπους. Για τη ζώνη συχνοτήτων κοντά στα 300 kHz οι κυματομορφές αποτελούνται κυρίως από τους $A1$, $S0$ τρόπους και είναι ανεξάρτητες από την θέση της δεξαμενής, όπως παρατηρήθηκε προηγουμένως. Συνεπώς η ανάλυση μέσω της ΑΧΣ αποτελεί ισχυρό εργαλείο για τη διάκριση της θέσης της ατέλειας καθώς και των τρόπων διάδοσης στο ελαστικό μέσο.

(β') Στο σημείο Γ ο $A1$ τρόπος, και πιο έντονα ο $S0$, φαίνεται να επηρεάζουν περισσότερο την κυματική διάδοση στη δεξαμενή αποθήκευσης καυσίμων. Μάλιστα η παρουσία του $A1$ τρόπου γίνεται εντονότερη στη δεξαμενή τύπου Ι από ότι στη δεξαμενή τύπου ΙΙ, άρα η θέση της εγκοπής μπορεί να υπολογιστεί μέσω του χρόνου άφιξης του $A1$ τρόπου στις χαμηλές συχνότητες, όταν η καταγραφή των σημάτων γίνεται στη ζώνη κοντά στα 150 kHz. Για αυτή την περίπτωση το πρώτο κύμα που καταφθάνει είναι ανεξάρτητο του περιεχομένου της δεξαμενής. Αντίθετα στα 300 kHz οι διαφορές των κυματομορφών για τις δεξαμενή τύπου Ι και ΙΙ δεν είναι ιδιαίτερα εμφανείς. Επίσης για αυτό το φάσμα συχνοτήτων λειτουργίας, το πλάτος των σημάτων δεν αλλάζει με το περιεχόμενο της δεξαμενής που μελετάται, άρα ανεξάρτητο και με τη στάθμη του στρώματος του ιζήματος. Στα 50 kHz όταν η απόσταση της ατέλειας από το κάθετο τοίχωμα της δεξαμενής (δεξαμενή τύπου ΙΙ) τότε καταγράφεται ένα σύντομος σε διάρκεια παλμός, ενώ στην αντίθετη περίπτωση που η απόσταση είναι σημαντική (δεξαμενή τύπου Ι) τότε μετά το πρωτεύον κύμα ακολουθεί ένα ισχυρό επιφανειακό κύμα και (στην περίπτωση που υπάρχει ιζήμα) ένα κύμα λόγω της ανάκλασης στη διεπιφάνεια του ιζήματος-πετρελαίου.

(γ') Στο σημείο Α –κατ' επέκταση στον πυθμένα της δεξαμενής– ο πρωτεύον παλμός που καταφθάνει είναι ανεξάρτητος της διέγερσης άρα και της ζώνης συχνοτήτων λειτουργίας, συγκρίνοντας τα αποτελέσματα για τις τρεις περιπτώσεις που η δεξαμενή είναι άδεια, γεμάτη με πετρέλαιο και περιέχει πετρέλαιο με στρώμα ιζήματος αργού πετρελαίου. Βέβαια στα 150 kHz και 300 kHz φθάνει κύμα αποτελούμενο από τον $A1$ και $S0$ τρόπο, ενώ στα 50 kHz εμφανίζεται μόναχα ο $A0$ τρόπος, όπου μαζί με τον αρχικό παλμό αφίκνεται το επιφανειακό

κύμα Rayleigh (κάτι που δεν είναι έντονο στις άλλες συχνότητες λειτουργίας).

- (δ') Στην θέση καταγραφής του σημείου Γ καλύτερες ζώνες συχνοτήτων καταγραφής είναι τα 150 kHz και 50 kHz για την αναγνώριση της θέσης τέτοιου είδους ατέλειες.
- (ε') Στην θέση καταγραφής του σημείου Δ η βέλτιστη ζώνη συχνοτήτων καταγραφής είναι τα 50 kHz για την αναγνώριση της θέσης της ατέλειας. Επίσης στο σημείο Δ θα ήταν χρήσιμο να τοποθετήσει κάποιος αισθητήρες ευρεώς φάσματος (broad-band sensors) και αφού καταγράψει το σήμα να εφαρμόσει σε φίλτρα σε διάφορες ζώνες συχνοτήτων και σε αυτά να κάνει χρήση της τεχνικής της ΑΧΣ ώστε να παρατηρήσει τις διαφορές στα κύματα και να τα αναγνωρίσει.
- (ς') Για τις δεξαμενές τύπου Ι και ΙΙ, όπου η ατέλεια έχει μορφή εγκοπής και που η διέγερση εφαρμόζεται οριζόντια, συχνότητα λειτουργίας στη ζώνη των 300 kHz θα πρέπει να αποφεύγεται διότι δε μπορεί να δώσει χρήσιμα συμπεράσματα για την κυματική διάδοση στη μεταλλική κατασκευή και την αναγνώριση της θέσης της ατέλειας.

Όμοια για τις δεξαμενές τύπου ΙΙΙ και ΙV όπου η ατέλεια έχει τη μορφή οριζόντιας ρωγμής και στην οποία εφαρμόζεται κάθετα στα άκρα των χειλών της το τασικό φορτίο (βλ. Σχ. 5.29(β')), παρατηρώντας κάποιος όλα τα διαγράμματα της ΕΕΨΚWV και των αντίστοιχων κυματομορφών για τις τρεις ζώνες συχνοτήτων διέγερσης, τότε μπορεί κάποιος να οδηγηθεί στα ακόλουθα γενικά συμπεράσματα.

- (α') Στο σημείο Δ στα 150 kHz κάνοντας χρήση της ΑΧΣ μπορεί να διαγνωστεί η ρωγμή πιο εύκολα, αφού διαδίδεται ο Α1 και ο S0 τρόπος, ενώ όταν υπάρχει παρουσία υγρού περιεχομένου τότε ο Α0 γίνεται περισσότερο φανερός. Στα 300 kHz μπορεί να διαγνωστεί κατ' εκτίμηση η θέση του, αφού στην περίπτωση μεγάλης απόστασης ρωγμής-τοίχου δεξαμενής ο Α1 κάνει έντονη παρουσία σε συνδυασμό με τον S0 τρόπο, ενώ όταν η απόσταση αυτή μικραίνει τότε ένα μικρός σε διάρκεια παλμός καταφθάνει με περιεχόμενο αρκετά στενό στο φάσμα όπου ο Α1 είναι πιο ασθενής σε ισχύ και ο S0 σαφώς πιο αδύναμος. Στα 50 kHz τα αποτελέσματα στο σημείο Δ σε συνδυασμό με τα αντίστοιχα αποτελέσματα του σημείου Γ μπορούν να δώσουν μία γενική εκτίμηση της θέσης της ατέλειας. Το πιο σημαντικό σημείο στην παρατήρηση αυτή είναι ότι η εκτίμηση της θέσης της ατέλειας μπορεί να γίνει ανεξάρτητα του είδους αλλά και της διεύθυνσης που επιβάλλεται το τασικό φορτίο σε πραγματικές συνθήκες πειράματος Ακουστικής Εκπομπής.
- (β') Στο σημείο Γ το φάσμα συχνοτήτων κοντά στα 150 kHz φαίνεται να μη μπορεί να εξάγει χρήσιμα συμπεράσματα για την θέση της ατέλειας στις δεξαμενές τύπου ΙΙΙ και ΙV καθώς και για την ύπαρξη ή όχι ιζήματος στη δεξαμενή αποθήκευσης καυσίμων. Αντίθετα όμως στα 300 kHz μπορεί να διαγνωστεί η

ύπαρξη ιζήματος, αφού όπως φαίνεται στη δεξαμενή τύπου ΙΙΙ στο σημείο Γ η παρουσία του ιζήματος επιδρά στην «απαλοιφή» του $S0$ τρόπου διάδοσης. Στα 50 kHz στο ίδιο σημείο παρατήρησης μπορεί να γίνει αναγνώριση και σχετικός εντοπισμός της ατέλειας διότι μεγάλο μέρος της ενέργειας του κύματος που καταφθάνει προέρχεται από το επιφανειακό κύμα Rayleigh. Σε συνδυασμό με την απόκριση του σημείου Δ μπορεί να γίνει σωστός εντοπισμός της θέσης της ρωγμής.

- (γ') Στο σημείο Α μπορεί να γίνει πολύ εύκολα εντοπισμός της θέσης της ατέλειας τόσο στα 150 kHz όσο και στα 300 kHz, μονάχα στην περίπτωση που η ατέλεια έχει σημαντική απόσταση από το κάθετο τοίχωμα της δεξαμενής. Επίσης μπορεί να γίνει διάκριση της ύπαρξης ή όχι ιζήματος όταν η δεξαμενή περιέχει πετρέλαιο και να υπολογίσει με σχετική ακρίβεια το παχός του στρώματος του ιζήματος (μέσω του δευτερευόντος ανακλώμενου κύματος). Η ακρίβεια εντοπισμού της θέσης της ατέλειας μπορεί να γίνει με συνεκτίμηση της απόκρισης του σημείου Δ. Στη ζώνη συχνοτήτων κοντά στα 50 kHz ισχύουν τα ίδια συμπεράσματα με αυτά που εξήχθησαν για τις ζώνες 150 kHz, 300 kHz αντίστοιχα.
- (δ') Στην περίπτωση της δεξαμενής τύπου ΙV, όπου η απόσταση της ρωγμής από το τοίχωμα της δεξαμενής είναι πάρα πολύ μικρή, μπορεί να γίνει ξεκάθαρο από το γεγονός ότι τα σήματα που καταγράφονται στα 50 kHz δεν παρουσιάζουν κάποια σημαντική μεταβολή μεταξύ των σημείων Γ και Δ. Η παρατήρηση αυτή είναι ανεξάρτητη του περιεχομένου της δεξαμενής. Το ίδιο επίσης φαινόμενο παρατηρείται και στη δεξαμενή τύπου ΙΙΙ στην ίδια ζώνη συχνοτήτων λειτουργίας.

Βιβλιογραφία

- [1] Alleyne D, Cawley P (1991): A two-dimensional Fourier transform method for the measurement of propagating multimode signals. *Journal of the Acoustical Society of America*, **89**, 1159–1168.
- [2] Arias I, Achenbach JD (2004): Use of reciprocity considerations for the two-dimensional BEM analysis of wave propagation in an elastic half-space with applications to acoustic emission. *Wave Motion*, **39**, 281–294.
- [3] Balasubramanyam R, Quinney D, Challis RE, Todd CPD (1996): A finite-difference simulation of ultrasonic Lamb waves in metal sheets with experimental verification. *Journal Phys. D.: Appl. Phys.*, **29**, 147–155.
- [4] Brekhovskikh LM (1960): *Waves in Layered Media*. Academic.
- [5] Chimenti DE (1997): Guided waves in plates and their use in materials characterization. *Applied Mechanics Reviews ASME*, **50**, 247–284.
- [6] Cohen L (1989): Time-Frequency Distributions - A Review. *Proceedings of the IEEE*, **77**, 941–981.
- [7] Cohen L (1995): *Time-Frequency Analysis*. Prentice-Hall.
- [8] Galán JM, Abascal R (2002): Numerical simulation of Lamb wave scattering in semi-infinite plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **53**, 1145–1173.
- [9] Gorman MR (1991): Plate wave acoustic emission. *Journal of the Acoustical Society of America*, **90**, 358–364.
- [10] Graff KF (1991): *Wave motion in elastic solids*. Dover Publications.
- [11] Grade S, Gram-Hansen K (1997): The Analysis of Nonstationary Signals. *Sound and Vibration*, 30th Anniversary Issue, 40–46.
- [12] Jin J, Quek ST, Wang Q (2005): Wave boundary element to study Lamb wave propagation in plates. *Journal of Sound and Vibration*, **288**, 195–213.

-
- [13] Lamb H (1917): On Waves in an Elastic Plate. *Proceedings of the Royal Society of London*, Series: A, **93**, 114–128.
- [14] Moser F, Jacobs LJ, Qu J (1999): Modeling elastic wave propagation in waveguides with the finite element method. *NDT & E international*, **32**, 225–234.
- [15] Niethammer M, Jacobs LJ, Qu J, Jarzynski J (2001): Time-frequency representations of Lamb waves. *Journal of the Acoustical Society of America*, **109**, 1841–1847.
- [16] Prosser WH, Seale MD, Smith BT (1999): Time-frequency analysis of the dispersion of Lamb modes. *Journal of the Acoustical Society of America*, **105**, 2669–2676.
- [17] Protopappas VC, Fotiadis DI, Malizos KN (2006): Guided ultrasound wave propagation in intact and healing long bones. *Ultrasound in Medicine and Biology*, **32**, 693–708.
- [18] Rayleigh JWS (1976): *The Theory of Sound*. Vol. I & II, Dover Publications.
- [19] Rose JL, Fuller MC, Nestleroth JB, Jeong VH (1983): An ultrasonic global inspection technique for an offshore K-Joint. *Soc. Petrol. Eng. J.*, **23**, 358–364.
- [20] Rose JL (1999): *Ultrasonic waves in solid media*. Cambridge University Press.
- [21] Rose JL, Pelts S, Cho Y (2000): Modeling for Flaw Sizing Potential with Guided Waves. *Journal of Nondestructive Evaluation*, **19**, 55–66.
- [22] Sachse W, Pao Y-H (1978): On determination of phase and group velocities of dispersive waves in solids. *Journal of Applied Physics*, **49**, 4320–4327.
- [23] Seifried R, Jacobs LJ, Qu J (2002): Propagation of guided waves in adhesive bonded components. *NDT & E international*, **35**, 317–328.
- [24] Shen HW, Finlayson RD, Miller RK, Carlos MF, Vahaviolos SJ: Waveform analysis of simulated transient signals. *Physical Acoustics Corporation, Princeton Junction, NJ*, 369–374.
- [25] Vavourakis V, Polyzos D (2003): *A BEM/2D-FFT numerical technique for solving wave propagation problems in damaged plates*. ICCES-03 Conference, Corfu, Greece.

- [26] Veidt M, Liu T, Kitipornchai S (2002): Modelling of Lamb waves in composite laminated plates excited by interdigital transducers. *NDT & E international*, **35**, 437–447.
- [27] Zhao X, Rose JL (2003): Boundary element modeling for defect characterization potential in a wave guide. *International Journal of Solids and Structures*, **40**, 2645–2658.

Κεφάλαιο 6

Σύνοψη

Σε αυτό το κεφάλαιο γίνεται μία ανακεφαλαίωση της παρούσης διδακτορικής διατριβής. Τα γενικά συμπεράσματα που παρήχθησαν με το πέρας της ερευνητικής εργασίας πρόκειται να παρουσιαστούν στη συνέχεια. Επίσης γίνεται μία συνοπτική πρόταση ιδεών για μελλοντική έρευνα στο επιστημονικό πεδίο των αριθμητικών Μεθόδων των Συνοριακών Στοιχείων και των Τοπικών Μεθόδων χωρίς Διακριτοποίηση, καθώς και η εφαρμογή τους στο Μη-Καταστροφικό Έλεγχο.

6.1 Γενικά συμπεράσματα

Στην παρούσα διδακτορική διατριβή αναπτύχθηκαν νέες αριθμητικές Τοπικές Μεθόδους χωρίς Διακριτοποίηση καθώς και εφαρμόστηκαν ήδη υπάρχουσες μεθοδολογίες για την επίλυση προβλημάτων ελαστικότητας και ακουστικής στις δύο διαστάσεις, φαινομένων μόνιμης κατάστασης αλλά και αντίστοιχων χρονικά μεταβαλλόμενων. Επιπλέον, ορισμένες αριθμητικές τεχνικές εφαρμόστηκαν στο να επιλύσουν προβλήματα κυματικής διάδοσης σε επίπεδες πλάκες και σε κυλινδρικές δεξαμενές αποθήκευσης υγρών καυσίμων, προκειμένου να προσομοιωθούν πραγματικά πειράματα Ακουστικής Εκπομπής και Ακουστο-Υπερήχων του Μη-Καταστροφικού Ελέγχου.

Στο πρώτο σκέλος της έρευνας, αναπτύχθηκαν δύο νέες Τοπικές Μέθοδοι χωρίς Διακριτοποίηση (συγκεκριμένα οι Μέθοδοι Τοπικών Ολοκληρωτικών Εξισώσεων χωρίς Διακριτοποίηση τύπου 3 και τύπου 4: βλ. Υποεδάφ. 3.3.3, 3.3.4 αντίστοιχα), καθώς επίσης δημιουργήθηκε μία παραλλαγή υπάρχουσας τεχνικής (η Μέθοδος Τοπικών Ολοκληρωτικών Εξισώσεων χωρίς Διακριτοποίηση τύπου 1: βλ. Υποεδάφ. 3.3.1) ώστε να επιλύουν προβλήματα ελαστικότητας αλλά και ακουστικής στις δύο διαστάσεις. Παράλληλα εφαρμόστηκαν αριθμητικά ήδη δημοσιευμένες σε διεθνή περιοδικά μεθοδολογίες (οι Τοπικές Μέθοδοι Petrov-Galerkin χωρίς Διακριτοποίηση τύπου 1, και τύπων 4-6 και η Μέθοδος Τοπικών Ολοκληρωτικών Εξισώσεων χωρίς Διακριτοποίηση τύπου 2: βλ. Εδάφ. 3.2, Υποεδάφ. 3.3.2 αντίστοιχα). Ένα πλήθος από διδιάστατα προβλήματα μόνιμης κατάστασης αλλά και στο πεδίο συχνοτήτων επιλύθηκαν προκειμένου να πιστοποιηθεί η αξιοπιστία των νέων αριθμητικών μεθοδολογιών όσο και να μελετηθεί η αριθμητική τους συμπεριφορά. Τα αποτελέσματα

που εξήχθησαν από τις Τοπικές Μέθοδοι χωρίς Διακριτοποίηση συγκρίθηκαν είτε με τις αναλυτικές λύσεις που περιγράφουν τα εκάστοτε προβλήματα, είτε με την καλά θεμελιωμένη Μέθοδο των Συνοριακών Στοιχείων. Στο Κεφ. 4 γίνεται εκτενής σχολιασμός της σύγκλισης των αποτελεσμάτων, του υπολογιστικού χρόνου που απαιτεί κάθε μέθοδος καθώς και των παραμέτρων που επηρεάζουν κάθε τεχνική. Παρόλα αυτά σχολιάζεται στην κατακλείδα του κεφαλαίου αυτού ό,τι κρίνεται απαραίτητη η περαιτέρω διερεύνηση ορισμένων παραμέτρων, καθώς δεν ήταν δυνατή στο πλαίσιο της παρούσης διδακτορικής διατριβής να καλυφθούν όλες οι πτυχές της μεθόδου αυτής.

Στο δεύτερο σκέλος του παρόντος διδακτορικού συγγράμματος έγινε η μελέτη της κυματικής διάδοσης σε κατασκευές κάνοντας χρήση ορισμένων από τις μεθόδους που αναπτύχθηκαν. Σε πρώτη φάση πραγματοποιήθηκε ο αριθμητικός προσδιορισμός των καμπυλών διασκόρπισης της ελεύθερης επίπεδης πλάκας –που παρουσιάζει ή όχι επιφανειακές ατέλειες– μέσω της φασματικής ανάλυσης του μονοδιάστατου και του διδιάστατου μετασχηματισμού Fourier, καθώς επίσης μέσω της Αναπαράστασης Χρόνου-Συχνότητας. Η σύγκριση των αποτελεσμάτων που προέκυψαν με τις εξισώσεις διάδοσης των Rayleigh-Lamb απέδειξαν την ικανότητα των Μεθόδων Συνοριακών Στοιχείων και Μεθόδων των Τοπικών Ολοκληρωτικών Εξισώσεων χωρίς Διακριτοποίηση να υπολογίζουν τις καμπύλες διασκόρπισης σε κυματοδηγούς αλλά και γενικά σε ελαστικές κατασκευές. Ένα επίσης σημαντικό συμπέρασμα του Εδάφ. 5.1 είναι το γεγονός ότι η μέθοδος Αναπαράστασης του Χρόνου-Συχνότητας πλεονεκτεί έναντι της ανάλυσης μέσω του μετασχηματισμού Fourier ως προς την ευκρίνεια των παραγώμενων καμπυλών διασκόρπισης, την ταχύτητα υλοποίησης αλλά και την ευκολία χρήσης της (σημαντικό πλεονέκτημα για πρακτικά προβλήματα του Μη-Καταστροφικού Ελέγχου). Τέλος στο Εδάφ. 5.2 μελετήθηκε η κυματική διάδοση σε δεξαμενή αποθήκευσης υγρών καυσίμων. Το αριθμητικό πείραμα αυτό προσομοίωσε ένα πραγματικό πείραμα Ακουστικής Εκπομπής. Θεωρήθηκαν δύο ειδών ατέλειες στην κατασκευή αυτή, οι οποίες υποτίθεται ότι δημιουργούσαν κυματικές διαταραχές λόγω διάδοσης ρωγμών σε αυτές. Η παραμετρική μελέτη που πραγματοποιήθηκε στο εδάφιο αυτό παρήγαγε χρήσιμα συμπεράσματα. Επιγραμματικά, παρατηρήθηκε ότι όταν το φάσμα λειτουργίας της καταγραφής σε ένα πείραμα Ακουστικής Εκπομπής (δηλαδή το φάσμα βέλτιστης απόκρισης των αισθητήρων) είναι σε κάποιες ζώνες συχνοτήτων τότε σε ορισμένες από αυτές δύναται να εξαχθούν συμπεράσματα τόσο για την θέση της ατέλειας όσο και για το είδος αυτής. Επίσης σε άλλες ζώνες συχνοτήτων, όταν γίνεται η καταγραφή σε ορισμένα σημεία ή λαμβάνεται υπόψη η συνδυασμένη απόκριση σε κάποια σημεία, τότε είναι δυνατή η ανίχνευση πιθανού στρώματος ιζήματος πετρελαίου και υπολογισμού τού κατ'εκτίμηση. Παράλληλα διαφάνηκε το φαινόμενο σε ορισμένες ζώνες συχνοτήτων λειτουργίας η κυματική διάδοση να είναι ανεξάρτητη της ύπαρξης του καύσιμου υγρού ή/και του επικαθήμενου ιζήματος, χρήσιμο συμπέρασμα που συνιστά την αποφυγή εργασίας σε αυτές τις ζώνες.

6.2 Προτάσεις για μελλοντική έρευνα

Οι αριθμητικές μέθοδοι που αναπτύχθηκαν στην παρούσα διδακτορική διατριβή μπορεί να απέδειξαν την ικανότητά τους να επιλύουν διδιάστατα προβλήματα ελαστικότητας και αλληλεπίδρασης ακουστικού με ελαστικό μέσο –τόσο σε μόνιμη κατάσταση όσο και σε δυναμικά φαινόμενα– όμως κρίνεται απαραίτητη η μελλοντική ανάπτυξή τους σε διάφορα πεδία έρευνας.

Η Μέθοδος των Συνοριακών Στοιχείων είναι μία αριθμητική μέθοδος καλά θεμελιωμένη, ικανή να συναγωνιστεί την πλέον ευρέως χρησιμοποιούμενη Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων. Η χρήση της πρώτης μεθόδου σε προβλήματα τριών διαστάσεων έχει ήδη επιτευχθεί με επιτυχία σε προβλήματα που απασχόλησαν στην παρούσα διδακτορική διατριβή. Το μόνο πεδίο έρευνας που θα μπορούσε να προταθεί για την αριθμητική μέθοδο αυτή είναι η ανάπτυξη και χρήση «έξυπνων» αλγόριθμων αρίθμησης των κόμβων της κανάβου, ώστε το τελικό γραμμικό μητρώο να λαμβάνει μορφή ζώνης (banded matrix). Επίσης θα ήταν χρήσιμο στον υπάρχοντα κώδικα H/Y –που αναπτύχθηκε στο πλαίσιο της διδακτορικής διατριβής– να εισαχθεί η παραπάνω τεχνική, η οποία σε συνδυασμό με το διαχωρισμό της υπό-μελέτη κατασκευής σε πολλές υποπεριοχές, να βοηθά στην εύκολη μετατροπή του τελικού μητρώου σε μορφή μητρώου ζώνης (banded matrix) για την βελτίωση της επίδοσης της ταχύτητας επίλυσης του τελικού γραμμικού συστήματος της μεθοδολογίας.

Στον αντίποδα της Μεθόδου των Συνοριακών Στοιχείων, αναπτύχθηκαν διάφορες τεχνικές Τοπικών Μεθόδων χωρίς Διακριτοποίηση καθώς και κάποιες άλλες –ήδη δημοσιευμένες σε έγκριτα περιοδικά– εφαρμόστηκαν για τη μελέτη της αριθμητικής συμπεριφοράς των αποτελεσμάτων που παράγουν. Επειδή οι Τοπικές Μέθοδοι χωρίς Διακριτοποίηση είναι σχετικά πρόσφατα αναπτυσσόμενες αριθμητικές μέθοδοι, τα σημεία στα οποία επιδέχονται έρευνα είναι πολύ περισσότερα. Με βάση τα παραδείγματα που επιλύθηκαν στο Κεφ. 4 παρατηρήθηκε ότι είναι χρήσιμο να γίνει μεγαλύτερη διερεύνηση της επιρροής της βάσης πολυωνυμικής προσέγγισης και της συνάρτησης βάρους στην προσέγγιση ή την παρεμβολή ενός άγνωστου πεδίου. Γενικά η ποιότητα των αποτελεσμάτων εξαρτώταν άμεσα από τη μέθοδο προσέγγισης ή παρεμβολής που χρησιμοποιούταν καθώς και από το μέγεθος της ακτίνας επιρροής. Τούτες οι παράμετροι σε ορισμένες μεθοδολογίες τους προσδίδανε μία ασταθή συμπεριφορά, γεγονός που αποχαρκτηρίζει τις μεθόδους αυτές χρήσιμες για την υλοποίησή τους σε ένα ευρύ φάσμα προβλημάτων. Όμως μετά από εκτενή αναζήτηση στη διεθνή βιβλιογραφία, ανακαλύφθηκε ότι ορισμένοι ερευνητές άρχισαν να χρησιμοποιούν τους τριγωνισμούς Delaunay [1], οι οποίοι υπολογίζονται από τους γεωμετρικούς τόπους των κελιών Voronoi [3], και να αναπτύσσουν νέες μεθοδολογίες χωρίς διακριτοποίηση [2, 4, 5]. Μέσω των παραπάνω τριγωνισμών παρατηρήθηκε ότι μπορεί να επιτευχθεί παρεμβολή ενός άγνωστου πεδίου με μεγάλη επιτυχία, η οποία παρουσιάζει ορισμένες αξιοσημείωτες ιδιότητες. Επίσης με βάση κάποιες εκτιμήσεις του γράφωντα της παρούσας διατριβής, η ίδια τεχνική μπορεί να δώσει ώθηση στις Τοπικές Μεθόδους χωρίς Διακριτοποίηση και να τις επεκτείνει στις τρεις διαστάσεις. Κάτι τέτοιο δεν έχει γίνει δυνατό σε ικανοποιητικό βαθμό

μέχρι σήμερα στην πλειονότητα αυτών που εργάζονται στις μεθόδους χωρίς διακριτοποίηση, λόγω της πολυπλοκότητας υπολογισμού κάποιων γεωμετρικών παραμέτρων (υπολογισμός πεδίου επιρροής και τρόπος ορισμού των χωρίων ολοκλήρωσης σε σφαίρα ή/και σε τμήμα του γενικού συνόρου του σώματος).

Όσον αφορά το σκέλος της εφαρμογής των αριθμητικών μεθόδων –που αναπτύχθηκαν στο πλαίσιο της παρούσης διδακτορικής διατριβής– σε προβλήματα του Μη-Καταστροφικού Ελέγχου κάποιος μπορεί να αναφέρει μια πληθώρα προβλημάτων κυματικής διάδοσης στα οποία επιδέχεται μεγάλη ανάγκη για την σε βάθος μελέτη της διάδοσης των ελαστικών κυμάτων σε αυτές. Μερικά από αυτά είναι τα πιεστικά δοχεία (σφαιρικά, κυλινδρικά), οι σωληνώσεις κ.α. Η μεθοδική ανάλυση μέσω των αριθμητικών μεθόδων και μέσω πραγματικών πειραμάτων Μη-Καταστροφικού Ελέγχου μπορεί να δώσει χρήσιμα συμπεράσματα για τη δομική ακεραιότητα των κατασκευών που μελετώνται. Παράλληλα, η πραγματοποίηση παραμετρικής ανάλυσης μέσω των «φθηνών» σε κόστος αριθμητικών μεθόδων (δεν απαιτείται πειραματική διάταξη και χρήση της σε ρεαλιστικές κατασκευές) για διαφόρων μορφών ατέλειες στις κατασκευές μπορεί να βοηθήσει στην καλύτερη κατανόηση της επιρροής τους στο φαινόμενο της κυματικής διάδοσης. Τα αποτελέσματα καθώς και τα συμπεράσματα που εξήχθησαν στην παρούσα διδακτορική διατριβή, από την επίλυση και μελέτη της κυματικής διάδοσης στο πρόβλημα της δεξαμενής αποθήκευσης καυσίμων, μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως δεδομένα εισόδου σε μία βάση δεδομένων. Αυτά από μέρος τους μπορούν να χρησιμοποιηθούν μέσω τεχνικών όπως η αναγνώριση προτύπων (pattern recognition) για την εκτίμηση της δομικής κατάστασης μίας κατασκευής.

Σε αυτό το σημείο αξίζει να σημειωθεί ότι ένα από τα παραδοτέα της παρούσης διδακτορικής διατριβής είναι το πρόγραμμα Η/Υ, το οποίο εφαρμόζει την αριθμητική Μέθοδο των Συνοριακών Στοιχείων και τις Τοπικές Μεθόδους χωρίς Διακριτοποίηση για προβλήματα ελαστικότητας και ακουστικής στις δύο διαστάσεις (βλ. Εδάφ. 1.6). Το πρόγραμμα αυτό έχει δομηθεί έτσι ώστε να μπορεί στο μέλλον να γίνει εύκολα οποιαδήποτε απαραίτητη πρόσθεση κώδικα, προκειμένου να επεκταθεί η ικανότητά του στο να επιλύει προβλήματα και σε άλλα πεδία έρευνας (μικροπολική ελαστικότητα, θερμοελαστικότητα, ηλεκτρομαγνητισμός κ.α.) καθώς και σε άλλες διαστάσεις ανάλυσης (τρεις διαστάσεις και αξονοσυμμετρία).

Βιβλιογραφία

- [1] Delaunay B (1934): Sur la Sphère Vide. A la memoire de Georges Voronoi. *Izvestia Akademii Nauk SSSR, Otdelenie Matematicheskii i Estestvennyka Nauk*, **7**, 793–800.
- [2] Sukumar N, Moran B, Belytschko T (1998): The natural element method in solid mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **43**, 839–887.
- [3] Voronoi GM (1908): Nouvelles applications des paramè tres continus à la théorie des formes quadratiques. Deuxième Memoire: Recherchès sur les paralléloèdres Primitifs. *Journal fur die Reine und Angewandte Mathematik*, **134**, 198–287.
- [4] Wang K, Zhou S, Shan G (2005): The natural neighbour PetrovGalerkin method for elasto-statics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **63**, 1126-1145.
- [5] Yongchang C, Hehua Z (2004): A meshless local natural neighbour interpolation method for stress analysis of solids. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **28**, 607-613.

Παράρτημα Α

Αριθμητικές ολοκληρώσεις

Σε αυτό το παράρτημα γίνεται περιγραφή του τρόπου με τον οποίο πραγματοποιήθηκαν οι αριθμητικές ολοκληρώσεις στη Μέθοδο των Συνοριακών Στοιχείων, στη Μέθοδο των Τοπικών Ολοκληρωτικών Εξισώσεων χωρίς Διακριτοποίηση και στη Τοπική Μέθοδο Petrov-Galerkin χωρίς Διακριτοποίηση. Στο πρώτο εδάφιο γίνεται μία απλή αναφορά στις ολοκληρώσεις κατά προσέγγιση, με παρουσίαση του κλασικού αλγόριθμου ολοκλήρωσης κατά Gauss-Legendre και κάποιων άλλων αξιοσημείωτων κανόνων ολοκλήρωσης. Το δεύτερο και πιο σημαντικό εδάφιο πραγματεύεται την αριθμητική υλοποίηση υπολογισμού των ολοκληρωμάτων επιφάνειας και όγκου, με παράλληλο σχολιασμό του χρόνου υπολογισμού και της σύγκλισής τους.

A.1 Ολοκλήρωση κατά προσέγγιση

Ο γενικευμένος αλγόριθμος ολοκλήρωσης κατά προσέγγιση υπολογίζει το ορισμένο ολοκλήρωμα στο διάστημα $[-1, +1]$ μιας ομαλής συνάρτησης $f(x)$, πολλαπλασιαζόμενη με μία συνάρτηση επιρροής $h(x)$, σαν άθροισμα n_Q όρων σύμφωνα με την σχέση [15, 8]

$$\int_{-1}^{+1} h(x) f(x) dx \simeq \sum_{l=1}^{n_Q} f(\xi^{(l)}) w^{(l)}, \quad (\text{A.1})$$

όπου $\xi^{(l)} \in [-1, +1]$ και $w^{(l)}$ είναι συντελεστές βάρους που δίδονται αναλυτικά σε πίνακες [11].

Όταν η συνάρτηση $h(x) = 1$ τότε ονομάζεται αλγόριθμος ολοκλήρωσης κατά Gauss-Legendre

$$\int_{-1}^{+1} f(x) dx \simeq \sum_{l=1}^{n_Q} f(\xi^{(l)}) w^{(l)}, \quad (\text{A.2})$$

ο οποίος έχει την ικανότητα της ακριβούς ολοκλήρωσης πολυωνυμικών εκφράσεων μέχρι και $(2n_Q - 1)^{\text{ου}}$ βαθμού.

Παραλλαγή του γενικευμένου αλγόριθμου ολοκλήρωσης είναι αυτός κατά Gauss-Chebyshev ($h(x) = (1 - x^2)^{-0.5}$)

$$\int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x) dx \simeq \sum_{l=1}^{n_Q} f(\xi^{(l)}) w^{(l)}, \quad (\text{A.3})$$

με τους συντελεστές βάρους της Εξ. (A.3) να διαφέρουν από τους αντίστοιχους της Εξ. (A.2).

Στην περίπτωση προβλημάτων ελαστικότητας ή ακουστικής στις δύο διαστάσεις οι θελιώδεις πυρήνες εμπεριέχουν τη συνάρτηση $\ln(x)$. Εδώ πρέπει να σημειωθεί ότι –όπως φαίνεται στο Παρ. Β– τα στοιχεία γραμμής είναι ορισμένα στο διάστημα $[-1, +1]$ ενώ τα τριγωνικά στοιχεία στο διάστημα $[0, +1]$. Ως εκ τούτου ο αλγόριθμος ολοκλήρωσης της λογαριθμικής συνάρτησης κατά Gauss-Legendre σε αυτή την περίπτωση δεν συγκλίνει. Ένας τρόπος επίλυσης του προβλήματος αυτού είναι να χρησιμοποιήσει κάποιος την τροποποιημένη λογαριθμική ολοκλήρωση κατά Gauss [15]

$$\int_0^{+1} \ln(x) f(x) dx \simeq \sum_{l=1}^{n_Q} f(\xi^{(l)}) w^{(l)}. \quad (\text{A.4})$$

Προσοχή χρειάζεται στην Εξ. (A.4), διότι τα όρια ολοκλήρωσης είναι στο διάστημα $[0, +1]$ και όχι στο $[-1, +1]$ όπως οι Εξ. (A.2) και (A.3).

A.2 Αριθμητικός υπολογισμός των ολοκληρωμάτων επιφάνειας και όγκου

Σε αυτή την παράγραφο πρόκειται να γίνει αναλυτική περιγραφή των ολοκληρώσεων στις αριθμητικές Μεθόδους των Συνοριακών Στοιχείων και των Τοπικών Μεθόδων χωρίς Διακριτοποίηση –που χρησιμοποιήθηκαν στην παρούσα διδακτορική διατριβή– για την καλύτερη κατανόηση από τον αναγνώστη της διαδικασίας υλοποίησής τους σε κώδικα προγράμματος H/Y.

A.2.1 Υπολογισμός επιφανειακού ολοκληρώματος στο Γ ή σε τμήμα αυτού

Έστω ότι χρειάζεται να υπολογισθεί το παρακάτω επιφανειακό ολοκλήρωμα στο σύνορο Γ για την απλή περίπτωση ενός βαθμωτού πεδίου

$$I_\Gamma = \int_\Gamma q^*(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}) p(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}}. \quad (\text{A.5})$$

Διακριτοποιώντας το γενικό σύνορο Γ με n_s τον αριθμό συνοριακά στοιχεία, το παραπάνω ολοκλήρωμα ανάγεται στο άθροισμα

$$I_{\Gamma} = \sum_{i=1}^{n_s} \int_{\hat{\Gamma}^{(i)}} q^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) p(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}}, \quad (\text{A.6})$$

όπου $\hat{\Gamma}^{(i)}$ είναι τμήμα του γενικού συνόρου Γ , το οποίο αντιστοιχεί στο i συνοριακό στοιχείο ($\Gamma = \hat{\Gamma}^{(1)} \cup \dots \cup \hat{\Gamma}^{(n_s)}$). Εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό του συστήματος συντεταγμένων του Εδάφ. 2.3 (βλ. Εξ. (2.60)) και εισάγοντας ακολούθως τη σχέση παρεμβολής του πεδίου σε ένα στοιχείο μέσω της Εξ. (2.57) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} I_{\Gamma} &= \sum_{i=1}^{n_s} \int_{\hat{\Gamma}^{(i)}} q^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \zeta \right) p(\zeta) J_s^{(i)} dS_{\zeta} \\ &= \sum_{i=1}^{n_s} \int_{-1}^{+1} q^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \zeta_1 \right) p(\zeta_1) J_s^{(i)} d\zeta_1 \\ &= \sum_{i=1}^{n_s} \int_{-1}^{+1} q^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \zeta_1 \right) \Phi(\zeta_1) J_s^{(i)} d\zeta_1 \cdot \check{\mathbf{p}}, \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

όπου $J_s^{(i)} \equiv J_s(\zeta_1)$ (βλ. Εξ. (2.60)).

Όμως τώρα στην Εξ. (A.7) μπορεί να γίνει χρήση του αλγόριθμου ολοκλήρωσης κατά Gauss-Legendre της Εξ. (A.2) ώστε να προκύψει η τελική μορφή του αριθμητικού υπολογισμού του εν λόγω ολοκληρώματος

$$I_{\Gamma} = \sum_{i=1}^{n_s} \left[\sum_{l=1}^{n_Q} q^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \xi^{(l)} \right) \Phi(\xi^{(l)}) J_s^{(i)} w^{(l)} \right] \cdot \check{\mathbf{p}}. \quad (\text{A.8})$$

Όπως έγινε κατανοητό στο Κεφ. 3, όταν το σημείο πηγής $\mathbf{x}^{(\kappa)}$ ανήκει στο γενικό σύνορο Γ ή όταν ο κύκλος ολοκλήρωσής του τέμνει το γενικό σύνορο ($\Omega_{(\kappa)} \cap \Gamma \neq \emptyset$), τότε απαιτείται ο αριθμητικός υπολογισμός του παρακάτω επιφανειακού ολοκληρώματος στις Τοπικές Μεθόδους χωρίς Διακριτοποίηση

$$I_{\Gamma(\kappa)} = \int_{\Gamma(\kappa)} q^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) p(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}}. \quad (\text{A.9})$$

Αν υποτεθεί ότι έχουν χρησιμοποιηθεί συνοριακά στοιχεία για τη διακριτοποίηση το συνόρου Γ , εκ των οποίων n_s από αυτά είτε τέμνονται από τον κύκλο ολοκλήρωσης $\Omega_{(\kappa)}$ είτε βρίσκονται εξ ολοκλήρου μέσα στο χωρίο που περικλύει, όπως φαίνεται στο Σχ. Α.1, τότε το ολοκλήρωμα της Εξ. (A.9) γράφεται σαν άθροισμα

$$I_{\Gamma(\kappa)} = \sum_{i=1}^{n_s} \int_{\hat{\Gamma}_{(\kappa)}^{(i)}} q^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) p(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}}, \quad (\text{A.10})$$

όπου $\hat{\Gamma}_{(\kappa)}^{(i)}$ είναι το i συνοριακό στοιχείο ή τμήμα αυτού που είναι εντός του χωρίου ολοκλήρωσης $\Omega_{(\kappa)}$ του σημείου πηγής $\mathbf{x}^{(\kappa)}$, ισχύοντας έτσι ότι $\Gamma_{(\kappa)} = \hat{\Gamma}_{(\kappa)}^{(1)} \cup \dots \cup \hat{\Gamma}_{(\kappa)}^{(n_s)}$.

Σχήμα A.1: Τοπικό χωρίο ολοκλήρωσης για ένα σημείο πηγής $\mathbf{x}^{(\kappa)}$ του οποίου ο κύκλος ολοκλήρωσης $\partial\Omega_{(\kappa)}$ τέμνει το γενικό σύνορο Γ του σώματος με παρουσίαση των κύκλων επιρροής $\check{\Omega}_{(j)}$ των γειτονικών κόμβων $\mathbf{x}^{(j)}$.

Χωρίζοντας τώρα το τμήμα του συνόρου $\hat{\Gamma}_{(\kappa)}^{(i)}$ σε τόσα τμήματα ($n_c^{(i)}$) όσα δημιουργούνται από την τομή των κύκλων επιρροής $\check{\Omega}_{(j)}$ των γειτονικών σημείων πηγής $\mathbf{x}^{(j)}$ με το i συνοριακό στοιχείο (βλ. Σχ. A.1) τότε προκύπτει ότι

$$I_{\Gamma_{(\kappa)}} = \sum_{i=1}^{n_s} \sum_{j=1}^{n_c^{(i)}} \int_{\bar{\mathbf{y}}_s^{(i,j)}}^{\bar{\mathbf{y}}_e^{(i,j)}} q^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) p(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}}, \quad (\text{A.11})$$

όπου $\bar{\mathbf{y}}_s^{(i,j)}$ και $\bar{\mathbf{y}}_e^{(i,j)}$ είναι το αρχικό και τελικό σημείο της τομής $\hat{\Gamma}_{(\kappa)}^{(i)} \cap \check{\Omega}_{(j)}$.

Εφαρμόζοντας στην Εξ. (A.11) το μετασχηματισμό συστήματος συντεταγμένων μέσω της Εξ. (2.60) συνεπάγεται

$$I_{\Gamma_{(\kappa)}} = \sum_{i=1}^{n_s} \sum_{j=1}^{n_c^{(i)}} \int_{z_s^{(i,j)}}^{z_e^{(i,j)}} q^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \zeta_1 \right) p(\zeta_1) J_s^{(i)} d\zeta_1, \quad (\text{A.12})$$

όπου $z_s^{(i,j)}$, $z_e^{(i,j)}$ οι συντεταγμένες των σημείων $\bar{\mathbf{y}}_s^{(i,j)}$, $\bar{\mathbf{y}}_e^{(i,j)}$ αντίστοιχα της τομής $\hat{\Gamma}_{(\kappa)}^{(i)} \cap \check{\Omega}_{(j)}$ στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων του i συνοριακού στοιχείου.

Ο γραμμικός μετασχηματισμός $\zeta_1 = \frac{z_e^{(i,j)} - z_s^{(i,j)}}{2} \gamma_1 + \frac{z_e^{(i,j)} + z_s^{(i,j)}}{2}$ αλλάζει το ολοκλήρωμα της Εξ. (A.12) στη γνωστή πλέον μορφή, ούτως ώστε να εφαρμοστεί η προσεγγιστική μέθοδος ολοκλήρωσης κατά Gauss-Legendre

$$\begin{aligned}
 I_{\Gamma(\kappa)} &= \sum_{i=1}^{n_s} \sum_{j=1}^{n_c^{(i)}} \int_{-1}^{+1} q^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \gamma_1 \right) p(\gamma_1) J_s^{(i)} J_z^{(i,j)} d\gamma_1 \\
 &= \sum_{i=1}^{n_s} \sum_{j=1}^{n_c^{(i)}} \sum_{l=1}^{n_Q} q^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \xi^{(l)} \right) p \left(\xi^{(l)} \right) J_s^{(i)} J_z^{(i,j)} w^{(l)}, \quad (\text{A.13})
 \end{aligned}$$

όπου η Ιακωβιανή του μετασχηματισμού $J_z^{(i,j)} = (z_e^{(i,j)} - z_s^{(i,j)})/2$.

Τέλος εισάγοντας στην Εξ. (A.13) την Εξ. (3.14) προσέγγισης ή παρεμβολής της άγνωστης μεταβλητής του πεδίου p στο σημείο ολοκλήρωσης, τότε κάποιος καταλήγει στη τελική μορφή του επιφανειακού ολοκληρώματος

$$I_{\Gamma(\kappa)} = \sum_{i=1}^{n_s} \left[\sum_{j=1}^{n_c^{(i)}} \sum_{l=1}^{n_Q} q^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \xi^{(l)} \right) \Phi \left(\xi^{(l)} \right) J_s^{(i)} J_z^{(i,j)} w^{(l)} \right] \cdot \check{\mathbf{p}}. \quad (\text{A.14})$$

Αν σε ένα τμήμα του συνόρου είναι προκαθορισμένες οι συνοριακές συνθήκες της μεταβλητής p τότε το ολοκλήρωμα $I_{\Gamma(\kappa)}$ διασπάται σε δύο άθροισματα ολοκληρωμάτων, ανάλογα με ποιά από αυτά έχουν τις αντίστοιχες προκαθορισμένες συνοριακές τιμές. Ακολουθώντας κάποιος τα ίδια βήματα με πριν, μπορεί να υπολογίσει αριθμητικά το ολοκλήρωμα $I_{\Gamma(\kappa)}$ σαν άθροισμα δύο επί μέρους επιφανειακών ολοκληρωμάτων ως εξής

$$\begin{aligned}
 I_{\Gamma(\kappa)} &= I_{\Gamma(\kappa)p} + I_{\Gamma(\kappa)q} \\
 &= \sum_{i_1=1}^{n_s^{(p)}} \sum_{j_1=1}^{n_c^{(i_1)}} \sum_{l_1=1}^{n_Q} q^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \xi^{(l_1)} \right) \bar{p} \left(\xi^{(l_1)} \right) J_s^{(i_1)} J_z^{(i_1,j_1)} w^{(l_1)} \\
 &\quad + \sum_{i_2=1}^{n_s^{(q)}} \left[\sum_{j_2=1}^{n_c^{(i_2)}} \sum_{l_2=1}^{n_Q} q^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \xi^{(l_2)} \right) \Phi \left(\xi^{(l_2)} \right) J_s^{(i_2)} J_z^{(i_2,j_2)} w^{(l_2)} \right] \cdot \check{\mathbf{p}}, \quad (\text{A.15})
 \end{aligned}$$

όπου προφανώς $n_s (= n_s^{(p)} + n_s^{(q)})$ το πλήθος των συνοριακών στοιχείων που ανήκουν στο πεδίο ολοκλήρωσης του σημείου πηγής ισούται με το άθροισμα εκείνων των συνοριακών στοιχείων στα οποία είναι προκαθορισμένο το πεδίο της μεταβλητής p και q αντίστοιχα.

Σε όλες τις αριθμητικές μεθόδους οι ολοκληρωτέες ποσότητες συμπεριφέρονται ομαλά όταν το σημείο πηγής απέχει από το γενικό σύνορο του σώματος ή της υπό-ανάλυση περιοχής $(\mathbf{x}^{(\kappa)} \notin \Gamma)$. Συνεπώς ο κλασικός κανόνας ολοκλήρωσης κατά Gauss-Legendre μπορεί να εφαρμοστεί με ασφάλεια ώστε τα ολοκληρώματα να συγκλίνουν ομαλά σε μία τιμή. Γενικά όσο πιο μεγάλος είναι ο αριθμός των

σημείων ολοκλήρωσης τόσο πιο μεγάλη είναι η επιτυγχανόμενη ακρίβεια, με κόστος στην αύξηση του απαιτούμενου χρόνου αριθμητικού υπολογισμού του I_Γ ή $I_{\Gamma(\kappa)}$. Η βέλτιστη προτεινόμενη τιμή των σημείων ολοκλήρωσης πρέπει να ανήκει στην περιοχή τιμών $n_Q = 6, \dots, 10$.

Για τη Μέθοδο των Συνοριακών Στοιχείων και των Τοπικών Ολοκληρωτικών Εξισώσεων χωρίς Διακριτοποίηση, οι πυρήνες ολοκλήρωσης είναι ιδιόμορφοι όταν η απόσταση του πεδιακού σημείου $\mathbf{y}$ από το σημείο πηγής $\mathbf{x}^{(\kappa)}$ είναι πολύ μικρή· σε αντίθεση με την Τοπική Μέθοδο Petrov-Galerkin χωρίς Διακριτοποίηση όπου οι πυρήνες είναι πάντα ομαλοί. Για τη δεύτερη περίπτωση μεθόδου ανάλυσης, ο κλασικός κανόνας ολοκλήρωσης κατά Gauss-Legendre δίδει αρκετά ικανοποιητικά αποτελέσματα με τα ολοκληρώματα να συγκλίνουν εύκολα ακόμα και για μικρό αριθμό σημείων ολοκλήρωσης ($n_Q < 10$). Αυτό το χαρακτηριστικό καθιστά την Τοπική Μέθοδο Petrov-Galerkin χωρίς Διακριτοποίηση ιδιαίτερα ελκυστική σε μέθοδο διότι σε μεγάλης κλίμακας προβλήματα η επιλογή χαμηλού αριθμού n_Q οδηγεί σε ταχείς υπολογισμούς των επιφανειακών ολοκληρωμάτων.

Στη διδιάστατη γραμμική ελαστικότητα και ακουστική οι ολοκληρωτέοι πυρήνες $\tilde{\mathbf{u}}^*$ και p^* παρουσιάζουν ασθενή ιδιομορφία της μορφής $\mathcal{O}(\ln r)$, όπου r η Ευκλείδεια απόσταση του σημείου πηγής από το πεδιακό σημείο. Αντίστοιχα οι πυρήνες $\tilde{\mathbf{t}}^*$, $\tilde{\mathbf{u}}^*$, q^* και $\mathbf{p}^*$ είναι ισχυρώς ιδιόμορφοι της μορφής $\mathcal{O}(1/r)$, ενώ οι πυρήνες $\tilde{\mathbf{t}}^*$ και $\mathbf{q}^*$ είναι υπεριδιόμορφοι της μορφής $\mathcal{O}(1/r^2)$. Όταν το σημείο πηγής $\mathbf{x}^{(\kappa)}$ ανήκει στο τρέχον συνοριακό στοιχείο ($\hat{\Gamma}^{(i)}$) ή σε τμήμα αυτού ($\hat{\Gamma}_{(\kappa)}^{(i)}$) τότε η ιδιομορφία της ολοκληρωτέας ποσότητας καθιστά αδύνατη τη χρήση της Εξ. (A.2).

Για τη σωστή ολοκλήρωση των ισχυρώς και υπεριδιόμορφων στατικών πυρήνων q^* , $\tilde{\mathbf{t}}^*$ και $\tilde{\mathbf{u}}^*$ ακολουθήθηκε η απευθείας μεθοδολογία, όπως αυτή προτάθηκε κυρίως από τον Guiggiani [6, 7]. Συγκεκριμένα για ένα ακουστικό μέσο σε μόνιμη κατάσταση στις δύο διαστάσεις σύμφωνα με τη Μέθοδο των Τοπικών Ολοκληρωτικών Εξισώσεων χωρίς Διακριτοποίηση, το ολοκλήρωμα της Εξ. (A.12) μετά από εισαγωγή της σχέσης προσέγγισης ή παρεμβολής της Εξ. (3.14) παίρνει τη μορφή

$$I_{\Gamma(\kappa)} = \sum_{i=1}^{n_s} \left[\sum_{j=1}^{n_c^{(i)}} \int_{z_s^{(i,j)}}^{z_e^{(i,j)}} q^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \zeta_1 \right) \Phi \left(\zeta_1 \right) J_s^{(i)} d\zeta_1 \right] \cdot \tilde{\mathbf{p}}. \quad (\text{A.16})$$

Αναπτύσσοντας σε σειρές Taylor κάθε ολοκληρωτέα ποσότητα της Εξ. (A.16) με τον τρόπο που παρουσιάζεται στην εργασία [7] προκύπτει

$$q^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \zeta_1 \right) = \frac{f_1^* \left(\zeta_1^{(S)} \right)}{\varepsilon} + \frac{f_2^* \left(\zeta_1^{(S)} \right)}{\varepsilon^2} + \mathcal{O}(1), \quad (\text{A.17})$$

$$\Phi \left(\zeta_1 \right) = \Phi \left(\zeta_1^{(S)} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (\text{A.18})$$

$$J_s^{(i)} \equiv J_s \left(\zeta_1 \right) = J_s \left(\zeta_1^{(S)} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (\text{A.19})$$

όπου $\varepsilon = |\zeta_1 - \zeta_1^{(S)}|$ και f_1^*, f_2^* είναι το ιδιόμορφο και υπεριδιόμορφο τμήμα του πυρήνα q^* αντίστοιχα. Από τα παραπάνω παρατηρείται ότι οι ανωτέρω συναρτήσεις εξαρτώνται μονάχα από την θέση του ιδιόμορφου σημείου στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων $\zeta_1^{(S)}$. Προσθέτοντας και αφαιρώντας ταυτόχρονα τον ισχυρώς ιδιόμορφο και τον υπεριδιόμορφο ολοκληρωτέο πυρήνα –εάν υπάρχει– στο ολοκλήρωμα της Εξ. (Α.16) συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned} I_{\Gamma(\kappa)} &= \sum_{i=1}^{n_s} \sum_{j=1}^{n_c^{(i)}} \int_{z_s^{(i,j)}}^{z_e^{(i,j)}} \left[Q^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \zeta_1 \right) - \frac{g_2^* \left(\zeta_1^{(S)} \right)}{\varepsilon^2} - \frac{g_1^* \left(\zeta_1^{(S)} \right)}{\varepsilon} \right] d\zeta_1 \cdot \mathbf{\tilde{p}} + \\ &\quad g_2^* \left(\zeta_1^{(S)} \right) \int_{z_s^{(i,j)}}^{z_e^{(i,j)}} \frac{1}{\varepsilon^2} d\zeta_1 + g_1^* \left(\zeta_1^{(S)} \right) \int_{z_s^{(i,j)}}^{z_e^{(i,j)}} \frac{1}{\varepsilon} d\zeta_1 \\ &= h_N + g_1^* \left(\zeta_1^{(S)} \right) h_S^{(1)} + g_2^* \left(\zeta_1^{(S)} \right) h_S^{(2)}, \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

όπου

$$Q^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \zeta_1 \right) = q^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \zeta_1 \right) \Phi \left(\zeta_1 \right) J_s^{(i)}, \quad (\text{A.21}\alpha')$$

$$g_1^* \left(\zeta_1^{(S)} \right) = f_1^* \left(\zeta_1^{(S)} \right) \Phi \left(\zeta_1^{(S)} \right) J_s \left(\zeta_1^{(S)} \right), \quad (\text{A.21}\beta')$$

$$g_2^* \left(\zeta_1^{(S)} \right) = f_2^* \left(\zeta_1^{(S)} \right) \Phi \left(\zeta_1^{(S)} \right) J_s \left(\zeta_1^{(S)} \right). \quad (\text{A.21}\gamma')$$

Από την Εξ. (Α.20) μπορεί να παρατηρηθεί ότι το ιδιόμορφο ολοκλήρωμα έχει αντικατασταθεί από το άθροισμα του ομαλού ολοκληρώματος h_N και των γινομένων ομαλών και συνεχών συναρτήσεων g_k^* με τα ιδιόμορφα ολοκληρώματα $h_S^{(k)}$. Τα τελευταία μάλιστα μπορούν να υπολογιστούν αναλυτικά, των οποίων η τιμή εξαρτάται άμεσα από την θέση του ιδιόμορφου σημείου στο συνοριακό στοιχείο, ως εξής

$$h_S^{(1)} = \begin{cases} \operatorname{sgn}(\varepsilon) \ln \left| \frac{z_e^{(i,j)} - \zeta_1^{(S)}}{\beta} \right|, & \zeta_1^{(S)} = z_s^{(i,j)} \\ \ln \left| \frac{z_e^{(i,j)} - \zeta_1^{(S)}}{z_s^{(i,j)} - \zeta_1^{(S)}} \right|, & \zeta_1^{(S)} \in (z_s^{(i,j)}, z_e^{(i,j)}) \\ \operatorname{sgn}(\varepsilon) \ln \left| \frac{\zeta_1^{(S)} - z_s^{(i,j)}}{\beta} \right|, & \zeta_1^{(S)} = z_e^{(i,j)} \end{cases}, \quad (\text{A.22})$$

$$h_S^{(2)} = \begin{cases} -\frac{1}{z_e^{(i,j)} - \zeta_1^{(S)}} - \operatorname{sgn}(\varepsilon) \frac{\gamma}{\beta^2}, & \zeta_1^{(S)} = z_s^{(i,j)} \\ \frac{1}{z_s^{(i,j)} - \zeta_1^{(S)}} - \frac{1}{z_e^{(i,j)} - \zeta_1^{(S)}}, & \zeta_1^{(S)} \in (z_s^{(i,j)}, z_e^{(i,j)}) \\ -\frac{1}{\zeta_1^{(S)} - z_s^{(i,j)}} - \operatorname{sgn}(\varepsilon) \frac{\gamma}{\beta^2}, & \zeta_1^{(S)} = z_e^{(i,j)} \end{cases}, \quad (\text{A.23})$$

με τη συνάρτηση $\operatorname{sgn}(\cdot)$ να επιστρέφει το πρόσημο του ορίσματος της ενώ

$$\beta = \frac{1}{J_s(\zeta_1^{(S)})}, \quad (\text{A.24})$$

$$\gamma = \frac{1}{2} \left[\frac{d\mathbf{r}}{d\zeta_1} \cdot \frac{d^2\mathbf{r}}{d\zeta_1^2} \right]_{\zeta_1=\zeta_1^{(S)}}, \quad (\text{A.25})$$

όπου $\mathbf{r} = \mathbf{y} - \mathbf{x}^{(\kappa)}$.

Στην απλή περίπτωση που ο πυρήνας είναι ισχυρώς ιδιόμορφος τότε ο όρος $g_2^* h_s^{(2)}$ απαλείφεται, καθώς και ο μεσαίος όρος του ομαλού ολοκληρώματος h_N της Εξ. (A.20).

Εδώ κρίνεται απαραίτητο να σημειωθεί μία σημαντική λεπτομέρεια για την ορθότητα του πρώτου ολοκληρώματος της Εξ. (A.20). Όπως φαίνεται από την Εξ. (A.21α') η συνάρτηση μορφής διαφέρει σε σχέση με αυτή των ομαλών συναρτήσεων των Εξ. (A.21β') και (A.21β'). Όμως λόγω του ότι λήφθηκε υπόψη η τομή των κύκλων επιρροής των γειτονικών σημείων πηγής με το τοπικό σύνορο $\Gamma_{(\kappa)}$ τότε το ιδιόμορφο σημείο θα ανήκει στην περιοχή: $\zeta_1^{(S)} \in [z_s^{(i,j)}, z_e^{(i,j)}]$ με τη συνάρτηση μορφής να είναι συνεχής σε αυτό το διάστημα. Παράλληλα οι ίδιοι κόμβοι που «επηρεάζουν» στη μέθοδο προσέγγισης/παρεμβολής για το ιδιόμορφο σημείο $\zeta_1^{(S)}$ θα επηρεάσουν και στο σημείο ολοκλήρωσης ($\zeta_1 \in [z_s^{(i,j)}, z_e^{(i,j)}]$). Συνεπώς η έκταση του διανύσματος των επικόμβιων τιμών του άγνωστου πεδίου $\tilde{\mathbf{p}}$ θα είναι ίδια και στις δύο περιπτώσεις.

Η απευθείας τεχνική υπολογισμού μη-ομαλών ολοκληρωμάτων εφαρμόστηκε με επιτυχία στη Μέθοδο των Τοπικών Ολοκληρωτικών Εξισώσεων χωρίς Διακριτοποίηση, παρόλο που οι συγγραφείς των προαναφερθέντων εργασιών την προόρισαν για τη Μέθοδο Συνοριακών Στοιχείων. Η μόνη αλλαγή που μπορεί να γίνει στις παραπάνω εξισώσεις είναι η αντικατάσταση των ορίων ολοκλήρωσης $z_s^{(i,j)} = -1$ και $z_e^{(i,j)} = +1$ με παράλληλη απαλοιφή του δεύτερου σε σειρά αθροίσματος· διότι το τοπικό σύστημα συντεταγμένων στα μονοδιάστατα στοιχεία γραμμής είναι ορισμένο στο $[-1, +1]$. Για περισσότερη κατανόηση της παραπάνω τεχνικής ολοκλήρωσης ιδιόμορφων πυρήνων μπορεί κάποιος να ανατρέξει στις ιδιαίτερα επεξηγηματικές εργασίες [6, 7].

Έστω το επιφανειακό ολοκλήρωμα, για πρόβλημα ακουστικής σε μόνιμη κατάσταση στις δύο διαστάσεις για τη Μέθοδο των Συνοριακών Στοιχείων

$$\begin{aligned} I_\Gamma &= \sum_{i=1}^{n_s} \int_{\hat{\Gamma}^{(i)}} p^*(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}) q(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \\ &= \sum_{i=1}^{n_s} \int_{-1}^{+1} p^*(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \zeta_1) q(\zeta_1) J_s^{(i)} d\zeta_1, \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

στο οποίο αν εφαρμοστεί η Εξ. (2.58) συνεπάγεται ότι

$$I_{\Gamma} = \sum_{i=1}^{n_s} \int_{-1}^{+1} p^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \zeta_1 \right) \Phi(\zeta_1) J_s^{(i)} d\zeta_1 \cdot \tilde{\mathbf{q}}. \quad (\text{A.27})$$

Όταν το σημείο πηγής $\mathbf{x}^{(\kappa)}$ ανήκει στο γενικό σύνορο Γ και είναι κόμβος ενός εκ των συνοριακών στοιχείων ($\mathbf{x}^{(\kappa)} \in \hat{\Gamma}^{(i)}$) τότε το ολοκλήρωμα είναι ασθενώς ιδιόμορφο, λόγω της λογαριθμικής συνάρτησης του πυρήνα p^* (βλ. Εξ. (2.38)). Σε αυτή την περίπτωση μπορεί κάποιος να χρησιμοποιήσει την τροποποιημένη λογαριθμική ολοκλήρωση κατά Gauss της Εξ. (Α.4) σύμφωνα με τον ακόλουθο αλγόριθμο ολοκλήρωσης.

Ο πυρήνας ολοκλήρωσης μπορεί να γραφτεί στη γενική περίπτωση αλλιώς

$$p^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) = g_1^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) \ln \left(\frac{1}{r} \right) + g_2^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right), \quad (\text{A.28})$$

με g_1^* , g_2^* να είναι ομαλές συναρτήσεις, συνεπώς από την Εξ. (Α.27) προκύπτει

$$\begin{aligned} I_{\Gamma} = & \sum_{i=1}^{n_s} \int_{-1}^{+1} g_1^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \zeta_1 \right) \ln \left(\frac{1}{|\zeta_1 - \zeta_1^{(S)}|} \right) \Phi(\zeta_1) J_s^{(i)} d\zeta_1 \cdot \tilde{\mathbf{q}} \\ & + \sum_{i=1}^{n_s} \int_{-1}^{+1} g_2^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \zeta_1 \right) \Phi(\zeta_1) J_s^{(i)} d\zeta_1 \cdot \tilde{\mathbf{q}}, \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

όπου $\zeta_1^{(S)}$ είναι οι συντεταγμένες στο τοπικό σύστημα του ιδιόμορφου σημείου ολοκλήρωσης $\mathbf{x}^{(\kappa)}$. Όπως φαίνεται από την Εξ. (Α.29) το δεύτερο ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογιστεί απευθείας μέσω της Εξ. (Α.2) ενώ το πρώτο ανάγεται σε νέα μορφή, κατάλληλη για να γίνει χρήση της λογαριθμικής προσεγγιστικής ολοκλήρωσης

$$\begin{aligned} I_{\Gamma} = & \sum_{i=1}^{n_s} c_3 \int_0^{+1} g_1^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \zeta_1 \right) \ln(\zeta_1) \Phi(\zeta_1) J_s^{(i)} d\zeta_1 \cdot \tilde{\mathbf{q}} + \\ & c_1 \frac{\zeta_1^{(S)}}{2} \int_{-1}^{+1} g_1^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \zeta_1 \right) \ln \left| \frac{\zeta_1^{(S)}}{2} (\zeta_1 - 1) - 1 \right| \Phi(\zeta_1) J_s^{(i)} d\zeta_1 \cdot \tilde{\mathbf{q}} - \\ & c_2 \frac{\zeta_1^{(S)}}{2} \int_{-1}^{+1} g_1^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \zeta_1 \right) \ln \left| \frac{\zeta_1^{(S)}}{2} (\zeta_1 + 1) - 1 \right| \Phi(\zeta_1) J_s^{(i)} d\zeta_1 \cdot \tilde{\mathbf{q}} \\ & + \sum_{i=1}^{n_s} \int_{-1}^{+1} g_2^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \zeta_1 \right) \Phi(\zeta_1) J_s^{(i)} d\zeta_1 \cdot \tilde{\mathbf{q}}, \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

όπου ανάλογα με την θέση του ιδιόμορφου σημείου μέσα στο συνοριακό στοιχείο, δηλαδή αν $\zeta_1^{(S)} = -1$ τότε $c_1 = 0$, $c_2 = c_3 = -1$, εάν $\zeta_1^{(S)} = +1$ τότε $c_1 = c_3 = -1$, $c_2 = 0$ και αν $\zeta_1^{(S)} \in (-1, +1)$ τότε $c_1 = c_2 = -1$, $c_3 = -2$.

Υπάρχει όμως και εναλλακτικός τρόπος αριθμητικού υπολογισμού του ασθενώς ιδιόμορφου πυρήνα p^* , σύμφωνα με τον ίδιο τρόπο που υιοθετήθηκε στους ισχυρώς ιδιόμορφους και υπεριδιόμορφους πυρήνες. Συγκεκριμένα εάν αναπτυχθεί σε σειρές Taylor ο πυρήνας p^* ως εξής

$$p^*(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \zeta_1) = \frac{f_1^*(\zeta_1^{(S)})}{\varepsilon} + \mathcal{O}(1), \quad (\text{A.31})$$

όπου δοσμένων των αναπτυγμάτων της συνάρτησης μορφής και της Ιακωβιανής (βλ. Εξ. (A.18), (A.19)) το επιφανειακό ολοκλήρωμα $I_{\Gamma(\kappa)}$ γράφεται αλλιώς

$$\begin{aligned} I_{\Gamma(\kappa)} &= \sum_{i=1}^{n_s} \sum_{j=1}^{n_c^{(i)}} \int_{z_s^{(i,j)}}^{z_e^{(i,j)}} \left[P^*(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \zeta_1) - g_1^*(\zeta_1^{(S)}) \ln(\varepsilon) \right] d\zeta_1 \cdot \tilde{\mathbf{p}} + g_1^*(\zeta_1^{(S)}) h_S^{(1)} \\ &= h_N + g_1^*(\zeta_1^{(S)}) h_S^{(1)}, \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

όπου

$$P^*(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \zeta_1) = p^*(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \zeta_1) \Phi(\zeta_1) J_s^{(i)}, \quad (\text{A.33}\alpha')$$

$$g_1^*(\zeta_1^{(S)}) = f_1^*(\zeta_1^{(S)}) \Phi(\zeta_1^{(S)}) J_s(\zeta_1^{(S)}), \quad (\text{A.33}\beta')$$

και

$$h_S^{(1)} = \begin{cases} (z_e^{(i,j)} - \zeta_1^{(S)}) \left[\ln(z_e^{(i,j)} - \zeta_1^{(S)}) - 1 \right], & \zeta_1^{(S)} = z_s^{(i,j)} \\ 0, & \zeta_1^{(S)} \in (z_s^{(i,j)}, z_e^{(i,j)}) \\ (\zeta_1^{(S)} - z_s^{(i,j)}) \left[\ln(\zeta_1^{(S)} - z_s^{(i,j)}) - 1 \right], & \zeta_1^{(S)} = z_e^{(i,j)} \end{cases}. \quad (\text{A.34})$$

Η ίδια ακριβώς μεθοδολογία μπορεί να ακολουθηθεί για τον υπολογισμό του ασθενώς ιδιόμορφου ολοκληρώματος με πυρήνα την ποσότητα $\tilde{\mathbf{u}}^*$ για την ελαστικότητα σε μόνιμη κατάσταση στις δύο διαστάσεις για τη ΜΣΣ και τις ΜΤΟΕΧΔ.

Στην ειδική περίπτωση που το σημείο πηγής δεν ανήκει στο τρέχον συνοριακό στοιχείο ($\mathbf{x}^{(\kappa)} \notin \hat{\Gamma}^{(i)}$) για τη ΜΣΣ ή σε τμήμα αυτού ($\mathbf{x}^{(\kappa)} \notin \hat{\Gamma}_{(\kappa)}^{(i)}$) για τη ΜΤΟΕΧΔ, αλλά όμως όταν η απόσταση του σημείου αυτού είναι μικρότερη του μήκους του στοιχείου –για μονοδιάστατο συνοριακό στοιχείο– ή του μέγιστου μήκους στις δύο διευθύνσεις –για διδιάστατο συνοριακό στοιχείο– τότε το επιφανειακό ολοκλήρωμα λέγεται ότι είναι σχεδόν ιδιόμορφο. Μετά από πειράματα που πραγματοποιήθηκαν για τη διερεύνηση της σύγκλισης των ολοκληρωμάτων παρατηρήθηκε ότι για σχετικά μικρό αριθμό σημείων ολοκλήρωσης ($n_Q < 5$) το ολοκλήρωμα I_Γ ή $I_{\Gamma(\kappa)}$ δεν συνέκλινε. Σύμφωνα με την εργασία του Bu [4] προέκυψε ένας εμπειρικός κανόνας

υπολογισμού του βέλτιστου αριθμού των σημείων ολοκλήρωσης, σύμφωνα με τον οποίο λαμβάνεται υπόψη τόσο η απόσταση του σημείου πηγής $\mathbf{x}^{(\kappa)}$ από το σημείο ολοκλήρωσης $\mathbf{y}$ όσο και του προαναφερθέντος χαρακτηριστικού μήκους του συνοριακού στοιχείου. Το μειονέκτημα της μεθοδολογίας αυτής είναι ότι για μικρό λόγο απόστασης προς χαρακτηριστικό μήκος απαιτείται υπερβολικά μεγάλος αριθμός σημείων ολοκλήρωσης, γεγονός που μπορεί σε ορισμένες περιπτώσεις να καταστήσει εξαιρετικά χρονοβόρα διαδικασία τον υπολογισμό του I_Γ ή $I_{\Gamma(\kappa)}$. Στη διεθνή βιβλιογραφία οι πιο δημοφιλείς εργασίες που προτείνουν λύσεις για τη μεταχείριση σχεδόν ιδιόμορφων ολοκληρωμάτων είναι οι εξής: [9, 10, 16]. Στην παρούσα διδακτορική διατριβή αποφεύχθηκε ο κανόνας ολοκλήρωσης της εργασίας [4]. Αντί αυτού, για τον ακριβή υπολογισμό των επιφανειακών ολοκληρωμάτων σε σημεία πηγής τα οποία ήταν σχετικά κοντά στο σύνορο του σώματος τότε τα συνοριακά στοιχεία που διακριτοποίησαν το σύνορο αυτό τέθηκαν σχετικά μικρά σε μήκος. Αποτέλεσμα αυτού είναι η χρήση το πολύ δέκα σημείων ολοκλήρωσης για τη σύγκλιση των εν λόγω επιφανειακών ολοκληρωμάτων.

A.2.2 Υπολογισμός επιφανειακού ολοκληρώματος στο $\partial\Omega_{(\kappa)}$

Έστω ότι χρειάζεται να υπολογισθεί το παρακάτω επιφανειακό ολοκλήρωμα στο εσωτερικό σύνορο $\partial\Omega_{(\kappa)}$ του τοπικού χωρίου $\Omega_{(\kappa)}$ ενός τυχαίου κόμβου $\mathbf{x}^{(\kappa)}$ του πλέγματος (βλ. Σχ. A.1, A.2)

$$I_{\partial\Omega_{(\kappa)}} = \int_{\partial\Omega_{(\kappa)}} q^*(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y}) p(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}}. \quad (\text{A.35})$$

Με βάση την αρχική υπόθεση εργασίας του Κεφ. 3 που θέλει το χωρίο ολοκλήρωσης $\Omega_{(\kappa)}$ του κάθε κόμβου του πλέγματος να είναι κύκλος ακτίνας $r_0^{(\kappa)}$, γίνεται μετασχηματισμός σε πολικές συντεταγμένες ($\mathbf{y} = \mathbf{x}^{(\kappa)} + r_0^{(\kappa)} \{\cos(\phi) \sin(\phi)\}^T$) της Εξ. (A.35)

$$I_{\partial\Omega_{(\kappa)}} = \int_{\varphi_s}^{\varphi_e} q^*(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \phi) p(\phi) r_0^{(\kappa)} d\phi, \quad (\text{A.36})$$

όπου $\varphi_s = 0$, $\varphi_e = 2\pi$ όταν ο κύκλος $\Omega_{(\kappa)}$ δεν τέμνει το γενικό σύνορο Γ , ενώ σε αντίθετη περίπτωση λαμβάνουν τις τιμές των πολικών γωνιών των τομών $\Omega_{(\kappa)} \cap \Gamma$. Αν θεωρηθούν n_v το πλήθος ζευγάρια τομών του γενικού συνόρου με το τοπικό χωρίο, τότε το ολοκλήρωμα λαμβάνει την γενική μορφή

$$I_{\partial\Omega_{(\kappa)}} = \sum_{i=1}^{n_v} \int_{\varphi_s^{(i)}}^{\varphi_e^{(i)}} q^*(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \phi) p(\phi) r_0^{(\kappa)} d\phi. \quad (\text{A.37})$$

Μετασχηματίζοντας γραμμικά τη μεταβλητή $\phi = \frac{\varphi_e^{(i)} - \varphi_s^{(i)}}{2} \theta + \frac{\varphi_e^{(i)} + \varphi_s^{(i)}}{2}$ στην Εξ. (A.37), έτσι ώστε το ολοκλήρωμα να έρθει στη μορφή της Εξ. (A.7) και να υπολογισθεί αριθμητικά κατά Gauss-Legendre, προκύπτει

Σχήμα A.2: Τοπικό χωρίο ολοκλήρωσης για ένα σημείο πηγής $\mathbf{x}^{(\kappa)}$ του οποίου ο κύκλος ολοκλήρωσης $\partial\Omega_{(\kappa)}$ βρίσκεται εξ ολοκλήρου στο χωρίο Ω και δεν τέμνει το γενικό σύνορο Γ του σώματος με παρουσίαση των κύκλων επιρροής $\tilde{\Omega}_{(j)}$ των γειτονικών κόμβων $\mathbf{x}^{(j)}$.

$$\begin{aligned} I_{\partial\Omega_{(\kappa)}} &= \sum_{i=1}^{n_v} \int_{-1}^{+1} q^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \theta \right) p(\theta) r_0^{(\kappa)} J_p^{(i)} d\theta \\ &= \sum_{i=1}^{n_v} \sum_{l=1}^{n_Q} q^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \xi^{(l)} \right) p \left(\xi^{(l)} \right) r_0^{(\kappa)} J_p^{(i)} w^{(l)}, \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

όπου $J_p^{(i)} = (\varphi_e^{(i)} - \varphi_s^{(i)})/2$. Τέλος εισάγεται και η προσέγγιση της άγνωστης μεταβλητής του πεδίου p στο σημείο ολοκλήρωσης μέσω της Εξ. (3.14), δηλαδή

$$I_{\partial\Omega_{(\kappa)}} = \sum_{i=1}^{n_v} \left[\sum_{l=1}^{n_Q} q^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \xi^{(l)} \right) \Phi \left(\xi^{(l)} \right) r_0^{(\kappa)} J_p^{(i)} w^{(l)} \right] \cdot \tilde{\mathbf{p}}. \quad (\text{A.39})$$

Εδώ πρέπει να σημειωθεί ότι ανεξάρτητα του είδους της ιδιομορφίας του πυρήνα ολοκλήρωσης q^* ($\mathcal{O}(1/r)$, $\mathcal{O}(1/r^2)$, κ.λ.π.), η ολοκληρωτέα ποσότητα είναι πάντα ομαλή διότι το σημείο ολοκλήρωσης (πεδιακό σημείο) $\mathbf{y}$ δεν πλησιάζει ποτέ το σημείο πηγής $\mathbf{x}^{(\kappa)}$, επειδή ανήκει πάντα στην περιφέρεια του κύκλου $\Omega_{(\kappa)}$. Συνεπώς ο κατά προσέγγιση υπολογισμός του ολοκληρώματος σύμφωνα με τον κανόνα Gauss-Legendre μπορεί να εφαρμοσθεί με ασφάλεια.

Η σύγκλιση του ολοκληρώματος $I_{\partial\Omega_{(\kappa)}}$ είναι άμεσα εξαρτημένη του αριθμού των σημείων ολοκλήρωσης n_Q (βλ. Εξ. (Α.2)). Μετά από πλήθος αριθμητικών πειραμάτων που έγιναν παρατηρήθηκαν τα εξής:

- (α') Μικρός αριθμός σημείων ολοκλήρωσης ($n_Q \leq 10$) για μεγάλο μήκος τόξου $\partial\Omega_{(\kappa)}$ δίδει άσχημα αποτελέσματα στο αριθμητικό υπολογισμό του $I_{\partial\Omega_{(\kappa)}}$, αντίθετα όμως αν $n_Q \gg 10$ τότε μπορεί να επιτευχθεί εύκολα σύγκλιση του εν λόγω ολοκληρώματος.
- (β') Αν η περιφέρεια $\partial\Omega_{(\kappa)}$ του κύκλου τμηθεί σε κομμάτια ανάλογα με την τομή του $\Omega_{(\kappa)}$ με τους κύκλους επιρροής των «γειτονικών» κόμβων $\tilde{\Omega}_{(j)}$ (βλ. Σχ. Α.4(α')) και γίνει ολοκλήρωση κατά τμήματα, τότε μικρός αριθμός σημείων ολοκλήρωσης ($n_Q \leq 8$) ανα τμήμα μπορεί να δώσει αρκετά ικανοποιητικά αποτελέσματα.

Οι ανωτέρω παρατηρήσεις ισχύουν κυρίως για τις αριθμητικές ΜΤΟΕΧΔ και για τις ΤΜΡΓΧΔ1, ΤΜΡΓΧΔ4, ΤΜΡΓΧΔ5.

Στην περίπτωση της ΤΜΡΓΧΔ6, όπως εύστοχα παρατηρείται στην εργασία [1], ο πυρήνας ολοκλήρωσης ισούται με τη συνάρτηση μορφής ϕ στο πεδιακό σημείο και ο οποίος έχει διαφορετική έκφραση ανάλογα με το ποιοι κόμβοι επηρεάζουν τον υπολογισμό της συνάρτησης αυτής. Συνεπώς είναι απαραίτητο να ληφθούν υπόψη οι τομές του τοπικού χωρίου $\partial\Omega_{(\kappa)}$ με τους κύκλους επιρροής των γειτονικών κόμβων $\tilde{\Omega}_{(j)}$. Η υλοποίηση της ολοκλήρωσης του $I_{\partial\Omega_{(\kappa)}}$ κατά τμήματα μπορεί να δώσει ομαλή σύγκλιση σε μία τιμή για σχετικά χαμηλό αριθμό σημείων ολοκλήρωσης ($n_Q \leq 8$).

Α.2.3 Υπολογισμός ολοκληρώματος όγκου στο χωρίο $\Omega_{(\kappa)}$

Ανατρέχοντας κάποιος στη βιβλιογραφία παρατηρεί ότι έχουν προταθεί διάφοροι τρόποι για τον αριθμητικό υπολογισμό των ολοκληρωμάτων όγκου, που προκύπτουν στις ολοκληρωτικές εξισώσεις κυρίως λόγω της παρουσίας πεδιακών πηγών-δυνάμεων. Οι επικρατέστεροι τρόποι από αυτούς είναι: (α') ο υπολογισμός τους μέσω των ειδικών ολοκληρωμάτων (particular integrals) [3, 12, 5] και (β') μέσω της απευθείας διακριτοποίησης του χωρίου και εφαρμογή σε αυτό προσεγγιστικών κανόνων ολοκλήρωσης [1, 2, 5]. Στην παρούσα διδακτορική διατριβή υιοθετήθηκε ο δεύτερος τρόπος για τον αριθμητικό υπολογισμό των ολοκληρωμάτων όγκου, της μορφής

$$I_{\Omega_{(\kappa)}} = \int_{\Omega_{(\kappa)}} p^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) g(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}}, \quad (\text{Α.40})$$

διότι είναι ο πιο γενικός τρόπος αντιμετώπισης τέτοιων ολοκληρωμάτων. Ο πρώτος τρόπος μεταχειρίζεται μονάχα συγκεκριμένες περιπτώσεις πεδιακών πηγών ή δυνάμεων των οποίων έχει γίνει εκ των προτέρων αναλυτικός μετασχηματισμός του ολοκληρώματος όγκου σε αντίστοιχο επιφάνειας.

Σχήμα A.3: Τοπικό χωρίο όγκου $\Omega_{(\kappa)}$, το οποίο έχει υποστεί διακριτοποίηση σε τριγωνικά τμήματα μετά από εφαρμογή του προγράμματος Triangle.

Εδώ πρέπει να σημειωθεί ότι η ολοκλήρωση στο τοπικό χωρίο $\Omega_{(\kappa)}$ σύμφωνα με την Εξ. (A.40) έχει μονάχα σημασία στις Τοπικές Μεθόδους χωρίς Διακριτοποίηση. Παρόλα αυτά η ίδια ακριβώς διαδικασία υπολογισμού του ολοκληρώματος στον όγκο Ω μπορεί να ακολουθηθεί και για τη Μέθοδο των Συνοριακών Στοιχείων.

Η υλοποίηση υπολογισμού του ολοκληρώματος της Εξ. (A.40) στο χωρίο $\Omega_{(\kappa)}$ του Σχ. A.3(α') προέκυψε μέσω του υπολογισμού των κατά-τμήματα χωρίων, μετά από διακριτοποίηση του χωρίου $\Omega_{(\kappa)}$ σε μικρά τρίγωνα (βλ. Σχ. A.3(β')), δηλαδή

$$I_{\Omega_{(\kappa)}} = \sum_{i=1}^{n_t} \int_{\hat{\Omega}^{(i)}} p^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \mathbf{y} \right) g(\mathbf{y}) dV_{\mathbf{y}}, \quad (\text{A.41})$$

όπου n_t ο αριθμός των τριγώνων που απαιτούνται για την τμηματοποίηση του χωρίου $\Omega_{(\kappa)} = \hat{\Omega}^{(1)} \cup \dots \cup \hat{\Omega}^{(n_t)}$.

Η τριγωνοποίηση του χωρίου έγινε με την βοήθεια του προγράμματος Triangle [13], βασισμένο στον αλγόριθμο της εργασίας [14].

Μετά από αλλαγή στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων του εκάστοτε τριγώνου, μέσω της Εξ. (2.61), προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} I_{\Omega_{(\kappa)}} &= \sum_{i=1}^{n_t} \int_{\hat{\Omega}^{(i)}} p^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \boldsymbol{\zeta} \right) g(\boldsymbol{\zeta}) J_v^{(i)} dV_{\boldsymbol{\zeta}} \\ &= \sum_{i=1}^{n_t} \int_0^1 \int_0^{1-\zeta_2} p^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \boldsymbol{\zeta} \right) g(\boldsymbol{\zeta}) J_v^{(i)} d\zeta_1 d\zeta_2, \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

όπου $J_v^{(i)} \equiv J_v(\boldsymbol{\zeta})$ (βλ. Εξ. (2.61)).

Σχήμα Α.4: Τοπικό χωρίο όγκου $\Omega_{(\kappa)}$, το οποίο έχει υποστεί διακριτοποίηση σε τριγωνικά τμήματα μετά από εφαρμογή του προγράμματος Triangle, στο οποίο λαμβάνονται υπόψη οι κύκλοι των πεδίων επιρροής $\Omega_{(j)}$ των γειτονικών κόμβων.

Μετασχηματίζοντας γραμμικά τις μεταβλητές $\zeta_1 = (1 + \gamma_1)(1 - \gamma_2)/4$ και $\zeta_2 = (1 + \gamma_1)(1 + \gamma_2)/4$, το ολοκλήρωμα λαμβάνει την απαραίτητη μορφή για την εφαρμογή του κανόνα ολοκλήρωσης κατά Gauss-Legendre

$$\begin{aligned} I_{\Omega_{(\kappa)}} &= \sum_{i=1}^{n_t} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} p^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \gamma_1, \gamma_2 \right) g(\gamma_1, \gamma_2) J_v^{(i)} J_t d\gamma_1 d\gamma_2 \\ &= \sum_{i=1}^{n_t} \sum_{l_2=1}^{n_Q} \sum_{l_1=1}^{n_Q} p^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \xi^{(l_1)}, \xi^{(l_2)} \right) g \left(\xi^{(l_1)}, \xi^{(l_2)} \right) J_v^{(i)} J_t w^{(l_1)} w^{(l_2)}, \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

όπου $J_t = \frac{1}{8}(1 + \gamma_1) \equiv \frac{1}{8}(1 + \xi^{(l_1)})$.

Στο Σχ. Α.3(α') φαίνεται το τοπικό χωρίο $\Omega_{(\kappa)}$ στο οποίο αφού εφαρμόστηκε ο αλγόριθμος τριγωνοποίησης παράχθηκε το ακόλουθο πλέγμα τριγώνων του Σχ. Α.3(β'). Βασιζόμενοι όμως στην αρχική σύλληψη του διαχωρισμού του συνόρου $\Gamma_{(\kappa)}$ σε τμήματα ανάλογα με την τομή του με τα πεδία επιρροής $\Omega_{(j)}$ των γειτονικών κόμβων, πραγματοποιήθηκε ο διαχωρισμός σε τομείς του χωρίου $\Omega_{(\kappa)}$ ανάλογα με τις επιμέρους τομές των πεδίων επιρροής (βλ. Σχ. Α.4(α')). Με αυτό τον τρόπο παρήχθη το πυκνό πλέγμα από τρίγωνα του Σχ. Α.4(β'). Μετά από αριθμητικά πειράματα που διεξήχθησαν από τον συγγραφέα της παρούσης διατριβής για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος $I_{\Omega_{(\kappa)}}$ παρατηρήθηκαν τα εξής:

(α') Αν το χωρίο $\Omega_{(\kappa)}$ διακριτοποιηθεί με λίγα σε αριθμό τρίγωνα, ή αν τα περισσότερα από τα τρίγωνα αυτά είναι αμβλυγώνια, τότε υπάρχει πιθανότητα σε

αυτή τη περίπτωση το ολοκλήρωμα $I_{\Omega_{(\kappa)}}$ να μη συγκλίνει ομαλά σε μία τιμή. Επίσης έχει παρατηρηθεί σε αυτή την περίπτωση η ποιότητα των αποτελεσμάτων σε ένα πρόβλημα που αναλύεται να είναι σημαντικά φτωχή ακόμη και αν επιτευχθεί σύγκλιση.

- (β') Η τριγωνοποίηση του χωρίου, χωρίς να λαμβάνονται υπόψη οι τομές των πεδίων επιρροής $\tilde{\Omega}_{(j)}$ των γειτονικών κόμβων με τον κύκλο ολοκλήρωσης $\Omega_{(\kappa)}$ του σημείου πηγής, οδηγεί σε μικρό αριθμό τριγώνων, γεγονός που συνεπάγεται τη μεγαλύτερη ταχύτητα αριθμητικού υπολογισμού του ολοκληρώματος $I_{\Omega_{(\kappa)}}$. Προφανώς, όταν λαμβάνονται υπόψη τα πεδία επιρροής τότε ο αριθμός των τριγώνων σχεδόν πενταπλασιάζεται, με «κατά εκτίμηση» δεκαπλασιασμό του χρόνου υπολογισμού του $I_{\Omega_{(\kappa)}}$.
- (γ') Τα αριθμητικά αποτελέσματα που πρέκυψαν υλοποιώντας και τις δύο μεθόδολογίες (π.χ. για ένα πρόβλημα που περιγράφεται από τη μερική διαφορική εξίσωση Poisson και που επιλύθηκε με τη ΜΤΟΕχΔ) ήταν σχετικά παρόμοια. Γεγονός που οδηγεί στο συμπέρασμα ότι δεν είναι απαραίτητη η χρήση του βραδέως δεύτερου αλγόριθμου.

Σε ορισμένες περιπτώσεις ο πυρήνας ολοκλήρωσης p^* του ανωτέρω ολοκληρώματος είναι ασθενώς ($\mathcal{O}(\ln r)$) ή ισχυρά ($\mathcal{O}(1/r)$) ιδιόμορφος. Σε αυτές τις περιπτώσεις δεν είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί ο κλασικός αλγόριθμος Gauss-Legendre μιας και δεν συγκλίνει. Η ιδιομορφία αυτή μπορεί να αρθεί από την Ιακωβιανή του μετασχηματισμού του τοπικού συστήματος συντεταγμένων (ζ_1, ζ_2) σε πολικό σύστημα συντεταγμένων (R, θ) , με κέντρο το ιδιόμορφο σημείο ολοκλήρωσης $S(\zeta^{(S)})$ (βλ. Σχ. Β.5).

Πρώτα μετασχηματίζεται το τοπικό σύστημα (ζ) σε ένα τοπικό Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων $(\bar{\zeta})$, όπως φαίνεται στο Σχ. Β.5, άρα από την Εξ. (Α.42) συνεπάγεται ότι

$$I_{\Omega_{(\kappa)}} = \sum_{i=1}^{n_t} \int_0^{\cos(30^\circ)} \int_{\bar{\zeta}_2 \tan(30^\circ)}^{1+\bar{\zeta}_2 \tan(30^\circ)} p^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \bar{\zeta} \right) g(\bar{\zeta}) J_v^{(i)} J_k d\bar{\zeta}_1 d\bar{\zeta}_2, \quad (\text{Α.44})$$

όπου $\zeta_1 = \bar{\zeta}_1 - \bar{\zeta}_2 \tan(30^\circ)$, $\zeta_2 = \frac{\bar{\zeta}_2}{\cos(30^\circ)}$ και $J_k = 1/\tan(30^\circ)$.

Έπειτα το ολοκλήρωμα της Εξ. (Α.44) μετασχηματίζεται σε πολικές συντεταγμένες με βάση τις σχέσεις: $\bar{\zeta}_1 = \zeta_1^{(S)} + R \cos(\theta)$ και $\bar{\zeta}_2 = \zeta_2^{(S)} \cos(30^\circ) + R \sin(\theta)$ προκύπτοντας έτσι

$$I_{\Omega_{(\kappa)}} = \sum_{i=1}^{n_t} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_{\max}(\theta)} p^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, R, \theta \right) g(R, \theta) J_v^{(i)} J_k J_\pi dR d\theta, \quad (\text{Α.45})$$

όπου $J_\pi = R$ και $R_{\max}(\theta)$ να είναι η ακτινική συνιστώσα του περιγράμματος του τριγωνικού στοιχείου για κάποια συγκεκριμένη τιμή της πολικής γωνίας θ , όπως φαίνεται στο Σχ. Β.6 του Παρ. Β.

Για να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I_{\Omega(\kappa)}$ η συνάρτηση $R_{max}(\theta)$ πρέπει να εκφραστεί σε αναλυτική μορφή ως προς την πολική γωνία. Για το λόγο αυτό το τριγωνικό στοιχείο διαιρείται σε ορθογώνια τρίγωνα, τόσα σε αριθμό (n_τ) ανάλογα με τη θέση του ιδιόμορφου σημείου ολοκλήρωσης S . Συνεπώς η Εξ. (Α.45) γράφεται

$$I_{\Omega(\kappa)} = \sum_{i=1}^{n_t} \sum_{j=1}^{n_\tau} \int_{\theta_1^{(j)}}^{\theta_2^{(j)}} \int_0^{R_{max}(\theta)} p^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, R, \theta \right) g(R, \theta) J_v^{(i)} J_k J_\pi dR d\theta, \quad (\text{Α.46})$$

με $\theta_1^{(j)}, \theta_2^{(j)}$ να είναι οι πολικές γωνίες των ακτινικών πλευρών του j -στού ορθογωνίου τριγώνου. Οι τιμές των πολικών γωνιών καθώς και η έκφραση της συνάρτησης της ακτίνας δίδονται αναλυτικά στο Εδάφ. Β.6.

Τέλος η Εξ. (Α.46) μπορεί να μετασχηματιστεί γραμμικά κατάλληλα ώστε να γίνουν τα όρια ολοκλήρωσης ίδια με αυτά της Εξ. (Α.2)

$$\begin{aligned} I_{\Omega(\kappa)} &= \sum_{i=1}^{n_t} \sum_{j=1}^{n_\tau} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} p^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \gamma_1, \gamma_2 \right) g(\gamma_1, \gamma_2) \check{J} d\gamma_1 d\gamma_2 \\ &= \sum_{i=1}^{n_t} \sum_{j=1}^{n_\tau} \sum_{l_2=0}^{n_Q} \sum_{l_1=0}^{n_Q} p^* \left(\mathbf{x}^{(\kappa)}, \xi^{(l_1)}, \xi^{(l_2)} \right) g \left(\xi^{(l_1)}, \xi^{(l_2)} \right) \check{J} w^{(l_1)} w^{(l_2)}, \quad (\text{Α.47}) \end{aligned}$$

όπου $\check{J} = J_v^{(i)} J_k J_\pi J_r J_f^{(j)}$, με Ιακωβιανές ορίζουσες μετασχηματισμού $J_r = R_{max}(\theta)/2$, $J_f^{(j)} = (\theta_2^{(j)} - \theta_1^{(j)})/2$, ενώ $R = \frac{R_{max}(\theta)}{2} \gamma_1$ και $\theta = \frac{\theta_2^{(j)} - \theta_1^{(j)}}{2} \gamma_2 + \frac{\theta_2^{(j)} + \theta_1^{(j)}}{2}$.

Βιβλιογραφία

- [1] Atluri SN, Kim H-G, Cho JY (1999): A critical assessment of the truly Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG), and Local Boundary Integral Equation (LBIE) methods. *Computational Mechanics*, **24**, 348–372.
- [2] Atluri SN (2004): *The Meshless Method (MPLG) for Domain & BIE discretizations*. Tech Science Press.
- [3] Banerjee PK (1994): *The Boundary Element Methods in Engineering*. McGraw-Hill.
- [4] Bu S (1997): Infinite boundary elements for the dynamic analysis of machine foundations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **40**, 3901–3917.
- [5] El-Zafrany A (1993): *Techniques of the Boundary Element Method*. Ellis Horwood.
- [6] Guiggiani M, Casalini P (1987): Direct computation of Cauchy principal value integrals in advanced boundary elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **24**, 1711–1720.
- [7] Guiggiani M (1998): Formulation and numerical treatment of boundary integral equations with hypersingular kernels. *Singular Integrals in Boundary Element Methods*, eds: Sladek V, Sladek J.
- [8] Hammer PC, Marlowe OP, Stroud AH (1956): Numerical integration over simplexes and cones. *Mathematical Tables Aids Compendium*, **10**, 130-137.
- [9] Huber CJ, Rieger W, Haas M, Rucker WM (1997): The treatment of singular integrals in boundary element calculations. *Applied Computational Electromagnetics Society Journal*, **12**, 121–126.
- [10] Liu Y (1998): Analysis of shell-like structures by the boundary element method based on 3-D elasticity: Formulation and verification. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **41**, 541–558.

-
- [11] Press WH, Teukolsky SA, Vetterling WT, Flannery BP (1992): *Numerical Recipes in C; The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press.
 - [12] Ramachandran PA (1994): *Boundary Element Methods in Transport Phenomena*. Computational Mechanics Publications.
 - [13] Shewchuk JR (1996): Triangle: Engineering a 2D Quality Mesh Generator and Delaunay Triangulator. *Applied Computational Geometry: Towards Geometric Engineering*, **1148**, 203–222.
 - [14] Shewchuk JR (2002): Delaunay refinement algorithms for triangular mesh generation. *Computational Geometry*, **22**, 21–74.
 - [15] Stroud AH, Secrest D (1966): *Gaussian Quadrature Formulas*. Prentice Hall.
 - [16] Telles JCF, Oliveira RF (1994): Third degree polynomial transformation for boundary element integrals. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **13**, 135–141.

Παράρτημα Β

Συνοριακά Στοιχεία

Σε αυτό το παράρτημα πρόκειται να παρουσιαστούν όλα τα συνοριακά στοιχεία [1, 2, 3, 4] που χρησιμοποιήθηκαν στη Μέθοδο των Συνοριακών Στοιχείων και των Τοπικών Μεθόδων χωρίς Διακριτοποίηση για την παρούσα διδακτορική διατριβή. Στα Εδάφ. Β.2 και Β.3 παρουσιάζονται τα μονοδιάστατα στοιχεία που χρησιμοποιήθηκαν για τη διακριτοποίηση του συνόρου διδιάστατων σωμάτων και τον υπολογισμό των αντίστοιχων ολοκληρωμάτων. Επίσης στα Εδάφ. Β.4 και Β.5 παρουσιάζονται τα στοιχεία δύο διαστάσεων για τη διακριτοποίηση χωρίων και τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων όγκου, όπου χρειάστηκε. Τέλος στο έκτο εδάφιο γίνεται κατανοητός στον αναγνώστη ο τρόπος τμηματοποίησης του στοιχείου τριγώνου στη περίπτωση που το σημείο πηγής ανήκει στο εν λόγω συνοριακό στοιχείο και γίνεται χρήση των πολικών συντεταγμένων για ορθό υπολογισμό των ιδιόμορφων ολοκληρωμάτων όγκου.

Β.1 Μερικά εισαγωγικά στοιχεία

Τα μονοδιάστατα συνοριακά στοιχεία που χρησιμοποιήθηκαν στην παρούσα διδακτορική διατριβή για την ανάλυση προβλημάτων στις δύο διαστάσεις ήταν τα δίκομβα γραμμικής-βάσης στοιχεία γραμμής (2-node Linear Line elements) και τα τρίκομβα τετραγωνικής-βάσης στοιχεία γραμμής (3-node Quadratic Line elements). Αντίστοιχα τα διδιάστατα στοιχεία που χρησιμοποιήθηκαν ήταν τα τρίκομβα γραμμικής-βάσης στοιχεία τριγώνου (3-node Linear Triangular elements) και τα εξάκομβα τετραγωνικής-βάσης στοιχεία τριγώνου (6-node Quadratic Triangular elements).

Δοσμένου του διανύσματος θέσης ενός σημείου που ανήκει σε ένα στοιχείο στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων (για ένα μονοδιάστατο στοιχείο είναι: $\zeta = \{\zeta_1\}$ ενώ αντίστοιχα για ένα διδιάστατο στοιχείο είναι: $\zeta = \{\zeta_1 \zeta_2\}$), με βάση την Εξ. (2.52) μπορεί να υπολογιστεί μέσω παρεμβολής η θέση του στο γενικό σύστημα συντεταγμένων (π.χ. το Καρτεσιανό σύστημα). Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις για κάθε συνοριακό στοιχείο είναι δεδομένες και σταθερές εάν είναι γνωστοί οι κόμβοι που το απαρτίζουν. Όμως, όπως παρατηρήθηκε στο Υποεδάφ. 2.1.1, υπάρχει περίπτωση το υπό-ανάλυση χωρίο να παρουσιάζει γωνίες. Τα στοιχεία που χρησι-

μοποιήθηκαν σε αυτή την περίπτωση είχαν μερικούς ή όλους τους ακραίους κόμβους ελαφρά μετατοπισμένους προς το εσωτερικό του στοιχείου. Γι' αυτό το λόγο ονομάστηκαν μερικώς ή πλήρως ασυνεχή στοιχεία. Το μέγεθος της μετατόπισης των ακραίων κόμβων μπορεί να καθοριστεί αυθαίρετα από τον χρήστη της αριθμητικής μεθόδου. Η επιλογή των βέλτιστων τιμών των μετατοπίσεων έγινε με βάση την εργασία [5]. Εδώ πρέπει να σημειωθεί ότι μερικώς ή/και πλήρως ασυνεχή στοιχεία χρησιμοποιήθηκαν επιπλέον στην ειδική περίπτωση που γειτονικά συνοριακά στοιχεία είχαν διαφορετικό είδος προκαθορισμένες συνοριακές συνθήκες.

B.2 Στοιχείο 2LL: συναρτήσεις μορφής και παράγωγοι

Οι συναρτήσεις μορφής του συνεχούς δίκουμβου γραμμικής-βάσης στοιχείου γραμμής (βλ. Σχ. B.1(α')) είναι οι εξής

$$\phi^{(1)}(\zeta) = \frac{1-\zeta_1}{2}, \quad (\text{B.1}\alpha')$$

$$\phi^{(2)}(\zeta) = \frac{1+\zeta_1}{2}, \quad (\text{B.1}\beta')$$

με την πρώτη παράγωγο των συναρτήσεων μορφής ως προς ζ_1 να είναι ίση με

$$\frac{d\phi^{(1)}(\zeta)}{d\zeta_1} = -\frac{1}{2}, \quad (\text{B.2}\alpha')$$

$$\frac{d\phi^{(2)}(\zeta)}{d\zeta_1} = \frac{1}{2}. \quad (\text{B.2}\beta')$$

Σχήμα B.1: (α') Συνεχές, (β') μερικώς και πλήρως ασυνεχές δίκουμβο γραμμικής-βάσης στοιχείο γραμμής (2LL).

Οι συντεταγμένες των δύο κόμβων στο τοπικό σύστημα αναφοράς, ανεξάρτητα της ασυνέχειας του στοιχείου, είναι οι εξής

$$\zeta_1 = -a_0, \text{ κόμβος } 1, \quad (\text{B.3}\alpha')$$

$$\zeta_1 = +a_1, \text{ κόμβος } 2. \quad (\text{B.3}\beta')$$

Όταν το στοιχείο 2LL είναι μερικώς ή πλήρως ασυνεχές (βλ. Σχ. Β.1(β')) τότε οι συναρτήσεις μορφής παίρνουν τη νέα μορφή

$$\phi^{(1)}(\zeta) = \frac{a_1 - \zeta_1}{a_0 + a_1}, \quad (\text{B.4}\alpha')$$

$$\phi^{(2)}(\zeta) = \frac{a_0 + \zeta_1}{a_0 + a_1}, \quad (\text{B.4}\beta')$$

και η πρώτη παράγωγός τους ως προς ζ_1

$$\frac{d\phi^{(1)}(\zeta)}{d\zeta_1} = -\frac{1}{a_0 + a_1}, \quad (\text{B.5}\alpha')$$

$$\frac{d\phi^{(2)}(\zeta)}{d\zeta_1} = \frac{1}{a_0 + a_1}, \quad (\text{B.5}\beta')$$

όπου $a_0 = a_1 = 1/2$ για το πλήρως ασυνεχές στοιχείο. Από της γενικής μορφής Εξ. (Β.4) και (Β.5) παρατηρείται ότι εάν $a_0 = a_1 = 1$, δηλαδή το στοιχείο είναι συνεχές, προκύπτουν οι αντίστοιχες Εξ. (Β.1) και (Β.2).

Β.3 Στοιχείο 3QL: συναρτήσεις μορφής και παράγωγοι

Οι συναρτήσεις μορφής του συνεχούς τρίκομβου τετραγωνικής-βάσης στοιχείου γραμμής (βλ. Σχ. Β.2(α')) είναι οι εξής

$$\phi^{(1)}(\zeta) = \frac{(\zeta_1 - 1)\zeta_1}{2}, \quad (\text{B.6}\alpha')$$

$$\phi^{(2)}(\zeta) = \frac{\zeta_1(1 + \zeta_1)}{2}, \quad (\text{B.6}\beta')$$

$$\phi^{(3)}(\zeta) = 1 - \zeta_1^2, \quad (\text{B.6}\gamma')$$

με την πρώτη παράγωγο των συναρτήσεων μορφής ως προς ζ_1 να είναι ίση με

$$\frac{d\phi^{(1)}(\zeta)}{d\zeta_1} = \zeta_1 - \frac{1}{2}, \quad (\text{B.7}\alpha')$$

$$\frac{d\phi^{(2)}(\zeta)}{d\zeta_1} = \zeta_1 + \frac{1}{2}, \quad (\text{B.7}\beta')$$

$$\frac{d\phi^{(3)}(\zeta)}{d\zeta_1} = -2\zeta_1. \quad (\text{B.7}\gamma')$$

Οι συντεταγμένες των τριών κόμβων στο τοπικό σύστημα αναφοράς, ανεξάρτητα της ασυνέχειας του στοιχείου, είναι οι εξής

Σχήμα B.2: (α') Συνεχές, (β') μερικώς και πλήρως ασυνεχές τρίκομβο τετραγωνικής-βάσης στοιχείο γραμμής (3QL).

$$\zeta_1 = -a_0, \text{ κόμβος } 1, \quad (\text{B.8}\alpha')$$

$$\zeta_1 = +a_1, \text{ κόμβος } 2, \quad (\text{B.8}\beta')$$

$$\zeta_1 = 0, \text{ κόμβος } 3. \quad (\text{B.8}\gamma')$$

Όταν το στοιχείο 3QL είναι μερικώς ή πλήρως ασυνεχές (βλ. Σχ. B.2(β')) τότε οι συναρτήσεις μορφής παίρνουν τη νέα μορφή

$$\phi^{(1)}(\zeta) = \frac{\zeta_1(\zeta_1 - a_1)}{a_0(a_0 + a_1)}, \quad (\text{B.9}\alpha')$$

$$\phi^{(2)}(\zeta) = \frac{\zeta_1(a_0 + \zeta_1)}{a_1(a_0 + a_1)}, \quad (\text{B.9}\beta')$$

$$\phi^{(3)}(\zeta) = \frac{(a_1 - \zeta_1)(a_0 + \zeta_1)}{a_0 a_1}, \quad (\text{B.9}\gamma')$$

και η πρώτη παράγωγός τους ως προς ζ_1

$$\frac{d\phi^{(1)}(\zeta)}{d\zeta_1} = \frac{2\zeta_1 - a_1}{a_0(a_0 + a_1)}, \quad (\text{B.10}\alpha')$$

$$\frac{d\phi^{(2)}(\zeta)}{d\zeta_1} = \frac{a_0 + 2\zeta_1}{a_1(a_0 + a_1)}, \quad (\text{B.10}\beta')$$

$$\frac{d\phi^{(3)}(\zeta)}{d\zeta_1} = \frac{a_1 - a_0 - 2\zeta_1}{a_0 a_1}, \quad (\text{B.10}\gamma')$$

όπου $a_0 = a_1 = 2/3$ για το πλήρως ασυνεχές στοιχείο. Όπως στο Εδάφ. B.2, εάν υποτεθεί $a_0 = a_1 = 1$ τότε από της γενικής μορφής Εξ. (B.9) και (B.10) προκύπτουν οι αντίστοιχες Εξ. (B.6) και (B.7).

B.4 Στοιχείο 3LT: συναρτήσεις μορφής και παράγωγοι

Οι συναρτήσεις μορφής για το πλήρως συνεχές τρίκομβο γραμμικής-βάσης στοιχείο τριγώνου (βλ. Σχ. Β.3(α')) είναι οι ακόλουθες

$$\phi^{(1)}(\zeta) = 1 - \zeta_1 - \zeta_2, \quad (\text{B.11}\alpha')$$

$$\phi^{(2)}(\zeta) = \zeta_1, \quad (\text{B.11}\beta')$$

$$\phi^{(3)}(\zeta) = \zeta_2, \quad (\text{B.11}\gamma')$$

με την πρώτη παράγωγο των συναρτήσεων μορφής ως προς ζ_1 να είναι ίση με

$$\frac{\partial \phi^{(1)}(\zeta)}{\partial \zeta_1} = -1, \quad (\text{B.12}\alpha')$$

$$\frac{\partial \phi^{(2)}(\zeta)}{\partial \zeta_1} = 1, \quad (\text{B.12}\beta')$$

$$\frac{\partial \phi^{(3)}(\zeta)}{\partial \zeta_1} = 0, \quad (\text{B.12}\gamma')$$

ενώ αντίστοιχα την πρώτη παράγωγο των συναρτήσεων μορφής ως προς ζ_2 να είναι ίση με

$$\frac{\partial \phi^{(1)}(\zeta)}{\partial \zeta_2} = -1 \quad (\text{B.13}\alpha')$$

$$\frac{\partial \phi^{(2)}(\zeta)}{\partial \zeta_2} = 0 \quad (\text{B.13}\beta')$$

$$\frac{\partial \phi^{(3)}(\zeta)}{\partial \zeta_2} = 1. \quad (\text{B.13}\gamma')$$

Οι συντεταγμένες των τριών κόμβων στο τοπικό σύστημα αναφοράς, ανεξάρτητα της ασυνέχειας του στοιχείου, είναι οι εξής

$$\zeta_1 = a_2, \quad \zeta_2 = a_0, \quad \text{κόμβος 1}, \quad (\text{B.14}\alpha')$$

$$\zeta_1 = 1 - a_0 - a_1, \quad \zeta_2 = a_0, \quad \text{κόμβος 2}, \quad (\text{B.14}\beta')$$

$$\zeta_1 = a_2, \quad \zeta_2 = 1 - a_1 - a_2, \quad \text{κόμβος 3}. \quad (\text{B.14}\gamma')$$

Όταν το στοιχείο 3LT είναι μερικώς ή πλήρως ασυνεχές (βλ. Σχ. Β.3(β')) τότε οι συναρτήσεις μορφής είναι οι ακόλουθες

$$\phi^{(1)}(\zeta) = \frac{1 - a_1 - \zeta_1 - \zeta_2}{a_3}, \quad (\text{B.15}\alpha')$$

$$\phi^{(2)}(\zeta) = \frac{\zeta_1 - a_2}{a_3}, \quad (\text{B.15}\beta')$$

$$\phi^{(3)}(\zeta) = \frac{\zeta_2 - a_0}{a_3}, \quad (\text{B.15}\gamma')$$

Σχήμα B.3: (α') Συνεχές, (β') πλήρως ασυνεχές και μερικώς ασυνεχή τρίκομβη γραμμικής-βάσης στοιχεία τριγώνου (3LT).

με την πρώτη μερική παράγωγό τους ως προς ζ_1 και ως προς ζ_2 να είναι η εξής αντίστοιχα

$$\frac{\partial \phi^{(1)}(\zeta)}{\partial \zeta_1} = -\frac{1}{a_3}, \quad (\text{B.16}\alpha')$$

$$\frac{\partial \phi^{(2)}(\zeta)}{\partial \zeta_1} = \frac{1}{a_3}, \quad (\text{B.16}\beta')$$

$$\frac{\partial \phi^{(3)}(\zeta)}{\partial \zeta_1} = 0, \quad (\text{B.16}\gamma')$$

$$\frac{\partial \phi^{(1)}(\zeta)}{\partial \zeta_2} = -\frac{1}{a_3}, \quad (\text{B.17}\alpha')$$

$$\frac{\partial \phi^{(2)}(\zeta)}{\partial \zeta_2} = 0, \quad (\text{B.17}\beta')$$

$$\frac{\partial \phi^{(3)}(\zeta)}{\partial \zeta_2} = \frac{1}{a_3}, \quad (\text{B.17}\gamma')$$

όπου $a_0 = a_1 = a_2 = 1/4$ για το πλήρως ασυνεχές στοιχείο και $a_3 = 1 - a_0 - a_1 - a_2$. Στην περίπτωση που υποτεθεί $a_0 = a_1 = a_2 = 0$ τότε οι Εξ. (B.15), (B.16), (B.17) και Εξ. (B.11), (B.12), (B.13) είναι αντιστοίχως ισοδύναμες.

B.5 Στοιχείο 6QT: συναρτήσεις μορφής και παράγωγοι

Στο πλήρως συνεχές εξάκομβο τετραγωνικής-βάσης στοιχείο τριγώνου (βλ. Σχ. B.4(α')) οι συναρτήσεις μορφής είναι οι εξής παρακάτω

$$\phi^{(1)}(\zeta) = (1 - 2\zeta_1 - 2\zeta_2)(1 - \zeta_1 - \zeta_2), \quad (\text{B.18}\alpha')$$

$$\phi^{(2)}(\zeta) = \zeta_1(2\zeta_1 - 1), \quad (\text{B.18}\beta')$$

$$\phi^{(3)}(\zeta) = \zeta_2(2\zeta_2 - 1), \quad (\text{B.18}\gamma')$$

$$\phi^{(4)}(\zeta) = 4\zeta_1(1 - \zeta_1 - \zeta_2), \quad (\text{B.18}\delta')$$

$$\phi^{(5)}(\zeta) = 4\zeta_1\zeta_2, \quad (\text{B.18}\epsilon')$$

$$\phi^{(6)}(\zeta) = 4\zeta_2(1 - \zeta_1 - \zeta_2), \quad (\text{B.18}\zeta')$$

με την πρώτη παράγωγο των συναρτήσεων μορφής ως προς ζ_1 να είναι ίση με

$$\frac{\partial \phi^{(1)}(\zeta)}{\partial \zeta_1} = 4(\zeta_1 + \zeta_2) - 3, \quad (\text{B.19}\alpha')$$

$$\frac{\partial \phi^{(2)}(\zeta)}{\partial \zeta_1} = 4\zeta_1 - 1, \quad (\text{B.19}\beta')$$

$$\frac{\partial \phi^{(3)}(\zeta)}{\partial \zeta_1} = 0, \quad (\text{B.19}\gamma')$$

$$\frac{\partial \phi^{(4)}(\zeta)}{\partial \zeta_1} = 4(1 - 2\zeta_1 - \zeta_2), \quad (\text{B.19}\delta')$$

$$\frac{\partial \phi^{(5)}(\zeta)}{\partial \zeta_1} = 4\zeta_2, \quad (\text{B.19}\epsilon')$$

$$\frac{\partial \phi^{(6)}(\zeta)}{\partial \zeta_1} = -4\zeta_2, \quad (\text{B.19}\zeta')$$

ενώ αντίστοιχα την πρώτη παράγωγο των συναρτήσεων μορφής ως προς ζ_2 να είναι ίση με

$$\frac{\partial \phi^{(1)}(\zeta)}{\partial \zeta_2} = 4(\zeta_1 + \zeta_2) - 3, \quad (\text{B.20}\alpha')$$

$$\frac{\partial \phi^{(2)}(\zeta)}{\partial \zeta_2} = 0, \quad (\text{B.20}\beta')$$

$$\frac{\partial \phi^{(3)}(\zeta)}{\partial \zeta_2} = 4\zeta_2 - 1, \quad (\text{B.20}\gamma')$$

$$\frac{\partial \phi^{(4)}(\zeta)}{\partial \zeta_2} = -4\zeta_1, \quad (\text{B.20}\delta')$$

$$\frac{\partial \phi^{(5)}(\zeta)}{\partial \zeta_2} = 4\zeta_1, \quad (\text{B.20}\epsilon')$$

$$\frac{\partial \phi^{(6)}(\zeta)}{\partial \zeta_2} = 4(1 - \zeta_1 - 2\zeta_2). \quad (\text{B.20}\zeta')$$

Οι συντεταγμένες των έξι κόμβων στο τοπικό σύστημα αναφοράς, ανεξάρτητα της ασυνέχειας του στοιχείου, είναι οι εξής

Σχήμα B.4: (α') Συνεχές, (β') πλήρως ασυνεχές και μερικώς ασυνεχή εξάκομβη τετραγωνικής-βάσης στοιχεία τριγώνου (6QT).

$$\zeta_1 = a_2, \zeta_2 = a_0, \text{ κόμβος } 1, \quad (\text{B.21}\alpha')$$

$$\zeta_1 = 1 - a_0 - a_1, \zeta_2 = a_0, \text{ κόμβος } 2, \quad (\text{B.21}\beta')$$

$$\zeta_1 = a_2, \zeta_2 = 1 - a_1 - a_2, \text{ κόμβος } 3, \quad (\text{B.21}\gamma')$$

$$\zeta_1 = (1 - a_0)/2, \zeta_2 = a_0, \text{ κόμβος } 4, \quad (\text{B.21}\delta')$$

$$\zeta_1 = (1 - a_1)/2, \zeta_2 = (1 - a_1)/2, \text{ κόμβος } 5, \quad (\text{B.21}\epsilon')$$

$$\zeta_1 = a_2, \zeta_2 = (1 - a_2)/2, \text{ κόμβος } 6. \quad (\text{B.21}\zeta')$$

Όταν το στοιχείο 6QT είναι μερικώς ή πλήρως ασυνεχές (βλ. Σχ. B.4(β')) τότε οι συναρτήσεις μορφής εκφράζονται μέσω των σχέσεων

$$\phi^{(1)}(\zeta) = \frac{(1-a_1-\zeta_1-\zeta_2)(a_0+a_2+3a_0a_2-1+2\zeta_1-4a_0\zeta_1-2a_2\zeta_1-2\zeta_2(a_0+2a_2-1))}{a_3(1-2a_0-a_2)(a_0+2a_2-1)}, \quad (\text{B.22}\alpha')$$

$$\phi^{(2)}(\zeta) = \frac{(\zeta_1-a_2)((a_1-1)(2\zeta_1-1)-2a_1\zeta_2+a_0(3a_1+4\zeta_1+2\zeta_2-3))}{a_3(1-2a_0-a_1)(a_0+2a_1-1)}, \quad (\text{B.22}\beta')$$

$$\phi^{(3)}(\zeta) = \frac{(\zeta_2-a_0)(1-2\zeta_2+a_1(3a_2-2\zeta_1+2\zeta_2-1)+a_2(2\zeta_1+4\zeta_2-3))}{a_3(1-2a_1-a_2)(a_1+2a_2-1)}, \quad (\text{B.22}\gamma')$$

$$\phi^{(4)}(\zeta) = \frac{4(a_2-\zeta_1)(a_1-1+\zeta_1+\zeta_2)}{(a_0+2a_1-1)(a_0+2a_2-1)}, \quad (\text{B.22}\delta')$$

$$\phi^{(5)}(\zeta) = \frac{4(a_2-\zeta_1)(a_0-\zeta_2)}{(2a_0+a_1-1)(a_1+2a_2-1)}, \quad (\text{B.22}\epsilon')$$

$$\phi^{(6)}(\zeta) = \frac{4(a_0-\zeta_2)(a_1-1+\zeta_1+\zeta_2)}{(2a_0+a_2-1)(2a_1+a_2-1)}, \quad (\text{B.22}\zeta')$$

με την πρώτη μερική παράγωγό τους ως προς ζ_1 να είναι η εξής

$$\frac{\partial \phi^{(1)}(\zeta)}{\partial \zeta_1} = \frac{(a_2-1)(2a_1+4\zeta_1-3)+2\zeta_2(3a_2-2)+a_0(4a_1-3a_2-5+8\zeta_1+6\zeta_2)}{a_3(1-2a_0-a_2)(a_0+2a_2-1)}, \quad (\text{B.23}\alpha')$$

$$\frac{\partial \phi^{(2)}(\zeta)}{\partial \zeta_1} = -\frac{(a_1-1)(1+2a_2-4\zeta_1)-2a_1\zeta_2+a_0(3a_1-4a_2-3+8\zeta_1+2\zeta_2)}{a_3(1-2a_0-a_1)(a_0+2a_1-1)}, \quad (\text{B.23}\beta')$$

$$\frac{\partial \phi^{(3)}(\zeta)}{\partial \zeta_1} = \frac{2(a_1-a_2)(a_0-\zeta_2)}{a_3(1-2a_1-a_2)(a_1+2a_2-1)}, \quad (\text{B.23}\gamma')$$

$$\frac{\partial \phi^{(4)}(\zeta)}{\partial \zeta_1} = \frac{4(1-a_1+a_2-2\zeta_1-\zeta_2)}{(a_0+2a_1-1)(a_0+2a_2-1)}, \quad (\text{B.23}\delta')$$

$$\frac{\partial \phi^{(5)}(\zeta)}{\partial \zeta_1} = \frac{4(\zeta_2-a_0)}{(2a_0+a_1-1)(a_1+2a_2-1)}, \quad (\text{B.23}\epsilon')$$

$$\frac{\partial \phi^{(6)}(\zeta)}{\partial \zeta_1} = \frac{4(a_0-\zeta_2)}{(2a_0+a_2-1)(2a_1+a_2-1)}, \quad (\text{B.23}\zeta')$$

και την πρώτη μερική παράγωγό τους ως προς ζ_2 να είναι η ακόλουθη

$$\frac{\partial \phi^{(1)}(\zeta)}{\partial \zeta_2} = \frac{3+a_1(4a_2-2)-4\zeta_1-4\zeta_2+a_0(2a_1-3a_2-3+6\zeta_1+4\zeta_2)+a_2(6\zeta_1+8\zeta_2-5)}{a_3(1-2a_0-a_2)(a_0+2a_2-1)}, \quad (\text{B.24}\alpha')$$

$$\frac{\partial \phi^{(2)}(\zeta)}{\partial \zeta_2} = \frac{2(a_1-a_0)(a_2-\zeta_1)}{a_3(1-2a_0-a_1)(a_0+2a_1-1)}, \quad (\text{B.24}\beta')$$

$$\frac{\partial \phi^{(3)}(\zeta)}{\partial \zeta_2} = \frac{1-2a_0(a_1+2a_2-1)-4\zeta_2+a_1(3a_2-2\zeta_1+4\zeta_2-1)+a_2(2\zeta_1+8\zeta_2-3)}{a_3(1-2a_1-a_2)(a_1+2a_2-1)}, \quad (\text{B.24}\gamma')$$

$$\frac{\partial \phi^{(4)}(\zeta)}{\partial \zeta_2} = \frac{4(a_2-\zeta_1)}{(a_0+2a_1-1)(a_0+2a_2-1)}, \quad (\text{B.24}\delta')$$

$$\frac{\partial \phi^{(5)}(\zeta)}{\partial \zeta_2} = \frac{4(\zeta_1-a_2)}{(2a_0+a_1-1)(a_1+2a_2-1)}, \quad (\text{B.24}\epsilon')$$

$$\frac{\partial \phi^{(6)}(\zeta)}{\partial \zeta_2} = \frac{4(1+a_0-a_1-\zeta_1-2\zeta_2)}{(2a_0+a_2-1)(2a_1+a_2-1)}, \quad (\text{B.24}\zeta')$$

όπου $a_0 = a_1 = a_2 = 1/6$ για το πλήρως ασυνεχές στοιχείο και $a_3 = 1 - a_0 - a_1 - a_2$. Όμοια με το Εδάφ. Β.4, εάν $a_0 = a_1 = a_2 = 0$ τότε οι Εξ. (B.22), (B.23), (B.24) και Εξ. (B.18), (B.19), (B.20) είναι αντιστοίχως ισοδύναμες.

B.6 Τμηματοποίηση του στοιχείου τριγώνου

Έστω $S(\zeta^{(S)})$ να είναι το ιδιόμορφο σημείο ολοκλήρωσης, η διαίρεση ενός στοιχείου τριγώνου σε ορθογώνια τρίγωνα με κοινή κορυφή το ιδιόμορφο σημείο S -στο τοπι-

Σχήμα B.5: Διαίρεση του στοιχείου τριγώνου σε έξι ορθογώνια τρίγωνα.

κό σύστημα συντεταγμένων του στοιχείου Z_i και στο τοπικό Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων $\bar{Z}_i$ φαίνεται στο Σχ. B.5. Στη γενική περίπτωση που το ιδιόμορφο σημείο ανήκει εντός του τριγώνου τότε σχηματίζονται έξι ορθογώνια τρίγωνα· αντίθετα όταν το σημείο S ταυτίζεται: (α') με τον κόμβο 1 του τριγώνου σχηματίζονται τα τρίγωνα 1, 2, (β') με τον κόμβο 2 του τριγώνου σχηματίζονται τα τρίγωνα 3, 4 και (γ') με τον κόμβο 3 του τριγώνου σχηματίζονται τα τρίγωνα 5, 6. Αντίστοιχα όταν το σημείο S βρίσκεται: (α') στην πλευρά 1-2 του τριγώνου τότε σχηματίζονται τα τρίγωνα 1, 2, 3, 4, (β') στην πλευρά 2-3 του τριγώνου σχηματίζονται τα τρίγωνα 3, 4, 5, 6 και (γ') στην πλευρά 3-1 του τριγώνου τότε σχηματίζονται τα τρίγωνα 1, 2, 5, 6. Οι αναλυτικές εκφράσεις που περιγράφουν αυτά τα υποτρίγωνα, δηλαδή τις γωνίες ως προς την πολική γωνία του ιδιόμορφου σημείου S και τη μέγιστη ακτίνα έκτασης της εξωτερικής πλευράς του εκάστοτε υποτριγώνου, δίδονται στα παρακάτω υποεδάφια.

B.6.1 Τρίγωνο 1

Ο υπολογισμός των γωνιών αρχής και τέλους θ_1, θ_2 αντίστοιχα, του ορθογώνιου τριγώνου 1 (βλ. Σχ. B.6(α')) γίνεται με βάση τις σχέσεις

$$A = \zeta_2^{(S)} \cos(30^\circ), \quad (\text{B.25}\alpha')$$

$$B = \zeta_2^{(S)} \sin(30^\circ), \quad (\text{B.25}\beta')$$

$$C = B + \zeta_1^{(S)}, \quad (\text{B.25}\gamma')$$

$$D = 1 - C, \quad (\text{B.25}\delta')$$

$$E^2 = A^2 + D^2, \quad (\text{B.25}\epsilon')$$

$$F = E \sin(\phi_2), \quad (\text{B.25}\zeta')$$

Σχήμα Β.6: Ορθογώνιο (α') τρίγωνο 1, (β') τρίγωνο 2, (γ') τρίγωνο 3, (δ') τρίγωνο 4, (ε') τρίγωνο 5 και (ζ') τρίγωνο 6.

όπου $\phi_1 = \sin^{-1}(A/E)$, $\phi_2 = 60^\circ - \phi_1$ συνεπώς

$$\theta_1 = -\phi_1, \quad \theta_2 = 30^\circ. \quad (\text{B.26})$$

Αντίστοιχα η έκφραση που δίνει τη μέγιστη ακτίνα έκτασης της εξωτερικής πλευράς του τριγώνου 1 ως συνάρτηση της πολικής γωνίας θ ισούται με

$$R_{max}(\theta) = \frac{F}{\cos(\phi)}, \quad (\text{B.27})$$

όπου $\phi = \theta_2 + |\theta|$ όταν $\theta < 0^\circ$ και $\phi = \theta_2 - |\theta|$ όταν $\theta \geq 0^\circ$.

B.6.2 Τρίγωνο 2

Ο υπολογισμός των γωνιών αρχής και τέλους θ_1 , θ_2 αντίστοιχα, του ορθογώνιου τριγώνου 2 (βλ. Σχ. B.6(β')) γίνεται με βάση τις σχέσεις

$$A = \zeta_2^{(S)} \cos(30^\circ), \quad (\text{B.28}\alpha')$$

$$B = \zeta_2^{(S)} \sin(30^\circ), \quad (\text{B.28}\beta')$$

$$C = B + \zeta_1^{(S)}, \quad (\text{B.28}\gamma')$$

$$D = 1 - C, \quad (\text{B.28}\delta')$$

$$E^2 = A^2 + D^2, \quad (\text{B.28}\epsilon')$$

$$F = E \cos(\phi_2), \quad (\text{B.28}\zeta')$$

$$G = E \sin(\phi_2), \quad (\text{B.28}\eta')$$

$$H = 1 - F, \quad (\text{B.28}\theta')$$

όπου $\phi_1 = \sin^{-1}(A/E)$, $\phi_2 = 60^\circ - \phi_1$ συνεπώς

$$\theta_1 = 30^\circ, \quad \theta_2 = 30^\circ + \tan^{-1}(H/G). \quad (\text{B.29})$$

Αντίστοιχα η έκφραση που δίνει τη μέγιστη ακτίνα έκτασης της εξωτερικής πλευράς του τριγώνου 2 ως συνάρτηση της πολικής γωνίας θ ισούται με

$$R_{max}(\theta) = \frac{G}{\cos(\phi)}, \quad (\text{B.30})$$

όπου $\phi = \theta - \theta_1$.

B.6.3 Τρίγωνο 3

Ο υπολογισμός των γωνιών αρχής και τέλους θ_1 , θ_2 αντίστοιχα, του ορθογώνιου τριγώνου 3 (βλ. Σχ. B.6(γ')) γίνεται με βάση τις σχέσεις

$$A = \zeta_2^{(S)} \cos(30^\circ), \quad (\text{B.31}\alpha')$$

$$B = \zeta_2^{(S)} \sin(30^\circ), \quad (\text{B.31}\beta')$$

$$C = B + \zeta_1^{(S)}, \quad (\text{B.31}\gamma')$$

$$D^2 = A^2 + C^2, \quad (\text{B.31}\delta')$$

$$E = D \sin(\phi_2), \quad (\text{B.31}\epsilon')$$

$$F = D \cos(\phi_2), \quad (\text{B.31}\zeta')$$

$$G = 1 - F, \quad (\text{B.31}\zeta')$$

όπου $\phi_1 = \sin^{-1}(A/D)$, $\phi_2 = 60^\circ - \phi_1$ συνεπώς

$$\theta_1 = 150^\circ - \tan^{-1}(G/E), \quad \theta_2 = 150^\circ. \quad (\text{B.32})$$

Αντίστοιχα η έκφραση που δίνει τη μέγιστη ακτίνα έκτασης της εξωτερικής πλευράς του τριγώνου 3 ως συνάρτηση της πολικής γωνίας θ ισούται με

$$R_{max}(\theta) = \frac{E}{\cos(\phi)}, \quad (\text{B.33})$$

όπου $\phi = \theta_2 - \theta$.

B.6.4 Τρίγωνο 4

Ο υπολογισμός των γωνιών αρχής και τέλους θ_1 , θ_2 αντίστοιχα, του ορθογώνιου τριγώνου 4 (βλ. Σχ. Β.6(δ')) γίνεται με βάση τις σχέσεις

$$A = \zeta_2^{(S)} \cos(30^\circ), \quad (\text{B.34}\alpha')$$

$$B = \zeta_2^{(S)} \sin(30^\circ), \quad (\text{B.34}\beta')$$

$$C = B + \zeta_1^{(S)}, \quad (\text{B.34}\gamma')$$

$$D^2 = A^2 + C^2, \quad (\text{B.34}\delta')$$

$$E = D \sin(\phi_2), \quad (\text{B.34}\epsilon')$$

όπου $\phi_1 = \sin^{-1}(A/D)$, $\phi_2 = 60^\circ - \phi_1$ συνεπώς

$$\theta_1 = 150^\circ, \quad \theta_2 = 240^\circ - \phi_2. \quad (\text{B.35})$$

Αντίστοιχα η έκφραση που δίνει τη μέγιστη ακτίνα έκτασης της εξωτερικής πλευράς του τριγώνου 4 ως συνάρτηση της πολικής γωνίας θ ισούται με

$$R_{max}(\theta) = \frac{E}{\cos(\phi)}, \quad (\text{B.36})$$

όπου $\phi = \theta - \theta_1$.

B.6.5 Τρίγωνο 5

Ο υπολογισμός των γωνιών αρχής και τέλους θ_1 , θ_2 αντίστοιχα, του ορθογώνιου τριγώνου 5 (βλ. Σχ. B.6(ε')) γίνεται με βάση τις σχέσεις

$$A = \zeta_2^{(S)} \cos(30^\circ), \quad (\text{B.37}\alpha')$$

$$B = \zeta_2^{(S)} \sin(30^\circ), \quad (\text{B.37}\beta')$$

$$C = B + \zeta_1^{(S)}, \quad (\text{B.37}\gamma')$$

όπου $\phi_1 = \tan^{-1}(A/C)$, $\phi_2 = 60^\circ - \phi_1$ συνεπώς

$$\theta_1 = 240^\circ - \phi_2, \quad \theta_2 = 270^\circ. \quad (\text{B.38})$$

Αντίστοιχα η έκφραση που δίνει τη μέγιστη ακτίνα έκτασης της εξωτερικής πλευράς του τριγώνου 5 ως συνάρτηση της πολικής γωνίας θ ισούται με

$$R_{max}(\theta) = \frac{A}{\cos(\phi)}, \quad (\text{B.39})$$

όπου $\phi = \theta_2 - \theta$.

B.6.6 Τρίγωνο 6

Ο υπολογισμός των γωνιών αρχής και τέλους θ_1 , θ_2 αντίστοιχα, του ορθογώνιου τριγώνου 6 (βλ. Σχ. B.6(ς')) γίνεται με βάση τις σχέσεις

$$A = \zeta_2^{(S)} \cos(30^\circ), \quad (\text{B.40}\alpha')$$

$$B = \zeta_2^{(S)} \sin(30^\circ), \quad (\text{B.40}\beta')$$

$$C = B + \zeta_1^{(S)}, \quad (\text{B.40}\gamma')$$

$$D^2 = A^2 + C^2, \quad (\text{B.40}\delta')$$

$$E = 1 - C, \quad (\text{B.40}\epsilon')$$

επομένως

$$\theta_1 = 270^\circ, \quad \theta_2 = 270^\circ + \tan^{-1}(E/A). \quad (\text{B.41})$$

Αντίστοιχα η έκφραση που δίνει τη μέγιστη ακτίνα έκτασης της εξωτερικής πλευράς του τριγώνου 6 ως συνάρτηση της πολικής γωνίας θ ισούται με

$$R_{max}(\theta) = \frac{A}{\cos(\phi)}, \quad (\text{B.42})$$

όπου $\phi = \theta - \theta_1$.

Βιβλιογραφία

- [1] Banerjee PK (1994): *The Boundary Element Methods in Engineering*. McGraw-Hill.
- [2] Brebbia CA (1978): *The Boundary Element Method for Engineers*. Pentech Press.
- [3] Brebbia CA, Dominguez J (1992): *Boundary Elements: An introductory course*. McGraw-Hill.
- [4] El-Zafrany A (1993): *Techniques of the Boundary Element Method*. Ellis Horwood.
- [5] Patterson C, Sheikh MA (1984): Interelement continuity in the Boundary Element Method. *Topics in Boundary Element Research*, **1**, eds: Brebbia CA.

Παράρτημα Γ

Συναρτήσεις βάρους για τις μεθόδους προσέγγισης και παρεμβολής

Σε αυτό το παράρτημα πρόκειται να παρουσιαστούν οι συναρτήσεις βάρους που χρησιμοποιήθηκαν στην παρούσα διδακτορική διατριβή. Στα επόμενα τρία εδάφια παρατίθενται οι συναρτήσεις αυτές ξεχωριστά για τις τρεις μεθόδους προσέγγισης ή παρεμβολής. Στο πρώτο εδάφιο παρουσιάζονται οι συναρτήσεις βάρους που χρησιμοποιούνται στη Μέθοδο Κινουμένων Ελαχίστων Τετραγώνων (Moving Least Squares), ενώ στο δεύτερο εδάφιο οι ακτινικές συναρτήσεις για τη Μέθοδο Συμπτυγμένης Στήριξης με Βάση Ακτινικών Συναρτήσεων (Compactly Supported Radial Basis Functions). Τέλος στο τρίτο εδάφιο παρατίθενται οι ακτινικές συναρτήσεις για τη Μέθοδο Παρεμβολής Σημείων με Βάση Ακτινικών Συναρτήσεων (Radial Basis Point Interpolation Functions).

Γ.1 Συναρτήσεις βάρους για τη Μέθοδο Κινουμένων Ελαχίστων Τετραγώνων

Στην παρούσα διατριβή για τη Μέθοδο Κινουμένων Ελαχίστων Τετραγώνων επιλέχθηκαν η κονική συνάρτηση (βλ. Σχ. Γ.1(α'), Γ.1(β'))

$$w(\mathbf{y}, \mathbf{x}^{(j)}) = 1 - l^{2k}, \quad (\Gamma.1)$$

η συνάρτηση βάρους Gauss (βλ. Σχ. Γ.1(γ'))

$$w(\mathbf{y}, \mathbf{x}^{(j)}) = 1 + \frac{\exp[-(d_j/c)^{2k}] - 1}{1 - \exp[-(r_S^{(j)}/c)^{2k}]}, \quad (\Gamma.2)$$

η τρίτου βαθμού συνάρτηση spline (βλ. Σχ. Γ.1(δ'))

$$w(\mathbf{y}, \mathbf{x}^{(j)}) = \begin{cases} 2/3 - 4l^2 + 4l^3, & l \leq 1/2 \\ 4/3 - 4l + 4l^2 - 4l^3/3, & l \leq 1 \end{cases}, \quad (\Gamma.3)$$

η τέταρτου βαθμού συνάρτηση spline (βλ. Σχ. Γ.1(ε'))

$$w(\mathbf{y}, \mathbf{x}^{(j)}) = 1 - 6l^2 + 8l^3 - 3l^4, \quad (\Gamma.4)$$

και η πέμπτου βαθμού συνάρτηση spline (βλ. Σχ. Γ.1(ε'))

$$w(\mathbf{y}, \mathbf{x}^{(j)}) = 1 - 10l^3 + 15l^4 - 6l^5, \quad (\Gamma.5)$$

όπου $l = d_j/r_S^{(j)}$ και $d_j = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}^{(j)}\|$ είναι η Ευκλείδεια απόσταση μεταξύ του σημείου υπολογισμού $\mathbf{y}$ και του γειτονικού σημείου $\mathbf{x}^{(j)}$, του οποίου η ακτίνα επιρροής είναι ίση με $r_S^{(j)}$. Επίσης οι μεταβλητές c και k είναι παράμετροι των συναρτήσεων βάρους και επιλέγονται αυθαίρετα από τον χρήστη. Στην εργασία [1] προτείνεται ένας τρόπος υπολογισμού της σταθεράς c για τη συνάρτηση βάρους του Gauss. Με βάση την εμπειρία που αποκτήθηκε μετά από πλήθος αριθμητικών πειραμάτων, η τιμή $c \approx 4.2$ δίδει αρκετά ικανοποιητικά αποτελέσματα. Πρέπει να σημειωθεί ότι οι παραπάνω συναρτήσεις μηδενίζονται όταν ο λόγος της απόστασης των σημείων προς το πεδίο επιρροής του κόμβου $\mathbf{x}^{(j)}$ γίνει μεγαλύτερος της μονάδας ($l > 1$), δηλαδή όταν $\mathbf{y} \notin \tilde{\Omega}_{(j)}$.

Γ.2 Ακτινικές συναρτήσεις για τη Μέθοδο Τοπικής Επιρροής με Βάση Ακτινικών Συναρτήσεων

Οι πιο διαδεδομένες συναρτήσεις για τη Μέθοδο Συνεπτυγμένης Στήριξης με Βάση Ακτινικών Συναρτήσεων είναι αυτές του Wu [6]

$$g(\mathbf{y}, \mathbf{x}^{(j)}) = (1 - l)_+^5 (5l^4 + 25l^3 + 48l^2 + 40l + 8), \quad (\Gamma.6)$$

$$g(\mathbf{y}, \mathbf{x}^{(j)}) = (1 - l)_+^6 (5l^5 + 30l^4 + 72l^3 + 82l^2 + 36l + 6), \quad (\Gamma.7)$$

και του Wendland [4, 5]

$$g(\mathbf{y}, \mathbf{x}^{(j)}) = (1 - l)_+^2, \quad (\Gamma.8)$$

$$g(\mathbf{y}, \mathbf{x}^{(j)}) = (1 - l)_+^4 (4l + 1), \quad (\Gamma.9)$$

$$g(\mathbf{y}, \mathbf{x}^{(j)}) = (1 - l)_+^6 (35l^2 + 18l + 3), \quad (\Gamma.10)$$

$$g(\mathbf{y}, \mathbf{x}^{(j)}) = (1 - l)_+^8 (35l^3 + 25l^2 + 8l + 3), \quad (\Gamma.11)$$

Σχήμα Γ.1: (α') Κωνική συνάρτηση βάρους ($k = 1$), (β') κωνική συνάρτηση βάρους ($k = 2$), (γ') συνάρτηση Gauss ($c = 4$, $k = 1$), (δ') 3^{ου} βαθμού, (ε') 4^{ου} βαθμού και (ϛ') 5^{ου} βαθμού συνάρτηση spline.

όπου $l = d_j/r_S^{(j)}$ και $(\alpha)_+ \neq 0$ όταν $\alpha > 0$ ενώ $(\alpha)_+ = 0$ στην αντίθετη περίπτωση.

Γ.3 Ακτινικές συναρτήσεις για τη Μέθοδο Παρεμβολής Σημείων με Βάση Ακτινικών Συναρτήσεων

Οι ακτινικές συναρτήσεις για τη Μέθοδο Παρεμβολής Σημείων με Βάση Ακτινικών Συναρτήσεων [2] που χρησιμοποιήθηκαν τόσο σε αριθμητικά πειράματα όσο και για την επίλυση πραγματικών προβλημάτων με τις Τοπικές Μεθόδους χωρίς Διακριτοποίηση είναι η Multiquadrics

$$g(\mathbf{y}, \mathbf{x}^{(j)}) = \left(d_j^2 + c^2\right)^q, \quad (\Gamma.12)$$

η λογαριθμική Multiquadrics

$$g(\mathbf{y}, \mathbf{x}^{(j)}) = \log\left(d_j^2 + c^2\right), \quad (\Gamma.13)$$

η εκθετική συνάρτηση (EXP-Gauss)

$$g(\mathbf{y}, \mathbf{x}^{(j)}) = \exp\left(-d_j^2/c^2\right), \quad (\Gamma.14)$$

και η συνάρτηση spline λεπτής πλάκας

$$g(\mathbf{y}, \mathbf{x}^{(j)}) = d_j^q, \quad (\Gamma.15)$$

με c, q να είναι παράμετροι των συναρτήσεων. Στην εργασία [3] γίνεται προσπάθεια εντοπισμού των βέλτιστων τιμών των άνω παραμέτρων ενώ στο βιβλίο [2] γίνεται αδιαστατοποίησή τους για να μην επηρεάζουν σημαντικά την «ποιότητα» της παρεμβολής μέσω της Μεθόδου Παρεμβολής Σημείων με Βάση Ακτινικών Συναρτήσεων. Με γνώμονα όμως τα εκτενή πειράματα που διενεργήθηκαν στο πλαίσιο έρευνας της διδακτορικής διατριβής, παρατηρήθηκε ότι οι βέλτιστες τιμές των παραμέτρων των ακτινικών συναρτήσεων g διαφέρουν από πρόβλημα σε πρόβλημα. Η μόνη δυστυχώς λύση σε αυτό το ζήτημα είναι η επίπονη και χρονοβόρα διαδικασία της «δοκιμής-λάθους».

Σχήμα Γ.2: Οι συναρτήσεις του Wu τύπου (α') $C2$, (β') $C4$ και οι συναρτήσεις του Wendland τύπου (γ') $C0$, (δ') $C2$, (ε') $C4$ και (ϛ') $C6$.

Βιβλιογραφία

- [1] Atluri SN, Sladek J, Sladek V, Zhu T (2000): The local boundary integral equation (LBIE) and its meshless implementation for linear elasticity. *Computational Mechanics*, **25**, 180–198.
- [2] Liu GR (2003): *Mesh Free Methods*. CRC Press.
- [3] Wang JG, Liu GR (2002): On the optimal shape parameters of radial basis functions used for 2-D meshless methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **191**, 2611–2630.
- [4] Wendland H (1995): Piecewise polynomial, positive definite and compactly supported radial basis functions of minimal degree. *Advances in Computational Mathematics*, **4**, 389–396.
- [5] Wendland H (1999): Meshless Galerkin methods using radial basis function. *Mathematics of Computations*, **68**, 1521–1531.
- [6] Wu Z (1995): Compactly supported positive definite radial functions. *Advances in Computational Mathematics*, **4**, 283–292.

Παράρτημα Δ

Ανάλυση Φάσματος και Χρόνου-Συχνότητας

Σε αυτό το παράρτημα πρόκειται να γίνει μία συνοπτική παρουσίαση του μετασχηματισμού Fourier για την φασματική ανάλυση χρονοσημάτων καθώς και των ιδιοτήτων του. Έπειτα γίνεται ειδικός σχολιασμός για τον τρόπο με τον οποίο πρέπει να γίνεται δειγματοληψία σε ένα πραγματικό σήμα, προκειμένου να οδηγηθεί κάποιος σε ορθό μετασχηματισμό του σήματος από το πεδίο του χρόνου στο αντίστοιχο των συχνοτήτων. Επίσης στο παράρτημα αυτό παρατίθεται η απαραίτητη θεωρία που χρειάζεται για την πλήρη κατανόηση της ανάλυσης σημάτων μέσω της Αναπαράστασης Χρόνου-Συχνότητας.

Δ.1 Ανάλυση φάσματος μέσω του μετασχηματισμού Fourier

Ο μετασχηματισμός Fourier $U(\omega)$ μίας συνάρτησης $v(t)$ ορίζεται από το ολοκλήρωμα

$$U(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t) e^{j\omega t} dt, \quad (\Delta.1)$$

όπου $j^2 = -1$ και ω η μεταβλητή του μετασχηματισμού. Ο αντίστροφος μετασχηματισμός ορίζεται αντίστοιχα ως

$$v(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} U(\omega) e^{-j\omega t} d\omega. \quad (\Delta.2)$$

Για περισσότερες λεπτομέρειες στο μετασχηματισμό Fourier μπορεί κάποιος να συμβουλευτεί το βιβλίο του Sneddon [10].

Στην παρούσα διδακτορική διατριβή η συνάρτηση v είναι πάντα πραγματική, με t να είναι ο χρόνος σε sec, της οποίας ο μετασχηματισμός Fourier δίδει τους μιγα-

δικούς συντελεστές U ως συνάρτηση της γωνιακής συχνότητας ω σε rad/sec ή της κυκλικής συχνότητας $f = \frac{\omega}{2\pi}$ σε Hz .

Μερικές σημαντικές μαθηματικές ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier είναι οι εξής

$$v(\alpha t) \Longleftrightarrow \frac{1}{|\alpha|} U(f/\alpha) \quad (\Delta.3)$$

$$\frac{1}{|\beta|} v(t/\beta) \Longleftrightarrow U(\beta f) \quad (\Delta.4)$$

$$v(t - t_o) \Longleftrightarrow U(f) e^{j2\pi f t_o} \quad (\Delta.5)$$

$$v(t) e^{-j2\pi f_o t} \Longleftrightarrow U(f - f_o), \quad (\Delta.6)$$

όπου το σύμβολο « $\Longleftrightarrow$ » υποδεικνύει τον αμφίδρομο μετασχηματισμό. Η ιδιότητα της Εξ. (Δ.3) ονομάζεται κλιμάκωση στον χρόνο ενώ η Εξ. (Δ.4) κλιμάκωση στη συχνότητα, και οι Εξ. (Δ.5), (Δ.6) ονομάζονται μετατόπιση στον χρόνο και στη συχνότητα αντίστοιχα.

Η συνολική «ισχύς» P σε μία συνάρτηση-σήμα υπολογίζεται το ίδιο στο πραγματικό πεδίο του χρόνου και στο φανταστικό πεδίο των συχνοτήτων μέσω του θεωρήματος του Parseval

$$P \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} |v(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |U(f)|^2 df. \quad (\Delta.7)$$

Εάν τώρα κάποιος επιθυμεί να υπολογίσει την ισχύ του σήματος σε ένα στενό φάσμα των θετικά ορισμένων συχνοτήτων μπορεί να κάνει χρήση της μονόπλευρης φασματικής ισχύος για τη συνάρτηση v μέσω της

$$P_h \equiv |U(f)|^2 + |U(-f)|^2, \quad 0 \leq f < +\infty, \quad (\Delta.8)$$

όπου για την πραγματική συνάρτηση v ισχύει η ειδική σχέση: $P_h = 2|U(f)|^2$.

Έστω η ίδια συνάρτηση $v(t)$ στον χρόνο, της οποίας λαμβάνονται N_s δείγματα όπου η χρονική απόσταση διαδοχικών δειγμάτων είναι σταθερή και ισούται με Δt , δηλαδή $t_k = k \Delta t$, $k = 0, 1, 2, \dots, N_s$.

Για κάθε επιλογή του χρονικού βήματος δειγματοληψίας Δt υπάρχει μία ξεχωριστή συχνότητα, ονομαζόμενη κρίσιμη συχνότητα του Nyquist που ισούται με

$$f_c = \frac{1}{2\Delta t}. \quad (\Delta.9)$$

Η παραπάνω σχέση εκφράζει ότι για την κρίσιμη δειγματοληψία ενός ημιτονοειδούς παλμού απαιτούνται τουλάχιστον δύο δείγματα ανά κύκλο του παλμού. Συγκεκριμένα, όταν η συχνότητα δειγματοληψίας $1/\Delta t$ είναι μεγαλύτερη της κρίσιμης συχνότητας του Nyquist τότε επιτυγχάνεται σωστή εφαρμογή του μετασχηματισμού Fourier της χρονοσειράς. Σε κάθε άλλη περίπτωση το αποτέλεσμα του μετασχηματισμού αυτού είναι λανθασμένο, φαινόμενο που ονομάζεται στην αγγλική γλώσσα ως

«aliasing» [7]. Η Εξ. (Δ.9) συχνά αναφέρεται στη διεθνή βιβλιογραφία ως θεώρημα δειγματοληψίας (sampling theorem).

Σχήμα Δ.1: (α') Η χρονοσειρά v με (β') το πραγματικό φασματικό διαγραμμα των συντελεστών Fourier U και (γ') το ίδιο διάγραμμα στο διάστημα των κρίσιμων συχνοτήτων Nyquist όταν είναι χαμηλή η συχνότητα δειγματοληψίας.

Στο Σχ. Δ.1(α') φαίνεται το χρονικό σήμα του οποίου έχουν ληφθεί δείγματα με χρονική απόσταση Δt , ενώ στο Σχ. Δ.1(β') παρατίθεται το πραγματικό διάγραμμα του φάσματος. Λόγω του ότι η συχνότητα δειγματοληψίας είναι χαμηλότερη της κρίσιμης συχνότητας του Nyquist τότε το σήμα αναλύεται στην περιοχή συχνοτήτων $[-f_c, f_c]$ (βλ. Σχ. Δ.1(γ')) γεγονός που οδηγεί στην αναδίπλωση των υψηλότερων συχνοτήτων (λεπτές διακεκομμένες γραμμές) και έτσι υλοποιείται εσφαλμένος μετασχηματισμός Fourier (παχιές γραμμές).

Αν υποτεθεί ότι στη συνάρτηση $v(t)$ λαμβάνονται N_s δείγματα, οι πεπερασμένοι τον αριθμό μιγαδικοί συντελεστές Fourier ($U(\omega)$) στο μιγαδικό πεδίο μπορούν να υπολογιστούν σύμφωνα με το άθροισμα

$$U(f) = \sum_{k=0}^{N_s-1} v(t_k) e^{-2\pi j \frac{f t_k}{N_s}}. \quad (\Delta.10)$$

Η παραπάνω σχέση ορίζει το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier (DMF), του οποίου ο αντίστροφος Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier επιτυγχάνεται μέσω της σχέσης

$$v(t) = \frac{1}{N_s} \sum_{k=0}^{N_s-1} U(f_k) e^{2\pi j \frac{f_k t}{N_s}}. \quad (\Delta.11)$$

Στην ειδική περίπτωση που ο αριθμός των δειγμάτων των συναρτήσεων $v(t)$ ή $U(\omega)$ είναι δύναμης του δύο ($N_s = 2^\beta$) τότε μπορεί κάποιος να κάνει χρήση του Ταχέως DMF (Discrete Fast Fourier Transform), αλγόριθμος που αναπτύχθηκε από τους Cooley και Tukey [4]. Το χαρακτηριστικό που κάνει τον Ταχύ DMF από υπολογιστικής άποψης πιο ελκυστικό είναι ότι απαιτεί αριθμό πράξεων της τάξης $\mathcal{O}(N_s \log_2 N_s)$ σε αντίθεση με τον κλασικό αλγόριθμο που απαιτεί αριθμό πράξεων της τάξης $\mathcal{O}(N_s^2)$. Επίσης, λόγω της συμμετρίας των συντελεστών του Ταχέως DMF για πραγματική συνάρτηση σήματος, χρειάζεται η αποθήκευση μονάχα των $N_s/2 + 1$ συντελεστών άρα επομένως και της επίλυσης των αριθμητικών προβλημάτων που πραγματεύεται η παρούσα διδακτορική διατριβή στις μισές σχεδόν αρμονικές συχνότητες.

Μέχρι τώρα περιγράφηκε ο μετασχηματισμός Fourier μίας σειράς-λίστας δεδομένων, όμως πέραν αυτού υπάρχει και ο διδιάστατος Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier. Συγκεκριμένα, ο διδιάστατος μετασχηματισμός Fourier εφαρμόζεται μετά από το μετασχηματισμό κάθε σειράς ενός πίνακα δεδομένων και αντιστοιχώντας στην κάθε σειρά τη μετασχηματισμένη λίστα συντελεστών Fourier· έπειτα μετασχηματίζεται κάθε στήλη και αυτή από τη μεριά της αντικαθιστάται από τη μετασχηματισμένη στήλη.

Η γενική εξίσωση που μπορεί να εκφράσει το διδιάστατο DMF είναι η εξής

$$U(f, \lambda) = \sum_{k=0}^{N_s-1} \sum_{l=0}^{M_s-1} v(t_k, x_l) e^{-2\pi j (\frac{f t_k}{N_s} + \frac{\lambda x_l}{M_s})}, \quad (\Delta.12)$$

με τον αντίστροφο μετασχηματισμό να είναι ο εξής

$$v(t, x) = \frac{1}{N_s M_s} \sum_{k=0}^{N_s-1} \sum_{l=0}^{M_s-1} U(f_k, \lambda_l) e^{2\pi j (\frac{f_k t}{N_s} + \frac{\lambda_l x}{M_s})}. \quad (\Delta.13)$$

Απλά παραδείγματα εφαρμογής του διδιάστατου DMF παρατίθεται στο ακόλουθο Σχ. Δ.2. Στο Σχ. Δ.2(α') παρουσιάζεται ο διδιάστατος μετασχηματισμός Fourier μίας χρουστικής συνάρτησης Dirac από τον χώρο-χρόνο στο αντίστοιχο πεδίο μήκους κύματος-συχνότητας, που αποτέλεσμά της είναι μία σταθερή συνάρτηση σε όλο

το φάσμα του μιγαδικού πεδίου. Όμοια στο Σχ. Δ.2(β') παρουσιάζεται ο διδιάστατος μετασχηματισμός Fourier μίας σειράς χροστικών συναρτήσεων που δίδει μία αντίστοιχη σειρά χροστικών συναρτήσεων στο μετασχηματισμένο πεδίο.

Σχήμα Δ.2: Διδιάστατος μετασχηματισμός Fourier (α') μίας χροστικής συνάρτησης και (β') μίας σειράς χροστικών συναρτήσεων στον χώρο-χρόνο.

Σημαντικό εγχειρίδιο για αναφορά στον αλγόριθμο του Διακριτού Μετασχηματισμού Fourier είναι το βιβλίο [9], ενώ παράλληλα έτοιμες υπορουτίνες υπάρχουν στην επιστημονική βιβλιοθήκη GNU Scientific Library [6]. Στο διαδίκτυο υπάρχουν διαθέσιμα πάρα πολλά έτοιμα προγράμματα ανοιχτού κώδικα για τον ευθύ και τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier. Από αυτά έχει διακριθεί από το συγγραφέα της παρούσας διατριβής σαν το καλύτερο το πρόγραμμα FFTW¹ από τους Frigo και Johnson, το οποίο καλύπτει ένα ευρύ φάσμα αλγορίθμων μετασχηματισμών Fourier.

Δ.2 Αναπαράσταση Χρόνου-Συχνότητας

Η γενική εξίσωση μίας κατανομής χρόνου-συχνότητας $U(t, f)$ κατά τον Cohen [3, 5] για ένα χρονικά μεταβαλλόμενο σήμα $v(t)$ δίδεται από τη σχέση

$$U(t, f) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi j(\phi\theta - \phi t - \tau f)} g(\phi, \tau) \bar{v}(\theta - \tau/2) v(\theta + \tau/2) d\phi d\theta d\tau, \quad (\Delta.14)$$

όπου $g(\phi, \tau)$ μία αυθαίρετα επιλεγμένη συνάρτηση ονομαζόμενη πυρήνας και $\bar{v}$ η μιγαδική συζυγής της συνάρτησης.

¹βλ. ιστοσελίδα: <http://www.fftw.org/>

Για την κατανομή Wigner [13], η οποία εξετάζεται σε βάθος στην εργασία [12], ο πυρήνας έχει τιμή ίση με τη μονάδα, επομένως η Εξ. (Δ.14) μπορεί να γραφτεί αλλιώς

$$U(t, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi j \tau f} \bar{v}(t - \tau/2) v(t + \tau/2) d\tau. \quad (\Delta.15)$$

Η διακριτή κατανομή Wigner όμως παρουσιάζει μερικά μειονεκτήματα στην χρήση της. Για την αποφυγή του φαινομένου της αναδίπλωσης (aliasing) χρειάζεται συχνότητα δειγματοληψίας τέσσερις φορές τουλάχιστον της μέγιστης συχνότητας που περιέχει το σήμα, σε αντίθεση με το ΔMF που απαιτείται τουλάχιστον διπλάσια συχνότητα δειγματοληψίας με βάση το κριτήριο του Nyquist. Επιπλέον η κατανομή Wigner παράγει πολύπλοκα και μερικές φορές λανθασμένα αποτελέσματα όταν περισσότερες της μίας είναι οι αρμονικές συνιστώσες του σήματος που μελετάται. Το τελευταίο ανεπιθύμητο χαρακτηριστικό είναι ότι η κατανομή μπορεί να πάρει αρνητικές τιμές οι οποίες δεν έχουν κάποιο φυσικό νόημα, κάτι που συμβαίνει συχνά όταν υπάρχει συσχέτιση πολλών αρμονικών συνιστωσών [1, 8].

Για να ξεπεραστούν τα παραπάνω εμπόδια υπάρχει η λύση της διακριτοποίησης του σήματος στο υψηλότερο δυνατό σημείο, γεγονός που μερικές φορές είναι μη πρακτικό από υπολογιστικής άποψης. Μία άλλη λύση προτάθηκε από τον Ville [11] σύμφωνα με την οποία ο υπολογισμός της κατανομής Wigner πραγματοποιείται μέσω της χρήσης ενός αναλυτικού σήματος. Το αναλυτικό σήμα είναι ένα μιγαδικό σήμα του οποίου το πραγματικό μέρος είναι το σήμα που αναλύεται και το φανταστικό μέρος είναι ο μετασχηματισμός Hilbert του σήματος αυτού. Όταν η κατανομή Wigner εφαρμόζεται στο αναλυτικό σήμα τότε απαιτείται η ικανοποίηση του κριτηρίου του Nyquist για την αποφυγή του φαινομένου της αναδίπλωσης των υψηλών συχνοτήτων [2] και το αποτέλεσμα της Αναπαράστασης Χρόνου-Συχνότητας (ΑΧΣ) ονομάζεται κατανομή Wigner-Ville.

Για την ελαχιστοποίηση του φαινομένου της αλληλεπίδρασης των αρμονικών συνιστωσών σε ένα σήμα καθώς και την απαλοιφή του θορύβου σε αυτό μπορεί κάποιος να χρησιμοποιήσει ειδικές συναρτήσεις εξομάλυνσης του σήματος μέσω της εισαγωγής τους στον πυρήνα g . Τότε η κατανομή Wigner-Ville ονομάζεται πλέον εξομαλυσμένη ψευδής κατανομή Wigner-Ville, της οποίας ο πυρήνας έχει τη μορφή

$$g(\phi, \tau) = G(\phi) h(\tau), \quad (\Delta.16)$$

όπου $G(\phi)$ είναι μία συνάρτηση-παραθύρου εξομάλυνσης στη συχνότητα και $h(\tau)$ η συνάρτηση-παραθύρου εξομάλυνσης στο χρόνο. Στην παρούσα διδακτορική διατριβή χρησιμοποιήθηκε η συνάρτηση-παραθύρου τύπου Hamming, η οποία εκφράζεται μέσω της σχέσης

$$w_k = 0.54 - 0.46 \cos\left(2\pi \frac{k-1}{n-1}\right), \quad k = 1, \dots, n. \quad (\Delta.17)$$

Η συνάρτηση αυτή χρησιμοποιήθηκε για τη συνάρτηση-παραθύρου εξομάλυνσης της

συχνότητας και του χρόνου, όπου $n = N_s/10$, με N_s να είναι ο αριθμός των δειγμάτων του σήματος που μελετάται.

Σχήμα Δ.3: Αναπαράσταση Χρόνου-Συχνότητας ενός σήματος σύμφωνα με (α') την Εξομαλυμένη Ψευδή κατανομή Wigner-Ville και (β') την Επαναπροσδιορισμένη Εξομαλυμένη Ψευδή κατανομή Wigner-Ville.

Η επιπλέον βελτίωση της ανάλυσης στο πεδίο του χρόνου-συχνότητας μπορεί να επιτευχθεί μέσω της επαναπροσδιορισμένης διατύπωσης της εξομαλυμένης ψευδούς κατανομής των Wigner-Ville

$$U_r(t', f') = \iint_{-\infty}^{+\infty} U(t, f) \delta(t' - \check{t}) \delta(f' - \check{f}) dt df, \quad (\Delta.18)$$

όπου $\delta(\cdot)$ η χροστική συνάρτηση του Dirac. Οι μετασχηματισμένες συνιστώσες του χρόνου και της συχνότητας για κάθε ζευγάρι (t, f) στην αρχική εξομαλυμένη ψευδή κατανομή Wigner-Ville είναι οι εξής

$$\check{t}(t, f) = t - \frac{1}{2\pi} \frac{U_T(t, f)}{U_H(t, f)}, \quad (\Delta.19)$$

$$\check{f}(t, f) = f + \frac{j}{2\pi} \frac{U_D(t, f)}{U_H(t, f)}, \quad (\Delta.20)$$

όπου U_H , U_T και U_D είναι οι εξομαλυμένες ψευδείς κατανομές Wigner-Ville με συναρτήσεις παραθύρου $h(t)$, $t \cdot h(t)$ και $dh(t)/dt$ αντίστοιχα.

Στο Σχ. Δ.3(α') παρουσιάζεται ενδεικτικά η Αναπαράσταση Χρόνου-Συχνότητας ενός σήματος στον χρόνο, το οποίο έχει φάσμα ισχύος μορφής καμπάνας όπως αυτό φαίνεται στο αριστερό μέρος του κάθε σχήματος, σύμφωνα με την Εξομαλυμένη Ψευδή κατανομή Wigner-Ville και στο Σχ. Δ.3(β') σύμφωνα με την Επαναπροσδιορισμένη Εξομαλυμένη Ψευδή Κατανομή Wigner-Ville. Από το Σχ. Δ.3 μπορεί εύκολα να παρατηρηθεί ότι η πρώτη κατανομή είναι ευαίσθητη στους όρους συσχέτισης που προκύπτουν, με αποτέλεσμα η κατανομή να είναι πιο ευρής και λιγότερο ευκρινής, σε αντίθεση με το δεύτερο αλγόριθμο Αναπαράστασης Χρόνου-Συχνότητας

που είναι περισσότερο λεπτομερές στο στενό φάσμα των συχνοτήτων από 27 kHz έως 73 kHz περίπου.

Στην παρούσα διδακτορική διατριβή η Επαναπροσδιορισμένη Εξομαλυμένη Ψευδής κατανομή των Wigner-Ville (reassigned smoothed pseudo Wigner-Ville distribution) της Εξ. (Δ.18) χρησιμοποιείται για την Αναπαράσταση Χρόνου-Συχνότητας των σημάτων που μελετώνται. Η υλοποίηση της μεθόδου αυτής έγινε με χρήση κατάλληλης εργαλειοθήκης υπορουτινών του εμπορικού προγράμματος MATLAB².

²βλ. ιστοσελίδα: <http://www.matlab.com>

Βιβλιογραφία

- [1] Bayram M, Baraniuk R (2000): *Multiple Window Time-Varying Spectrum Estimation*. Cambridge University Press.
- [2] Boashsah B (1988): Note on the use of the Wigner distribution for time-frequency signal analysis. *IEEE Transactions of Acoustics, Speech and Signal Processing*, **36**, 1518–1521.
- [3] Cohen L (1995): *Time-Frequency Analysis*. Prentice-Hall.
- [4] Cooley JW, Tukey JW (1965): An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series. *Mathematics of Computations*, **19**, 297–301.
- [5] Flandrin P (1999): *Time-Frequency and Time-Scale Analysis*. Academic Press.
- [6] Galassi M, Davies J, Theiler J, Gough B, Jungman G, Booth M, Rossi F (2005): *GNU Scientific Library; Reference Manual*.
<http://www.gnu.org/software/gsl/>.
- [7] Lathi BP (1992): *Linear Systems and Signals*. Berkeley-Cambridge Press.
- [8] Niethammer M, Jacobs LJ, Qu J, Jarzynski J (2001): Time-frequency representations of Lamb waves. *Journal of the Acoustical Society of America*, **109**, 1841–1847.
- [9] Press WH, Teukolsky SA, Vetterling WT, Flannery BP (1992): *Numerical Recipes in C; The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press.
- [10] Sneddon IA (1951): *Fourier Transforms*. McGraw-Hill.
- [11] Ville J (1948): Théorie et Applications de la Notion de Signal Analytique. *Cables et Transmission*, **2a**, 61–74.
- [12] Wahl TJ, Bolton JS (1993): The application of the Wigner distribution to the indentification of structure-borne noise components. *Journal of Sound and Vibration*, **163**, 101–122.

- [13] Wigner E (1932): On the Quantum Correction for Thermodynamic Equilibrium. *Physics Review*, **40**, 749–759.

Παράρτημα Ε

Αποτελέσματα κυματικής διάδοσης στη δεξαμενή αποθήκευσης καυσίμων

Σε αυτό το παράρτημα πρόκειται να παρουσιαστούν τα αποτελέσματα της κυματικής διάδοσης των ελαστικών διαταραχών που διαδίδονται στη δεξαμενή αποθήκευσης καυσίμων του Εδάφ. 5.2, σε μορφή κυματομορφών. Συγκεκριμένα σε κάθε σχήμα που ακολουθεί παρατίθεται ένα συγκριτικό διάγραμμα των κυματομορφών, δηλαδή της συνιστώσας των μετατοπίσεων κάθετης στην εξωτερική επιφάνεια της δεξαμενής που βρίσκεται το εκάστοτε σημείο παρατήρησης-καταγραφής του κύματος. Όπως περιγράφεται αναλυτικά στο Κεφ. 5 οι περιπτώσεις που εξετάζονται είναι: η δεξαμενή να είναι άδεια, να περιέχει πετρέλαιο και τέλος να περιέχει πετρέλαιο με εμφάνιση ενός λεπτού στρώματος ιζήματος. Επίσης τα αποτελέσματα παρουσιάζονται για τους τέσσερις τύπους δεξαμενών (βλ. Πίν. 5.3) και για τις τρεις διαφορετικές συναρτήσεις διέγερσης παραθύρου τύπου Hanning με κεντρική συχνότητα στα 150 kHz, 300 kHz και 50 kHz αντίστοιχα.

Ε.1 Κυματομορφές αριθμητικής προσομοίωσης πειράματος Ακουστικής Εκπομπής

Στο Σχ. Ε.1 παρουσιάζονται οι κυματομορφές, των κάθετων στην επιφάνεια της δεξαμενής στην οποία ανήκει κάθε σημείο παρατήρησης, συνιστωσών των μετατοπίσεων των σημείων Α, Γ και Δ ως συνάρτηση του χρόνου εξέλιξης του μεταβατικού φαινομένου της κυματικής διάδοσης. Η συνάρτηση διέγερσης έχει κεντρική συχνότητα τα 150 kHz. Στα Σχ. Ε.1(α'), Ε.1(β') παρατίθεται η απόκριση του σημείου Α, στα Σχ. Ε.1(γ'), Ε.1(δ') του σημείου Γ και στα Σχ. Ε.1(ε'), Ε.1(ς') του σημείου Δ για τις δεξαμενές τύπου Ι και ΙΙ αντίστοιχα.

Όμοια στο Σχ. Ε.2 παρουσιάζονται οι κυματομορφές, των κάθετων στην επιφάνεια της δεξαμενής στην οποία ανήκει κάθε σημείο παρατήρησης, συνιστωσών των

Σχήμα Ε.1: Χρονικό διάγραμμα μετατοπίσεων (α'), (β') του σημείου Α, (γ'), (δ') του σημείου Γ και (ε'), (ζ') του σημείου Δ στα 150 kHz κεντρική συχνότητα της διέγερσης για τις δεξαμενές τύπου Ι και ΙΙ αντίστοιχα, με σύγκριση των αποτελεσμάτων όταν είναι άδεια, περιέχει πετρέλαιο και όταν παρουσιάζει ίζημα.

Σχήμα Ε.2: Χρονικό διάγραμμα μετατοπίσεων (α'), (β') του σημείου Α, (γ'), (δ') του σημείου Γ και (ε'), (ς') του σημείου Δ στα 300 kHz κεντρική συχνότητα της διέγερσης για τις δεξαμενές τύπου Ι και ΙΙ αντίστοιχα, με σύγκριση των αποτελεσμάτων όταν είναι άδεια, περιέχει πετρέλαιο και όταν παρουσιάζει ίζημα.

Σχήμα Ε.3: Χρονικό διάγραμμα μετατοπίσεων (α'), (β') του σημείου Α, (γ'), (δ') του σημείου Γ και (ε'), (ζ') του σημείου Δ στα 150 kHz κεντρική συχνότητα της διέγερσης για τις δεξαμενές τύπου ΙΙΙ και ΙV αντίστοιχα, με σύγκριση των αποτελεσμάτων όταν είναι άδεια, περιέχει πετρέλαιο και όταν παρουσιάζει ίζημα.

Σχήμα Ε.4: Χρονικό διάγραμμα μετατοπίσεων (α'), (β') του σημείου Α, (γ'), (δ') του σημείου Γ και (ε'), (ζ') του σημείου Δ στα 300 kHz κεντρική συχνότητα της διέγερσης για τις δεξαμενές τύπου ΙΙΙ και ΙV αντίστοιχα, με σύγκριση των αποτελεσμάτων όταν είναι άδεια, περιέχει πετρέλαιο και όταν παρουσιάζει ίζημα.

Σχήμα Ε.5: Χρονικό διάγραμμα μετατοπίσεων (α'), (β') του σημείου Α, (γ'), (δ') του σημείου Γ και (ε'), (ζ') του σημείου Δ στα 50 kHz κεντρική συχνότητα της διέγερσης για τις δεξαμενές τύπου Ι και ΙΙ αντίστοιχα, με σύγκριση των αποτελεσμάτων όταν είναι άδεια, περιέχει πετρέλαιο και όταν παρουσιάζει ίζημα.

Σχήμα Ε.6: Χρονικό διάγραμμα μετατοπίσεων (α'), (β') του σημείου Α, (γ'), (δ') του σημείου Γ και (ε'), (ζ') του σημείου Δ στα 50 kHz κεντρική συχνότητα της διέγερσης για τις δεξαμενές τύπου ΙΙΙ και ΙV αντίστοιχα, με σύγκριση των αποτελεσμάτων όταν είναι άδεια, περιέχει πετρέλαιο και όταν παρουσιάζει ίζημα.

μετατοπίσεων των σημείων A, Γ και Δ ως συνάρτηση του χρόνου μελέτης της κυματικής διάδοσης στη δεξαμενή. Συγκεκριμένα στα Σχ. E.2(α'), E.2(β') παρουσιάζεται η απόκριση του σημείου A, στα Σχ. E.2(γ'), E.2(δ') του σημείου Γ και στα Σχ. E.2(ε'), E.2(ς') του σημείου Δ για τις δεξαμενές τύπου I και II αντίστοιχα, όταν η κεντρική συχνότητα της συνάρτησης διέγερσης είναι 300 kHz.

Επίσης στα Σχ. E.3(α'), E.3(β') παρατίθεται η απόκριση του σημείου A, στα Σχ. E.3(γ'), E.3(δ') του σημείου Γ και στα Σχ. E.3(ε'), E.3(ς') του σημείου Δ για τις δεξαμενές τύπου III και IV αντίστοιχα, όταν το τασικό φορτίο που απελευθερώνεται λόγω διάδοσης ρωγμής στο εσωτερικό έγκλεισμα έχει κεντρική συχνότητα στα 150 kHz.

Στα Σχ. E.4(α'), E.4(β') παρουσιάζεται η απόκριση του σημείου A, στα Σχ. E.4(γ'), E.4(δ') του σημείου Γ και στα Σχ. E.4(ε'), E.4(ς') του σημείου Δ για τις δεξαμενές τύπου III και IV αντίστοιχα, όταν το τασικό φορτίο που εφαρμόζεται λόγω διάδοσης της ρωγμής έχει κεντρική συχνότητα στα 300 kHz.

Τέλος στο Σχ. E.5 και στο Σχ. E.6 παρουσιάζονται οι κυματομορφές των συνιστωσών των μετατοπίσεων των ίδιων σημείων A, Γ και Δ ως συνάρτηση του χρόνου εξέλιξης του μεταβατικού φαινομένου της κυματικής διάδοσης στις δεξαμενές των τύπων I, II και III, IV αντίστοιχα.

Στα επιμέρους διαγράμματα των κυματομορφών του κάθε σχήματος γίνεται σύγκριση των αποκρίσεων για τις τρεις περιπτώσεις που η δεξαμενή που μελετάται είναι άδεια, έχει περιεχόμενο πετρελαίου και όταν περιέχει πετρέλαιο με παρουσία ενός ενδιάμεσου στρώματος ιζήματος αργού πετρελαίου. Για μεγαλύτερη κατανόηση από τον αναγνώστη του μέγιστου πλάτους των κυμάτων υιοθετήθηκε σχεδόν σε όλα τα διαγράμματα η ίδια κλίμακα στον κάθετο άξονα των συνιστωσών των μετατοπίσεων.